



ĐỀ ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ II NĂM HỌC 2025 – 2026

MÔN: TOÁN 11

ĐỀ SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Chọn khẳng định **sai**?

- A. Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng ấy.
- B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .
- C. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a .
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng song song với nhau.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB vuông tại A , $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 3: Chọn khẳng định **đúng**?

- A. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 180° .
- B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .
- C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) , đều vuông góc với bất cứ đường thẳng b nào nằm trong mặt phẳng (Q) .
- D. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

Câu 4: Cơ số của hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ là

- A. 2.
- B. $\frac{1}{2}$.
- C. 1.
- D. 2^x .

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = \log(x^2 - 3x + 2)$ là

- A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
- B. $D = (1; 2)$.
- C. $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.
- D. $D = [1; 2]$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức sau: $A = \log_a(bc) - \log_a\left(\frac{b}{a}\right) + \log_a\left(\frac{a}{c}\right)$ với $a, b, c > 0, a \neq 1$.

- A. $A = 0$.
- B. $A = 1$.
- C. $A = a$.
- D. $A = 2$.

Câu 7: Cho a là số thực dương. Rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ bằng

- A. $a^{\frac{2}{3}}$.
- B. $a^{\frac{1}{3}}$.
- C. $a^{\frac{5}{6}}$.
- D. $a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 8: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-5x-7} = 1$ là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

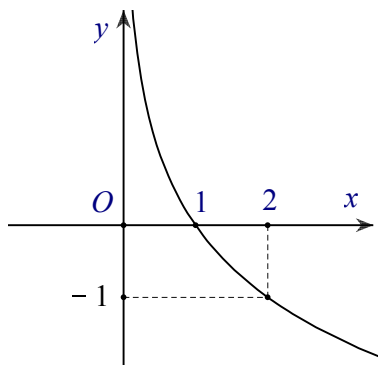
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $AB \perp (SBC)$. D. $AC \perp (SBC)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

- A. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$. B. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 11: Cho đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



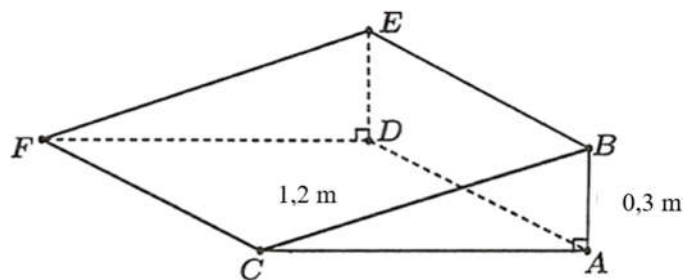
- A. $y = \log_4 x$. B. $y = \log_{0,25} x$. C. $y = \frac{-1}{2}x$. D. $y = \log_{0,5} x$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = (a^2 - 4a - 4)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $a \in (-\infty; 5)$. B. $a \in (-1; +\infty)$.
C. $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$. D. $a \in (-1; 5)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một tấm cầu dốc kê bậc thêm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $ABED$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = 0,3m$ và $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1,2m$. Khi đó:



- a) $\sin \widehat{BCA} = 0,5$.
b) $ED \perp (ACFD)$.
c) $BF = \sqrt{2}m$.
d) Gọi α là góc giữa đường thẳng BF và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng $(ACFD)$.
Giá trị $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{20}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 2^{x+1} - \log_3 x$.

- a) $f(1) = 4$.
b) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.
c) $f(5) > f(8)$.
d) Hàm số $h(x) = 2^{x+1} - f(x)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a, AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính góc giữa đường thẳng SD và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng (SAC) (làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị độ).

Câu 2: Trong Vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được tính theo công thức $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ, $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau thời gian t , k là hằng số phóng xạ phụ thuộc vào từng loại chất. Biết chu kỳ bán rã của ^{14}C là khoảng 5730 năm (tức là một lượng ^{14}C sau 5730 năm thì còn lại một nửa). Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được là nó đã mất đi khoảng 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ vật có tuổi là bao nhiêu?

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SC \perp (ABCD)$ và $SB = 3a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và DC .

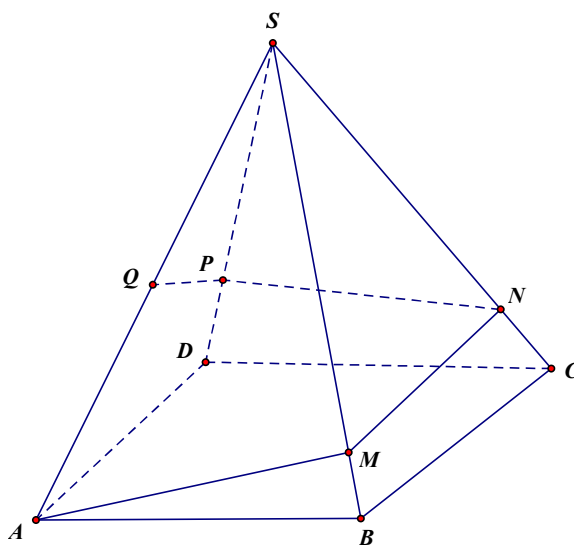
Câu 2: Giải phương trình $\sqrt{3} \cdot 3^{3x+1} = 27$

Câu 3: Giải bất phương trình $2^{x^2-4x+5} > \frac{1}{4}$

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa AG và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt $(ABCD)$ (Tính theo đơn vị độ).

Câu 5: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) , (SBC) bằng 60° . Tính độ dài cạnh SA (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 6: Đèn trang trí ở công viên Văn Minh có dạng hình chóp tứ giác đều. Cạnh bên có chiều dài $2m$, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 15° . Ban tổ chức muốn trang trí đèn Led một vòng quanh hình chóp từ vị trí A đến vị trí Q là trung điểm của SA (tham khảo hình vẽ). Biết $1m$ đèn Led có giá 2 000 000 đồng. Hỏi chi phí thấp nhất để lắp đèn Led bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Chọn khẳng định **sai**?

A. Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng ấy.

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

C. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a .

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng song song với nhau.

Lời giải

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB vuông tại A , $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Vì $AB \parallel CD$ nên $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 3: Chọn khẳng định **đúng**?

A. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 180° .

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) , đều vuông góc với bất cứ đường thẳng b nào nằm trong mặt phẳng (Q) .

D. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

Câu 4: Hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ có cơ số là

A. 2.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2^x .

Lời giải

Ta có $y = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ có cơ số là $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = \log(x^2 - 3x + 2)$ là

A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = (1; 2)$.

C. $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $D = [1; 2]$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$.

Tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức sau: $A = \log_a(bc) - \log_a\left(\frac{b}{a}\right) + \log_a\left(\frac{a}{c}\right)$ với $a, b, c > 0, a \neq 1$.

A. $A = 0$,

B. $A = 1$.

C. $A = a$.

D. $A = 2$.

Lời giải

$$A = \log_a(bc) - \log_a\left(\frac{b}{a}\right) + \log_a\left(\frac{a}{c}\right) = \log_a\left(bc \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}\right) = \log_a(a^2) = 2.$$

Câu 7: Cho a là số thực dương. Rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}$.

B. $a^{\frac{1}{3}}$.

C. $a^{\frac{5}{6}}$.

D. $a^{\frac{7}{6}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}.$$

Câu 8: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-5x-7} = 1$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3^{2x^2-5x-7} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

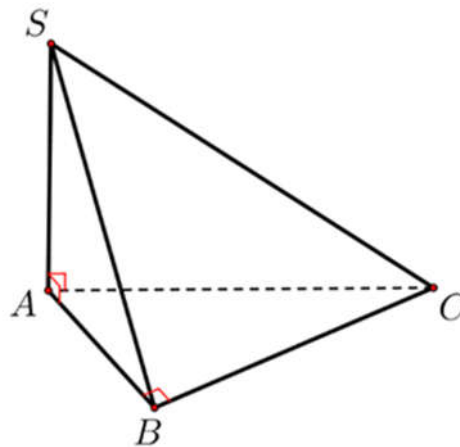
A. $BC \perp (SAC)$.

B. $BC \perp (SAB)$.

C. $AB \perp (SBC)$.

D. $AC \perp (SBC)$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. Lại có $AB \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAB)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Tính cosin của góc tạo bởi (SBC) và $(ABCD)$.

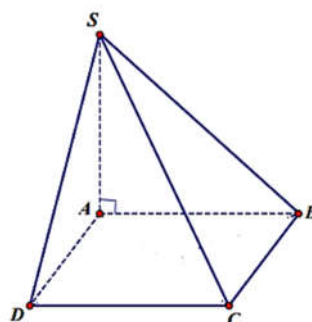
A. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

B. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải



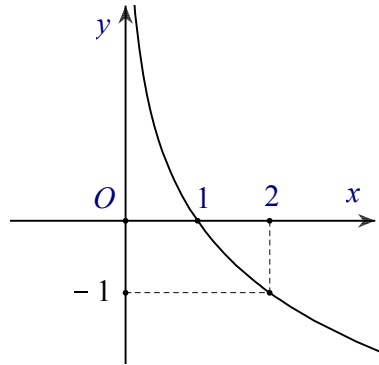
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Do đó $((SBC);(ABCD)) = (AB, SB) = \widehat{SBA}.$

Xét $\triangle SAB$ có $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{9a^2 + 4a^2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$

Vậy $\cos((SBC);(ABCD)) = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$

Câu 11: Cho đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \log_4 x.$ **B.** $y = \log_{0.25} x.$

C. $y = \frac{-1}{2}x.$

D. $y = \log_{0.5} x.$

Lời giải

Đường cong trong hình nằm hoàn toàn bên phải trục Oy nên đây là đồ thị của hàm số logarit.

