



Chương 07

Bài 1.

ĐẠO HÀM

A

Lý thuyết

1. Đạo hàm



Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

⌘ Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$
- Bước 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Chú ý

Trong định nghĩa & quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.



2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



Xét ví dụ

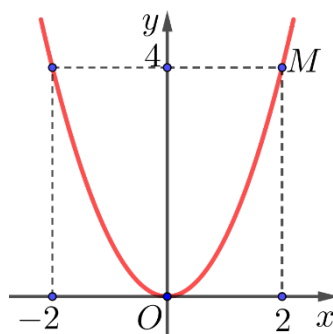
Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ (C) và điểm $M(1;1) \in (C)$

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C)

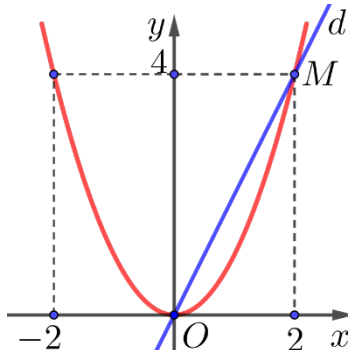
Lời giải

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.



$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C).



Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm $O(0;0)$ và $M(1;1)$.

✂ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

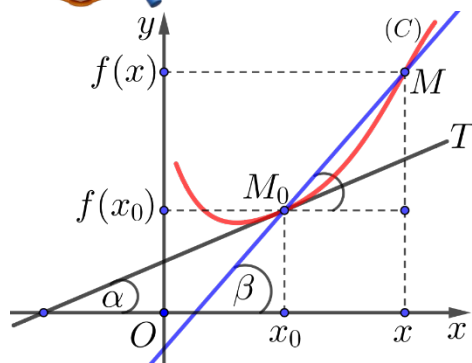
Xét $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C).

Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).

Hệ số góc của cát tuyến MM_0 được tính bởi công thức $k_{MM_0} = \tan \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0 .

Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm



Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} (\tan \beta) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$



Đạo hàm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

Tiếp tuyến M_0T có phương trình:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm



- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ thay đổi nhiệt độ* theo thời gian tại thời điểm t_0 .

4. Số e



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828...$

(Số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Phương pháp

- **Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.

• **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x \in (a;b)$ và $x \neq x_0$

• **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$\textbf{(1)} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \textbf{(2)} \quad f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \textbf{(3)} \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ tại $x_0 = 0$

(2) $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tại $x_0 = 1$

~~✎~~ **Lời giải**

[illegible]



Ví dụ 1.2.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$

(2) $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.4.

Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

(6) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of a document template designed for handwritten notes or essays. It features approximately 30 evenly spaced, thin grey horizontal lines across the entire width of the page. The margins are consistent on all sides, providing ample space for writing. There are no vertical lines, headers, footers, or other markings present.

☞ Ý nghĩa hình học: (Phương trình tiếp tuyến)

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

y_0 tung độ tiếp điểm.

$f'(x_0)$ hệ số góc tiếp tuyến.

- **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

• **Bước 2.** Từ $x_0 \longrightarrow \begin{cases} f'(x_0) \\ y_0 \end{cases}$.

• **Bước 3.** Hoàn thiện phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Viết phương trình tiếp tuyến của

- (1) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.
- (2) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.
- (3) Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$ (C) tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

 **Lời giải**

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



➤ Dạng 4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm



Phương pháp

⌘ Ý nghĩa vật lý: (quãng đường, nhiệt độ, điện lượng)

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .



Ví dụ 4.1.

Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

- (1) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .
- (2) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Hỏi:

- **Lời giải**

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0



Phương pháp

☑ Cho hàm số $y = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \neq a \\ h(x; m) & \text{khi } x = a \end{cases}$ hoặc $y = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \geq a \\ h(x; m) & \text{khi } x < a \end{cases}$. Tìm tham số m để hàm

số có đạo hàm tại $x = a$

- **Bước 1.** Xác định $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x; m); \lim_{x \rightarrow a^-} g(x; m); f(a)$.
- **Bước 2.** Hàm số liên tục tại $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x; m) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x; m) = f(a) \rightarrow a = ?$
- **Bước 3.** Tính $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- **Bước 4.** Hàm số có đạo hàm tại $x = a \Leftrightarrow f'(a^+) = f'(a^-)$.



Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x^2 - x + a & \text{khi } x \neq 0 \\ x^2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

(4) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ \sqrt{3 - 2x} - bx & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



Handwriting practice area consisting of 30 horizontal dotted lines.



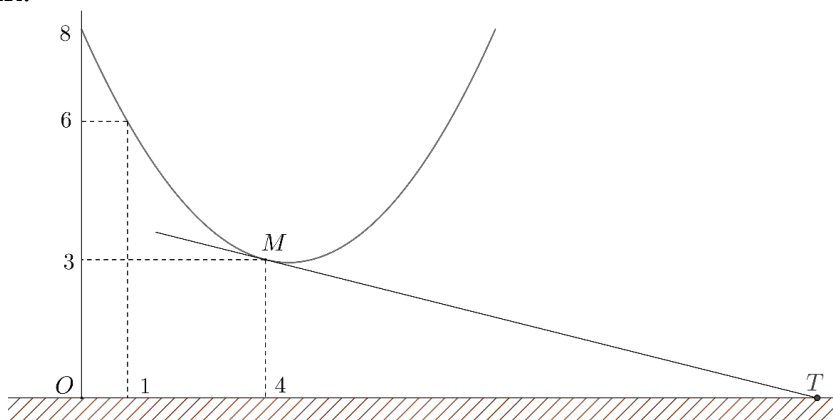
Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa $f'(8) = 5$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8}$ bằng
- A. 12. B. 5. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.
- » **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả nào sau đây đúng?
- A. $f'(2) = 3$. B. $f'(x) = 2$. C. $f'(3) = 2$. D. $f'(x) = 3$.
- » **Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng
- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.
- » **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4}$. Tính $f'(0)$.
- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{16}$. D. Không tồn tại.
- » **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $f'(3) = 2$. B. $f'(2) = 3$. C. $f'(x) = 3$. D. $f'(x) = 2$.
- » **Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng
- A. 12. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.
- » **Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$?
- A. $a = \frac{2}{3}; b = -\frac{1}{3}$. B. $a = 1; b = -\frac{1}{2}$. C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$. D. $a = 1; b = \frac{1}{2}$.
- » **Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng
- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{3}$. D. $f'(0) = 3$.



- » **Câu 9.** Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là:
A. $k = 3$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 12$.
- » **Câu 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình
A. $y = 2x + 7$. **B.** $y = -2x + 7$. **C.** $y = 2x + 1$. **D.** $y = -2x - 1$.
- » **Câu 11.** Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là
A. $y = 2x + 1$. **B.** $y = x - 2$. **C.** $y = -2x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$.
- » **Câu 12.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Đồ thị (C) có bao nhiêu tiếp tuyến mà tiếp điểm thỏa mãn hoành độ dương và tung độ bằng 1?
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- » **Câu 13.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ qua điểm $A(1; -4)$.
A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.
- » **Câu 14.** Một máy bay tại độ cao 8 km bắt đầu hạ độ cao theo quỹ đạo là một phần của parabol. Sau khi di chuyển theo phương ngang 1 km thì độ cao chỉ còn 6 km. Máy bay tiếp tục hạ độ cao còn 3 km sau khi đi được 4 km theo phương ngang và phóng 1 tên lửa theo phương tiếp tuyến tại điểm phóng để hướng đến và trúng mục tiêu. Giả sử rằng quỹ đạo chuyển động của tên lửa là đường thẳng thì mục tiêu cách vị trí phóng tên lửa theo phương ngang là bao nhiêu km.



- A.** 12 km. **B.** 16 km. **C.** 14 km. **D.** 10 km.
- » **Câu 15.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$
A. 14 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 17 m/s. **D.** 12 m/s.
- » **Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là
A. $f'(1) = 2$. **B.** f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
C. $f'(0) = 2$. **D.** $f'(2) = 4$.
- » **Câu 17.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính
 $T = a + 2b$.



A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = -6$.

D. $T = 4$.

» **Câu 18.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

» **Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = -2$.

D. Không tồn tại.

» **Câu 20.** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 20.

B. 17.

C. 18.

D. 25.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 21.** Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$ khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
(b)	$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$		
(c)	$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 0$		
(d)	$f'(x_0) > 0$		

» **Câu 22.** Dùng định nghĩa tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + 1$ trên tập xác định. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
(b)	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$		
(c)	$f'(2) = 4$		
(d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

» **Câu 23.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 0$ ta được $f'(0) = a$. Khi đó:

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----



(a)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$		
(b)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x + 1}$		
(c)	Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$		
(d)	$\log_a 9 = 3$		

» **Câu 24.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$		
(b)	$f'(2) = 2$		
(c)	$f'(3) = \frac{1}{3}$		
(d)	$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$		

» **Câu 25.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.		
(b)	Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2 .		
(c)	Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$.		
(d)	Tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$.		

» **Câu 26.** Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ có đồ thị (C) . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là -4 .		
(b)	Có hai phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc (C) .		
(c)	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng -4 là $y = -4x - 12$.		
(d)	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ là $y = -3x - \frac{41}{4}$.		

» **Câu 27.** Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là $36m/s$.		
(b)	Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $6m/s^2$.		



(c)	Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12m/s^2 .		
(d)	Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12m/s .		

» Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$		
(b)	Với $a = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$		
(c)	Với $a = 2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$		
(d)	Với $a = m_0$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, khi đó : $\lim_{x \rightarrow m_0} (x^2 + 2x - 3) = 5$		

» Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$		
(b)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b$		
(c)	Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 > m_0$		
(d)	Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 + m_0 = 2$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 30. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Điền đáp số:

» Câu 31. Hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x$ trên tập số thực là $y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $a^2 + b - c$

Điền đáp số:

» Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3x}$. Tính hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -3 . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Điền đáp số:

» Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(1;1) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M có dạng $y = ax + b$. Tính $T = 2a + b$.

Điền đáp số:



» **Câu 34.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{2}x + 3$ có dạng $y = ax + b$. Tính $T = a^2 \cdot b$. Biết tọa độ tiếp điểm có hoành độ âm.

» **Điền đáp số:**

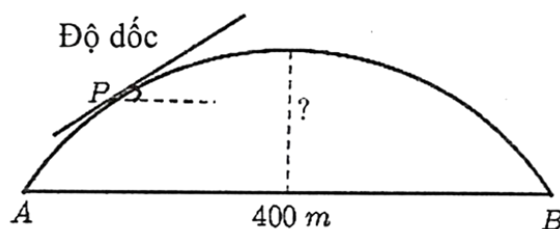
» **Câu 35.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 36.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ đạt bao nhiêu m/s ?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 37.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



» **Điền đáp số:**

----- Hết -----



Chương 07

Bài 1.

ĐẠO HÀM

A

Lý thuyết

1. Đạo hàm



Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

⌘ Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$
- Bước 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Chú ý

Trong định nghĩa & quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.



