



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ**

NHÓM TOÁN VD - VDC

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

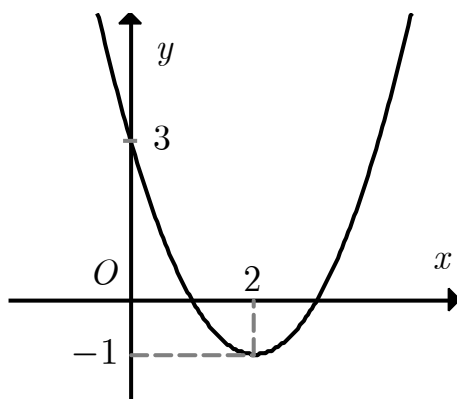
PHẦN 1: BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

- Dạng toán 1.** Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).
- Dạng toán 2.** Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 3.** Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 4.** Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x))$; $y = f(f(x))$, ... $y = f(f(f(x)))$ trong bài toán không chứa tham số
- Dạng toán 5.** Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(f(x))$, ... $y = f(f(f(x)))$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 6.** Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = \ln(f(x))$, $y = e^{f(x)}$, $\sin f(x)$, $\cos f(x)$... trong bài toán không chứa tham số
- Dạng toán 7.** Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = \ln(f(x))$, $y = e^{f(x)}$, $\sin f(x)$, $\cos f(x)$... trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 8.** Các dạng khác với các dạng đã đưa ra...

NHÓM TOÁN VD - VDC

DẠNG 1. Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $g = f(x^2)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

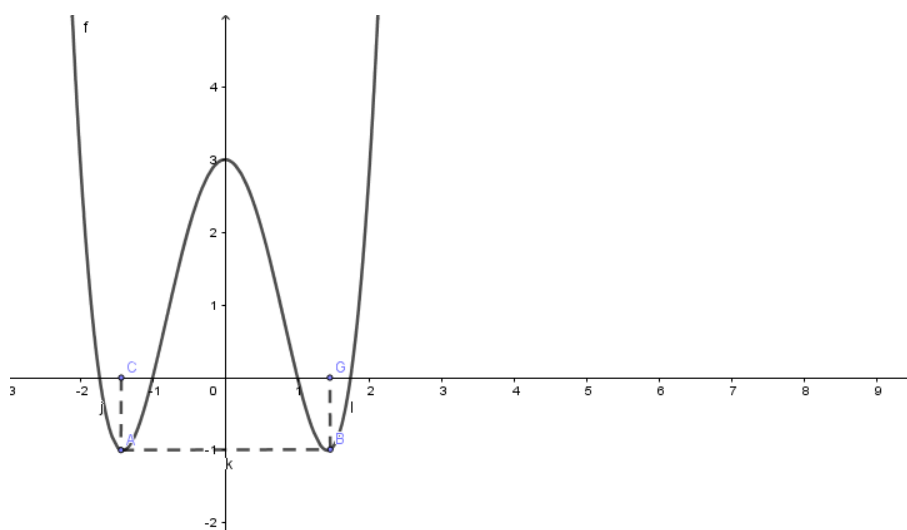
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g = f(x^2)$.

Đặt $t = x^2$. Khi đó với $t \geq 0$, hàm $g = f(t)$ có đồ thị là dạng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục Oy . Hàm số $g = f(x^2)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đó ta có đồ thị hàm $g(t)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2, biết rằng hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ và khoảng cách từ giao điểm của parabol với trục tung đến điểm O bằng 4. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x+1|)|$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ nên $a < 0$.

Biết $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2 nên $f(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2) = ax^2 - 3ax + 2a$.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2a$, ta có $|2a| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$.

Do hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ nên $a = -2$.

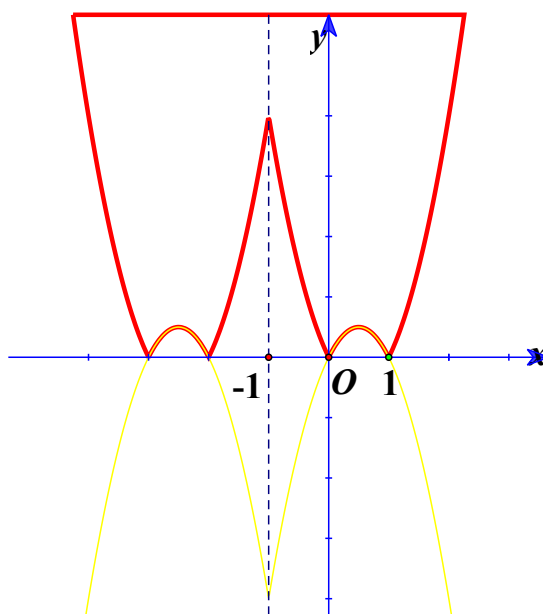
Vậy parabol là $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

Đồ thị hàm số $y = |f(|x+1|)|$ (hình vẽ phần tô đậm) có được bằng cách

+ Vẽ đồ thị $y = f(|x+1|)$ (C_1)

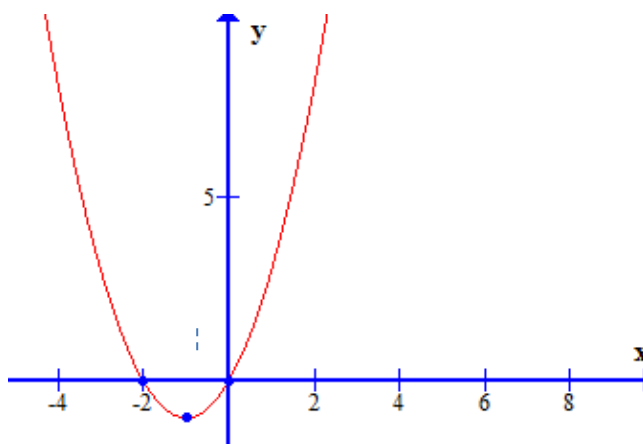
+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) trên trục hoành và lấy đối xứng phần (C_1) dưới trục hoành.

Để vẽ (C_1) lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ qua trục tung sau đó tịnh tiến sang trái 1 đơn vị.



Từ đồ thị suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là parabol như hình vẽ. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m - 4|$ trên $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $m = 5$.

B. $m = 4$.

C. $m = 3$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $y = |(x+1)^2 + m - 5|$. Đặt $g(x) = (x+1)^2 + m - 5$.

Với $\forall x \in [-2; 1]$ ta có $g(x) \in [m-5; m-1]$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max} = \max\{|m-5|, |m-1|\}$.

+ Trường hợp 1: $|m-5| \geq |m-1| \Leftrightarrow (m-5)^2 \geq (m-1)^2 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-5| = 5-m \geq 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m = 3$.

+ Trường hợp 2: $|m-1| \geq |m-5| \Leftrightarrow m \geq 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-1| = m-1 \geq 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m = 3$.

Vậy $m = 3$.

DẠNG 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết rằng đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1; -1)$ và nhận $I(0; 1)$ làm tâm đối xứng. Giá trị $y(2)$ là

A. $y(2) = 2$.

B. $y(2) = -2$.

C. $y(2) = 6$.

D. $y(2) = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$.

Do đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1; -1)$ và nhận $I(0; 1)$ làm tâm đối xứng nên:

$$\begin{cases} y(1) = -1 \\ y'(1) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = -1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy: $y = x^3 - 3x + 1$. Suy ra $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$.

Câu 2: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; 2)$ và $B(-1; 6)$. Giá trị của $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ bằng bao nhiêu?

A. $P = 18$.

B. $P = 26$.

C. $P = 15$.

D. $P = 23$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

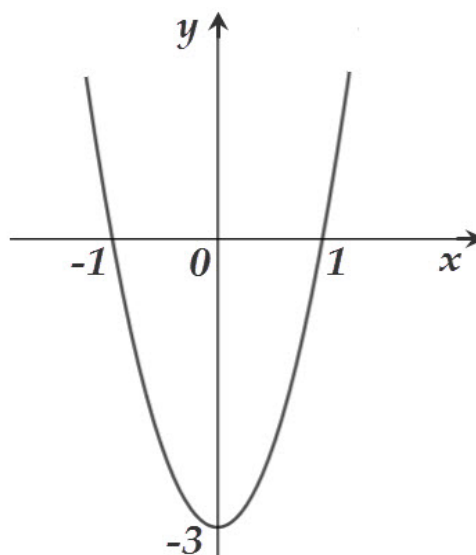
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ và $y'' = 6ax + 2b$.

Vì $A(1;2)$ và $B(-1;6)$ là điểm cực trị nên

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(-1) = 0 \\ y(-1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 2 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2c = 0 \\ b + d = 4 \\ 2a + 2c = -4 \\ 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Vậy $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 26$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho bởi hình bên dưới.



Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $f(x)$.

A. $y_{CT} = -3$.

B. $y_{CT} = 1$.

C. $y_{CT} = -1$.

D. $y_{CT} = -2$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0; -3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$. Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$. Mặt khác $f(2) = 1$ nên $d = -1$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$						$+\infty$
			1		-3		

Vậy $y_{CT} = -3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\begin{cases} (3x^2 - 15x)f'(x) + (10 - 5x)f(x) = 0 \\ [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0 \end{cases}$ với

$\forall x \neq 0$ và $f(1) = -4$. Tổng cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. $-3\sqrt[3]{4}$.

B. $3\sqrt[3]{4}$.

C. $-2\sqrt[3]{4}$.

D. $3\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0$ với $\forall x \neq 0$ ta suy ra: Với $x \neq 0$ ta có $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$.

Do đó từ $(3x^2 - 15x)f'(x) + (10 - 5x)f(x) = 0$ với $\forall x \neq 0$, ta suy ra:

Với $x \neq 0$ ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 15x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Với các kết quả trên ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{3} \frac{x-2}{x(x-5)} \forall x \notin \{0; 5\}$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{5}{3} \int \frac{x-2}{x(x-5)} dx \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \frac{2}{3} \ln|x| + \ln|x-5| + C$

$\Leftrightarrow |f(x)| = e^C |(x-5)\sqrt[3]{x^2}|$

Do $f(1) = -4$ nên $C = 0$ và $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x \notin \{0; 5\}$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0, x = 5$ suy ra $f(0) = f(5) = 0$

Hay $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = \frac{5}{3} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(x)$ không xác định khi $x = 0$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-3\sqrt[3]{4}$	$+\infty$	

Từ đó suy ra $y_{CD} = f(0) = 0$; $y_{CT} = f(2) = -3\sqrt[3]{4}$. Vậy $y_{CD} + y_{CT} = -3\sqrt[3]{4}$.

DẠNG 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^2$ có đồ thị (C) . Để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A , B , C sao cho bốn điểm A , B , C , O là bốn đỉnh của hình thoi (O là gốc tọa độ) thì giá trị tham số m là

A. $m = -\sqrt{2}$.

B. $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m = \pm\sqrt{2}$.

D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m^2 \end{cases}$.

Điều kiện để hàm số có ba cực trị là $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0; m^2)$, $B(m; -m^4 + m^2)$, $C(m; -m^4 + m^2)$.

Ta có $OA \perp BC$, nên bốn điểm A , B , C , O là bốn đỉnh của hình thoi điều kiện cần và đủ là OA và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_O = x_B + x_C \\ y_A + y_O = y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ m^2 + 0 = (-m^4 + m^2) + (-m^4 + m^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2m^4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.
- A.** $m = -1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m & \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 + 1 \\ x = m+1 & \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 \end{cases}$$

Hàm số có 2 cực trị: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(2m+1)^2 - 36m(m+1) > 0 \Leftrightarrow 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$\Rightarrow A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1), B(m+1; 2m^3 + 3m^2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua 2 điểm cực trị: $x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$

$$d(M, \Delta) = \frac{|2m^3 + m - 2m^3 - 3m^2 - m - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} d(M, \Delta) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{3m^2 + 1}{2}$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0.$$

- Câu 4.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (C). Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.
- A.** $m = 1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; m)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + m)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m)$

Ta có: $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}$, $BC = 2\sqrt{m}$.

Gọi I là trung điểm BC . Suy ra $I(0; -m^2 + m)$ và $AI = m^2$.

$$S = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \left(\frac{AB + BC + CA}{2} \right) \cdot r \Leftrightarrow m^2 \cdot 2\sqrt{m} = \left(2\sqrt{m^4 + m} + 2\sqrt{m} \right) \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m} (m^2 - \sqrt{m^3 + 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ \sqrt{m^3 + 1} = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ m^3 + 1 = m^4 - 2m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \geq 1 \\ m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \text{ (nhận)} \\ m = 2 \text{ (nhận)} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 5. Cho (P) là đường Parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$. Gọi m_a là giá trị để (P) đi qua $B(\sqrt{2}; 2)$. Hỏi m_a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(\sqrt{10}; \sqrt{15})$. B. $(-2; \sqrt{5})$. C. $(-5; \sqrt{2})$. D. $(-8; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^3 - 2mx = x(x^2 - 2m).$$

Để hàm số có ba cực trị thì $ab < 0 \Leftrightarrow -\frac{m}{4} < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = m^2 \\ x = \sqrt{2m}, y = 0 \\ x = -\sqrt{2m}, y = 0 \end{cases}.$$

Gọi parabol đi qua điểm $A(0; m^2)$, $B(\sqrt{2m}; 0)$, $C(-\sqrt{2m}; 0)$ có dạng: $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2ma + \sqrt{2m}b + c = 0 \\ 2ma - \sqrt{2m}b + c = 0 \\ c = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{m}{2} \\ b = 0 \\ c = m^2 \end{cases} \text{ hay } y = -\frac{m}{2}x^2 + m^2.$$

Theo yêu cầu bài toán parabol đi qua $B(\sqrt{2}; 2)$ nên: $2 = -\frac{m_a}{2}(\sqrt{2})^2 + m_a^2 \Leftrightarrow m_a^2 - m_a - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_a = -1 \\ m_a = 2 \end{cases}.$$

Vậy $m_a = 2$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0 \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

+) TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$.

Với $m = 3$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $m = 3$ thỏa ycbt.

Với $m = -3$ thì $g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$	$+\infty$
y'	-	0	- 0 +	
y	$+\infty$			$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.

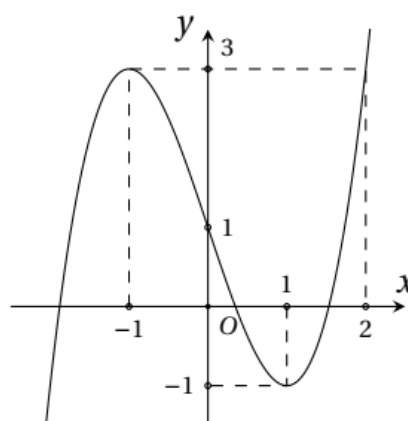
Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

DẠNG 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x))$; $y = f(f(x))$, ... $y = f(f(f... (x)))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 1 > 1 \\ x^2 - 2x + 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

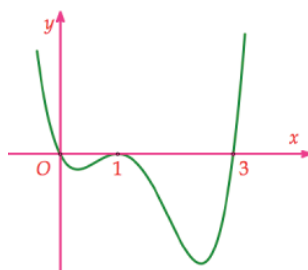
$$\begin{cases} 2x - 2 < 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -1 < x^2 - 2x + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2019$ có 3 cực trị. Chọn phương án B.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có: $f(x) = 0$ có nghiệm đơn là $x = 0; x = 3$ và nghiệm kép $x = 1$.

Và $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn $x = x_1 \in (0; 1)$; $x = x_2 \in (1; 3)$ và $x = 1$.

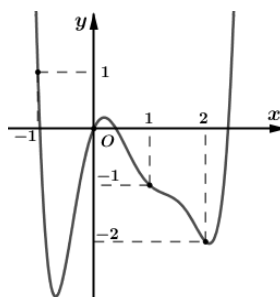
Ta có: $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f'(x) \cdot f(x)$ có các nghiệm đơn là $x = 0; x = 3; x_1; x_2$ và nghiệm bội 3 là $x = 1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	3	$+\infty$				
$f'(x)$	-		-	0	+	0	-	0	+		+
$f(x)$	+	0	-		-	0	-		-	0	+
$y' = 2f'(x).f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
		CT		CĐ		CT		CĐ		CT	

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

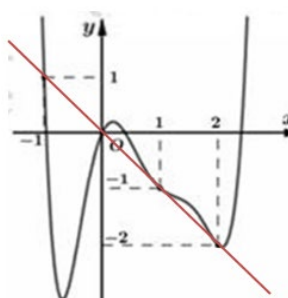
Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2).$$

Đặt $t = x + 2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

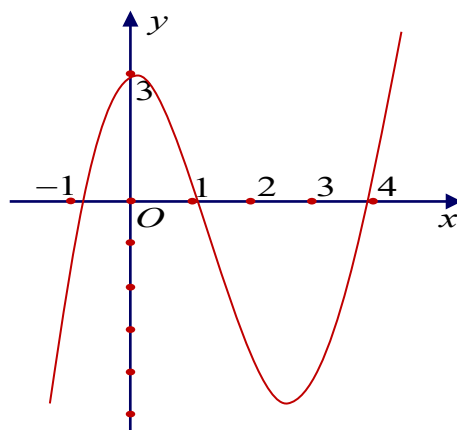
$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$						

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2.