Đồ thị đi xuống từ trái qua phải nên cơ số $0 < a < 1.$

Đồ thị đi qua điểm tọa độ $(2; -1)$ nên đây là đồ thị hàm số $y = \log_{0.5} x.$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = (a^2 - 4a - 4)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

A. $a \in (-\infty; 5).$

B. $a \in (-1; +\infty).$

C. $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty).$

D. $a \in (-1; 5).$

Lời giải

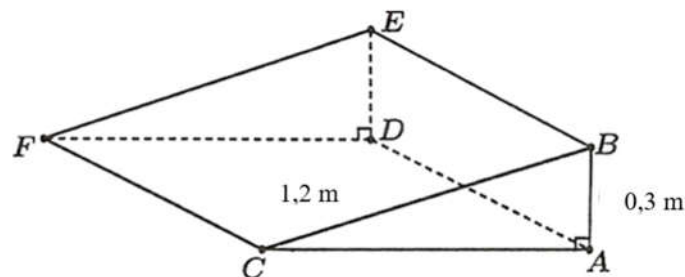
Hàm số $y = (a^2 - 4a - 4)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a - 4 > 1 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty).$

Vậy $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một tấm cầu dốc kê bậc thêm được làm bằng cao su như hình vẽ sau.



Biết $ABED$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = 0,3m$ và $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1,2m.$

Khi đó:

a) $\sin \widehat{BCA} = 0,5.$

b) $ED \perp (ACFD).$

c) $BF = \sqrt{2}m$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng BF và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng $(ACFD)$.

Giá trị $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{20}$.

Lời giải

a) Sai. Vì AC là hình chiếu của BC lên mặt phẳng $(ACFD)$

Nên góc giữa BC và mặt phẳng $(ACFD)$ là góc giữa BC và AC .

Vậy $(BC, AC) = \widehat{BCA}$

Tam giác ABC vuông tại A có: $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} = \frac{0,3}{1,2} = 0,25$.

b) Đúng. Ta có $\left. \begin{array}{l} ED \perp DF \\ ED \perp DA \end{array} \right\} \Rightarrow ED \perp (ACFD)$

c) Sai. Do $BEFC$ là hình vuông và BF là đường chéo nên $BF = BE\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}(m)$

d) Sai. Vì AF là hình chiếu của BF lên mặt phẳng $(ACFD)$

Tam giác ABF vuông tại A có: $\sin \widehat{BFA} = \frac{AB}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 2^{x+1} - \log_3 x$.

a) $f(1) = 4$.

b) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

c) $f(5) > f(8)$.

d) Hàm số $h(x) = 2^{x+1} - f(x)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng. Ta có: $f(1) = 2^{1+1} - \log_3 1 = 4$.

b) Đúng. Hàm số $\log_3 x$ chỉ xác định khi $x > 0$. Hàm số 2^{x+1} xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định của $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

c) Sai. Vì $f(5) = 2^6 - \log_3 5$; $f(8) = 2^9 - \log_3 8$
 $\Rightarrow f(5) < f(8)$

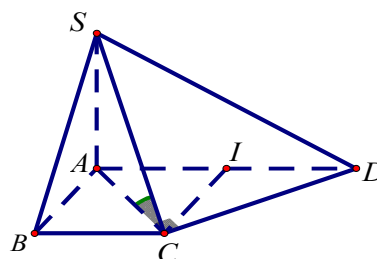
d) Đúng. Ta có: $h(x) = 2^{x+1} - f(x) = \log_3 x$ là hàm số loga có cơ số $a = 3 > 1$ với mọi $x > 0$.
 Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính góc giữa đường thẳng SD và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng (SAC) (làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị độ).

Lời giải

Đáp án: $26,6^\circ$



Ta có: $SC \cap (ABCD) = C$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là A

$\Rightarrow$ hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

$$AC \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$ và

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a.$$

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{6a^2 + 4a^2} = a\sqrt{10}$.

Gọi I là trung điểm của AD . Ta có $AI = \frac{1}{2}AD = a \Rightarrow AI = BC$. Lại có $AI \parallel BC$ nên $ABCI$ là

hình bình hành. Do đó $CI = AB = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.

Ta có $SD \cap (SAC) = S$ và hình chiếu của D trên mặt phẳng (SAC) là C

$\Rightarrow$ hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC) là $SC \Rightarrow (\widehat{SD, (SAC)}) = (\widehat{SD, SC}) = \widehat{DSC}$.

Xét tam giác SCD vuông tại C có $\cos \widehat{DSC} = \frac{SC}{SD} = \frac{2\sqrt{2}a}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \widehat{DSC} \approx 26,6^\circ$.

Câu 2: Trong Vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được tính theo công thức $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ, $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau thời gian t , k là hằng số phóng xạ phụ thuộc vào từng loại chất. Biết chu kỳ bán rã của ^{14}C là khoảng 5730 năm (tức là một lượng ^{14}C sau 5730 năm thì còn lại một nửa). Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được là nó đã mất đi khoảng 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ vật có tuổi là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 2378

$$\text{Ta có } m(t) = m_0 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt} = \frac{m(t)}{m_0} \Leftrightarrow -kt = \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right).$$

$$\text{Do chu kỳ bán rã của } ^{14}C \text{ là khoảng 5730 năm nên } k = -\frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right) = -\frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot m_0}{m_0} \right) = \frac{\ln 2}{5730}.$$

Mẫu đồ cổ có một lượng Cacbon và xác định được là nó đã mất đi khoảng 25% lượng Cacbon ban

$$\text{đầu của nó nên } m(t) = m_0 - 25\% \cdot m_0 = m_0 - \frac{1}{4} \cdot m_0 = \frac{3}{4} m_0 \Leftrightarrow \frac{m(t)}{m_0} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Mẫu đồ vật có tuổi là } t = -\frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right) = -\frac{5730}{\ln 2} \cdot \ln \left(\frac{3}{4} \right) \approx 2378.$$

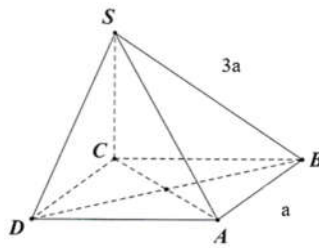
PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SC \perp (ABCD)$ và $SB = 3a$.

Tính góc giữa hai đường thẳng SA và DC .

Lời giải

Đáp án: $(SA, DC) \approx 71^\circ 33'$



Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow (SA, CD) = (SA, AB)$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CB \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB$

Xét tam giác SAB vuông tại B có: $\tan \widehat{SAB} = \frac{SB}{AB} = \frac{3a}{a} = 3 \Rightarrow \widehat{SAB} \approx 71^\circ 33'$

Vậy $(SA, CD) \approx 71^\circ 33'$.

Câu 2: Tìm nghiệm phương trình $\sqrt{3} \cdot 3^{3x+1} = 27$

Lời giải

Đáp án: $x = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{3} \cdot 3^{3x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{3x+1} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{3x+1} = 3^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$

Câu 3: Tìm nghiệm bất phương trình $2^{x^2-4x+5} > \frac{1}{4}$

Lời giải

Đáp án: $x \in \mathbb{R}$

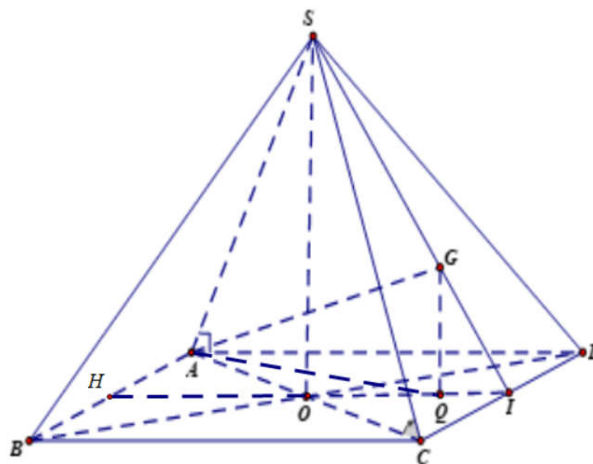
$$\text{Ta có: } 2^{x^2-4x+5} > \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow 2^{x^2-4x+5} > 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 > -2 \text{ (do } 2 > 1).$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa AG và hình chiếu vuông góc của nó lên $(ABCD)$ (Tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải



Kẻ GQ song song với SO . Suy ra $GQ \perp (ABCD)$.

