

KNOWLEDGE IS POWER



SỔ TAY

ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

Dành cho HS lớp 11

11

BY **PHẠM HOÀNG LONG**
2020 - 2021



THẦY PHẠM HOÀNG LONG

GV chuyên luyện thi TOÁN 9-10-11-12

Biên Hòa

Đây là một cuốn sổ tay về **Đại số và Giải tích 11** được tôi biên soạn một cách tỉ mỉ và cẩn thận. Nội dung trong tài liệu phần lớn là lý thuyết từ sách giáo khoa. Hi vọng tài liệu này giúp ích cho quý thầy cô và các em học sinh!

Tôi rất mong nhận được sự đóng góp từ các đồng nghiệp và tất cả bạn đọc!

Liên hệ



[fb/phamhoanglong1809](https://fb.com/phamhoanglong1809)



phamhoanglong1809@gmail.com



0902.408.106



TT BD-VH **Trí Việt** (Đối diện KTX chuyên LTV)

66, Đặng Đức Thuật, p.Tam Hiệp, Biên Hòa, ĐN



LƯỢNG GIÁC

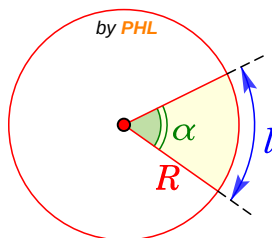
I. Giá trị lượng giác

1. Cung tròn. Độ và radian

a. Đổi độ qua rad (ngược lại)

$$\begin{array}{l} 180^\circ = \pi \\ x^\circ = ? \longrightarrow \frac{x \cdot \pi}{180} \end{array} \quad \text{hay} \quad \begin{array}{l} 180^\circ = \pi \\ y \frac{80^\circ}{\pi} \longleftarrow ? = y \end{array}$$

b. Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R \cdot \alpha$.



2. Giá trị lượng giác của một cung

a. $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

c. $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d. $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

e. $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

II. Công thức lượng giác

1. Công thức lượng giác cơ bản

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

2. Giá trị lượng giác của các góc (cung) đặc biệt

a. Góc đối nhau: α và $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

b. Góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

c. Góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

d. Góc hơn kém π : α và $\pi + \alpha$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

Chú ý. “cos – đối, sin – bù, phụ – chéo”

3. Một số công thức lượng giác

a. Công thức cộng

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

b. Công thức nhân đôi

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

c. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

d. Công thức nhân ba

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

e. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

f. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

g. Công thức góc chia đôi

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta có

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Chú ý.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x)$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin(2x)$$

III. Hàm lượng giác

1. Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D được gọi là hàm số **tuần hoàn** nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có

a. $x - T \in D$ và $x + T \in D$;

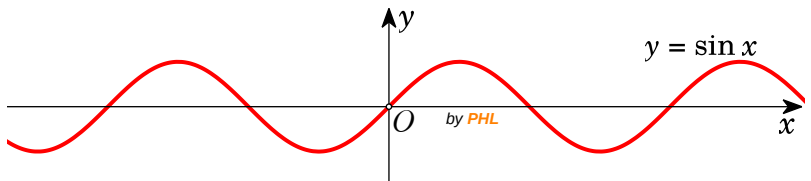
b. $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

2. Các hàm số lượng giác

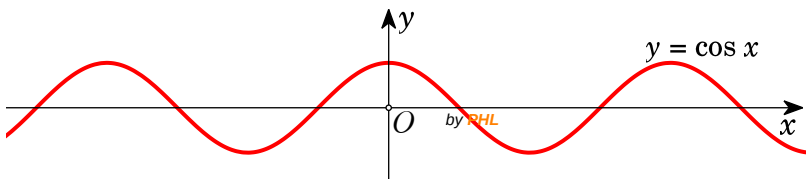
a. Hàm số $y = \sin x$

- $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $y = \sin x$ có tập xác định $\mathbb{R}$, là hàm **lẻ** và là hàm tuần hoàn có chu kì 2π



