

Chương 3

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài số 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

🔗 **Định nghĩa 1.1.** Dãy số (u_n) có giới hạn bằng 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

⚠️ Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

🔴 **Nhận xét.** Nếu u_n ngày càng gần tới 0 khi n càng lớn thì $\lim u_n = 0$.

🔗 **Định nghĩa 1.2.** Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

⚠️ Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

⚠️ ☑️ Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

☑️ Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

2. Một số giới hạn cơ bản

☑️ $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước.

☑️ $\lim \frac{c}{n} = 0$; $\lim \frac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước.

☑️ Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

☑️ Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e ,

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Một giá trị gần đúng của e là 2,718281828459045.

B – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

🔗 Định lý 1.1.

☑️ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì:

$$\lim (u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim (u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

☑️ Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

C – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

❖ **Định nghĩa 1.3.** Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

D – GIỚI HẠN VÔ CỰC

❖ **Định nghĩa 1.4.**

a) Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

○ **Nhận xét.** Một số giới hạn cơ bản

- ☑ $\lim n^k = +\infty$ với k là một số nguyên dương cho trước.
- ☑ $\lim q^n = +\infty$ với $q > 1$ là một số thực cho trước.
- ☑ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- ☑ Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = 0, v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- ☑ $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim (-u_n) = -\infty$.

E – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

📁 **Dạng 1. Tính giới hạn dãy số bằng cách dùng định nghĩa, định lí về giới hạn dãy số**

Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

- ☑ $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- ☑ $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- ☑ $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- ☑ $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot a$
- ☑ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$.
- ☑ Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Cánh Diều). Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Giả sử h là số dương bé tùy ý cho trước.

- a) Tìm số tự nhiên n để $|u_n| < h$;
- b) Tính $\lim \frac{(-1)^n}{n}$.

Lời giải.

a) Ta có $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$. Do đó $|u_n| < h \Leftrightarrow \frac{1}{n} < h \Leftrightarrow n > \frac{1}{h}$.

b) Vì $|u_n| < h$ là số dương bé tùy ý kể từ số hạng $n > \frac{1}{h}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

□

Ví dụ 2 (Cánh Diều). Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Lời giải.

Do $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

□

Ví dụ 3 (KNTT). Xét dãy số $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Lời giải.

Dãy số này có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý khi n đủ lớn. Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức là $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$, ta cần $n^2 > 10000$ hay $n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy, kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

□

Ví dụ 4 (CTST). Áp dụng giới hạn cơ bản, tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^n}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{(\sqrt{3})^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Do $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$.

□

Ví dụ 5 (Cánh Diều). Chứng minh rằng:

a) $\lim c = c$ với c là hằng số;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n+1}{n} = 6$.

Lời giải.

a) Do $\lim(c - c) = \lim 0 = 0$ nên theo định nghĩa về dãy số có giới hạn hữu hạn, ta có $\lim c = c$.

b) Do $\lim \left(\frac{6n+1}{n} - 6\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n+1}{n} = 6$.

□

Ví dụ 6 (KNTT). Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{(2n+1) - 2n}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Do vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

□

Ví dụ 7 (CTST). Dùng định nghĩa, tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+1}{n^2}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$. Ta có $u_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ hay $u_n - 3 = \frac{1}{n^2}$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Theo định nghĩa, ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = 3$.

□

 Toán 11 theo chương trình GDPT2018

Bài 4. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -6$. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim (u_n + v_n)$, $\lim (u_n - v_n)$, $\lim (u_n \cdot v_n)$, $\lim \frac{u_n}{v_n}$. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n}$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

Lời giải.

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right)^2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} = \frac{2^2}{3 - 2} = 4 ;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2v_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} 2v_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n} = \sqrt{2 + 2 \cdot 3} = 2\sqrt{2}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giá trị của $\lim \frac{1}{n}$ bằng

(A) 0.

(B) 1.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 2. Giá trị của $\lim \frac{1}{n^k}$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ bằng

(A) 1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 0.

Lời giải.

$$\lim \frac{1}{n^k} = 0.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 3. Dãy số nào sau đây có giới hạn 0?

(A) $u_n = \frac{n}{2}$.

(B) $u_n = \frac{2}{n}$.

(C) $u_n = n$.

(D) $u_n = \sqrt{n}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{2}{n} = 0.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Giá trị của $\lim \frac{-5}{n^k}$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ bằng

(A) 5.

(B) -1.

(C) 0.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \frac{-5}{n^k} = 0.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 5. Giá trị của $\lim q^n$ với $|q| < 1$ bằng

(A) 1.

(B) 0.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

Với $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 6. Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - L) = 0$. (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$. (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} L = 0$. (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + L) = 0$.

Lời giải.

Theo định nghĩa giới hạn dãy số ta có (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - L) = 0$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 7. Giả sử $\lim u_n = L$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\lim \sqrt{u_n} = L$. (B) $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$. (C) $\lim \sqrt[3]{u_n} = L$. (D) $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

Lời giải.

Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 8. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- (A) $(0,999)^n$. (B) $(-1,01)^n$. (C) $(1,01)^n$. (D) $(-2,001)^n$.

Lời giải.

Vì $|0,999| < 1$ nên $\lim (0,999)^n = 0$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- (A) $\left(\frac{5}{4}\right)^n$. (B) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$. (C) $\left(-\frac{\pi}{4}\right)^n$. (D) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$.

Lời giải.

Vì $\left|-\frac{\pi}{4}\right| \approx 0,78 < 1$ nên $\lim \left(-\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 10. Cho hai dãy (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = 1$ và $\lim v_n = -2$. Giá trị của $\lim (u_n + v_n)$ bằng

- (A) -1 . (B) -2 . (C) 3 . (D) -3 .

Lời giải.

$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = 1 + (-2) = -1$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 11. Cho hai dãy (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = 6$ và $\lim v_n = 12$. Giá trị của $\lim (u_n - v_n)$ bằng

- (A) 2 . (B) 72 . (C) 18 . (D) -6 .

Lời giải.

$\lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = 6 - 12 = -6$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 12. Cho hai dãy (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = 4$ và $\lim v_n = 7$. Giá trị của $\lim (u_n \cdot v_n)$ bằng

- (A) $\frac{4}{7}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) 28 . (D) 11 .

Lời giải.

$\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = 4 \cdot 7 = 28$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 13. Cho hai dãy (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = \sqrt{3}$ và $\lim v_n = 2$. Giá trị của $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $2 + \sqrt{3}$. (D) $-2 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 14. Cho hai dãy (u_n) thỏa mãn $\lim u_n = 12$. Giá trị của $\lim (6 + 3u_n)$ bằng

- (A) 30 . (B) 108 . (C) 36 . (D) 42 .

Lời giải.

$\lim (6 + 3u_n) = \lim 6 + \lim 3 \cdot \lim u_n = 6 + 3 \cdot 12 = 42$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 15. Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

(A) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$.

(B) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$.

(C) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$.

(D) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Lời giải.

$$\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2 = \frac{\lim 3 \cdot \lim u_n - \lim 1}{\lim u_n + \lim 1} = \frac{3 \cdot 3 - 1}{3 + 1} = 2.$$

Chọn đáp án (C)



Dạng 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$

Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu, rồi sử dụng các công thức:

• $\lim \frac{c}{n^k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}).$

• $\lim n^k = +\infty, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$

• $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$

• $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$

• $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$

• $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$

☑ Áp dụng $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

☑ Sử dụng công thức mũ, rồi chia cả tử và mẫu cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất.

☑ Công thức mũ cần nhớ

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \text{ và } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

☑ **Nhận xét.** Ta chia cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất vì sau khi chia luôn tạo ra cơ số có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 để áp dụng công thức $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

☑ **Nhận xét.** Các công thức cần nhớ về cấp số nhân

a) $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ (q là công bội).

b) $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$

c) $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$

d) $u_{k+1} \cdot u_{k-1} = u_k^2$ với $k \geq 2$.

☑ **Nhận xét.** Nếu bậc tử $P(n)$ bằng bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\text{Hệ số bậc cao nhất của tử}}{\text{Hệ số bậc cao nhất của mẫu}}.$

☑ **Nhận xét.** Với bài toán có lũy thừa cao, ta thường rút bậc cao trong từng dấu ngoặc, sau đó áp dụng công thức $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ và tính toán tương tự như các bài trước.

☑ **Nhận xét.** Nếu bậc tử $P(n)$ lớn hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$. Để biết là $+\infty$ hay $-\infty$ ta dựa vào dấu của giới hạn hai nhân tử trong tích theo quy tắc “cùng dấu thì tích dương, trái dấu thì tích âm”. Thông thường, sẽ để trống $= \dots$ và xét dấu sẽ điền vào sau. Về trắc nghiệm, đó chính là dấu của tích hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 8 (Cánh Diều). Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(2 + \frac{1}{n^2} \right);$

b) $\lim \frac{4n - 3}{n};$

c) $\lim \left(5 + \frac{1}{n} \right) \left(6 - \frac{1}{4^n} \right).$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2.$$

$$\text{b) } \lim \frac{4n-3}{n} = \lim \left(\frac{4n}{n} - \frac{3}{n} \right) = \lim 4 - \lim \frac{3}{n} = 4 - 0 = 4.$$

$$\text{c) } \lim \left(5 + \frac{1}{n} \right) \left(6 - \frac{1}{4^n} \right) = \lim \left(5 + \frac{1}{n} \right) \cdot \lim \left[6 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] = 5 \cdot 6 = 30.$$

□

Ví dụ 9 (CTST). Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim \frac{3n+2}{2n-1}.$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Ta có } \frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \text{ (Chia cả tử và mẫu cho } n\text{).}$$

$$\text{Từ đó } \lim \frac{3n+2}{2n-1} = \lim \frac{3 + 2 \cdot \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim \left(3 + 2 \cdot \frac{1}{n} \right)}{\lim \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{\lim 3 + 2 \lim \frac{1}{n}}{\lim 2 - \lim \frac{1}{n}} = \frac{3 + 2 \cdot 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } \text{Ta có } \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2}} = \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}.$$

$$\text{Từ đó } \lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \lim \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim \left(9 + \frac{1}{n^2} \right)} = \sqrt{\lim 9 + \lim \frac{1}{n^2}} = \sqrt{9 + 0} = 3.$$

□

Ví dụ 10 (KNTT). Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2-1}.$

Lời giải.

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của n , rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{2}.$$

□

Ví dụ 11 (CTST). Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim \frac{3n+2}{2n-1}.$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Ta có } \frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \text{ (Chia cả tử và mẫu cho } n\text{).}$$

$$\text{Từ đó } \lim \frac{3n+2}{2n-1} = \lim \frac{3 + 2 \cdot \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim \left(3 + 2 \cdot \frac{1}{n} \right)}{\lim \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{\lim 3 + 2 \lim \frac{1}{n}}{\lim 2 - \lim \frac{1}{n}} = \frac{3 + 2 \cdot 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2}} = \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}.$$

$$\text{Từ đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{9+0} = 3.$$

□

Ví dụ 12 (Cánh Diều). Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{6^n}\right);$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2 \cdot 3^n}{5 + 6 \cdot 4^n};$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{6}{n^2}}{2^n}.$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{6^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6^n}\right) = 5 + 0 = 5.$$

$$b) \text{ Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2 \cdot 3^n}{5 + 6 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6} = \frac{1}{6}.$$

$$c) \text{ Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{6}{n^2}\right) = 3 \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \text{ nên } \frac{3 - \frac{6}{n^2}}{2^n} = 0.$$

□

Ví dụ 13. Tìm giới hạn sau $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}.$

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 4}{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = -4.$$

□

Ví dụ 14. Tìm giới hạn sau $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}.$

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - 2^{n+1}}{-1}}{\frac{1 - 3^{n+1}}{-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2^{n+1}) \cdot 2}{1 - 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \cdot 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} = 0.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 8n + 1}{5n^2 + 3};$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5n + 3}}{6n + 2};$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{3^n}\right);$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n};$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n}.$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{5}{2}.$$

b) Ta có $\lim \frac{6n^2 + 8n + 1}{5n^2 + 3} = \lim \frac{6 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{3}{n^2}} = \frac{6}{5}$.

c) Ta có $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 5n + 3}}{6n + 2} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}}{6 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{6}$.

d) Ta có $\lim \left(2 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim 2 - \lim \left(\frac{1}{3^n}\right) = 2 - 0 = 2$.

e) Ta có $\lim \frac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{4} = \frac{1}{4}$.

f) Vì $\lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$ và $\lim 3^n = +\infty$ nên $\lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n} = 0$.

Bài 6. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}.$$

Bài 7. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Bài 8. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3} = \lim \frac{9 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1} + 3} = \lim \frac{9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 4}{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = -4.$$

Bài 9. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n} = \lim \frac{\frac{1 - 2^{n+1}}{-1}}{\frac{1 - 3^{n+1}}{-2}} = \lim \frac{(1 - 2^{n+1}) \cdot 2}{1 - 3^{n+1}} = \lim \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \cdot 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} = 0.$$

Bài 10. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n).$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} = 1.$$

□

Bài 11. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim \frac{2^n + 3 \cdot 4^n}{4^n - 5 \cdot 3^n}.$$

$$\text{b) } T = \lim \frac{3 \cdot 7^n + 2 \cdot 4^n}{4 \cdot 5^n + 7^n}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim \frac{2^n + 3 \cdot 4^n}{4^n - 5 \cdot 3^n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{1 - 5 \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 3.$$

$$\text{b) } \text{Ta có } T = \lim \frac{3 \cdot 7^n + 2 \cdot 4^n}{4 \cdot 5^n + 7^n} = \lim \frac{3 + 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n}{4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} = 3.$$

□

Bài 12. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim \frac{-2n + 1}{n};$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{16n^2 - 2}}{n};$$

$$\text{c) } \lim \frac{4}{2n + 1};$$

$$\text{d) } \lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Ta có } \lim \frac{-2n + 1}{n} = \lim \frac{-2 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{2 + 0}{1} = -1.$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{16n^2 - 2}}{n} = \lim \frac{\sqrt{16 - \frac{2}{n^2}}}{1} = \lim \sqrt{16 - \frac{2}{n^2}} = \sqrt{16 - 0} = 4.$$

$$\text{c) } \text{Ta có } \lim \frac{4}{2n + 1} = \lim \frac{\frac{4}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{2 + 0} = 0.$$

$$\text{d) } \text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2} = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{2n^2} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Bài 13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{7n+1}{3n-1};$

b) $\lim \frac{5n^2+2n+4}{9n^2+3n-3};$

c) $\lim \frac{\sqrt{2n^2+3n+3}}{7n+2};$

d) $\lim \left(12 - \frac{1}{5^n}\right);$

e) $\lim \frac{5^n+3^n}{4 \cdot 5^n};$

f) $\lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{4^n}.$

Lời giải.

a) Ta có $\lim \frac{5n+1}{2n} = \lim \frac{5 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{5}{2}.$

b) Ta có $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3} = \lim \frac{6 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{3}{n^2}} = \frac{6}{5}.$

c) Ta có $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}}{6 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{6}.$

d) Ta có $\lim \left(2 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim 2 - \lim \left(\frac{1}{3^n}\right) = 2 - 0 = 2.$

e) Ta có $\lim \frac{3^n+2^n}{4 \cdot 3^n} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{4} = \frac{1}{4}.$

f) Vì $\lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$ và $\lim 3^n = +\infty$ nên $\lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n} = 0.$

□

Bài 14. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+5n+10}{3n^2+7}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{4n^2+2n}-2n).$

Lời giải.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = 1.$

□

Bài 15. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi

a) $u_n = \frac{n^2+1}{2n-1}.$

b) $v_n = \sqrt{2n^2+1}-n.$

Lời giải.

$$\text{a) } u_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1} = n \cdot \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}}.$$

$$\text{Hơn nữa } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}}{2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$\text{b) } v_n = \sqrt{2n^2 + 1} - n = n \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right).$$

$$\text{Hơn nữa } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Bài 16. Tính giới hạn $L = \lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + 2 \right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = \frac{4 - 0 - 0}{0 + 2} = 2.$$

Nhận xét. Nếu bậc tử $P(n)$ bằng bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\text{Hệ số bậc cao nhất của tử}}{\text{Hệ số bậc cao nhất của mẫu}}.$

Bài 17. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n^2 - n)^5 \cdot (4n - 1)^4}{20n^6 \cdot (2n^2 - n + 1)^4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]^5 \left[n \left(4 - \frac{2}{n} \right) \right]^4}{20n^6 \left[n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^4} \\ &= \lim \frac{n^{10} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^5 n^4 \left(4 - \frac{2}{n} \right)^4}{20n^6 n^8 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^4} \\ &= \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n} \right)^5 \left(4 - \frac{2}{n} \right)^4}{20 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^4} \\ &= \frac{(2 - 0)^5 \cdot (4 - 0)^4}{20 \cdot (2 - 0 + 0)^4} \\ &= \frac{128}{5}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Với bài toán có lũy thừa cao, ta thường rút bậc cao trong từng dấu ngoặc, sau đó áp dụng công thức $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ và tính toán tương tự như các bài trước.

Bài 18. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right) = 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

□

🔴 **Nhận xét.** Nếu bậc tử $P(n)$ nhỏ hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Bài 19. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$.

💬 **Lời giải.**

$$L = \lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(n \cdot \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} \right) = +\infty \text{ Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} = 2 > 0.$$

□

🔴 **Nhận xét.** Nếu bậc tử $P(n)$ lớn hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$. Để biết là $+\infty$ hay $-\infty$ ta dựa vào dấu của giới hạn hai nhân tử trong tích theo quy tắc “cùng dấu thì tích dương, trái dấu thì tích âm”. Thông thường, sẽ để trống $= \dots$ và xét dấu sẽ điền vào sau. Về trắc nghiệm, đó chính là dấu của tích hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

Bài 20. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 1)}{3n^2 + 4}$.

💬 **Lời giải.**

Xét cấp số cộng: $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n + 1$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 2$ và số hạng cuối là $u_m = 2n + 1$, ta có

$$u_1 + (m - 1)d = 2n + 1 \Leftrightarrow 1 + 2(m - 1) = 2n + 1 \Leftrightarrow m = n + 1.$$

Vậy cấp số cộng có $n + 1$ số hạng. Suy ra tổng

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = \frac{m}{2} (u_1 + u_m) = \frac{n + 1}{2} (1 + 2n + 1) = n^2 + 2n + 1.$$

Vì thế

$$L = \lim \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 4} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}.$$

□

🔴 **Nhận xét.** Cần nhớ công thức cấp số cộng:

- $u_{k+1} - u_k = d$, với d là công sai.
- $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với d là công sai.
- $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$, với $k \geq 2$.
- $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$.

Bài 21. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} \right]$.

💬 **Lời giải.**

Số hạng tổng quát $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; (\forall k = 1, 2, \dots, n)$. Do đó

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \frac{n}{n+1} \\ &= \lim \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

□

🔴 **Nhận xét.** Phân tích $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ với $a = \frac{1}{k+1} \Big|_{k=0} = 1$ và $b = \frac{1}{k} \Big|_{k=-1} = -1$.

Bài 22. Tính giới hạn $L = \lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \lim \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{3+0-0}{2+0} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 23. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^3 - n + 3}{2n^2 + 3n^3 - 1}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3} \right)} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{1-0+0}{0+3-0} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Bài 24. Tính giới hạn $L = \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{5n^3 - n(n^2 + n - 1)}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{4n^3 - n^2 + n} \\ &= \lim \frac{n^3 \left(6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \lim \frac{6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{6 - 0 + 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 25. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n^4 + 1)^2 (n + 2)^9}{n^{17} + 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n^4 \left(2 + \frac{1}{n^4} \right) \right]^2 \left[n \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right]^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}} \right)} \\ &= \lim \frac{n^8 \left(2 + \frac{1}{n^4} \right)^2 n^9 \left(1 + \frac{2}{n} \right)^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}} \right)} \\ &= \lim \frac{\left(2 + \frac{1}{n^4} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)^9}{\left(1 + \frac{1}{n^{17}} \right)} \\ &= \frac{(2 + 0)^2 \cdot (1 + 0)^9}{(1 + 0)} = 4. \end{aligned}$$

□

Bài 26. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n - 1)^2 (3 - 4n^3)}{(4n + 2)^3 (2 - n)^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]^2 \left[n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 4 \right) \right]}{\left[n \left(4 + \frac{2}{n} \right) \right]^3 \left[n \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \right]^2} \\ &= \lim \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)^2 n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 4 \right)}{n^3 \left(4 + \frac{2}{n} \right)^3 n^2 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)^2} \\ &= \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{3}{n^3} - 4 \right)}{\left(4 + \frac{2}{n} \right)^3 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2-0)^2 \cdot (0-4)}{(4+0)^3 \cdot (0-1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

□

Bài 27. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(3n^2 - 1)^3 (2n + 5)^2 (9n + 4)}{(2n - 4)^4 (2n^3 + 1) (2n^2 - 7)}.$

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(3 - \frac{1}{n^2} \right) \right]^3 \left[n \left(2 + \frac{5}{n} \right) \right]^2 \left[n \left(9 + \frac{4}{n} \right) \right]}{\left[n \left(2 - \frac{4}{n} \right) \right]^4 \left[n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) \right] \left[n^2 \left(2 - \frac{7}{n^2} \right) \right]} \\ &= \lim \frac{n^6 \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)^3 n^2 \left(2 + \frac{5}{n} \right)^2 n \left(9 + \frac{4}{n} \right)}{n^4 \left(2 - \frac{4}{n} \right)^4 n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) n^2 \left(2 - \frac{7}{n^2} \right)} \\ &= \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n^2} \right)^3 \left(2 + \frac{5}{n} \right)^2 \left(9 + \frac{4}{n} \right)}{\left(2 - \frac{4}{n} \right)^4 \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) \left(2 - \frac{7}{n^2} \right)} \\ &= \frac{(3-0)^3 \cdot (2+0)^2 \cdot (9+0)}{(2-0)^4 \cdot (2+0) \cdot (2-0)} \\ &= \frac{243}{16}. \end{aligned}$$

□

Bài 28. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(n^2 + 2)(n - 1)^3}{(n + 1)(2n^2 + 3)^2}.$

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \right] \left[n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]^3}{\left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \left[n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2} \right) \right]^2} \\ &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) n^3 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right) n^4 \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)^2} \\ &= \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)^2} \\ &= \frac{(1+0) \cdot (1-0)^3}{(1+0) \cdot (2+0)^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 29. Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n).$

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim \left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \right) \\
 &= \lim \frac{n^2 - 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \\
 &= \lim \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \\
 &= \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} \\
 &= \frac{-2}{\sqrt{1} + 1} = -1
 \end{aligned}$$

□

Bài 30. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5} \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5} \right) \\
 &= \lim \frac{n^2 + 7 - (n^2 + 5)}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} \\
 &= \lim \frac{2}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Bài 31. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right) \\
 &= \lim \frac{n^2 + 2n - (n^2 - 2n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}} \\
 &= \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}} \\
 &= \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} \\
 &= \frac{4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 2
 \end{aligned}$$

□

Bài 32. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim \left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} \right) \\
 &= \lim \frac{2n^2 - n + 1 - (2n^2 - 3n + 2)}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \\
 &= \lim \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \\
 &= \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Bài 33. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 20)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} L &= \lim 20 + \lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n) \\ &= 20 + \lim \frac{3n - 4}{\sqrt{9n^2 + 3n - 4} + 3n} \\ &= 20 + \lim \frac{n \left(3 - \frac{4}{n}\right)}{n \sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3n} \\ &= 20 + \lim \frac{3 - \frac{4}{n}}{\sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3} \\ &= 20 + \frac{3 - 0}{9 + 0 - 0} + 3 \\ &= \frac{41}{2}. \end{aligned}$$

Bài 34. Tính giới hạn $L = \lim \frac{7n^3 + 2n^2 + 1}{n^4 + 5n^3 + n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^3 \left(7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^4 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = 7$.

Bài 35. Tính giới hạn $L = \lim \frac{7n + 3}{2n^2 + 3n^3 + 4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n \left(7 + \frac{3}{n}\right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ và $\lim \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} = \frac{7}{3}$.

Bài 36. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{n^3 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1}{3}$.

Bài 37. Tính giới hạn $L = \lim \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^3 \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}\right)}{n^4 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} = -2$.

Bài 38. Tính giới hạn $L = \lim \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^4 \left(3 + \frac{5}{n^4}\right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ và $\lim \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} = -\frac{2}{3}$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 16. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2023}{3n + 2024}$.

(A) $I = \frac{2}{3}$.

(B) $I = \frac{3}{2}$.

(C) $I = \frac{2023}{2024}$.

(D) $I = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2023}{3n + 2024} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2023}{n}}{3 + \frac{2024}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

(A) $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

(B) $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

(C) $\lim \frac{1}{n} = 0$.

(D) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Lời giải.

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 1}$ bằng

(A) 1.

(B) 2.

(C) -1.

(D) 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2024}{2n + 1}$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 2024.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2024}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2024}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng

(A) 2.

(B) 0.

(C) $-\frac{3}{5}$.

(D) -3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^6}}{1 + \frac{5}{n}} = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{1 + n}$ được kết quả là

(A) 2.

(B) 0.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{1 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{1}{n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{2 + 0}{0 + 1} = 2.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 22. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

(A) $\frac{1}{n}$.

(B) $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(C) $\frac{n+1}{n}$.

(D) $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải.

Có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$.

Chọn đáp án (C)

Câu 23. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là

(A) 2.

(B) 0.

(C) $+\infty$.

(D) 4.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{2 + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2n}$, chọn $M = \frac{1}{100}$, để $\frac{1}{2n} < \frac{1}{100}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

(A) 51.

(B) 49.

(C) 48.

(D) 50.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2n > 100 \Leftrightarrow n > 50$.

Vậy n phải lấy từ số hạng thứ 51 trở đi.

Chọn đáp án (A)

Câu 25. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$ có kết quả là

(A) 0.

(B) $\frac{5}{4}$.

(C) $\frac{3}{4}$.

(D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{4}\right)^n}{1} = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 26. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

Chọn đáp án (C)

Câu 27. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $I = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = 1$

Chọn đáp án (A)

Câu 28. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2})$

(A) 3.

(B) 0.

(C) $\sqrt{3}$.(D) $\frac{3}{2}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } I = \lim (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}) = \lim \frac{3}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2}} = 0$$

Chọn đáp án (B)

Câu 29. Tính giới hạn $I = \lim (n - \sqrt{n^2 + 2n - 3})$

(A) 0.

(B) -2.

(C) -1.

(D) 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim (n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}) = \lim \frac{-2n + 3}{n + \sqrt{n^2 + 2n - 3}} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}} = -1$$

Chọn đáp án (C)

Câu 30. Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ (A) $\frac{1}{2}$.

(B) 1.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n) = \lim \frac{-n + 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 31. Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n)$ (A) $-\frac{1}{3}$.(B) $\frac{1}{3}$.

(C) 1.

(D) 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n) = \lim \frac{-n^2}{\sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} + n \sqrt[3]{(n^3 - n^2)} + n^2} = \lim \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{3}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 32. Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{2n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n})$

(A) 0.

(B) $\frac{1}{4}$.(C) $\frac{1}{2}$.(D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } I = \lim (\sqrt{2n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}) = \lim \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 2n - 1} + \sqrt{2n^2 + n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 33. Tính giới hạn $I = \lim n (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 8})$

(A) 0.

(B) ∞ .