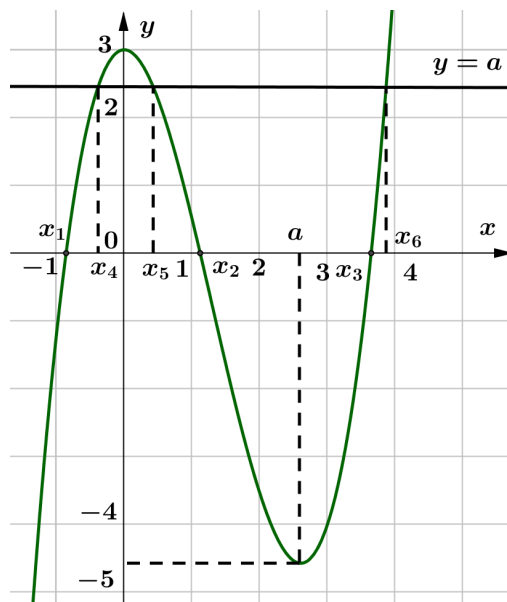
B. 8.

C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

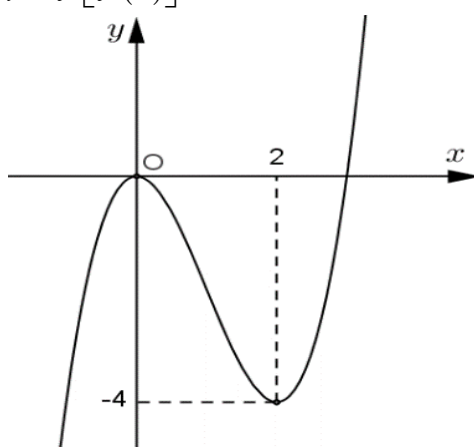
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 5: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2; +\infty) \\ x = b \in (a; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Với } x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0.$$

$$\text{Với } x \in (0; 2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0.$$

$$\text{Với } x \in (2; a) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0.$$

$$\text{Với } x \in (a; b) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0.$$

$$\text{Với } x \in (b; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	a	b	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x))$; $y = f(f(x))$, ... $y = f(f(f...f(x)))$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = \ln(f(x))$, $y = e^{f(x)}$, $\sin f(x)$, $\cos f(x)$... trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
									$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			1				-2		
						$-\infty$			$-\infty$

Tìm số cực trị của hàm số $y = g(x) = \ln(f(x))$.

- A. 0. **B. 1.** C. 2. D. 4

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$

Ta có $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$; giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ và y' đổi dấu khi qua $x = -3$.

Do đó hàm số $y = g(x) = \ln(f(x))$ có một cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-3	2	-6

Hàm số $y = \ln(f(x))$ có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (a; b): 0 < a < 3 < b$.

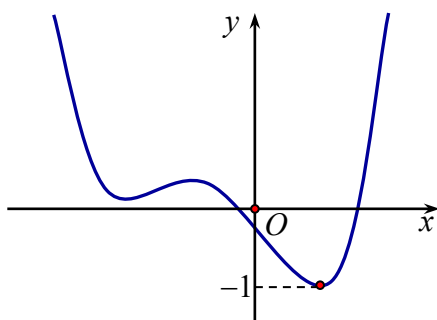
Ta có: $y = \ln(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Dấu của y' là dấu của $f'(x)$.

Dễ thấy trên $(a; b)$ hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại duy nhất 1 điểm $x = 3$.

Do đó hàm số $y = \ln(f(x))$ có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó xét hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot [2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3 = 0 \end{cases}$$

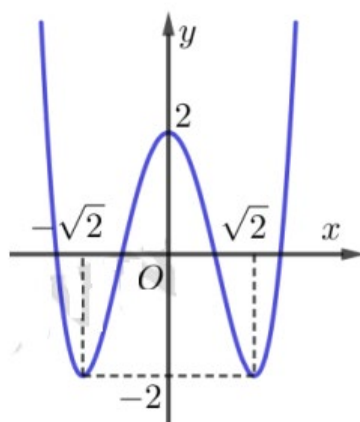
Xét phương trình $2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3 = 0$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} = \log_2 3 \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(\log_2 3) \approx -1,4 \text{ (loại)}.$$

Do đó số điểm cực trị của hàm $g(x)$ cũng bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Tức là hàm $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

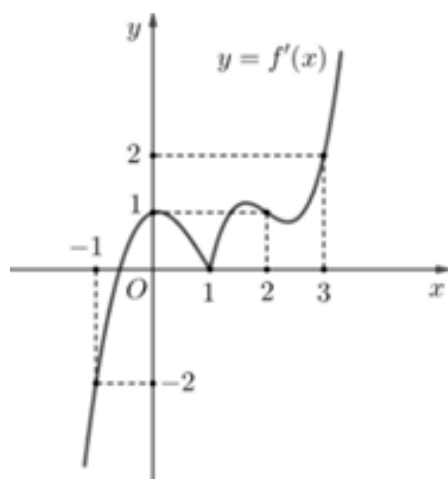
Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = f'(x) \cdot 3^{f(x)} + f'(x) \cdot 2^{f(x)} = f'(x) [3^{f(x)} + 2^{f(x)}]$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (do $3^{f(x)} + 2^{f(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Vậy $y' = 0$ có 4 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = e^{f(x) - \frac{(x-1)^2}{2}}$ là



A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

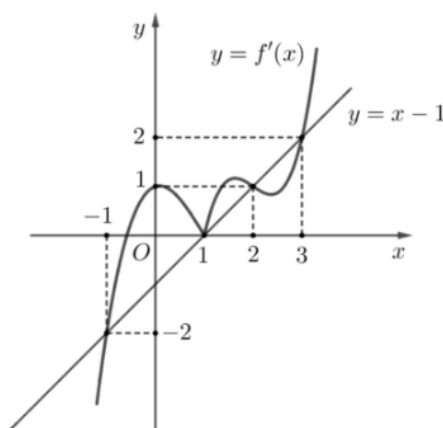
Chọn B

Xét $y = e^{g(x)}$, $g(x) = f(x) - \frac{(x-1)^2}{2}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = g'(x)e^{g(x)} = [f'(x) - (x-1)] \cdot e^{g(x)}$, trong đó $e^{g(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

nên $y' = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

(Vì đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 4 điểm có hoành độ $x = -1; x = 1; x = 2; x = 3$) và dấu của y' là dấu của $g'(x)$.

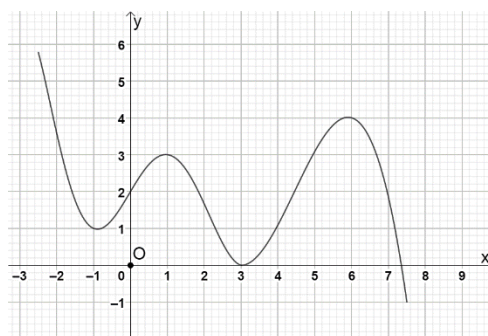


Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	$y(-1)$		$y(2)$	$y(3)$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y = e^{g(x)}$ có ba điểm cực trị là $x = -1; x = 2; x = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13.

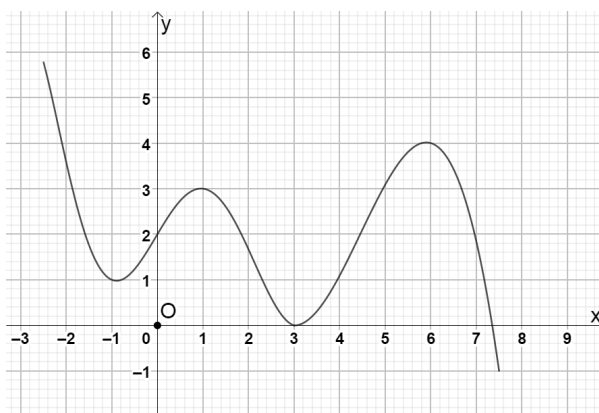
B. 11.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = f'(x) f'(f(x)-1) 2019^{f(f(x)-1)} \ln 2019$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Giải (1): } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 6 \end{cases}.$$

$$\text{Giải (2) : } f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1=-1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=3 \\ f(x)-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=4 \\ f(x)=7 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+) $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x_5 > 6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x)=2$ có 5 nghiệm $x_6 < -1; -1 < x_7 < 1; 1 < x_8 < 3; 3 < x_9 < 6; 6 < x_{10} < x_5$ là các nghiệm bội 1,

+) $f(x)=4$ có 1 nghiệm $x_{11} < x_6$ là nghiệm bội 1.

+) $f(x)=7$ có 1 nghiệm $x_{12} < x_{11}$ là nghiệm bội 1.

Suy ra $y'=0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

DẠNG 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị của hàm $f(x)$, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln(f(x)), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)$... trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra...

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp ba liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=(f'(x))^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

.

$$g'(x)=2f'(x)f''(x)-2[f'(x)f'''(x)+f(x)f''''(x)]=-2f(x)f'''(x)=-2x(x-1)^2(x+4)^3.$$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm $x=0, x=-4$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = (f'(x))^2 + f'(x)f''(x) = 15x^4 + 12x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}.$$

Suy ra hàm số $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ có hai điểm cực trị.



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ**

NHÓM TOÁN VD - VDC

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 2: BIẾT BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$.

- Dạng toán 1.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 2.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 3.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 4.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 5.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 6.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 7.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 8.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 9.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 10.** Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

NHÓM TOÁN VD - VDC

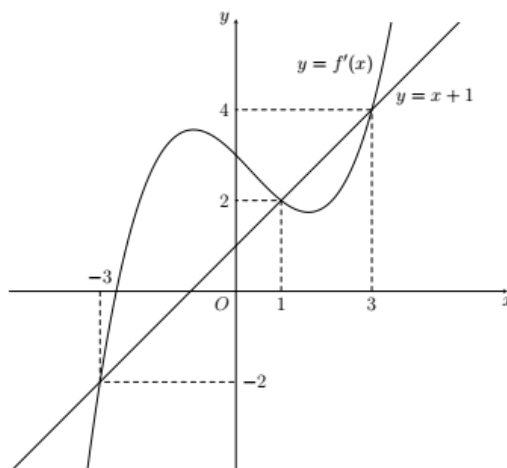
DẠNG 1. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - x + 3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ là

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y = g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1) = 2[f'(x) - (x+1)]$.

Vẽ hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có đáp án đúng là hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x = (3-x)(x^2-1) + 2x - 2x = (3-x)(x^2-1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\pm 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \ln x - x$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1 = \ln x - x + 1$.

Xét hàm số $h(x) = \ln x - x + 1$ trên $(0; +\infty)$. Ta có: $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như sau:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Vậy $h(x) \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Do đó $g'(x)$ không đổi dấu trên $(0; +\infty)$ nên hàm số $g(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x+1)(2x^2-3x-9)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 6x - 9 = (x+1)(2x^2 - 3x - 9) + 3(x+1)(x-3) = (x+1)(x-3)(2x+6)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x-2)$.

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 9$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$g'(x) = f'(x) + 2x(x+1) = x(x+1)(x^3 - x^2 - 2x + 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3(x^2 - 1)(x - 2)$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + 3x$ đạt cực đại tại

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

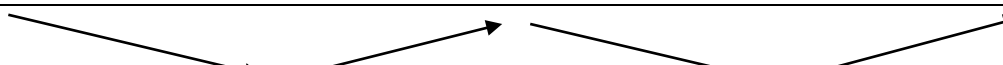
Chọn A

Ta có:

$$g(x) = f'(x) - 3x^2 + 3 = 3(x^2 - 1)(x - 2) - 3(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)(x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

$$f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2019 \text{ với } g(x) < 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $y = f(1 - x) + 2019x + 2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0 = 1$.

B. $x_0 = 2$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } h(x) = f(1 - x) + 2019x + 2020$$

Ta có: $h'(x) = -f'(1-x) + 2019 = -[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x) - 2019 + 2019$
 $= -x(3-x)g(1-x); \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}.$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$							

Vậy hàm số đạt cực đại $x_0 = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$ và có đạo hàm $f'(x) = 2x \ln x + x, \forall x > 0$.

Hàm số $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = 2x \ln x + x^2 - x = x(2 \ln x + x - 1), \forall x > 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + x - 1 = 0 (*)$$

Xét hàm số $h(x) = 2 \ln x + x - 1, \forall x > 0$

$$h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \text{Hàm số } y = h(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty)$$

Mặt khác: $h(1) = 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bảng xét dấu:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + (2-x)^3$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 3(2-x)^2 = f'(x) - 3(x-2)^2 = (x-2)^2(x^2 - 2x - 3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Từ BBT suy ra hàm số có 2 điểm cực trị.

DẠNG 2. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = m$

YCBT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

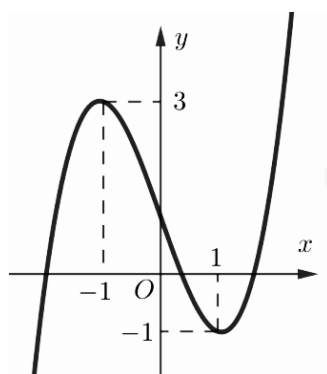
Đặt $g(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; BBT

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$	

The graph shows a function $g(x)$ with a local maximum at $x = 0$ and local minima at $x = -1$ and $x = 1$. The function values at these points are $g(0) = -3$ and $g(\pm 1) = -4$. The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow \pm\infty$.

Vậy $-4 < m < -3$, mà m nguyên nên không có m nào.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12; 12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5.

B. 18.

C. 20.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

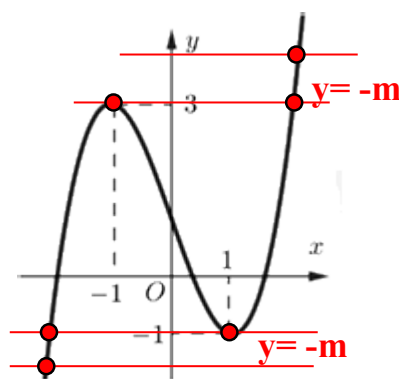
Đạo hàm $y' = f'(x) + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -m$

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ (có 1 nghiệm đơn)

hoặc (có 1 nghiệm đơn và nghiệm kép)

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 1 điểm có hoành độ là nghiệm đơn (bội lẻ) hoặc tại hai điểm trong đó có điểm có hoành độ bội

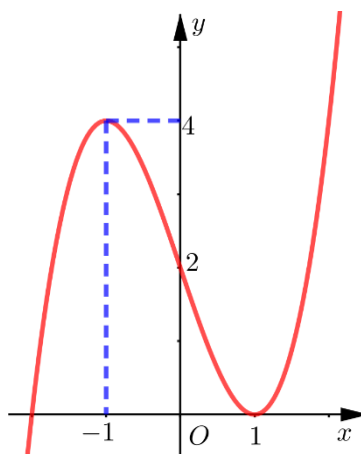
$$\text{chẵn} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 3 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}$$



Kết hợp với $m \in (-12; 12)$ ta được $m \in (-12; -3] \cup [1; 12)$ và m là số nguyên nên

có tất cả $9 + 11 = 20$ giá trị nguyên.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 3 điểm cực trị

A. $0 < m < 4$.

B. $0 \leq m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = f'(x) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, suy ra phương trình $f'(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt và các đó là nghiệm đơn $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy để hàm số $y = f(x) - mx$ có 3 điểm cực trị thì $0 < m < 4$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$.

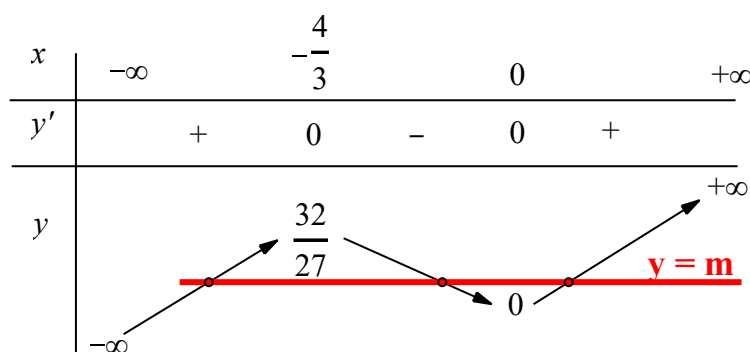
$$g'(x) = f'(x) + m = -x^3 - 2x^2 + m$$

Hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -x^3 - 2x^2 + m = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = m \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + 2x^2; g'(x) = 3x^2 + 4x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}; \text{BBT:}$$



Vậy $0 < m < \frac{32}{27}$, mà m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x\sqrt{4-x^2}, \forall x \in [-2; 2]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - m^2x + 3m$ có 2 điểm cực trị.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x + 3m$ xác định trên $[-2; 2]$.