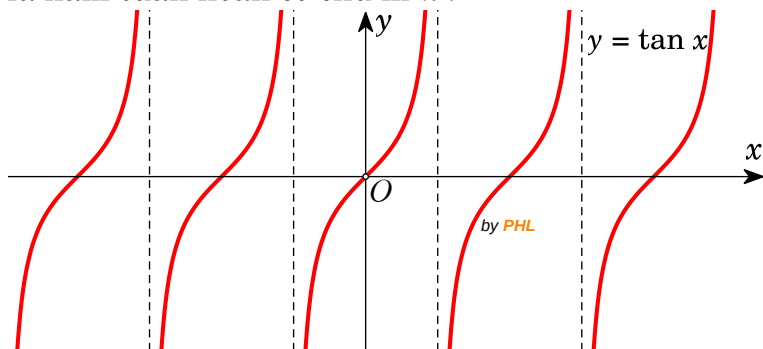
b. Hàm số $y = \cos x$

- $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $y = \cos x$ có tập xác định $\mathbb{R}$, là hàm **chẵn** và là hàm tuần hoàn có chu kì 2π

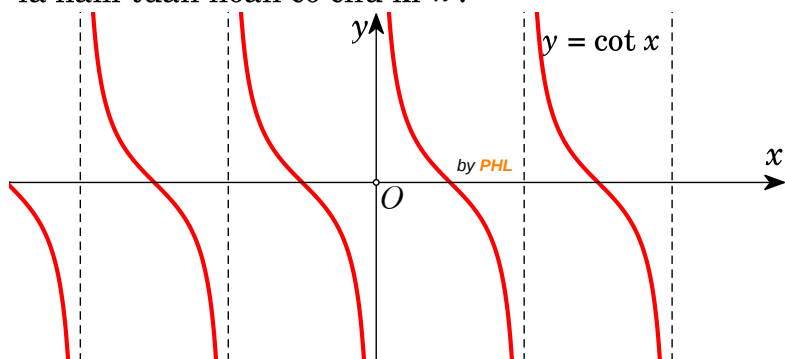


c. Hàm số $y = \tan x$ Hàm số $y = \tan x$

- có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,
- là hàm **lẻ**,
- là hàm tuần hoàn có chu kì π .

**d. Hàm số $y = \cot x$** Hàm số $y = \cot x$

- có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
- là hàm **lẻ**,
- là hàm tuần hoàn có chu kì π .



3. Cách tính chu kì một số hàm số tuần hoàn

a. $y = \sin x$, $y = \cos x$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π .

b. $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn có chu kì π .

c. Hàm số $y = \sin(ax + b)$, $y = \cos(ax + b)$ là hàm tuần hoàn có chu kì $\frac{2\pi}{|a|}$ với $a \in \mathbb{Z}$.

d. Hàm số $y = \tan(ax + b)$, $y = \cot(ax + b)$ là hàm tuần hoàn có chu kì $\frac{\pi}{|a|}$ với $a \in \mathbb{Z}$.

e. $f(x) = a.\sin(ux) + b.\cos(vx) + c$ (với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn có chu kì $T_f = \frac{2\pi}{|(u, v)|}$.

f. $g(x) = a.\tan(ux) + b.\cot(vx) + c$ (với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn có chu kì $T_g = \frac{\pi}{|(u, v)|}$.

với (u, v) là **ước chung lớn nhất**.

IV. Phương trình lượng giác

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = a \quad (1)$$

- Nếu $|a| > 1$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$$

$$\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

Đặc biệt.

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. Phương trình $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = a \quad (2)$$

- Nếu $|a| > 1$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

Đặc biệt.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c. Phương trình $\tan x = \tan \alpha$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$$

$$\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

Đặc biệt. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

d. Phương trình $\cot x = \cot \alpha$

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot u = -\cot v \Leftrightarrow \cot u = \cot(-v)$$

$$\text{Đặc biệt. } \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý. Trong một công thức nghiệm, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

2. Một số phương trình lượng giác hay gặp

a. Phương trình bậc nhất đối với một hàm lượng giác

Dạng $a.t + b = 0$ ($a \neq 0$) với t là một trong các hàm số lượng giác.

b. Phương trình bậc hai đối với một hàm lượng giác

Dạng $a.t^2 + b.t + c = 0$ ($a \neq 0$) với t là một trong các hàm số lượng giác.

c. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a.\sin x + b.\cos x = c$ (1)

Phương pháp giải.

B1. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

B2. Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với

$\alpha \in [0; 2\pi]$, phương trình trở thành

$$\sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{hay } \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chú ý 1. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

B3. Khi đó ta đặt tiếp $\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, phương trình trở thành $\sin(x + \alpha) = \sin \beta$.

