

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC

TỔ: TOÁN

## ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ II

NĂM HỌC: 2024 – 2025

LỚP 11 (CT CHUYÊN)

### NỘI DUNG KIẾN THỨC:

#### I. Giải tích:

- 1) Phương trình mũ và phương trình logarit
- 2) Bất phương trình mũ và logarit.
- 3) Hệ phương trình mũ và logarit
- 4) Chuyên đề Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số
- 5) Chuyên đề tìm GTLN, GTNN của biểu thức
- 6) Nguyên hàm

#### II. Hình học:

- 1) Khối tròn xoay
- 2) Khối nón.
- 3) Khối trụ
- 4) Khối cầu.
- 5) Hệ trục tọa độ.

### MỘT SỐ CHỦ ĐỀ THAM KHẢO:

#### 1) Phương trình mũ:

**Bài 1.** Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc logarit hoá):

a)  $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$       b)  $(\sqrt{5}+2)^{x-1} = (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc logarit hoá):

a)  $3^x.8^{\frac{x}{x+2}} = 6$       b)  $2^{3^x} = 3^{2^x}$       c)  $3^x.2^{x^2} = 1$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 1):

a)  $(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6$       b)  $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 1):

a)  $25^x - 2(3-x).5^x + 2x - 7 = 0$       b)  $3.25^{x-2} + (3x-10).5^{x-2} + 3 - x = 0$   
c)  $3.4^x + (3x-10).2^x + 3 - x = 0$       d)  $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0$

**Bài 5.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 2):

a)  $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x = 0$       b)  $3.16^x + 2.81^x = 5.36^x$       c)  $6.3^{2x} - 13.6^x + 6.2^{2x} = 0$   
d)  $(7+5\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-5)(3+2\sqrt{2})^x + 3(1+\sqrt{2})^x + 1 - \sqrt{2} = 0.$

**Bài 6.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 3):

a)  $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 14$       b)  $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$   
c)  $(2+\sqrt{3})^x + (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x = 4(2+\sqrt{3})$       d)  $(5-\sqrt{21})^x + 7(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$   
e)  $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 = 0$       f)  $(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt[3]{3-\sqrt{8}})^x = 6.$

**Bài 7.** Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

a)  $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4^x$       b)  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$

c)  $(3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x = 6^x$  d)  $(3+\sqrt{5})^x + 16.(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$   
e)  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$  f)  $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$   
g)  $2^x + 3^x + 5^x = 10^x$  h)  $2^x + 3^x = 5^x$  i)  $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$   
k)  $3^x = 5 - 2x$  l)  $2^x = 3 - x$  m)  $2^{x+1} - 4^x = x - 1$   
n)  $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$  o)  $4^x + 7^x = 9x + 2$  p)  $5^{2x+1} - 5^{3x} - x + 1 = 0$   
q)  $3^x + 8^x = 4^x + 7^x$  r)  $6^x + 2^x = 5^x + 3^x$  s)  $9^x + 15^x = 10^x + 14^x$

**Bài 8.** Giải các phương trình sau (đưa về phương trình tích):

a)  $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$  b)  $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$   
c)  $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$  d)  $2^x + 3^x = 1 + 6^x$   
e)  $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$  f)  $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$   
g)  $x^2.3^x + 3^x(12-7x) = -x^3 + 8x^2 - 19x + 12$  h)  $x^2.3^{x-1} + x(3^x - 2^x) = 2(2^x - 3^{x-1})$   
i)  $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0$  k)  $2^{2(x^2+x)} + 2^{1-x^2} - 2^{2(x^2+x)}.2^{1-x^2} - 1 = 0$

**Bài 9.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có nghiệm:

a)  $9^x + 3^x + m = 0$  b)  $9^x + m3^x - 1 = 0$  c)  $4^x - 2^{x+1} = m$   
d)  $3^{2x} + 2.3^x - (m+3).2^x = 0$  e)  $2^x + (m+1).2^{-x} + m = 0$  f)  $25^x - 2.5^x - m - 2 = 0$   
g)  $16^x - (m-1).2^{2x} + m - 1 = 0$  h)  $25^x + m.5^x + 1 - 2m = 0$  i)  $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = m$   
k)  $3^{4-2x^2} - 2.3^{2-x^2} + 2m - 3 = 0$  l)  $4^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} - 14.2^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} + 8 = m$   
m)  $9^{x+\sqrt{1-x^2}} - 8.3^{x+\sqrt{1-x^2}} + 4 = m$  n)  $9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (m+2).3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2m + 1 = 0$