2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



Xét ví dụ

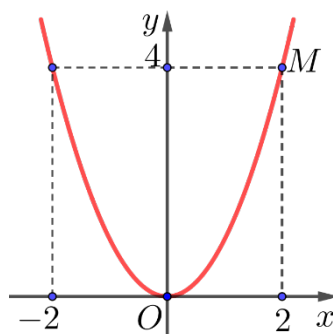
Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ (C) và điểm $M(1;1) \in (C)$

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C)

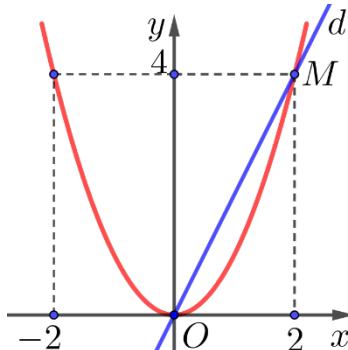
Lời giải

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.



$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C).



Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm $O(0;0)$ và $M(1;1)$.

✂ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

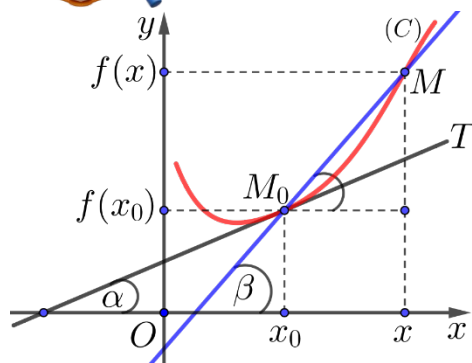
Xét $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C).

Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).

Hệ số góc của cát tuyến MM_0 được tính bởi công thức $k_{MM_0} = \tan \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0 .

Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm



Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} (\tan \beta) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$



Đạo hàm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

Tiếp tuyến M_0T có phương trình:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm



- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ thay đổi nhiệt độ* theo thời gian tại thời điểm t_0 .

4. Số e



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828...$

(Số thập phân vô hạn không tuần hoàn).



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa



Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

• **Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.

• **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b)$ và $x \neq x_0$

• **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$(1) f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2) f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3) f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.



Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ tại $x_0 = 0$

(2) $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tại $x_0 = 1$

Lời giải

(1) $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ tại $x_0 = 0$

Tại $x_0 = 0$ ta có $f(x) - f(x_0) = f(x) - f(0) = 2x^3 + x - 1 - (-1) = 2x^3 + x = x(2x^2 + 1)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(2x^2 + 1)}{x} = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 1) = 1$$

(2) $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tại $x_0 = 1$

Tại $x_0 = 0$ ta có $f(x) - f(x_0) = f(x) - f(0) = x^2 + 2x - 1 - (-2) = x^2 + 2x - 3$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x+3$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$



Ví dụ 1.2.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$

(2) $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

(1) $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$

Tại $x_0 = -2$ ta có $f(x) - f(x_0) = f(x) - f(-2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1} \\ &\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1} \\ &\Rightarrow f'(-2) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1} \right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-2-1)}{(-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$

Tại $x_0 = 3$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f(3) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1} - \frac{9}{5} = \frac{5x^2 - 13x - 6}{5(2x - 1)} = \frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)} \\ &\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{(5x+2)}{5(2x-1)} \\ &\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x+2)}{5(2x-1)} = \frac{17}{25} \end{aligned}$$



Ví dụ 1.3

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Lời giải

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

Ta có: $f(1) = -3$



$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 4)(x - 1)}{x - 1} = 5$$

Vậy $f'(0) = 5$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0$$

Ta có $f(0) = 0$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Vậy $f'(0) = \frac{1}{2}$.



Ví dụ 1.4.

Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x = 1$

$$\text{Hay } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = f(1) = a$$

$$\text{Khi đó, ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2}{x - 1} = 1.$$

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.



Dạng 2. Tính đạo hàm tại 1 điểm bất kỳ trên (a;b) bằng định nghĩa



Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a;b)$ và $x \neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.



Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa của các hàm số sau:

(1) $y = f(x) = 4x + 3$

(2) $y = f(x) = 2024x + 2025$

(3) $y = f(x) = 2x^2 + 2024$

(4) $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$

(5) $y = f(x) = x^3 - 2x$

(6) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

✎ Lời giải

(1) $y = f(x) = 4x + 3$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = 4x + 3 - 4x_0 + 3 = 4(x - x_0)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4(x - x_0)}{x - x_0} = 4$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 4 = 4 \Rightarrow y' = 4$$

(2) $y = f(x) = 2024x + 2025$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = 2024x + 2025 - 2024x_0 - 2025 = 2024(x - x_0)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2024(x - x_0)}{x - x_0} = 2024$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2024 = 2024 \Rightarrow y' = 2024$$

(3) $y = f(x) = 2x^2 + 2024$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = 2x^2 + 2024 - 2x_0^2 - 2024 = 2x^2 - 2x_0^2 = 2(x - x_0)(x + x_0)$$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2(x + x_0)$$



$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2(x + x_0) = 4x_0 \Rightarrow y' = 4x$$

(4) $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = x^2 - 3x + 1 - x_0^2 + 3x_0 - 1 = (x - x_0)(x + x_0 - 3)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 - 3)}{x - x_0} = x + x_0 - 3$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 - 3) = 2x_0 - 3 \Rightarrow y' = 2x - 3$$

(5) $y = f(x) = x^3 - 2x$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0 = (x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)}{x - x_0} = (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2) = 3x_0^2 - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2$$

(6) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = x^4 - 2x^2 + 2 - x_0^4 + 2x_0^2 - 2 = (x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + x(x_0^2 - 2) + x_0^3 - 2x_0)$$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + x(x_0^2 - 2) + x_0^3 - 2x_0)}{x - x_0} = x^3 + x^2x_0 + x(x_0^2 - 2) + x_0^3 - 2x_0$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 + x^2x_0 + x(x_0^2 - 2) + x_0^3 - 2x_0) = x_0^3 + x_0^3 + x_0^3 - 2x_0 + x_0^3 - 2x_0 = 4x_0^3 - 4x_0$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$$



➤ Dạng 3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



Phương pháp

✂ Ý nghĩa hình học: (Phương trình tiếp tuyến)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Trong đó: x_0 hoành độ tiếp điểm.

y_0 tung độ tiếp điểm.

$f'(x_0)$ hệ số góc tiếp tuyến.

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) tại $x_0 = a$.

• **Bước 1.** Tính $f'(x)$.

• **Bước 2.** Từ $x_0 \longrightarrow \begin{cases} f'(x_0) \\ y_0 \end{cases}$.

• **Bước 3.** Hoàn thiện phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Ví dụ 3.1.

Viết phương trình tiếp tuyến của

(1) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

(2) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

(3) Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$ (C) tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

✂ Lời giải

(1) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Gọi $Z(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = x^2 + 2x - 4 - x_0^2 - 2x_0 + 4 = (x - x_0)(x + x_0 + 2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 2)}{x - x_0} = x + x_0 + 2$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 2) = 2x_0 + 2 \Rightarrow y' = 2x + 2$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $k = y'(0) = 2$

Tung độ tiếp điểm tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y(x_0) = -4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(0)(x - 0) + y(0) \Leftrightarrow y = 2x - 4$

(2) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Gọi $C(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.



Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = x^3 + 1 - x_0^3 - 1 = (x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = x^2 + x.x_0 + x_0^2$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x.x_0 + x_0^2) = 3x_0^2 \Rightarrow y' = 3x^2$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $k = y'(1) = 3$

Tung độ tiếp điểm tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y(x_0) = 2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = 3x - 1$

(3) Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$ (C) tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

Gọi $T(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = 2x^2 - 1 - 2x_0^2 + 1 = 2(x - x_0)(x + x_0)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2(x + x_0)$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (2(x + x_0)) = 4x_0 \Rightarrow y' = 4x$$

Ta có $y_0 = -2 \Rightarrow 2x_0^2 - 3 = -1 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$.

• Với $x_0 = 1$:

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $k = y'(1) = 4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = 4x - 5$.

• Với $x_0 = -1$:

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = y'(-1) = -4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) \Leftrightarrow y = -4x - 5$.



Dạng 4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm



Phương pháp

Ý nghĩa vật lý: (quãng đường, nhiệt độ, điện lượng)

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .



Ví dụ 4.1.

Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

- Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .
- Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

- Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0} \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{(t - t_0)(t + t_0 + 4)}{t - t_0} \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4. \end{aligned}$$

- Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

$$\text{Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm } t = 5: f'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14 \left(\frac{m}{s} \right).$$



Ví dụ 4.2.

Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$

Lời giải

$$\text{Ta có } Q = 6t + 5 \rightarrow Q'(t) = 6.$$

$$\text{Cường độ dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm } t = 10 \text{ là } I = Q'(10) = 6.$$



Ví dụ 4.3.

Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Hỏi:

- (1) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ là bao nhiêu?
- (2) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$ là bao nhiêu?
- (3) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ là bao nhiêu?
- (4) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2$ là bao nhiêu?
- (5) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, là bao nhiêu?

✎ Lời giải

- (1) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (vì $t > 0$)

Khi đó gia tốc là $a(3) = 6.3 - 6 = 12\text{m/s}^2$.

- (2) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 6t + 6$.

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$ (vì $t > 0$)

Khi đó gia tốc là $a(1) = 6.1 + 6 = 12\text{m/s}^2$.

- (3) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 6t + 9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = -6t + 6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Khi đó vận tốc là $v(1) = -3.1^2 + 6.1 + 9 = 12\text{m/s}$.

- (4) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Khi đó vận tốc là $v(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3\text{m/s}$.

- (5) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 4$.



Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 12t - 6$.

Khi gia tốc triệt bằng 0 có $a(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Khi đó vận tốc là $v\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{5}{2} \text{ m/s}$.



Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0



Phương pháp

☑ Cho hàm số $y = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \neq a \\ h(x; m) & \text{khi } x = a \end{cases}$ hoặc $y = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \geq a \\ h(x; m) & \text{khi } x < a \end{cases}$. Tìm tham số m để hàm

số có đạo hàm tại $x = a$

- **Bước 1.** Xác định $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x; m); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x; m); f(a)$.
- **Bước 2.** Hàm số liên tục tại $x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x; m) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x; m) = f(a) \rightarrow a = ?$
- **Bước 3.** Tính $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- **Bước 4.** Hàm số có đạo hàm tại $x = a \Leftrightarrow f'(a^+) = f'(a^-)$.



Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x^2 - x + a & \text{khi } x \neq 0 \\ x^2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + a) = a, f(0) = 0$.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1.$$



Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$?

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b; \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}; f(1) = \frac{1}{2}$. Hàm số liên tục tại $x = 1$ nên $a + b = \frac{1}{2}$.

$$\text{Đạo hàm phải } f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a.$$

$$\text{Đạo hàm trái } f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{2} = 1.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1 \Rightarrow f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 1$

Vậy $a = 1; b = -0,5$.



Ví dụ 5.3.

Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

- (1) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.
- (2) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
- (3) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \geq 0 \\ ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
- (4) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ \sqrt{3-2x} - bx & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Lời giải

- (1) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2, \quad f(1) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2-1}{x-1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = 1.$$

- (2) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1 \end{cases}$$

Hàm số liên tục tại $x = 0$ nên $-b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2$.

$$\text{Đạo hàm phải } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$\text{Đạo hàm trái } f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0 \Leftrightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = -2$

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.