Chú ý 2. Bất đẳng thức

$$|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

hay $|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b}$ hay $\tan x = \frac{a}{b}$.

d. PT thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = d$ (1)

Phương pháp giải 1.

TH1. Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$. Thay vào PT (1).

Kết luận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) có là nghiệm hay không?

TH2. Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế PT (1) cho $\cos^2 x$ ta có

$$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = d \cdot (1 + \tan^2 x).$$

Sau đó đặt $t = \tan x$, đưa về PT trên thành PT bậc hai theo ẩn t .

Phương pháp giải 2.

$$(1) \Leftrightarrow a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \sin 2x + (c - a) \cdot \cos 2x = 2d - a - c$$

(đây là PT bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$)

e. Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a.(\sin x + \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$ (1)

Phương pháp giải.

B1. Đặt $t = \sin x + \cos x$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

B2. Thay vào (1) ta được phương trình

$$a.t + b.\frac{1}{2}(t^2 - 1) + c = 0.$$

Sau đó biến đổi PT trên thành PT bậc hai theo ẩn t với điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Chú ý.

Nếu PT dạng $a.(\sin x - \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$ thì ta đặt $t = \sin x - \cos x$.

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

I. Quy tắc đếm

1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B.

- Phương án A có m cách thực hiện.
- Phương án B có n cách thực hiện.

Vậy công việc đó được thực hiện bởi $m + n$ cách.

2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc bao gồm hai công đoạn 1 và 2.

- Công đoạn 1 có thể làm theo m cách.
- Ứng với mỗi cách thực hiện công đoạn 1 thì công đoạn 2 có thể làm theo n cách.

Vậy công việc có thể thực hiện theo $m.n$ cách.

Chú ý. Quy tắc nhân có thể áp dụng cho công việc có nhiều công đoạn.

II. Hoán vị

Kết quả của sự cách sắp xếp tất cả n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nào đó được gọi là một **hoán vị** của X .

Số các hoán vị của n phần tử là

$$P_n = 1.2.3...(n-1).n = n!$$

với $n!$ đọc là n **giai thừa**.

Quy ước $0! = 1$.

III. Chinh hợp

Kết quả của việc lấy k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của X và xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là **chinh hợp** chập k của n phần tử.

Số các chinh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nếu $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

Quy ước $A_n^0 = 1$.

IV. Tổ hợp

Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của X được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Tính chất.

$$\bullet C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\bullet C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

V. Nhị thức Newton

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \\ &= C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + C_n^n \cdot b^n \end{aligned} \quad (1)$$

Hệ quả.

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

- Số các số hạng của khai triển bằng $n + 1$.
- Các số hạng có số mũ của a **giảm** dần ($n \rightarrow 0$) và số mũ của b **tăng** dần ($0 \rightarrow n$)

- Số hạng tổng quát thứ $k+1$ có dạng $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ với $k = 0, 1, \dots, n$.

VI. Tam giác Pascal

Trong công thức nhị thức Newton ở trên, cho $n = 0, 1, \dots$ và xếp các hệ số theo dòng ta nhận được tam giác dưới, gọi là **tam giác Pascal**.

$$\begin{array}{ccccccc}
n=0 & & & & & & 1 \\
n=1 & & & & 1 & & 1 \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

VII. Phép thử và biến cố

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán được trước kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Không gian mẫu Ω là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

Biến cố là một tập con A của không gian mẫu Ω .

Tập $\emptyset$ được gọi là **biến cố không thể**.

Tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

Biến cố đối của biến cố A là tập $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

- A và B đối nhau $\Leftrightarrow A = \bar{B}$
- $\bar{A}$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ không xảy ra

Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của biến cố A và B .

($A \cup B$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ xảy ra **hoặc** B xảy ra)

Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của biến cố A và B .

($A \cap B$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ **và** B đồng thời xảy ra)

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B **xung khắc**.

(A, B xung khắc $\Leftrightarrow$ chúng không khi nào cùng xảy ra)

VIII. Xác suất

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng

khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là **xác suất của**

biến cố A , kí hiệu $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

với $n(A)$ là số phần tử của A hay là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A ,

còn $n(\Omega)$ là số phần tử của Ω hay là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Tính chất.

