

Đề chính thức

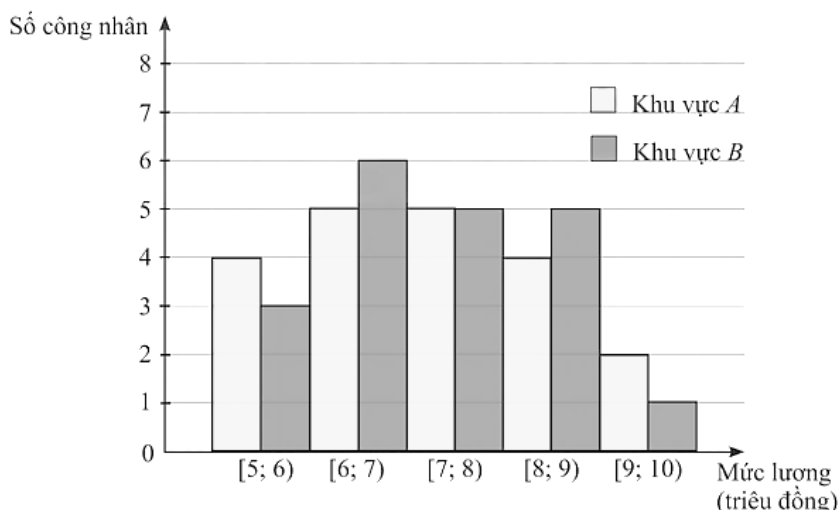
Gồm có 06 trang

Mã đề 001

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B .

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực A và B



So sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm về mức lương khởi điểm của công nhân khu vực A và công nhân khu vực B thì

A. Lương khởi điểm của công nhân khu vực A đồng đều hơn của công nhân khu vực B .

B. Lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A .

C. Lương khởi điểm của công nhân khu vực A, B đồng đều nhau.

D. Lương khởi điểm của công nhân khu vực A, B quá chênh lệch.

Câu 2. Đặt $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Khi đó $\log_{12} 35$ bằng

A. $\frac{3ac+3b}{c+1}$.

B. $\frac{2ac+3b}{c+3}$.

C. $\frac{3ac+3b}{c+2}$.

D. $\frac{2ac+3b}{c+2}$.

Câu 3. Một cấp số nhân có 4 số hạng, số hạng đầu là 3 và số hạng thứ tư là 192. Gọi S là tổng các số hạng của cấp số nhân đó thì giá trị của S bằng bao nhiêu?

A. $S = 390$.

B. $S = 255$.

C. $S = -256$.

D. $S = 256$.

Câu 4. Cho hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

A. $\frac{91}{135}$.

B. $\frac{44}{135}$.

C. $\frac{88}{135}$.

D. $\frac{45}{88}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y' = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$				
y'		+		-	0	+	0	-	0	+

Biết rằng $S = (a; b)$ là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số

$g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có nhiều điểm cực trị nhất. Tính $T = 4a - 7b$.

A. -25 .

B. 25 .

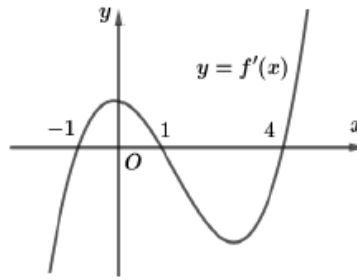
C. -14 .

D. 73 .

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4;1;5), B(3;2;1), C(-3;4;2)$. Điểm $M(a;b;0)$ sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ nhỏ nhất. Giá trị $3a + b$ bằng:

- A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{28}{3}$ C. $\frac{11}{3}$ D. $\frac{20}{3}$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Cho các mệnh đề

(I) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại

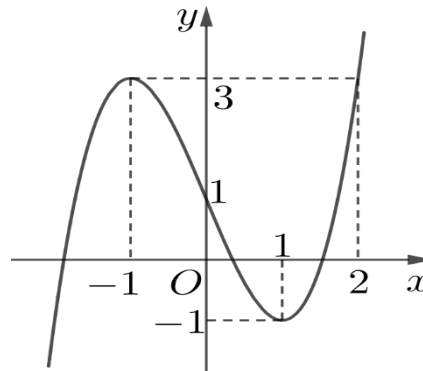
(II) $f(1) > f(2) > f(4)$

(III) $\max_{[-1;4]} f(x) = f(1)$

Số các mệnh đề đúng:

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



- A. 9. B. 3. C. 6. D. 7.