(C) 2.

(D) $\frac{9}{2}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } I = \lim n (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 8}) = \lim \frac{9n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 8}} = \lim \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{8}{n^2}}} = \frac{9}{2}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 34. Giới hạn $\lim \frac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có kết quả bằng

(A) 0.

(B) $\frac{1}{32}$.(C) $\frac{3}{2}$.(D) $\frac{1}{2}$.**Lời giải.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{3}{n} - 1\right)^2}{\left(4 - \frac{5}{n}\right)^3} = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Dạng 3. Phương pháp lượng liên hợp (lim hữu hạn)

Sử dụng các hằng đẳng thức

$$\textcircled{a} \quad \sqrt{a} - b = \frac{(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)}{(\sqrt{a} + b)} = \frac{a - b^2}{(\sqrt{a} + b)}.$$

$$\textcircled{b} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}.$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 15 (KNTT). Tìm giới hạn sau $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} = 1.$$



Ví dụ 16. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{3n^2 - 2n} - \sqrt{3n^2 + 6n - 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim (\sqrt{3n^2 - 2n} - \sqrt{3n^2 + 6n - 1}) \\ &= \lim \frac{3n^2 - 2n - 3n^2 - 6n + 1}{\sqrt{3n^2 - 2n} + \sqrt{3n^2 + 6n - 1}} \\ &= \lim \frac{-8n + 1}{\sqrt{3n^2 - 2n} + \sqrt{3n^2 + 6n - 1}} \\ &= \lim \frac{-8 + \frac{1}{n}}{\sqrt{3 - \frac{2}{n}} + \sqrt{3 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



Ví dụ 17. Tìm giới hạn sau $\lim n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3}) \\ &= \lim \frac{n(n^2 + 1 - n^2 + 3)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} \\ &= \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} \\ &= \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$



Ví dụ 18. Tính giới hạn sau $\lim \frac{1}{\sqrt{9n^2 - n} - 3n}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim \frac{1}{\sqrt{9n^2 - n} - 3n} \\ &= \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} + 3n}{9n^2 - n - (3n)^2} \\ &= \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} + 3n}{-n} \\ &= \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n}} + 3}{-1} = -6. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 19. Tính giới hạn sau $\lim (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n + 2)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n + 2) \\ &= \lim \frac{n^2 + 3n + 2 - (n - 2)^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + (n - 2)} \\ &= \lim \frac{n^2 + 3n + 2 - (n^2 - 4n + 1)}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + n - 2} \\ &= \lim \frac{7n + 1}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + n - 2} \\ &= \lim \frac{7 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1 - \frac{2}{n}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 39. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n^2 - 3n} - n) &= \lim \frac{n^2 - 3n - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} \\ &= \lim \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 40. Tính giới hạn sau $\lim (\sqrt{5n^2 + 3} - \sqrt{5n^2 - 6n})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{5n^2 + 3} - \sqrt{5n^2 - 6n}) &= \lim \frac{5n^2 + 3 - 5n^2 + 6n}{\sqrt{5n^2 + 3} + \sqrt{5n^2 - 6n}} \\ &= \lim \frac{\frac{3}{n} + 6}{\sqrt{5 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{5 - \frac{6}{n}}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

□

Bài 41. Tính giới hạn sau $\lim n(n - \sqrt{n^2 + 2})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim n(n - \sqrt{n^2 + 2}) &= \lim \frac{n(n^2 - n^2 - 2)}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{-2n}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = -1.\end{aligned}$$

□

Bài 42. Tính giới hạn sau $\lim \frac{2}{(2n + 1 - \sqrt{4n^2 - 3n})}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim \frac{2}{(2n + 1 - \sqrt{4n^2 - 3n})} &= \lim \frac{2(2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 3n})}{(2n + 1)^2 - (4n^2 - 3n)} \\ &= \lim \frac{2(2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 3n})}{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 3n} \\ &= \lim \frac{2\left(2 + \frac{1}{n} + \sqrt{4 - \frac{3}{n}}\right)}{7 + \frac{1}{n}} = \frac{8}{7}.\end{aligned}$$

□

Bài 43. Tính giới hạn sau $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2} &= \lim \frac{n^2 - n}{(3n + 2)(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n + 1})} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 35. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{n^2 + 1} - n)$

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{n^2 + 1} - n) &= \lim \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 36. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{4n^2 - 3} - 2n)$

(A) $-\infty$.

(B) -3 .

(C) 0 .

(D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{4n^2 - 3} - 2n) &= \lim \frac{4n^2 - 3 - (2n)^2}{\sqrt{4n^2 - 3} + 2n} \\ &= \lim \frac{-\frac{3}{n}}{\sqrt{4 - \frac{3}{n}} + 2} = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 37. Tính các giới hạn sau $\lim (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$.

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) 0 .

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) &= \lim \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= \lim \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 38. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n)$.

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $+\infty$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 0 .

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) &= \lim \frac{4n^2 + 3n - (2n)^2}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} \\ &= \lim \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2} = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 39. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{-3}{\sqrt{16n^2 - 5n} - 4n}$.

(A) $-\frac{24}{5}$.

(B) $+\infty$.

(C) $\frac{24}{5}$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim \frac{-3}{\sqrt{16n^2 - 5n} - 4n} &= \lim \frac{-3(\sqrt{16n^2 - 5n} + 4n)}{16n^2 - 5n - (4n)^2} \\ &= \lim \frac{-3\left(\sqrt{16 - \frac{5}{n}} + 4\right)}{-5} = \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 40. Tìm giới hạn sau $\lim (\sqrt{9n^2 - n} - 3n)$.

(A) 0 .

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $-\infty$.

(D) $-\frac{1}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{9n^2 - n} - 3n) &= \lim \frac{9n^2 - n - (3n)^2}{\sqrt{9n^2 - n} + 3n} \\ &= \lim \frac{-1}{\sqrt{9 - \frac{1}{n}} + 3} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 41. Tìm giới hạn sau $\lim (n - \sqrt{n^2 + 2n})$.

(A) 1.

(B) $-\infty$.

(C) -1 .

(D) 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (n - \sqrt{n^2 + 2n}) &= \lim \frac{n^2 - (n^2 + 2n)}{n + \sqrt{n^2 + 2n}} \\ &= \lim \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = -1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 42. Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$.

(A) $I = 1$.

(B) $I = -1$.

(C) $I = 0$.

(D) $I = +\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}I = \lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n) &= \lim \frac{(n^2 - 2n + 3) - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \\ &= \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 43. Tìm giới hạn sau $\lim (n + 2 - \sqrt{n^2 - 4n})$.

(A) 0.

(B) 4.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim (n + 2 - \sqrt{n^2 - 4n}) &= \lim \frac{(n + 2)^2 - (n^2 - 4n)}{(n + 2) + \sqrt{n^2 - 4n}} \\ &= \lim \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 + 4n}{n + 2 + \sqrt{n^2 - 4n}} \\ &= \lim \frac{8 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \sqrt{1 - \frac{4}{n}}} = 4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 44. Tính giới hạn $\lim (\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n + 8)$ ta được kết quả

(A) $\frac{25}{3}$.

(B) $-\infty$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n + 8) = \lim \frac{9n^2 + 2n - (3n - 8)^2}{\sqrt{9n^2 + 2n} + (3n - 8)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{9n^2 + 2n - 9n^2 + 48n - 64}{\sqrt{9n^2 + 2n} + (3n - 8)} \\
 &= \lim \frac{50 - \frac{64}{n}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n}} + 3 - \frac{8}{n}} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 45. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{2}{2n - 3 - \sqrt{4n^2 + 3n}}$.

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) $-\frac{8}{15}$.

(D) $-\frac{8}{9}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \lim \frac{2}{2n - 3 - \sqrt{4n^2 + 3n}} &= \lim \frac{2(2n - 3 + \sqrt{4n^2 + 3n})}{(2n - 3)^2 - (4n^2 + 3n)} \\
 &= \lim \frac{2(2n - 3 + \sqrt{4n^2 + 3n})}{4n^2 - 12n + 9 - 4n^2 - 3n} \\
 &= \lim \frac{2\left(2 - \frac{3}{n} + \sqrt{4 + \frac{3}{n}}\right)}{-15} = -\frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 46. Biết $\lim \left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{11}n + 3} - n \right) = a$, với $a \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a^2 + 1$.

(A) $\frac{485}{484}$.

(B) $\frac{483}{484}$.

(C) $\frac{1}{121}$.

(D) $\frac{1}{484}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\lim \left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{11}n + 3} - n \right) = \lim \frac{-\frac{1}{11}n + 3}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{11}n + 3} + n} = \lim \frac{-\frac{1}{11} + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{11n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -\frac{1}{22}.$$

$$\text{Vậy } P = a^2 + 1 = \left(-\frac{1}{22}\right)^2 + 1 = \frac{485}{484}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 47. Biết giới hạn $\lim [n(\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt{9n^2 + 2})] = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị $a^2 + b$ bằng

(A) 31.

(B) 7.

(C) 84.

(D) 37.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim [n(\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt{9n^2 + 2})] = \lim \frac{n}{\sqrt{9n^2 + 3} + \sqrt{9n^2 + 2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{9 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $a = 1, b = 6$. Do đó $a^2 + b = 1^2 + 6 = 7$.

Chọn đáp án (B)

Câu 48. Biết $\lim (2n - \sqrt{4n^2 + an + 3}) = 1$, giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(-5; 0)$.

(B) $(1; 5)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $(-1; 3)$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \lim (2n - \sqrt{4n^2 + an + 3}) &= \lim \frac{-an - 3}{2n + \sqrt{4n^2 + an + 3}} \\
 &= \lim \frac{-a - \frac{3}{n}}{2 + \sqrt{4 + \frac{a}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \frac{-a}{4}
 \end{aligned}$$

Suy ra $-\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = -4$. Vậy $a \in (-5; 0)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 49. Biết $L = \lim (\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt{an^2 + bn}) = 1$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = -4$. (C) $S = 7$. (D) $S = -7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L = \lim (\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt{an^2 + bn}) &= \lim \frac{(4-a)n^2 + (3-b)n}{n \left(\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + \sqrt{a + \frac{b}{n}} \right)} \\ &= \lim \frac{(4-a)n + 3-b}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + \sqrt{a + \frac{b}{n}}} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } L = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4-a=0 \\ \frac{3-b}{2+\sqrt{a}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow S=3.$$

Chọn đáp án (A)

Dạng 4. Giới hạn vô cực

Ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim -u_n = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số

Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số nguyên dương.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \text{ nếu } q > 1$$

Định lí:

$$\text{Nếu } \lim u_n = a > 0 \text{ và } \lim v_n = 0 \text{ với } v_n > 0 \text{ thì } \lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$$

$$\text{Nếu } \lim u_n = +\infty \text{ và } \lim v_n = a > 0 \text{ thì } \lim u_n v_n = +\infty$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 20. Chứng minh rằng $\lim n^2 = +\infty$.

Lời giải.

Xét dãy số $(u_n) = n^2$. Với M là số dương bất kì, ta thấy: $u_n > M \Leftrightarrow n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}$.

Vậy với các số tự nhiên $n > \sqrt{M}$ thì $u_n > M$. Do đó, $\lim n^2 = +\infty$.

Ví dụ 21. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } n^2 - 2n = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} \right). \text{ Hơn nữa } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 1.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n) = +\infty.$$

Ví dụ 22 (CTST). Tìm giới hạn $\lim q^n$ với $q > 1$.

Lời giải.

$$\text{Từ } q > 1 \text{ suy ra } 0 < \frac{1}{q} < 1. \text{ Do đó, } \lim \frac{1}{q^n} = \lim \left(\frac{1}{q} \right)^n = 0.$$

$$\text{Mà } q^n > 0 \text{ với mọi } n \text{ nên } \lim q^n = +\infty.$$

Ví dụ 23 (Cùng khám phá). Tìm $\lim(-n^4)$.

Lời giải.

Vì $\lim(n^4) = +\infty$ nên $\lim(-n^4) = -\infty$. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 44. Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3 + n^2 + n + 1)$.

b) $\lim(n^2 - n\sqrt{n} + 1)$.

Lời giải.

a) $\lim(n^3 + n^2 + n + 1) = \lim n^3 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$.

b) $\lim(n^2 - n\sqrt{n} + 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$. □

Bài 45. Tìm giới hạn

a) $\lim \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$.

b) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

c) $\lim(n + \sqrt{n^2 - n + 1})$.

Lời giải.

a) $\lim \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9} = \lim \frac{n^2 + n - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3}} = \lim \frac{n^2 + n}{4} = +\infty$.

b) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} = \lim \frac{n^2 \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{n + 12} = \lim \frac{n \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{12}{n}} = +\infty$.

c) $\lim(n + \sqrt{n^2 - n + 1}) = n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = \lim 2n = +\infty$ □

Bài 46. Tìm giới hạn

a) $\lim \sqrt{5n^2 - 8n + 7}$.

b) $\lim \sqrt{n^3 - 5n + 6}$.

Lời giải.

a) $\lim \sqrt{5n^2 - 8n + 7} = \lim n \sqrt{5 - \frac{8}{n} + \frac{7}{n^2}} = +\infty$.

b) $\lim \sqrt{n^3 - 5n + 6} = \lim n \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = +\infty$. □

Bài 47. Tìm giới hạn

a) $\lim \frac{\sqrt{5n^4 - 8n^2 + 10}}{4n + 5}$.

b) $\lim \frac{n^2 - 15n + 11}{\sqrt{n^2 - 8n + 7}}$.

Lời giải.

a) $\lim \frac{\sqrt{5n^4 - 8n^2 + 10}}{4n + 5} = \lim \frac{n^2 \sqrt{5 - \frac{8}{n^2} + \frac{10}{n^4}}}{4n + 5} = \frac{n \sqrt{5 - \frac{8}{n^2} + \frac{10}{n^4}}}{4 + \frac{5}{n}} = \lim \frac{n\sqrt{5}}{4} = +\infty$.

b) $\lim \frac{n^2 - 15n + 11}{\sqrt{n^2 - 8n + 7}} = \lim \frac{n - 15 + \frac{11}{n}}{\sqrt{1 - \frac{8}{n} + \frac{7}{n^2}}} = +\infty$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 50. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$.

(A) $L = +\infty$.

(B) $L = 0$.

(C) $L = \frac{1}{3}$.

(D) $L = -\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left[n \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{1 - 2 \cdot 0}{3 + 0 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{3} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Kết quả của $\lim \left(\frac{4}{3}\right)^n$ bằng

(A) 0.

(B) 3.

(C) 4.

(D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. $\lim(2n + 3)$ bằng

(A) $+\infty$.

(B) 3.

(C) 5.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim(2n + 3) = \lim \left[n \left(2 + \frac{3}{n} \right) \right] = +\infty.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng dương vô cực?

(A) $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$.

(B) $\lim \frac{n^2 + 3n^3 + 2}{n^2 + n}$.

(C) $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$.

(D) $\lim \frac{n^2 - n + 1}{1 - 2n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{A} \lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{B} \lim \frac{n^2 + 3n^3 + 2}{n^2 + n} = \lim n \cdot \frac{\frac{1}{n} + 3 + \frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n} + 1} = +\infty \text{ (do } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{1}{n} + 3 + \frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n} + 1} = 3 > 0. \end{cases})$$

$$\textcircled{C} \lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n} = \lim \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 0.$$

$$\textcircled{D} \lim \frac{n^2 - n + 1}{1 - 2n} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - 2} = -\infty \text{ (do } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - 2} = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases})$$

Chọn đáp án (B)

Câu 54. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

(A) $\lim \frac{1+2^{n+1}}{1-3^n}$.

(B) $\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$.

(C) $\lim n (\sqrt{n+1} - \sqrt{2n+1})$.

(D) $\lim \frac{1-3n^2}{2n^3+1}$.

Lời giải.

Xét $L = \lim n (\sqrt{n+1} - \sqrt{2n+1}) = \lim n\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right)$ có

(A) $\lim n\sqrt{n} = +\infty$.

(B) $\lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0$.

Suy ra $L = -\infty$.

Chọn đáp án (C)

Câu 55. Tính $\lim(3+2n+n^3)$.

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) -1.

Lời giải.

Ta có $\lim(3+2n+n^3) = \lim \left[n^3 \left(\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^2} + 1 \right) \right] = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \left(\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^2} + 1 \right) = 1 > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 56. Tính $\lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{-n^2 - 2}$.

(A) 0.

(B) -2.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(-1 - \frac{2}{n^2} \right)} = \lim n \cdot \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-1 - \frac{2}{n^2}} = -\infty$.

Vì $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-1 - \frac{2}{n^2}} = -2 \end{cases}$

Chọn đáp án (D)

Câu 57. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

(A) $\lim (-3n^4 + 3) = -\infty$.

(B) $\lim (-3n^4 + 3) = 0$.

(C) $\lim (-n^4 + 2) = +\infty$.

(D) $\lim (5n^4 - 2) = -\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim (-3n^4 + 3) = -\infty$ là mệnh đề đúng.

$\lim (-3n^4 + 3) = -\infty$.

$\lim (-n^4 + 2) = -\infty$.

$\lim (5n^4 - 2) = +\infty$

Chọn đáp án (A)

Câu 58. $\lim (3^n - 4^n)$ có giá trị bằng

(A) 1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim (3^n - 4^n) = \lim 4^n \cdot \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right] = -\infty$.

Chọn đáp án (C)

Câu 59. $\lim(2 - 3n)^4(n + 1)^3$ có giá trị bằng

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) 2.

(D) 81.

Lời giải.

Ta có $\lim(2 - 3n)^4(n + 1)^3 = \lim n^7 \left(\frac{2}{n} - 3\right)^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 81 \lim n^7 = +\infty$.

Chọn đáp án (B)

Câu 60. Tìm giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 + 1} - 2n)$.

(A) $+\infty$.

(B) 0.

(C) $-\frac{2}{3}$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

☑ Cách 1. $\lim(\sqrt{n^2 + 1} - 2n) = \lim n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 2\right) = -\infty$
(vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 2\right) = -1 < 0$).

☑ Cách 2. $\lim(\sqrt{n^2 + 1} - 2n) = \lim \frac{n^2 + 1 - 4n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + 2n} = \lim \frac{-3n + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 2} = -\infty$.

Chọn đáp án (D)

Dạng 5. Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn

⇨ **Định nghĩa 1.5.** Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 24 (Cánh diều). Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

Lời giải.

a) Ta có $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$.

b) Ta có $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Khi đó $\lim S_n = \lim \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$.

Ví dụ 25 (Cánh diều). Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

Lời giải.

Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) , có $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$ nên

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

Ví dụ 26 (Cánh diều). Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 27 (CTST). Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots$.

Lời giải.

Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{4}$ nên

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

□

Ví dụ 28 (CTST). Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0,666\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots$$

Hãy viết $0,666\dots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Số $0,666\dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $0,6$ và công bội bằng $\frac{1}{10}$.

$$\text{Do đó } 0,666\dots = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

□

Ví dụ 29. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.

□

Ví dụ 30. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,222\dots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $2,222\dots = 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots = 2 + 2 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2$, $q = 10^{-1}$ nên

$$2,222\dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

□

Ví dụ 31 (Cùng khám phá). Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$

Lời giải.

S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3}.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 48. Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

- a) So sánh $|q|$ với 1.
b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

Lời giải.

a) Ta có $|q| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$.

b) Ta có $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Khi đó $\lim S_n = \lim \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2$.

□

Bài 49. Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

Lời giải.

Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) , có $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$ nên

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

Bài 50. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \dots$

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{3}$.

□

Bài 51. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,222\dots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $2,222\dots = 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots = 2 + 2 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2$, $q = 10^{-1}$ nên

$$2,222\dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

□

Bài 52. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$.

□

Bài 53. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4} \right)^n + \dots$

Lời giải.

Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{4}$ nên

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

□

Bài 54. Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn

$$0,666\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots$$

Hãy viết $0,666\dots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Số $0,666\dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $0,6$ và công bội bằng $\frac{1}{10}$.

$$\text{Do đó } 0,666\dots = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

□

Bài 55. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$

Lời giải.

Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{3}$ nên

$$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 61. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \dots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ bằng

(A) $\frac{u_1}{q-1}.$

(B) $\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}.$

(C) $\frac{u_1}{1+q}.$

(D) $\frac{u_1}{1-q}.$

Lời giải.

Theo định nghĩa cấp số nhân lùi vô hạn ta chứng minh được.

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots + u_1q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 62. Gọi $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Khi đó, $\lim S$ bằng

(A) $\frac{3}{4}.$

(B) $\frac{1}{4}.$

(C) $\frac{1}{2}.$

(D) $1.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \\ \Leftrightarrow S &= -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n}\right) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{-1}{3}} \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Suy ra $\lim S = \lim \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 63. Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{9}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 64. Tính $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$. Kết quả là

(A) $\frac{27}{2}$.

(B) 14.

(C) 16.

(D) 15.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 13 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 13 + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 65. Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}, \dots$ là

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $-\frac{2}{3}$.

(D) 2.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \dots = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 66. Gọi $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$. Giá trị của S bằng

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 4.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án (A)

Câu 67. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,233333\dots$ biểu diễn dưới dạng số là

(A) $\frac{1}{23}$.

(B) $\frac{2333}{10000}$.

(C) $\frac{23333}{10^5}$.

(D) $\frac{7}{30}$.

🗨️ **Lời giải.**

$0,233333\dots = 0,2 + 3 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = 0,2 + 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 68. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,212121\dots$ biểu diễn dưới dạng phân số là

(A) $\frac{2121}{10^4}$.

(B) $\frac{1}{21}$.

(C) $\frac{7}{33}$.

(D) $\frac{212121}{10^6}$.

🗨️ **Lời giải.**

$0,212121\dots = 21 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right) = 21 \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{7}{33}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 69. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\dots$ được biểu diễn bằng phân số:

(A) $\frac{2714}{9900}$.

(B) $\frac{2617}{9900}$.

(C) $\frac{2786}{9900}$.

(D) $\frac{2687}{9900}$.

🗨️ **Lời giải.**

$0,271414\dots = 0,27 + 14 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = 0,27 + 14 \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{100} + \frac{7}{4950} = \frac{2687}{9900}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 70. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$ là

(A) $-\frac{1}{3}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) -1 .

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$ có $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Có } S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \dots = \frac{(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 71. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\dots$ được biểu diễn bởi phân số

(A) $\frac{47}{90}$.

(B) $\frac{46}{90}$.

(C) $\frac{6}{11}$.

(D) $\frac{43}{90}$.

Lời giải.

Ta có

$$0,511111\dots = 0,5 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{90} = \frac{23}{45}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 72. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \dots$ là

(A) $-\frac{2}{3}$.

(B) 1 .

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 73. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ là

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{8}{3}$.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

Cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 74. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, \dots$ là

(A) 4 .

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{3}{4}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{3}, q = -\frac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 75. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\dots$ được biểu diễn bởi phân số?

(A) $\frac{1706}{9900}$.

(B) $\frac{153}{990}$.

(C) $\frac{164}{990}$.

(D) $\frac{853}{4950}$.

Lời giải.

$$0,17232323 \dots = 0,17 + 23 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = \frac{17}{100} + 23 \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{9900} = \frac{853}{4950}.$$

Chọn đáp án **(D)**



Dạng 6. Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

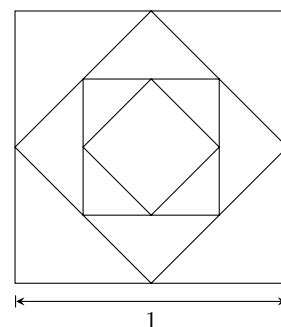
$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 32 (Cánh diều).

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n .
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Lời giải.

- Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.

Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

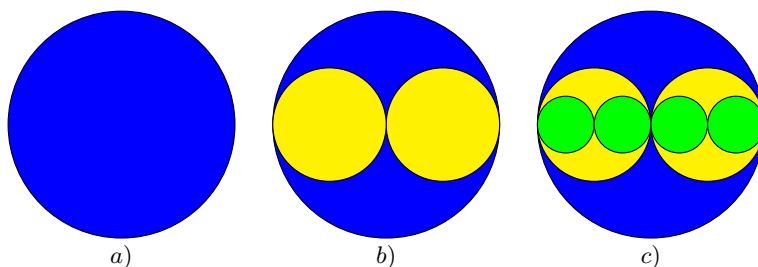
- Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$



Ví dụ 33 (CTST). Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng

lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



Hình 3

Lời giải.

Diện tích của các hình tròn trong các lần cắt là

- Lần thứ 1: $S_1 = \pi R^2$.
- Lần thứ 2: $S_2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.
- Lần thứ 3: $S_3 = 4 \cdot \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2^2}$.

d) Lần thứ n : $S_n = \frac{\pi R^2}{2^{n-1}}$.

Do đó diện tích các hình tròn lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $S_1 = \pi R^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên tổng diện tích các hình tròn là

$$S_1 + S_2 + \dots = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2.$$

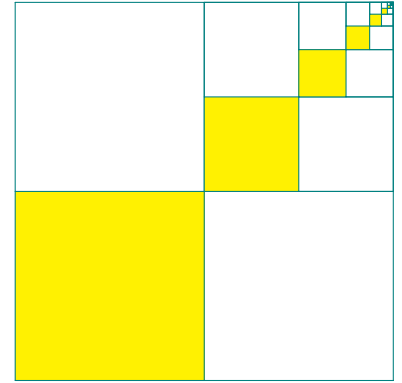
□

Ví dụ 34.

Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (Hình vẽ bên). Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.



Lời giải.

a) Độ của các hình vuông sau khi tô màu

- ☑ Lần thứ 1: $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;
- ☑ Lần thứ 2: $u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- ☑ Lần thứ 3: $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;
- ☑ Lần thứ n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Vậy $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

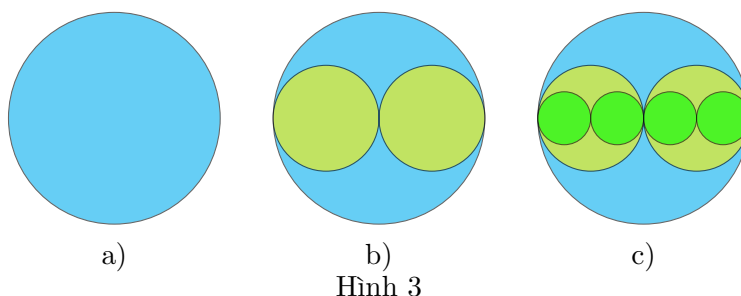
b) Độ dài các cạnh hình vuông lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 56. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



Hình 3

Lời giải.

Diện tích của hình tròn bán kính R là $S_1 = \pi \cdot R^2 \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ là $S_2 = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ là $S_3 = \pi \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 \text{ cm}^2$.

Tổng diện tích của các hình tròn là

$$S_n = S_1 + 2 \cdot S_2 + 4 \cdot S_3 + \dots = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

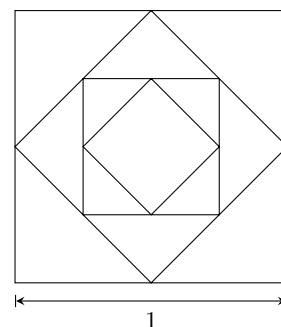
Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = \pi \cdot R^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên $S_n = \frac{\pi \cdot R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi \cdot R^2$.

□

Bài 57.

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n .
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

**Lời giải.**

- Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.

Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

- Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

□

Bài 58. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải.

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 1 là $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 2 là $u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 3 là $u_3 = \frac{1}{2} \cdot u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^3}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ n là $u_n = \frac{1}{2^n}$ kg.

b) $\lim u_n = \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

c) Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g = 10^{-9} kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kì bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.



Bài 59. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

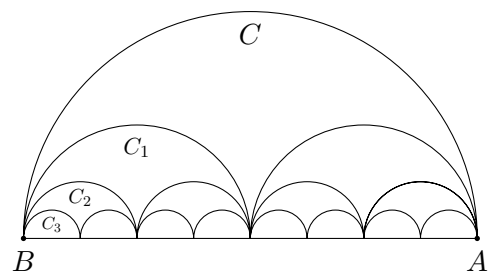
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ...

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n , S_n .

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} p_n &= 2^n \cdot \pi r = 2^n \cdot \pi \cdot \frac{AB}{2 \cdot 2^n} \\ &= \frac{\pi AB}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2R}{2} \\ &= \pi R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2^n \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AB}{2 \cdot 2^n} \right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2R}{2 \cdot 2^n} \right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2} \pi \frac{R^2}{(2^n)^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

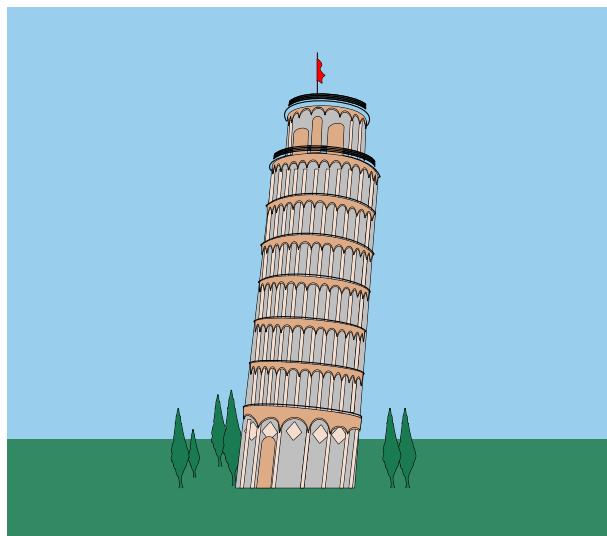
$$b) \lim p_n = \lim (\pi R) = \pi R.$$

$$\lim S_n = \lim \frac{\pi R^2}{2^{n+1}} = 0 \text{ (Vì } \lim (\pi R^2) = \pi R^2 \text{ và } \lim 2^{n+1} = +\infty).$$

□

Bài 60.

Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

**Lời giải.**

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:

Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55,8$.

Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n ($n > 1$) là

$$d_n = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \lim d_n.$$

Vì $2 \cdot \frac{55,8}{10}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}; \dots; 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \frac{2 \cdot \frac{55,8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12,4.$$

Vậy $d = 55,8 + 12,4 = 68,2$ m.

□

Bài 61. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải.

a) Ta có $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ lần lượt là chu vi của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

$$p_1 = 3a$$

$$p_2 = 3 \cdot \frac{1}{2}a$$

...

$$p_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a$$

$$\text{suy ra } \lim p_n = \lim 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a = 0.$$

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

...

$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{suy ra } \lim S_n = \lim \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0.$$

b) Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (p_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$ và

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \lim (p_n) = \frac{p_1}{1-q} = \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a.$$

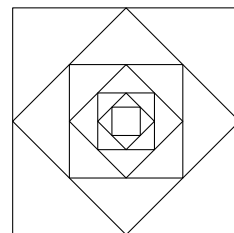
Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (S_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$ và

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \lim (S_n) = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

□

Bài 62.

Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

- a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).
- b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Lời giải.

a) Ta có hình vuông thứ nhất có cạnh bằng 1, hình vuông thứ hai có cạnh bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hình vuông thứ ba có cạnh bằng $\frac{1}{2}$.

Suy ra hình vuông thứ n có cạnh bằng $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

Diện tích của hình vuông thứ n là $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $a_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

$$\lim S_n = \lim 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 \left[\lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2.$$

b) Hình vuông thứ nhất có chu vi bằng 4, hình vuông thứ 2 có chu vi là $2\sqrt{2}$, hình vuông thứ 3 có chu vi là 2.

Suy ra hình vuông thứ n có chu vi bằng $p_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $p_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

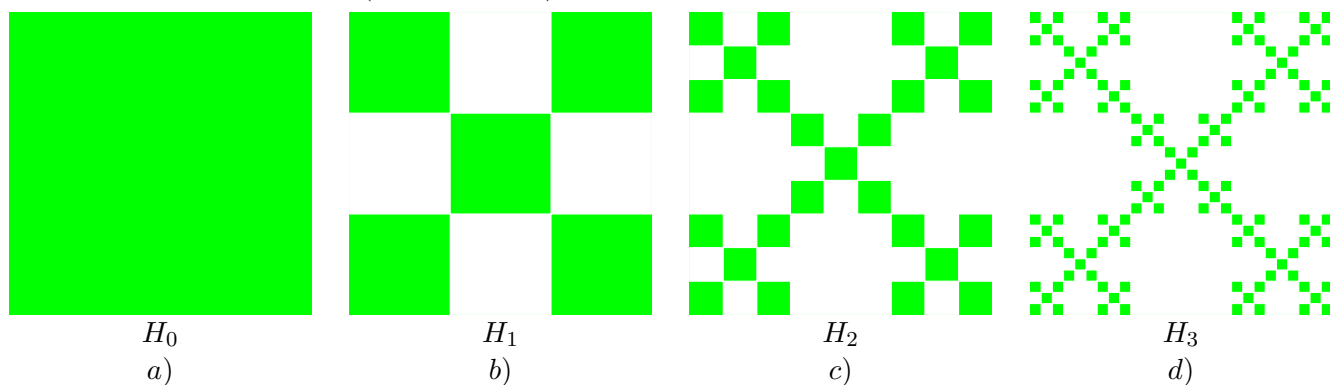
$$Q_n = \frac{p_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = (8 + 4\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right].$$

$$\lim Q_n = (8 + 4\sqrt{2}) \lim \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = (8 + 4\sqrt{2})(1 - 0) = 8 + 4\sqrt{2}.$$

□

Bài 63. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Lời giải.

a) Hình vuông H_1 có diện tích $S_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

Hình vuông H_2 có diện tích $S_2 = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2$.

Hình vuông H_n có diện tích $S_n = 5^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^n$.

$\lim S_n = \lim \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$.

b) Hình vuông H_1 có chu vi $p_1 = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{5}{3}$.

Hình vuông H_2 có chu vi $p_2 = 5^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2$.

Hình vuông H_n có diện tích $p_n = 5^n \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

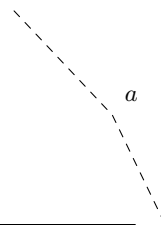
$\lim p_n = \lim 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$.

□

Bài 64.

Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình bên). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$

Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

**Lời giải.**

Gọi S_i và C_i ($i = 1, 2, \dots$) lần lượt là diện tích và chu vi của tam giác H_i , $i = 1, 2, \dots$

Khi đó ta có

• $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{S_1}{4}; S_3 = \frac{1}{4}S_2, \dots$

Do đó (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $q_1 = \frac{1}{4}$.

Tổng diện tích $S = S_1 + S_2 + \dots = \frac{S_1}{1 - q_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

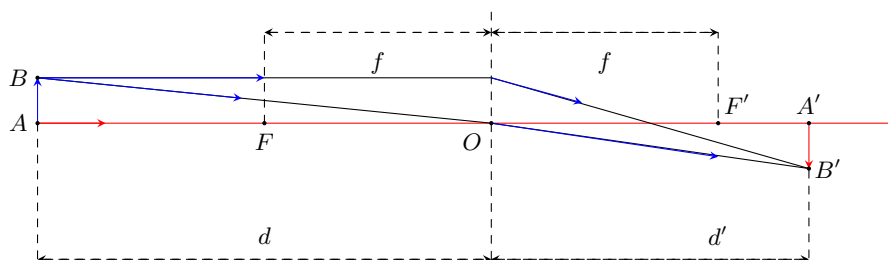
• $C_1 = 3a; C_2 = \frac{3a}{2} = \frac{1}{2}C_1, \dots$

Do đó (C_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với $C_1 = 3a; q_2 = \frac{1}{2}$.

Tổng chu vi là $C = C_1 + C_2 + \dots = \frac{C_1}{1 - q_2} = 6a$.

□

Bài 65. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải.

a) Ta có

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f}.$$

$$\text{Vậy } \varphi(d) = \frac{df}{d-f}.$$

b) Vì $\lim_{d \rightarrow f^+} df = f^2$; $\lim_{d \rightarrow f^+} (d-f) = 0$; $d \rightarrow f^+ \Rightarrow d-f > 0$ nên $\lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty$.

$$\text{Vậy } \lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty.$$

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm ngoài tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh thật ngược chiều với vật ở vô cùng.

Vì $\lim_{d \rightarrow f^-} df = f^2$; $\lim_{d \rightarrow f^-} (d-f) = 0$; $d \rightarrow f^- \Rightarrow d-f < 0$ nên $\lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty$.

$$\text{Vậy } \lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty.$$

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm trong tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh ảo cùng chiều với vật và nằm ở vô cùng.

Vì không tồn tại $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ nên không tồn tại $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 76. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kỳ bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n . Sau ít nhất bao nhiêu chu kỳ bán rã thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 24.

(B) 30.

(C) 100.

(D) 15.

Lời giải.

Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g = 10^{-9} kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kỳ thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 77. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kỳ bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n . Sau ít nhất bao nhiêu năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 30.

(B) 2400.

(C) 720000.

(D) 10000.

Lời giải.

Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g = 10^{-9} kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kỳ bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 78. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.

Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 79. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông. Tính tổng chu vi của dãy các hình vuông trên.

- (A) $8 + \sqrt{2}$. (B) $2 + \sqrt{2}$. (C) $8 + 4\sqrt{2}$. (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hình vuông thứ nhất có chu vi bằng 4, hình vuông thứ 2 có chu vi là $2\sqrt{2}$, hình vuông thứ 3 có chu vi là 2.

Suy ra hình vuông thứ n có chu vi bằng $p_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $p_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$Q_n = \frac{p_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = (8 + 4\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right].$$

$$\lim Q_n = (8 + 4\sqrt{2}) \lim \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = (8 + 4\sqrt{2})(1 - 0) = 8 + 4\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 80. Bạn An thả quả bóng từ độ cao 6 m so với mặt đất xuống theo phương thẳng đứng sau đó bóng nảy lên rồi lại rơi xuống cứ như vậy cho đến khi bóng dừng lại trên mặt đất. Tính quãng đường mà bóng đã di chuyển biết rằng sau mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên đến độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao của lần ngay trước đó.

- (A) 30 m. (B) 18 m. (C) 24 m. (D) 48 m.

Lời giải.

Ta thấy độ cao của quả bóng mỗi lần nảy lên là một cấp số nhân với $u_1 = 6$, $q = \frac{3}{4}$. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là quãng đường mà quả bóng đã di chuyển đến khi dừng lại, khi đó

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{6}{1-\frac{3}{4}} = 24 \text{ m.}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 81. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước

đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

(A) 58,8.

(B) 67,2.

(C) 68.

(D) 68,2.

Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:

Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55,8$.

Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n ($n > 1$) là

$$d_n = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \lim d_n.$$

Vì $2 \cdot \frac{55,8}{10}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}; \dots; 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \frac{2 \cdot \frac{55,8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12,4.$$

Vậy $d = 55,8 + 12,4 = 68,2$ m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Lấy A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của đoạn BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của đoạn B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ; ...; cứ tiếp tục như thế cho đến $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ lần lượt là trung điểm của đoạn B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n . Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots$ lần lượt là diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

(B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{15}$.

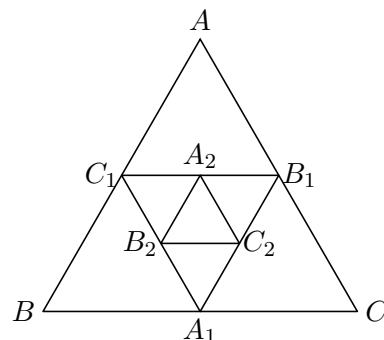
(C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

(D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$ là các tam giác đều nên

diện tích của các tam giác bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.



☑ Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh $\frac{1}{2}a$ nên $S_1 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

☑ Tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh $\frac{1}{4}a = \frac{1}{2^2}a$ nên $S_2 = \left(\frac{1}{2^2}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

☑ Tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh $\frac{1}{8}a = \frac{1}{2^3}a$ nên $S_3 = \left(\frac{1}{2^3}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

☑ ...

☑ Như vậy tam giác $A_n B_n C_n$ có cạnh $\frac{1}{2^n}a$ nên $S_n = \left(\frac{1}{2^n}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

☑ ...

Khi đó, dãy $S_1, S_2, S_3, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ và công bội $q = \frac{1}{4}$ nên

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

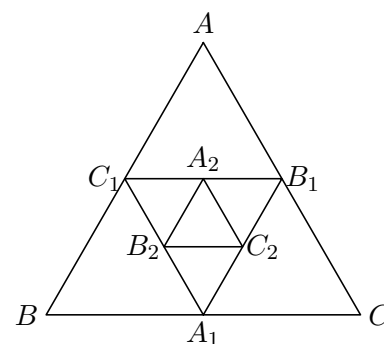
$$\text{Vậy } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 83.

Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, \dots$ sao cho $A_1 B_1 C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_n B_n C_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_n B_n C_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.



(A) 4π .

(B) 10π .

(C) 11π .

(D) 6π .

🗨️ Lời giải.

$$\text{Ta có: } S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3\pi;$$

$$S_2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$S_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot S_2$$

Ta có $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n; \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

$$\text{Suy ra } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{3\pi}{1-\frac{1}{4}} = 4\pi.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 84. Từ một hình vuông có diện tích là 1m^2 . Gọi A, B, C, D lần lượt là trung điểm bốn cạnh của hình vuông, bạn Hùng dùng bút chì vẽ theo hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ hai. Bạn Hùng lại tiếp tục vẽ theo bốn trung điểm các cạnh của hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ ba, và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích tất cả các hình vuông đã có.

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) $\frac{1}{2}$.

🗨️ Lời giải.

Đặt $a = 1$ là độ dài cạnh hình vuông, $S_1 = 1$ là diện tích hình vuông ban đầu.

Do M, N là trung điểm hai cạnh của hình vuông nên $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_2 = MN^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$.

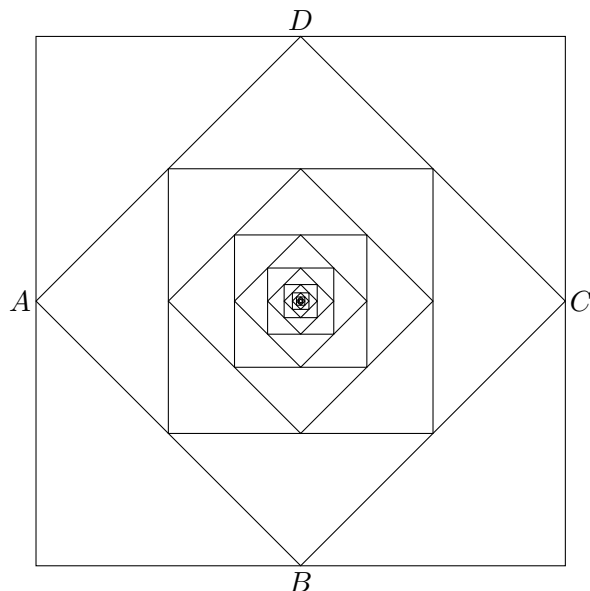
Lại lấy trung điểm các cạnh của hình vuông $MNPQ$ để tiếp tục, khi đó, hình vuông mới sinh ra có diện tích là

$$S_3 = \left(\frac{MN\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{MN^2}{2} = \frac{S_1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Vậy các hình vuông sinh ra có diện tích lần lượt là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

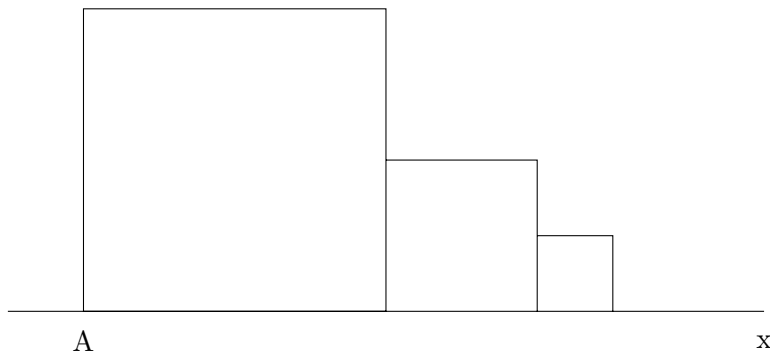
Vậy tổng diện tích các hình vuông tạo thành là

$$S = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$



Chọn đáp án (B)

Câu 85. Người ta xếp các hình vuông kề với nhau như trong hình dưới đây, mỗi hình vuông có độ dài cạnh bằng nửa độ dài cạnh của hình vuông trước nó. Nếu hình vuông đầu tiên có cạnh dài 10 cm thì trên tia Ax cần có một đoạn thẳng dài bao nhiêu xentimet để có thể xếp được tất cả các hình vuông đó?



(A) 22.

(B) 15.

(C) 18.

(D) 20.

Lời giải.

Tổng các cạnh nằm trên tia Ax của các hình vuông đó là

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = 20 \text{ cm.}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 86.

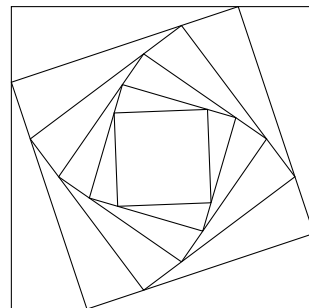
Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \dots\}$). Đặt $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$. Biết $S = \frac{32}{3}$, tính a .

(A) 2.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) $2\sqrt{2}$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = a^2$, hình vuông C_2 có cạnh bằng $\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, do đó $S_2 = \frac{10a^2}{16}$. Bằng quy nạp ta chứng

minh được (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{8}$. Nên

$$S = \frac{a^2}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8a^2}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án **A**



Bài số 2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

✎ **Định nghĩa 2.1.** Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

🔴 **Nhận xét.** $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số.

⚠ **Hàm số $f(x)$ có thể không xác định tại $x = x_0$ nhưng vẫn tồn tại giới hạn của hàm số đó khi x dần tới x_0 .**

2. Phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số

✎ **Định lý 2.1.** Ta thừa nhận định lý sau:

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$) thì

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Giới hạn một phía

✎ **Định nghĩa 2.2.** Trong trường hợp tổng quát, ta có các định nghĩa sau:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

✎ **Định lý 2.2.** Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa “giới hạn hai phía” $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với giới hạn bên trái $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và giới hạn bên phải $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

B – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

🔗 **Định nghĩa 2.3.** Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.



🔗 Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

🔗 Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2+0}{1-0} \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

C – GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

🔗 **Định nghĩa 2.4.** Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow a^+$.

b) Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

⚠ Ta có hai giới hạn cơ bản sau

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

Ví dụ 2. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$. □

D – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

🔗 **Định nghĩa 2.5.** Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

b) Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

⚠ Ta có ba giới hạn cơ bản sau

☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương chẵn.

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

Ví dụ 3. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. □

E – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

📁 **Dạng 1. Tính giới hạn bằng định nghĩa**

Áp dụng các định nghĩa về giới hạn hàm số.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 4. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ($x \neq 3$). Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

💬 **Lời giải.**

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq 3$ và $\lim x_n = 3$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \frac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} \\ &= \lim \frac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3} \\ &= \lim (x_n + 3) \\ &= \lim x_n + \lim 3 \end{aligned}$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. □

Ví dụ 5 (CTST). Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -2$ với mọi n và $x_n \rightarrow -2$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n + 2} = \lim (x_n - 2) = \lim x_n - 2 = -2 - 2 = -4.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$. □

Ví dụ 6 (KNTT). Cho hàm số $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \rightarrow 1$. Ta có $f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{x_n + 1}$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 7 (CTST). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x);$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$

Lời giải.

a) Đặt $g(x) = 2x^2 - x$.

Hàm số $y = g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \rightarrow 3$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim g(x_n) = \lim (2x_n^2 - x_n) = 2 \cdot (\lim x_n)^2 - \lim x_n = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 15$.

b) Đặt $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

Hàm số $y = h(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -1$ với mọi n và $x_n \rightarrow -1$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim h(x_n) = \lim \frac{x_n^2 + 2x_n + 1}{x_n + 1} = \lim (x_n + 1) = \lim x_n + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 0$. □

2. Bài tập tự luận

Bài 1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2.$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$

Lời giải.

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $\lim x_n = -3$. Ta có

$$\begin{aligned}\lim x_n^2 &= \lim x_n \cdot \lim x_n \\ &= (-3) \cdot (-3) \\ &= 9.\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$.

b) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq 5$ và $\lim x_n = 5$. Ta có

$$\begin{aligned}\lim \frac{x_n^2 - 25}{x_n - 5} &= \lim \frac{(x_n - 5)(x_n + 5)}{x_n - 5} \\ &= \lim (x_n + 5) \\ &= \lim x_n + \lim 5 \\ &= 5 + 5 \\ &= 10.\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -2$ với mọi n và $x_n \rightarrow -2$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n + 2} = \lim (x_n - 2) = -2 - 2 = -4$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n > -2$ và $x_n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n - 1}{x_n + 2} = \lim \frac{2 - \frac{1}{x_n}}{1 + \frac{2}{x_n}} = \frac{2 - \lim \frac{1}{x_n}}{1 + \lim \frac{2}{x_n}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Dạng 2. Các phép toán về giới hạn hàm số

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$) thì

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

c) Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 8 (Cánh Diều). Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6);$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1}.$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\ &= 4 + 2 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} 3}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x) - \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{1 + 2 + 3}{2 - 1} \\ &= 6. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 9 (CTST). Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (4x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1 - 4 \cdot 1 + 2 = -1;$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2}{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{5}.$

□

Ví dụ 10 (CTST). Tính các giới hạn sau (khử dạng vô định):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4.$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}.$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \quad (\text{nhân cả tử và mẫu cho } (\sqrt{x+1} + 2)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1) - 4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 2)} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3+1} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 11 (CTST). Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2) = \left(\lim_{x \rightarrow -2} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow -2} (5x) - \lim_{x \rightarrow -2} 2 = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2 = -8.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Ví dụ 12 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{7}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{7}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 1.$$

Ví dụ 13 (TH). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}}} = 0.$$

Ví dụ 14 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x + 2)}{1 + x + x^2} = -1.$$

Ví dụ 15 (VDT). Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x + 5} = 3$, hãy tìm mn .

Lời giải.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x + 5} = 3 \text{ nên } x = -5 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 + mx + n = 0.$$

$$\Rightarrow -5m + n + 25 = 0 \Leftrightarrow n = 5m - 25.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + 5m - 25}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 5 + m)}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} (x - 5 + m) = m - 10. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } m - 10 = 3 \Leftrightarrow m = 13 \Rightarrow n = 40.$$

$$\text{Vậy } mn = 13 \cdot 40 = 520.$$

Ví dụ 16 (VDT). Tìm số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2 + 3} + 2024}{2x + 2023} = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2 + 3} + 2024}{2x + 2023} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} + \frac{2024}{x}}{2 + \frac{2023}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Bài tập tự luận

Bài 4. Biết rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$. Trong trường hợp này có tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ hay không? Giải thích.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$, do đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. □

Bài 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3);$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} (4x) + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\ &= 4 - 8 + 3 \\ &= -1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 2 \\ &= 3 - 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x + 1}{3x - 4};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x - 11}{2x + 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x};$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x - 6};$

f) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x - 7}.$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(9 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(3 - \frac{4}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{4}{x}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x}} \\
 &= \frac{9+0}{3-0} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(7 - \frac{11}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - \frac{11}{x}}{2 + \frac{3}{x}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}} \\
 &= \frac{7-0}{2+0} \\
 &= \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
 &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} \\
 &= \sqrt{1+0} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \\
&= -\sqrt{1+0} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x-6} = -\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x-7} = +\infty.$$

□

Bài 7. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4);$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 7 \lim_{x \rightarrow -2} x + \lim_{x \rightarrow -2} 4 = (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 4 = 22.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} x + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - \sqrt{x+8})(3 + \sqrt{x+8})}{(x-1)(3 + \sqrt{x+8})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9 - (x+8)}{(x-1)(3 + \sqrt{x+8})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+8}} \\
&= \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 1} (3 + \sqrt{x+8})} \\
&= \frac{-1}{3 + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+8}} \\
&= \frac{-1}{3 + \sqrt{1+8}} \\
&= \frac{-1}{3+3} \\
&= \frac{-1}{6}.
\end{aligned}$$

□

Bài 8. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 + \frac{3}{x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2} = \frac{4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x}}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}}{3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{0}{3+0} = 0.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x-6};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x-7}.$$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(9+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3-\frac{4}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9+\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x}} \\ &= \frac{9+0}{3-0} \\ &= 3. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(7-\frac{11}{x}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-\frac{11}{x}}{2+\frac{3}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}} \\
 &= \frac{7 - 0}{2 + 0} \\
 &= \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\
 &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} \\
 &= \sqrt{1 + 0} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\
 &= -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \\
 &= -\sqrt{1 + 0} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x - 6} = -\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x - 7} = +\infty.$$

□

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x).$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - \frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1}} \\
&= -\sqrt{4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + x + 2} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \\
&= \frac{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}.
\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

□

Bài 11. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 4) = 4.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{1}{6}.$

□

Bài 12. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2);$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (4x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1 - 4 \cdot 1 + 2 = -1;$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2}{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{5}.$

□

Bài 13. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}}.$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}}; \text{ do } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x^3 - x - 6} &= \frac{3^2}{3^3 - 3 - 6} = \frac{1}{2} > 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}; \text{ do } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt[3]{28}}{2}.$$

Bài 14. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)}.$$

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$ nên $f(1) = 16$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)} = \frac{1}{12} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 2.$$

Bài 15. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2) = (\lim_{x \rightarrow -2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow -2} (5x) - \lim_{x \rightarrow -2} 2 = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2 = -8.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Bài 16. Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1). \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 3x)(x + 1)}{x^2 + 3}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 3(1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2.$$

$$\text{b) } \text{Do } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 7 \neq 0 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x)(x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = (2^3 - 3 \cdot 2) \cdot (2 + 1) = 6$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 3x)(x + 1)}{x^2 + 3} = \frac{6}{7}.$$

Bài 17. Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 3}}. \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{\frac{-5}{x^2 + x - 12}}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x}{x^2 - x + 3}}; \text{ do } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x^2 - x + 3} = \frac{2}{2^2 - 2 + 3} = \frac{2}{5} > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 3}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{\frac{-5}{x^2 + x - 12}}; \text{ do } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5}{x^2 + x - 12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{\frac{-5}{x^2 + x - 12}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{6}.$$

□

Bài 18. Cho $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^3$. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)].$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)}.$$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0$. Mặt khác, ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$.