**Bài 10.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a)  $m.2^x + 2^{-x} - 5 = 0$  b)  $m.16^x + 2.81^x = 5.36^x$   
c)  $(\sqrt{5}+1)^x + m(\sqrt{5}-1)^x = 2^x$  d)  $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + m\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$   
e)  $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$  f)  $9^x + m3^x + 1 = 0$

**Bài 11.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu:

a)  $(m+1).4^x + (3m-2).2^{x+1} - 3m + 1 = 0$  b)  $49^x + (m-1).7^x + m - 2m^2 = 0$   
c)  $9^x + 3(m-1).3^x - 5m + 2 = 0$  d)  $(m+3).16^x + (2m-1).4^x + m + 1 = 0$   
e)  $4^x - 2(m+1).2^x + 3m - 8 = 0$  f)  $4^x - 2^x + 6 = m$

**Bài 12.** Tìm  $m$  để các phương trình sau:

a)  $m.16^x + 2.81^x = 5.36^x$  có 2 nghiệm dương phân biệt.  
b)  $16^x - m.8^x + (2m-1).4^x = m.2^x$  có 3 nghiệm phân biệt.  
c)  $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$  có 3 nghiệm phân biệt.  
d)  $9^{x^2} - 4.3^{x^2} + 8 = m$  có 3 nghiệm phân biệt.

## 2) Phương trình logarit

**Bài 1.** Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

a)  $\log_2(9-2^x) = 3-x$  b)  $\log_3(3^x-8) = 2-x$   
c)  $\log_7(6+7^{-x}) = 1+x$  d)  $\log_3(4.3^{x-1}-1) = 2x-1$   
e)  $\log_2(9-2^x) = 5^{\log_5(3-x)}$  f)  $\log_2(3.2^x-1) - 2x - 1 = 0$

g)  $\log_2(12-2^x) = 5-x$

h)  $\log_5(26-3^x) = 2$

i)  $\log_2(5^{x+1}-25^x) = 2$

k)  $\log_4(3.2^{x+1}-5) = x$

l)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1}-25^x) = -2$

m)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x) = -2$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

a)  $\log_{5-x}(x^2-2x+65) = 2$

b)  $\log_{x-1}(x^2-4x+5) = 1$

c)  $\log_x(5x^2-8x+3) = 2$

d)  $\log_{x+1}(2x^3+2x^2-3x+1) = 3$

e)  $\log_{x-3}(x-1) = 2$

f)  $\log_x(x+2) = 2$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a)  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

b)  $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{1/2} x = 2$

c)  $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

d)  $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

r)  $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

s)  $\log_{x^2} 3 + \log_9 x = 1$

t)  $\frac{1}{4-\lg x} + \frac{2}{2+\lg x} = 1$

u)  $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{3}{3+\lg x} = 1$

v)  $\log_{2x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a)  $\log_3^2 x + (x-12)\log_3 x + 11 - x = 0$

b)  $6.9^{\log_2 x} + 6.x^2 = 13.x^{\log_2 6}$

c)  $x.\log_2^2 x - 2(x+1).\log_2 x + 4 = 0$

d)  $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$

e)  $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$

f)  $\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2-x}} x = 2$

g)  $\log_3^2(x+1) + (x-5)\log_3(x+1) - 2x + 6 = 0$

h)  $4\sqrt{\log_3 x - 1} - \log_3 \sqrt{x} = 4$

i)  $\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2+7x+12) = 3 + \log_2 3$

**Bài 5.** Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a)  $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$

b)  $\log_2(x-3) + \log_3(x-2) = 2$

c)  $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$

d)  $\log_2(x+3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

e)  $4^{\log_7(x+3)} = x$

f)  $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$

g)  $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

h)  $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

i)  $\log_2(x-\sqrt{x^2-1}).\log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_6(x-\sqrt{x^2-1})$