- $P(\emptyset) = 0$ và $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ với mọi biến cố A

- Nếu A , B xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ với mọi biến cố A

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

$$A \text{ và } B \text{ độc lập} \Leftrightarrow P(A.B) = P(A).P(B).$$

Hơn nữa, $A_1, A_2, \dots, A_k$ độc lập

$$\Leftrightarrow P(A_1.A_2...A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k).$$

DẪY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

I. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n , ta thực hiện như sau

B1. Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.

B2. Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý ($k \geq 1$) (**Giả thiết quy nạp**).

Sau đó chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó được gọi là **phương pháp quy nạp toán học**.

II. Dãy số

1. Định nghĩa

a. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là **dãy số** và viết là (u_n)). Ký hiệu

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

trong đó u_1 là số **hạng đầu**, u_n là số hạng thứ n (hay **số hạng tổng quát** của dãy số).

b. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là **dãy số hữu hạn**.

Dạng khai triển của dãy số $u_1, u_2, \dots, u_m$ với u_1 là số **hạng đầu**, u_m là **số hạng cuối**.

2. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

a. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số (u_n) là dãy số **tăng** $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) là dãy số **giảm** $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý. Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.

Chẳng hạn dãy (u_n) với $u_n = (-2)^n$ là dãy **không tăng** và cũng **không giảm**.

b. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

III. Cấp số cộng

(u_n) là một **cấp số cộng** $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(Với d là **công sai**)

Chú ý. Nếu $d = 0$ thì CSC là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$.

$$d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$$

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2.$$

a, b, c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

Tổng n số hạng đầu tiên

$$S_n = \frac{n.(u_1 + u_n)}{2} \text{ hay } S_n = \frac{n.(2u_1 + (n-1)d)}{2}.$$

IV. Cấp số nhân

(u_n) là một **cấp số nhân** $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(với q là **công bội**)

Chú ý.

- Nếu $q = 1$ thì CSN là một dãy số không đổi.
- Nếu $q = 0$ thì CSN có dạng $u_1, 0, 0, \dots$
- Nếu $u_1 = 0$ thì $\forall q$ CSN có dạng $0, 0, 0, \dots$

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.$$

a, b, c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$.

Tổng n số hạng đầu tiên

- Nếu $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \frac{u_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$.

GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

1. Giới hạn hữu hạn

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

2. Giới hạn vô cực

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow u_n$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Chú ý. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ được viết tắt là $\lim u_n$.

3. Các giới hạn đặc biệt

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

(với k nguyên dương)

b. Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Nếu $q > 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

c. $\lim C = C$ với C là hằng số.

d. $\lim \sqrt{n} = +\infty$ và $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

4. Định lý về giới hạn hữu hạn

a. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$$\bullet \lim [u_n + v_n] = a + b \qquad \bullet \lim [u_n - v_n] = a - b$$

$$\bullet \lim[u_n \times v_n] = a \times b \quad \bullet \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ với } b \neq 0.$$

Đặc biệt. $\lim[C.v_n] = C.b$ với C là hằng số.

b. Nếu $\lim u_n = a$ và $u_n \geq 0, \forall n$ thì

$$a \geq 0 \text{ và } \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

c. Nếu $\lim u_n = a$ thì

$$\lim |u_n| = |a| \text{ và } \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}.$$

d. Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

5. Liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực

a. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ thì

- hoặc $\lim[u_n \times v_n] = +\infty$ nếu $a > 0$,
- hoặc $\lim[u_n \times v_n] = -\infty$ nếu $a < 0$.

c. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ thì

- hoặc $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ nếu $a.v_n > 0$,
- hoặc $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$ nếu $a.v_n < 0$.

6. Cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Tổng S của CSN lùi vô hạn (u_n) là $S = \frac{u_1}{1-q}$.

II. Giới hạn của hàm số

1. Giới hạn hữu hạn

a. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

b. Giới hạn một bên

• Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên phải** của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

• Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên trái** của $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

c. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

• Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

• Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì,
 $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

2. Giới hạn vô cực

• Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì,
 $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

• Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì,
 $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt

a. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

b. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x} = 0$

(với C là hằng số)

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

(với k nguyên dương)

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

4. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1.

a. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$, • $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = L \times M$, • $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ với $M \neq 0$.

Đặc biệt. $\lim_{x \rightarrow x_0} [C.g(x)] = C.M$ với C là hằng số.

b. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $f(x) \geq 0, \forall n$ thì

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

c. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L| \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}.$$

Chú ý. Định lý vẫn đúng với $x \rightarrow -\infty$ và $x \rightarrow +\infty$.