(3) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \geq 0 \\ ax+b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax+b) = b \end{cases}$$

Hàm số liên tục tại $x = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow b = 1$.

$$\text{Đạo hàm phải } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2-1}{x-1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

$$\text{Đạo hàm trái } f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy với $a = 1; b = 1$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

(4) Tìm $a; b$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ \sqrt{3-2x} - bx & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 - 2x + 1) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{3-2x} - bx) = 1 - b \end{cases}$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a - 1 = 1 - b \Leftrightarrow b = 2 - a$.

$$\text{Đạo hàm phải } f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 - 2x - a + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + a - 2) = 2a - 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Đạo hàm trái } f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3-2x} - bx - a + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3-2x} - (2-a)x - a + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(a - 2 - \frac{2}{\sqrt{3-2x} + 1} \right) = a - 3 \end{aligned}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow 2a - 2 = a - 3 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy với $a = -1; b = 3$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$.



Chương 07

Bài 1.

ĐẠO HÀM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa $f'(8) = 5$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8}$ bằng

- A. 12. B. 5. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

» **Lời giải**

Chọn B

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm thì

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = f'(8)$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = f'(8) = 5$$

» **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $f'(2) = 3$. B. $f'(x) = 2$. C. $f'(3) = 2$. D. $f'(x) = 3$.

» **Lời giải**

Chọn C

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3)$.

» **Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- A. 0. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

» **Lời giải**

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$



» **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4}$. Tính $f'(0)$.

A. $\frac{1}{32}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{16}$.

D. Không tồn tại.

» **Lời giải**

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

» **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f'(3) = 2$.

B. $f'(2) = 3$.

C. $f'(x) = 3$.

D. $f'(x) = 2$.

» **Lời giải**

Chọn A

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3)$.

» **Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

» **Lời giải**

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0 .

Vậy kết quả của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

» **Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$?

A. $a = \frac{2}{3}; b = -\frac{1}{3}$.

B. $a = 1; b = -\frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

» **Lời giải**

Chọn A

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ suy ra hàm số liên tục tại $x = 1$. Tức là $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{3} (1)$.



Mà hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\text{Với } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{3(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $a = \frac{2}{3}$. Thay vào (1) được $b = -\frac{1}{3}$.

» **Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng

- A.** $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = \frac{1}{3}$. **D.** $f'(0) = 3$.

🔗 *Lời giải*

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + |x|}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + x} = 3; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 - x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = 3$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + |x|} = 3.$$

Kết luận: $f'(0) = 3$.

» **Câu 9.** Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là:

- A.** $k = 3$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 12$.

🔗 *Lời giải*

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là $k = y'(1) = 3$.

Vậy $k = 3$.

» **Câu 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình

- A.** $y = 2x + 7$. **B.** $y = -2x + 7$. **C.** $y = 2x + 1$. **D.** $y = -2x - 1$.

🔗 *Lời giải*

Chọn B

$$x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$y'(2) = -2$$

Vậy phương tiếp tuyến $y = -2(x - 2) + 3 \Leftrightarrow y = -2x + 7$.



» **Câu 11.** Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

- A.** $y = 2x + 1$. **B.** $y = x - 2$. **C.** $y = -2x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$.

» *Lời giải*

Chọn D

M là giao điểm của (C) với trục tung nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \frac{x-1}{x+1} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Suy ra $M(0; -1)$.

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $y = 2x - 1$

» **Câu 12.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Đồ thị (C) có bao nhiêu tiếp tuyến mà tiếp điểm thỏa mãn hoành độ dương và tung độ bằng 1?

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

» *Lời giải*

Chọn D

Gọi tiếp điểm là điểm $M(x_0; y_0)$.

Vì tiếp điểm có tung độ bằng 1 nên ta có:

$$x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x_0 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}.$$

Vì tiếp điểm có hoành độ dương nên $x_0 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$.

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu.

» **Câu 13.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ qua điểm $A(1; -4)$.

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

» *Lời giải*

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$y' = 2x - 4.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3$.

Vì tiếp tuyến này qua $A(1; -4)$ nên $(2x_0 - 4)(1 - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3 = -4$

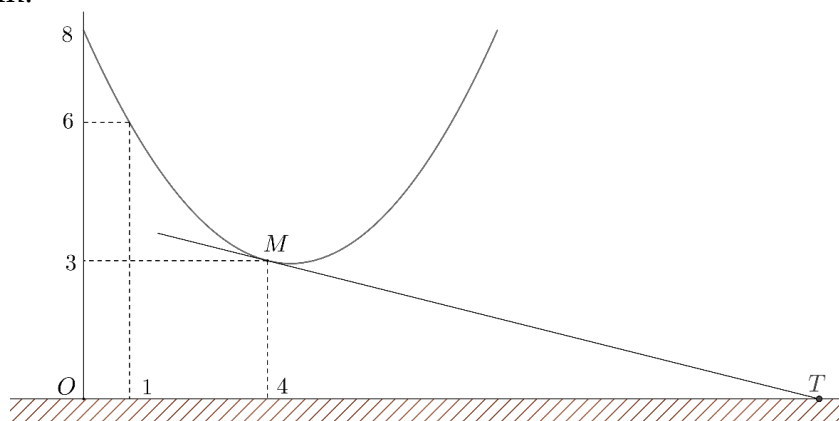
$$\Leftrightarrow 2x_0 - 2x_0^2 - 4 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 3 = -4 \Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$



Với $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 8 \\ y'(x_0) = -6 \end{cases}$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = -6x + 2$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \\ y'(x_0) = 2 \end{cases}$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = 2x - 2$.

» **Câu 14.** Một máy bay tại độ cao 8 km bắt đầu hạ độ cao theo quỹ đạo là một phần của parabol. Sau khi di chuyển theo phương ngang 1 km thì độ cao chỉ còn 6 km. Máy bay tiếp tục hạ độ cao còn 3 km sau khi đi được 4 km theo phương ngang và phóng 1 tên lửa theo phương tiếp tuyến tại điểm phóng để hướng đến và trúng mục tiêu. Giả sử rằng quỹ đạo chuyển động của tên lửa là đường thẳng thì mục tiêu cách vị trí phóng tên lửa theo phương ngang là bao nhiêu km.



A. 12 km.

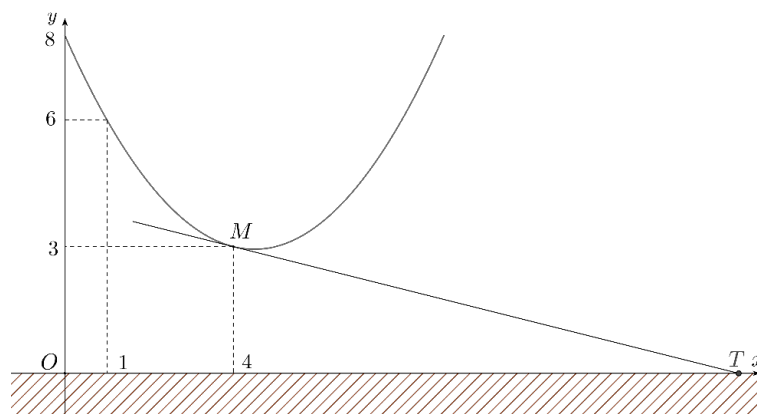
B. 16 km.

C. 14 km.

D. 10 km.

Lời giải

Chọn A



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi quỹ đạo của máy bay là $y = ax^2 + bx + 8$.

Vì parabol qua $(1; 6), (4; 3)$ nên ta có hệ $\begin{cases} a + b + 8 = 6 \\ 16a + 4b + 8 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{9}{4} \end{cases}$.

Suy ra quỹ đạo chuyển độ hạ cánh của máy bay là $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 8$.

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}.$$

Quỹ đạo của tên lửa là tiếp tuyến tại M , suy ra phương trình thể hiện cho tên lửa là



$$y = -\frac{1}{4}x + 4.$$

Vị trí mục tiêu cách lúc bắt đầu hạ cánh là nghiệm của phương trình $-\frac{1}{4}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 16$

Vậy mục tiêu cách vị trí phóng tên lửa theo phương ngang là $16 - 4 = 12$ (km)

» **Câu 15.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$

- A.** 14 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 17 m/s. **D.** 12 m/s.

» **Lời giải**

Chọn A

Ta có vận tốc tức thời có phương trình là $v = s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Do đó vận tốc của chuyển động ứng với $t = 3$ là $v(3) = 14$ m/s.

» **Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

- A.** $f'(1) = 2$. **B.** f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
C. $f'(0) = 2$. **D.** $f'(2) = 4$.

» **Lời giải**

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2; \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

Vậy $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2$. Suy ra hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Vậy B sai.

» **Câu 17.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$$T = a + 2b.$$

- A.** $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

» **Lời giải**

Chọn C

Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Xét:



$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

» Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

» Lời giải

Chọn B

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

» Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = -2$.

D. Không tồn tại.

» Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(0) = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0.$$

Ta thấy $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

» Câu 20. Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá

trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 20.

B. 17.

C. 18.

D. 25.

» Lời giải

Chọn A



Ta có $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = 2$.

Vậy $a^2 + b^2 = 20$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 21.** Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$ khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
(b)	$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$		
(c)	$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 0$		
(d)	$f'(x_0) > 0$		

» **Lời giải**

(a) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

» **Chọn Đúng.**

(c) $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 0$.

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 .

» **Chọn Sai.**

(d) $f'(x_0) > 0$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 22.** Dùng định nghĩa tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + 1$ trên tập xác định. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----



(a)	$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
(b)	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$		
(c)	$f'(2) = 4$		
(d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

✎ **Lời giải**

(a) $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

» **Chọn SAI.**

(b) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

» **Chọn Đúng.**

(c) $f'(2) = 4$.

$f'(x_0) = 2x_0$ nên $f'(2) = 4$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $f'(2) + f'(-2) = 0$.

$f'(x_0) = 2x_0$ nên $f'(2) + f'(-2) = 4 - 4 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 23.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 0$ ta được $f'(0) = a$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$		
(b)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$		
(c)	Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$		
(d)	$\log_a 9 = 3$		

✎ **Lời giải**

(a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Ta có: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} (*)$



» Chọn ĐÚNG.

(b) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$

(*) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-2}{x+1} - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+1} = 3.$

Suy ra $f'(0) = 3 \Rightarrow a = 3$

» Chọn SAI.

(c) Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$

Xét $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 = 3 - 2$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\log_a 9 = 3$

$\log_a 9 = \log_3 9 = 2.$

» Chọn SAI.

» Câu 24. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$		
(b)	$f'(2) = 2$		
(c)	$f'(3) = \frac{1}{3}$		
(d)	$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$		

» Lời giải

(a) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{2}{(1-x_0)^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $f'(x_0) = \frac{2}{(1-x_0)^2}$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $f'(2) = 2$



Với $x = 2 \rightarrow f'(2) = \frac{2}{(1-2)^2} = 2$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $f'(3) = \frac{1}{3}$

Với $x = 3 \rightarrow f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}$

» **Chọn SAI.**

(d) $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

$f'(2) + f'(3) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 25.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc

với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.		
(b)	Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2 .		
(c)	Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$.		
(d)	Tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$.		