Câu 9. Một cửa hàng trang sức khảo sát một số khách hàng xem họ dự định mua trang sức với mức giá nào (đơn vị: triệu đồng). Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)
Số khách hàng	20	75	48	23	12

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 9,98. B. 15. C. 4,43. D. 14,41.

Câu 10. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-3x)^{2n}$ bằng:

- A. $-3^5 \cdot C_{10}^5$. B. $-3^5 \cdot C_{12}^5$. C. $3^5 \cdot C_{10}^5$. D. $6^5 \cdot C_{10}^5$.

Câu 11. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L = a + b$.

- A. $L = 43$. B. $L = 23$. C. $L = 13$. D. $L = 53$.

- Câu 12.** Hai máy bay SU 24 và SU 30 xuất phát cùng một lúc tại một sân bay M . Lúc t giờ, chiếc SU 24 đến vị trí N cách sân bay 200 km về phía nam và 100 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 km ; chiếc SU 30 đến vị trí P cách sân bay 100 km về phía bắc và 150 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 80 km . Góc giữa hai đường thẳng MN và MP gần nhất với kết quả nào sau đây?
A. $133,31^\circ$. **B.** $56,68^\circ$. **C.** $46,69^\circ$. **D.** $50,52^\circ$.
- Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7; 2; 3)$, $B(1; 4; 3)$, $C(1; 2; 6)$, $D(1; 2; 3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.
A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM = \sqrt{26}$. **C.** $OM = \sqrt{14}$. **D.** $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.
- Câu 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), Rada phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300; 150; 7)$ đến điểm $N(800; 550; 13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.
A. $\left(925; 650; \frac{29}{2}\right)$. **B.** $(500; 400; 6)$. **C.** $\left(425; 250; \frac{17}{2}\right)$. **D.** $\left(625; 750; \frac{25}{2}\right)$.
- Câu 15.** Cho phương trình $\sin x + \sin 5x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 16.** Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng 100 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Đáy trên bể người ta để 20% diện tích để làm nắp bể. Hãy xác định chiều rộng của đáy bể để tiết kiệm vật liệu xây bể nhất (làm tròn đến hai chữ số thập phân)?
A. 3,4. **B.** 3,5. **C.** 4,39. **D.** 4,40.
- Câu 17.** Số nghiệm của phương trình $\left(2^{|\cos x|} + x^2\right)^{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{2^{|\cos x|} + x^2}$ có nghiệm là
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số nghiệm.
- Câu 18.** Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau.
A. $\frac{137}{625}$. **B.** $\frac{42}{625}$. **C.** $\frac{32}{125}$. **D.** $\frac{207}{625}$.
- Câu 19.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 1$, cạnh bên $AA' = 3$. Gọi M là một điểm trên đoạn CC' sao cho $CM = 2MC'$. Tính độ dài của véc tơ $\overrightarrow{BM}$.
A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** 6.
- Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB , mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính độ dài SH .
A. $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$.

a) Khi $m = 1$ thì đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1-x)^2}$.

b) Khi $m = 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 và $|x_1 - x_2| = 2$.

c) Khi $m = 1$ thì góc giữa tiệm cận đứng và tiệm cận xiên bằng 45° .

d) Khi $m = 4$ khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(5; -2; 0), B(4; 5; -2), C(0; 3; 2), A'(9; 0; 5)$. Gọi M là trung điểm AA' .

a) Tọa độ $D(1; -4; 4)$.

b) Giá trị $\cos(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MD}) = \frac{3\sqrt{609}}{609}$.

c) $|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'D'} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{29}$.

d) Điểm K di chuyển trên trục Ox . Đặt $Q = 2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| + 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}|$. Giá trị nhỏ nhất của Q bằng $6\sqrt{37}$.

Câu 3. Cho phương trình: $\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0$

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

c) Khi $m = -1$, tổng các nghiệm của phương trình trên $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng 0.

d) Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in (-2; -1)$.

Câu 4. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị: độ C).

Nhóm	Hà Nội	Huế
[16,8;19,8)	2	1
[19,8;22,8)	3	2
[22,8;25,8)	2	3
[25,8;28,8)	1	2
[28,8;31,8)	4	4
	$n = 12$	$n = 12$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội là: 8,75.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 3,56.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Huế là: 7,75.

d) Huế có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn Hà Nội vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn.