Định lý 2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$ nếu $L, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ cùng dấu,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = -\infty$ nếu $L, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ trái dấu.

b. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ thì

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $L.g(x) > 0$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $L.g(x) < 0$.

III. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

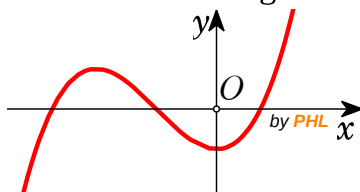
2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a; b)$.

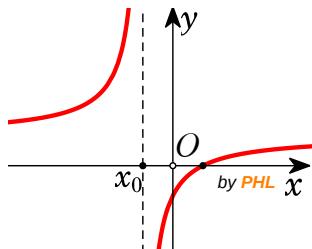
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một **“đường liền”** trên khoảng đó.



Một ví dụ về đồ thị của hàm số **gián đoạn** tại x_0



3. Một số định lý cơ bản

Định lý 1.

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 2. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0 , ta có

- $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \times g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 với $g(x) \neq 0$.

Định lý 3.

Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ thỏa $f(c) = 0$.

Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có **ít nhất** một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

ĐẠO HÀM

I. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

1. Định nghĩa

Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ và $x_0 + \Delta x \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm** của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 , kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của biến số tại x_0 . Tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

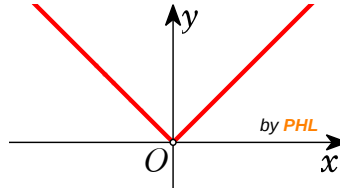
3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý.

- Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

- Một số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó. Chẳng hạn, hàm số $y = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó. Đồ thị hàm số $y = |x|$ là một đường liên nhưng bị “gãy” tại điểm $O(0;0)$.

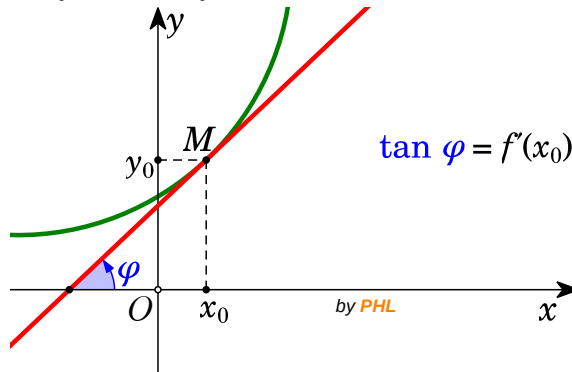


4. Tiếp tuyến của đường cong phẳng

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì **tiếp tuyến** của đồ thị hàm số đó tại **tiếp điểm** $M(x_0; y_0)$ có phương trình là

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

với $y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là hệ số góc.



5. Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

II. Quy tắc tính đạo hàm

1. Phép toán

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định, ta có

$$\begin{aligned} &\bullet (u+v)' = u' + v' & \bullet (u-v)' = u' - v' \\ &\bullet (u.v)' = u'.v + u.v' & \bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0) \end{aligned}$$

Đặc biệt.

$$\begin{aligned} &\bullet (k.u)' = k.u' \text{ với } k \text{ là hằng số.} \\ &\bullet \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ với } v(x) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(u(x))$ có đạo hàm tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

3. Công thức

$$(x^n)' = n.x^{n-1}$$

$$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}.u'$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin u)' = u'.\cos u$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos u)' = -u'.\sin u$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

III. Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a; b)$.

Tích $f'(x) \cdot \Delta x$ (hay $y' \cdot \Delta x$) được gọi là **vi phân** của hàm số $f(x)$ tại x ứng với số gia Δx .

Kí hiệu là $df(x)$ hay dy .

Chú ý. Vì $dx = \Delta x$ nên $dy = f'(x) \cdot dx$

IV. Đạo hàm cấp cao

a. Cho hàm số y có đạo hàm y' . Nếu y' cũng có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là **đạo hàm cấp 2** của y , kí hiệu là $y'' = (y')'$.

b. Ta có $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$ là đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) của hàm số y .

Chú ý. $y^{(0)} = y$

Mục lục

LƯỢNG GIÁC 1

TỔ HỢP - XÁC SUẤT 13

DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN 18

GIỚI HẠN 21

ĐẠO HÀM 28