Suy ra AQ là hình chiếu vuông góc của AG trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Xét tam giác vuông SOC vuông tại O , theo định lý Pytago, ta có

$$SO^2 + OC^2 = SC^2 \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{SC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SOI có GQ song song với SO , theo định lý Talet và do G là trọng tâm tam giác

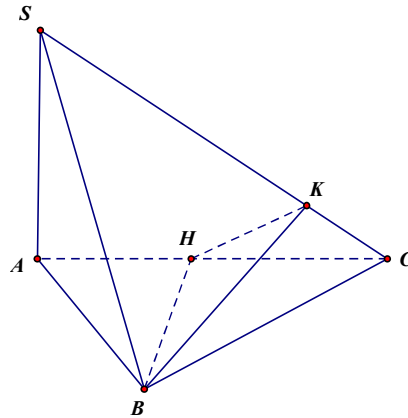
$$SCD \text{ nên suy ra } GQ = \frac{1}{3}SO = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Tính được } IQ = \frac{1}{3}OI = \frac{1}{6}, HQ = \frac{5}{6}, AH = \frac{1}{2} \Rightarrow AQ = \frac{\sqrt{34}}{6}.$$

$$\text{Do đó } \tan(\angle AG, (ABCD)) = \frac{GQ}{AQ} = \frac{\sqrt{17}}{17} \text{ hay } (\angle AQ, (ABCD)) \approx 14^\circ.$$

Câu 5: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) , (SBC) bằng 60° . Tính độ dài cạnh SA (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow BH \perp AC$.

Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$ (1).

Kẻ $HK \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$ (3).

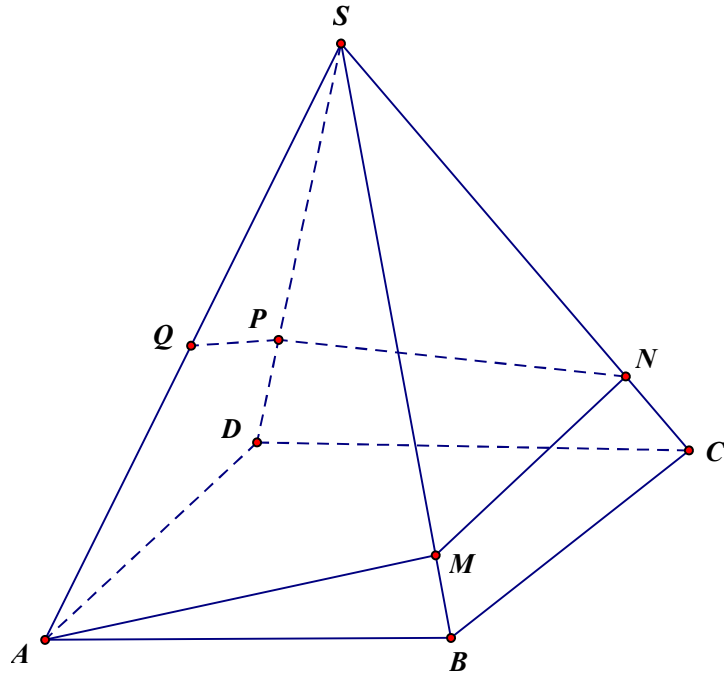
Từ (2) và (3) suy ra $((SAC); (SBC)) = \widehat{BKH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } BH = CH = \frac{AC}{2} = 1.$$

$$\text{Do } BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp HK \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BH}{HK} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin \widehat{HCK} = \frac{HK}{HC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + 4}} \Rightarrow SA = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

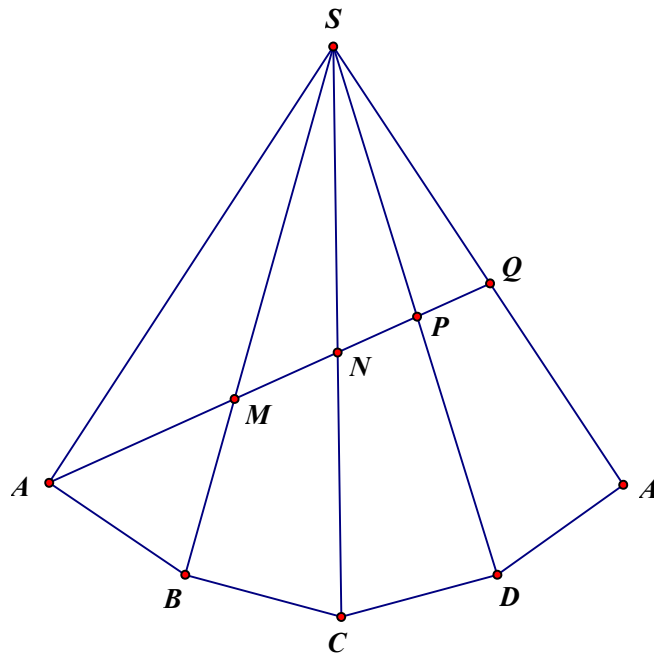
Câu 6: Đèn trang trí ở công viên Văn Minh có dạng hình chóp tứ giác đều. Cạnh bên có chiều dài $2m$, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 15° . Ban tổ chức muốn trang trí đèn Led một vòng quanh hình chóp từ vị trí A đến vị trí Q là trung điểm của SA (tham khảo hình vẽ). Biết $1m$ đèn Led có giá 2000000 đồng. Hỏi chi phí thấp nhất để lắp đèn Led bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



Lời giải

Ta sử dụng **phương pháp trải đa diện: (nghe thêm trên Youtube)**

Ta “trải” bốn mặt bên của hình chóp ra mặt phẳng như hình vẽ.



Khi đó độ dài đường gấp khúc $AMNPQ$ ngắn nhất khi A, M, N, P, Q thẳng hàng.

Theo bài ra ta có

$$\widehat{ASQ} = 60^\circ \Rightarrow AQ = \sqrt{SA^2 + SQ^2 - 2SA \cdot SQ \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{2^2 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3} \text{ m.}$$

Vậy chi phí thấp nhất lắp đèn Led bằng $\sqrt{3} \cdot 2\,000\,000 \approx 3\,464$ (nghìn đồng).

-----HẾT-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = a^x$ với cơ số $0 < a \neq 1$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 2: Với a, b là hai số dương tùy ý, $\ln(a^2b^3)$ bằng

- A. $2\ln a - 3\ln b$. B. $2\ln a + \ln b$. C. $\ln a + 3\ln b$. D. $2\ln a + 3\ln b$.

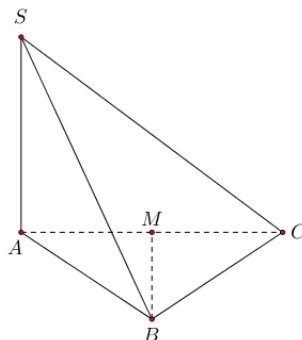
Câu 3: Giá trị của $27^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{5^{-2}} + 3^0$ bằng

- A. 46. B. -46. C. -45. D. 54.

Câu 4: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó

- A. $\log_{\frac{c}{3}} x$. B. $\log_{\frac{\pi}{4}} x$. C. $\log_{\frac{e}{2}} x$. D. $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$.

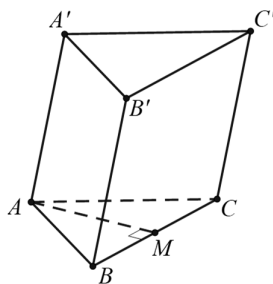
Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. M là trung điểm của cạnh AC .



Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAC) ?

- A. BM . B. AB . C. BC . D. SB .

Câu 6: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi M là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $AM \perp A'B'$. B. $AM \perp BB'$. C. $AM \perp B'C'$. D. $AM \perp A'C'$.

Câu 7: Hàm số nào trong các hàm số sau đây đồng biến trên tập $(0; +\infty)$?

- A. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$. B. $y = \log_3(x-1)$.
C. $y = \log_{\frac{2}{5}}(x+1)$. D. $y = \log x$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \ln(9 - x^2)$ là

A. $D = [-3; 3]$.

B. $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

D. $D = (-3; 3)$.

Câu 9: Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x + 1) + \log_3(x - 3) = 2$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} < 0$ là

A. 0.

B. 5.

C. 3.

D. vô số.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SC ; SB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SBC)$.

B. $IJ \perp (SAC)$.

C. $IJ \perp (SAB)$.

D. $\triangle SCB$ vuông ở C .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD ; O là giao điểm của AC và BD . Trong các khẳng định sau, khẳng định sai là:

A. $SO \perp BD$.

B. $SA \perp SC$.

C. $SA \perp AC$.

D. $MN \perp SC$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + m + 6)$ (*).

a) Với $m = 0$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Với $m = 1$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

c) Với $m = -2$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

d) Có 7 giá trị nguyên của m để hàm số (*) xác định trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ đôi một vuông góc với nhau và a, b, c đôi một khác nhau.

a) $OA \perp (BOC)$.

b) Gọi D là hình chiếu của O lên BC . Khi đó, $AD \perp BC$.

c) Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) . Khi đó, H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

d) Ta có $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$.

Câu 2: Cho số thực x thỏa mãn $9^x + 9^{-x} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{9 + 3(3^x + 3^{-x})}{-3^{x+1} - 3^{1-x}}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và AD theo đơn vị độ.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD và O là giao điểm của AC và BD . Tính góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) theo đơn vị độ.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Giải phương trình mũ $3^{x-3} = 27$.

Câu 2: Cho $a = \log_2 20$. Tính $\log_{20} 5$ theo a .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SB, SD, CD và O là giao điểm của AC và BD .

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC .

b) Khi tam giác SAC vuông tại A và $SA = a\sqrt{3}$, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SO và NK .