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

□

Bài 19 (NB). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.$$

□

Bài 20 (TH). Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.**Lời giải.**

$$I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1.$$

□

Bài 21 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{7}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{7}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 1.$$

□

Bài 22 (TH). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}}} = 0.$$

□

Bài 23 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1. \quad \square$$

Bài 24 (VDT). Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x + 5} = 3$, hãy tìm mn .

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x + 5} = 3$ nên $x = -5$ là nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$.

$$\Rightarrow -5m + n + 25 = 0 \Leftrightarrow n = 5m - 25.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + 5m - 25}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-5+m)}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} (x-5+m) = m - 10. \end{aligned}$$

Ta có $m - 10 = 3 \Leftrightarrow m = 13 \Rightarrow n = 40$.

Vậy $mn = 13 \cdot 40 = 520$. □

Bài 25 (VDT). Tìm số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3} + 2024}{2x + 2023} = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3} + 2024}{2x + 2023} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} + \frac{2024}{x}}{2 + \frac{2023}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

Bài 26 (NB). Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4. \quad \square$$

Bài 27 (NB). Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-7)(x-5)}{5(5-x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{7-x}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} = \frac{2}{5}. \quad \square$$

Bài 28 (TH). Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3. \quad \square$$

Bài 29 (TH). Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^3 - 2^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x+2)}{x^2 + 2x + 4} \end{aligned}$$

$$= 1.$$

Bài 30 (TH). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{1}{x} + 3\right)}{-x \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + 3}{-\sqrt{2 + \frac{3}{x}}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 31 (TH). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2+2}}{5x + \sqrt{x^2+2}}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2+2}}{5x + \sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}\right)}{x \cdot \left(5 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}}{5 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}.$$

Bài 32 (VDT). Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2024} + x - 2}{x^{2023} + x - 2}$ bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a^2 - b^2$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2024} + x - 2}{x^{2023} + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2024} - 1 + x - 1}{x^{2023} - 1 + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{2023} + x^{2022} + \dots + x + 1) + x - 1}{(x-1)(x^{2022} + x^{2021} + \dots + x + 1) + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2023} + x^{2022} + \dots + x + 2}{x^{2022} + x^{2021} + \dots + x + 2} \\ &= \frac{1 + 1 + \dots + 1 + 2}{1 + 1 + \dots + 1 + 2} = \frac{2025}{2024}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^2 - b^2 = 2025^2 - 2024^2 = 4049.$$

Bài 33 (VDT). Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$. Tìm a, b .

🗨️ **Lời giải.**

Để $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$ thì ta phải có $x^2 + ax + b = (x - 3)(x - m)$.

Khi đó $3 - m = 3 \Leftrightarrow m = 0$. Vậy $x^2 + ax + b = (x - 3)x = x^2 - 3x$.

Suy ra $a = -3$ và $b = 0$.

Bài 34 (VDT). Tìm m để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4}{x}\right)}{m - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x}}{m - \frac{2}{x}} = -\frac{2}{m}.$$

$$\text{Theo bài ra ta có } -\frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4.$$

Bài 35 (VDC). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x} \right) - \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{1}{1 - x} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{1}{1-x} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right) = A - B.$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m - (1+x+x^2+\dots+x^{m-1})}{1-x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) + (1-x^2) + \dots + (1-x^{m-1})}{1-x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)[1+(1+x)+\dots+(1+x+\dots+x^{m-2})]}{(1-x)(1+x+\dots+x^{m-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+(1+x)+\dots+(1+x+\dots+x^{m-2})}{1+x+\dots+x^{m-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+2+\dots+m-1}{m} \\ &= \frac{m-1}{2}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta tính được $B = \frac{n-1}{2}$.

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = A - B = \frac{m-n}{2}.$$

Bài 36. Cho $P = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P .

(A) $P = \frac{1}{4}$.

(B) $P = \frac{1}{2}$.

(C) $P = 1$.

(D) $P = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (A)

Bài 37. Cho m là hằng số. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m}$.

(A) $\frac{1}{m}$.

(B) 1.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{4(m+1)}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+m)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4(m+1)}.$$

Chọn đáp án (D)

Bài 38. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}+x+1) = a$. Tính $2a+1$.

(A) -1.

(B) -3.

(C) 0.

(D) 3.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}+x+1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= 1 \\ \Rightarrow a &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $2a+1 = 3$.

Chọn đáp án (D)

Bài 39. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b)) = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = a - 4b$.

(A) $T = -2$.

(B) $T = 5$.

(C) $T = -1$.

(D) $T = 3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$, khi $x \rightarrow +\infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}{x} = 2, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a - 4b = 5$.

Chọn đáp án (B).

Bài 40. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ và tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 2x + 1} - x}{x^2 - 4} = T$. Chọn đẳng thức đúng

(A) $T = \frac{a + 2}{16}$.

(B) $T = \frac{a + 2}{8}$.

(C) $T = \frac{a - 2}{8}$.

(D) $T = \frac{a - 2}{16}$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là đa thức và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ nên suy ra $f(x) + 1 = (x - 2)g(x)$, $g(2) = a$.

Do đó

$$\begin{aligned} T &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} - x}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)g(x) + 2x - x^2}{(x - 2)(x + 2) [\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} + x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - x}{(x + 2) [\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} + x]} \\ &= \frac{a - 2}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D).

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = n$. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$.

(A) $m + n$.

(B) $m - n$.

(C) mn .

(D) $\frac{m}{n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m + n$.

Chọn đáp án (A).

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{g(x)}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} [\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}]$.

Lời giải.

Theo định lý về giới hạn của thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]}$.

Chọn đáp án (C).

Câu 3. Cho các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

- (A) $M = 5$. (B) $M = 2$. (C) $M = -6$. (D) $M = 3$.

Lời giải.

Ta có $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 6 - 12 = -6$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 4. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = n$. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$.

- (A) $m + n$. (B) $m - n$. (C) mn . (D) $\frac{m}{n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m - n$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 5. Cho $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, kết quả của $\lim_{x \rightarrow a} [-3 \cdot f(x)]$ bằng

- (A) $+\infty$. (B) 0. (C) 3. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Có $\lim_{x \rightarrow a} [-3 \cdot f(x)] = -3 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 6. Cho $k \in \mathbb{Z}$, kết quả của $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1}$ bằng

- (A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 5.

Lời giải.

Theo tính chất của giới hạn hàm số, ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 7. Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$. Giá trị $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + 4x - 1]$ bằng

- (A) 5. (B) 6. (C) -11. (D) 9.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + 4x - 1] = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} 4x - 1 = -2 + 4 \cdot 3 - 1 = 9$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 8. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + x]$ bằng

- (A) 5. (B) 6. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} x = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 9. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2k}$ là

- (A) $+\infty$. (B) 0. (C) $-\infty$. (D) 1.

Lời giải.

Với k nguyên dương thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2k} = +\infty$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 10. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = +\infty$. (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Lời giải.

Theo định lý về giới hạn, khẳng định sai là $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = +\infty$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 11. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = ab$.

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Lời giải.

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ không đúng. □

Câu 12. Với k là số nguyên dương thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k}$ bằng

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) x .

(D) 0 .

Lời giải.

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \pm\infty \end{cases}$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6)$.

(A) 0 .

(B) 1 .

(C) 2 .

(D) 3 .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\ &= 4 + 2 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1}$.

(A) 4 .

(B) 5 .

(C) 6 .

(D) 7 .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} 3}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x) - \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{1 + 2 + 3}{2 - 1} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

(A) 1 .

(B) -1 .

(C) Không tồn tại.

(D) 0 .

Lời giải.

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tìm $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - 4x + 3}$. Kết quả là

(A) -3.

(B) 4.

(C) -4.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(3 + x)}{(x - 3)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x + 3)}{x - 1} = -3.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 17. Tìm $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$. Kết quả là

(A) 7.

(B) 8.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 18. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

(A) $A = -\infty$.(B) $A = 0$.(C) $A = 3$.(D) $A = +\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 19. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 2}$ là

(A) $-\infty$.

(B) 0.

(C) $\frac{1}{2}$.(D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{2(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2} = 0.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 20. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ bằng

(A) $\frac{1}{8}$.

(B) 9.

(C) $+\infty$.

(D) 8.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 3)(x + 5)}{x - 3} = 9.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 21. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$.

(A) $I = -2$.(B) $I = -\frac{3}{2}$.(C) $I = 2$.(D) $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x} \right)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x + 3}$ bằng

(A) $-\frac{2}{3}$.

(B) 1.

(C) 2.

(D) -3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

Chọn đáp án (B)

Câu 23. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ bằng

(A) -2.

(B) -1.

(C) $-\frac{1}{2}.$

(D) $\frac{1}{2}.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}.$

Chọn đáp án (C)

Câu 24. Giới hạn $T = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^3 + 2x - 3}$ bằng

(A) $\frac{2}{9}.$

(B) $\frac{2}{5}.$

(C) $\frac{1}{5}.$

(D) $+\infty.$

Lời giải.

$T = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^2 + x + 3} = \frac{1^3 + 1^2 + 1 - 2}{1^2 + 1 + 3} = \frac{1}{5}.$

Chọn đáp án (C)

Câu 25. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - x^2 - x - 2}$ bằng

(A) 0.

(B) $-\frac{1}{7}.$

(C) -7.

(D) $+\infty.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+x+1} = \frac{-1}{7}.$

Chọn đáp án (B)

Câu 26. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3}.$

(A) $-\frac{5}{2}.$

(B) $-\frac{2}{5}.$

(C) $\frac{1}{5}.$

(D) $+\infty.$

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2-2)}{x^2+x+3} = -\frac{2}{5}.$

Chọn đáp án (B)

Câu 27. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right).$

(A) 2.

(B) $+\infty.$

(C) -2.

(D) 0.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-1)(x-3)} = -2.$

Chọn đáp án (C)

Câu 28. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 2}{x - 2}$ bằng

(A) $-\infty.$

(B) 1.

(C) $+\infty.$

(D) -1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(A) 2.

(B) 8.

(C) 4.

(D) 0.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x}\right)^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x} + 2\right)^7} = 2^3 = 8.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 30. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx + c}{x - 3} = 8$, ($b, c \in \mathbb{R}$). Tính $P = b + c$.

(A) $P = -13$.(B) $P = -11$.(C) $P = 5$.(D) $P = -12$.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx + c}{x - 3} = 8$ là hữu hạn nên tam thức $x^2 + bx + c$ có nghiệm $x = 3$.

$$\Rightarrow 3b + c + 9 = 0 \Leftrightarrow c = -9 - 3b.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx + c}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx - 9 - 3b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3 + b)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3 + b) = 8 \Leftrightarrow 6 + b = 8 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow c = -15. \end{aligned}$$

Vậy $P = b + c = -13$.

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Cho a, b là số nguyên và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7$. Tính $a^2 + b^2 + a + b$.

(A) 18.

(B) 1.

(C) 15.

(D) 5.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7$ hữu hạn nên $x = 1$ phải là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx - 5 = 0$ suy ra $a + b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5 - a$.

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + (5 - a)x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(ax + 5)}{x - 1} = a + 5 = 7 \Rightarrow a = 2 \text{ nên } b = 3.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + a + b = 18$.

Chọn đáp án (A)

Câu 32. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = -5$. Tính tổng $a + b$.

(A) 6.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 5.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a + 1)x^2 - (2a + b)x + 2b + 1}{x - 2} \right) = -5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 6$.

Chọn đáp án (A)

Câu 33. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 2} - ax - b \right) = 0$. Khi đó $a + b$ bằng

(A) -4.

(B) 4.

(C) 7.

(D) -7.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 2} - ax - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((4 - a)x - b - 11 + \frac{23}{x + 2} \right) = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - a = 0 \\ -11 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -11 \end{cases} \Rightarrow a + b = -7.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x - 1} = -1$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x)f(x) + 2}{x - 1}$.

(A) $I = 5$.

(B) $I = -4$.

(C) $I = 4$.

(D) $I = -5$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x)f(x) + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x)(f(x) + 1) - x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2 + x)(f(x) + 1)}{x - 1} - x - 2 \right) = -5.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Gọi A là giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{50} - 50}{x - 1}$ khi x tiến đến 1. Tính giá trị của A .

(A) A không tồn tại.

(B) $A = 1725$.

(C) $A = 1527$.

(D) $A = 1275$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{50} - 50}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x + 1) + (x^2 + x + 1) + \dots + (x^{49} + x^{48} + \dots + 1)] \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 25(1 + 50) = 1275. \end{aligned}$$

Vậy $A = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1275$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax - 1} - x) = 5$. Khi đó giá trị của tham số a là

(A) 10.

(B) -6.

(C) 6.

(D) -10.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{a}{2} = 5.$$

Suy ra $a = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + m^2x} - x) = \frac{1}{2}$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + m^2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m^2x}{\sqrt{x^2 + m^2x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m^2}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{x}} + 1} \\ &= \frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + m^2x} - x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$. Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$.

(A) $L = +\infty$.

(B) $L = -\infty$.

(C) $L = 2$.

(D) $L = -2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x - 1}{\sqrt{x^2 - 7x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x - 1}{-x\sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 39. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}{x-1}$ là

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 40. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên và $\frac{m}{n}$ tối giản.

Tính $A = 2m - n$.

(A) $A = 1$.

(B) $A = -1$.

(C) $A = 0$.

(D) $A = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $A = 2m - n = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 41. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a - b$ là

(A) $\frac{1}{9}$.

(B) -1 .

(C) $\frac{9}{8}$.

(D) 1 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)^2 - (5x+1)}{(x+1 + \sqrt{5x+1})(x - \sqrt{4x-3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + \sqrt{4x-3})(x-3)x}{(x+1 + \sqrt{5x+1})(x-3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x + \sqrt{4x-3})}{(x+1 + \sqrt{5x+1})(x-1)} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Vậy $a = 9, b = 8$, suy ra $a - b = 1$.

Chọn đáp án (D)

Câu 42. Cho $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a + b^2$.

(A) 22.

(B) 66.

(C) 14.

(D) 70.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} = \frac{3}{8}.$$

$$\Rightarrow 2a + b^2 = 6 + 64 = 70.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.

(A) $-\frac{3}{2}$.(B) $\frac{3}{2}$.(C) $\frac{7}{2}$.(D) $-\frac{7}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x})$.

(A) $M = -\frac{1}{2}$.(B) $M = \frac{3}{2}$.(C) $M = -\frac{3}{2}$.(D) $M = \frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x\sqrt{2}) = \frac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a + b$ có giá trị là

(A) 5.

(B) 4.

(C) 7.

(D) 1.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - x\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - x\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy $a = 3, b = 4$. Tổng $a + b = 7$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 46. Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 2})$.

(A) $I = \frac{1}{2}$.

(B) $I = \frac{46}{31}$.

(C) $I = \frac{17}{11}$.

(D) $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} + 1 \right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 47. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{x - 2} = 3$. Tính

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{(x^2 - 4)(\sqrt{2f(x)} + 6 + 3)}.$$

(A) $\frac{1}{10}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{1}{12}$.

(D) $\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Do $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{x - 2} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 15) = 0 \Rightarrow f(2) = 15$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{(x^2 - 4)(\sqrt{2f(x)} + 6 + 3)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - 15}{x - 2} \cdot \frac{1}{(x + 2)(\sqrt{2f(x)} + 6 + 3)} \right] \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4 \cdot (\sqrt{2 \cdot 15} + 6 + 3)} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 48. Biết rằng $b > 0, a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax + 1} - \sqrt{1 - bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $a^2 + b^2 > 10$.

(B) $a^2 - b^2 > 6$.

(C) $a - b \geq 0$.

(D) $1 \leq a \leq 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax + 1} - \sqrt{1 - bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax + 1} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - bx} - 1}{x}.$$

$$\text{Với } L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x \left(\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{ax+1} + 1 \right)} = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Với } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-bx} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-bx}{x(\sqrt{1-bx} + 1)} = -\frac{b}{2}.$$

Từ giả thiết bài toán ta có

$$L = L_1 - L_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow 2a + 3b = 12.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Kiểm tra trực tiếp từng đáp án ta thấy $a^2 - b^2 > 6$ là sai.

Chọn đáp án **(B)**

Dạng 3. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, k = 2n \\ -\infty, k = 2n + 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 17 (NB). Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Ví dụ 18 (TH). Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + 1)$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1 > 0.$$

Ví dụ 19 (TH). Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1)$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = +\infty.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = -4 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty. \end{cases}$$

Ví dụ 20 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{(x+3)^2}$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{(x+3)^2} = -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -3} (x+2) = -3+2 = -1 < 0, \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2 = 0 \text{ và } (x+3)^2 > 0 \text{ khi } x \neq -3.$$

Ví dụ 21 (VDT). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(m^2 - 1)x^3 + 2x] = -\infty$.

 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(m^2 - 1)x^3 + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[m^2 - 1 + \frac{2}{x^2} \right]$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ nên $I = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[m^2 - 1 + \frac{2}{x^2} \right] < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 41 (NB). Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. □

Bài 42 (NB). Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x^4 - \frac{1}{x} \right)$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x^4 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$. □

Bài 43 (TH). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x^2 + 2x + 1)$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x^2 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x^2 + 2x + 1) = -\infty$. □

Bài 44 (TH). Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{x + 1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \left(\frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$. □

Bài 45 (TH). Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - x)$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0$. □

Bài 46 (TH). Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x - 3)^3}$.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x - 3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{3x} \cdot \frac{1}{(x - 3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3x(x - 3)^2} = -\infty$. □

Bài 47 (VDT). Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1) = -\infty$?

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + mx - 1 \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + m - \frac{1}{x} \right)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + m - \frac{1}{x} \right) = 2 + m$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1 \right) = -\infty$ khi $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ nên $m \in \{-20; -19; -18; \dots; -3\}$.

Vậy có 18 giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ thỏa bài toán. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 49. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)$ bằng

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) 1.

(D) -1 .

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{3}x - 2022)$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) 3.

(C) -3 .

(D) $+\infty$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{3}x - 2022) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 + 5 \cdot \frac{1}{x} - 9\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x^2} - 2022 \cdot \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x - 3)$.

(A) 2.

(B) 1.

(C) $-\infty$.

(D) $+\infty$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) \right] = -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = 1 > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^k)$ là

(A) 0.

(B) $-\infty$.

(C) $-3x_0^k$.

(D) $+\infty$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ khi k là số nguyên dương chẵn.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^k) = -\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$ bằng

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) 2.

(D) -2 .

☞ **Lời giải.**

Theo quy tắc giới hạn vô cực ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) $\frac{3}{16}$.

(C) 0.

(D) $+\infty$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -2+1 = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0$ và $(x+2)^2 > 0$ khi $x \neq -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x)$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) -1 .

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x^2} \right) = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{2}{x^2} \right) = -3 < 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 56. Tìm $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 3}{(x+1)^2}$.

(A) $L = +\infty$.

(B) $L = 2$.

(C) Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 3}{(x+1)^2}$.

(D) $L = -\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 3}{(x+1)^2} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x - 3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0 \\ x \rightarrow -1 \Rightarrow (x+1)^2 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 57. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 2x)$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) 2.

(D) -2 .

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{2}{x^2} \right)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 - \frac{2}{x^2} \right) = -2 < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{2}{x^2} \right) = -\infty$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 2x) = -\infty$.

Chọn đáp án (A)

Câu 58. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$.

(A) 1.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}.$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = -\infty.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 59. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = +\infty$.

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 1$.

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = -\infty$.

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 0$.

Lời giải.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{x \cdot \left(\frac{1}{x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x} - 2} = +\infty.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 60. Biết $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)^4}$ bằng

(A) -1 .

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 0 .

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1 < 0$; $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^4 = 0$ và $\forall x \neq -2$ thì $(x+2)^4 > 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)^4} = -\infty$.

Chọn đáp án (C)

Câu 61. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) 0 .

(C) $+\infty$.

(D) -2 .

Lời giải.

Có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ và $(x-1)^2 > 0$, $\forall x \neq 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = -\infty$.

Chọn đáp án (A)

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2(m^2 - 4)x^3] = -\infty$?

(A) 5 .

(B) 10 .

(C) 3 .

(D) 6 .

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2(m^2 - 4)x^3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[\frac{1}{x^2} - 2(m^2 - 4) \right]$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \Rightarrow L = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - 2(m^2 - 4) \right] < 0 \\ &\Leftrightarrow -2(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Lại có m thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên các giá trị nguyên thỏa mãn bài toán của m là $\{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 6 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D)

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1) = -\infty$?

(A) 21 .

(B) 22 .

(C) 18 .

(D) 41 .

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + m - \frac{1}{x} \right)$.

Có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + m - \frac{1}{x} \right) = m - 2$

Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + mx - 1) = -\infty$ suy ra $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20; 20]$ có $m \in \{3; 4; 5; \dots; 20\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: Vậy có 18 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C)

Dạng 4. Giới hạn một phía

Định lý 2.3. Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa “giới hạn hai phía” $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với giới hạn bên trái

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và giới hạn bên phải $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 22 (Cánh Diều). Tính: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x}$.

Lời giải.

Với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < 2$ và $x_n \rightarrow 2$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x_n} &= \sqrt{\lim_{x_n \rightarrow 2^-} (2-x_n)} \\ &= \sqrt{2 - \lim_{x_n \rightarrow 2^-} x_n} \\ &= \sqrt{2-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x_n \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$. □

Ví dụ 23 (Cánh Diều). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

Chứng tỏ rằng không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. □

Ví dụ 24 (CTST). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

- a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Lời giải.

- a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > 0$ và $x_n \rightarrow 0$. Khi đó $f(x_n) = 1$ nên $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < 0$ và $x_n \rightarrow 0$. Khi đó $f(x_n) = 0$ nên $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

- b) Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. □

Ví dụ 25 (CTST). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2+2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải.

- + Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $\lim f(x_n) = \lim(1-2x_n) = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $\lim f(x_n) = \lim(x_n^2+2) = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$.

- + Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ nên tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$. □

Ví dụ 26 (KNTT). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ x + 1 & \text{nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Lời giải.

Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $0 < x_n < 1$ và $x_n \rightarrow 1$, ta có $f(x_n) = x_n^2$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$.

Tương tự, với dãy số (x_n) bất kì mà $1 < x_n < 2$, $x_n \rightarrow 1$, ta có $f(x_n) = x_n + 1$, cho nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$. □

2. Bài tập tự luận

Bài 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

a) Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Lời giải.

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > 0$ và $x_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó $f(x_n) = 1$ nên $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < 0$ và $x_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó $f(x_n) = 0$ nên $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

b) Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. □

Bài 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải.

☑ Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \leq -1$ và $x_n \rightarrow -1$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Khi đó $f(x_n) = 1 - 2x_n$ nên $\lim f(x_n) = \lim(1 - 2x_n) = 1 - 2(-1) = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$.

☑ Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Khi đó $f(x_n) = x_n^2 + 2$ nên $\lim f(x_n) = \lim(x_n^2 + 2) = (-1)^2 + 2 = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$.

☑ Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$ nên $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$. □

Bài 50. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - 2x}{x - 2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (1 - 2x) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 1 - 2 \cdot 2 = -3$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(1 - 2x) \cdot \frac{1}{x - 2} \right] = -\infty$.

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty$.

b) Viết $(1 - x^2) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = 0 - 1 = -1$.

Nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2) = -\infty$.

c) Ta viết $\frac{x}{3 - x} = \frac{-x}{x - 3}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x) = -3 < 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty$

nên $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[-x \cdot \frac{1}{x - 3} \right] = +\infty$.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 64. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào sau đây có kết quả bằng $+\infty$.

(A) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 1}{4 - x}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + x - 1}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2)$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 1}{4 - x}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 1}{4 - x} = +\infty$ vì $\lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 1) = 7 > 0$ và $4 - x > 0$ với mọi $x \in (-\infty; 4)$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 + mx - 2m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ nếu

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + mx - 2m) = 1 - m$.

Hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 - m = 3 \Leftrightarrow m = -2$.

□

Câu 66. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = -\infty$.

(B) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = 2$.

(C) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = -2$.

(D) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = +\infty$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{(x + 3)(2x - 1)}{(x + 3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x - 1}{x + 3} = +\infty$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 67. Tính $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 - x}{x + 1}$.

(A) 1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) -1.

☞ **Lời giải.**

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (1 - x) = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0 \\ x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \end{cases}$ nên $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 - x}{x + 1} = -\infty$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 68. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3+2x}{x+2}$.

(A) $+\infty$.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) $-\infty$.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (3+2x) = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x+2) = 0$; $x+2 < 0$ khi $x \rightarrow (-2)^-$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3+2x}{x+2} = +\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Mệnh đề sau đây sai?

(A) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^2} = 0$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x-4} = 4$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2-4x)^2}{x-4} = 0$.

Lời giải.

• $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2-4x)^2}{x-4} \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)x^2 = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$.

• $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} x = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-7x+4}$.

(A) $-\frac{1}{5}$.

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-7x+4} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)\sqrt{x+2}}{(x-1)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{x+2}}{x-4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Cho $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+3 & \text{nếu } x \geq 2 \\ ax-1 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tồn tại. Tính a .

(A) 1.

(B) -2.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x-2}+3) = 3$.

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tồn tại nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2a-1=3 \Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$.

(A) $-\infty$.

(B) 2.

(C) $+\infty$.

(D) Không tồn tại.

Lời giải.

- Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = +\infty$.

- Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ nên không tồn tại giới hạn của hàm số tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - |x-2|}{|4-x^2|}$.

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) 0.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - |x-2|}{|4-x^2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}|x+2|} = +\infty.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (1 - \sqrt{x-2}) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}|x+2| = 0$ và $\sqrt{x-2}|x+2| > 0 \forall x > 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$ m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới

hạn tại $x = 0$.

(A) $m = \frac{21}{2}$.

(B) $m = 1$.

(C) $m = \frac{-1}{2}$.

(D) $m = 0$.

Lời giải.

Hàm số có giới hạn tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx + m + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Gọi a, b là các giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} & \text{khi } x < -2 \\ x + 1 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới

-2 . Tính $3a - b$.

(A) 12.

(B) 4.

(C) 24.

(D) 8.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 1) = -1.$$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + b - 4}{x^2 - 4} = 0. \quad (*)$$

Do $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0$ nên điều kiện cần để có (*) là $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x^2 + ax + b - 4) = 0 \Rightarrow 2a - b = 4$.

Ngược lại, với $2a - b = 4$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + b - 4}{x^2 - 4} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{x^2 - 4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + a - 4}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 8. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 12. \end{cases}$

Vậy $3a - b = 12$.

Chọn đáp án (A)



Dạng 5. Bài toán thực tế về giới hạn hàm số

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 27 (KNTT). Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3 . Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc $2 \text{ m}^3/\text{phút}$.

- a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
 b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải.

- a) Sau thời gian t phút, số m^3 nước trong hồ là $200 + 2t$ (m^3).
 Số kilôgam muối là $200 \cdot 10 = 2000$ (kg).
 Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{2000}{200 + 2t} = \frac{1000}{100 + t} \text{ (kg/m}^3\text{)}.$$

- b) Khi $t \rightarrow +\infty$, ta xét giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1000}{100 + t} = 0.$$



Ví dụ 28 (KNTT). Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải.

Từ công thức khối lượng

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ta thấy m là một hàm số của v , với tập xác định là nửa khoảng $[0; c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v \rightarrow c^-$, ta có $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0$. Do đó $\lim_{v \rightarrow c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.