**Bài 6.** Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

a)  $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5} \quad (x > 0)$

b)  $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$

c)  $\log_5(x+3) = 3-x$

d)  $\log_2(3-x) = x$

e)  $\log_2(x^2-x-6) + x = \log_2(x+2) + 4$

f)  $x + 2.3^{\log_2 x} = 3$

g)  $4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1)$

**Bài 7.** Giải các phương trình sau (đưa về phương trình tích):

a)  $\log_2 x + 2.\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x$

b)  $\log_2 x.\log_3 x + 3 = 3.\log_3 x + \log_2 x$

c)  $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1)$

**Bài 8.** Giải các phương trình sau (phương pháp đối lập):

a)  $\ln(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0$

b)  $\log_2 (x^2 + |x| - 1) = \sqrt{1-x^2}$

c)  $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3 (4x^2 - 4x + 4)}$

**Bài 9.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a)  $\log_{2+\sqrt{3}} [x^2 - 2(m+1)x] + \log_{2-\sqrt{3}} (2x+m-2) = 0$  b)  $\log_{\sqrt{2}} (x-2) = \log_2 (mx)$

c)  $\log_{\sqrt{5+2}} (x^2 + mx + m + 1) + \log_{\sqrt{5-2}} x = 0$

d)  $\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2$

e)  $\log_3 (x^2 + 4mx) = \log_3 (2x - 2m - 1)$

f)  $\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} (x-m+1) + \log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} (mx-x^2) = 0$

**Bài 10.** Tìm  $m$  để các phương trình sau:

a)  $\log_2 (4^x - m) = x + 1$  có 2 nghiệm phân biệt.

b)  $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1 \cdot x_2 = 27$ .

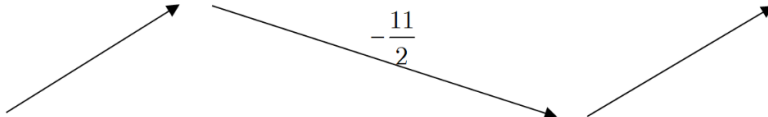
c)  $2 \log_4 (2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2 (x^2 + mx - 2m^2)$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 > 1$ .

d)  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ .

e)  $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m = 0$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; 1)$ .

**Bài 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  và  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình

vẽ và  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{137}{16}$ .

|          |                                                                                      |      |               |     |           |     |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------|-----|-----------|-----|
| $x$      | $-\infty$                                                                            | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f''(x)$ | $+$                                                                                  | $0$  | $-$           | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f'(x)$  |  |      |               |     |           |     |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in [-2020; 2020]$  để hàm số  $g(x) = e^{-x^2+4mx-5} \cdot f(x)$  đồng biến trên  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .

**Bài 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $2020^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 2020}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thỏa mãn  $f(\log m) < f(\log_m 2020)$ ?

### 3) Bất phương trình mũ và logarit

**Bài 1.** Giải các bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

a)  $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$

b)  $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$

c)  $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$

d)  $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$

$$\text{c) } \frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0 \quad \text{f) } \frac{3^x + x - 4}{x^2 - x - 6} > 0$$

$$\text{g) } \sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3^x \cdot 2x \sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + (2x)^2 3^x$$

**Bài 2.** Tìm  $m$  để các bất phương trình sau có nghiệm:

$$\text{a) } 4^x - m \cdot 2^x + m + 3 \leq 0$$

$$\text{b) } 9^x - m \cdot 3^x + m + 3 \leq 0$$

$$\text{c) } \sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \leq m$$

$$\text{d) } (\sqrt{2} + 1)^{x^2} + (\sqrt{2} - 1)^{x^2 - 1} + m = 0$$

**Bài 3.** Tìm  $m$  để các bất phương trình sau nghiệm đúng với:

$$\text{a) } (3m + 1) \cdot 12^x + (2 - m) \cdot 6^x + 3^x < 0, \forall x > 0. \quad \text{b) } (m - 1)4^x + 2^{x+1} + m + 1 > 0, \forall x.$$

$$\text{c) } m \cdot 9^x - (2m + 1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0, \forall x \in [0; 1]. \quad \text{d) } m \cdot 9^x + (m - 1) \cdot 3^{x+2} + m - 1 > 0, \forall x.$$

$$\text{e) } 4^{|\cos x|} + 2(2m + 1)2^{|\cos x|} + 4m^2 - 3 < 0, \forall x. \quad \text{f) } 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - m \geq 0, \forall x.$$

$$\text{g) } 4^x - 2^x - m \geq 0, \forall x \in (0; 1)$$

$$\text{h) } \sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x} \leq m, \forall x.$$

$$\text{i) } 2 \cdot 25^x - (2m + 1) \cdot 10^x + (m + 2) \cdot 4^x \geq 0, \forall x \geq 0. \quad \text{k) } 4^{x-1} - m \cdot (2^x + 1) > 0, \forall x.$$