Đạo hàm $g'(x) = f'(x) - m^2 = x\sqrt{4-x^2} - m^2$

YCBT: Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x + 3m$ có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó

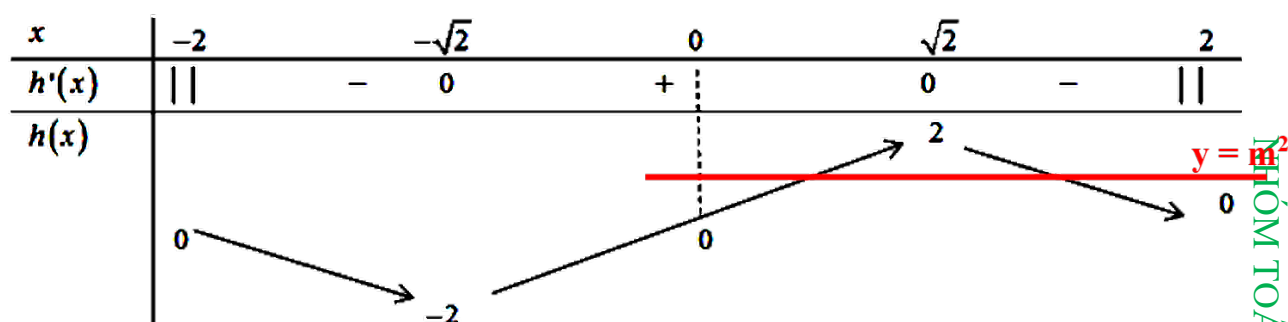
Xét phương trình $x\sqrt{4-x^2} - m^2 = 0$ (*)

$$\Leftrightarrow x\sqrt{4-x^2} = m^2$$

Xét hàm số $h(x) = x\sqrt{4-x^2}, x \in [-2; 2]$

$$h'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$



Vậy $0 < m^2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$, m nguyên dương nên $m \in \{-1; 1\}$.

- Câu 6:** Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$ và hàm số $y = g(x) = 6f(x) + 2x^3 + 3(m+1)x^2 - 6(m+2)x + 2019$. Gọi $S = (-\infty; a) \cup (b; c)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng
- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x) = 6f'(x) + 6x^2 + 6(m+1)x - 6(m+2)$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 6(x+3)(x-1)(x-2) + 6x^2 + 6(m+1)x - 6(m+2)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 6(x-1)(x^2 + 2x + m - 4).$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2x + m - 4 = 0 \end{cases}.$$

Để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 + 2x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Hay } \begin{cases} \Delta' = 5 - m > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \neq 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } S = (-\infty; 1) \cup (1; 5).$$

Như vậy $a = 1$, $b = 1$, $c = 5$ và $a + 2b + 3c = 8$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ và hàm số $y = g(x) = f(x) - mx + 2020$. Gọi $S = (a; b)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $2a + 3b$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x) = f'(x) - m \Leftrightarrow g'(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - m$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 1 = m$.

Để hàm số $y = g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Hay phương trình $x^3 + 3x^2 - 1 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y = h(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ có $h'(x) = 3x^2 + 6x$ và $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3			$+\infty$
	$-\infty$				-1	

Để phương trình $x^3 + 3x^2 - 1 = m$ có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại ba điểm phân biệt. Nghĩa là $-1 < m < 3$. Hay $S = (-1; 3)$. Do đó $2a + 3b = 7$

DẠNG 3. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = g(x) = f(x^2 + 2019) \Rightarrow y' = g'(x) = (x^2 + 2019)' f'(x^2 + 2019) = 2x \cdot f'(x^2 + 2019)$.

Mặt khác $f'(x) = x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Nên suy ra:

$$\begin{aligned} y' = g'(x) &= 2x \cdot f'(x^2 + 2019) = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 + 2019 - 2028)(x^2 + 2019 - 2023)^2 \\ &= 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2 \end{aligned}$$

$$y' = 2x \cdot (x^2 + 2019)^2 (x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = -3 \text{ (nghiem đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiem bội 2)} \\ x = -2 \text{ (nghiem bội 2)} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$

và $y' = (2x - 8) \cdot f'(x^2 - 8x) = 2(x - 4)(x^2 - 8x)(x^2 - 8x - 2)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x^2 - 8x = 0 \\ x^2 - 8x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = 8 \\ x = 4 + 3\sqrt{2} \\ x = 4 - 3\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	$4-3\sqrt{2}$	0	4	8	$4+3\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 8x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 4. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 16x + 2m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 30. B. 31. C. 32. D. 33.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = f'(x^2 - 16x + 2m)(2x - 16)$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ f'(x^2 - 16x + 2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x^2 - 16x + 2m = 1 & (1) \\ x^2 - 16x + 2m = 0 & (2) \\ x^2 - 16x + 2m = 2 & (3) \end{cases}$$

Do các nghiệm của (1) đều là nghiệm bội bậc chẵn còn (2) và (3) không thể có nghiệm trùng nhau nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi (2) và (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 8.

$$\begin{cases} \Delta'_2 > 0 \\ \Delta'_3 > 0 \\ 8^2 - 16 \cdot 8 + m \neq 0 \\ 8^2 - 16 \cdot 8 + m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 2m > 0 \\ 64 - 2m + 2 > 0 \\ -64 + m \neq 0 \\ -64 + m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 32 \text{ mà } m \text{ nguyên dương nên } m \text{ có 31 giá trị.}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2019 để hàm số $y = f(x^2)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2021.

B. 2022.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = (f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x \cdot x^4(x^2 + 1)(x^4 + 2mx^2 + 4) = 2x^5(x^2 + 1)(x^4 + 2mx^2 + 4)$;

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 + 2mx^2 + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} t^2 + 2mt + 4 = 0 \quad (1)$$

Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x = 0$ là 1 cực trị của hàm số.

Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 \leq 0 \\ \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ S = -2m < 0 \\ P = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Kết hợp với $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \leq 2019 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; \dots; 2018; 2019\}$: có 2022 giá trị nguyên của m .

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x^2 - 2mx + 1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019.

B. 2016.

C. 2017.

D. 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x \cdot x^2(x^2 - 1)(x^4 - 2mx^2 + 1) = 2x^3(x^2 - 1)(x^4 - 2mx^2 + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^4 - 2mx^2 + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x = 0$ là nghiệm bội lẻ và $x = \pm 1$ là các nghiệm đơn nên để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác ± 1 , hay phương trình $t^2 - 2mt + 1 = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 1 > 0 \\ 1^2 - 2m \cdot 1 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên, không vượt quá 2018 suy ra có 2017 giá trị của m .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

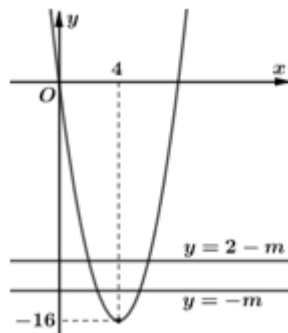
$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có $g'(x) = 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -m$, $d_2: y = -m + 2$ (như hình vẽ).



Khi đó (*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ ($x = 0, x = 3$ là nghiệm đơn; $x = 1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2 + m); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình (1), (3) có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$.

Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3) = (x-2)^2(x-1)(x-3)$

Ta có $y' = (2x-10)f'(x^2-10x+m+9)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10=0 \\ f'(x^2-10x+m+9)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (x^2-10x+m+7)^2(x^2-10x+m+8)(x^2-10x+m+6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (x^2-10x+m+7)^2=0 \\ x^2-10x+m+8=0 \quad (1) \\ x^2-10x+m+6=0 \quad (2) \end{cases}$$

Giả sử x_0 là một nghiệm của (1) $\Rightarrow x_0^2-10x_0+m+8=0$.

Do đó $x_0^2-10x_0+m+6=-2 \neq 0, \forall m$, suy ra (1) và (2) không có nghiệm chung.

Hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có năm điểm cực trị khi mỗi phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25-m-8 > 0 \\ 25-m-6 > 0 \\ m-17 \neq 0 \\ m-19 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 17 \\ m < 19 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2; 3; \dots; 15; 16\}.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (2-x)(x^2-8)^{2019}, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số

$y = f(x^2-2) + \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4.

B. 2019.

C. 5.

D. 2020.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(x^2-2) + \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2020$.

$+ g'(x) = 2x \cdot f'(x^2-2) + 2x^3 - 8x$.

$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2 - 2) + 2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x[f'(x^2 - 2) + x^2 - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) + x^2 - 4 = 0 (*) \end{cases}$$

Giải phương trình (*): Đặt $t = x^2 - 2$.

$$(*) \Leftrightarrow f'(t) + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (2-t)(t^2 - 8)^{2019} + (t-2) = 0 \Leftrightarrow (2-t)[(t^2 - 8)^{2019} - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-t = 0 \\ (t^2 - 8)^{2019} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ x^2 - 2 = 3 \\ x^2 - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 5 \\ x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm (không có nghiệm bội chẵn).

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (e^x - 2)(e^x + x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - x + 2 \ln x$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $x_0 \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $x_0 \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

C. $x_0 \in (e^2; e^3)$.

D. $x_0 \in (\ln 2; \ln 3)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - x + 2 \ln x$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' = g'(x) &= \frac{1}{x} f'(\ln x) - 1 + \frac{2}{x} = \frac{1}{x} (e^{\ln x} - 2)(e^{\ln x} + \ln x) - \frac{x-2}{x} = \frac{1}{x} (x-2)(x + \ln x) - \frac{x-2}{x} \\ &= \frac{x-2}{x} (x + \ln x - 1). \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-2 = 0 \\ x + \ln x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 2 \\ x + \ln x - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số $y = x + \ln x - 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm là duy nhất. Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Bảng biến thiên

x	0	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0 = 2$. Vậy $x_0 \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ có mấy điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$.

$$g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] + 4 = -\frac{x^2}{8} + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 6x + 11$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(e^x) - 6x$ có mấy điểm cực tiểu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(e^x) - 6x$.

$$g'(x) = e^x f'(e^x) - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = 2 \\ e^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \\ x = \ln 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG 6. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 7. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ là

- A. 0. B. 1. **C. 2.** D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + C$ và $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

Do đó ta có $f(x) = x^4 + x^2 + 1 > 0, \forall x$.

Ta có: $g'(x) = 3(2x - 2) \cdot f^2(x^2 - 2x - 3) \cdot f'(x^2 - 2x - 3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4(x^2 - 2x - 3)^3 + 2(x^2 - 2x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = g(x)$ có 2 cực tiểu.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f(2) = 4$. Hàm số $g(x) = [f(1-2x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$\Rightarrow y = f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 4 \Rightarrow 2^3 - 3 \cdot 2 + C = 4 \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

$$+ g(x) = [f(1-2x)]^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2f(1-2x) \cdot [f(1-2x)]' = -4f(1-2x) \cdot f'(1-2x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1-2x) = 0 \\ f'(1-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)^3 - 3(1-2x) + 2 = 0 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = 1 \text{ (nghiem kep)} \\ 1-2x = -2 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem boi ba)} \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x = 1, x = \frac{3}{2}$ và một nghiệm bội ba $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$3/2$	$+\infty$				
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		0	16		0		$+\infty$	

Vậy hàm số $g(x) = [f(1-2x)]^2$ có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4x$ và $f(0) = -1, f(-1) = -2$. Hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$

$$+ g'(x) = 6f^2(x).f'(x) + 8f(x).f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases},$$

$$f(x) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \\ x = d \end{cases} \text{ thỏa mãn: } x_1 < a < -1 < b < 0 < c < 1 < d < x_2.$$

Khi đó để có nhiều điểm cực tiểu nhất thì bảng xét dấu của $g'(x)$ có dạng:

x	$-\infty$	x_1	a	-1	b	0	c	1	d	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ có nhiều nhất 5 điểm cực tiểu.

DẠNG 8. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 9. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

DẠNG 10. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ**

NHÓM TOÁN VD – VDC

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 3: BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

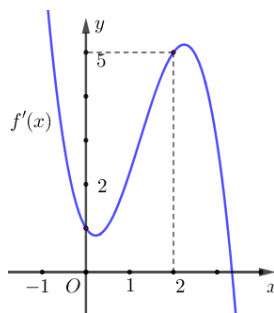
- Dạng toán 1.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 2.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 3.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 4.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 5.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 6.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 7.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 8.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán chứa tham số.
- Dạng toán 9.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.
- Dạng toán 10.** Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

NHÓM TOÁN VD – VDC

DẠNG TOÁN 1. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

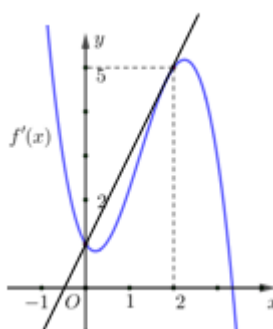
Chọn A

Ta có:

$$y' = f'(x) - 2x - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \quad (1)$$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 2x + 1$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ có $x \in \{0, 2\}$ là các nghiệm của phương trình (1)

$$y'(-1) = f'(-1) + 2 - 1 > 0$$

$$y'(1) = f'(1) - 2 - 1 < 0$$

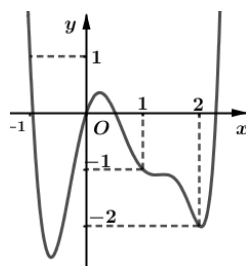
$$y'(3) = f'(3) - 6 - 1 < 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

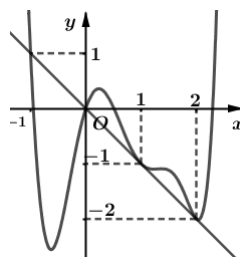
Lời giải

Chọn A

Có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \quad (1)$$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = -x$



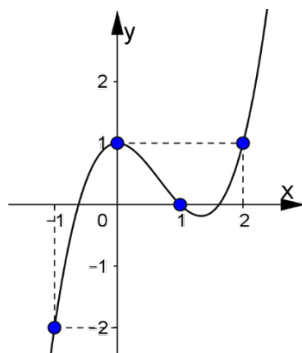
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$ có $x \in \{-1, 0, 2\}$ là các nghiệm của phương trình (1) (trong đó $x = 1$, $x = 2$ là các nghiệm bội chẵn).

Có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

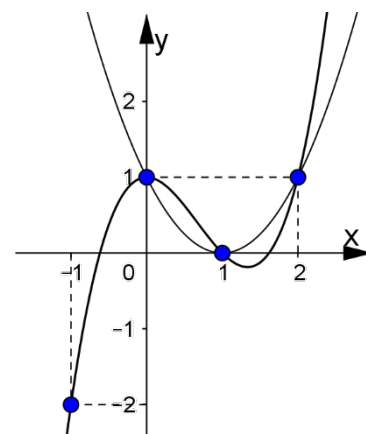
D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

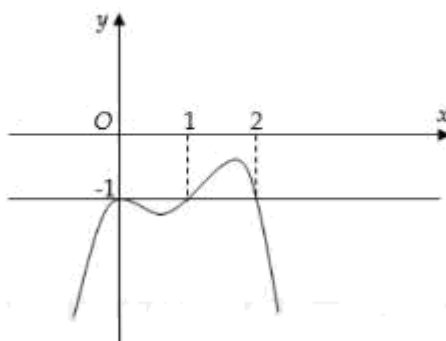
Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = (x-1)^2$; $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên parabol $y = (x-1)^2$ và ngược lại.

Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ



dương sang âm khi qua $x = 1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 4 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

A. Không có cực tiểu.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

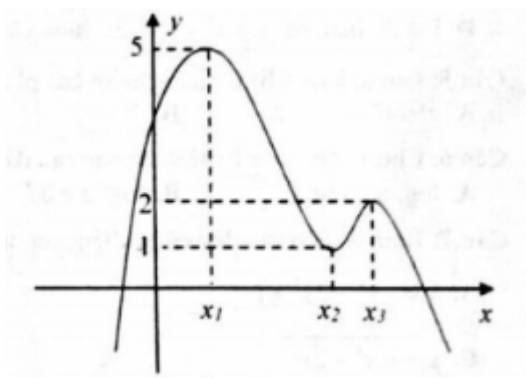
Lời giải

Chọn C

$g'(x) = f'(x) + 1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ “-” sang “+” qua điểm $x = 1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 5 : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là



A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017} \Rightarrow y' = f'(x) + \frac{-2018}{2017}$$

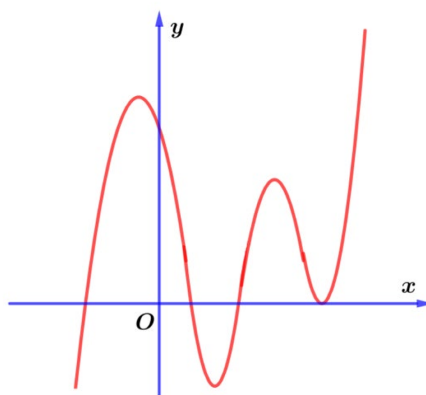
$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2018}{2017}$$

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy phương trình $f'(x) = \frac{2018}{2017}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Lưu ý: Do $1 < \frac{2018}{2017} < 2$ nên dựa vào đồ thị nhìn thấy đường thẳng nằm trong vùng từ 1 đến 2 từ đó quan sát thấy có 4 nghiệm.

Câu 6 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



A. 1

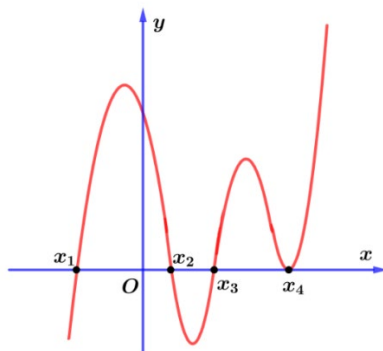
B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn A



Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1, x_2, x_3, x_4 .