Tính $\cos \varphi$.

-----**HẾT**-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = a^x$ với cơ số $0 < a \neq 1$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $[0; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Hàm số $y = a^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 2: Với a, b là hai số dương tùy ý, $\ln(a^2b^3)$ bằng

A. $2\ln a - 3\ln b$.

B. $2\ln a + \ln b$.

C. $\ln a + 3\ln b$.

D. $2\ln a + 3\ln b$.

Lời giải

Do a, b là hai số dương, suy ra $\ln(a^2b^3) = \ln a^2 + \ln b^3 = 2\ln a + 3\ln b$.

Câu 3: Giá trị của $27^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{5^{-2}} + 3^0$ bằng

A. 46.

B. -46.

C. -45.

D. 54.

Lời giải

Ta có: $27^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{5^{-2}} + 3^0 = (3^3)^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot 5^2 + 1 = 3 - 50 + 1 = -46$.

Câu 4: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó

A. $\log_{\frac{e}{3}} x$.

B. $\log_{\frac{\pi}{4}} x$.

C. $\log_{\frac{e}{2}} x$.

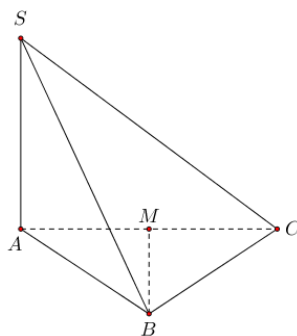
D. $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$.

Lời giải

Ta thấy $0 < \frac{e}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ nên các hàm số ở đáp án A, B, D nghịch biến.

Vậy hàm số $\log_{\frac{e}{2}} x$ đồng biến trên tập xác định của nó, vì $\frac{e}{2} > 1$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. M là trung điểm của cạnh AC.



Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAC) ?

A. BM .

B. AB .

C. BC .

D. SB .

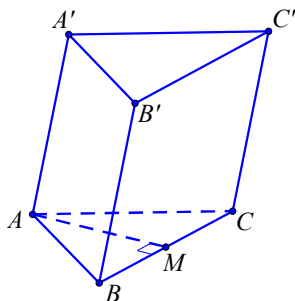
Lời giải

Ta có $BM \perp AC$ (do tam giác ABC cân tại B và M là trung điểm AC).

Mặt khác $BM \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

Suy ra $BM \perp (SAC)$.

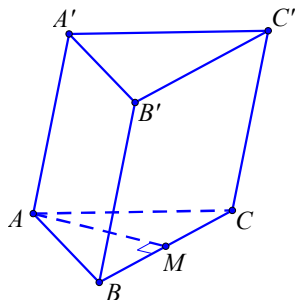
Câu 6: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi M là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $AM \perp A'B'$. B. $AM \perp BB'$. **C. $AM \perp B'C'$.** D. $AM \perp A'C'$.

Lời giải



Do ABC là tam giác đều nên $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{cases} \Rightarrow AM \perp B'C'$.

Câu 7: Hàm số nào trong các hàm số sau đây đồng biến trên tập $(0; +\infty)$?

- A. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$. B. $y = \log_3 (x-1)$.
C. $y = \log_{\frac{2}{5}} (x+1)$. **D. $y = \log x$.**

Lời giải

Hàm số có tập xác định chứa hoặc bằng $(0; +\infty)$ và có cơ số lớn hơn 1.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \ln(9 - x^2)$ là

- A. $D = [-3; 3]$. B. $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **D. $D = (-3; 3)$.**

Lời giải

Hàm số $y = \ln(9 - x^2)$ xác định khi $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Câu 9: Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$ là

- A. 0. **B. 1.** C. 2. D. 3.

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình: $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_3[(2x+1)(x-3)] = 2 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện của phương trình, suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 4$.

Câu 10: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} < 0$ là

- A. 0. B. 5. **C. 3.** D. vô số.

Lời giải

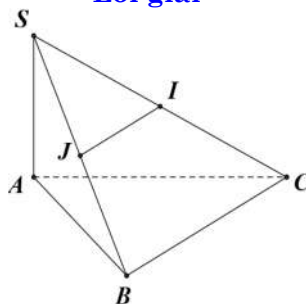
Ta có: $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x < 0 \Leftrightarrow 2^x(2^x - 12) < 0 \Leftrightarrow 2^x < 12 \Leftrightarrow x < \log_2 12$.

$\log_2 12 \approx 3,584$. Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên dương.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của $SC; SB$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $AB \perp (SBC)$. B. $IJ \perp (SAC)$. **C. $IJ \perp (SAB)$.** D. $\triangle SCB$ vuông ở C .

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \text{ (} SA \perp (ABC) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

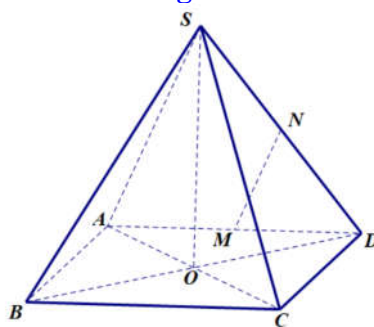
Mà $IJ \parallel BC$ (Vì IJ là đường trung bình của $\triangle SBC$).

Suy ra: $IJ \perp (SAB)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD ; O là giao điểm của AC và BD . Trong các khẳng định sau, khẳng định sai là:

- A. $SO \perp BD$. B. $SA \perp SC$. **C. $SA \perp AC$.** D. $MN \perp SC$.

Lời giải



Vì $SB = SD = a$ nên $\triangle SBD$ cân tại S . Do $ABCD$ là hình vuông với O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của $BD \Rightarrow SO \perp BD$ nên **A** đúng.

Xét tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SC$ nên **B** đúng.

Trong tam giác SAD có MN là đường trung bình nên $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp SC$ nên **C** đúng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + m + 6)$ (*).

a) Với $m = 0$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Với $m = 1$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

c) Với $m = -2$ hàm số (*) luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

d) Có 7 giá trị nguyên của m để hàm số (*) xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Với $m = 0 \Rightarrow$ hàm số (*): $y = \ln(x^2 + 6)$

Có $x^2 + 6 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $(*)$ luôn xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ khẳng định đúng.

b) Với $m = 1 \Rightarrow$ hàm số $(*) : y = \ln(x^2 - 2x + 7)$.

Có $x^2 - 2x + 7 = (x - 1)^2 + 6 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $(*)$ luôn xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ khẳng định đúng.

c) Với $m = -2 \Rightarrow$ hàm số $(*) : y = \ln(x^2 + 4x + 4)$.

Có $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \neq -2 \Rightarrow$ hàm số $(*)$ luôn xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\} \Rightarrow$ khẳng định sai.

d) Để hàm số $(*)$ xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 6 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $(*)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ khẳng định sai.

Câu 2: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ đôi một vuông góc với nhau và a , b , c đôi một khác nhau.

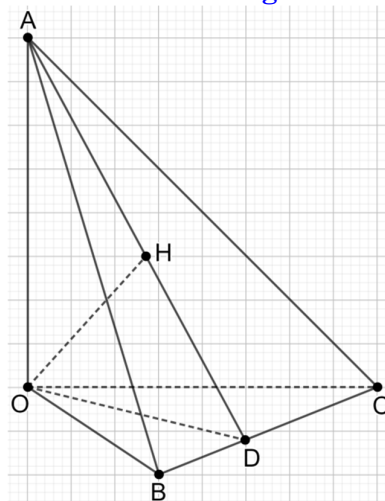
a) $OA \perp (BOC)$.

b) Gọi D là hình chiếu của O lên BC . Khi đó, $AD \perp BC$.

c) Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) . Khi đó, H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

d) Ta có $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$

Lời giải



a) Đ Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (BOC).$

b) Đ Vì $OA \perp (BOC) \Rightarrow OA \perp BC$. Mà $OD \perp BC$ nên $(AOD) \perp BC \Rightarrow AD \perp BC$.

c) s Kẻ $OH \perp AD$ tại H . Do $(AOD) \perp BC$ nên $OH \perp BC$. Từ đó, suy ra $OH \perp (ABC)$.

Ta có ngay $OB \perp (AOC) \Rightarrow OB \perp AC$. Hơn nữa, $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC$.

Do đó, $(BOH) \perp AC \Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó, ta được H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

d) Đ Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}.$

Từ đó, ta được $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ).$

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $P = \log(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 89^\circ)$
 $= \log[(\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ]$.
 Với $1^\circ \leq \alpha \leq 44^\circ$, ta có $\tan \alpha \cdot \tan(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
 Vậy $P = \log 1 = 0$.

Câu 2: Cho số thực x thỏa mãn $9^x + 9^{-x} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{9 + 3(3^x + 3^{-x})}{-3^{x+1} - 3^{1-x}}$.

Lời giải

Đáp án: -2

Ta có $9^x + 9^{-x} = 7 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 9$, hay $3^x + 3^{-x} = 3$.
 Vậy $P = \frac{9 + 3(3^x + 3^{-x})}{-3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{9 + 3(3^x + 3^{-x})}{-3 \cdot (3^x + 3^{-x})} = \frac{9 + 3 \cdot 3}{-3 \cdot 3} = -2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và AD theo đơn vị độ.