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC , $SO = 2a$

Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M không trùng với A và H , mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) SO song song với mặt phẳng (P)

b) Cạnh bên của hình chóp đã cho bằng $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

c) Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy có giá trị $\tan \alpha$ bằng $4\sqrt{3}$.

d) Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{3a^2}{4}$

Câu 6. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50.

a) Số cách chọn được hai thẻ chẵn là 1225.

b) Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $\frac{37}{49}$.

c) Số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là 780.

d) Xác suất để chọn được hai thẻ mà hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3 bằng 0,65 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$, a, b là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a + b - 2 > 0 \\ 24 + 3(3a + b) < 0 \end{cases}$.

Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

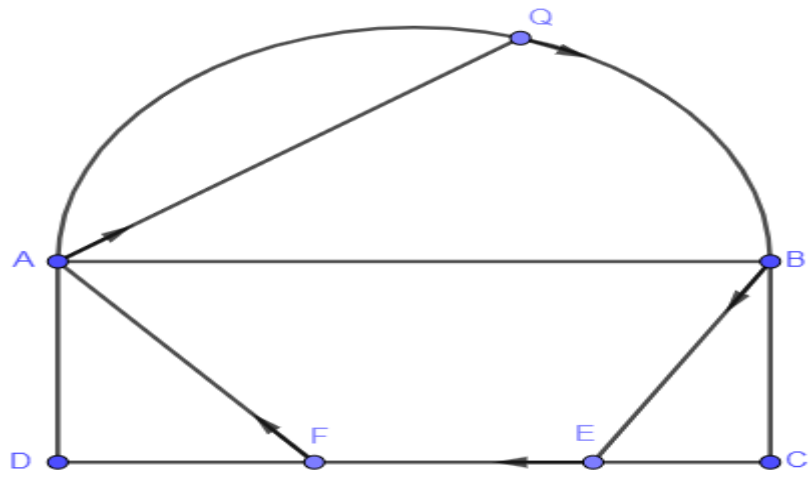
Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; -3), B(4; 0; 5), C(2; 0; 1)$ và $D(6; -2; 11)$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm sao cho hai biểu thức $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x + 3y + z$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là chữ nhật, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = a$, $SC = a\sqrt{3}$ và số đo α của góc nhị diện $[S, AD, B]$

thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{4\sqrt{15}}{5}$. Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{IS} = \vec{0}$. Mặt phẳng (α) đi qua AI và lần lượt cắt các tia SB , SC , SD tại ba điểm phân biệt M , N , P . Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.MNP$ (làm tròn đến hàng đơn vị và lấy $a = 15$).

Câu 4. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ với $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị -1 ; 1 và $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $g(x) = f(2x - 3) - \ln(1 + x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?

Câu 5. Một khu đất trống bằng phẳng hình chữ nhật $ABCD$, bên cạnh là một bờ hồ hình bán nguyệt có đường kính AB như hình vẽ bên dưới. Từ vị trí A , anh Quang chèo một chiếc thuyền với vận tốc 6 km/h đến điểm Q trên bờ hồ. Sau đó, anh Quang chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 8 km/h, rồi chạy bộ theo đường gấp khúc $BEFA$ để quay về vị trí A , trong đó vận tốc chạy bộ của anh Quang trên đoạn BE và FA là 6 km/h, vận tốc chạy bộ của anh Quang trên đoạn EF là 10 km/h (E, F là hai vị trí bất kỳ trên đoạn CD mà anh Quang lựa chọn). Thời gian ngắn nhất mà anh Quang di chuyển từ A rồi quay về A là bao nhiêu, biết $AD = 3$ (km), $AB = 4$ (km), $\widehat{QAB} = \frac{\pi}{3}$ (thời gian tính bằng phút và làm tròn đến hàng đơn vị)?



Câu 6. Có hai hộp đựng bi, các viên bi được đánh các số tự nhiên. Hộp I có 7 viên bi được đánh số $1; 2; \dots; 7$. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số lẻ ở hộp II là $\frac{6}{11}$. Xác suất để lấy được cả hai viên bi lấy ra đều mang số lẻ là $\frac{a}{b}$, biết $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $b - a$.