» **Lời giải**

(a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.

Đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d = \frac{1}{2}$

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng d

$\Rightarrow k \cdot k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = -2.$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$

Với $x = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 7$.

Với $x = -3$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1: y = -2x + 7$; $d_2: y = -2x - 9$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2 .

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2 .

» **Chọn Đúng.**

(c) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$.

Tiếp tuyến $d_1: y = -2x + 7$ đi qua điểm $A(1; 5)$.

» **Chọn ĐÚNG.**



(d) Tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$.

Tiếp tuyến $d_1: y = -2x + 7$; $d_2: y = -2x - 9$ không đi qua điểm $B(1; -7)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 26.** Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ có đồ thị (C) . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là -4 .		
(b)	Có hai phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc (C) .		
(c)	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng -4 là $y = -4x - 12$.		
(d)	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ là $y = -3x - \frac{41}{4}$.		

» **Lời giải**

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = x^2 + 2x - 4 - (x_0^2 + 2x_0 - 4) = x^2 - x_0^2 + 2x - 2x_0 = (x - x_0)(x + x_0 + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 2) = 2x_0 + 2$$

Ta có: $y' = 2x + 2$

(a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là -4 .

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là $k = y'(1) = 4$

» **Chọn SAI.**

(b) Có hai phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc (C) .

$$\text{Ta có } y_0 = -1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 - 4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến là } y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = 4x - 5.$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến là } y = y'(-3)(x + 3) + y(-3) \Leftrightarrow y = -4x - 13.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng -4 là $y = -4x - 12$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -4$

$$\Rightarrow y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = -4 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến với hệ số góc } k = -4 \text{ là } y = -4(x + 3) - 1 \Leftrightarrow y = -4x - 13.$$

» **Chọn SAI.**



(d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ là $y = -3x - \frac{41}{4}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -3$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -3$

$$\Rightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến với hệ số góc } k = -3 \text{ là } y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{11}{4} \Leftrightarrow y = -3x - \frac{41}{4}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 27.** Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là 36m/s .		
(b)	Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là 6m/s^2 .		
(c)	Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12m/s^2 .		
(d)	Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12m/s .		

» **Lời giải**

Tại $t_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} s(t) - s(t_0) &= t^3 - 3t^2 - 9t - (t_0^3 - 3t_0^2 - 9t_0) = (t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2) - 3(t - t_0)(t + t_0) - 9(t - t_0) \\ &= (t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} (t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9) = 3t_0^2 - 6t_0 - 9$$

$$\text{Ta có: } v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

Tại $t_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$v(t) - v(t_0) = 3t^2 - 6t - 9 - (3t_0^2 - 6t_0 - 9) = (t - t_0)(3t + 3t_0 - 6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(3t + 3t_0 - 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (3t + 3t_0 - 6) = 6t_0 - 6$$

$$\text{Ta có: } a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

(a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là 36m/s .

$$\text{Vận tốc của vật tại thời điểm } t = 5s \text{ là: } v(5) = 3.5^2 - 6.5 - 9 = 36(\text{m/s}).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là 6m/s^2 .

$$\text{Gia tốc của vật tại thời điểm } t = 2s \text{ là: } a(2) = 6.2 - 6 = 6(\text{m/s}^2).$$

» **Chọn Đúng.**

(c) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12m/s^2 .



Khi vận tốc triệt tiêu, ta có: $3t^2 - 6t - 9 = 0 \Rightarrow t = 3 (t > 0)$

Khi đó gia tốc là: $a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{m/s}^2$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là 12m/s .

Khi gia tốc triệt tiêu, ta có: $6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

khi đó vận tốc là: $v(1) = 3.1^2 - 6.1 - 9 = -12 (\text{m/s})$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$		
(b)	Với $a = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$		
(c)	Với $a = 2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$		
(d)	Với $a = m_0$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, khi đó: $\lim_{x \rightarrow m_0} (x^2 + 2x - 3) = 5$		

» **Lời giải**

(a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Với $a = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ phải liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Ta có $f(1) = a$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2$

Vậy với $a = 2$ thì hàm số liên tục tại $x = 1$

» **Chọn SAI.**

(c) Với $a = 2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Với $a = m_0$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, khi đó: $\lim_{x \rightarrow m_0} (x^2 + 2x - 3) = 5$

Khi đó, ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = 5$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 29.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$		
(b)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b$		



(c)	Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 > m_0$		
(d)	Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 + m_0 = 2$		

🔗 **Lời giải**

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2$;

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 > m_0$

Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ thì hàm liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow a + b = 2$ (1)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax - a}{x - 1} = a$ (Do $b = 2 - a$)

Hàm có đạo hàm tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$.

» **Chọn SAI.**

(d) Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 + m_0 = 2$

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 30.** Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,33**

Tại $x_0 = -2$ ta có

$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(-2) = \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1}$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1}$

$\Rightarrow f'(-2) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1} \right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-2-1)}{(-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

» **Câu 31.** Hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x$ trên tập số thực là $y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $a^2 + b - c$

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 11**

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:



$$f(x) - f(x_0) = x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0 = (x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)}{x - x_0} = (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2) = 3x_0^2 - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2$$

Do đó $a = 3, b = 0, c = -2$.

Vậy $a^2 + b - c = 11$

» **Câu 32.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3x}$. Tính hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -3 . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,44**

Tại $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{x+1}{3x} - \frac{x_0+1}{3x_0} = \frac{-(x-x_0)}{3x.x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-(x-x_0)}{3x.x_0} \cdot \frac{1}{x-x_0} = \frac{-1}{3x.x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{3x.x_0} = \frac{-1}{3x_0^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{3x^2}$$

Tính hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -3 là

$$y'(-3) = -\frac{1}{27} \approx -0,04$$

» **Câu 33.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(1;1) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M có dạng $y = ax + b$. Tính $T = 2a + b$.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(1;1) \in (C)$ là:

$$k = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến $M(1;1) \in (C)$ có dạng: $y = f'(1)(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = x \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

$$T = 2a + b = 2.1 + 0 = 2$$

» **Câu 34.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{2}x + 3$ có dạng $y = ax + b$. Tính $T = a^2.b$. Biết tọa độ tiếp điểm có hoành độ âm.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 28**



$$\text{Ta có: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)-1}{(x+h)+1} - \frac{x-1}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(x+h+1)} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ là: $k = f'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}.$

Tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{2}x + 3$ nên $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow M(-2; 3)$$

Phương trình tiếp tuyến $M(-2; 3) \in (C)$ có dạng: $y = 2(x+2) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 7 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}.$

$$T = a^2 \cdot b = 28$$

» **Câu 35.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 14**

$$\begin{aligned} \text{Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm } t = 5 \text{ là: } v(5) &= s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{t^2 + 4t + 6 - 51}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{t^2 + 4t - 45}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} (t + 9) = 14 \text{ (m/s)}. \end{aligned}$$

» **Câu 36.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ đạt bao nhiêu m/s?

» **Lời giải**

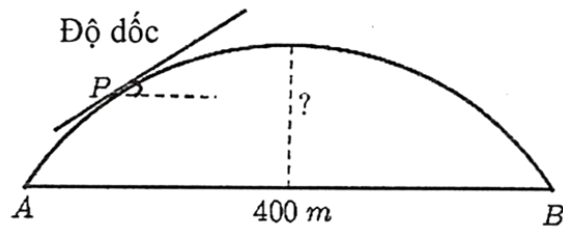
✓ **Trả lời: 5**

Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ là:

$$s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}(t-5)(t+5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{1}{2}(t+5) = 5.$$

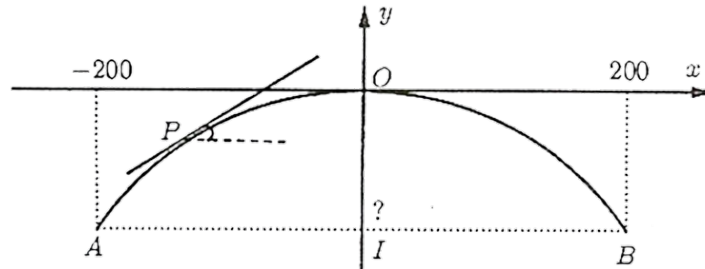
$$\text{Vậy } v(5) = s'(5) = 5 \text{ (m/s)}.$$

» **Câu 37.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400m. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

✓ **Trả lời: 17,6**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là $|k| = 2a|x| \leq 400a$.

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn OI , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm B khi a đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Do đó, } OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m).$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $17,6m$.

----- Hết -----



Chương 07

Bài 2.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A

Lý thuyết

1. Đạo hàm hàm số $y = x^n$



Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm hàm số $y = \sqrt{x}$



Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm hàm số lượng giác

(1) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$(\sin x)' = \cos x.$$

(2) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

(3) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(4) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

(1) Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$(e^x)' = e^x.$$

(2) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

(3) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

(4) Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



5. Các quy tắc tính đạo hàm



Giả sử các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

6. Đạo hàm của hàm hợp

6.1 Khái niệm hàm số hợp



Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

6.2 Đạo hàm của hàm số hợp



Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

(1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	(8) $(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
(2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	(9) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
(3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$		
(4) $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	(10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
(5) $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
(6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$		
(7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$		



7. Đạo hàm cấp hai



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Khi đó: $(f'(x))' = f''(x)$.

⌘ Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t . Ta có $a(t) = f''(t)$



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức



Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

☑ Áp dụng công thức đạo hàm:

(1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

(2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

(3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$



Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $f(x) = (1-x^3)^5$

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

(3) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$

(5) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

(6) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

(7) $f(x) = (x+1)(x-2)$

(8) $f(x) = \frac{3x+5}{-1+2x}$

(9) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

(10) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

✍ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Handwriting practice area consisting of 25 horizontal dotted lines.

$$(4) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(10) \quad y = \sin(x^2 - 3x + 2)$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



Handwriting practice area consisting of 30 horizontal dotted lines.

$$(4) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$


(10) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Handwriting practice area consisting of 30 horizontal dotted lines.

$$(4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

$$(10) \quad y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$$
[illegible]



Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$(2) \quad y = \sqrt{x^2 + x + 3}$$

$$(4) \quad y = (x^2 + 2x + 3)^5$$

(6) $y = (2x^5 - 3x - 7)^3$

(8) $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}$

$$(10) \quad y = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 7}$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of a document template designed for writing. It features approximately 28 evenly spaced, thin grey horizontal lines across the entire width of the page. The background is white, and there are no margins, headers, or footers visible. This type of template is commonly used for students to practice handwriting or for anyone needing a simple space to write notes.



➤ Dạng 5. Đạo hàm cấp 2



Phương pháp

Cho hàm số $y = f(x)$, tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp một : $y' = f'(x)$

Bước 2: Lấy kết quả của đạo hàm cấp một đem đi đạo hàm : $(y')' = (f'(x))'$

Bước 3: Kết luận: $y'' = f''(x)$



Ví dụ 5.1.

Tính đạo hàm cấp hai các hàm số sau:

(1) $y = 2x$

(2) $y = (2x - 1)^2$

✎ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Tính $f''(1)$.

✎ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.3.

Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là?

✎ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.4.

Xác định hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 - 2cx^2 + 3x - 2$ ($a \neq 0$).