Lời giải

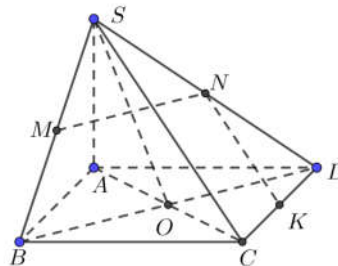
Đáp án: 45.

$MN \parallel BD$ nên góc giữa MN và AD bằng góc giữa BD và AD và bằng 45° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD và O là giao điểm của AC và BD . Tính góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) theo đơn vị độ.

Lời giải

Đáp án: 90.



Mặt phẳng (SMN) chính là (SBD) ta có

$$BD \perp AC$$

$$BD \perp SA$$

$$\Rightarrow BD \perp (SAC), DB \subset (SMN)$$

Suy ra $(SAC) \perp (SMN)$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Giải phương trình mũ $3^{x-3} = 27$.

Lời giải

Ta có $3^{x-3} = 27 \Leftrightarrow x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 6$.

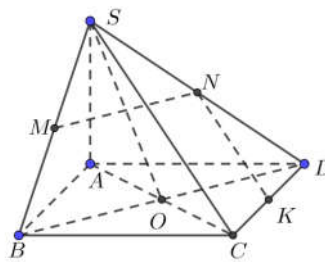
Câu 2: Cho $a = \log_2 20$. Tính $\log_2 5$ theo a .

Lời giải

Ta có $a = \log_2(2^2 \cdot 5) = 2 + \log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = a - 2$.

Mà $\log_{20} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 20} = \frac{a-2}{a}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SB, SD, CD và O là giao điểm của AC và BD .



- a) Tính Góc giữa hai đường thẳng AD và BC .
b) Khi tam giác SAC vuông tại A và $SA = a\sqrt{3}$, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SO và NK .
Tính $\cos \varphi$.

Lời giải

- a) $AD \parallel BC$ nên góc giữa AD và BC bằng 0° .
b) Có $NK \parallel SC$ nên góc giữa SO và NK bằng góc giữa SO và SC và là góc $\widehat{OSC}$

Vì tam giác SAC vuông tại A và $SA = a\sqrt{3}$ nên $SC = a\sqrt{5}; SO = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác OSC , ta có

$$\cos \widehat{OSC} = \frac{SO^2 + SC^2 - OC^2}{2 \cdot SO \cdot SC} = \frac{\frac{7a^2}{2} + 5a^2 - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{70}}{35}.$$

-----HẾT-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{5}{13}} \cdot a^{\frac{5}{11}}}{a^{\frac{1}{11}}}$ với $a > 0$.

A. $a^{\frac{133}{143}}$.

B. $a^{\frac{-23}{143}}$.

C. $a^{\frac{107}{143}}$.

D. $a^{\frac{3}{143}}$.

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $P = \log_2 \frac{16}{5} + \log_2 160$.

A. 24.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2 (3x^2 - 30x + 72)$.

A. $D = [4; 6]$.

B. $D = (-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$.

D. $D = (4; 6)$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $5^x > 79$ là

A. $S = (\log_5 79; +\infty)$. B. $S = (-\infty; \log_5 79)$. C. $S = (-\infty; \log_5 79]$. D. $S = [\log_5 79; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$.

B. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

C. $y = e^{-x}$.

D. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x$.

Câu 6: Cho $\log_a b = 3$ với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Tính giá trị của $\log_a (a^3 b^4)$.

A. 15.

B. 7.

C. 12.

D. 25.

Câu 7: Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d ?

A. 3.

B. vô số.

C. 1.

D. 2.

Câu 8: Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $BB' \perp BD$.

B. $A'C' \perp BD$.

C. $A'B \perp DC'$.

D. $BC' \perp A'D$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. 60°

B. 45°

C. 75°

D. 90°

Câu 10: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$.

B. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

D. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$.

B. $SO \perp (ABCD)$.

C. $SC \perp (ABCD)$.

D. $SB \perp (ABCD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAB)$.

B. $AC \perp (SBD)$.

C. $BD \perp (SAC)$.

D. $CD \perp (SAD)$.

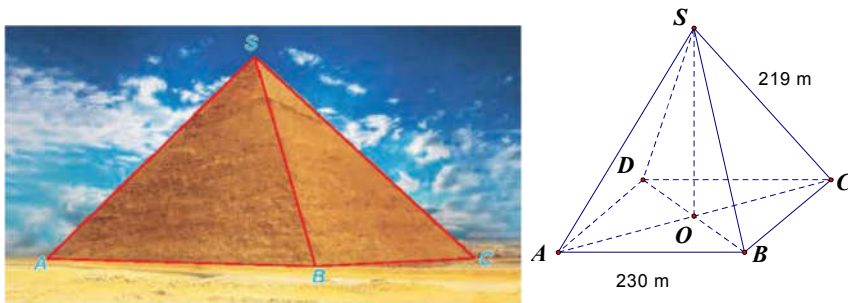
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2^{2x-1} - 8$, $g(x) = \log_2(x+5)$.

- a) $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$.
- b) Phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = -5$.
- c) Tập nghiệm của bất phương trình $g(x) < 0$ là $S = (-\infty; -6)$.
- d) Có 6 nguyên x thỏa mãn bất $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Câu 2: Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$ (kích thước hiện nay). Kim tự tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*).

- a) Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.
- b) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.
- c) Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .
- d) Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67m$



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \log_2(x-1)$ là $D = (a; b)$. Tính $a + 3b$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{2} \log_9(x-1)^4 \geq 2 \log_9(4x)$ là $S = (a; b] \cup [c; +\infty)$. Tính $T = a + c$?

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$; $\widehat{DAC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Câu 4: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính sin của góc giữa đường thẳng AC là đường chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên và hình chiếu của nó trên mặt đất, làm tròn đến hàng phần trăm?

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $a; b$ là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8 \log_b(a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a(a \sqrt[3]{ab}) + 2025$.

Câu 1: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $5^{x^2-2020x-2001} < 25^{2x+12}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA = a$, $SH \perp (ABCD)$ với H là trung điểm của OA . Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh rằng:

a) $BD \perp (SAC)$

b) M là trung điểm của SA

-----**HẾT**-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{5}{13}} \cdot a^{\frac{5}{11}}}{a^{\frac{1}{11}}}$ với $a > 0$.

A. $a^{\frac{133}{143}}$.

B. $a^{\frac{-23}{143}}$.

C. $a^{\frac{107}{143}}$.

D. $a^{\frac{3}{143}}$.

Lời giải

Chọn C

$$P = \frac{a^{\frac{5}{13}} \cdot a^{\frac{5}{11}}}{a^{\frac{1}{11}}} = a^{\frac{5}{13} + \frac{5}{11} - \frac{1}{11}} = a^{\frac{107}{143}}.$$

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $P = \log_2 \frac{16}{5} + \log_2 160$.

A. 24.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$P = \log_2 \frac{16}{5} + \log_2 160 = \log_2 \left(\frac{16}{5} \cdot 160 \right) = \log_2 512 = 9.$$

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2 (3x^2 - 30x + 72)$.

A. $D = [4; 6]$.

B. $D = (-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$.

D. $D = (4; 6)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $3x^2 - 30x + 72 > 0 \Leftrightarrow x < 4$ hoặc $x > 6$.

Tập xác định: $D = (-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $5^x > 79$ là

A. $S = (\log_5 79; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; \log_5 79)$.

C. $S = (-\infty; \log_5 79]$.

D. $S = [\log_5 79; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $5^x > 79 \Leftrightarrow x > \log_5 79 \Leftrightarrow x > \log_5 79$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-x}$.

B. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

C. $y = e^{-x}$.

D. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 1} \right)^x$.

Lời giải

Ta có: hàm số $y = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Mặt khác, $y = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-x} = \left(\frac{4}{\pi} \right)^x$ nên hàm số có cơ số $\frac{4}{\pi} > 1$.

Vậy hàm số $y = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-x}$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 6: Cho $\log_a b = 3$ với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Tính giá trị của $\log_a (a^3 b^4)$.

A. 15.

B. 7.

C. 12.

D. 25.

Lời giải

Ta có $\log_a (a^3 b^4) = 3 + 4 \log_a b = 3 + 4 \cdot 3 = 15$.

Câu 7: Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d ?

A. 3.

B. vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Trong không gian, có vô số đường thẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Vì vậy chọn đáp án B

Câu 8: Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

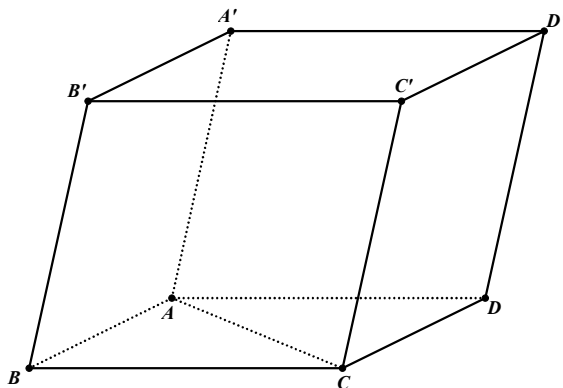
A. $BB' \perp BD$.

B. $A'C' \perp BD$.

C. $A'B \perp DC'$.

D. $BC' \perp A'D$.

Lời giải



Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi nên ta có

$AC \perp BD$ mà $AC \parallel A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$ (B đúng).