---HẾT---

Đề chính thức
Gồm có 06 trang

Mã đề 001

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đ.A	B	C	B	B	A	A	A	D	C	A	A	C	C	A	D	A	A	D	A	A

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm

- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,12 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,3 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,6 điểm.
- Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1,2 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) S
b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S
d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. (Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được điểm)

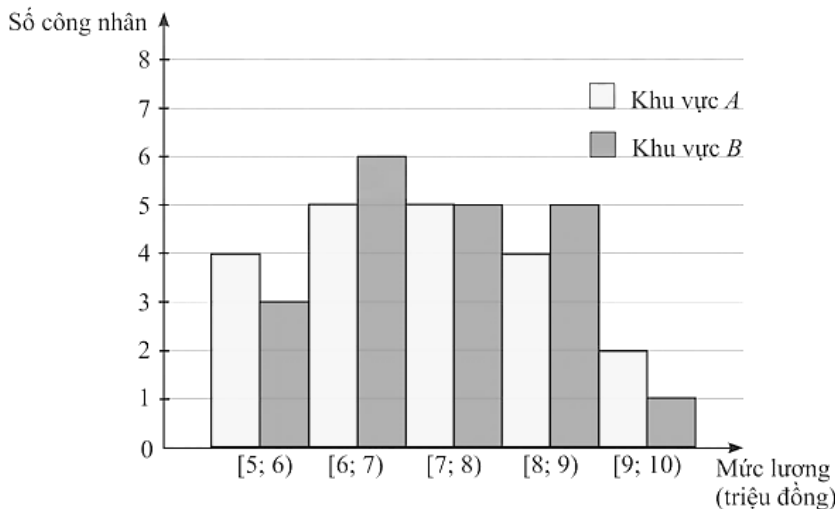
Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	2	8	75,3	-45	123	53

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B.

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực A và B



So sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm về mức lương khởi điểm của công nhân khu vực A và công nhân khu vực B thì

- A.** Lương khởi điểm của công nhân khu vực A đồng đều hơn của công nhân khu vực B.
- B.** Lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.
- C.** Lương khởi điểm của công nhân khu vực A, B đồng đều nhau.
- D.** Lương khởi điểm của công nhân khu vực A, B quá chênh lệch.

Lời giải

Ta lập được bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu như sau:

Mức lương	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Mức lương đại diện (triệu đồng)	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Khu vực A	4	5	5	4	2
Khu vực B	3	6	5	5	1

+) Xét mẫu số liệu của khu vực A. Cỡ mẫu là $n_A = 4 + 5 + 5 + 4 + 2 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\bar{x}_A = \frac{4 \cdot 5,5 + 5 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 4 \cdot 8,5 + 2 \cdot 9,5}{20} = 7,25$.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_A^2 = \frac{1}{20} (4 \cdot 5,5^2 + 5 \cdot 6,5^2 + 5 \cdot 7,5^2 + 4 \cdot 8,5^2 + 2 \cdot 9,5^2) - (7,25)^2 = 1,5875$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_A = \sqrt{1,5875} \approx 1,26$.

+) Xét mẫu số liệu của khu vực B. Cỡ mẫu là $n_B = 3 + 6 + 5 + 5 + 1 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\bar{x}_B = \frac{3 \cdot 5,5 + 6 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 5 \cdot 8,5 + 1 \cdot 9,5}{20} = 7,25$.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_B^2 = \frac{1}{20} (3 \cdot 5,5^2 + 6 \cdot 6,5^2 + 5 \cdot 7,5^2 + 5 \cdot 8,5^2 + 1 \cdot 9,5^2) - (7,25)^2 = 1,2875$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_B = \sqrt{1,2875} \approx 1,13$.

Do $S_A > S_B$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.

Câu 2. Đặt $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Khi đó $\log_{12} 35$ bằng

A. $\frac{3ac+3b}{c+1}$. B. $\frac{2ac+3b}{c+3}$. C. $\frac{3ac+3b}{c+2}$. D. $\frac{2ac+3b}{c+2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = \log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \frac{1}{3} \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = 3a$.

$$b = \log_8 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 8} = \frac{\log_3 7}{3 \log_3 2} \Rightarrow \log_3 7 = 3b \cdot \log_3 2 = \frac{3b}{\log_2 3} = \frac{3b}{c}$$

$$\text{Ta có } \log_{12} 35 = \frac{\log_3 35}{\log_3 12} = \frac{\log_3 7 + \log_3 5}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{\log_3 7 + \log_3 5}{1 + 2 \cdot \frac{1}{\log_2 3}} = \frac{\frac{3b}{c} + 3a}{1 + 2 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3b + 3ac}{c + 2}$$

Câu 3. Một cấp số nhân có 4 số hạng, số hạng đầu là 3 và số hạng thứ tư là 192. Gọi S là tổng các số hạng của cấp số nhân đó thì giá trị của S bằng bao nhiêu?