2. Bài tập tự luận

Bài 56. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t \left(1 + \frac{4}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} 50}{\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{t}} \\
&= \frac{50}{1 + 0} \\
&= 50.
\end{aligned}$$

Ý nghĩa của kết quả: năng suất lao động cao nhất trong một ngày của một nhân viên là 50. $\square$

Bài 57. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải.

a) Chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm là $\overline{C}(x) = \frac{50000 + 105x}{x}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 105x}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(105 + \frac{50000}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 105 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000}{x} \\
&= 105.
\end{aligned}$$

Ý nghĩa của kết quả: số lượng sản phẩm càng nhiều thì chi phí sản xuất sẽ càng giảm, chi phí thấp nhất là 105 nghìn đồng. $\square$

Bài 58. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công thức $h(t) = \frac{300}{1 + 9 \cdot (0,8)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t \rightarrow +\infty$).

Lời giải.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{300}{1 + 9 \cdot (0,8)^t} = 300$.

Vậy chiều dài cuối cùng của loài động vật là 300 mm. $\square$

Bài 59. Theo thuyết tương đối, khối lượng m của một hạt phụ thuộc vào vận tốc v của nó, theo công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

trong đó m_0 là khối lượng khi hạt đứng yên và c là tốc độ ánh sáng. Tìm giới hạn của khối lượng khi v tiến đến c^- .

Lời giải.

Với $m_0 = 0$ thì $\lim_{v \rightarrow c^-} = 0$.

Với $m_0 \neq 0$.

$$\text{Khi } c \rightarrow c^- \text{ thì } \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0 \\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 0 \end{cases} \text{ suy ra } \lim_{v \rightarrow c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty.$$

Vậy nếu một hạt có khối lượng nghỉ khác 0 thì khối lượng của hạt sẽ lớn vô cùng khi vận tốc tiến gần vận tốc ánh sáng. $\square$

Bài 60. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t) = 3t^2 - 2t + 3$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t = 4$ giây.

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 4$ giây là

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(4 + \Delta t) - s(4)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(4 + \Delta t)^2 - 2(4 + \Delta t) + 3 - 43}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(\Delta t)^2 + 22\Delta t}{\Delta t} = 22 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

□

Bài 61. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty được cho bởi

$$N(t) = 200 \left(3 \left[\frac{t+3}{3} \right] - t \right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng ngày, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[-1,5] = -2$, $[8,8] = 8$).

a) Tính $\lim_{t \rightarrow 55^+} N(t)$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow 201^-} N(t)$.

Lời giải.

a) Khi $t \rightarrow 55^+$, ta có $\left[\frac{t+3}{3} \right] = 19$.

$$\text{Suy ra } \lim_{t \rightarrow 55^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 55^+} 200 \left(3 \left[\frac{t+3}{3} \right] - t \right) = 200(3 \cdot 19 - 55) = 400.$$

b) Khi $t \rightarrow 201^-$, ta có $\left[\frac{t+3}{3} \right] = 201$.

$$\text{Suy ra } \lim_{t \rightarrow 201^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 201^-} 200 \left(3 \left[\frac{t+3}{3} \right] - t \right) = 200 \cdot 0 = 0.$$

□

Bài 62. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 0,1t^2 - 0,4t + 1$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 8$ giây.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 8$ giây là

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(8 + \Delta t) - v(8)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0,1(8 + \Delta t)^2 - 0,4(8 + \Delta t) + 1 - 4,2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0,1(\Delta t)^2 + 1,2\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (0,1\Delta t + 1,2) \\ &= 1,2. \end{aligned}$$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 8$ giây là 1,2 (m/s²).

□

Bài 63. Một người lái xe từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc trung bình là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 60 km/h. (Giả sử người lái xe đi trên cùng một con đường trên cả chuyến đi và về).

a) Chứng minh rằng $y = \frac{30x}{x - 30}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x \rightarrow 30^+$.

🗨️ **Lời giải.**

a) Gọi khoảng cách giữa A và B là s km.

Thời gian chuyển đi là $\frac{s}{x}$, thời gian chuyển trở về là $\frac{s}{y}$.

Suy ra

$$\frac{2s}{60} = \frac{s}{x} + \frac{s}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{30} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{30x}{x-30}.$$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 30^+} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} \frac{30x}{x-30} = +\infty$.

□

Bài 64. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S = \pi ab$. Tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = \pi ab = \pi a \sqrt{a^2 - c^2}$.

Vậy $\lim_{c \rightarrow 0} S = \lim_{c \rightarrow 0} \pi a \sqrt{a^2 - c^2} = \pi a^2$.

Ta thấy khi $c \rightarrow 0$, thì giới hạn diện tích của elip là diện tích hình tròn bán kính $R = a$.

□

Bài 65. Các nhà vật lý thấy rằng thuyết tương đối hẹp của Einstein quy về cơ học Newton khi $c \rightarrow +\infty$, trong đó c là tốc độ ánh sáng. Điều này được minh họa bởi ví dụ: Một hòn đá được ném thẳng đứng từ mặt đất để nó quay trở lại trái đất một giây sau đó. Sử dụng các định luật Newton, chúng ta thấy rằng chiều cao tối đa của hòn đá là $h = \frac{g}{8}$ mét ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$). Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng của hòn đá phụ thuộc vào vận tốc của nó chia cho c , và có chiều cao cực đại là

$$h(c) = c \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4}} - \frac{c^2}{g}.$$

Tính $\lim_{c \rightarrow +\infty} h(c)$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} c \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4}} - \frac{c^2}{g} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c \left(\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4} - \frac{c^2}{g^2} \right)}{\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4}} + \frac{c}{g}} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{g^2} + \frac{1}{4c^2}} + \frac{1}{g}} = \frac{g}{8}.$$

□

Bài 66. Thế Lennard-Jones có dạng

$$U(r) = \frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6}$$

trong đó A, B là các hằng số và r là khoảng cách giữa các hạt. Tính $\lim_{r \rightarrow +\infty} U(r)$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} U(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6} \right) = 0.$$

□

Bài 67. Trong thuyết tương đối, chiều dài của một vật thể đối với người quan sát phụ thuộc vào tốc độ mà vật thể đang chuyển động đối với người quan sát. Nếu người quan sát đo chiều dài của vật thể là L_0 khi đứng yên, thì ở tốc độ v chiều dài là

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Tìm $\lim_{v \rightarrow c^-} L$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{v \rightarrow c^-} L = \lim_{v \rightarrow c^-} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \lim_{v \rightarrow c^-} L_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$.

□

Bài 68. Trong kỹ thuật ứng dụng, chúng ta thường xuyên ghi nhận được các hàm số mà giá trị của nó thay đổi đột ngột tại một thời điểm t xác định. Ví dụ: Sự thay đổi điện áp của một mạch điện tại thời điểm t khi đóng hoặc ngắt mạch. Thông thường, giá trị $t = 0$ luôn được chọn là thời điểm bắt đầu cho việc đóng hoặc ngắt điện áp. Quá trình đóng, ngắt mạch trên có thể mô tả bằng mô hình toán học bởi hàm Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

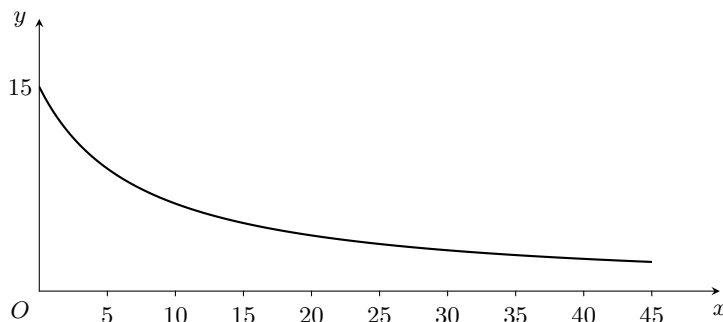
Có tồn tại giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)$ hay không?

Lời giải.

Ta có $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 = 1$; $\lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$.

Vậy giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)$ không tồn tại. □

Bài 69. Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt băng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0; 15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thỏa mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{150}{x + 10}$, với $x \geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thỏa mãn các điều kiện dưới đây hay không:

- Có đồ thị qua điểm $(0; 15)$;
- Giảm trên $[0; +\infty)$;
- Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tùy ý.

Lời giải.

a) Ta có $f(0) = \frac{150}{10}$ nên đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(0; 15)$.

b) Chọn bất kì $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$.

$$\text{Ta có } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{150}{x_2 + 10} - \frac{150}{x_1 + 10}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 - x_1)(x_1 + 10)(x_2 + 10)} = -\frac{1}{(x_1 + 10)(x_2 + 10)} < 0.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$ hay hàm số giảm trên $[0; +\infty)$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{150}{x + 10} = 0$.

Vậy khi x càng lớn, đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tùy ý. □

Bài 70. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công thức $h(t) = \frac{100}{2 + 3 \cdot (0,4)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t \rightarrow +\infty$).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \frac{100}{2 + 3 \cdot (0,4)^t} = 100.$$

Vậy chiều dài của loài động vật khi trưởng thành là 100 mm. □

Bài 71. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t) = 4t^2 - 3t + 1$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t = 8$ giây.

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 8$ giây là

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(8 + \Delta t) - s(8)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4(8 + \Delta t)^2 - 3(8 + \Delta t) + 1 - 233}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4(\Delta t)^2 + 61\Delta t}{\Delta t} = 61 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

□

Bài 72. Bỏ qua lực cản của không khí, độ cao tối đa mà tên lửa đạt được khi phóng với vận tốc ban đầu v_0 là $h = \frac{v_0^2 R}{19,6R - v_0^2}$, trong đó R là bán kính của trái đất. Tính $\lim_{R \rightarrow +\infty} h$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} h &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{v_0^2 R}{19,6R - v_0^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{v_0^2}{19,6 - \frac{v_0^2}{R}} = \frac{v_0^2}{19,6}. \end{aligned}$$

□

Bài 73. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S = \pi ab$. Cho elip có bán trục nhỏ bằng 30 cm, tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

Lời giải.

Ta có $S = \pi ab = \pi b \sqrt{b^2 + c^2}$.

Vậy $\lim_{c \rightarrow 0} S = \lim_{c \rightarrow 0} \pi b \sqrt{b^2 + c^2} = \pi b^2 = 900\pi \text{ cm}^2$.

□

Bài 74. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty nhỏ được cho bởi

$$N(t) = 25 \left(2 \left[\frac{t+2}{2} \right] - t \right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng tháng, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[2,4] = 2$, $[-2,7] = -3$).

a) Tính $\lim_{t \rightarrow 8^+} N(t)$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow 16^-} N(t)$.

Lời giải.

a) Khi $t \rightarrow 8^+$, ta có $\left[\frac{t+2}{2} \right] = 5$.

Suy ra $\lim_{t \rightarrow 8^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 8^+} 25 \left(2 \left[\frac{t+2}{2} \right] - t \right) = 50$.

b) Khi $t \rightarrow 16^-$, ta có $\left[\frac{t+2}{2} \right] = 8$.

Suy ra $\lim_{t \rightarrow 16^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 16^-} 25 \left(2 \left[\frac{t+2}{2} \right] - t \right) = 0$.

□

Bài 75. Định luật Boyle được phát biểu: “Đối với một lượng khí ở nhiệt độ không đổi, áp suất P tỷ lệ nghịch với thể tích V ”. Tìm giới hạn của P là $V \rightarrow 0^+$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{k}{V}$ với k là số thực dương không đổi.

Khi đó $\lim_{V \rightarrow 0^+} P = \frac{k}{V} = +\infty$.

□

Bài 76. Một vật khối lượng m (không đổi) bắt đầu chuyển động với vận tốc $v_0 = 0$, được gia tốc bởi một lực F không đổi trong t giây. Theo định luật Newton về chuyển động, vận tốc của vật là $v_N = \frac{Ft}{m}$. Theo thuyết tương đối Einstein, vật có vận tốc $v_E = \frac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}$, với c là vận tốc ánh sáng. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_N$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_E$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} v_N &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Ft}{m} = +\infty; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} v_E &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Fc}{\sqrt{\frac{m^2c^2}{t^2} + F^2}} = \frac{c}{F}.\end{aligned}$$

□

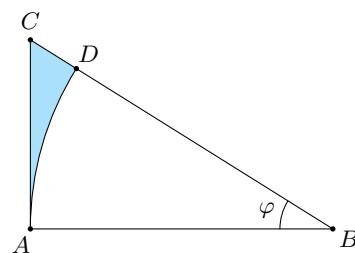
Bài 77.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn bán kính 10 và tam giác vuông (hình vẽ bên).

a) Đặt $S = f(\varphi)$, với $f(\varphi)$ là hàm số của φ (Đơn vị rad). Tìm công thức của $f(\varphi)$ với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

b) Tính giới hạn của $f(\varphi)$ khi $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

Lời giải.



a) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \tan \varphi = 8 \tan \varphi$.

Diện tích hình quạt ABD là $S_q = \frac{4^2\varphi}{2} = 8\varphi$.

Diện tích hình phẳng S là $S = f(\varphi) = S_{ABC} - S_q = 8(\tan \varphi - \varphi)$.

b) Khi $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ thì $\begin{cases} \cos \varphi \rightarrow 0 \\ \cos \varphi > 0. \end{cases}$

Suy ra $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 8 \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \varphi \right) = +\infty$.

□

Bài 78. Trên một chuyến đi dài d km đến một thành phố khác, vận tốc trung bình của một tài xế xe tải là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 50 km/h.

a) Chứng minh rằng $y = \frac{25x}{x - 25}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x \rightarrow 25^+$ và giải thích ý nghĩa của nó.

Lời giải.

a) Thời gian chuyến đi là $\frac{d}{x}$, thời gian chuyến trở về là $\frac{d}{y}$.

Suy ra

$$\frac{2d}{50} = \frac{d}{x} + \frac{d}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{25} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{25x}{x - 25}.$$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 25^+} y = \lim_{x \rightarrow 25^+} \frac{25x}{x - 25} = +\infty$.

Khi vận tốc trung bình chuyến đi bằng 25 km/h, thì vận tốc trung bình chuyến của cả chuyến đi và về không thể là 50 km/h.

□

Bài 79. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 5 \sin(4\pi t)$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$ giây. (Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây là

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(5 + \Delta t) - v(5)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5 \sin(20\pi + 4\pi\Delta t) - 5 \sin(20\pi)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5 \sin(4\pi\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{20\pi \sin(4\pi\Delta t)}{4\pi\Delta t} \\ &= 20\pi. \end{aligned}$$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây là 20π (m/s²). □

Bài 80. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối chứa 30 g muối trên một lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Gọi nồng độ của muối sau t phút (tính bằng gam trên lít) là $C(t)$. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$. Giải thích

ý nghĩa của giới hạn này.

Lời giải.

Số lít nước muối được bơm vào bể sau t phút là $25t$ lít.

Số g muối có trong $25t$ lít nước muối là $30 \cdot 25t = 750t$ gam.

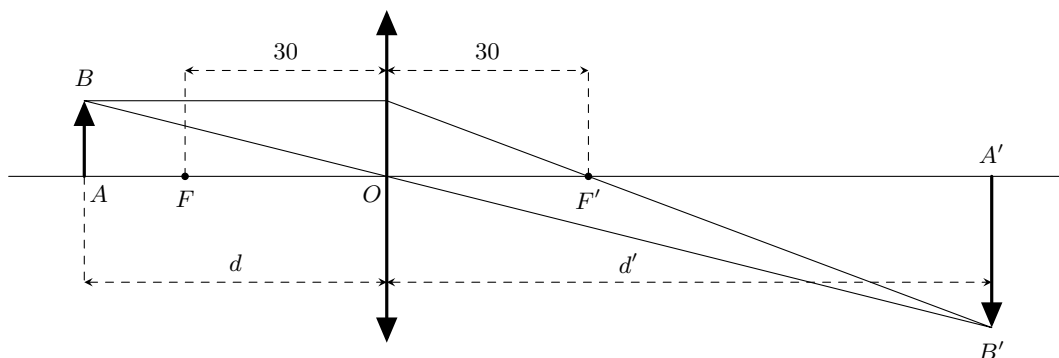
Nồng độ của muối trong bể sau t phút là

$$\frac{750t}{25t + 5000} = \frac{30t}{t + 200} \text{ gam/lít.}$$

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t + 200} = 30$ gam/lít.

Khi thời gian tiến tới vô hạn thì nồng độ của muối trong bể bằng nồng độ của nước muối bơm vào bể. □

Bài 81. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng $d > 30$ (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm) (Hình vẽ dưới). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{30}$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tìm các giới hạn $\lim_{d \rightarrow 30^+} h(d)$; $\lim_{d \rightarrow 30^-} h(d)$ và $\lim_{d \rightarrow +\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} &= \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d'} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d} = \frac{d - 30}{30d} \Leftrightarrow d' = \frac{30d}{d - 30}. \\ \text{Vậy } d' &= h(d) = \frac{30d}{d - 30}. \end{aligned}$$

b) Khi $d \rightarrow 30^+$, ta có $d - 30 \rightarrow 0$, $d - 30 > 0$ và $30d \rightarrow 900$.

$$\text{Suy ra } \lim_{d \rightarrow 30^+} h(d) = \lim_{d \rightarrow 30^+} \frac{30d}{d - 30} = +\infty.$$

Khi $d \rightarrow 30^-$, ta có $d - 30 \rightarrow 0$, $d - 30 < 0$ và $30d \rightarrow 900$.

$$\text{Suy ra } \lim_{d \rightarrow 30^-} h(d) = \lim_{d \rightarrow 30^-} \frac{30d}{d - 30} = -\infty.$$

$$\text{Ta có } \lim_{d \rightarrow +\infty} h(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{30d}{d - 30} = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{30}{1 - \frac{30}{d}} = 30.$$

Vậy

- ☑ Khi vị trí của vật tiến gần tiêu điểm F ($d > f$) thì vị trí ảnh thật của vật dần ra xa vô cực.
- ☑ Khi vị trí của vật tiến gần tiêu điểm F ($d < f$) thì vị trí ảnh ảo của vật dần ra xa vô cực.
- ☑ Khi vị trí của vật tiến ra xa vô cực thì ảnh thật của vật dần tới tiêu điểm.

□

Bài số 3

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A – KHÁI NIỆM

1. Hàm số liên tục tại một điểm

✎ **Định nghĩa 3.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

○ **Nhận xét.** Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

✎ **Định nghĩa 3.2.**

- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

⚠ **Khái niệm hàm số liên tục trên các tập hợp có dạng $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; +\infty)$ được định nghĩa tương tự.**

○ **Nhận xét.** Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là “đường liền” trên khoảng đó.

B – MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1. Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), hàm căn thức, hàm số lượng giác là những hàm sơ cấp cơ bản. Sau đây, ta sẽ xét tính liên tục của những hàm số đó.

✎ **Định lý 3.1.**

- ☑ Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ☑ Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- ☑ Hàm căn thức $y = \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục

✎ **Định lý 3.2.** Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- a) Các hàm số $f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$ và $f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;
- b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

C – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (CD). Bạn Nam cho rằng: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0 , thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0 ”. Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

Lời giải.

Giả sử hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 .

Khi đó, hàm số $g(x) = h(x) - f(x)$ là hiệu của hai hàm số liên tục tại x_0 nên hàm số $g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 . Điều này mâu thuẫn với giả thiết là $g(x)$ không liên tục tại x_0 .

Vậy ý kiến trên là đúng. □

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$. (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là

- (A) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. (B) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
(C) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. (D) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải.

Hàm số f xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$ có đồ thị là đường đi xuống từ trái sang phải trên $(a; b)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$ có đồ thị là đường đi lên từ trái sang phải trên $(a; b)$.
(C) Hàm số $y = 0$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathbb{R}$.
(D) Hàm số liên tục trên $(a; b)$ có đồ thị là đường liền nét trên $(a; b)$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $(a; b)$ có đồ thị là đường liền nét trên $(a; b)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Trong các loại hàm số sau, hàm số nào luôn liên tục trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$?

- (A) Hàm số lượng giác. (B) Hàm số đa thức.
(C) Hàm số phân thức hữu tỉ. (D) Hàm số có chứa căn bậc hai.

Lời giải.

Hàm số đa thức luôn liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi nào?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x)$. (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(0)$. (D) $f(x_0) = 0$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $f(x)$ không xác định tại x_0 .

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

(C) Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 .

(D) $f(x)$ có giá trị 0 tại x_0 .

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục, ta có: do $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 . Vì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại nên $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Xét các mệnh đề sau

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.
- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.
- Nếu $f(x)$ không liên tục tại x_0 thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.
- $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại x_0 .

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Theo định lý thì mệnh đề thứ nhất và mệnh đề thứ ba đúng.

Xét hàm số $f(x) = |x|$ ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$. Vậy hai mệnh đề còn lại sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

(B) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

(C) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$, thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a; b)$.

(D) Nếu $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Tìm khẳng định đúng trong hai khẳng định sau

I. $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì tồn tại ít nhất số $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

II. $f(x)$ liên tục trên (a, b) và (b, c) nhưng không liên tục trên (a, c) .

(A) Chỉ I đúng.

(B) Chỉ II đúng.

(C) Cả I và II đều sai.

(D) Cả I và II đều đúng.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $f(a) = L$. (B) Hàm số liên tục tại $x = a$.
(C) Hàm số xác định tại $x = a$. (D) Không đáp án nào đúng.

🗨️ **Lời giải.**

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$. (B) Hàm số liên tục tại $x = 3$.
(C) $f(3) = -1$. (D) $f(3)$ không xác định.

🗨️ **Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ thì $f(x)$ cũng liên tục trên mọi khoảng con của $(a; b)$.
(B) Mọi hàm số đa thức đều liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(C) Mọi hàm số phân thức hữu tỉ đều liên tục trên mọi khoảng mà nó xác định.
(D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên hai khoảng liên tiếp $(a; b)$ và $(b; c)$ thì $f(x)$ cũng liên tục trên khoảng $(a; c)$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2x+3 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Ta thấy $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$ nhưng không liên tục trên $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hàm số $g(x) = (f(x))^2$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. (B) Hàm số $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.
(C) Hàm số $k(x) = \frac{1}{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. (D) Hàm số $u(x) = |f(x)|$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.

🗨️ **Lời giải.**

Đối với hàm số $k(x) = \frac{1}{f(x)}$, cần thêm điều kiện $f(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- (A) Hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.
(B) Hàm số $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.
(C) Hàm số $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.
(D) Hàm số $v(x) = af(x) + bg(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ với a, b là các hằng số.

🗨️ **Lời giải.**

Hàm số $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ khi $g(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
II. $f(x)$ không liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

- (A) Chỉ I đúng. (B) Chỉ II đúng. (C) Cả I và II đúng. (D) Cả I và II sai.

🗨️ **Lời giải.**

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- (A) Luôn tồn tại $x_1 \in [a; b]$ sao cho $f(x) \geq f(x_1), \forall x \in [a; b]$.
 (B) Luôn tồn tại $x_2 \in [a; b]$ sao cho $f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a; b]$.
 (C) Với mọi $k \in [m; M]$, luôn tồn tại $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = k$.
 (D) Đồ thị của hàm số là một đường liên nét trên đoạn $[a; b]$.

Lời giải.

$f(x_1)$ chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$f(x_2)$ chính là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên có đồ thị là một đường liên nét trên đoạn $[a; b]$.

Ngoài ra, m và M chưa chắc là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Chọn đáp án (C)

□

Dạng 2. Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

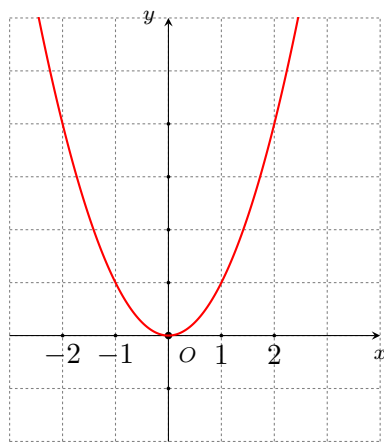
- ✓ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liên nét trên khoảng đó.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

1. Ví dụ mẫu

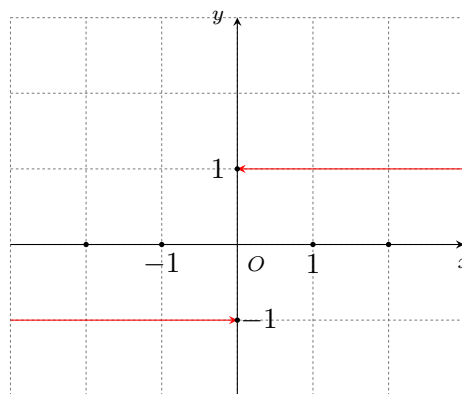
Ví dụ 2. Quan sát đồ thị hàm số trong Hình 12a và Hình 12b, xác định $f(0)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Từ đó cho biết mỗi hàm số đó liên tục tại $x = 0$ hay không? Giải thích.

Lời giải.

Trong Hình 12a ta có $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.



a) Đồ thị hàm số $f(x) = x^2$



b) Đồ thị hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

Hình 12

Như vậy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

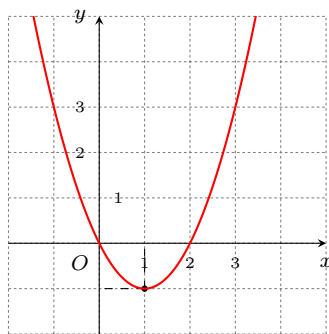
Trong Hình 12b ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

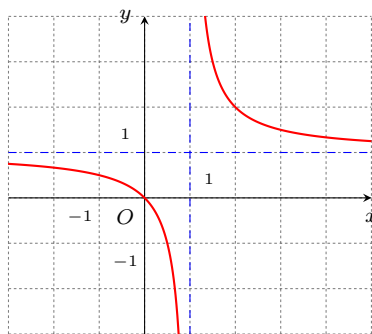
Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

□

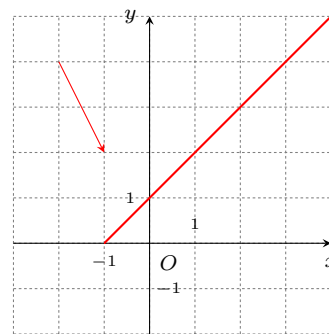
Ví dụ 3. Trong các hàm số có đồ thị ở Hình 15a, 15b, 15c hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số
 $f(x) = x^2 - 2x$



b) Đồ thị hàm số
 $g(x) = \frac{x}{x-1}$



c) Đồ thị hàm số
 $h(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x < -1 \\ x+1 & \text{nếu } x \geq -1 \end{cases}$

Hình 15

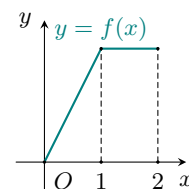
Lời giải.

Hàm số liên tục trên tập xác định là $f(x) = x^2 - 2x$. Vì đồ thị hàm số ở hình *Hình 15a* là một đường liền nét trên mặt phẳng tọa độ. □

Ví dụ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



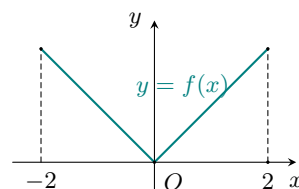
Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0; 2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 2)$. □

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



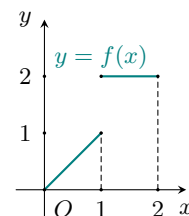
Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(-2; 2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-2; 2)$. □

Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.