$A'B \perp AB'$ mà $AB' \parallel DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$ (C đúng).

$BC' \perp B'C$ mà $B'C \parallel A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$ (D đúng).

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

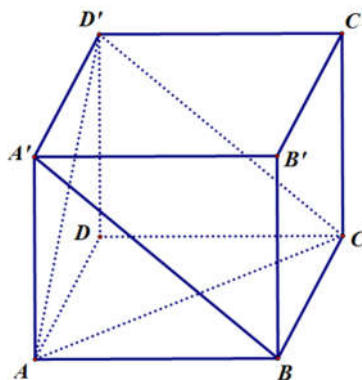
A. 60° .

B. 45° .

C. 75° .

D. 90° .

Lời giải



Do $A'BCD'$ là hình bình hành nên $A'B \parallel D'C$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC và $D'C$ và đó chính là góc $\widehat{ACD'} = 60^\circ$ (do $\triangle ACD'$ đều).

Câu 10: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai.

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

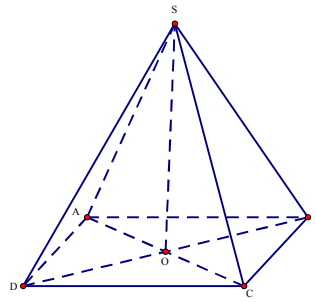
Lời giải

Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SC \perp (ABCD)$. D. $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải



Ta có O là trung điểm của AC, BD

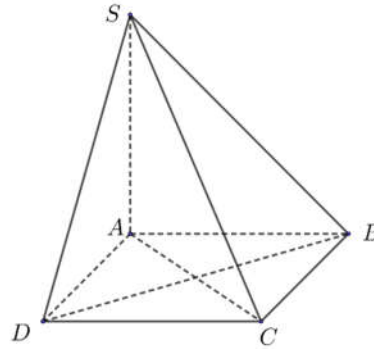
Mà $SA = SC, SB = SD \Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Lời giải



Ta có:

$$+ \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$+ \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

$$+ \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2^{2x-1} - 8$, $g(x) = \log_2(x+5)$.

a) $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$.

b) Phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = -5$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình $g(x) < 0$ là $S = (-\infty; -6)$.

d) Có 6 nguyên x thỏa mãn bất $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Lời giải

a) Đúng vì: $f(3) = 2^5 - 8 = 24 > 0$ nên $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$.

b) Sai vì: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+5) = 0 \Leftrightarrow x+5 = 1 \Leftrightarrow x = -4$.

c) Sai vì: $g(x) < 0 \Leftrightarrow \log_2(x+5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 > 0 \\ x+5 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; -4)$.

d) Đúng vì: Xét bất phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x-1} - 8 \geq 0 \\ \log_2(x+5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in (-5; -4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x-1} - 8 \leq 0 \\ \log_2(x+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 2].$$

Vậy bpt $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ có tập nghiệm $(-4; 2]$ nên có 6 giá trị nguyên thỏa mãn $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

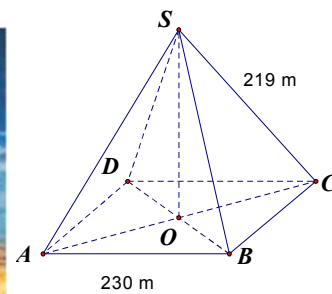
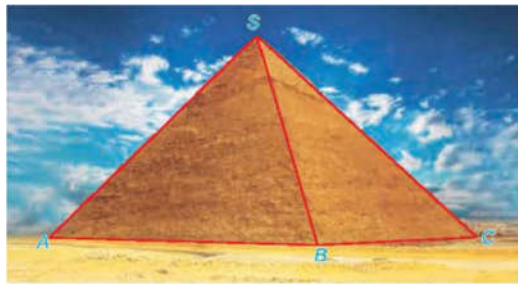
Câu 2: Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219 m (kích thước hiện nay). Kim tự tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*).

a) Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.

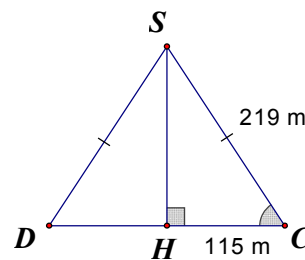
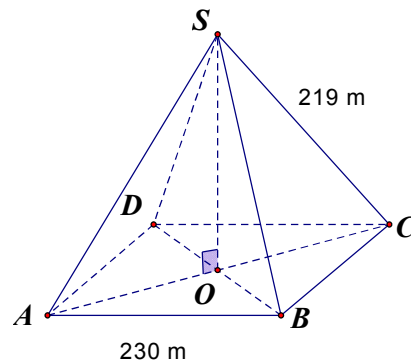
b) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

c) Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .

d) Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67 \text{ m}$



Lời giải



a) Tính góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$.

Khi đó $(SC, AB) = (SC, CD) = \widehat{SCD}$.

Gọi H là trung điểm của CD , suy ra $DH = HC = \frac{CD}{2} = \frac{230}{2} = 115 \text{ m}$.

Vì tam giác SCD có $SC = SD$ nên tam giác SCD cân tại S mà SH là trung tuyến nên SH là đường cao tam giác SCD .

Xét tam giác SHC vuông tại H, ta có: $\cos \widehat{SCD} = \cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 58,3^\circ$.

Vậy góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tử tháp khoảng $58,3^\circ$.

Do đó mệnh đề a) sai.

b) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

+ Xét tam giác SAC cân tại S , ta có: SO là đường cao của tam giác SAC nên $SO \perp AC$.

+ Xét tam giác SBD cân tại S , ta có: SO là đường cao của tam giác SBD nên $SO \perp BD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

Do đó mệnh đề b) đúng.

c) Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .

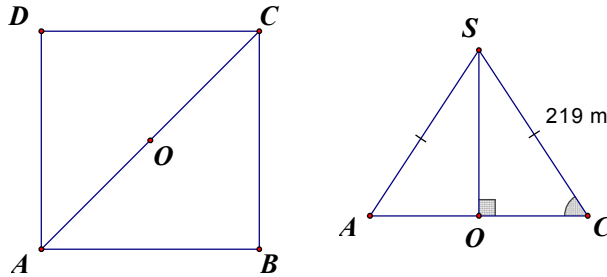
$$\text{Do } \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AB, BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp AB, SO \perp BC.$$

Do đó mệnh đề c) đúng.

d) Tính chiều cao SO của kim tử tháp Cheops.

Do chiều cao của kim tử tháp chính là chiều cao của tam giác SAC nên cần tính cạnh SO , với O là trung điểm AC , ta có:

Tam giác SAC có cạnh $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S .



Xét hình vuông $ABCD$, ta có: $AC = AB\sqrt{2} = 230\sqrt{2} \text{ m}$.

$$\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{230\sqrt{2}}{2} = 115\sqrt{2} \text{ m}.$$

Xét tam giác SOC vuông tại O , ta có:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{219^2 - (115\sqrt{2})^2} = 7\sqrt{439} \text{ m} \approx 146,67 \text{ m}.$$

Vậy chiều cao của kim tử tháp Cheops khoảng $146,67 \text{ m}$.

Do đó mệnh đề d) đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \log_2(x-1)$ là $D = (a; b)$. Tính $a + 3b$.

Lời giải

Đáp án: 10

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi } \begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Vậy $D = (1; 3)$ suy ra $a = 1, b = 3$ nên $a + 3b = 10$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{2} \log_9(x-1)^4 \geq 2 \log_9(4x)$ là $S = (a; b] \cup [c; +\infty)$. Tính $T = a + c$?

Lời giải

Đáp án: 3

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 \neq 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1 \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{2} \log_9(x-1)^4 &\geq 2 \log_9(4x) \Leftrightarrow \log_3(x+3) + \log_3|x-1| \geq \log_3(4x) \\ &\Leftrightarrow \log_3[(x+3)|x-1|] \geq \log_3(4x) \Leftrightarrow (x+3)|x-1| \geq 4x \quad (*). \end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu $x > 1$ thì $(*) \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \geq 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$. So với điều kiện $x > 1$ ta suy ra tập nghiệm $S_1 = [3; +\infty)$.

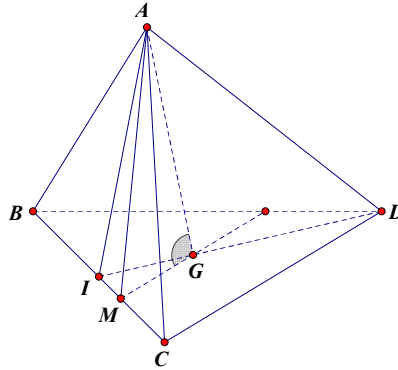
Trường hợp 2: Nếu $0 < x < 1$ thì $(*) \Leftrightarrow (x+3)(1-x) \geq 4x \Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 \leq 0$
 $\Leftrightarrow -3 - 2\sqrt{3} \leq x \leq -3 + 2\sqrt{3}$. So với điều kiện $0 < x < 1$, suy ra tập nghiệm $S_2 = (0; -3 + 2\sqrt{3}]$.

Tập nghiệm của phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (0; -3 + 2\sqrt{3}] \cup [3; +\infty)$

Vậy $T = a + c = 0 + 3 = 3$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$; $\widehat{DAC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Đáp án: 0,17

$\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC = 1$.