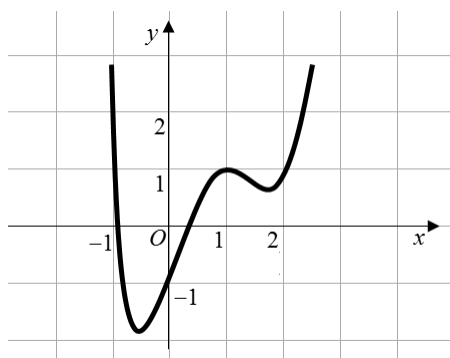
Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3 .

Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_2 .

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 7 : Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Từ đồ thị, ta được $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Từ đồ thị, ta cũng có bảng xét dấu của $g'(x)$:

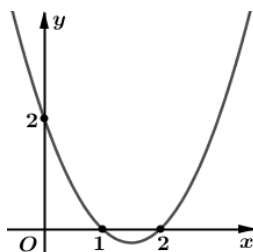
x							$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Ta được hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

DẠNG TOÁN 2. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

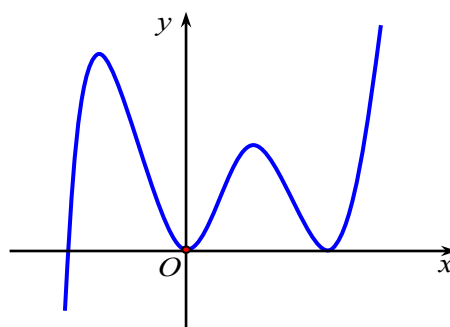
$$\text{Xét } g(x) = f(x - x^2) \Rightarrow g'(x) = (1 - 2x)f'(x - x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = 1 \text{ (*)} \\ x - x^2 = 2 \text{ (**)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (vì phương trình (*)(**) vô nghiệm).}$$

Ta có: $g'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x - 2020)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

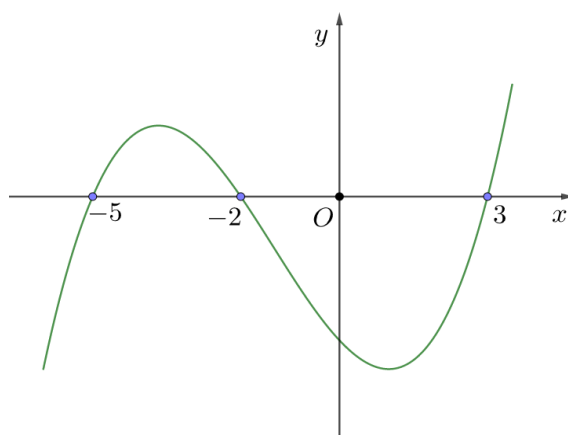
D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương song song trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ vẫn cắt trục hoành tại 3 điểm và đổi dấu 1 lần do đó hàm số $y = f(x-2020)$ có một cực trị. Ta chọn đáp án A.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 5)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 5)$

Ta có $y' = g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 5)$

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -5 \\ x^2 - 5 = -2 \\ x^2 - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem boi 3)} \\ x = \pm\sqrt{3} \text{ (nghiem don)} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \text{ (nghiem don)} \end{cases}.$$

$$+ g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 5 > 3 \\ -5 < x^2 - 5 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2\sqrt{2} \\ x < -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\sqrt{2} \\ 0 < x < \sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} < x < -\sqrt{3} \end{cases}$$

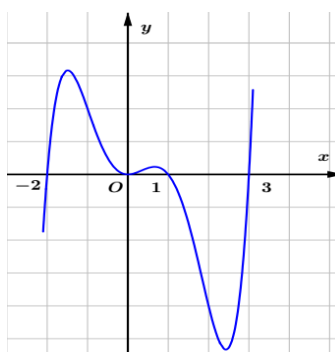
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -2 < x^2 - 5 < 3 \\ x^2 - 5 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -2\sqrt{2} < x < -2\sqrt{2} \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 5)$ như sau:

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x^2 - 5)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$;

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 2xf'(x^2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}.$$

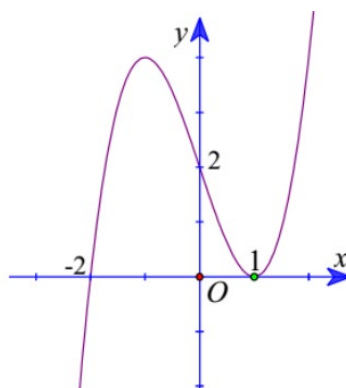
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$		-	-	-	0	+	+
$f'(x^2)$		+	0	-	0	+	0
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 3)$.



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 (\text{nghiệm đơn}) \\ x = 1 (\text{nghiệm kép}) \end{cases}$.

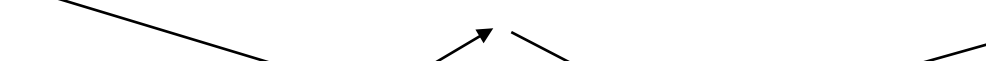
- Ta có $g'(x) = 2x.f'(x^2 - 3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{nghiệm đơn}) \\ x = \pm 1 (\text{nghiệm đơn}) \\ x = \pm 2 (\text{nghiệm kép}) \end{cases}$$

(Đến đây có thể kết luận hàm số có 3 điểm cực trị. Nếu muốn tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số thì ta cần lập bảng biến thiên)

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 3) > 0 \\ x < 0 \\ f'(x^2 - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3 > -2 \\ x^2 - 3 \neq 1 \\ x < 0 \\ x^2 - 3 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	+	0	+
$g(x)$										

Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{4}.$$

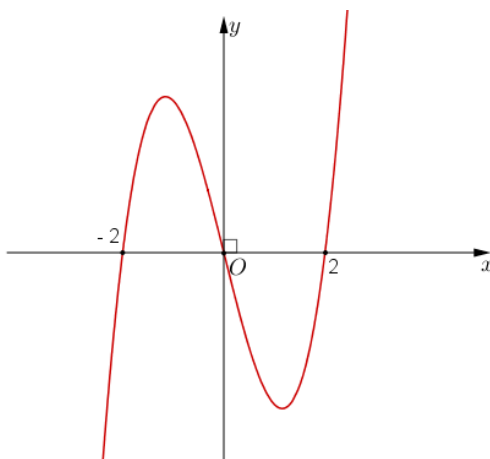
$$\bullet \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{9}{4}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y = f(x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x^2 - x)$. Ta có $y' = (2x - 1)f'(x^2 - x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -2 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f'(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2 - x < 0 \\ x^2 - x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -1 \end{cases}.$$

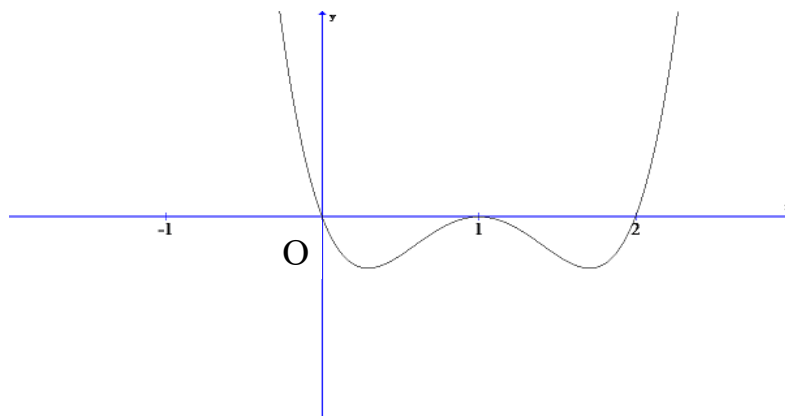
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 - x)$ là:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2 - x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Vậy hàm số $y = f(x^2 - x)$ có 3 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 4. BIẾT ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m)$

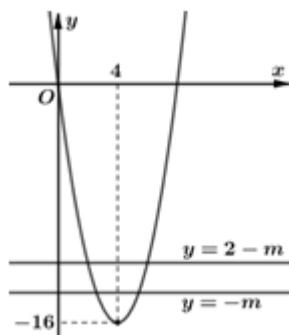
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2 - 8x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \text{ (nhị thức bậc 2)} \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. (*)

$$\text{Cách 1: (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Cách 2: Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -m$, $d_2: y = -m + 2$ (hình vẽ).

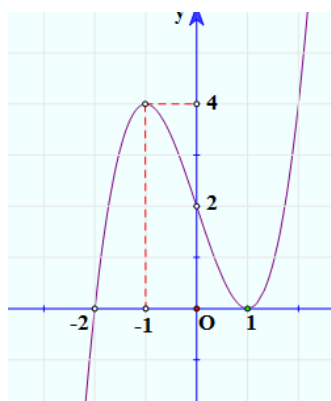


Khi đó (*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

DẠNG TOÁN 5. BIẾT ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x - 2019) + 2017x - 2018$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

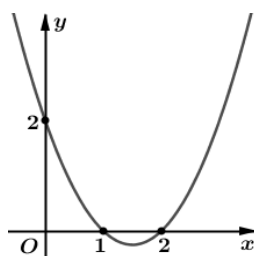
Chọn A

Ta có: $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$

Tịnh tiến sang phải 2019 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 2017 đơn vị ta thấy đồ thị hàm số $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$ cắt trục Ox tại 1 điểm.

Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x) = 60(-x^3 + x)f'(-x^4 + 2x^2) - 60x^5 + 60x = 60(-x^3 + x)[f'(-x^4 + 2x^2) + x^2 + 1]$

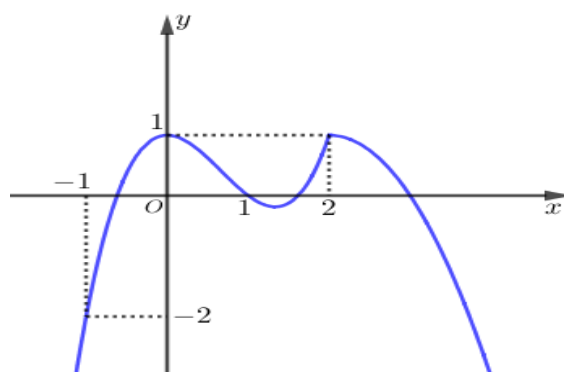
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ f'(-x^4 + 2x^2) + x^2 + 1 = 0(*) \end{cases}$$

Ta thấy $-x^4 + 2x^2 = -(x^2 - 1)^2 + 1 \leq 1 \forall x$, kết hợp với đồ thị hàm số $y = f'(x)$,

suy ra $f'(-x^4 + 2x^2) \geq 0 \forall x$. Hơn nữa, $x^2 + 1 > 0 \forall x$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

mà $x = 0, x = \pm 1$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x) = 0$ nên hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

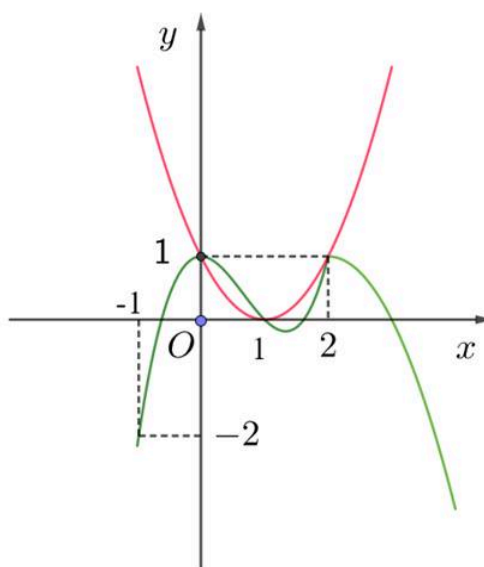
Chọn D

Ta có: $g(x) = f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x[f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \underbrace{f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)}_{k(x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = (x^2)^2 - 2x^2 + 1(*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình (*) trở thành $f'(t) = t^2 - 2t^2 + 1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số $x^2 - 2x + 1$ (màu đỏ) trên đồ thị $f'(x)$ để cho.



Dựa vào đồ thị, (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (bội chẵn)} \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

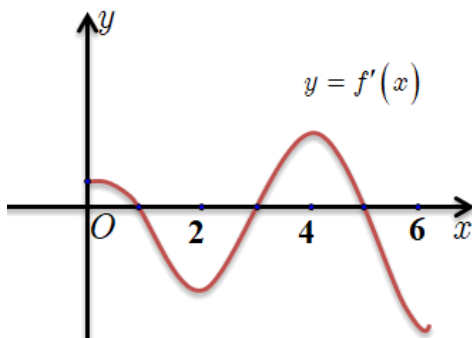
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k(x)$	$-$	0	0	$+$	0	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	0	$-$	0	$-$	$-$
$g(x)$							

Vậy $g(x)$ đạt cực tiểu tại 1 điểm $x=0$.

DẠNG TOÁN 6. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 4

Lời giải

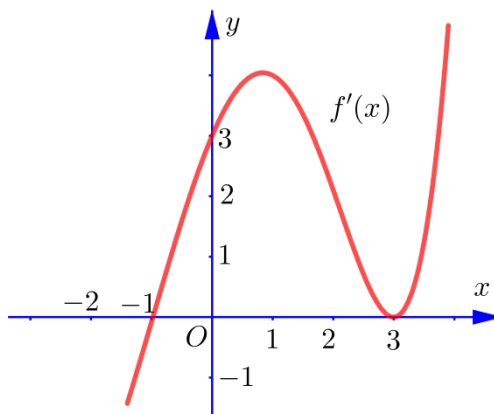
Chọn B

Ta có: $y' = 2f(x) \cdot f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1) = 0$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

$f(-1)$

Ta có $g'(x) = 2f'(x)f(x)$.

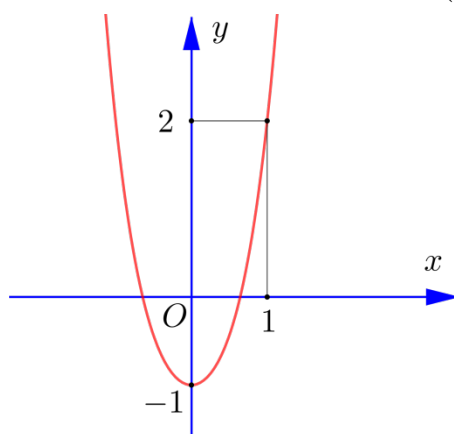
$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Do $f(-1) = 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}.$$

Do vậy hàm số $g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = mx^5 + nx^3 + px$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x+2)]^5$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g(x) = [f(x+2)]^5 \Rightarrow g'(x) = 5f'(x+2)[f(x+2)]^4.$$

Do $[f(x+2)]^4 \geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $5f'(x+2)$.

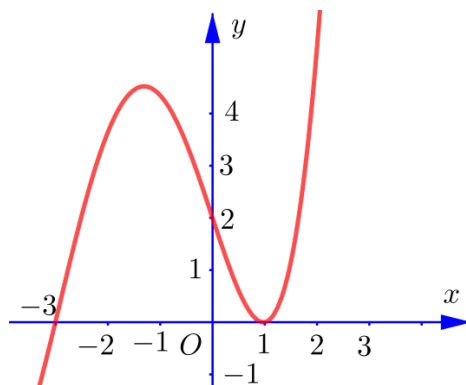
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$$f'(x) = a(x-x_1)(x-x_2), \quad a > 0 \quad f'(x) = a(x+2-x_1)(x+2-x_2),$$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x = x_1 - 2$, từ - sang + khi qua $x = x_2 - 2$.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(1-2x)]^3$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = [f(1-2x)]^3 \Rightarrow g'(x) = -6f'(1-2x)[f(1-2x)]^2$.

Do $[f(1-2x)]^2 \geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $-6f'(1-2x)$.