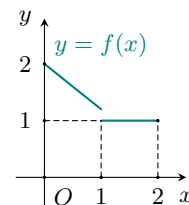


Lời giải.

- ☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- ☑ Đồ thị hàm số không liền nét tại điểm $x = 1$ do đó hàm số đã cho gián đoạn tại điểm này. □

Ví dụ 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



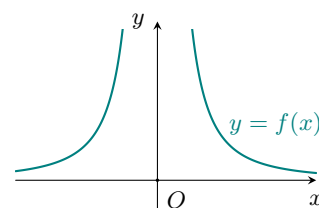
Lời giải.

- ☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- ☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > f(1) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$.
Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 1$.

□

Ví dụ 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$.



Lời giải.

Vì hàm số đã cho có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên

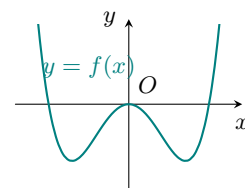
- ☑ $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên liên tục trên khoảng này.
- ☑ $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.
- ☑ $f(x)$ không xác định tại điểm $x = 0$ nên gián đoạn tại điểm này.

□

2. Bài tập tự luận

Bài 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$.



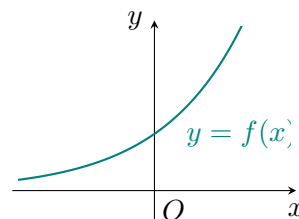
Lời giải.

Do đồ thị hàm số là một đường liền nét trên $\mathcal{D}$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

□

Bài 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$.



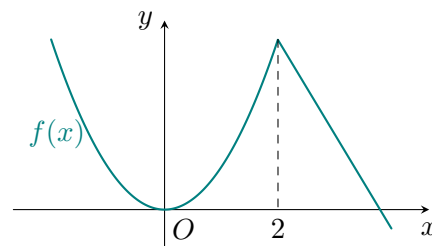
Lời giải.

Do đồ thị hàm số là một đường liền nét trên $\mathcal{D}$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

□

Bài 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$.

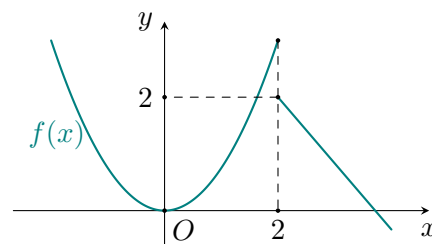


Lời giải.

Do đồ thị hàm số là một đường liền nét trên $\mathcal{D}$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. □

Bài 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 2$.

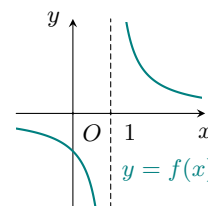


Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) > 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = 2$. □

Bài 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.



Lời giải.

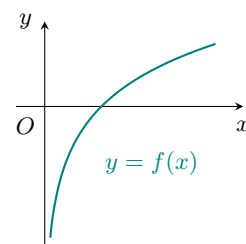
Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = 1$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- (A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.
- (C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0, +\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Lời giải.

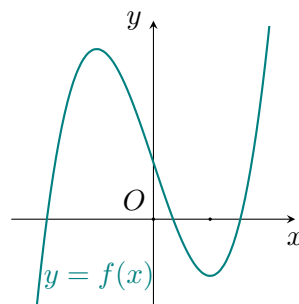
Quan sát đồ thị hàm số, ta có

☒ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

☒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

☒ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

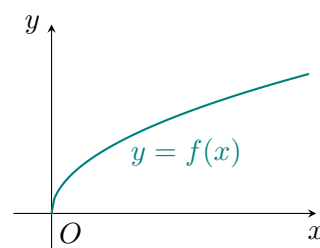
(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

(D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, thấy đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó hàm số đã cho liên tục trên khoảng này.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

(B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

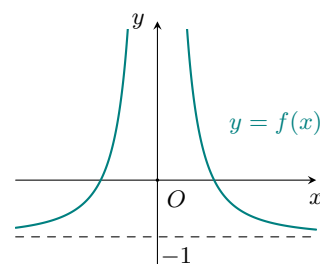
Quan sát đồ thị hàm số, ta có

☒ Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

☒ Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

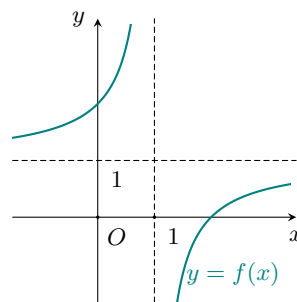
☒ Hàm số liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- (A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.
- (B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- (C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (D) Hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- ☑ Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.
- ☑ Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- ☑ Hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

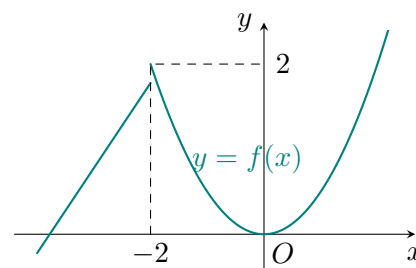
Chọn đáp án (C)



Câu 22.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- (A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- (C) Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$.
- (D) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

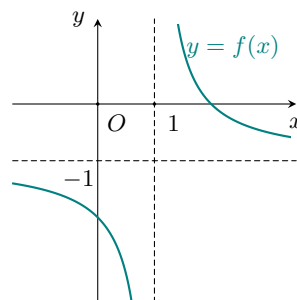
- ☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- ☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) < f(-2) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2) = 2$. Do đó $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$.
Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.

Chọn đáp án (D)



Câu 23. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- (A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
- (B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (C) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- ☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.

☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$

☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$

Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = 1.$

Chọn đáp án (A)



Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$

(D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$

🗨️ **Lời giải.**

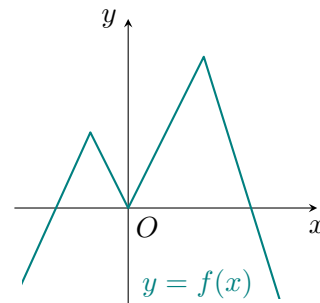
Quan sát đồ thị hàm số, ta có

☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}.$

☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

Chọn đáp án (D)



Câu 25. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = -3.$

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

(D) Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 3.$

🗨️ **Lời giải.**

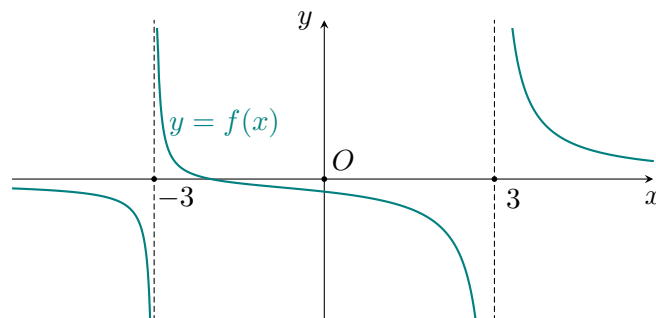
Quan sát đồ thị hàm số, ta có

☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$

☑ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại các điểm $x_0 = 3$ và $x_0 = -3.$

Chọn đáp án (D)



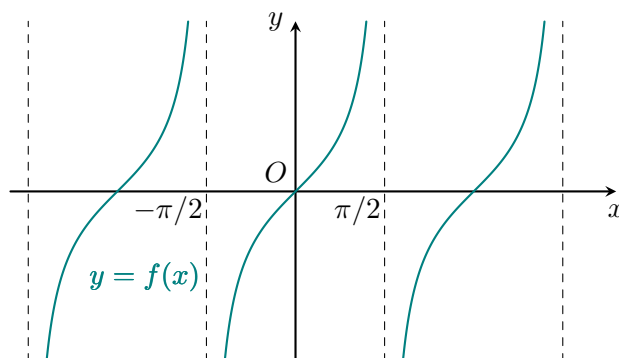
Câu 26. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}.$

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{2}.$

(D) Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}.$



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- ☑ Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 0)$, $(0; \frac{\pi}{2})$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại các điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$ và $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**



Dạng 3. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ ta cần làm như sau:

- ☑ Bước 1: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- ☑ Bước 2: Tính $f(x_0)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 9 (CD). Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Hàm số trên là hàm sơ cấp nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x + 1) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 19$ nên hàm số $y = 2x^3 + x + 1$ liên tục tại $x = 2$.



Ví dụ 10 (TH). Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1, x = 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1). \text{ Vậy hàm số } y = f(x) \text{ liên tục tại } x = -1.$$

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0). \text{ Vậy hàm số } y = f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$



Ví dụ 11 (TH). Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$?

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2 - 1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 1$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Hàm số } y = f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 1.$ □

Ví dụ 12 (KNTT). Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$.

Suy ra $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$. □

Ví dụ 13 (CTST). Xét tính liên tục của hàm số

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $f(2) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

b) Ta có $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 2 \cdot 0 = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 0 + 2 = 2$.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$. □

2. Bài tập tự luyện

Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $f(2) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

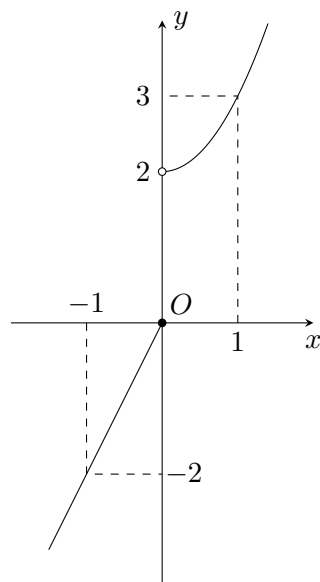
b) Ta có:

$f(2) = 2 \cdot 0 = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 2 \cdot 0 = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 0 + 2 = 2$.

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.



Bài 7 (VD). Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 3$ không?

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 = y(3) \text{ nên hàm số liên tục tại } x_0 = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 7x + 12) - (3^2 - 7 \cdot 3 + 12)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 7x + 12)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 \Rightarrow y'(3) = -1.$$

Bài 8. Xét tính liên tục của hàm dấu $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta thấy rằng $\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} s(x) = -1$. Do đó, không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Bài 9. Xét tính liên tục của hàm số

a) $f(x) = 1 - x^2$ tại điểm $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 1 \\ -x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

a) Ta có $f(3) = -8$ và $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (1 - x^2) = 1 - 3^2 = -8$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

b) Ta có:

$$f(1) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Bài 10. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \text{ tại điểm } x_0 = 0. \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$.

Suy ra $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$. □

Bài 11. Xét tính liên tục của hàm số:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 0;$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 1.$$

Lời giải.

a) Ta có

$$f(0) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1 - 0 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1.$$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ nên hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

b) Ta có

$$f(1) = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x) = 1.$$

Do đó, không thể xảy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$. □

Bài 12. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Hàm số trên là hàm sơ cấp nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x + 1) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 19$ nên hàm số $y = 2x^3 + x + 1$ liên tục tại $x = 2$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(B) Hàm số liên tục tại $x = 0$.

(C) Hàm số liên tục tại $x = 1$.

(D) Hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Tại $x = \frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^3-1} = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 1$:

(A) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

(B) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

(C) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.

(D) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Lời giải.

• $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x - 1} = -\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3 = f(1)$ suy ra $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 29. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $y = (x + 1)(x^2 + 2)$.

(B) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

(C) $y = \frac{x}{x - 1}$.

(D) $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ không xác định tại $x_0 = -1$ nên gián đoạn tại $x_0 = -1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 30. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = 2$?

(A) $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$.

(B) $y = \sin x$.

(C) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

(D) $y = \tan x$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó gián đoạn tại $x = 2$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 31. Hàm số $y = \frac{x}{x + 1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

(A) $x_0 = 2018$.

(B) $x_0 = 1$.

(C) $x_0 = 0$.

(D) $x_0 = -1$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = \frac{x}{x + 1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

(B) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

(C) Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.

(D) Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Do đó hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 33. Để hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ thì giá trị của a là

(A) -4 .

(B) 4 .

(C) 1 .

(D) -1 .

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y = y(-1)$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x + a) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3x + 2) = y(-1) \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 34. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

(A) $m = 0$. (B) $m = 6$. (C) $m = 4$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = m + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x + 1} - \sqrt{x + 2018}} & \text{khi } x \neq 1 \\ k & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm k để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

(A) $k = 2\sqrt{2019}$. (B) $k = \frac{2017 \cdot \sqrt{2018}}{2}$. (C) $k = 1$. (D) $k = \frac{20016}{2017} \sqrt{2019}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x + 1} - \sqrt{x + 2018}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2016} - 1 + x - 1)(\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2017x - 2017} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{2015} + x^{2014} + \dots + x + 1)(\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2017(x - 1)} = 2\sqrt{2019}. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow k = 2\sqrt{2019}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

(A) $a = 0$. (B) $a = -\frac{1}{2}$. (C) $a = \frac{1}{2}$. (D) $a = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 37. Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{khi } x \leq -1 \\ x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = b - 2$. (B) $a = -2 - b$. (C) $a = 2 - b$. (D) $a = b + 2$.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = b - 3$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = a - 1$. Để hàm số liên tục tại $x = -1$ thì $b - 3 = a - 1 \Leftrightarrow a = b - 2$.

Chọn đáp án (A)

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng bao nhiêu?

(A) -1 . (B) 1 . (C) 4 . (D) -4 .

Lời giải.

$$f(3) = m \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-\sqrt{x+1}-2) = -4.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.

Suy ra $m = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 5 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2ax - 3b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$ Tính giá trị của biểu thức $P = a - 4b$.

(A) $P = -4$.

(B) $P = -5$.

(C) $P = 5$.

(D) $P = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx - 5) = a + b - 5 = f(1)$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax - 3b) = 2a - 3b$. Vì hàm số liên tục tại $x = 1$ nên $a + b - 5 = 2a - 3b \Rightarrow a - 4b = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$?

(A) $m = 0$.

(B) $m = -1$.

(C) $m = 1$.

(D) $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ và $f(1) = m - 1$.

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 + m - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$?

(A) 0.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$.

Vì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 1 = -1 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (Thoả mãn)} \\ m = -1 \text{ (Loại)} \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x + a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$?

(A) $\frac{15}{4}$.

(B) $-\frac{15}{4}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $f(2) = 4 + a$.

Ta tính được $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow 4 + a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $a = -\frac{15}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số

đã cho liên tục tại $x = 2$?

(A) 3.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1)(\sqrt{x+2}+2) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6.$$

$$f(2) = 2m^2 - 4m + 6.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 1} - 2}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 4 - m, & x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi

(A) $m = 3$.

(B) $m = -3$.

(C) $m = 7$.

(D) $m = -7$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = 4 - m$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 1} - 2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+5)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{3x^2 + 2x - 1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{(x+1)(\sqrt{3x^2 + 2x - 1} + 2)} = 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4 - m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

(A) $m = \frac{-3}{2}$.

(B) $m = \frac{-5}{2}$.

(C) $m = \frac{3}{2}$.

(D) $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\bullet f(-1) = -m + 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -m + 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m + 2 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{4}{5} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên

tục tại $x = 0$.

(A) $a = -\frac{3}{4}$.

(B) $a = \frac{4}{3}$.

(C) $a = -\frac{4}{3}$.

(D) $a = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4 - 4}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$f(0) = 2a - \frac{5}{4}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2a - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$

Vậy $a = \frac{3}{4}.$

Chọn đáp án (D)



Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

(A) $m = 1.$

(B) $m = 3.$

(C) $m = 0.$

(D) $m = 2.$

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

Ta có $f(1) = 2 + m.$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = m + 2 \Leftrightarrow m = 0.$

Chọn đáp án (C)



Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi a bằng

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

(D) -1.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$

Ta có $f(2) = a, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$ Do đó $a = 1.$

Chọn đáp án (A)



Dạng 4. Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

☑ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 14 (Cánh Diều).

a) Hàm số $f(x) = 2x + 3$ có liên tục trên đoạn $[3; 4]$ hay không?

b) Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$ có liên tục trên khoảng $(1; 3)$ hay không?

Lời giải.

a) Với mỗi $x_0 \in (3; 4)$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2x + 3) = 2x_0 + 3 = f(x_0).$

Ta lại có

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 3) = 9 = f(3).$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x + 3) = 11 = f(4).$$

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[3; 4]$.

- b) Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ không xác định tại $x = 2$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.
Do $2 \in (1; 3)$ nên hàm số đã cho không liên tục trên khoảng $(1; 3)$.

□

Ví dụ 15 (Cánh Diều). Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x + \frac{6}{x-2}$.

- a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 3$.
b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số đó.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- a) Ta thấy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(x^3 + 2x + \frac{6}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^3) + \lim_{x \rightarrow 3} (2x) + \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x-2} \right) \\ &= 3^3 + 2 \cdot 3 + \frac{6}{3-2} \\ &= f(3) \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

- b) Hàm số $g(x) = x^3 + 2x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
Hàm số $h(x)$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên mỗi khoảng xác định $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
Vậy hàm số $f(x) = g(x) + h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

- c)

□

Ví dụ 16 (KNTT). Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{nếu } x \in (0; 1) \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ trên nửa khoảng $(0; 1]$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x - 1$ với $x \in (0; 1)$. Với $x_0 \in (0; 1)$ bất kì, ta có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - 1) = x_0 - 1 = f(x_0).$$

Do đó, hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 1)$.

Hơn nữa, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 = f(1)$$

nên $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $(0; 1]$.

□

Ví dụ 17 (KNTT). Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)$.

Lời giải.

- ☑ Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

☑ Với mọi $x_0 \in (-\infty; 1)$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{x_0+1}{x_0-1} = f(x_0).$$

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ hay $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

☑ Tương tự, hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

Vậy, hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. □

Ví dụ 18 (CTST). Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

💬 **Lời giải.**

Với mọi $x_0 \in (-1; 1)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0)$.

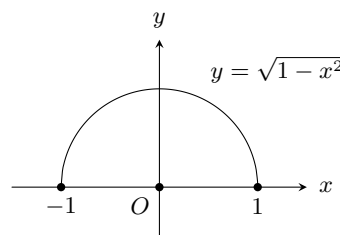
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (-1; 1)$.

Ta lại có

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(-1)^2} = 0 = f(-1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-1^2} = 0 = f(1).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$. □



2. Bài tập tự luyện

Bài 13. Xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$.

💬 **Lời giải.**

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Các hàm số $y = \sin x$ và $y = x+1$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \neq -1$ (hay liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$). □

Bài 14. Xét tính liên tục của các hàm số

a) $y = \sqrt{x^2+1} + 3 - x$.

b) $y = \frac{x^2-1}{x} \cdot \cos x$.

💬 **Lời giải.**

a)

Tập xác định của hàm số $S = \mathbb{R}$.

Các hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$ và $y = 3-x$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $y = \sqrt{x^2+1} + 3 - x$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ hay liên tục trên $\mathbb{R}$.

b)

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Các hàm số $y = \frac{x^2-1}{x}$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \neq 0$ và hàm số $y = \cos x$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} \cdot \cos x$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \neq 0$ (hay liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$). □

Bài 15. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$;

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$.

Lời giải.

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$ là hàm số phân thức, có tập xác định là $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

□

Bài 16. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -2)$ và $(-2, +\infty)$.

□

Bài 17.

a) Hàm số $f(x) = 2x + 3$ có liên tục trên đoạn $[3; 4]$ hay không?

b) Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ($x \neq 2$) có liên tục trên khoảng $(1; 3)$ hay không?

Lời giải.

a) Với mỗi $x_0 \in (3; 4)$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2x + 3) = 2x_0 + 3 = f(x_0)$.

Ta lại có

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 3) = 9 = f(3).$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x + 3) = 11 = f(4).$$

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[3; 4]$.

b) Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ không xác định tại $x = 2$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Do $2 \in (1; 3)$ nên hàm số đã cho không liên tục trên khoảng $(1; 3)$.

□

Bài 18. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x + \frac{6}{x-2}$.

a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 3$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số đó.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Ta thấy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(x^3 + 2x + \frac{6}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^3) + \lim_{x \rightarrow 3} (2x) + \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x-2} \right) \\ &= 3^3 + 2 \cdot 3 + \frac{6}{3-2} \\ &= f(3) \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

b) Hàm số $g(x) = x^3 + 2x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số $h(x)$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên mỗi khoảng xác định $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(x) = g(x) + h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. □

Bài 19. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Rõ ràng, hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, do đó $x_0 = 2$ thuộc tập xác định của hàm số.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = 3 = f(2).$$

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$. □

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Vậy, hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. □

Bài 21. Xét tính liên tục của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$ là hàm số sơ cấp có tập xác định là $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ nên nó liên tục trên $(-\infty; -2]$ và $[2; +\infty)$. □

Bài 22. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -2)$ và $(-2, +\infty)$. □

Bài 23 (TH). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số

đã cho liên tục tại $x = 2$?

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1)(\sqrt{x+2} + 2) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6.$$

$$f(2) = 2m^2 - 4m + 6.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$. □

Bài 24 (TH). Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$?

Lời giải.

Ta có

$$\bullet f(-1) = -m + 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -m + 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m + 2 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$. □

Bài 25 (TH). Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 4m + 1$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$. □

Bài 26 (TH). Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx - 2m^2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- $f(-1) = -m - 2m^2$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (mx - 2m^2) = -m - 2m^2$.

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 2) = -3$.

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\Leftrightarrow -m - 2m^2 = -3 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy các giá trị của m là $m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$. □

Bài 27 (VD). Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$?

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1-x}{1+x}\right) = m+1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = -1.$$

$$f(0) = m + 1.$$

Để hàm liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2$. □

Bài 28 (TH). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & \text{khi } (x > 1) \\ m^2 + m + \frac{1}{4} & \text{khi } (x \leq 1) \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm

số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$?

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}; \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m^2 + m + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Để hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ thì } m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}. \quad \text{□}$$

Bài 29 (TH). Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Lời giải.

Khi $x < 1$ thì $f(x) = 2x + a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Khi $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên liên tục trên

khoảng $(1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 1$, ta có

$$+ f(1) = 2 + a.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow 2a + 1 = 3 \rightarrow a = 1.$$

□

Bài 30 (TH). Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 3) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (mx + 2) = -m + 2.$$

$$f(-1) = -m + 2.$$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 = -m + 2 \Leftrightarrow m = 0$.

□

Bài 31 (VD). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x + 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số? Lệnh này giờ vô dụng Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin \pi x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 1) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sin \pi x = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ do đó hàm số liên tục tại $x = -1$.

Với $x \neq \pm 1$ thì hàm số liên tục trên tập xác định.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

□

Bài 32 (TH). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

Lời giải.

Vì f là hàm lượng giác nên hàm số f gián đoạn khi và chỉ khi hàm số f gián đoạn tại x làm cho $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\in (0; 2018) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2018 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} + k < \frac{2018}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2018}{\pi} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 641$. □

Bài 33 (TH). Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x - 2} & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x - 5m + m^2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

+ Xét trên $(2; +\infty)$ khi đó $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x - 2}$.

$\forall x_0 \in (2; +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + 2\sqrt{x - 2}) = x_0^2 + 2\sqrt{x_0 - 2} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

+ Xét trên $(-\infty; 2)$ khi đó $f(x) = 5x - 5m + m^2$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+ Xét tại $x_0 = 2$, ta có $f(2) = 4$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2\sqrt{x - 2}) = 4; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x - 5m + m^2) = m^2 - 5m + 10$. Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0 = 2$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m^2 - 5m + 10 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

□

Bài 34 (VD). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên

tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ với mọi a .

Với $x = 0$, ta có $f(0) = a - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1.$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$. □

Bài 35 (TH). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên

$\mathbb{R}$?

Lời giải.

Ta có hàm số luôn liên tục với $\forall x \neq 2$.

Tại $x = 2$, ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-m)x = (1-m)2$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2 x^2) = 4m^2; f(2) = 4m^2.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4m^2 = (1-m)2 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 2 = 0. (1)$$

Phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt. Vậy có hai giá trị của m . □

Bài 36. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$;

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$;

c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Lời giải.

a) $f(x)$ là hàm phân thức nên nó liên tục trên tập xác định hay liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

b) $g(x)$ là hàm sơ cấp nên nó liên tục trên tập xác định hay liên tục trên $[-3; 3]$.

c) Ta có:

$$y = \cos x \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$y = \tan x \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Do đó, hàm số } h(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
 □

Bài 37. Bạn Nam cho rằng: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0 , thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0 ”. Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

Lời giải.

Giả sử hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 .

Khi đó, hàm số $g(x) = h(x) - f(x)$ là hiệu của hai hàm số liên tục tại x_0 nên hàm số $g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 . Điều này mâu thuẫn với giả thiết là $g(x)$ không liên tục tại x_0 .

Vậy ý kiến trên là đúng. □

Bài 38. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó

a) $f(x) = x^2 + \sin x$.

b) $g(x) = x^4 - x^2 + \frac{6}{x-1}$.

c) $h(x) = \frac{2x}{x-3} + \frac{x-1}{x+4}$.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = x^2$ và hàm số $y = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = x^2 + \sin x$ là tổng của hai hàm số trên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.
- b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -4)$; $(-4; 3)$ và $(3; +\infty)$.

□

Bài 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{nếu } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$

- a) Với $a = 0$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 4$.
- b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$.
- c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Lời giải.

- a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(4) = 2a + 1 = 1$ (do $a = 0$).
 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 4^2 + 4 + 1 = 21$.
Vì $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ nên hàm số trên không liên tục tại $x = 4$ khi $a = 0$.
- b) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(4) = 2a + 1$.
 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 4^2 + 4 + 1 = 21$.
Để hàm số liên tục tại $x = 4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 2a + 1 = 21 \Leftrightarrow a = 10$.
Vậy $a = 10$ thì hàm số liên tục tại $x = 4$.
- c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- ☑ TH1: $x \neq 4$, hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
 - ☑ TH2: $x = 4$, hàm số trên là hàm hằng nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số trên liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 40. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow y = f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6Px - 3) = 6P - 3.$$

$$f(1) = 6P - 3.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 6P - 3 = -2 \Leftrightarrow P = \frac{1}{6}.$$

□

Bài 41 (TH). Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b + 1, & \text{khi } x > 0 \\ a \cos x + b \sin x, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

Lời giải.

Khi $x < 0$ thì $f(x) = a \cos x + b \sin x$ liên tục với $x < 0$.

Khi $x > 0$ thì $f(x) = ax + b + 1$ liên tục với mọi $x > 0$.

Tại $x = 0$ ta có $f(0) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b + 1) = b + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \cos x + b \sin x) = a.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = b + 1 \Leftrightarrow a - b = 1$. □

Bài 42 (TH). Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x + 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ x + m & \text{khi } x < -1 \end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1$.

$$\text{Có } y(-1) = -2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} y \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -1 + m.$$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $y(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y \Leftrightarrow -2 = -1 + m \Leftrightarrow m = -1$. □

Bài 43. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6};$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4 - x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$. Do đó hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$ và $(-2; +\infty)$;

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$. Với $x < 1$, ta có $f(x) = 1 + x^2$ là hàm đa thức, do đó liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$. Với $x > 1$, ta có $f(x) = 4 - x$ cũng là hàm đa thức, do đó liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$. Tại $x = 1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + x^2) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x) = 3.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ do đó hàm số đã cho không liên tục tại $x = 1$. Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. □

Bài 44. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Xét tại $x = 0$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sin 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + m) = m.$$

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow m = 0$. □

Bài 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2. \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $x_0 \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, ta có:

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ là hàm số liên tục trên $x_0 \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x_0 = -2$, ta có

$$f(-2) = a;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = 0.$$

Do đó, để hàm số liên tục tại $x_0 = -2$ thì $a = 0$. □

Bài 46. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0, 5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km
10 000 đồng	13 500 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải.

a) Gọi x là quãng đường di chuyển, $f(x)$ là giá tiền tính theo quãng đường.