$\triangle ACD$ cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$.

$\triangle ABD$ vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.

$\triangle BCD$ có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B .

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD , cắt BC tại M .

Ta có $MG \parallel CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC , xét $\triangle BDI$ vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC} = \frac{MG}{CD} = \frac{IG}{ID} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM = \frac{1}{3} \cdot IC = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{6}$; $MG = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG = \frac{1}{3} \cdot ID = \frac{1}{2}$.

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\cos \widehat{AID} = \frac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2AI.ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2AI.IG \cdot \cos \widehat{AID}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

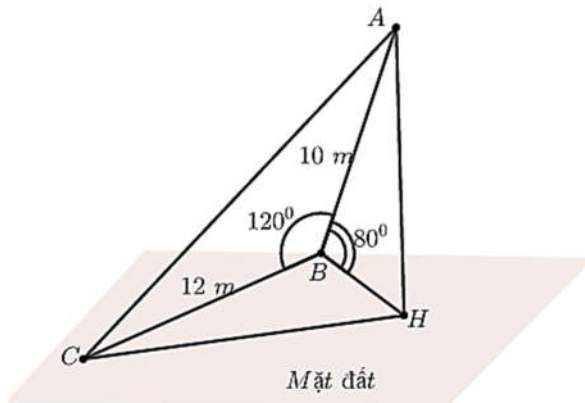
Xét $\triangle AMG$ có

$$\cos(\widehat{AG, MG}) = |\cos \widehat{AGM}| = \left| \frac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2.AG.GM} \right| = \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| = \frac{1}{6} \approx 0,17.$$

Câu 4: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$).
Tính sin của góc giữa đường thẳng AC là đường chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên và hình chiếu của nó trên mặt đất, làm tròn đến hàng phần trăm?

Lời giải

Đáp án: 0,52



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất $\Rightarrow AH$ vuông góc với mặt đất.

Vì góc giữa AB và mặt đất là 80° nên $\widehat{ABH} = 80^\circ$.

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp BH$

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \sin 80^\circ = 10 \cdot \sin 80^\circ$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2.10.12 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{91}$$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất nên góc giữa AC và mặt đất là $\widehat{ACH}$

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp HC$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \cdot \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \approx 0,52$$

Vậy sin của góc giữa đường thẳng AC là đường chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên và hình chiếu của nó trên mặt đất là $0,52$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $a; b$ là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8 \log_b(a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_a(a \sqrt[3]{ab}) + 2025.$$

Lời giải

Ta có

$$\log_a^2 b - 8 \log_b (a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_a^2 b - 8 \left(\log_b a + \frac{1}{3} \right) = -\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_a^2 b - \frac{8}{\log_a b} = 0 \Leftrightarrow \log_a b = 2$$

$$\text{Vậy } P = \log_a (a \sqrt[3]{ab}) + 2017 = \log_a a^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} \log_a b + 2025 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 2025 = 2027.$$

Câu 2: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $5^{x^2-2020x-2001} < 25^{2x+12}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 5^{x^2-2020x-2001} < 25^{2x+12} \Leftrightarrow 5^{x^2-2020x-2001} < 5^{2(2x+12)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2020x - 2001 < 4x + 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2024x - 2025 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2025$$

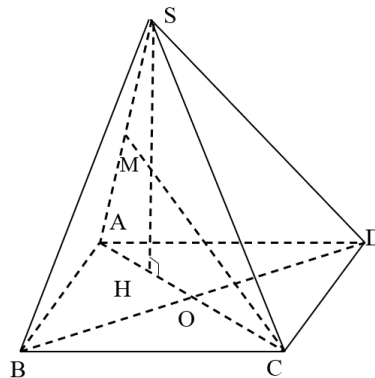
Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình trên khoảng $(-1; 2025)$ là 2025 nghiệm.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA = a$, $SH \perp (ABCD)$ với H là trung điểm của OA . Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh rằng:

a) $BD \perp (SAC)$

b) M là trung điểm của SA

Lời giải



a) Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp BD$

mà $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$

suy ra $BD \perp (SAC)$ (đpcm)

$$\text{b) } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } H: SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Lại có

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot SA \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{14}}{4} \cdot a\sqrt{2} = CM \cdot a \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác } AMC \text{ vuông tại } M: AM = \sqrt{CA^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra M là trung điểm của SA (đpcm)

-----HẾT-----



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$ ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

- A. $P = x^{\frac{5}{4}}$. B. $P = x^{\frac{5}{12}}$. C. $P = x^{\frac{1}{7}}$. D. $P = x^{\frac{1}{12}}$.

Câu 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 18. B. 24. C. 12. D. 6.

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $3^{-x^2+3x} = 9$ bằng

- A. 0. B. -3. C. 4. D. 2.

Câu 4: Hàm số $y = \log_5(2x + 1)$ xác định trên khoảng nào dưới đây?

- A. $x > 0$. B. $x \neq 0$. C. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SB$, $SC = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SC \perp (ABCD)$. D. $SB \perp (ABCD)$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m^2 - n^2 = -312$. B. $m^2 - n^2 = 312$. C. $m^2 + n^2 = 543$. D. $m^2 + n^2 = 409$.

Câu 7: Cho a, b là hai số dương với $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Khi đó, giá trị $\log_b \left(\frac{a^2}{b}\right)$ bằng

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 8: Tập giá trị của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 120° . D. 60° .

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c phân biệt và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \perp c$ và $(P) \perp c$ thì $a // (P)$.

B. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a // b$.

C. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

D. Nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 11: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

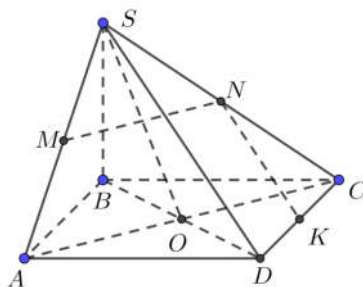
D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CM \perp (ABD)$. **B.** $AB \perp (MCD)$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DM \perp (ABC)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SA, SC, CD và O là giao điểm của AC và BD . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



- a) Góc giữa hai đường thẳng SD và NK bằng 0° .
- b) Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng 90° .
- c) Góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 60° .
- d) Khi tam giác SBD vuông tại B và $SB = 3a$, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SO và NK .

Ta có $\cos \varphi = \frac{11}{130}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB, SA \perp AD$.

- a) $(BC, SA) = 90^\circ$.
- b) $SA \perp CD$.
- c) $(SD, BC) = (SD, AD)$.
- d) $(SD, BC) = 30^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng (làm tròn hai chữ số thập phân).

Câu 2: Để đủ tiền mua nhà, anh Ba vay ngân hàng 400 triệu đồng theo phương thức lãi kép với lãi suất $0,8\%/tháng$. Nếu sau mỗi tháng, kể từ ngày vay, anh Ba trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả lãi vay và tiền gốc. biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh Ba trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ ngân hàng?

Câu 3: Cho $a > 0; b > 0$ nếu viết $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{5} \log_3 a + \frac{y}{15} \log_3 b$ thì $x + y$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{210}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.
- Câu 2:** Cho $\log_6 5 = m, \log_2 3 = n$. Hãy tính $\log_3 15$ tính theo m và n .
- Câu 3:** Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W / m^2) là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W / m^2$ đến $10^1 W / m^2$.

-----**HẾT**-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P = x^{\frac{5}{4}}$.

B. $P = x^{\frac{5}{12}}$.

C. $P = x^{\frac{1}{7}}$.

D. $P = x^{\frac{1}{12}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \left(x \cdot x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}}.$$

Câu 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 18.

B. 24.

C. 12.

D. 6.

Lời giải

$$P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = (6 \log_a b) \cdot (4 \log_b a) = 24.$$

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $3^{-x^2+3x} = 9$ bằng

A. 0.

B. -3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3^{-x^2+3x} = 9 \Leftrightarrow 3^{-x^2+3x} = 3^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm là 2.

Câu 4: Hàm số $y = \log_5(2x + 1)$ xác định trên khoảng nào dưới đây?

A. $x > 0$.

B. $x \neq 0$.

C. $\left[\frac{-1}{2}; +\infty \right)$.

D. $\left(\frac{-1}{2}; +\infty \right)$.

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SB$, $SC = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng

A. $SA \perp (ABCD)$.

B. $SO \perp (ABCD)$.

C. $SC \perp (ABCD)$.

D. $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải

Vì $SA = SB$, $SC = SD$ nên các tam giác $\triangle SBD$, $\triangle SAC$ là các tam giác cân đều nhận SO là đường trung tuyến nên $SO \perp AC$, $SO \perp BD$ mà $AC, BD \subset (ABCD)$; $AC \cap BD = \{O\}$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m^2 - n^2 = -312$.

B. $m^2 - n^2 = 312$.

C. $m^2 + n^2 = 543$.

D. $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{5}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}.$$

$$\text{Suy ra } m = 19, n = 7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 312.$$

Câu 7: Cho a, b là hai số dương với $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Khi đó, giá trị $\log_b \left(\frac{a^2}{b} \right)$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải

Với a, b là hai số dương và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = 3$, ta có:

$$\log_b \left(\frac{a^2}{b} \right) = 2 \log_b a - 1 = \frac{2}{\log_a b} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Câu 8: Tập giá trị của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Vì $y = 2^x$ là hàm số mũ nên có tập giá trị là $T = (0; +\infty)$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng

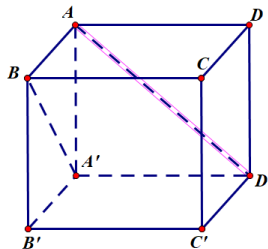
A. 45° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 60° .