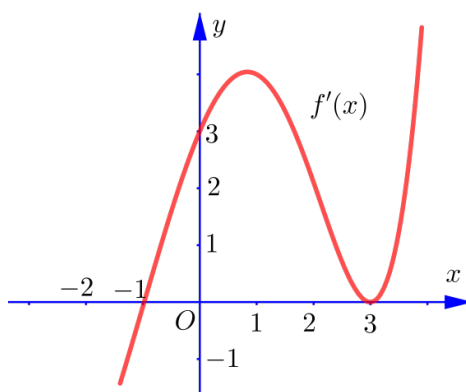
Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x+3)(x-1)^2$, $a > 0$

$$\Rightarrow f'(1-2x) = a(4-2x)(-2x)^2$$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x=2$ nên $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Hàm số $g(x)$ không có điểm cực đại.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(3) < 0$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



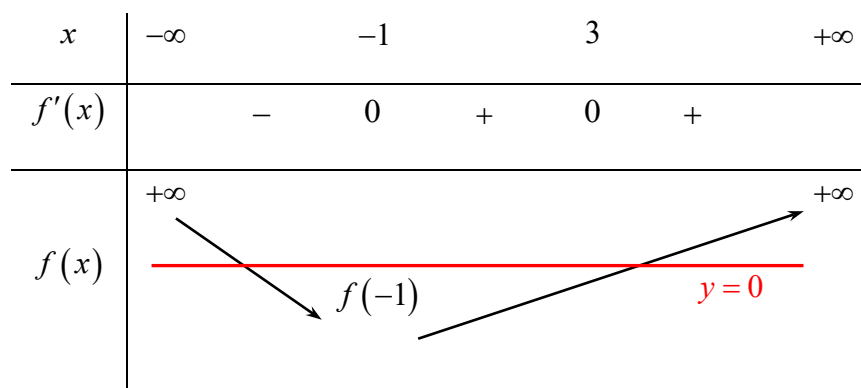
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x-1)]^{2020}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$



Ta có $g'(x) = 2020f'(x-1)f^{2019}(x-1)$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x-1) = 0 & (1) \\ f(x-1) = 0 & (2) \end{cases}$

Xét (1). Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ x-1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}$

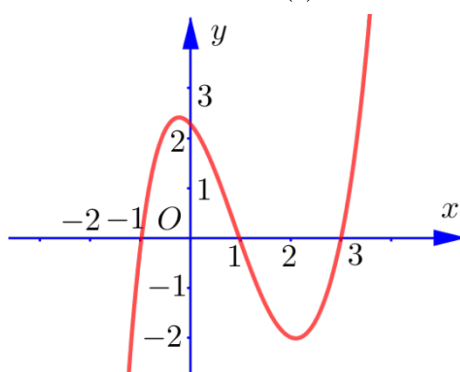
Xét (2). Do $f(3) < 0$ nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty; -2)$ và $(3; +\infty)$

Suy ra $f(x-1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 \in (-\infty; -1)$ và $x_2 \in (4; +\infty)$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (4; +\infty) \end{cases}$

Do vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1) = 0$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x^2 - 2x)]^4$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

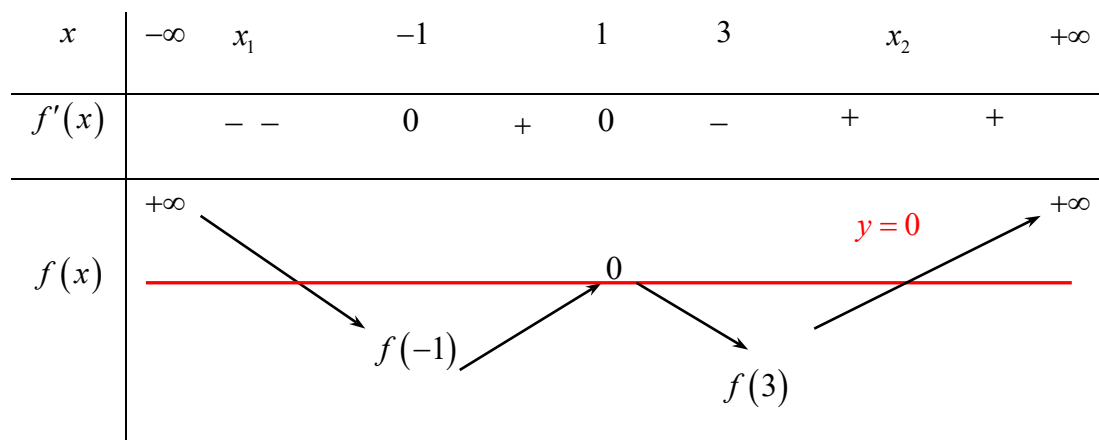
D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x) = [f(x^2 - 2x)]^4 \Rightarrow g'(x) = -8f'(x^2 - 2x)[f(x^2 - 2x)]^3$.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x^2 - 2x) = 0 & (1) \\ f(x^2 - 2x) = 0 & (2) \end{cases}$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x-1)(x+1)(x+3)$, $a > 0$

$$f'(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}.$$

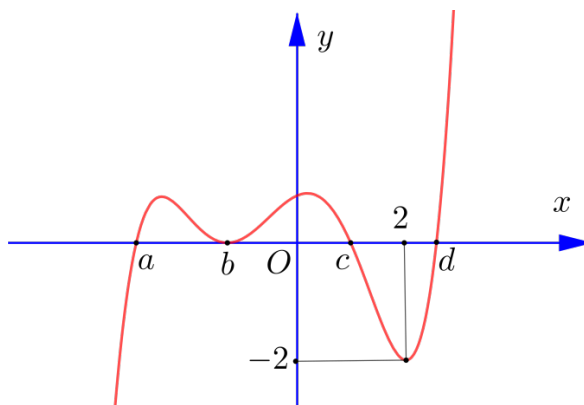
Xét (2): Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nghiệm phân biệt $x_1 \in (-\infty; -1)$ và $x_2 \in (3; +\infty)$

Với nghiệm $x_1 \in (-\infty; -1)$ thì $f(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = x_1$ vô nghiệm do $x^2 - 2x \geq -1$

Với nghiệm $x_2 \in (3; +\infty)$ thì $f(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = x_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x^2)]^{2021}$ là

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = [f(x^2)]^{2021} \Rightarrow g'(x) = 4042x \cdot f'(x^2) \cdot [f(x^2)]^{2020}$$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = k(x-a)(x-b)^{2m}(x-c)(x-d)$, $k > 0$

$$f'(x^2) = 0 \Rightarrow k(x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 4042k \cdot x \cdot (x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d) \cdot [f(x^2)]^{2020}$$

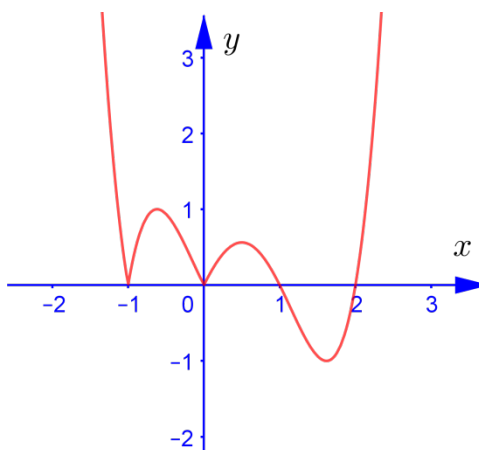
$$\text{Do } [f(x^2)]^{2020} \geq 0; (x^2-b)^{2m} \geq 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \text{ có 5 nghiệm } \pm\sqrt{c}; \pm\sqrt{d}; 0$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. BIẾT ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = [f(x+1)^3 + m]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

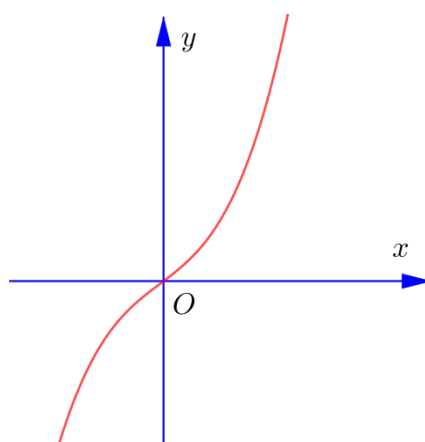
Ta có $g(x) = [f(x+1)^3 + m]^7 \Rightarrow g'(x) = 21 \cdot [f(x+1)^3 + m]^6 \cdot f'(x+1)$

Ta có $[f(x+1)^3 + m]^6 \cdot f'(x+1)^2$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu $f'(x+1)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m .

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f(x^2 - 4) = m$ để hàm số $g(x) = [f(x^2 - 4)]^2$ có 5 điểm cực trị. Khẳng định nào đúng?

A. $m \neq \{f(-2); f(0); f(2)\}$.

B. $m \neq \{f(-4); f(-2); f(2)\}$.

C. $m \neq \{f(-4); f(0)\}$.

D. $m \neq \{f(0); f(2)\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x) = [f(x^2 - 4)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f(x^2 - 4) \cdot f'(x^2 - 4)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot f(x^2 - 4) \cdot f'(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 4) = 0 \quad (1) \\ f(x^2 - 4) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Xét (1). Do đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua $x = 0$ nên $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Do đó $f'(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì (2) phải có 3 nghiệm phân biệt khác $-2; 0; 2$.

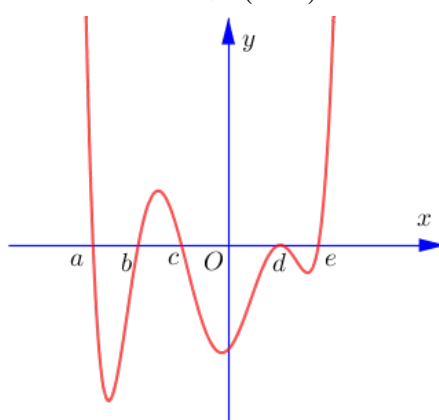
Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

Để $f(x^2 - 4) = m$ có 2 nghiệm thì $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$.

Vậy $m \neq \{f(-4); f(0)\}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x; m)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x; m)$ như hình vẽ:



Biết $f(a) > f(c) > 0$; $f(b) < 0 < f(e)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x+m)]^2$ là

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x; m)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	b	c	d	e	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$	$f(e)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x; m)$ có 4 điểm cực trị.

Khi $f(a) > f(c) > 0$; $f(b) < 0 < f(e)$ thì đồ thị hàm số $y = f(x; m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $f(x+m) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

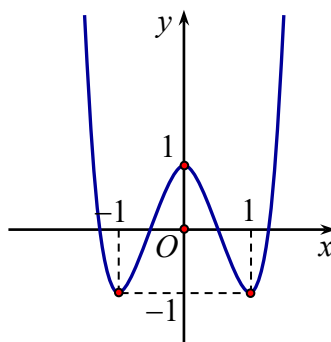
$$\text{Ta có } g(x) = [f(x+m)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x+m) \cdot f(x+m).$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = f(x+m) \Rightarrow \begin{cases} f'(x+m) = 0 \rightarrow 3 \text{ nghiệm} \\ f(x+m) = 0 \rightarrow 4 \text{ nghiệm} \end{cases}$$

Các nghiệm không trùng nhau nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 9. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết rằng hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1.

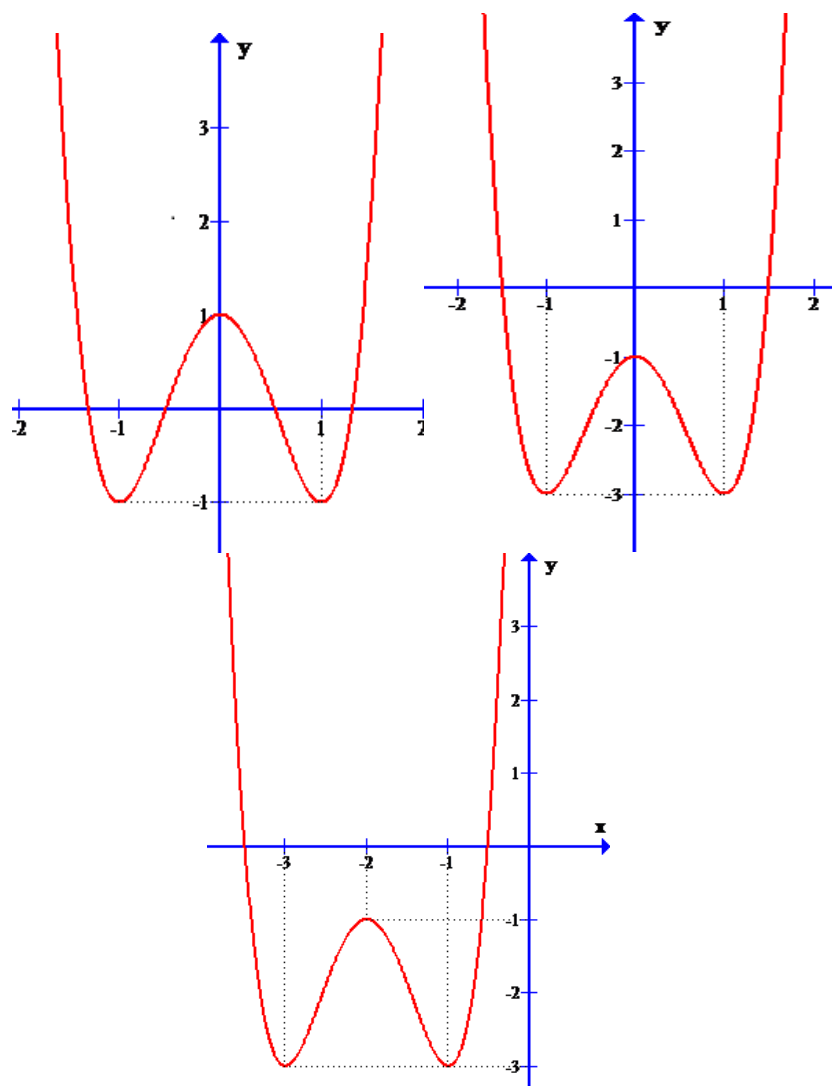
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



Đồ thị các hàm số lần lượt theo thứ tự:

$$y = f'(x-2)+2, \quad y = f'(x-2), \quad y = f'(x)$$

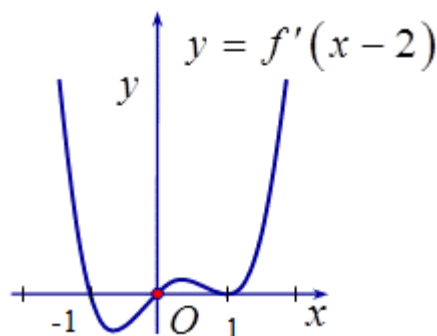
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau: (với x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ với Ox)

BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)						

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị. **Chọn đáp án B.**

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải 2 đơn vị.

Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$+$
$f(x)$		$\nearrow f(-3)$	$\searrow f(-2)$	$\nearrow f(-1)$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.

DẠNG TOÁN 10. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ**

NHÓM TOÁN VD - VDC

NHÓM TOÁN VD - VDC

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 4: BIẾT BẢNG XÉT DẤU CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Dạng toán 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$

trong bài toán không chứa tham số.

Dạng toán 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = [f(u(x))]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = [f(u(x))]^k$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$

trong bài toán không chứa tham số.

Dạng toán 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$

trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy $f'(x) = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 3x^2 + 6x - 9 = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1} + 3(x+3)(x-1)$

$$g'(x) = (x+3)(x-1) \left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3 \right]$$

Do $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Từ đó ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Do $g'(x) = 0$ tại $x = -3$ và $x = 1$, đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm đó nên hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x) = a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $a < 0$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 3x + 6 = a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1} - 3(x-2)(x+1)$

$$g'(x) = (x-2)(x+1) \left[a(x+1)^{2m}(x-2)^{2n} - 3 \right]$$

Do $a < 0$ nên $a(x+1)^{2m}(x-2)^{2n} - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$

Do $g'(x) = 0$ tại $x = -1$ và $x = 2$; đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm này nên hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x) = f(6 - x^2)$ là

- A. 5. B. 7. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = -2x \cdot f'(6 - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(6 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 6 - x^2 = -3 \\ 6 - x^2 = 2 \\ 6 - x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Ta có $g'(4) = -8 \cdot f'(-10) > 0$ và bảng xét dấu $f'(x)$ không có nghiệm bội chẵn.

Bảng biến thiên $y = g(x)$.

	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Vậy số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x) = f(6 - x^2)$ là 4.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f'\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Do $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} > \frac{x + |x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$

$$\text{nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 3 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{12}{5} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên $y = g(x)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	
$g(x)$									

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ là 2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $f(2^x)$ đạt cực tiểu tại x bằng

A. 0

B. 1

C. 2

D. 0 và 2

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(2^x)$

$$g'(x) = 2^x \ln 2 \cdot f'(2^x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nếu $x \in (-\infty; 0)$ thì $2^x \in (0; 1)$;

Suy $f'(2^x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 \cdot f'(2^x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

Nếu $x \in (0; 1)$ thì $2^x \in (1; 2)$;

Suy $f'(2^x) < 0, \forall x \in (0; 1)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 \cdot f'(2^x) < 0, \forall x \in (0; 1)$

Nếu $x \in (1; +\infty)$ thì $2^x \in (2; +\infty)$;

Suy $f'(2^x) > 0, \forall x \in (1; +\infty)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 \cdot f'(2^x) > 0, \forall x \in (1; +\infty)$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 1.

Kết luận: Hàm số $g(x) = f(2^x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $f(e^{x^2-|x|-2})$ là

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } g(x) = f(e^{x^2-|x|-2})$$

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Hơn nữa $g(-x) = f\left(e^{(-x)^2 - |-x| - 2}\right) = f\left(e^{x^2 - |x| - 2}\right) = g(x)$

Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua trục Oy .

Xét $x \geq 0$

$$g(x) = f\left(e^{x^2 - x - 2}\right)$$

$$g'(x) = (2x - 1) \cdot e^{x^2 - x - 2} \cdot f'\left(e^{x^2 - x - 2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'\left(e^{x^2 - x - 2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ e^{x^2 - x - 2} = 1 \text{ (vì } e^{x^2 - x - 2} > 0, \forall x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \text{ (vì } x \geq 0) \end{cases}$$

Nếu $x > 2$ thì $x^2 - x - 2 > 0$,

suy ra $e^{x^2 - x - 2} > 1$

suy ra $f'\left(e^{x^2 - x - 2}\right) > 0$

Nếu $0 \leq x < 2$ thì $x^2 - x - 2 < 0$,

suy ra $0 < e^{x^2 - x - 2} < 1$

suy ra $f'\left(e^{x^2 - x - 2}\right) < 0$

Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ trên $[0; +\infty)$

x	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+

Suy ra $g(x)$ có hai điểm cực trị dương.