Biết $f(1) = 5$; $f'(-1) = 0$; $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ là:

- A. 80. B. 16. C. 5. D. $5x^4$.

» **Câu 2.** Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{9}$. C. 9. D. 3.

» **Câu 3.** Với $x > 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^x + \log_5 x$ là:

- A. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 2}$. B. $y' = 2^x + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.
C. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{\ln 5}$. D. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

» **Câu 4.** Cho $a, x > 0, a \neq 1$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $(e^{3x} - a^x + \pi)' = 3e^x - a^x \cdot \ln a$. B. $(e^{3x} - a^x + \pi)' = 3e^{3x} - a^x \ln a$.
C. $(e^x - \ln(x+1) + \pi)' = e^x - \frac{1}{x}$. D. $(e^x - \ln(x+1) + \pi)' = e^x - \frac{1}{x+1} + \pi$.

» **Câu 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$.

- A. $y' = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x$. B. $y' = 2 \cos 3x + \sin 2x$.
C. $y' = -6 \cos 3x + 2 \sin 2x$. D. $y' = 2 \cos 3x - \sin 2x$.

» **Câu 6.** Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot e^x$ bằng:

- A. $y' = (1+x)e^x$. B. $y' = e^x$. C. $y' = x \cdot e^x$. D. $y' = (1-x)e^x$.

» **Câu 7.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ bằng:

- A. $y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$ B. $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$ C. $y' = -2$ D. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$

» **Câu 8.** Hàm số $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ có đạo hàm là:

- A. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1)$. B. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x + 1)$.
C. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x + 1)$. D. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x - 1)$.

» **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

- A. $f'(1) = 1$. B. $f'(1) = \frac{1}{2 \ln 2}$. C. $f'(1) = \frac{1}{2}$. D. $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

» **Câu 10.** Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$ là

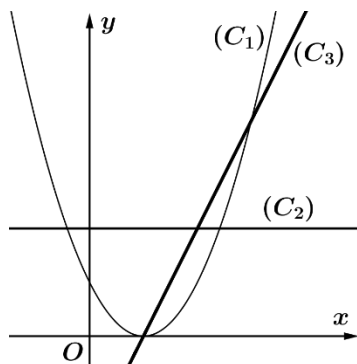
- A. $\frac{1}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. B. $\frac{-5x+7}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$.
C. $\frac{-5x+7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$.



- » **Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = e^{-x^3+x^2+x}$. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $3x_1 \cdot x_2$.
- A. $3x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$. B. $3x_1 \cdot x_2 = -1$. C. $3x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$. D. $3x_1 \cdot x_2 = 1$.
- » **Câu 12.** Cho hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$. Biết $g'(1) = 10$ và $g'(2) = 24$. Tính đạo hàm của hàm số $h(x) = f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.
- A. 56. B. 60. C. 58. D. 72.
- » **Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x + 2024$. Bất phương trình $f'(x) < 0$ có tập nghiệm là
- A. $S = (-2; 2)$. B. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.
- » **Câu 14.** Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:
- A. $y'' = 0$. B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.
- » **Câu 15.** Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp hai bằng:
- A. $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. B. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.
- » **Câu 16.** Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp hai bằng:
- A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.
- » **Câu 17.** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định **đúng**?
- A. $4y - y' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 = (y')^2 = 4$.
- » **Câu 18.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Khi đó $y''\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng
- A. -16. B. -8. C. 8. D. 16.
- » **Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là các hằng số). Biết $f'(1) = 0$ và $f''(1) = -2$. Tính $a + b$ bằng
- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.
- » **Câu 20.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là
- A. 42 (m/s). B. 43 (m/s). C. 41 (m/s). D. 40 (m/s).
- » **Câu 21.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.
- A. 20000. B. 22500. C. 21000. D. 24000.



» **Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ trong cùng một hệ trục tọa độ Oxy như hình dưới. Trong hình vẽ, đồ thị (C_1) là đường cong được vẽ bằng nét mảnh nhất, đồ thị (C_3) được vẽ bằng nét đậm nhất và đường còn lại là (C_2) . Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f''(x)$.
 B. $(C_1): y = f''(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f(x)$.
 C. $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f'(x)$.
 D. $(C_1): y = f'(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f(x)$.

» **Câu 23.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng

- A. 5 m/s^2 . B. 3 m/s^2 . C. 2 m/s^2 . D. 6 m/s^2 .

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.		
(b)	$f'(3) = 6$		
(c)	$f'(4) < f'(5)$		
(d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

» **Câu 25.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ và $g(x) = x \ln x$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$		
(b)	Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.		
(c)	$f'(-1) - g'(e) = 2$		
(d)	Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.		



» **Câu 26.** Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+m}$ với m là tham số.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2 + m}}$.		
(b)	$f'(0) = \sqrt{m}$		
(c)	Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 1$ là $\frac{m}{\sqrt{m+1}}$.		
(d)	Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $m < \frac{1}{2}$.		

» **Câu 27.** Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + 2x + 1$ và $g(x) = e^{2x+1}$

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ là $f''(x) = 6x$		
(b)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ là $g''(x) = 4e^{2x-1}$.		
(c)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ tại $x_0 = -2$ là $f''(-2) = 12$.		
(d)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ tại $x_0 = 1$ là $g''(1) = 4e^3$.		

» **Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 2, a \neq 0$ có đồ thị là một Parabol (P) .

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Biết $f'(-1) = -1$ và $f''(1) = 4$. Khi đó $a + b = 6$.		
(b)	(P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3, f''(3) = 2$. Khi đó $b = 6$		
(c)	(P) đi qua điểm $A(1; 2), f''(2024) = -2$. Khi đó $b = 1$		
(d)	(P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-1, f''(-1) = 6$. Khi đó $b = 5$		

» **Câu 29.** Cho hàm số $f(x) = (2x+5)^5$

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình $f''(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$		
(b)	Phương trình $f''(x) = 80$ có tập nghiệm là $S = \{-3; -2\}$		
(c)	Phương trình $\frac{f''(x)}{(2x+5)^2} = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$		
(d)	Phương trình $f'(x) = f''(x)$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{3}{2}$.		

» **Câu 30.** Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình: $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Xét các trường hợp sau.

Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường tại thời điểm 3 giây là $17m$		
(b)	Vận tốc của chất điểm trong thời gian 4 giây là: $29 (m/s)$		
(c)	Tại thời điểm $t = 1 (s)$ thì gia tốc của chất điểm bằng 0		
(d)	Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây thì chất điểm chuyển động được $85m$		

» **Câu 31.** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai? Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là $9 (m/s)$.		
(b)	Vận tốc cực đại của chuyển động là $12 (m/s)$.		
(c)	Quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là $30 (m)$.		
(d)	Gia tốc của vật khi vận tốc đạt cực đại bằng 0.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 32.** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ trong đó t là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ (đơn vị: $^{\circ}F / \text{ngày}$) ở thời điểm $t = 2$.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 33.** Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số (đơn vị: nghìn người/năm) tại thời điểm $t = 7$ (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 34.** Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 35.** Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 36.** Biết hàm số $y = f(x) - f(3x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai với mọi $x \in \mathbb{R}$, biết $y''(3) = 5, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(9x)$ tại $x = 1$.



Điền đáp số:

» **Câu 37.** Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ (tính theo nghìn đô-la), để sản xuất x mặt hàng là $H(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng với tốc độ bao nhiêu nghìn đô-la/tháng sau 5 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó? (làm tròn đến hàng phần chục).

Điền đáp số:

» **Câu 38.** Cho một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2 + mt + 10$. Trong đó: s là quãng đường vật đi được (mét) và t là thời gian vật chuyển động (giây). Xác định giá trị của tham số m biết tại thời điểm $t = 3$ thì vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s.

Điền đáp số:

» **Câu 39.** Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục với biểu thức tọa độ $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 6t + 1$ (cm), t tính theo giây (s). Hỏi từ thời điểm $t = 0,5$ s đến thời điểm $t = 5$ s thì vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu cm/s?

Điền đáp số:

» **Câu 40.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ (đơn vị: nghìn người). Biết rằng đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (đơn vị: nghìn người/năm). Hỏi vào năm 2025, tốc độ tăng dân số của thị trấn này là bao nhiêu nghìn người/năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

----- Hết -----



Chương 07

Bài 2.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A

Lý thuyết

1. Đạo hàm hàm số $y = x^n$



Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm hàm số $y = \sqrt{x}$



Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm hàm số lượng giác

(1) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$(\sin x)' = \cos x.$$

(2) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

(3) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(4) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

(1) Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$(e^x)' = e^x.$$

(2) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

(3) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

(4) Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



5. Các quy tắc tính đạo hàm



Giả sử các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

6. Đạo hàm của hàm hợp

6.1 Khái niệm hàm số hợp



Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

6.2 Đạo hàm của hàm số hợp



Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

(1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	(8) $(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
(2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	(9) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
(3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$		
(4) $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	(10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
(5) $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
(6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$		
(7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$		



7. Đạo hàm cấp hai



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Khi đó: $(f'(x))' = f''(x)$.

⌘ Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t . Ta có $a(t) = f''(t)$



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức



Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

☑ Áp dụng công thức đạo hàm:

(1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

(2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

(3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$



Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $f(x) = (1-x^3)^5$

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

(3) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$

(5) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

(6) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

(7) $f(x) = (x+1)(x-2)$

(8) $f(x) = \frac{3x+5}{-1+2x}$

(9) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

(10) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Lời giải

(1) $f(x) = (1-x^3)^5$

Ta có $f'(x) = 5(1-x^3)^4 (1-x^3)' = -15x^2(1-x^3)^4$.

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

Ta có $f'(x) = (x^4 - x^2 + x + 200)' = (x^4)' - (x^2)' + x' + 200' = 4x^3 - 2x + 1$.