**Bài 4.** Tìm  $m$  để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của bất phương trình (2):

$$\text{a) } \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x} + 1} > 12 \\ (m - 2)^2 x^2 - 3(m - 6)x - m - 1 < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x} + 1} > 8 \\ 4x^2 - 2mx - (m - 1)^2 < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 \leq 0 \\ (m^2 + 1)x + m(x + 3) + 1 > 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{d) } \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x} + 2} > 12 \\ 2x^2 + (m + 2)x + 2 - 3m < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

**Bài 5.** Giải các bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

$$\text{a) } (x + 1) \log_{0,5}^2 x + (2x + 5) \log_{0,5} x + 6 \geq 0$$

$$\text{b) } \log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$$

$$\text{c) } \frac{3}{\log_2(x + 1)} > \frac{2}{\log_3(x + 1)}$$

$$\text{d) } \frac{\lg \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$$

**Bài 6.** Tìm  $m$  để các bất phương trình sau có nghiệm:

$$\text{a) } \log_{1/2}(x^2 - 2x + m) > -3$$

$$\text{b) } \log_x 100 - \frac{1}{2} \log_m 100 > 0$$

$$\text{c) } \frac{1}{5 - \log_m x} + \frac{2}{1 + \log_m x} < 1$$

$$\text{d) } \frac{1 + \log_m^2 x}{1 + \log_m x} > 1$$

$$\text{e) } \sqrt{\log_2 x + m} > \log_2 x$$

$$\text{f) } \log_{x-m}(x^2 - 1) > \log_{x-m}(x^2 + x - 2)$$

**Bài 7.** Tìm  $m$  để các bất phương trình sau nghiệm đúng với:

$$\text{a) } \log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m), \forall x$$

$$\text{b) } \log_2(\sqrt{x^2 - 2x + m}) + 4\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + m)} \leq 5, \forall x \in [0; 2]$$

$$\text{c) } 1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m), \forall x.$$

$$\text{d) } \left(2 - \log_1 \frac{m}{1+m}\right)x^2 - 2\left(1 + \log_1 \frac{m}{1+m}\right)x - 2\left(1 + \log_1 \frac{m}{1+m}\right) > 0, \forall x$$

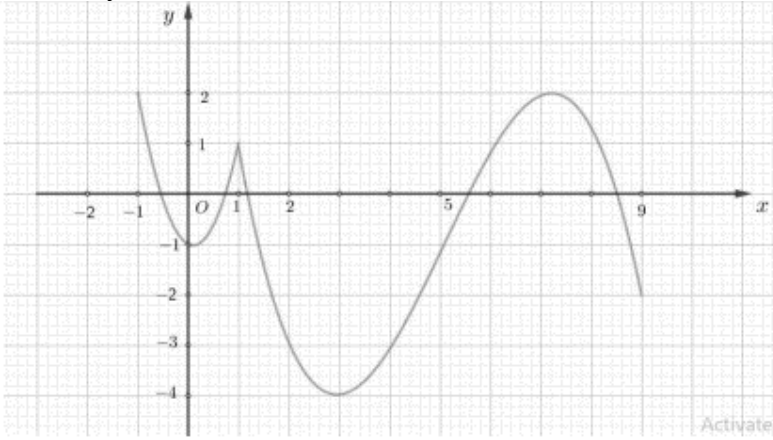
**Bài 8.** Giải bất phương trình, biết  $x = a$  là một nghiệm của bất phương trình:

$$\text{a) } \log_m(x^2 - x - 2) > \log_m(-x^2 + 2x + 3); \quad a = 9/4.$$

b).  $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x); \quad a = 1$

**Bài 9.** Tìm tập  $S$  tất cả các giá trị thực của số  $m$  để tồn tại duy nhất cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$  và  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ .

**Bài 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 9]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để bất phương trình  $16 \cdot 3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot 4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^{f(x)}$  nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc  $[-1; 9]$ ?