☑ $0 \leq x \leq 0,5$, ta có $f(x) = 10000$ đồng.

☑ $0,5 < x \leq 30$, $f(x) = 10000 + 13500(x - 0,5)$ đồng.

☑ $x > 30$, $f(x) = 408250 + 11000(x - 30)$ đồng.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} 10000 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 10000 + 13500(x - 0,5) & \text{nếu } 0,5 < x \leq 30 \\ 408250 + 11000(x - 30) & \text{nếu } x > 30. \end{cases}$$

b) Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 0,5)$, $(0,5; 30)$ và $(30; +\infty)$.

Tại $x = 0,5$, ta có $f(0,5) = 10000$, $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = 10000$, $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = 10000$.

Vì $f(0,5) = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x)$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 0,5$.

Tại $x = 30$, ta có $f(30) = 408250$, $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = 408250$, $\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = 408250$.

Vì $f(30) = \lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} f(x)$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 30$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. □

Bài 47. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải.

Tập xác định $D = (0; 24]$

Khi $0 < x < 2$ thì $C(x) = 60000$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C(x)$ liên tục trên $(0; 2)$.

Khi $2 < x < 4$ thì $C(x) = 100000$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C(x)$ liên tục trên $(2; 4)$.

Khi $4 < x \leq 24$ thì $C(x) = 200000$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C(x)$ liên tục trên $(4; 24]$.

Khi $x_0 = 2$, ta có

$$f(2) = 60000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 60000 = 60000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 100000 = 100000.$$

Do đó hàm số không có giới hạn tại 2 nên không liên tục tại 2.

Khi $x_0 = 4$, ta có

$$f(4) = 100000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 100000 = 100000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 200000 = 200000.$$

Do đó hàm số không có giới hạn tại 4 nên không liên tục tại 4.

Vậy hàm số liên tục trên $(0; 24] \setminus \{2; 4\}$

□

Bài 48. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Lời giải.

Khi $0 < r < R$ thì $F(r) = \frac{GMr}{R^3}$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $F(r)$ liên tục trên $(0; R)$.

Khi $R < r$ thì $F(r) = \frac{GM}{r^2}$ là hàm phân thức liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $F(r)$ liên tục trên $(R; +\infty)$.

Tại $r = R$, ta có:

$$F(R) = \frac{GM}{R^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow R^-} F(r) = \lim_{x \rightarrow R^-} \frac{GMx}{R^3} = \frac{GM}{R^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow R^+} F(r) = \lim_{x \rightarrow R^+} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2}.$$

Do đó, hàm số liên tục tại R .

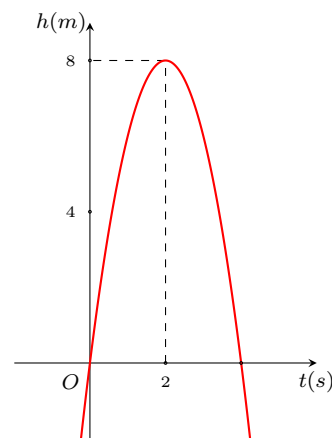
Vậy hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

□

Bài 49.

Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

- a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.
b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

**Lời giải.**

- a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
b) Dựa vào đồ thị ta có $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t) = 8$.

□

Bài 50. Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 10000 & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 10000 + (x - 0,7) \cdot 14000 & \text{khi } 0,7 < x \leq 20 \\ 280200 + (x - 20) \cdot 12000 & \text{khi } x > 20 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Lời giải.

Khi $0 < x < 0,7$, $T(x) = 1000$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $T(x)$ liên tục trên $(0; 0,7)$.

Khi $0,7 < x < 20$, $T(x) = 10000 + (x - 0,7) \cdot 14000$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $T(x)$ liên tục trên $(0,7; 20)$.

Khi $20 < x$, $T(x) = 280200 + (x - 20) \cdot 12000$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $T(x)$ liên tục trên $(20; +\infty)$.

Tại $x = 0,7$. Ta có

$$f(0,7) = 10000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} 10000 = 10000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^-} [10000 + (x - 0,7) \cdot 14000] = 10000 + (0,7 - 0,7) \cdot 14000 = 10000.$$

Do đó, $T(x)$ liên tục tại $x = 0,7$.

Tại $x = 20$. Ta có:

$$f(20) = 280200;$$

$$\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} [10000 + (x - 0,7) \cdot 14000] = 280200;$$

$$\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^-} [280200 + (x - 20) \cdot 12000] = 280200 + (20 - 20) \cdot 12000 = 280200,.$$

Do đó, $T(x)$ liên tục tại $x = 20$.

Từ những điều trên, $T(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

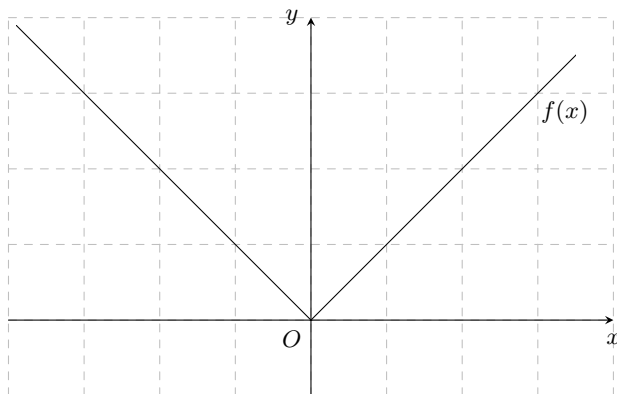
- (A) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Chọn $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 50. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



Chọn mệnh đề đúng.

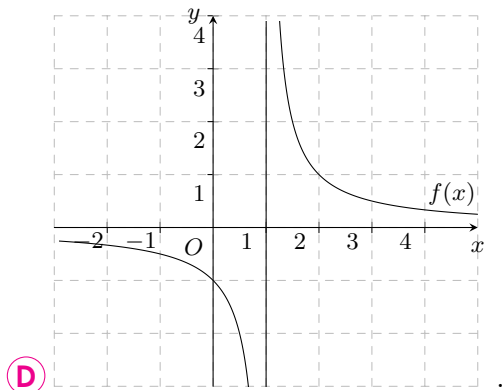
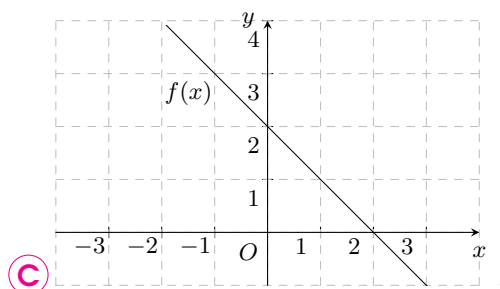
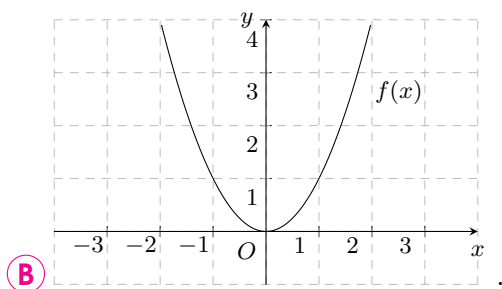
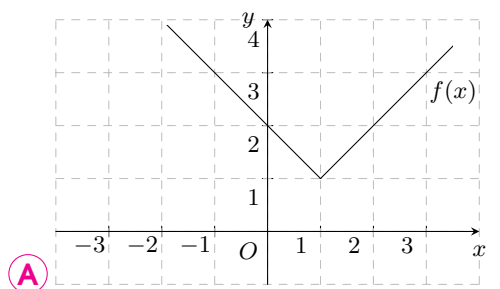
- (A) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng không liên tục tại điểm $x = 0$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ không liên tục và không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Lời giải.

Đồ thị là một đường liền nét, nhưng bị “gãy” tại điểm $x = 0$ nên nó liên tục tại điểm $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 51. Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x = 1$?



Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} y$ nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Câu 52. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{1-x^3}{1-x}, & \text{khi } x < 1 \\ 1, & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

(A) y liên tục phải tại $x = 1$.

(B) y liên tục tại $x = 1$.

(C) y liên tục trái tại $x = 1$.

(D) y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y(1) = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x+x^2) = 4$.

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = y(1)$, suy ra y liên tục phải tại $x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^3 - x$.

(B) $y = \cot x$.

(C) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

(D) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Lời giải.

Vì $y = x^3 - x$ là đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \tan x + 5$.

(B) $f(x) = \frac{x^2+3}{5-x}$.

(C) $f(x) = \sqrt{x-6}$.

(D) $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ và có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ do đó hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

(B) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

(D) Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

+ Với $x > 2$, ta có $f(x) = -x^2 + x + 3$ là hàm đa thức $\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

+ Với $x < 2$, ta có $f(x) = 5x + 2$ là hàm đa thức $\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

+ Tại $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + x + 3) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x + 2) = 12 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$ hay Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \sqrt{x}$.

(B) $f(x) = x^4 - 4x^2$.

(C) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2}{x+1}}$.

(D) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x+1}$.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2$ có dạng đa thức với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \sqrt{x^2+1}-m & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m = \frac{3}{2}$.

(B) $m = \frac{1}{2}$.

(C) $m = -2$.

(D) $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Khi $x > 0$, ta có $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi $x < 0$, ta có $f(x) = \sqrt{x^2+1} - m$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 0$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2+1} - m) = 1 - m = f(0). \text{ Do đó hàm số liên tục tại } x = 0 \text{ khi và chỉ khi } \frac{1}{2} = 1 - m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên

$\mathbb{R}$.

(A) $m = 8$ hoặc $m = -\frac{7}{4}$. (B) $m = \frac{7}{4}$. (C) $m = -\frac{7}{4}$. (D) $m = -8$ hoặc $m = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

* Với $x > 4$ thì $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ là hàm phân thức nên liên tục trên tập xác định của nó $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(4; +\infty)$.

* Với $x < 4$ thì $f(x) = mx+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 4)$.

Do vậy hàm số $f(x)$ đã liên tục trên các khoảng $(4; +\infty)$, $(-\infty; 4)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x = 4$. Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx+1) = 4m+1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+4) = 4m+1 \Leftrightarrow 4m+1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } x < -5 \\ x+17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax+b+10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

(A) -1 . (B) 0 . (C) 1 . (D) 2 .

Lời giải.

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2+ax+b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x+7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax+b+10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.

Ta có

$$f(-5) = 12; f(10) = 17.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2+ax+b) = -5a+b+25.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x+17) = 12. \quad \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (x+17) = 27. \quad \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (ax+b+10) =$$

$10a+b+10$. Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a+b+25 = 12 \\ 10a+b+10 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a+b = -13 \\ 10a+b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a+b = -1.$$

Chọn đáp án (A) □

Dạng 5. Bài toán có chứa tham số

Ví dụ mẫu

Ví dụ 19 (Cánh Diều). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $f(x) = x + 1$ nếu $x \neq 3$ nên hàm số đó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Với $x = 3$ thì $f(3) = a$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 3 + 1 = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow a = 4.$$

□

Ví dụ 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $f(x) = x + 1$ nếu $x \neq 3$ nên hàm số đó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Với $x = 3$ thì $f(3) = a$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 3 + 1 = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow a = 4.$$

□

Ví dụ 21. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Xét tại $x = 0$.

Ta có

$$\text{☑ } f(0) = \sin 0 = 0.$$

$$\text{☑ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0.$$

$$\text{☑ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + m) = m.$$

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow m = 0$.

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 51. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-m}$ liên tục trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Hàm số $f(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ nên hàm số liên tục trên $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Vậy để hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; 2)$ thì

$$\begin{cases} (1; 2) \subset (-\infty; m) \\ (1; 2) \subset (m; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq 1. \end{cases}$$

□

Bài 52. Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x \neq 2 \\ a & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$ là hàm đa thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Vậy để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ cần liên tục tại $x = 2$, điều này tương đương với

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = a \Leftrightarrow 2 + 2 = a \Leftrightarrow a = 4.$$

□

Bài 53. Tìm các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ liên tục trên khoảng $(m; 2m + 1)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ là hàm số căn thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 3]$.

Suy ra hàm số $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ liên tục trên khoảng $(m; 2m + 1)$ khi và chỉ khi

$$(m; 2m + 1) \subset [-3; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ 2m + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \geq m \geq 1.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 54. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x - 6}{6 + x} & \text{khi } x \neq -6 \\ \sqrt{mx + 4} + mx - 5 & \text{khi } x = -6 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -6$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 5x - 6}{6 + x} = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{(x + 6)(x - 1)}{6 + x} = \lim_{x \rightarrow -6} (x - 1) = -6 - 1 = -7$.

Mặt khác $f(-6) = \sqrt{-6m + 4} - 6m - 5$ nên hàm số liên tục tại $x_0 = -6$ tương đương với

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -6} f(x) &= f(-6) \\ \Leftrightarrow \sqrt{-6m + 4} - 6m - 5 &= -7 \\ \Leftrightarrow \sqrt{-6m + 4} &= 6m - 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6m - 2 \geq 0 \\ -6m + 4 = 36m^2 - 24m + 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{3} \\ 36m^2 - 18m = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow m &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 55. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{1}{8}(a + x) & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

$$\textcircled{v} f(2) = \frac{1}{8}(a + 2).$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4x + 3)}{x(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x(x + 2)} = \frac{15}{8}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}(a + 2) = \frac{15}{8} \Leftrightarrow a = 13$.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 60. Tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ liên tục trên khoảng $(m; m+2)$ là

(A) $m \geq 1$. (B) $m > 1$. (C) $m > -1$. (D) $m \geq -1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ là hàm số dạng căn thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.
 Vậy hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ liên tục trên khoảng $(m; m+2)$ khi và chỉ khi

$$(m; m+2) \subset [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \neq 3 \\ 2m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 3$.

(A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 3$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x-2) = 4$, $f(3) = 2m$. Để hàm số liên tục tại $x_0 = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 4 = 2m \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+5 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu a bằng

(A) 0. (B) 3. (C) -1. (D) 7.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $(2; +\infty)$ và $(-\infty; 2)$, từ đó suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu nó liên tục tại $x = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+5) = 2a+5$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 5 = 5$.

Từ đó suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $2a+5 = 5 \Rightarrow a = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x \leq a \\ 2x-1 & \text{nếu } x > a \end{cases}$. Giá trị của a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số có dạng đa thức trên các khoảng $(-\infty; a)$ và $(a; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ hiển nhiên liên tục trên $(-\infty; a)$ và $(a; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = a$, điều này tương đương với

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow a+2 = 2a-1 \Leftrightarrow a = 3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

(A) $m = 2$. (B) $m = 1$. (C) $m = 0$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$:

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+m) = 4+m = f(2)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x-1) = 5$.

Khi đó hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4+m = 5 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Biết hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{khi } x \leq -1 \\ x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $a - b$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + a) = a - 1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + b) = b - 3$.

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có $a - 1 = b - 3 \Leftrightarrow a - b = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 & \text{khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

- (A) $m = 12$. (B) $m = 8$. (C) $m = -10$. (D) $m = 10$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x^2 + 7) = 7$ và $f(-1) = m - 3$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $m - 3 = 7 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

- (A) $n = 1, m = 0$. (B) $n = 0, m = 1$. (C) $n = m = 1$. (D) $n = -1, m = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 1) = m + 1;$$

$$f(1) = n.$$

Do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 1 = n$.

Suy ra $n = 1, m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ 1 - m & \text{khi } x = 4 \end{cases}$ liên tục tại $x = 4$.

- (A) $m = 7$. (B) $m = 0$. (C) $m = 2$. (D) $m = -5$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{\sqrt{x + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(\sqrt{x + 5} + 3)}{x - 4} = - \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x + 5} + 3) = -6$.

Để hàm số liên tục tại $x = 4$ thì $-6 = 1 - m \Leftrightarrow m = 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Cho các tham số a, b thỏa mãn hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - bx + 4}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của

biểu thức $P = a + b$ là

- (A) 27. (B) 28. (C) 29. (D) 30.

Lời giải.

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$, điều này tương đương với

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - bx + 4}{x - 1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(ax + a - b + \frac{a - b + 4}{x - 1} \right) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 4 = 0 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 11. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 28$.

Chọn đáp án **(B)**



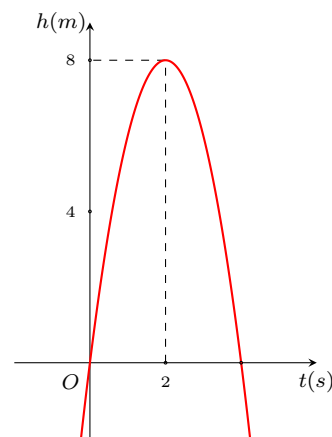
Dạng 6. Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

1. Ví dụ

Ví dụ 22.

Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

- Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.
- Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.



Lời giải.

- Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Dựa vào đồ thị ta có $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t) = 8$.



Ví dụ 23. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải.

- Hàm số $C(x)$ là hàm hằng trên từng khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$ nên liên tục trên từng khoảng đó.

- Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} C(x) = 60.000 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} C(x) = 100.000 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} C(x)$, vậy $C(x)$ không liên tục tại $x_0 = 2$.

- Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} C(x) = 100.000 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} C(x) = 200.000 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} C(x)$, vậy $C(x)$ không liên tục tại $x_0 = 4$.

Vậy hàm số $C(x)$ liên tục trên từng khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$.



Ví dụ 24. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}, \text{ trong đó } M \text{ là khối lượng, } R \text{ là bán kính của Trái Đất, } G \text{ là hằng số hấp dẫn.}$$

Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Lời giải.

- Với mọi $r \in (0; R)$, hàm số $F(r) = \frac{GM}{R^3}$ luôn xác định nên liên tục tại đó.

☑ Với mọi $r \in (R; +\infty)$, hàm số $F(r) = \frac{GM}{r^2}$ luôn xác định nên liên tục tại đó.

☑ Ta có
$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow R^-} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \\ \lim_{x \rightarrow R^+} F(r) = \lim_{x \rightarrow R^+} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \\ F(R) = \frac{GM}{R^2} \end{cases} \text{ nên hàm số } F(r) \text{ liên tục tại } r = R.$$

Vậy hàm số $F(r)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. □

Ví dụ 25. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0, 5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km
10 000 đồng	13 500 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải.

a) Gọi x là quãng đường di chuyển, $f(x)$ là giá tiền tính theo quãng đường.

- ☑ $0 \leq x \leq 0,5$, ta có $f(x) = 10000$ đồng.
- ☑ $0,5 < x \leq 30$, $f(x) = 10000 + 13500(x - 0,5)$ đồng.
- ☑ $x > 30$, $f(x) = 408250 + 11000(x - 30)$ đồng.

Vậy
$$f(x) = \begin{cases} 10000 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 10000 + 13500(x - 0,5) & \text{nếu } 0,5 < x \leq 30 \\ 408250 + 11000(x - 30) & \text{nếu } x > 30. \end{cases}$$

b) Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 0,5)$, $(0,5; 30)$ và $(30; +\infty)$.

Tại $x = 0,5$, ta có $f(0,5) = 10000$, $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = 10000$, $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = 10000$.

Vì $f(0,5) = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x)$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 0,5$.

Tại $x = 30$, ta có $f(30) = 408250$, $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = 408250$, $\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = 408250$.

Vì $f(30) = \lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} f(x)$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 30$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. □

Dạng 7. Bài toán phương trình có nghiệm

Ví dụ mẫu

Ví dụ 26. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^3 - 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - 10$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có

- ☑ Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ☑ $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 30 > 0$. Suy ra $f(0)f(2) < 0$.

Suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$. □

Ví dụ 27. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải.

Ta có

- ☑ Hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ có dạng đa thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

☑ $f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ nên $f(-2)f(-1) < 0, f(-1)f(1) < 0$ và $f(1)f(2) < 0$.

Do đó hàm số có 3 nghiệm phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(-2; -1), (-1; 1)$ và $(1; 2)$.

Mặt khác hàm số $f(x)$ là đa thức bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm thực.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 56. Chứng minh phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

☞ **Lời giải.**

Đặt $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên $[-1; 2]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -11 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -11 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 2) : f(x_0) = 0$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có

ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$. □

Bài 57. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

☞ **Lời giải.**

Đặt $f(x) = x^3 + x + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 0) : f(x_0) = 0$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có ít

nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$. □

Bài 58. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

☞ **Lời giải.**

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[-2; 0], [0; 1], [1; 2]$.

☑ Ta có $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 0)$. (1)

☑ Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

☑ Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) = -3 < 0 \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra phương trình có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2; 0), (0; 1), (1; 2)$. Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm. Suy ra phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

☞ **Nhận xét.** Với sự hỗ trợ của chức năng Table trong Casio, ta dễ dàng tìm được các khoảng $(-2; 0), (0; 1), (1; 2)$ như trên. Công việc còn lại là trình bày sao cho đúng ngôn ngữ. □

Bài 59. Chứng minh phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

☞ **Lời giải.**

Đặt $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(-1) = m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 0) : f(x_0) = 0$.

Do đó phương trình $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m$. □

Bài 60. Chứng minh rằng phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

☞ **Lời giải.**

Đặt $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \leq b \leq c$.

- ☑ Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì $f(b) = (b - a)(b - c) = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = b$.
- ☑ Nếu $a < b < c$ thì $\begin{cases} f(a) = (a - b)(a - c) > 0 \\ f(b) = (b - a)(b - c) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm. □

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 70. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - x + 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Một bạn học sinh trình bày lời giải như sau:

Bước 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bước 2: Ta có $f(0) = 3$ và $f(-2) = -3$.

Bước 3: Suy ra $f(0)f(-2) > 0$

Bước 4: Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Học sinh trên giải **sai** tại

- (A) Bước 1. (B) Bước 2. (C) Bước 3. (D) Bước 4.

☑ **Lời giải.**

Ta có $f(0)f(-2) < 0$ do đó bài giải sai ở **Bước 3**.

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Biết rằng trong khoảng $(-4; 0)$, phương trình $x^3 - 12x + 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm. Nghiệm đó thuộc khoảng

- (A) $(-4; -3)$. (B) $(-3; -2)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(-1; 0)$.

☑ **Lời giải.**

Hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-4)f(-3) < 0$ nên nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thuộc khoảng $(-4; -3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Biết rằng phương trình $x^5 - 4x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc đúng 3 khoảng trong các khoảng 4 khoảng $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$ và $(2; 3)$. Khoảng không chứa nghiệm của phương trình $x^5 - 4x^2 + x + 1 = 0$ là

- (A) $(-1; 0)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(2; 3)$.

☑ **Lời giải.**

Hàm số $f(x) = x^5 - 4x^2 + x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(1) < 0$ và $f(1)f(2) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong các khoảng $(-1; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Vậy phương trình $x^5 - 4x^2 + x + 1 = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x\sqrt{4-x}}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

- (A) Hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $K = (-\infty; 0) \cup (0; 4)$.
 (B) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.
 (C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$ và $x = 4$.
 (D) Vì $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $f(2) = \sqrt{2}$ nên $f(-1)f(2) < 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 2)$.

☑ **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; 4)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 4)$.

Từ đó tính chất liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ của hàm số không xảy ra.

Vậy không thể suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Khẳng định nào sau đây đúng với phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$?

- (A) Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

- (B) Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.
 (C) Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.
 (D) Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; -1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ là hàm đa thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-1) \cdot f(0) = -6 < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

- (A) $2x^2 - 3x + 4 = 0$. (B) $(x - 1)^5 - x^7 - 2 = 0$. (C) $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$. (D) $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2017} - 8x + 4 = 0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(0) = 4; f(1) = -1$ nên $f(0) \cdot f(1) = -4 < 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Xét các mệnh đề sau

(1) Phương trình $x^3 + 4x + 4 = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

(2) Phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ không có nghiệm dương bé hơn 1.

Chọn đáp án đúng.

- (A) Cả mệnh đề (1) và (2) đều đúng. (B) Mệnh đề (1) và (2) đều sai.
 (C) Chỉ có mệnh đề (2) đúng. (D) Chỉ có mệnh đề (1) đúng.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + 4x + 4, g(x) = x^3 + x - 1$.

Nhận xét: $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác

☑ $f(-1) = -1, f(1) = 9 \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

☑ $g(0) = -1, g(1) = 1 \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
 Do đó phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm dương bé hơn 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thỏa mãn $a \neq 0$ và $2a + 6b + 19c = 0$. Biết phương trình có nghiệm x_0 , khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $x_0 \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. (B) $x_0 \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right]$. (C) $x_0 \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. (D) $x_0 \in [1; 2]$.

Lời giải.

Ta có $2a + 6b + 19c = 0 \Leftrightarrow 2a + 6b = -19c \Leftrightarrow a + 3b = \frac{-19c}{2}$.

Lại có $f(0)f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}c(a + 3b + 9c) = \frac{1}{9}c \cdot \frac{-19c}{2} = \frac{-19}{18}c^2 \leq 0$.

Vậy phương trình luôn có nghiệm $x_0 \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^3 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm.

- (A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m \in \{1; 2\}$. (C) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. (D) $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $m = 1$ hoặc $m = 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$.

Trường hợp 2. Với $m^2 - 3m + 2 \neq 0$.

Đặt $f(x) = (m^2 - 3m + 2)x^3 - 3x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ (1).

Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Từ đó, tồn tại $A < 0$ và $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = A < 0$.

Mặt khác $f(0) = 1$ nên $f(0) \cdot f(x_0) < 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm nằm giữa 0 và x_0 .

Từ hai trường hợp trên suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Cho phương trình $x^{12} + 1 = 4x^4 \cdot \sqrt{x^n - 1}$, ($n \in \mathbb{Z}^+$). Tìm số n nhỏ nhất để phương trình có nghiệm.

(A) $n = 3$.

(B) $n = 5$.

(C) $n = 2$.

(D) $n = 10$.

Lời giải.

Với n chẵn thì ta có $|x| \geq 1$, nếu x_0 là nghiệm của phương trình thì $-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Với n lẻ thì ta có $x \geq 1$. Lại có $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ cần xét $x > 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &\geq 2x^2 \\ x^8 - x^4 + 1 &= (x^4 - 1)^2 + x^4 \geq 2x^2 \sqrt{x^4 - 1}. \end{aligned}$$

Suy ra $x^{12} + 1 \geq 4x^4 \sqrt{x^4 - 1}$.

Dấu bằng không xảy ra nên ta có: $x^{12} + 1 > 4x^4 \sqrt{x^4 - 1} \geq 4x^4 \sqrt{x^n - 1}$ với mọi $n \leq 4$.

Với $n = 5$ ta xét hàm số $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4 \sqrt{x^5 - 1}$.

Ta có: $f(1) = 2$, $f(\sqrt[5]{2}) = 1 + 4\sqrt[5]{4} - 4\sqrt[5]{16} < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1; \sqrt[5]{2})$.