Do $g(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\log_2 x)$. Chọn đáp án đúng

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x > 0$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{x \ln 2} f'(\log_2 x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+	
$g(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án ta chọn **A**.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Xác định và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f[\log_3(x^2 - 2x + 3)]$. Chọn đáp án đúng:

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = g'(x) = \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)\ln 3} f'[\log_3(x^2-2x+3)];$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(\log_3(x^2 - 2x + 3)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3(x^2 - 2x + 3) = 1 \\ \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } f'[\log_3(x^2 - 2x + 3)] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 - 2x + 3) > 1 \\ \log_3(x^2 - 2x + 3) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{7} < x < 0 \\ 2 < x < 1 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên.

<u>x</u>	$-\infty$	$1-\sqrt{7}$	0	1	2	$1+\sqrt{7}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$								

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị. Chọn đáp án A

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $g'(x) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x - 4)$.

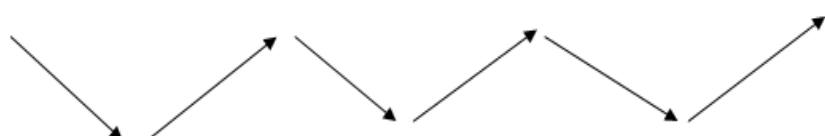
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = -2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).}$$

Ta chọn $x = -2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2) = 2 \cdot (-3) \cdot f'(4)$. Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó: $f'(4) > 0$.

Suy ra: $g'(-2) < 0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

- A. 4. B. 5. **C. 6.** D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$+ \text{ Đặt } g'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$$

$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2+1}{x} = a \ (a < -2) \\ \frac{x^2+1}{x} = b \ (-2 < b < 2) \\ \frac{x^2+1}{x} = c \ (c > 2) \end{cases}$$

$$+ \text{ Xét hàm số } h(x) = \frac{x^2+1}{x}, h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$+ \text{ Bảng biến thiên của hàm số } h(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$		$y=c \ (c>2)$		$+\infty$	
				x_3	x_4
		$y=b \ (-2<b<2)$		2	
		x_1	x_2	$y=a \ (a<-2)$	
	$-\infty$				$-\infty$

+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x) = a, h(x) = c$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 , mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x) = b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		1	-1	2	
	$-\infty$				$-\infty$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

A. 4.

B. 10.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

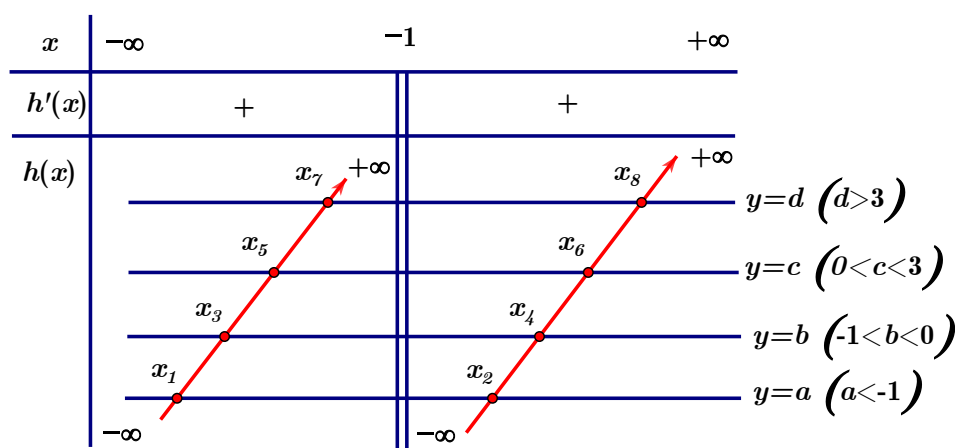
Chọn D

+ Đặt $g'(x) = \left(\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right) f'\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$

$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} \right) = 0 (VN) \\ f' \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{x+1} = a \ (a < -1) \\ \frac{x^2 + 2x}{x+1} = b \ (-1 < b < 0) \\ \frac{x^2 + 2x}{x+1} = c \ (0 < c < 3) \\ \frac{x^2 + 2x}{x+1} = d \ (d > 3) \end{cases}$$

+ Xét hàm số $h(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$, $h'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}$, $h'(x) = 0$ (VN)

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$



+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x) = a, h(x) = b, h(x) = c, h(x) = d$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt mà a, b, c, d đôi một khác nhau $\Rightarrow f' \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} \right) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, x_3, x_5, x_7, x_2, x_4, x_6, x_8$.

Vậy hàm số $g(x) = f \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} \right)$ có 8 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10.

B. 15.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m = -1 \\ x^2 - 2x - m = 1 \\ x^2 - 2x - m = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 - 2x - m - 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ \Delta'_{(3)} > 0 \\ VT_{(1)} \neq 0 \\ VT_{(3)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m + 5 > 0 \\ -m \neq 0 \\ -m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

Vậy có 10 giá trị của tham số m .

DẠNG TOÁN 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } y' = -(12x^3 - 24x).f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x$$

$$= -12x(x^2 - 2).f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2)$$

$$= -12x(x^2 - 2).(f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)).$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } -x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq f'(-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó phương trình } f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \text{ vô nghiệm.}$$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Lý thuyết:

Bước 1: Tính $y' = g'(x) = k.u'(x).[f(u(x))]^{k-1}.f'(u(x))$

$$+ \text{ Nếu } k \text{ chẵn: } y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f(u(x)) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Nếu } k \text{ lẻ: } y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giải tìm nghiệm:

$u'(x) = 0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x)) = 0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

$f(u(x)) = 0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các nghiệm x_0 của phương trình $f(x) = 0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$		2		5		$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^2(2x^2 + x)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = 2(2x^2 + x)' \cdot f'(2x^2 + x) \cdot f(2x^2 + x) = 2(4x + 1) \cdot f'(2x^2 + x) \cdot f(2x^2 + x) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \\ f(2x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

$$\square \quad 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\square \quad \text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } f'(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = -2(VN) \\ 2x^2 + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\square$ Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 1$ (vì đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớn hơn 1). Khi đó $f(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x_0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - x_0 = 0$ (*) phương trình có hai nghiệm vì a, c trái dấu.

Mặt khác, thay các nghiệm $x = -\frac{1}{4}; -1; \frac{1}{2}$ vào (*) ta được $x_0 \leq 1$ không thỏa mãn điều kiện

của x_0 nên $x = -\frac{1}{4}; -1; \frac{1}{2}$ không là nghiệm của (*).

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Yêu cầu đề bài có thể thay đổi **số cực đại** hoặc **số cực tiểu** của hàm số, khi đó ta cần phải xét dấu $g'(x)$. Cụ thể:

Ta có 2 nghiệm của phương trình $f(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x_0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - x_0 = 0$ là

$$+ \quad x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \rightarrow x_1' = \frac{1}{\sqrt{1+8x_0}} > 0; \forall x_0 > 1$$

$$\Rightarrow x_1 > x_1(1) = \frac{1}{2}$$

$$+ \quad x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \rightarrow x_1' = -\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}} < 0; \forall x_0 > 1$$

$$\Rightarrow x_1 < x_1(1) = -1$$

Mặt khác:

$$f'(2x^2 + x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x < -2(VN) \\ 2x^2 + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(2x^2 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x > -2 \\ 2x^2 + x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	x_1	-1	-1/4	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$				
$4x + 1$	-		-		-	0	+		+		+
$f'(2x^2+x)$	+		+	0	-		-	0	+		+
$f(2x^2+x)$	+	0	-		-		-		-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên ta được: **2 cực đại và 3 cực tiểu.**

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2 -1 -2 $+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^3 + 3x)$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = 3(3x^2 + 3)f'(x^3 + 3x) \cdot f^2(x^3 + 3x)$.

Ta thấy $g'(x) = 3(3x^2 + 3) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f^2(x^3 + 3x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'(x^3 + 3x)$

$$f'(x^3 + 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = -1 \\ x^3 + 3x = 0 \\ x^3 + 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \approx -0,32 \\ x = 0 \\ x = x_2 \approx 0,32 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$

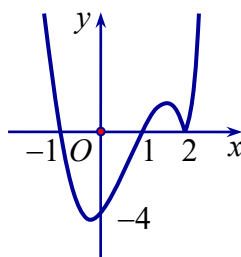
$$\text{Do đó } f'(x^3 + 3x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^3 + 3x < 0 \\ x^3 + 3x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x < 0 \\ x > x_2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	0	$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$	$+\infty$				

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f^{2019}(x^3 - 1)$ là



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2019 \cdot f^{2018}(x^3 - 1) \cdot f'(x^3 - 1) \cdot 3x^2$,

Ta có $y' = f^{2018}(x^3 - 1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'(x^3 - 1)$.

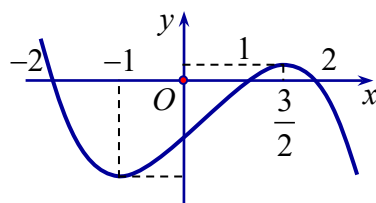
$$\text{Ta có } f'(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = -1 \\ x^3 - 1 = 1 \\ x^3 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \\ x = \sqrt[3]{3} \end{cases}.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị của hàm số } y = f'(x) \text{ ta thấy } f'(x^3 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 < -1 \\ x^3 - 1 > 1 \\ x^3 - 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \sqrt[3]{2} \\ x \neq \sqrt[3]{3} \end{cases}.$$

$$\text{Tương tự } f'(x^3 - 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x^3 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[3]{2}.$$

Vì vậy suy ra hàm số $y = f^{2019}(x^3 - 1)$ có hai điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = (f(2x - 1))^{2018}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			0			0		
	$-\infty$							$-\infty$

Xét hàm số $y = (f(2x - 1))^{2018}$, ta có $y' = 2018 \cdot f^{2017}(2x - 1) \cdot 2 \cdot f'(2x - 1)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(2x - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{2017}(2x - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức: $-f'(2x - 1)$.

$$\text{Ta có } y' \leq 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq -2 \\ 1 \leq 2x-1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Tương tự } y' > 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2x-1 < 1 \\ 2x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra hàm số $y = (f(2x-1))^{2018}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$							

The graph shows a function $f(x)$ with a local maximum at $x = -2$ (value 4) and a local minimum at $x = 1$ (value 7). The function approaches $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$.

Hỏi hàm số $y = [f(2-x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2 \cdot f(2-x) \cdot f'(2-x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f(2-x) \cdot f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2-x) = 0 \\ f'(2-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = a < -2 \\ 2-x = b > 1 \\ 2-x = -2 \\ 2-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-a > 4 \\ x = 2-b < 1 \\ x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$y' \text{ không xác định} \Leftrightarrow f'(2-x) \text{ không xác định} \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Dựa vào đồ thị $f(x)$ ta thấy $f(2-x) > 0 \Leftrightarrow a < 2-x < b \Leftrightarrow 2-b < x < 2-a$

$$f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -2 \\ 0 < 2-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	$2-b$	1	2	4	$2-a$	$+\infty$				
$f'(2-x)$	-	-	0	+		-	0	+	+		
$f(2-x)$	-	0	+	+		+	+	0	-		
y'	-	0	+	0	-		+	0	-	0	+

Vậy hàm số $y = [f(2-x)]^2$ có 5 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Biết rằng hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y = f^2(x^2 - 2x)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a < -2 \\ x = b > 3 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f^2(x^2 - 2x)$. Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)f(x^2-2x)$.

Để hàm số $y = f^2(x^2 - 2x)$ có nhiều điểm cực tiểu nhất thì phương trình $f(x^2 - 2x) = 0$ có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow x^2 - 2x = b > 3$ (vì $x^2 - 2x \geq -1, \forall x$)

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 3 \end{cases}.$$

Trong đó các nghiệm $-1, 1, 3, x_1, x_2$ là nghiệm bội lẻ và $1 \pm \sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1, 1, 3, x_1, x_2$.

Ta có $g'(0) = -2f'(0) < 0$ (do $f'(0) > 0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	x_2	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = f^2(x^2 - 2x)$ có đúng 3 điểm cực tiểu.

Câu 7: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)f(2) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f^2(x - 2019)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2f(x - 2019)f'(x - 2019)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x - 2019) = 0(1) \\ f'(x - 2019) = 0(2) \end{cases}$$

+) Vì $f(1)f(2) < 0$ và từ BBT suy ra đồ thị $y = f(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 1, 1 < x_2 < 2, x_3 > 2$. Mà đồ thị hàm số $f(x - 2019)$ có được bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 2019 đơn vị, nên nó sẽ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 2020, 2020 < x_2 < 2021, x_3 > 2021$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2019 = 1 \\ x - 2019 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ x = 2021 \end{cases}$$

Do vậy pt $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt +) KL hàm $g(x)$ có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Chúng ta có thể tổng quát: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a_1)f(a_2) < 0, f(a_2)f(a_3) < 0, \dots, f(a_{n-1})f(a_n) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	a_1	a_2		a_n	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

($f'(x)$ đổi dấu đan xen khi qua $a_1, \dots, a_n$)

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^{2k}(x \pm c)$ là $2n + 1$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y		3		2		
	$-\infty$		-1		$-\infty$	

Hàm số $g(x) = \left(f\left(\frac{x-1}{x+2} \right) \right)^{2018}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7

B. 3

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } g'(x) = 2018 \cdot \frac{3}{(x+2)^2} \cdot \left(f\left(\frac{x-1}{x+2} \right) \right)^{2017} \cdot f'\left(\frac{x-1}{x+2} \right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{x-1}{x+2} \right) = 0 & (1) \\ f'\left(\frac{x-1}{x+2} \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\square \text{ Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f\left(\frac{x-1}{x+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} = a; (a < 0) \\ \frac{x-1}{x+2} = b; (0 < b < 1) \\ \frac{x-1}{x+2} = c; (1 < c < 2) \\ \frac{x-1}{x+2} = d; (d > 2) \end{cases}$$

$$\square f'\left(\frac{x-1}{x+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} = 0 \\ \frac{x-1}{x+2} = 2 \end{cases}$$

Nhận xét: hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là hàm số đơn điệu trên tập xác định nên phương trình (1) có 4 nghiệm đơn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn và nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) không trùng nhau.

$$\square g'(x) \text{ không xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} = 1 \quad (VN) \\ x = -2 \end{cases}$$

Nhận xét: $x = -2$ không thuộc tập xác định của $y = g(x)$

Vậy $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn khác -2 nên hàm số $y = g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		3		$-\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = [f(e^x - 3)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = 2 \cdot e^x \cdot f(e^x - 3) \cdot f'(e^x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(e^x - 3) = 0$$

$$\text{Hoặc } f'(e^x - 3) = 0$$

Dựa vào BBT ta được:

- ☐ Giải $f(e^x - 3) = 0$
- ☐ $e^x - 3 = a (a < -3) \Leftrightarrow e^x = a + 3 < 0$ (vô nghiệm)
- ☐ $e^x - 3 = b (-3 < b < 1)$
 - $\Leftrightarrow x = b + 3$ (*)
 - $\Leftrightarrow x = \ln(b + 3)$ (1 nghiệm)
- ☐ $e^x - 3 = c (c > 1)$
 - $\Leftrightarrow e^x = c + 3$ (**)
 - $\Leftrightarrow x = \ln(c + 3)$ (1 nghiệm)
- ☐ Giải $f'(e^x - 3) = 0$
 - $\Leftrightarrow e^x - 3 = -3 \Leftrightarrow e^x = 0$ (vô nghiệm)
 - Hoặc $e^x - 3 = 1 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ (1 nghiệm)

Lấy $x = \ln 4$ thay vào (*) và (**) không thỏa mãn điều kiện của b và c nên 3 nghiệm trên không trùng nhau $\Rightarrow g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn

Vậy $g(x)$ có 3 cực trị

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x		- 5		0		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Biết rằng $f(-5) < 0$ và $f(5) > 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = [f(x^2 - 6x)]^2$ là

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 2(2x - 6) \cdot f'(x^2 - 6x) \cdot f(x^2 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ f'(x^2 - 6x) = 0 \quad (1) \\ f(x^2 - 6x) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

+) Từ (1) kết hợp với bảng dấu $f'(x)$ ta có $f'(x^2 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = -5 \Leftrightarrow x = 5, x = 1 \\ x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6 \end{cases}$

+) Từ (2) kết hợp bảng dấu $f'(x)$ và đk $f(-5) < 0$ và $f(5) > 0$ ta có

$f(x^2 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = x_0 \in (0; 5)$ nên pt $x^2 - 6x - x_0 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

+) Các nghiệm đó là nghiệm bội lẻ (nghiệm đơn) $\Rightarrow$ hàm số $y = [f(x^2 - 6x)]^2$ có 7 cực trị

Câu 11: Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		-	
$f(x)$	$+\infty$				1		$-\infty$

Hàm số $y = [f(4 - x^2)]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{TH1. Ta có } y' = -6x \cdot [f(4 - x^2)]^2 \cdot f'(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ [f(4 - x^2)]^2 = 0 \quad (1) \\ f'(4 - x^2) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

+) Dựa vào bảng xét dấu y' ta có pt(1) có nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn nên tại đó không phải là điểm cực trị.