#### 4) Hệ phương trình mũ và logarit

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

a)  $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2 \\ \log_y(2x+3y) = 2 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_y(6y+4x) = 2 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} \log_2\left(1 - \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_2 y \\ \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x + \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} y = 4 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2 + 6) = 4 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$  f)  $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$  g)  $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 3 \cdot x^{\log_2 y} + 2 \cdot y^{\log_2 x} = 10 \\ \log_4 x^2 + \log_2 y = 2 \end{cases}$  i)  $\begin{cases} \log_x(2x+y-2) = 2 \\ \log_y(2y+x-2) = 2 \end{cases}$  k)  $\begin{cases} \log_2(xy) = 4 \\ \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$

l)  $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$  m)  $\begin{cases} \log_y x + \log_y x = \frac{5}{2} \\ \log_6(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}$  n)  $\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y) \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1 \end{cases}$

o)  $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 8 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3 \end{cases}$  p)  $\begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y+23) = 3 \end{cases}$  q)  $\begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1 \\ \log_2(y-x) = 1 \end{cases}$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

a)  $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x^{x-2y} = 36 \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$

$$d) \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2 \left( \log_{\frac{1}{y}} x - 2 \log_{x^2} y \right) + 5 = 0 \\ xy^2 = 32 \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3} \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x-y) = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18 \\ \log_{\frac{1}{3}} (x+y) = -1 \end{cases}$$

**Bài 5.**

Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn  $a, b, c \in [1; 2]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2(ab+bc+ca)}{2(2a+b+c)+abc} + \frac{8}{2a(b+c)+bc+4} - \frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}$$

Bài 6.

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{121}{14(ab + bc + ca)}$

## 5) Nguyên hàm

**Bài 1.** Tính các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx & b) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx & c) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx \\ d) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx & e) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx & f) \int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx \\ g) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} & h) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} & i) \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} \\ k) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} & l) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}} & m) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}} \end{array}$$

**Bài 2.** Tính các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} a) \int \sin 2x \sin 5x dx & b) \int \cos x \sin 3x dx & c) \int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx \\ d) \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx & e) \int \frac{dx}{2 \sin x + 1} & f) \int \frac{dx}{\cos x} \\ g) \int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx & h) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx & i) \int \frac{dx}{\cos x \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} \end{array}$$

$$\text{k) } \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx \quad \text{l) } \int \cos^3 x dx \quad \text{m) } \int \sin^4 x dx$$

**Bài 3.** Tính các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int e^{\sqrt{x}} dx & \text{b) } \int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}} & \text{c) } \int \sin \sqrt{x} dx \\ \text{d) } \int \cos \sqrt{x} dx & \text{e) } \int x \cdot \sin \sqrt{x} dx & \text{f) } \int \sin \sqrt[3]{x} dx \\ \text{g) } \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx & \text{h) } \int \sin(\ln x) dx & \text{i) } \int \cos(\ln x) dx \end{array}$$

**Bài 4.** Tính các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int e^x \cdot \cos x dx & \text{b) } \int e^x (1 + \tan x + \tan^2 x) dx & \text{c) } \int e^x \cdot \sin 2x dx \\ \text{d) } \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx & \text{e) } \int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx & \text{f) } \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \\ \text{g) } \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & \text{h) } \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx & \text{i) } \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \end{array}$$

**Bài 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) < 0, \forall x > 0$  và có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên khoảng

$$(0; +\infty) \text{ thỏa mãn } f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0 \text{ và } f(1) = -\frac{1}{2}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } f(1) + f(2) + \dots + f(2020).$$

## 6) Khối cầu – Mặt cầu

**Bài 1.** Trong mặt phẳng (P), cho đường thẳng d và một điểm A ngoài d. Một góc xAy di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

- Chứng minh A, B, C, H, K thuộc cùng một mặt cầu.
- Tính bán kính mặt cầu trên, biết  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ .

**Bài 2.** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng  $60^\circ$ . Gọi O là tâm của tam giác ABC. Trong tam giác SAO dựng đường trung trực của cạnh SA, cắt SO tại K.

- Tính SO, SA.
- Chứng minh  $\triangle SMK \sim \triangle SOA$  (với M là trung điểm của SA). Suy ra KS.
- Chứng minh hình chóp K.ABC là hình chóp đều. suy ra:  $KA = KB = KC$ .
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

**Bài 3.** Cho hình chóp S.ABC. biết rằng có một mặt cầu bán kính R tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

- Chứng minh rằng S.ABC là hình chóp đều.
- Tính chiều cao của hình chóp, biết rằng  $IS = R\sqrt{3}$

**Bài 4.** Cho tứ diện đều ABCD có cạnh là a.

- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
- Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