Vậy $n = 5$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

Bài số 4

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5};$

b) $\lim \frac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2};$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5};$

d) $\lim \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n}\right);$

e) $\lim \frac{4 \cdot 5^n + 2^{n+2}}{6 \cdot 5^n};$

f) $\lim \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}.$

Lời giải.

a) $\lim \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5} = \lim \frac{2 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{8 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{4}.$

b) $\lim \frac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2} = \lim \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-3 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^3}} = 0.$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5} = \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{8 - \frac{5}{n}} = \frac{1}{4}.$

d) $\lim \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n}\right) = \lim \left(4 - \frac{2 \cdot 2^n}{3^n}\right) = \lim \left(4 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 4.$

e) $\lim \left(\frac{4 \cdot 5^n + 2^{n+2}}{6 \cdot 5^n}\right) = \lim \left(\frac{4 + 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n}{6}\right) = \frac{2}{3}.$

f) $\lim \left(\frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}\right) = \lim \left(\frac{\frac{2}{6^n} + \frac{4}{n^3 \cdot 6^n}}{1}\right) = 0.$

□

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}.$

Lời giải.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6) = 4(-3)^2 - 5(-3) + 6 = 57.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \frac{1}{32}.$

□

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+8}{5x-2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+8}{5x-2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2+4}{2x+4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2+4}{2x+4}.$$

Lời giải.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+8}{5x-2} = \frac{6}{5}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+8}{5x-2} = \frac{6}{5}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)} = -1.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)} = 1.$$

$$e) \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+4) = 16 > 0; \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 0 \text{ và } x \rightarrow 2^- \Rightarrow x+2 < 0 \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+4}{2x+4} = -\infty$$

$$f) \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2+4) = 16 > 0; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 0 \text{ và } x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x+2 > 0 \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2+4}{2x+4} = +\infty$$

□

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x+b & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

- a) Với $a=0, b=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.
 b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x=2$?
 c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

Lời giải.

a) Với $a=0, b=1$, ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x+1 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 4 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x+1) = -5.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + a) = 4 + a \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x + b) = -6 + b.$$

Hàm số liên tục của hàm số tại $x = 2$ khi và chỉ khi tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 4 \\ -6 + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 10. \end{cases}$$

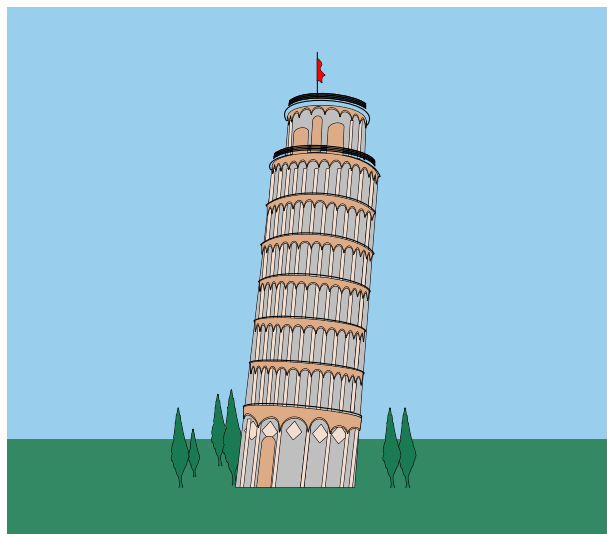
Vậy $a = 0; b = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Để hàm số liên tục trên tập xác định điều kiện cần và đủ là hàm số liên tục tại $x = 2$. Do đó với $a = 0, b = 10$ thì hàm số liên tục trên tập xác định.

□

Bài 5.

Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến: Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55,8$.

Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n ($n > 1$) là

$$d_n = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55,8 + 2 \cdot 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \lim d_n.$$

Vì $2 \cdot \frac{55,8}{10}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}; 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}; \dots; 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \frac{2 \cdot \frac{55,8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12,4.$$

Vậy $d = 55,8 + 12,4 = 68,2$ m.

□

Bài 6. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

- a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải.

- a) Ta có $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ lần lượt là chu vi của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

$$\begin{aligned} p_1 &= 3a \\ p_2 &= 3 \cdot \frac{1}{2}a \\ &\dots \\ p_n &= 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } \lim p_n = \lim 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a = 0.$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ S_2 &= \frac{1}{4} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &\dots \\ S_n &= \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } \lim S_n = \lim \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0.$$

- b) Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (p_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$ và

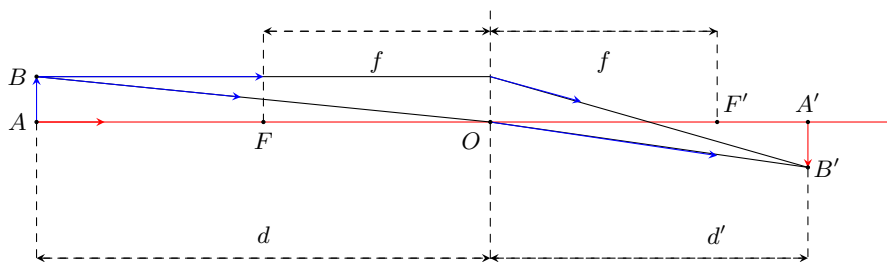
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \lim (p_n) = \frac{p_1}{1 - q} = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a.$$

Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (S_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$ và

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \lim (S_n) = \frac{S_1}{1 - q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

□

Bài 7. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



- a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.
- b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải.

a) Ta có

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f}.$$

$$\text{Vậy } \varphi(d) = \frac{df}{d-f}.$$

b) Vì $\lim_{d \rightarrow f^+} df = f^2$; $\lim_{d \rightarrow f^+} (d-f) = 0$; $d \rightarrow f^+ \Rightarrow d-f > 0$ nên $\lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty$.

$$\text{Vậy } \lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty.$$

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm ngoài tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh thật ngược chiều với vật ở vô cùng.Vì $\lim_{d \rightarrow f^-} df = f^2$; $\lim_{d \rightarrow f^-} (d-f) = 0$; $d \rightarrow f^- \Rightarrow d-f < 0$ nên $\lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty$.

$$\text{Vậy } \lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty.$$

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm trong tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh ảo cùng chiều với vật và nằm ở vô cùng.Vì không tồn tại $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ nên không tồn tại $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$.

□

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là

$$\textcircled{A} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

$$\textcircled{B} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

$$\textcircled{C} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

$$\textcircled{D} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Lời giải.Theo định nghĩa về hàm số liên tục ta có điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Chọn đáp án $\textcircled{D}$

□

Câu 2. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

$$\textcircled{A} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 3n + 1).$$

$$\textcircled{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{n^3 + 1}.$$

$$\textcircled{C} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n + 1}.$$

$$\textcircled{D} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0.$$

Chọn đáp án $\textcircled{B}$

□

Câu 3. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

$$\textcircled{A} \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

$$\textcircled{B} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ với } k \text{ nguyên dương.}$$

$$\textcircled{C} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\textcircled{D} \text{ Nếu } u_n = c \text{ (} c \text{ là hằng số) thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim c = c.$$

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ khi $|q| < 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ khi $q > 1$.

Chọn đáp án (A)

Câu 4. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1}$ ta được kết quả là

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1} = 0.$

(B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2}.$

(C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1} = +\infty.$

(D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1} = 1.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án (B)

Câu 5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2023^n + 2024^n}{2025^n}$ có giá trị bằng

(A) $\frac{3}{5}.$

(B) $+\infty.$

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2023^n + 2024^n}{2025^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2023}{2025}\right)^n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2024}{2025}\right)^n = 0 + 0 = 0.$

Chọn đáp án (C)

Câu 6. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - 2n)$ ta được kết quả là

(A) $-\infty.$

(B) $+\infty.$

(C) 0.

(D) $-\frac{2}{3}.$

Lời giải.

☑ Cách 1: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - 2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 2 \right) = -\infty$

(vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 2 \right) = -1 < 0$).

☑ Cách 2: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - 2n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1 - 4n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 2} = -\infty.$

Chọn đáp án (A)

Câu 7. Tính tổng vô hạn $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

(A) $S = 14.$

(B) $S = 15.$

(C) $S = \frac{27}{2}.$

(D) $S = 16.$

Lời giải.

Dãy số $(u_n) : 9; 3; 1; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{3^{n-3}}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 9$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

Do đó tổng của dãy là $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2}.$

Chọn đáp án (C)

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n - 3} = 2.$

(C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n + 1) = +\infty.$

(D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = -\infty \ (k \in \mathbb{N}^*).$

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \ (k \in \mathbb{N}^*).$

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Tính $\lim n (\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n})$.

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \lim n (\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n}) \\ &= \lim n \left[(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n) + (2n - \sqrt[3]{8n^3 + n}) \right] \\ &= \lim n \left[\frac{3}{\sqrt{4n^2 + 3} + 2n} + \frac{-n}{(2n)^2 + 2n \cdot \sqrt[3]{8n^3 + n} + \sqrt[3]{8n^3 + n}^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{3}{\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} + 2} + \frac{-1}{2^2 + 2\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}}^2} \right] \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 10. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{2n^3 + n} + 3n - 1}{\sqrt{6n^3 + 2n^2 + n}}$ có giới hạn bằng $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $a > 0$, $b > 0$ và ƯCLN($a, b = 1$). Hãy tính giá trị của $a^2 + b^2$.

(A) 5.

(B) 40.

(C) 9.

(D) 10.

Lời giải.

Ta có

$$\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{2n^3 + n} + 3n - 1}{\sqrt{6n^3 + 2n^2 + n}} = \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Suy ra $a = 1$, $b = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 10$.

Chọn đáp án (D)

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để biểu thức $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - b^2 n^2}{11n^2 + 3} < 0$.

(A) $b \leq 0$.

(B) $b \neq 0$.

(C) $b < 0$.

(D) $b > 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - b^2 n^2}{11n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{9}{n^2} - b^2 \right)}{n^2 \left(11 + \frac{3}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{n^2} - b^2}{11 + \frac{3}{n^2}} = -\frac{b^2}{11}.$$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $-\frac{b^2}{11} < 0 \Leftrightarrow b^2 > 0 \Leftrightarrow b \neq 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 12. Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

(A) $M = 5$.

(B) $M = 2$.

(C) $M = -6$.

(D) $M = 3$.

Lời giải.

Ta có $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 6 - 12 = -6$.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 1)$ bằng

(A) -11.

(B) 12.

(C) 5.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -2} ((-2)^3 - (-2)^2 + 1) = -11$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$ là

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) 1.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - 1 \right) = +\infty.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2}$ là

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) -2.

(D) 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \frac{\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{2}{x}} \right] = -\infty.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 16. Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$. Ta xét các mệnh đề sau

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$.

Trong các mệnh đề trên có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

(A) Có một mệnh đề đúng.

(B) Có hai mệnh đề đúng.

(C) Có ba mệnh đề đúng.

(D) Không có mệnh đề nào đúng.

Lời giải.

☑ Mệnh đề (1), (2) sai nếu ta chọn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-1)^2}$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-3}{2}.$$

☑ Mệnh đề (3) sai vì $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ nhưng $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \neq \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)|$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 17. Cho a là số thực khác 0. Tính $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$.

(A) a^3 .

(B) $4a^3$.

(C) $2a^3$.

(D) $3a^3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} [(x^2+a^2)(x+a)] = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Cho $2a + b = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 2} = 5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a = -1, b = 4$.

(B) $a = 1, b = 0$.

(C) $a = \frac{3}{2}, b = -1$.

(D) $a = -2, b = 6$.

Lời giải.

Ta có $2a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2a$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 2} = 5 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + (2 - 2a)x - 4}{x - 2} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(ax + 2)(x - 2)}{x - 2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (ax + 2) = 5 \Leftrightarrow 2a + 2 = 5 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 19. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + x - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ta được kết quả là

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{5}{4}$.

(D) $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + x - 4}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 2 + (x - 4)^3}{(x^2 - 3x + 2) \left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} - (x-4) \sqrt[3]{3x+2} + (x-4)^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x^2 + 51x - 62}{(x^2 - 3x + 2) \left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} - (x-4) \sqrt[3]{3x+2} + (x-4)^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 10x + 31)}{(x-2)(x-1) \left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} - (x-4) \sqrt[3]{3x+2} + (x-4)^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 31}{(x-1) \left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} - (x-4) \sqrt[3]{3x+2} + (x-4)^2 \right]} \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 20. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}$ ta được kết quả là

(A) $-\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) $-\frac{1}{6}$.

(D) $-\frac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(2x^3 - 3x^2)(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2x - 3)(\sqrt{1+x^2} + 1)} = -\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 21. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$ là

(A) $\frac{7}{23}$.

(B) $\frac{7}{24}$.

(C) $\frac{7}{25}$.

(D) $\frac{7}{26}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3) + (\sqrt{x+16} - 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} + \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} + \frac{x}{x(\sqrt{x+16} + 4)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} \right] \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x})$ bằng

(A) $-\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{3}{2}$.

(D) $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3a}{3x + 2a}$ (với a là tham số) có giá trị bằng

(A) 2.

(B) -1.

(C) $\frac{3}{2}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3a}{3x + 2a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3a}{x}}{3 + \frac{2a}{x}} = \frac{2}{3}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2})$.

(A) $I = \frac{3}{2}$.

(B) $I = \frac{1}{2}$.

(C) $I = \frac{17}{11}$.

(D) $I = \frac{46}{31}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2})(x + 1 + \sqrt{x^2 - x - 2})}{x + 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)^2 - (x^2 - x - 2)}{x + 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 3}{x + 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$ là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b$ có giá trị bằng

(A) 9.

(B) 8.

(C) 7.

(D) 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a+b=1+8=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{1-x}$ ta được kết quả là

(A) $I = +\infty$.(B) $I = -\infty$.(C) $I = 0$.(D) $I = -3$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+2) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0$ và $1-x < 0$ khi $x > 1$.

Nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{1-x} = -\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2+5}{x-3}$ ta được kết quả là

(A) $-\infty$.(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2+5) = -4 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0$ và $x-3 > 0, \forall x > 3$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2+5}{x-3} = -\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Tính $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2-4|}{x+2}$ ta được kết quả là

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3D.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4-x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2-x) = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x-1}$ ta được kết quả là

(A) 0.

(B) $+\infty$.(C) $-\infty$.

(D) Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ và $x-1 < 0, \forall x < 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$.

Tương tự, ta cũng có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ và $x-1 > 0, \forall x > 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$ ($a \neq 0$) là

(A) $+\infty$.

(B) $\frac{a+1}{3a^2}$.

(C) $\frac{a-1}{3a}$.

(D) $\frac{a-1}{3a^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

(A) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

(B) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = b$.

(D) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = b$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục tại điểm $x = 0$?

(A) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$.

(B) $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

(C) $y = \cot x$.

(D) $y = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Lời giải.

- ☑ Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- ☑ Hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục tại điểm $x = 0$.
- ☑ Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- ☑ Hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 1}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.
- (B) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$.
- (C) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(a; b)$.
- (D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên $[a; b]$.

Lời giải.

Định lý về sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.

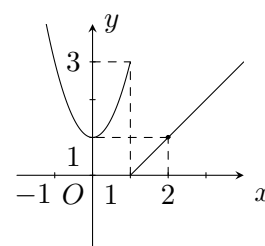
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây, trên khoảng $(-2; 3)$ hàm số gián đoạn tại điểm nào?

(A) $x = 0$.

(B) $x = 1$.

(C) $x = 2$.

(D) $x = 3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & , \text{ khi } x > 1 \\ 2x + 1 & , \text{ khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.
 (B) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.
 (C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{C} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = -1. \\ \textcircled{D} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 37. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \cos \frac{3}{x}$. (B) $y = \cot 3x$. (C) $y = \frac{1 - x}{x^2 + 4}$. (D) $y = \sqrt{x + 2}$.

Lời giải.

- $\textcircled{A}$ Hàm số $y = \cos \frac{3}{x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.
 $\textcircled{B}$ Hàm số $y = \cot 3x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.
 $\textcircled{C}$ Hàm số $y = \frac{1 - x}{x^2 + 4}$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
 $\textcircled{D}$ Hàm số $y = \sqrt{x + 2}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-3; 3)$. (C) $(-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên tập $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$, suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{x + 4}{x - 3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số liên tục tại $x = 3$. (B) Hàm số liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.
 (C) Hàm số liên tục tại $x = 2$ và $x = 3$. (D) Hàm số liên tục trên $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Với $x_0 \neq 3$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n

là

(A) $n = 1, m = 0$.

(B) $n = 0, m = 1$.

(C) $n = m = 1$.

(D) $n = -1, m = 0$.

Lời giải.

Ta có

(A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 1) = m + 1$.

(C) $f(1) = n$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 1 = n.$$

Suy ra $n = 1, m = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 & \text{khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $m = 12$.

(B) $m = 8$.

(C) $m = -10$.

(D) $m = 10$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x^2 + 7) = 7$ và $f(-1) = m - 3$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $m - 3 = 7 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x - 1)^3(x - 2) + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm.

(A) $\forall m \in \mathbb{R}$.

(B) $m = 1$.

(C) Không có giá trị m .

(D) $m = 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = m(x - 1)^3(x - 2) + 2x - 3$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = -1, f(2) = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 43. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

(A) $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

(B) $(x - 1)^5 - x^7 - 2 = 0$.

(C) $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$.

(D) $3x^{2024} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2024} - 8x + 4 = 0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 4; f(1) = -1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -4 < 0$ suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 44. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = -\sqrt{2}$?

(A) $y = \cos x$.

(B) $y = \frac{3x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$.

(C) $y = x + \sqrt{2}$.

(D) $y = \tan x$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} \frac{3x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} \frac{3x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} = +\infty$ nên hàm số $y = \frac{3x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$ gián đoạn tại $x = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 45. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2m + 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

(A) $m = 2$.

(B) $m = 1$.

(C) $m = -1$.

(D) $m = -2$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 0$, $f(0) = 2m + 2$.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

(B) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

(C) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$.

(D) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$.

🗨️ **Lời giải.**

☑️ Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

☑️ Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

☑️ Hàm số $\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

☑️ Hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$, $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$.

Do đó, để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì phải gán cho $f(0) = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng

(A) 1.

(B) 4.

(C) -1.

(D) -4.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-\sqrt{x+1}-2) = -4$.

Hàm số liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = f(3) \Leftrightarrow -4 = m \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax-1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 4$ là

(A) $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

(B) $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$.

(C) $\{8\}$.

(D) $\{0\}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có:

☑️ $f(4) = a \cdot 4 - 1 = 4a - 1$.

☑️ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho liên tục tại $x = 4$ là

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4a - 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án **(A)**

Câu 50. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m - 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m = 1$.

(B) $m = \frac{4}{3}$.

(C) $m = 2$.

(D) $m = 0$.

Lời giải.

Với $x \neq 1$, ta có $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x - 1}$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x = 1$.

Ta có $f(1) = 3m - 2$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^3 + x - 2}{(x - 1)(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}} \right] = 2. \end{aligned}$$

Nên hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Vậy $m = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1 - m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có hàm số luôn liên tục $\forall x \neq 2$.

Tại $x = 2$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 - m)x = (1 - m) \cdot 2 = 2 - 2m;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2 x^2) = 4m^2;$$

$$f(2) = 4m^2.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4m^2 = 2 - 2m \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -1. \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m .

Chọn đáp án **(B)**

C-ĐỀ ÔN TẬP

1. Phần Trắc nghiệm (7 điểm)

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\lim (-\sqrt{3})^{2n} = -\infty$. (B) $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$. (C) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. (D) $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Lời giải.

Vì $\frac{2}{3} < 1$ nên $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 2. Cho q là số thực thỏa $q > 1$, kết quả của $\lim q^n$ bằng

- (A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) q .

Lời giải.

Theo tính chất giới hạn ta có q là số thực thỏa $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 3. Dãy nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- (A) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (B) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$. (C) $u_n = 2^n$. (D) $u_n = 2023^n$.

Lời giải.

Vì $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 4. Tính giới hạn $\lim \frac{1+n-3n^2}{n^2+2n}$.

- (A) 1. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) -3 .

Lời giải.

$$\lim \frac{1+n-3n^2}{n^2+2n} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 3}{1 + \frac{2}{n}} = -3.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 5. Giới hạn $\lim \frac{-3n+2}{n+3}$ bằng

- (A) 3. (B) 0. (C) -3 . (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{-3n+2}{n+3} = \lim \frac{-3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = -3.$$

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 6. Giá trị của $\lim \frac{n+1}{n^2+2}$ bằng bao nhiêu?

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{n+1}{n^2+2} = \lim \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 0.$$

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 7. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-1}$.

- (A) -1 . (B) 2. (C) 0. (D) 5.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 - 1} = 5.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 8. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)$.

(A) $I = 3$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = +\infty$.

(D) $I = 2$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 9. Tính giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)$.

(A) 1.

(B) -2.

(C) 4.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 10. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$.

(A) $L = 1$.

(B) $L = -\infty$.

(C) $L = 0$.

(D) $L = +\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 11. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^2-2x+2}$.

(A) $-\frac{1}{2}$.

(B) 2.

(C) -2.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^2-2x+2} = \frac{3-1}{1^2-2+2} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 12. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{2x-6}$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $-\infty$.

(D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta thấy khi $x \rightarrow 3^+$ thì $(x+1) \rightarrow 4$ còn $(2x-6) \rightarrow 0^+$.

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{2x-6} = +\infty$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 13. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5-x}{x-2}$ có kết quả bằng

(A) $-\infty$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $+\infty$.

(D) -1.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0, x-2 < 0$ với mọi $x < 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (5-x) = 3 > 0$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5-x}{x-2} = -\infty$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 14. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^2 + 1)$.

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 15. Tính giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$.

(A) $H = 0$.

(B) $H = -\infty$.

(C) $H = 3$.

(D) $H = +\infty$.

Lời giải.

Ta có giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

Áp dụng với $k = 3$, ta có $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Chọn đáp án (D)

Câu 16. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2}$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 17. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi nào?

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x)$.

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(0)$.

(D) $f(x_0) = 0$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm số $f(x)$ không xác định tại x_0 .

(B) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại x_0 .

(C) Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 .

(D) $f(x)$ có giá trị 0 tại x_0 .

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục, ta có, do $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại x_0 .

Chọn đáp án (B)

Câu 19. Trong các loại hàm số sau, hàm số nào luôn liên tục trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$?

(A) Hàm số lượng giác.

(B) Hàm số đa thức.

(C) Hàm số phân thức hữu tỉ.

(D) Hàm số có chứa căn bậc hai.

Lời giải.

Hàm số đa thức luôn liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 20. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \sqrt{x}$.

(B) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

(C) $y = \cot x$.

(D) $y = x^4 - x$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^4 - x$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = 1$.

(B) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

(C) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục tại $x = -1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Do đó, hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho hai dãy số (u_n) , (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = 2$, $\lim v_n = 1$. Tính $\lim(2u_n - 3v_n)$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $\lim(2u_n - 3v_n) = \lim 2u_n - \lim 3v_n = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn khác 0?

- (A) $u_n = \frac{2n-1}{n}$. (B) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. (C) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. (D) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Lời giải.

☑ $\lim \frac{2n-1}{n} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{1} = \frac{2}{1} = 2 \neq 0$.

☑ $\lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$.

☑ $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

☑ $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Giá trị $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{7}$. (C) 7. (D) 3.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2-3}}{2x+3} = \frac{2|-2+1| - 5\sqrt{(-2)^2-3}}{2 \cdot (-2) + 3} = 3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x+1} = a + b\sqrt{2}$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{1 + \sqrt{1^2+1}}{1^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Suy ra $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Vậy $a + b = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{8-2x}}{x-2}$ bằng

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{8-2x}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-6+3x}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{8-2x}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2}$.

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 0.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x+1}{2(x^2 - x + 1)} = 0.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 28. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x\sqrt{2}) = \frac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a + b$ có giá trị là

(A) 1.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - x\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - x\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = 3, b = 4$. Tổng $a + b = 7$.

Chọn đáp án (D)

Câu 29. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 4}$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 0.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x + 1) = 11 > 0$.

Và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4) = 0$.

Mà khi $x \rightarrow 2^+$ thì $2x - 4 > 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 4} = +\infty$.

Chọn đáp án (C)

Câu 30. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{5} \end{cases}$. Tìm giới hạn $I = \lim u_n$.

(A) $I = \frac{1}{3}$.

(B) $I = \frac{2}{5}$.

(C) $I = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

(D) $I = +\infty$.

Lời giải.

Nhận xét: (u_n) là dãy giảm và bị chặn trên bởi 2.

Giả sử $\lim u_n = L$.

Ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{5} \Leftrightarrow L = \frac{2L + 1}{5} \Leftrightarrow L = \frac{1}{3}$.

Vậy $I = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 2x - 1} + x\sqrt{2}) = \frac{a\sqrt{b}}{c}$ (a là số nguyên; b, c là số nguyên tố). Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = 5$.

(B) $S = 9$.

(C) $S = 10$.

(D) $S = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 2x - 1} + x\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 + 2x - 1) - (2x^2)}{\sqrt{2x^2 + 2x - 1} - x\sqrt{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 + 2x - 1} - x\sqrt{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 1$; $b = 2$; $c = 2$. Vậy $S = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 32. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b\right) = -5$. Tính tổng $a + b$.

(A) 6.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 + ax^2 - 2ax - bx + 2b}{x - 2} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + a)x^2 - (2a + b)x + 2b + 1}{x - 2}.\end{aligned}$$

Vì kết quả giới hạn bằng -5 nên từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 6$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$ là

(A) -1 .

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}).$$

Mà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2},$$

và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1}{3},$$

nên

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 34. Cho $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{3x^2 - 2}}{\sqrt{4x^2 + 1} - |x|} = \frac{\sqrt{3} + b}{c}$. Tính giá trị của $A = b \cdot c$.

(A) $A = 6$.

(B) $A = -6$.

(C) $A = 2$.

(D) $A = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + |x|\sqrt{3 - \frac{2}{x^2}}}{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \sqrt{3 - \frac{2}{x^2}}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{-2 + 1} = \frac{\sqrt{3} - 2}{1}.$

Vậy $b = -2, c = 1 \Rightarrow A = b \cdot c = -2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ và tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 2x + 1} - x}{x^2 - 4} = T.$ Chọn đẳng thức đúng.

(A) $T = \frac{a - 2}{16}.$

(B) $T = \frac{a + 2}{16}.$

(C) $T = \frac{a - 2}{8}.$

(D) $T = \frac{a + 2}{8}.$

Lời giải.

Vì $f(x)$ là đa thức và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ nên suy ra $f(x) + 1 = (x - 2)g(x), g(2) = a.$

Do đó, Ta có

$$\begin{aligned} T &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} - x}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)g(x) + 2x - x^2}{(x - 2)(x + 2) [\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} + x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - x}{(x + 2) [\sqrt{(x - 2)g(x) + 2x} + x]} \\ &= \frac{a - 2}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

2. Phần Tự luận (3 điểm)

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4}.$

Lời giải.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{8 - \frac{5}{n}} = \frac{1}{4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \frac{1}{32}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2} = \frac{6}{5}.$

d) Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 + 4) = 16 > 0; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 0$ và $x \rightarrow -2^+ \Rightarrow x + 2 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4} = +\infty.$ □

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{khi } x \neq 5 \\ a & \text{khi } x = 5. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$

Lời giải.

Với $x \neq 5$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$ là hàm liên tục.

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 5$.

Tức là $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = a \Leftrightarrow a = 10$.

Vậy với $a = 10$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. □

Bài 3. Chứng minh rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

Lời giải.

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ nên giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại. □