+) Từ (2) ta có $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

TH2. Điểm làm cho y' không xác định: $4 - x^2 = 3 \Rightarrow x = 1, x = -1$

Vậy ta có 5 điểm cực trị

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-5	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	5	-7	$+\infty$

Hàm số $y = [f(4 - \sqrt{x}) + 3]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D = [0; +\infty)$

Ta có $y' = \frac{-2}{\sqrt{x}} \cdot f'(4 - \sqrt{x}) \cdot [f(4 - \sqrt{x}) + 3]^3, (x > 0)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4 - \sqrt{x}) = 0 & (1) \\ f(4 - \sqrt{x}) + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

+) Từ (1) ta có: $f'(4 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{x} = -5 \Leftrightarrow x = 81 \\ 4 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 16 \\ 4 - \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0; +\infty) \end{cases}$

+) Từ (2) ta có $f(4 - \sqrt{x}) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{x} = a \in (0; 4) \Leftrightarrow x = x_1 \\ 4 - \sqrt{x} = b \in (4; +\infty) \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{cases}$

Vậy có $y = [f(4 - \sqrt{x}) + 3]^4$ có 3 cực trị.

Câu 13: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu y' như sau.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị nhiều nhất và ít nhất của hàm số

$y = g(x) = [f(2x+1)]^2$, biết $f(3) < 0$. Khi đó $2m - 3n$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. -3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g'(x) = 4f(2x+1) \cdot f'(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x+1) = 0 \\ f'(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x+1) = 0 \\ 2x+1 = 1 \\ 2x+1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x+1) = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc số nghiệm của phương trình $f(2x+1) = 0$.

☑ Trường hợp 1: $f(1) > 0$. Suy ra phương trình

$$f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = a < 1 \\ 2x+1 = b, b \in (1, 3) \\ 2x+1 = c > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-1}{2} < 0 \\ x = \frac{b-1}{2} \in (0; 1) \\ x = \frac{c-1}{2} > 1 \end{cases}.$$

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có năm điểm cực trị.

☑ Trường hợp 2: $f(1) = 0$. Suy ra phương trình $f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 1 \\ 2x+1 = a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a-1}{2} > 1 \end{cases}.$

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

☑ Trường hợp 3: $f(1) < 0$. Suy ra phương trình $f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = a > 3 \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{2} > 1$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = g(x) = [f(u(x))]^k$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho $y = f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xét dấu của $y = f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	$+\infty$		
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = 3 - 2x \Rightarrow x = \frac{3-u}{2}$

Ta có $f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ u = -2 \\ u = -3 \\ u = -5 \end{cases}$

Hơn nữa $f'(u) > 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < u < 4 \\ u < -5 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-3	-2	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								

Câu 2: Cho $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xét dấu của $y = f'(\sqrt[3]{x})$ như sau

x	$-\infty$	-1	8	27	$+\infty$			
$f'(\sqrt[3]{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = u^3$

$$f'(\sqrt[3]{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 8 \\ x = 27 \end{cases}$$

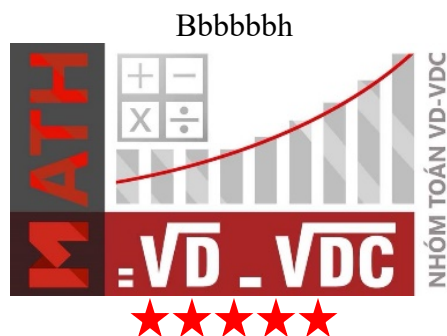
Suy ra $f'(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = 2 \\ u = 3 \end{cases}$

$$f'(u) > 0 \Rightarrow f'(\sqrt[3]{x}) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 8 \\ 27 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < u^3 < 8 \\ 27 < u^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < u < 2 \\ 3 < u \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

DẠNG TOÁN 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ**

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 5: CỰC TRỊ CỦA HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

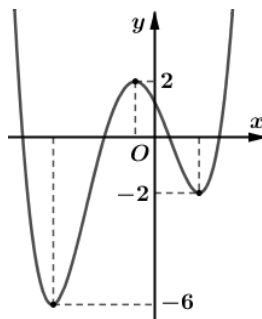
- Dạng toán 1.** Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$
- Dạng toán 2.** Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$
- Dạng toán 3.** Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$
- Dạng toán 4.** Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số
 $y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$
- Dạng toán 5.** Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$
- Dạng toán 6.** Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$
- Dạng toán 7.** Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$
- Dạng toán 8.** Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số
 $y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$
- Dạng toán 9.** Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$
- Dạng toán 10.** Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$
- Dạng toán 11.** Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$
- Dạng toán 12.** Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số
 $y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$
- Dạng toán 13.** Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$
- Dạng toán 14.** Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$
- Dạng toán 15.** Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$
- Dạng toán 16.** Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số
 $y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$

DẠNG TOÁN 1. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

DẠNG TOÁN 2. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số

$$y = |f(ax+b)|.$$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x+2019) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2019) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2019) + m^2$ với trục hoành là 2.

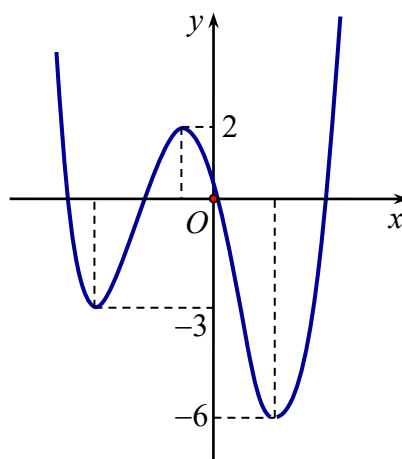
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2019) + m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

+ Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \leq -2$: vô lý

+ Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$$\longrightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; 2\}.$$

Câu 2: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12.

B. 15.

C. 18.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

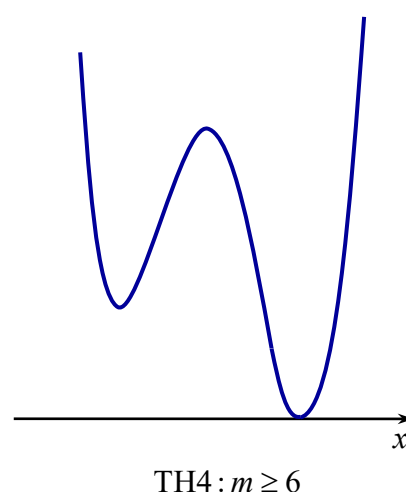
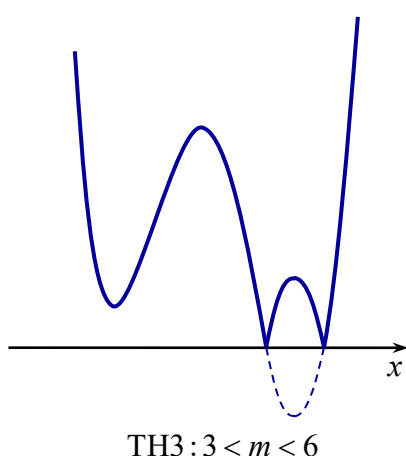
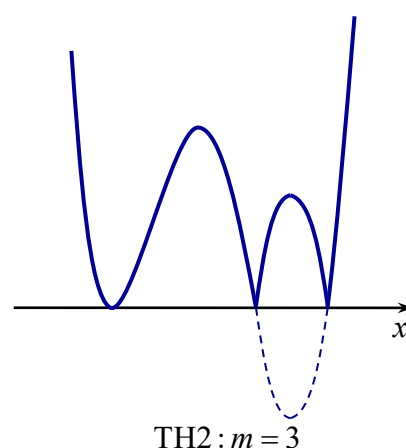
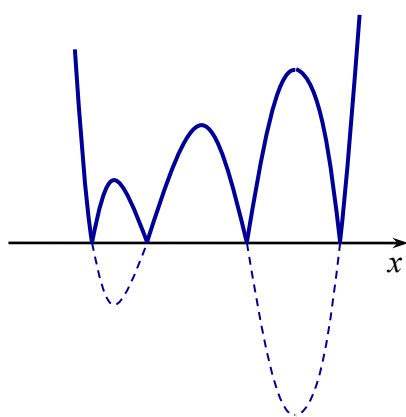
+ Xác định đồ thị hàm số $y = f(x-1)$

+ Áp dụng tính chất: Số cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và số giao điểm (không phải là cực trị) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với Ox .

Cách 1:

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox .

Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Cách 2

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x-1)$.

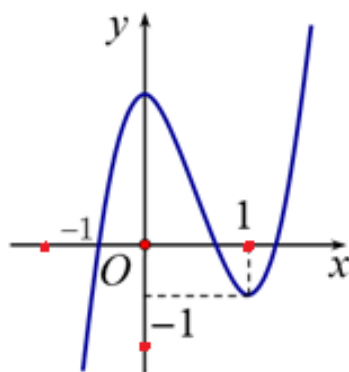
Do đó đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có 3 cực trị và có 4 giao điểm với Ox.

Để được đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ với m nguyên dương ta phải tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị

Để thỏa mãn điều kiện đề bài thì đồ thị hàm số $y = f(x-1) + m$ cắt Ox tại đúng 2 điểm (không phải là điểm cực trị của chính nó), do đó $3 \leq m < 6 \Rightarrow S = \{3; 4; 5\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S là 12.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = |f(|x+1|-1)|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 11

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(|x+1|-1)$

Ta có $y' = \frac{x+1}{|x+1|} f'(|x+1|-1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|-1 = 0 \\ |x+1|-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

y' không xác định tại $x = -1$.

Bảng biến thiên

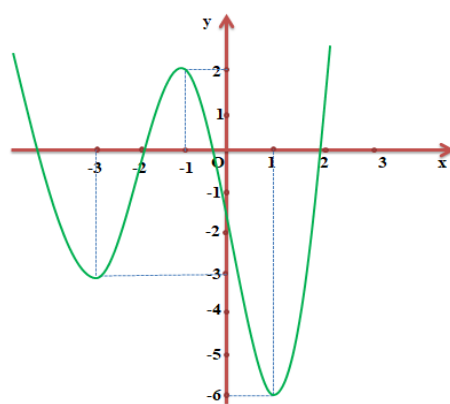
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$f(0) > 0$		$+\infty$

Arrows indicating the shape of the function: from $+\infty$ at $x=-\infty$ down to a local minimum at $x=-3$ (labeled -1), up to a local maximum at $x=-2$ (labeled $f(0)$), down to a local minimum at $x=-1$ (labeled $f(-1) < 0$), up to a local maximum at $x=0$ (labeled $f(0) > 0$), down to a local minimum at $x=1$ (labeled -1), and up to $+\infty$ at $x=+\infty$.

Dựa vào BBT của hàm số $y = f(|x+1|-1)$ suy ra BBT của hàm số $y = |f(|x+1|-1)|$.

Vậy hàm số $y = |f(|x+1|-1)|$ có 11 cực trị.

Câu 4: Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9.

B. 12.

C. 18.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có 3 cực trị.

Số cực trị của hàm số $y = f(x-1) + m$ bằng với số cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ và bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Số cực trị của hàm số $y = |f(x-1) + m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1) + m = 0$ (*).

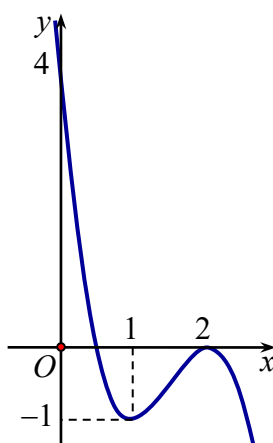
Ta có $f(x-1) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -m \Leftrightarrow f(t) = -m$ với $t = x-1$.

Để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó $-6 < -m \leq 3$ hoặc $2 \leq -m \Rightarrow m \in \{3, 4, 5\} \Rightarrow S = 3 + 4 + 5 = 12$.

DẠNG TOÁN 3. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt



A. $(-1; 0)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(-5; -4)$.

D. $(-4; -3)$.

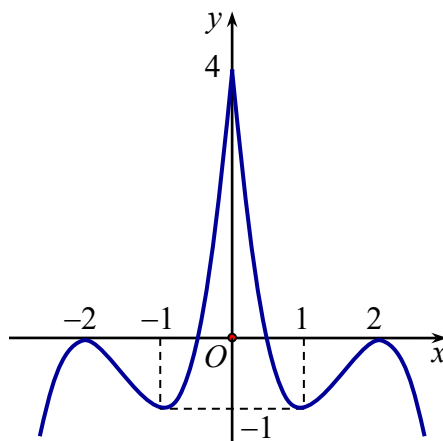
Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0 \Leftrightarrow -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| + 4 = m + 4 (*)$

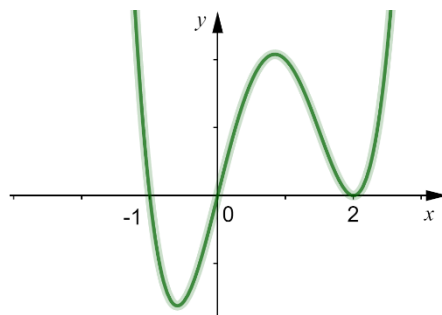
Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m + 4$.

Ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy để (*) có 6 nghiệm phân biệt thì $-1 < m + 4 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

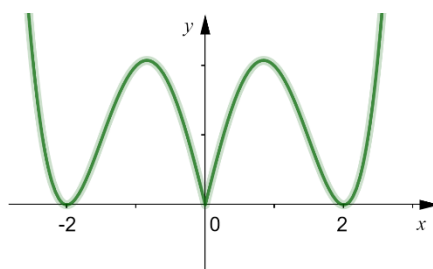
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1)

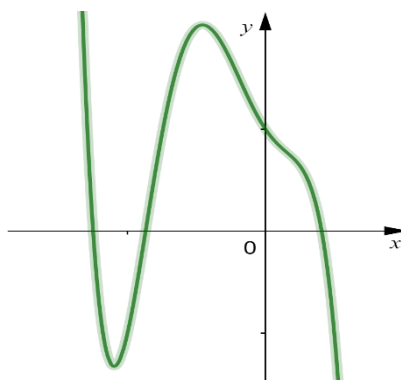
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2)

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

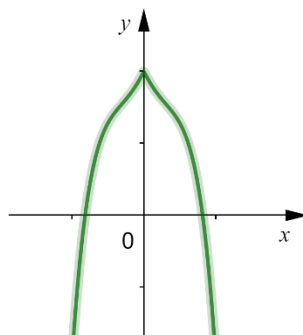
D. 4.

Lời giải

Chọn A

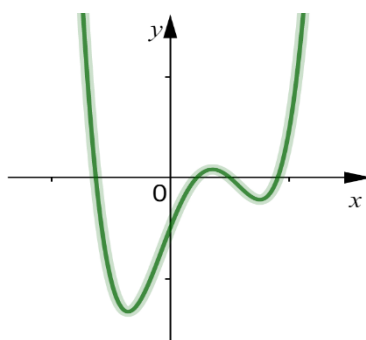
Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

- + Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1) .
- + Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2) .
- + Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

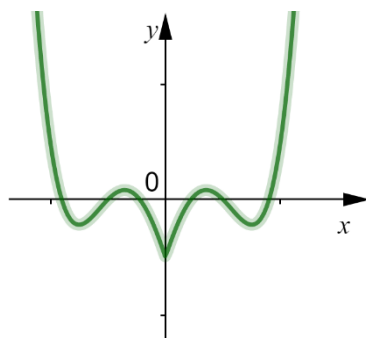
D. 6.

Lời giải

Chọn C

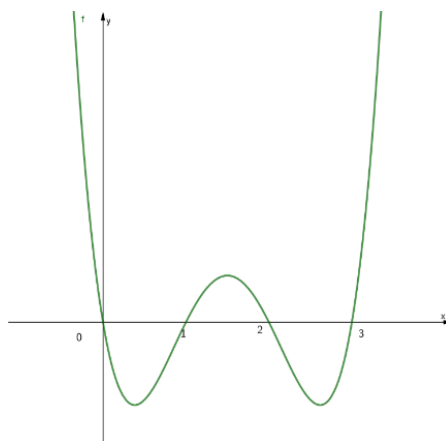
Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

- + Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1) .
- + Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2) .
- + Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

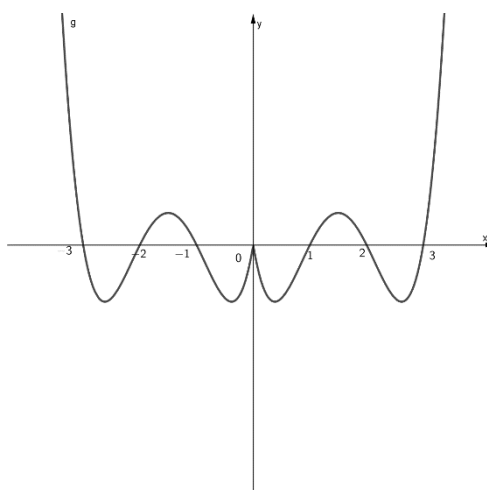
Chọn D

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới

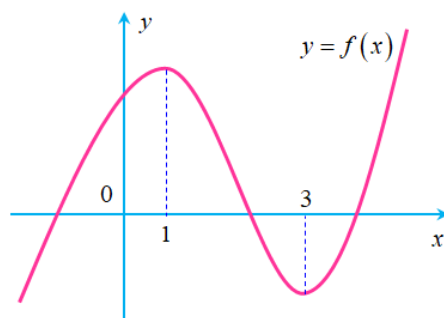


Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 7 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x+a|)$,

$y = f(|x+a|+b) \dots$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

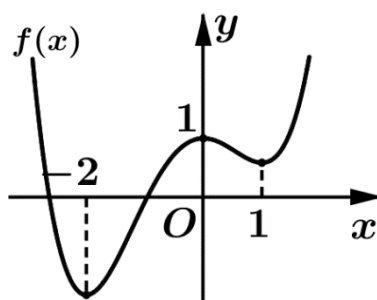
Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương.