(3) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$

Ta có $f'(x) = (3x^4 - x^3 + x - 2021)' = 12x^3 - 3x^2 + 1.$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7$

Ta có $f'(x) = \left(x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7\right)' = (x^3)' + (-2x^2)' + \left(\frac{5}{x}\right)' + (7)' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x^2}$

(5) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

Ta có $f'(x) = \left(x - \frac{4}{x}\right)' = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}.$

(6) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

Ta có $f'(x) = (-x^7 + 2x^5 + 3x^3)' = -7x^6 + 10x^4 + 9x^2.$

(7) $f(x) = (x+1)(x-2)$

Ta có $f'(x) = (x+1)'(x-2) + (x+1)(x-2)' = x-2 + x+1 = 2x-1.$

(8) $f(x) = \frac{3x+5}{-1+2x}$

Ta có $f'(x) = \frac{(3x+5)' \cdot (-1+2x) - (3x+5)(-1+2x)'}{(-1+2x)^2} = \frac{3(2x-1) - 2(3x+5)}{(2x-1)^2} = \frac{-13}{(2x-1)^2}$

(9) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Ta có. $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)' = \frac{(x-2)'(x-1) - (x-2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x+2}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}.$

(10) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Ta có $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$



Dạng 2. Tính đạo hàm lượng giác



Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(4) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$



Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

(2) $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$

(3) $y = 2 \cos x^2$

(4) $y = \tan \frac{x+1}{2}$

(5) $y = \sin \sqrt{2+x^2}$

(6) $y = \sin(\sin x)$

(7) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x + x$

(8) $y = \cos^3(2x-1)$

(9) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

(10) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

Lời giải

(1) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

(2) $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$$

(3) $y = 2 \cos x^2$

$$\Rightarrow y' = 2 \cdot (x^2)' \cdot (-\sin x^2) = -4x \cdot \sin x^2.$$



$$(4) \quad y = \tan \frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{x+1}{2} \right)' \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \left(\frac{x+1}{2} \right)' \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x+1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x+1}{2} \right)$$

$$(5) \quad y = \sin \sqrt{2+x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\sqrt{2+x^2} \right)' \cdot \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$$

$$(6) \quad y = \sin(\sin x)$$

$$\Rightarrow y' = (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$(7) \quad y = 2 \sin^2 x - \cos 2x + x$$

$$\Rightarrow y' = 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2 \sin 2x + 1 = 2 \sin 2x + 2 \sin 2x + 1 = 4 \sin 2x + 1$$

$$(8) \quad y = \cos^3(2x-1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= 3 \cdot (\cos(2x-1))' \cdot \cos^2(2x-1) \\ &= 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2x-1)) \cdot \cos^2(2x-1) = -6 \sin(2x-1) \cos^2(2x-1) \end{aligned}$$

$$(9) \quad y = \tan^3 x + \cot 2x$$

$$\Rightarrow y' = (\tan^3 x + \cot 2x)' = 3 \cdot (\tan x)' \cdot \tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x} = 3 \frac{1}{\cos^2 x} \tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x}$$

$$(10) \quad y = \sin(x^2 - 3x + 2)$$

$$\Rightarrow y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cos(x^2 - 3x + 2).$$



Dạng 3. Tính đạo hàm mũ – logarit



Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

(3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$



Ví dụ 3.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \log_3(2x+1)$

(2) $y = \log_3(1-2x)$

(3) $y = 5^{2x-1}$

(4) $y = 2025^{x-2025}$

(5) $y = x + \ln(x+3)$

(6) $y = e^{\sin x}$

(7) $y = e^{2x-3} + e^{2025}$

(8) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

(9) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

(10) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Lời giải

(1) $y = \log_3(2x+1)$

Ta có $y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

(2) $y = \log_3(1-2007x)$

Ta có $y' = \frac{(1-2007x)'}{(1-2007x)\ln 3} = \frac{-2007}{(1-2007x)\ln 3}$.

(3) $y = 5^{2x-1}$

Ta có $y' = (2x-1)' \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5 = 2 \cdot 5^{2x-1} \cdot \ln 5$.

(4) $y = 2025^{x-2025}$

Ta có $y' = (2025^{x-2025})' \Leftrightarrow y' = 2025^{x-2025} \cdot \ln 2025$.



(5) $y = x + \ln(x+3)$

Ta có $y' = 1 + \frac{(x+3)'}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$.

(6) $y = e^{\sin x}$

Ta có $y' = (\sin x)' \cdot e^{\sin x} = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

(7) $y = e^{2x-3} + e^{2025}$

Ta có $y' = (e^{2x-3} + e^{2025})' = (2x-3)' \cdot e^{2x-3} = 2 \cdot e^{2x-3}$.

(8) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

Ta có $y' = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

(9) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

Ta có $y' = (\log_3(2x^2 - x + 1))' = \frac{(2x^2 - x + 1)'}{(2x^2 - x + 1)\ln 3} = \frac{2x - 1}{(2x^2 - x + 1)\ln 3}$.

(10) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Ta có $y' = (3^x + \log_3(x - 2x^2))' = 3^x \ln 3 + \frac{(x - 2x^2)'}{(x - 2x^2)\ln 3} = 3^x \ln 3 + \frac{1 - 4x}{(x - 2x^2)\ln 3}$.



Dạng 4. Tổng hợp



Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0) \rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$



Ví dụ 4.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = -2x^3 + 4\sqrt{x}$

(2) $y = (3x^2 - 1)^2$

(3) $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$

(5) $y = \frac{2x+1}{x+2}$

(6) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

(7) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1}$

(8) $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$

(9) $y = x^2(2x+1)(5x-3)$

(10) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

Lời giải

(1) $y = -2x^3 + 4\sqrt{x}$

$$\Rightarrow y' = (-2x^3 + 4\sqrt{x})' = -6x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

(2) $y = (3x^2 - 1)^2$

$$\Rightarrow y' = ((3x^2 - 1)^2)' = 2(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1)' = 12x(3x^2 - 1).$$

(3) $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

$$\Rightarrow y' = (-2x^4 + 4x^2 + 1)' = -8x^3 + 8x.$$

(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1\right)' = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8.$$

(5) $y = \frac{2x+1}{x+2}$



$$\Rightarrow y' = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)' = \frac{(2x+1)'(x+2) - (2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

(6) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right)' \\ &= \frac{(x^2 - x + 1)'(x - 1) - (x^2 - x + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 3x + 1 - x^2 + x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

(7) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1}$

Cách 1: $\Rightarrow y' = \left(\frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + x + 3)'(x^2 + x - 1) - (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2}$

$$= \frac{(2x + 1)(x^2 + x - 1) - (x^2 + x + 3)(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{(2x + 1)(x^2 + x - 1 - x^2 - x - 3)}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-4(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2}$$

Cách 2:

Ta có: $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x - 1 + 4}{x^2 + x - 1} = 1 + \frac{4}{x^2 + x - 1}$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1} \right)' = \left(1 + \frac{4}{x^2 + x - 1} \right)' = 1' + \left(\frac{4}{x^2 + x - 1} \right)' = -\frac{4(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-4(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2}$$

(8) $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \left(\frac{-x^2 + 3x - 3}{2x - 2} \right)' = \frac{(-x^2 + 3x - 3)'(2x - 2) - (-x^2 + 3x - 3)(2x - 2)'}{(2x - 2)^2} \\ &= \frac{(-2x + 3)(2x - 2) - 2(-x^2 + 3x - 3)}{(2x - 2)^2} = \frac{-4x^2 + 10x - 6 + 2x^2 - 6x + 6}{(2x - 2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x}{4(x - 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x}{2(x - 1)^2} \end{aligned}$$

(9) $y = x^2(2x + 1)(5x - 3)$

Cách 1:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= [x^2(2x + 1)(5x - 3)]' \\ &= (x^2)'(2x + 1)(5x - 3) + x^2(2x + 1)'(5x - 3) + x^2(2x + 1)(5x - 3)' \\ &= 2x(10x^2 - x - 3) + 2x^2(5x - 3) + 5x^2(2x + 1) \\ &= 20x^3 - 2x^2 - 6x + 10x^3 - 6x^2 + 10x^3 + 5x^2 = 40x^3 - 3x^2 - 6x \end{aligned}$$



Cách 2:

Ta có $y = x^2(2x+1)(5x-3) = x^2(10x^2 - x - 3) = 10x^4 - x^3 - 3x^2$

$$\Rightarrow y' = [x^2(2x+1)(5x-3)]' = (10x^4 - x^3 - 3x^2)' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$$

(10) $y = (x^2+1)(5-3x^2)$

$$\Rightarrow y' = (x^2+1)'(5-3x^2) + (x^2+1)(5-3x^2)'$$

$$= 2x(5-3x^2) - 6x(x^2+1) = 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x = -12x^3 + 4x$$



Ví dụ 4.2.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$

(2) $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$

(3) $y = \frac{2x-1}{x+2}$

(4) $y = (x^2 + 2x + 3)^5$

(5) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$

(6) $y = (2x^5 - 3x - 7)^3$

(7) $y = \sqrt{1-3x^2}$

(8) $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$

(9) $y = \frac{-3x+4}{x-2}$

(10) $y = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 7}$

Lời giải

(1) $y = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$

$$y' = (\sqrt{4x^2 + 3x + 1})' = \frac{(4x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} = \frac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}.$$

(2) $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$

$$y' = \frac{(x^2 + x + 3)'}{2\sqrt{x^2 + x + 3}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 3}}.$$

(3) $y = \frac{2x-1}{x+2}$

Cách 1. $y' = \frac{(2x-1)' \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$

Cách 2. $y' = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$

(4) $y = (x^2 + 2x + 3)^5$

$$y' = 5(x^2 + 2x + 3)^4 (2x + 2) = 10(x+1)(x^2 + 2x + 3)$$

(5) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$



$$y' = \left(\sqrt{2x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

(6) $y = (2x^5 - 3x - 7)^3$

$$y' = 3(2x^5 - 3x - 7)^2 (10x^4 - 3).$$

(7) $y = \sqrt{1 - 3x^2}$

$$y' = \frac{-6x}{2\sqrt{1 - 3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{1 - 3x^2}}.$$

(8) $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}.$

$$\begin{aligned} y' &= (2x - 1)' \cdot \sqrt{x^2 + x} + (2x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + x})' \\ &= 2 \cdot \sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x}} = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}. \end{aligned}$$

(9) $y = \frac{-3x + 4}{x - 2}$

$$y' = \frac{(-3x + 4)'(x - 2) - (x - 2)'(-3x + 4)}{(x - 2)^2} = \frac{-3 \cdot (x - 2) - (-3x + 4)}{(x - 2)^2} = \frac{2}{(x - 2)^2}.$$

(10) $y = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 7}$

$$y' = \frac{(x^4 - 4x^2)'}{2\sqrt{x^4 - 4x^2 + 7}} = \frac{2x^3 - 4x}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 7}}.$$



➤ Dạng 5. Đạo hàm cấp 2



Phương pháp

Cho hàm số $y = f(x)$, tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp một : $y' = f'(x)$

Bước 2: Lấy kết quả của đạo hàm cấp một đem đi đạo hàm : $(y')' = (f'(x))'$

Bước 3: Kết luận: $y'' = f''(x)$



Ví dụ 5.1.

Tính đạo hàm cấp hai các hàm số sau:

(1) $y = 2x$

(2) $y = (2x - 1)^2$

✎ **Lời giải**

(1) $y = 2x$

Ta có $y' = (2x)' = 2$

Suy ra $y'' = (y')' = 2' = 0$.

(2) $y = (2x - 1)^2$

Ta có $y' = ((2x - 1)^2)' = 2(2x - 1)(2x - 1)' = 4(2x - 1)$

Suy ra $y'' = (y')' = (4(2x - 1))' = 4 \cdot (2x - 1)' = 4 \cdot 2 = 8$.



Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Tính $f''(1)$.

✎ **Lời giải**

Ta có $f'(x) = ((x^2 - 1)^2)' = 2(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 4x(x^2 - 1)$

$\Rightarrow f''(x) = (4x(x^2 - 1))' = (4x^3 - 4x)' = 12x^2 - 4$

$\Rightarrow f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 8$.



Ví dụ 5.3.

Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là?

✎ **Lời giải**



Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$\text{Ta có: } S'(t) = (t^4 - 4t^2 + 4)' = 4t^3 - 8t$$

$$\Rightarrow a(t) = S''(t) = (4t^3 - 8t)' = 12t^2 - 8$$

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $a(2) = 12 \cdot 2^2 - 8 = 40 \text{ (m/s}^2\text{)}$.