**Bài 5.** Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc  $60^\circ$ .

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

**Bài 6.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Gọi  $AH, AK$  lần lượt là các đường cao của các tam giác  $SAB$  và  $SAC$ .

a) Chứng minh rằng năm điểm  $A, B, C, H, K$  cùng ở trên một mặt cầu.

b) Cho  $AB = 10, BC = 24$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

**Bài 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a, SA = a\sqrt{7}$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Một mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và vuông góc với  $SC$ , cắt  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $H, M, K$ .

a) Chứng minh rằng bảy điểm  $A, B, C, D, H, M, K$  cùng ở trên một mặt cầu.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

**Bài 8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Tam giác  $SAB$  nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Biết rằng  $AB = a, AD = a\sqrt{3}$  và  $\widehat{ASB} = 60^\circ$ . Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

### 7) Hình trụ - Khối trụ

**Bài 1.** Cho hình trụ bán kính đáy  $R$ , chiều cao  $OO' = h$ ,  $A$  và  $B$  là hai điểm thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài  $AB = a$  không đổi ( $h > a < \sqrt{h^2 + 4R^2}$ ).

a) Chứng minh góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OO'$  không đổi.

b) Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OO'$  không đổi.

**Bài 2.** Trong không gian cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $I$  và  $H$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Khi quay hình vuông đó xung quanh trục  $IH$  ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay được tạo nên.

b) Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được tạo nên bởi hình trụ tròn xoay đó.

**Bài 3.** Một hình trụ có bán kính đáy  $R$  và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

**Bài 4.** Cho hình trụ bán kính đáy  $R$ , chiều cao  $h$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy  $(O, R)$  và  $(O', R)$  sao cho  $OA$  và  $O'B$  hợp với nhau một góc bằng  $x$  và hai đường thẳng  $AB, O'O$  hợp với nhau một góc bằng  $y$ .

a) Tính bán kính  $R$  theo  $h, x, y$ .

b) Tính  $S_{xq}, S_{tp}$  và thể tích  $V$  của hình trụ theo  $h, x, y$ .

**Bài 5.** Cho hình trụ bán kính đáy bằng  $a$  và trục  $OO' = 2a$ .  $OA$  và  $OB'$  là hai bán kính của hai đường tròn đáy  $(O), (O')$  sao cho góc của  $OA$  và  $OB'$  bằng  $30^\circ$ .

a) Tính độ dài đoạn thẳng  $AB'$ .

b) Tính tang của góc giữa  $AB'$  và  $OO'$ .

c) Tính khoảng cách giữa  $AB'$  và  $OO'$ .

**Bài 6.** Một khối trụ có các đáy là hai hình tròn tâm  $O$  và  $O'$ , bán kính  $R$  và có đường cao  $h = R\sqrt{2}$ . Gọi  $A$  là một điểm trên đường tròn tâm  $O$  và  $B$  là một điểm trên đường tròn tâm  $O'$  sao cho  $OA$  vuông góc với  $O'B$ .

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện  $OABO'$  là những tam giác vuông. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện  $OABO'$  và khối trụ.
- b) Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $AB$  và song song với  $OO'$ . Tính khoảng cách giữa trục  $OO'$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- c) Chứng minh rằng  $(\alpha)$  là tiếp diện của mặt trụ có trục  $OO'$  và có bán kính đáy bằng  $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

### 8) Hình nón – Khối nón

**Bài 1.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chiều cao  $SO = h$  và  $\widehat{SAB} = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh  $S$  và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông  $ABCD$ .

**Bài 2.** Một hình nón có độ dài đường sinh bằng 1 và góc giữa đường sinh và đáy là  $\alpha$ .

- a) Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.
- b) Gọi  $I$  là điểm trên đường cao  $SO$  của hình nón sao cho  $\frac{SI}{SO} = k$  ( $0 < k < 1$ ). Tính diện tích của thiết diện qua  $I$  và vuông góc với trục.

**Bài 3.** Cho hình nón có đường cao  $SO = h$  và bán kính đáy  $R$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $OS$ , đặt  $OM = x$  ( $0 < x < h$ ).

- a) Tính diện tích thiết diện  $(C)$  vuông góc với trục tại  $M$ .
- b) Tính thể tích  $V$  của khối nón đỉnh  $O$  và đáy  $(C)$  theo  $R$ ,  $h$  và  $x$ . Xác định  $x$  sao cho  $V$  đạt giá trị lớn nhất.

TTCM. Đỗ Lê Hải Thụy