—→ $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

—→ $f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Vậy có vô số giá trị m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(|x+1|-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

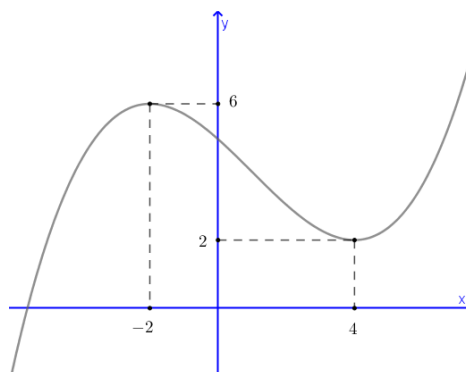
Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(|x+1|-3)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị;
- Xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung, phần đồ thị phía bên phải trục tung thì lấy đối xứng qua trục tung;

- Cuối cùng tịnh tiến đồ thị sang trái 1 đơn vị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 5. B. 6. **C. 3.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

$y = f(|x-3|)$ (1), Đặt $t = |x-3|$, $t \geq 0$. Thì (1) trở thành: $y = f(t)$ ($t \geq 0$).

$$\text{Có } t = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t'_x = \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$$

$$\text{Có } y'_x = t'_x f'(t)$$

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t'_x = 0 \text{ (VN)} \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (L)} \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

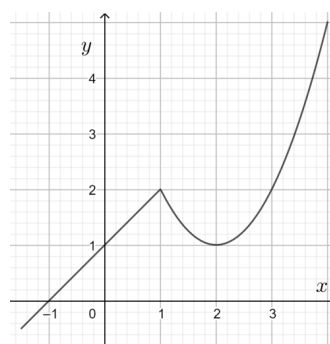
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$				$+\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ CĐ $\searrow$ CT $\nearrow$

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để hàm số $g(x) = f(|x+m|) + 2019m$ có 5 điểm cực trị

A. $m > -\frac{1}{2}$.

B. $m > 1$.

C. $m \geq -\frac{1}{2}$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn A

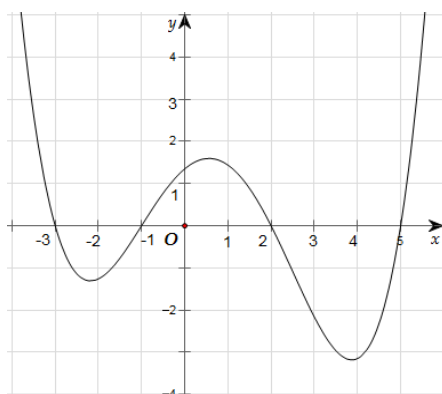
Tịnh tiến đồ thị $y = f(|x+m|)$ lên trên hoặc xuống dưới không làm ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số đã cho. Do đó số cực trị của hàm số $y = g(x)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(|x+m|)$.

Để $f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị thì $f(x+m)$ phải có 2 điểm cực trị dương với $x+m > 0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x=1, x=2$ nên $f(x+m)$ đạt cực trị tại

$$x=2+m; x=1+m. \text{ Do đó } \begin{cases} 2+m+m > 0 \\ 1+m+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = f(|x|+m) = \begin{cases} f(x+m), & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x+m), & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x) = f(|x| + m) = g(x) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục Oy .

Hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0 (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta được $g(x) = f(x + m)$

+ Ta có $g'(x) = f'(x + m)$

+ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + m = -3 \\ x + m = -1 \\ x + m = 2 \\ x + m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 3 \\ x = -m - 1 \\ x = -m + 2 \\ x = -m + 5 \end{cases}$

+ Nhận thấy $-m - 3 < -m - 1 < -m + 2 < -m + 5$

Theo yêu cầu (*) bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 0 \\ -m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \{-3; -2\} \end{cases}$

DẠNG TOÁN 5. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	2	$-\infty$

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	0	2	0	4	0	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y = |f(x)|$ có 7 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

The graph illustrates the function $f(x)$ based on the provided sign chart. The function has a local maximum at $x = 0$ with a value of $y = 2$, and local minima at $x = -1$ and $x = 1$ with a value of $y = 1$. The function increases from $+\infty$ at $x = -\infty$ to the first minimum, then increases to the local maximum, decreases to the second minimum, and finally increases towards $+\infty$ as x approaches $+\infty$.

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-76	5	-76	$+\infty$

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	0	x_3	3	x_4	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	0	76	0	5	0	76	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y = |f(x)|$ có 7 cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

The graph shows a parabola opening upwards. The vertex is at $(2, 0)$. The x-axis has labels at -2 , 0 , and 2 . The y-axis has labels at -17 and -1 . The function value at $x = -2$ is 17 , and at $x = 2$ is 17 . Arrows indicate the function decreases from $+\infty$ at $x = -\infty$ to the vertex at $(2, 0)$ and then increases back to $+\infty$ at $x = +\infty$.

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	0	2	x_2	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	0	17	1	17	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		0	5		$-\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5 .

B. 4 .

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	-1	1	x_1	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	0	5	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2

B. 4 .

C. 3 .

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần:

+) Phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên Ox .

+) Phần đồ thị đối xứng qua Ox với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	5	1		$+\infty$	

Từ bảng biến thiên trên suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	4	$-\infty$	

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 . Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$:

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	2	x_3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$ f(x) $	$+\infty$		0	2		0	4	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$
y	$+\infty$	0	2	$+\infty$	4	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 9: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016.

B. 1952.

C. -2016.

D. -496.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{m}{2}$	$\searrow \frac{m}{2}-32$	$\nearrow$	$+\infty$	

Để thỏa yêu cầu thì trục Ox phải cắt ngang đồ thị tại 3 điểm phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64 \text{ thì } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0 \text{ có ba nghiệm } x_1; x_2; x_3 \text{ với}$$

$x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$						
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$						
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$32 - \frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016.$$

DẠNG TOÁN 6. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		2019			$+\infty$
	$-\infty$		-2020		

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x-2019)+2020|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đồ thị hàm số $u(x) = f(x-2019)+2020$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2019 đơn vị và lên trên 2020 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\infty$	2020		2023		$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-	0	+	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 4039		$\searrow$ 0		$+\infty$
$ u(x) $	$+\infty$	$\searrow$ 0		$\nearrow$ 4039		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |u(x)|$ có 3 điểm cực trị. Chọn B.

Cách 2:

Đặt $u(x) = f(x - 2019) + 2020$

$$\Rightarrow u'(x) = f'(x - 2019) \Rightarrow u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ x = 2023 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2020	2023	$+\infty$	
$u'(x)$	+	0	-	0	+
$u(x)$	$-\infty$	4039	0	$+\infty$	
$ u(x) $	$+\infty$	4039	0	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |u(x)|$ có 3 điểm cực trị. Chọn B.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Hàm số $y = |f(1 - 3x) + 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(1 - 3x) + 1$.

$$\Rightarrow g'(x) = -3 \cdot f'(1 - 3x).$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = -1 \\ 1 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$		
$ g(x) $	$+\infty$	0	3	0	5	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Biết đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị. Khi đó số các giá trị nguyên của tham số của m là

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Do hàm $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên $y = f(x) - m$ có hai điểm cực trị.

Để thỏa mãn yêu cầu bài thì số giao điểm của đồ thị $y = f(x) - m$ với trục hoành phải là 3 hay số giao điểm của $y = f(x)$ và $y = m$ phải là 3. $g(x) = f(1-3x) \Rightarrow g'(x) = -3.f'(1-3x)$

Suy ra $4 < m < 11$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ nên chọn đáp án B.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4; 11)$.

B. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.

C. $m = 3$.

D. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng

$$y = 2m \text{ tại } 5 - 2 = 3 \text{ điểm phân biệt} \Leftrightarrow 4 < 2m < 11 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}.$$

DẠNG TOÁN 7. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Lý thuyết:

$$\diamond \text{ Ta có } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Do đó, đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ có thể được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung (kể cả giao điểm của (C) với trục tung – nếu có), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

+ Đồ thị (C') là hợp của hai phần trên.

$\diamond$ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra số điểm cực trị, dấu của các điểm cực trị của hàm số và sự tồn tại giao điểm với trục tung (nếu có).

$\diamond$ **Phương pháp chung giải quyết Bài toán:** Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$:

- Bước 1: Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$. Giả sử có n điểm.

- Bước 2: Xét sự tồn tại giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ với trục tung.

- Bước 3: Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

✓ Trường hợp 1: Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2n + 1$

✓ Trường hợp 2: Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ không cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2n$.

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy tại điểm cực đại và hàm số không có điểm cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 1 điểm cực tiểu dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có 2 điểm cực tiểu là $x = \pm 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2 + 1 = 5$ điểm cực trị trong đó có 3 điểm cực tiểu là các điểm $x = 0, x = \pm 3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực đại.
- B. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực trị.
- C. Hàm số $y = f(|x|)$ có một cực trị dương.
- D. Hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và không có cực trị, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$-\infty$				$-\infty$

- A. 2.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 5.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương,

mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2 + 1 = 5$ điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và không có cực trị, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2	$+\infty$	2

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục Oy và không có cực trị, nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục Oy và có 1 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x = \pm 1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$	-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$			$\nearrow$	2	$\searrow$			
	$-\infty$			$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	2
							$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ hai điểm cực trị không âm.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu $x = \pm 5$ và một điểm cực đại $x = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+			+	0	-
y	1		$+\infty$		$-\infty$	2	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực đại.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực tiểu.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là điểm cực đại, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực đại $x = \pm 1$ và một điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực trị.
- B. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực trị.
- C. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.
- D. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục Oy và hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là điểm cực tiểu, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x = \pm 2$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần bên phải trục Oy của đồ thị $y = f(x)$ (Kê cả giao điểm với trục Oy)

+ Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy

• Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$(f(x))'$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$f(0)$	2	$+\infty$

Từ BBT ta thấy đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2 + 1 = 5$ điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số

$y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$

1. Lý thuyết:

Nhận xét: đồ thị của hàm số $y = g(x) = f(|ax+b|+m)$ nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{a}$ là trục đối xứng, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(|ax+b|+m)$ bằng $2t+1$, với t là số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{b}{a}$ của hàm $y = f(ax+b+m)$.

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		-3		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|2x+1|+3)$ là

A. 1.

B. 5.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

+/- Ta có : Số điểm cực trị của hàm $y = f(|2x+1|+3)$ bằng $2\alpha+1$, với α bằng số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{1}{2}$ của hàm $y = f(2x+1+3) = f(2x+4)$.

+/- Hàm $y = f(2x+4)$ có 2 điểm cực trị là:
$$\begin{cases} 2x+4=-1 \\ 2x+4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: Số điểm cực trị của hàm $y = f(|2x+1|+3)$ bằng $2.0+1=1 \Rightarrow$ Chọn A.

DẠNG TOÁN 9. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

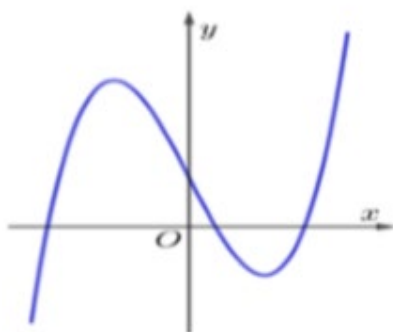
DẠNG TOÁN 10. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 11. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

DẠNG TOÁN 12. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$$y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$$

Câu 1: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

Tính đạo hàm của hàm hợp, giải phương trình đạo hàm để tìm số điểm cực trị

Cách giải:

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = x_1 < 0 \\ x = \{x_2; x_3\} > 0 \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } g(x) = f(|x|) + 2018 = \begin{cases} f(x) + 2018 & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) + 2018 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ -f'(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & \text{khi } x \geq 0 \\ -f'(-x) = 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = -x_2 \\ x = -x_3 \end{cases}$$

Do đó $g'(x) = 0$ bị triệt tiêu tại 4 điểm $x_2, -x_2, x_3, -x_3$ và không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 13. Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

DẠNG TOÁN 14. Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 15. Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 6. **D. 4.**

Lời giải

Chọn D

Để $g(x) = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Rightarrow y = f(x)$ có đúng 1 cực trị có hoành độ dương.

Mặt khác, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x^2 = -m^2 + 3m + 4 \end{cases}$ (trong đó $x = -1$ là nghiệm kép).

$$ycbt \Leftrightarrow -m^2 + 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4.$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

DẠNG TOÁN 16. Biết bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số

$$y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b) \dots$$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu của hàm $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
y'	+		- 0	+ 0	-	+

Hàm số $y = f(|x-2|) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5.** B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm số } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Do đó hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

$\Rightarrow f(|x-2|)$ có năm cực trị (tính tiến đồ thị sang phải hai đơn vị thì số cực trị không thay đổi)

$\Rightarrow y = f(|x-2|) + 2020$ có 5 cực trị (tính tiến đồ thị lên 2020 đơn vị không làm thay đổi số cực trị).

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$ là

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

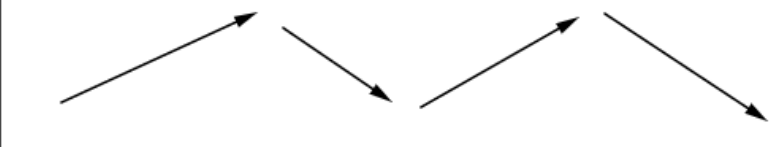
$$g(x) = f(|x|^2 - |x|)$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x^2 - x) \Rightarrow g(x) = h(|x|)$$

$$\text{Ta có } h'(x) = (f(x^2 - x))' = (2x - 1) \cdot f'(x^2 - x)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -2 \\ x^2 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm số $g(x) = h(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m < -2$.

B. $m \geq -2$.

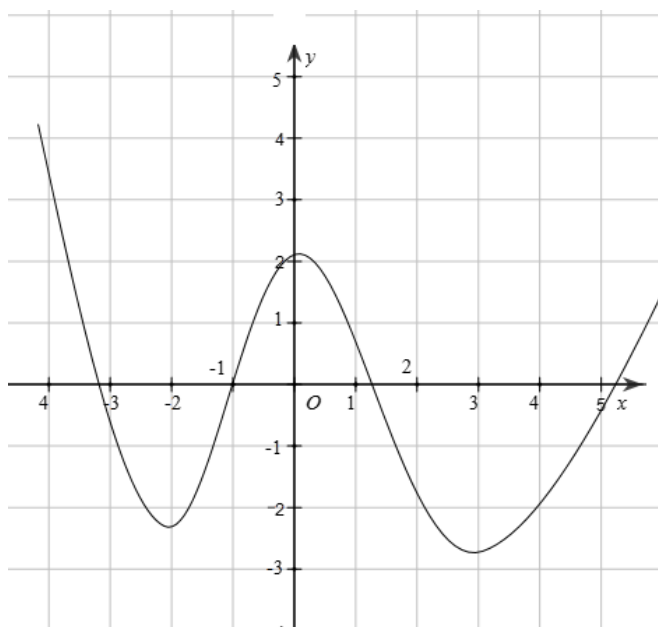
C. $m < 3$.

D. $-2 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có dạng đồ thị của $f(x)$:



Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ theo vector $\vec{v} = (-m; 0)$, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị của $f(x+m)$ với $x \geq 0$ qua trục Oy .

Vậy để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 7 điểm cực trị thì $m < -2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|2x-3|-2)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = (|2x-3|-2)' \cdot f'(|2x-3|-2) = \frac{2(2x-3)}{|2x-3|} \cdot f'(|2x-3|-2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-3|-2 = 0 \\ |2x-3|-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ x = 1/2 \\ x = 7/2 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$5/2$	$7/2$	$+\infty$					
$g'(x)$	-	0	+	0	-		+	0	-	0	+	
$g(x)$												

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 5: Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	a	b	c	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đặt $g(x) = f(|x^3|)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

A. 3

B. 7

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^3), h'(x) = 3x^2 f'(x^3), h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 0 \\ x^3 = a \\ x^3 = b \\ x^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{b} \\ x = \sqrt[3]{c} \end{cases}. \text{ Ta có } g(x) = f(|x^3|) = f(|x|^3) = h(|x|).$$

BBT của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{c}$	$-\sqrt[3]{b}$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là 5.