Ví dụ 5.4.

Xác định hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 - 2cx^2 + 3x - 2$ ($a \neq 0$).

Biết $f(1) = 5$; $f'(-1) = 0$; $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 - 4cx + 3$, $f''(x) = 20ax^3 + 6bx - 4c$

Từ giả thiết $f(1) = 5$; $f'(-1) = 0$; $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ ta có hệ PT:

$$\begin{cases} a + b - 2c + 3 - 2 = 5 \\ 5a + 3b - 4c + 3 = 0 \\ \frac{5}{2}a + 3b - 4c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{64}{9} \\ b = -\frac{77}{9} \\ c = -\frac{29}{9} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \frac{64}{9}x^5 - \frac{77}{9}x^3 + \frac{58}{9}x^2 + 3x - 2$.



Chương 07

Bài 2.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ là:

A. 80.

B. 16.

C. 5.

D. $5x^4$.

✎ Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = (x^5)' = 5x^4$.

Từ đó $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$.

» Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. 9.

D. 3.

✎ Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Từ đó $y'\left(\frac{1}{3}\right) = 3$.

» Câu 3. Với $x > 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^x + \log_5 x$ là:

A. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 2}$.

B. $y' = 2^x + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

C. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{\ln 5}$.

D. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

✎ Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (2^x + \log_5 x)' = (2^x)' + (\log_5 x)' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

» Câu 4. Cho $a, x > 0, a \neq 1$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $(e^{3x} - a^x + \pi)' = 3e^x - a^x \cdot \ln a$.

B. $(e^{3x} - a^x + \pi)' = 3e^{3x} - a^x \ln a$.

C. $(e^x - \ln(x+1) + \pi)' = e^x - \frac{1}{x}$.

D. $(e^x - \ln(x+1) + \pi)' = e^x - \frac{1}{x+1} + \pi$.

✎ Lời giải

Chọn B



Ta có $(e^{3x} - a^x + \pi)' = (e^{3x})' - (a^x)' + (\pi)' = 3e^{3x} - a^x \ln a + 0 = 3e^{3x} - a^x \ln a$.

» **Câu 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$.

A. $y' = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x$.

B. $y' = 2 \cos 3x + \sin 2x$.

C. $y' = -6 \cos 3x + 2 \sin 2x$.

D. $y' = 2 \cos 3x - \sin 2x$.

🔗 **Lời giải**

Chọn A

Ta có:

$$y' = (2 \cos 3x) \cdot 3 - (\sin 2x) \cdot 2 = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x.$$

» **Câu 6.** Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot e^x$ bằng:

A. $y' = (1+x)e^x$.

B. $y' = e^x$.

C. $y' = x \cdot e^x$.

D. $y' = (1-x)e^x$.

🔗 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$.

» **Câu 7.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ bằng:

A. $y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$

B. $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$

C. $y' = -2$

D. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$

🔗 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(2x+1)' \cdot (1-x) - (1-x)' \cdot (2x+1)}{(1-x)^2} = \frac{2(1-x) - (-1)(2x+1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x+1}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

» **Câu 8.** Hàm số $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ có đạo hàm là:

A. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1)$.

B. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x + 1)$.

C. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x + 1)$.

D. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x - 1)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $y' = (\sin^2 x)' \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (\cos x)'$

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)$$

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$y' = \sin x \cdot (2 \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1).$$

» **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

A. $f'(1) = 1$.

B. $f'(1) = \frac{1}{2 \ln 2}$.

C. $f'(1) = \frac{1}{2}$.

D. $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn D



Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$$

» **Câu 10.** Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$ là

A. $\frac{1}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}.$

B. $\frac{-5x+7}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}.$

C. $\frac{-5x+7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}.$

D. $\frac{1}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}.$

» **Lời giải**

Chọn C

Tập xác định: $D = \left[1; \frac{9}{5}\right].$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) &= \sqrt{-5x^2 + 14x - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-5x^2 + 14x - 9)'}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-10x + 14}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} = \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]. \end{aligned}$$

» **Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = e^{-x^3+x^2+x}$. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $3x_1 \cdot x_2$.

A. $3x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}.$

B. $3x_1 \cdot x_2 = -1.$

C. $3x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}.$

D. $3x_1 \cdot x_2 = 1.$

» **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $f'(x) = (-3x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x^3+x^2+x}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-3x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x^3+x^2+x} = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó: $3x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$

» **Câu 12.** Cho hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$. Biết $g'(1) = 10$ và $g'(2) = 24$. Tính đạo hàm của hàm số $h(x) = f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

A. 56.

B. 60.

C. 58.

D. 72.

» **Lời giải**

Chọn C

Ta có:

$$g'(x) = f'(x) - 2f'(2x) \Rightarrow \begin{cases} g'(1) = f'(1) - 2f'(2) \\ g'(2) = f'(2) - 2f'(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(1) = f'(1) - 2f'(2) \\ 2g'(2) = 2f'(2) - 4f'(4) \end{cases}$$

Mặt khác: $h'(x) = f'(x) - 4f'(4x) \Rightarrow h'(1) = f'(1) - 4f'(4) = g'(1) + 2g'(2) = 58.$



» **Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x + 2024$. Bất phương trình $f'(x) < 0$ có tập nghiệm là

A. $S = (-2; 2)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -2)$.

D. $(2; +\infty)$.

» **Lời giải**

Chọn A

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm } S = (-2; 2).$$

» **Câu 14.** Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

A. $y'' = 0$.

B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$.

C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$.

D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

» **Lời giải**

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{x}{x-2} \right)' = \frac{-2}{(x-2)^2}; \quad y'' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}.$$

» **Câu 15.** Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

B. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

D. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

» **Lời giải**

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow y'' = -\frac{2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

» **Câu 16.** Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$.

B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$.

D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

» **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}; \quad y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

» **Câu 17.** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $4y - y' = 0$.

B. $4y + y'' = 0$.

C. $y = y' \tan 2x$.

D. $y^2 = (y')^2 = 4$.

» **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = 2 \cos 2x; \quad y'' = -4 \sin 2x.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 4y + y'' = 0.$$



» **Câu 18.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Khi đó $y''\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. -16.

B. -8.

C. 8.

D. 16.

» *Lời giải*

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = -\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right) = -16.$$

» **Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là các hằng số). Biết $f'(1) = 0$ và $f''(1) = -2$. Tính $a + b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

» *Lời giải*

Chọn A

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 0.$$

$$f''(x) = 2a \Rightarrow f''(1) = 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Thay vào trên, ta được } b = 2.$$

$$\text{Vậy } a + b = 1.$$

» **Câu 20.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là

A. 42 (m/s).

B. 43 (m/s).

C. 41 (m/s).

D. 40 (m/s).

» *Lời giải*

Chọn B

$$\text{Ta có: } v(t) = s'(t) = 2t^2 - 2t + 3$$

$$s'(5) = 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 43.$$

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là: 43 (m/s).

» **Câu 21.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

A. 20000.

B. 22500.

C. 21000.

D. 24000.

» *Lời giải*

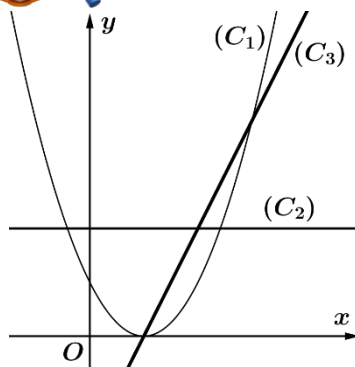
Chọn C

$$\text{Ta có: } P'(x) = -300x + 24000$$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm là

$$P'(10) = -300 \cdot 10 + 24000 = 21000.$$

» **Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ trong cùng một hệ trục tọa độ Oxy như hình dưới. Trong hình vẽ, đồ thị (C_1) là đường cong được vẽ bằng nét mảnh nhất, đồ thị (C_3) được vẽ bằng nét đậm nhất và đường còn lại là (C_2) . Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f''(x)$.

B. $(C_1): y = f''(x), (C_2): y = f'(x), (C_3): y = f(x)$.

C. $(C_1): y = f(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f'(x)$.

D. $(C_1): y = f'(x), (C_2): y = f''(x), (C_3): y = f(x)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

Vì $f(x) = ax^2 + bx + c$ là một parabol nên $(C_1): y = f(x)$.

Ta có $f'(x) = 2ax + b$ và $f''(x) = 2a$.

Suy ra đồ thị hàm số $f''(x)$ là một đường thẳng song song với trục hoành.

Vậy $(C_2): y = f''(x), (C_3): y = f'(x)$.

» **Câu 23.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng

A. 5 m/s^2 .

B. 3 m/s^2 .

C. 2 m/s^2 .

D. 6 m/s^2 .

🔗 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $a(t) = s''(t) = f''(t) = 2 + 3t$.

Vậy gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động là $a(1) = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ m/s}^2$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.		
(b)	$f'(3) = 6$		
(c)	$f'(4) < f'(5)$		
(d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

🔗 **Lời giải**

(a) Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Ta có: $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)' = 3x^2 - 6x + 2$



» Chọn ĐÚNG.

(b) $f'(3) = 6$.

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 11.$$

» Chọn SAI.

(c) $f'(4) < f'(5)$

$$\begin{cases} f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = 26 \\ f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 2 = 47 \end{cases} \Rightarrow f'(4) < f'(5).$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $f'(2) + f'(-2) = 0$.

$$\begin{cases} f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 \\ f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 2 = 26 \end{cases} \Rightarrow f'(2) + f'(-2) = 28.$$

» Chọn SAI.

» Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ và $g(x) = x \ln x$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$		
(b)	Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.		
(c)	$f'(-1) - g'(e) = 2$		
(d)	Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.		

» Lời giải

(a) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2} \right)' = \frac{(x-3)' \cdot (x+2) - (x-3) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + 1.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $f'(-1) - g'(e) = 2$.

$$\begin{cases} f'(-1) = \frac{5}{(-1+2)^2} = 5 \\ g'(e) = \ln e + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(-1) \neq g'(e)$$

» Chọn SAI.



(d) Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.

$$(x+2)^2 f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow (x+2)^2 \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \ln x + 1 \Leftrightarrow 5 = \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4.$$

» Chọn SAI.

» Câu 26. Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+m}$ với m là tham số.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2 + m}}$.		
(b)	$f'(0) = \sqrt{m}$		
(c)	Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 1$ là $\frac{m}{\sqrt{m+1}}$.		
(d)	Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $m < \frac{1}{2}$.		

» Lời giải

(a) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2 + m}}$.

$$\text{Ta có: } y' = (x-2)' \cdot \sqrt{x^2+m} + (x-2) \cdot (\sqrt{x^2+m})' = \sqrt{x^2+m} + \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+m}} = \frac{2x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2+m}}$$

» Chọn SAI.

(b) $f'(0) = \sqrt{m}$.

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + m}{\sqrt{0^2 + m}} = \sqrt{m}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 1$ là $\frac{m}{\sqrt{m+1}}$.