Lời giải



Ta có $A'B \parallel D'C$, nên góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng góc giữa hai đường thẳng $D'C$ và AD' .

Mà tam giác ACD' là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' là góc $\widehat{AD'C}$ và bằng 60° .

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c phân biệt và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \perp c$ và $(P) \perp c$ thì $a \parallel (P)$.

B. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a \parallel b$.

C. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.

D. Nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Lời giải

Có bốn vị trí tương đối của hai đường thẳng mà nếu hai đường thẳng trùng nhau hoặc song song thì chúng không vuông góc với nhau do đó nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 11: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Lời giải

Hiển nhiên B đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, A sai.

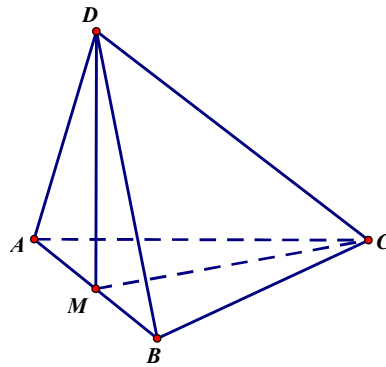
Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b . Do đó, C sai.

Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, D sai.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $CM \perp (ABD)$. B. $AB \perp (MCD)$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DM \perp (ABC)$.

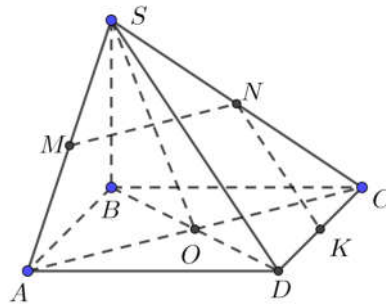
Lời giải



$$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SA, SC, CD và O là giao điểm của AC và BD . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



a) Góc giữa hai đường thẳng SD và NK bằng 0° .

b) Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng 90° .

c) Góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 60° .

d) Khi tam giác SBD vuông tại B và $SB = 3a$, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SO và NK .

Ta có $\cos \varphi = \frac{11}{130}$.

Lời giải

a) Đ $NK \parallel SD$ nên góc giữa NK và SD bằng 0° .

b) S $MN \parallel AC$ nên góc giữa MN và BD bằng góc giữa AC và BD và không bằng 90° (do $ABCD$ là hình chữ nhật)

c) Đ $MN \parallel AC$ nên góc giữa MN và AB bằng góc giữa AC và AB và bằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

d) S Có $NK \parallel SD$ nên góc giữa SO và NK bằng góc giữa SO và SD và là góc $\widehat{OSD}$

Vì tam giác SBD vuông tại B và $SB = 3a$ nên $SD = a\sqrt{13}; SO = a\sqrt{10}; OD = a$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác OSD , ta có

$$\cos \widehat{OSD} = \frac{SO^2 + SD^2 - OD^2}{2 \cdot SO \cdot SD} = \frac{10a^2 + 13a^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{10} \cdot a\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{130}}.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB, SA \perp AD$.

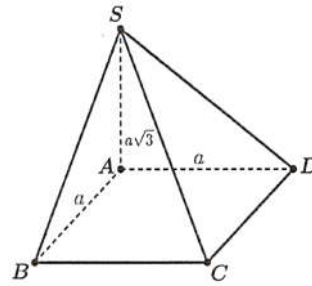
a) $(BC, SA) = 90^\circ$

b) $SA \perp CD$

c) $(SD, BC) = (SD, AD)$

d) $(SD, BC) = 30^\circ$

Lời giải



a) Đúng: $CB \parallel AD \Rightarrow (BC, SA) = (AD, SA) = 90^\circ$ (hai cạnh đối trong hình thoi).

b) Đúng: $CD \parallel AB, SA \perp AB \Rightarrow SA \perp CD$.

c) Đúng: Vì $BC \parallel AD$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.

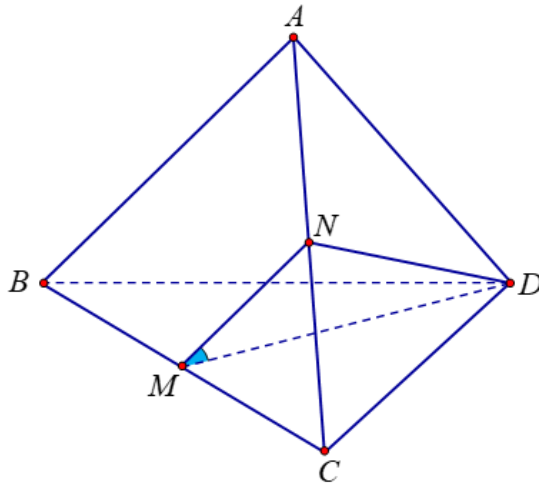
d) Sai: Tam giác SAD vuông tại A có: $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$ II

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng (làm tròn hai chữ số thập phân).

Lời giải

Đáp án: 0,29



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN \parallel AB \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.

Tam giác DMN có $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $\cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2 \cdot DM \cdot MN}$.

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{DMN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,29$.

Câu 2: Để đủ tiền mua nhà, anh Ba vay ngân hàng 400 triệu đồng theo phương thức lãi kép với lãi suất $0,8\%/tháng$. Nếu sau mỗi tháng, kể từ ngày vay, anh Ba trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả lãi vay và tiền gốc. biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh Ba trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ ngân hàng?

Lời giải

Đáp án: 49

Số tiền còn nợ sau 1 tháng là $T_1 = 400 \cdot (1 + 0,8\%) - 10$.

Số tiền còn nợ sau 2 tháng là $T_2 = 400 \cdot (1 + 0,8\%)^2 - 10(1 + 0,8\%) - 10$.

...

Số tiền còn nợ sau n tháng là

$$\begin{aligned} T_n &= 400 \cdot (1 + 0,8\%)^n - 10(1 + 0,8\%)^{n-1} - \dots - 10 \\ &= 400(1 + 0,8\%)^n - 10 \cdot [1 + (1 + 0,8\%) + \dots + (1 + 0,8\%)^{n-1}] \\ &= 400(1 + 0,8\%)^n - 10 \frac{(1 + 0,8\%)^n - 1}{0,8\%} = -850(1 + 0,8\%)^n + 1250 \end{aligned}$$

$$T_n = 0 \Leftrightarrow (1 + 0,8\%)^n = \frac{25}{17} \Leftrightarrow n \approx 48,4.$$

Vậy sau 49 tháng thì anh Ba trả hết nợ.

Câu 3: Cho $a > 0; b > 0$ nếu viết $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{5} \log_3 a + \frac{y}{15} \log_3 b$ thì $x + y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 4

$$\begin{aligned} \log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right)^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} [\log_3 a^3 + \log_3 b] = \frac{2}{15} [3 \log_3 a + \log_3 b] = \frac{2}{5} \log_3 a + \frac{2}{15} \log_3 b \text{ nên} \\ x &= 2; y = 2 \Rightarrow x + y = 4. \end{aligned}$$

Câu 4: Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{210}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

Lời giải

Đáp án: 43

$$\text{Ta có } \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} + \dots + \frac{n}{\log_3 x} = \frac{n(n+1)}{2 \log_3 x}.$$

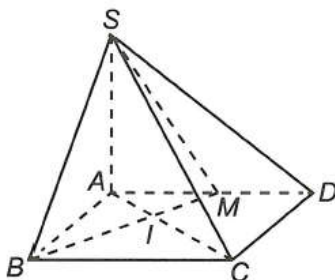
$$\text{Do đó } \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Leftrightarrow n^2 + n - 420 = 0 \Leftrightarrow n = 20.$$

$$\text{Vậy } P = 2 \cdot 20 + 3 = 43.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và MB .

Ta có $MA = MD$ và $AD \parallel BC$ nên áp dụng định lý Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 + a^2 \right] = \frac{a^2}{6}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = MA^2.$$

Vậy $\triangle AMI$ là tam giác vuông tại I . Suy ra $MB \perp AC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$.

Câu 2: Cho $\log_6 5 = m$, $\log_2 3 = n$. Hãy tính $\log_3 15$ tính theo m và n .

Lời giải

Ta có:

$$\log_6 5 = m \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = m \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 3} = m \Rightarrow \log_2 5 = (1 + \log_2 3)m = (1 + n)m$$

Khi đó:

$$\log_3 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{n + (1 + n)m}{n} = \frac{m + n + mn}{n}.$$

Câu 3: Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W / m^2) là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W / m^2$ đến $10^1 W / m^2$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 10^{-12} \leq I \leq 10^1 &\Leftrightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq \frac{10^1}{10^{-12}} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq 10^{13} \Leftrightarrow \log 1 \leq \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq \log 10^{13} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq 130 \text{ (do } 10 > 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq L \leq 130. \end{aligned}$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là từ $0dB$ đến $130dB$.

-----HẾT-----