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại } x_0 = 1 \text{ là } k = f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + m}{\sqrt{1^2 + m}} = \frac{m}{\sqrt{m+1}}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $m < \frac{1}{2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2 + m}} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + m = 0 \quad (1)$$

Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 2 \cdot m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 27. Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + 2x + 1$ và $g(x) = e^{2x+1}$

Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ là $f''(x) = 6x$		
(b)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ là $g''(x) = 4.e^{2x-1}$.		
(c)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ tại $x_0 = -2$ là $f''(-2) = 12$.		
(d)	Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ tại $x_0 = 1$ là $g''(1) = 4.e^3$.		

» Lời giải

(a) Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ là $f''(x) = 6x$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2; f''(x) = 6x$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ là $g''(x) = 4.e^{2x-1}$.

$$g'(x) = 2.e^{2x+1}; g''(x) = 4.e^{2x+1}.$$

» Chọn SAI.

(c) Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ tại $x_0 = -2$ là $f''(-2) = 12$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2; f''(x) = 6x$$

$$\text{Suy ra } f''(-2) = 6(-2) = -12$$

» Chọn SAI.

(d) Đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x)$ tại $x_0 = 1$ là $g''(1) = 4.e^3$.

$$g'(x) = 2.e^{2x+1}; g''(x) = 4.e^{2x+1}.$$

$$\text{Suy ra } g''(1) = 4.e^3$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 2, a \neq 0$ có đồ thị là một Parabol (P) .

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Biết $f'(-1) = -1$ và $f''(1) = 4$. Khi đó $a + b = 6$.		
(b)	(P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3, f''(3) = 2$. Khi đó $b = 6$		
(c)	(P) đi qua điểm $A(1; 2), f''(2024) = -2$. Khi đó $b = 1$		
(d)	(P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-1, f''(-1) = 6$. Khi đó $b = 5$		

» Lời giải

(a) Biết $f'(-1) = -1$ và $f''(1) = 4$. Khi đó $a + b = 6$.

$$f'(x) = 2ax + b; f''(x) = 2a$$

$$f''(1) = 4 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f'(-1) = -1 \Leftrightarrow -2a + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 + 2a = 3$$

» Chọn SAI.

(b) (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3, f''(3) = 2$. Khi đó $b = 6$



(P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow b = -6a$

$f''(3) = 2 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$. Khi đó $b = -6$

» **Chọn SAI.**

(c) (P) đi qua điểm $A(1; 2)$, $f''(2024) = -2$. Khi đó $b = 1$

(P) đi qua điểm $A(1; 2) \Rightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$

$f''(2024) = -2 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$. Khi đó $b = 1$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 , $f''(-1) = 6$. Khi đó $b = 5$

(P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 , suy ra $a - b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = a + 2$

$f''(-1) = 6 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$. Khi đó $b = 5$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 29.** Cho hàm số $f(x) = (2x + 5)^5$

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình $f''(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$		
(b)	Phương trình $f''(x) = 80$ có tập nghiệm là $S = \{-3; -2\}$		
(c)	Phương trình $\frac{f''(x)}{(2x+5)^2} = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$		
(d)	Phương trình $f'(x) = f''(x)$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{3}{2}$		

» **Lời giải**

Ta có: $f'(x) = 10(2x + 5)^4$, $f''(x) = 80(2x + 5)^3$

(a) Phương trình $f''(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 80(2x + 5)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình $f''(x) = 80$ có tập nghiệm là $S = \{-3; -2\}$

$f''(x) = 80 \Leftrightarrow 80(2x + 5)^3 = 80 \Leftrightarrow (2x + 5)^3 = 1 \Leftrightarrow 2x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -2$

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình $\frac{f''(x)}{(2x+5)^2} = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{5}{2}$

$\frac{f''(x)}{(2x+5)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{80(2x+5)^3}{(2x+5)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=0 \\ 2x+5 \neq 0 \end{cases}$, vô nghiệm.



» Chọn SAI.

(d) Phương trình $f'(x) = f''(x)$ có duy nhất một nghiệm $x = -\frac{3}{2}$.

$$f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow 10(2x+5)^4 = 80(2x+5)^3 \Leftrightarrow (2x+5)^3 [2x-3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

» Chọn SAI.

» Câu 30. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Xét các trường hợp sau.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường tại thời điểm 3 giây là 17m		
(b)	Vận tốc của chất điểm trong thời gian 4 giây là: 29 (m/s)		
(c)	Tại thời điểm $t = 1$ (s) thì gia tốc của chất điểm bằng 0		
(d)	Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây thì chất điểm chuyển động được 85m		

» Lời giải

(a) Quãng đường tại thời điểm 3 giây là 17m

$$\text{Quãng đường tại thời điểm 3 giây thì } s(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 = 17m$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Vận tốc của chất điểm trong thời gian 4 giây là: 29 (m/s)

$$\text{Vận tốc của chất điểm trong thời gian 4 giây là } v(4) = s'(4), \text{ với } v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 5,$$

$$\text{suy } v(4) = 29m$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Tại thời điểm $t = 1$ (s) thì gia tốc của chất điểm bằng 0

$$\text{Tại thời điểm } t = 1 \text{ (s) thì gia tốc của chất điểm bằng } 0.$$

$$\text{Ta có: gia tốc } a(t) = s''(t) = 6t - 6, \Rightarrow a(1) = 0$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây thì chất điểm chuyển động được 85m

Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 5 giây thì chất điểm chuyển động được 85m

$$\text{ta có } s(2) = 8m \text{ và } s(5) = 77m$$

Nên quãng đường chất điểm di chuyển từ 2 giây đến 5 giây là:

$$s(5) - s(2) = 77 - 8 = 69m$$

» Chọn SAI.

» Câu 31. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức

$s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai?

Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9 (m/s) .		
(b)	Vận tốc cực đại của chuyển động là 12 (m/s) .		
(c)	Quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là 30 (m) .		
(d)	Gia tốc của vật khi vận tốc đạt cực đại bằng 0 .		

✎ **Lời giải**

Ta có: $s'(t) = -3t^2 + 6t + 9$.

Phương trình vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 6t + 9$.

(a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9 (m/s) .

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là $v(2) = s'(2) = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 9 = 9 \text{ (m/s)}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Vận tốc cực đại của chuyển động là 12 (m/s) .

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = -3t^2 + 6t + 9$ là một parabol, có đỉnh

$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 12)$ và hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất bằng 12 tại $t = 1$.

Vậy vật đạt vận tốc lớn nhất bằng 12 (m/s) khi $t = 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là 30 (m) .

Khi vật dừng lại thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{cases}$

Vậy quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là $s(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 9 = 0$.

» **Chọn SAI.**

(d) Gia tốc của vật khi vận tốc đạt cực đại bằng 0 .

Ta có phương trình gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = -6t + 6$.

Vật đạt vận tốc cực đại là 12 (m/s) khi $t = 1$.

$\Rightarrow$ Gia tốc của vật khi vận tốc đạt cực đại là $a(1) = -6 \cdot 1 + 6 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 32.** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ trong đó t là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ (đơn vị: $^{\circ}\text{F}/\text{ngày}$) ở thời điểm $t = 2$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,8**

Ta có: $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ nên $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Ở thời điểm $t = 2$ thì $T'(2) = -0,2 \cdot 2 + 1,2 = 0,8 \text{ (}^{\circ}\text{F}/\text{ngày)}$



» **Câu 33.** Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức

$P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số (đơn vị: nghìn người/năm) tại thời điểm $t = 7$ (làm tròn đến hàng phần chục).

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -5,9**

Ta có: $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$ nên $P'(t) = 500 \cdot \frac{-t^2 + 9}{(t^2 + 9)^2}$.

Ở thời điểm $t = 7$ thì $P'(7) = 500 \cdot \frac{-7^2 + 9}{(7^2 + 9)^2} \approx -5,9$ (nghìn người/năm).

» **Câu 34.** Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 14**

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1$ ($t > 0$).

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14 \text{ m/s}^2$.

» **Câu 35.** Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 28**

Ta có: $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$

$\Leftrightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = -\frac{3}{2}[(t-2)^2 - 4] = -\frac{3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (s).

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28 \text{ (m)}$.

» **Câu 36.** Biết hàm số $y = f(x) - f(3x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai với mọi $x \in \mathbb{R}$, biết $y''(3) = 5, y''(1) = 10$. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $g(x) = f(x) - f(9x)$ tại $x = 1$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 55**

Đặt $h(x) = f(x) - f(3x); g(x) = f(x) - f(9x)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - 3f'(3x) \Rightarrow h''(x) = f''(x) - 9f''(3x);$

$g'(x) = f'(x) - 9f'(9x) \Rightarrow g''(x) = f''(x) - 81f''(9x) \Rightarrow g''(1) = f''(1) - 81f''(9).$

Ta có



$$\begin{cases} h''(3) = f''(3) - 9f''(9) = 5 & (1) \\ h''(1) = f''(1) - 9f''(3) = 10 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 9f''(3) - 81f''(9) = 45 \quad (3)$$

Cộng từng vế (2) và (3) suy ra $g''(1) = f''(1) - 81f''(9) = 55$.

- » **Câu 37.** Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ (tính theo nghìn đô-la), để sản xuất x mặt hàng là $H(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng với tốc độ bao nhiêu nghìn đô-la/tháng sau 5 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó? (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 44,7**

Ta có: $H'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 60}}$; $x'(t) = 20$; $x(5) = 20 \cdot 5 + 40 = 140$.

Mà $H'(x(t)) = H'(x) \cdot x'(t)$ hay $H'(x(5)) = H'(140) \cdot x'(5)$

Do đó $H'(x(5)) = \frac{5 \cdot 140}{\sqrt{5 \cdot 140^2 + 60}} \cdot 20 \approx 44,7$ nghìn đô-la/tháng.

- » **Câu 38.** Cho một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2 + mt + 10$. Trong đó: s là quãng đường vật đi được (mét) và t là thời gian vật chuyển động (giây). Xác định giá trị của tham số m biết tại thời điểm $t = 3$ thì vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -1,5**

Vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 2t + m$.

Vận tốc tức thời của vật là 4,5 m/s khi $v(3) = 4,5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + m = 4,5 \Leftrightarrow m = -1,5$.

- » **Câu 39.** Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục với biểu thức tọa độ $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 6t + 1$ (cm), t tính theo giây (s). Hỏi từ thời điểm $t = 0,5$ s đến thời điểm $t = 5$ s thì vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu cm/s?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 11**

Vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t) = x'(t) = t^2 - 4t + 6$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $v(t)$ trên đoạn $[0,5; 5]$ ta được:

t	0,5	2	5
$v(t)$	4,25	2	11

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $v_{\max} = 11$ (cm/s).

- » **Câu 40.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ (đơn vị: nghìn người). Biết rằng đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (đơn vị: nghìn người/năm). Hỏi vào năm 2025, tốc độ tăng dân



số của thị trấn này là bao nhiêu nghìn người/năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,03**

Tốc độ tăng dân số của thị trấn tại thời điểm t năm kể từ năm 1970 là: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$

(nghìn người/năm).

Vào năm 2025, $t = 2025 - 1970 = 55$ nên tốc độ tăng dân số của thị trấn tại thời điểm này

là $f'(55) = \frac{120}{(5+55)^2} \approx 0,03$ (nghìn người/năm).

----- Hết -----