A. $S = 390$. B. $S = 255$. C. $S = -256$. D. $S = 256$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_4 = 192 \end{cases} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{a_4}{a_1}} = 4$$

Ta suy ra tổng S của dãy bằng

$$S_4 = a_1 \cdot \left(\frac{q^4 - 1}{q - 1} \right) = 3 \cdot \left(\frac{4^4 - 1}{4 - 1} \right) = 255$$

Câu 4. Cho hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

A. $\frac{91}{135}$.

B. $\frac{44}{135}$.

C. $\frac{88}{135}$.

D. $\frac{45}{88}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi biến cố A : “Hai viên bi được lấy ra có cùng màu”.

A_1 : “Hai viên bi lấy ra màu trắng”. Lúc đó: $P(A_1) = \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{18}$.

A_2 : “Hai viên bi lấy ra màu đỏ”. Lúc đó: $P(A_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{18}$.

A_3 : “Hai viên bi lấy ra màu xanh”. Lúc đó: $P(A_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{18}$.

Lúc đó: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ và A_1, A_2, A_3 là các biến cố xung khắc nên:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{44}{135}.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y' = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'		+		-	0	+
		+	0	+	0	-
		-	0	-	0	+

Biết rằng $S = (a; b)$ là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có nhiều điểm cực trị nhất. Tính $T = 4a - 7b$.

A. -25.

B. 25.

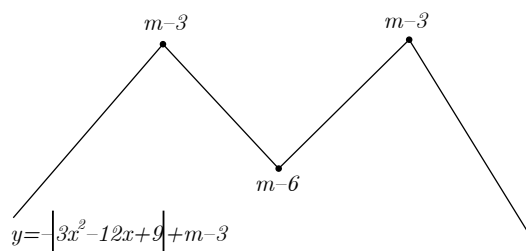
C. -14.

D. 73.

Lời giải

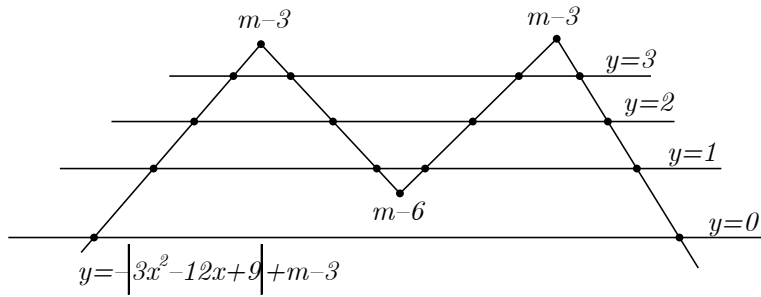
Chọn A

Xét hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ có đồ thị có dạng “ $\wedge$ ” như sau:



Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x = 0, x = 1, x = 2$ và $x = 3$.

Để hàm số $g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có số cực trị nhiều nhất thì mỗi đường thẳng $y = 1, y = 2$ và $y = 3$ phải cắt đồ thị hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ tại 4 điểm phân biệt và đường thẳng $y = 0$ phải cắt đồ thị hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ tại 2 điểm phân biệt.



Dựa vào đồ thị trên, ta có
$$\begin{cases} m-6 \geq 0 \\ m-6 < 1 \\ m-3 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m < 7 \\ m > 6 \end{cases} \Leftrightarrow 6 < m < 7 \Rightarrow S = (6; 7)$$

Vậy $T = 4a - 7b = -25$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4; 1; 5), B(3; 2; 1), C(-3; 4; 2)$. Điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ nhỏ nhất. Giá trị $3a + b$ bằng:

A. $\frac{19}{3}$

B. $\frac{28}{3}$

C. $\frac{11}{3}$

D. $\frac{20}{3}$

Lời giải.

Gọi $D(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 3), E(0; 3; \frac{3}{2}), F(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2})$ là trung điểm các cạnh AB, BC, AC .

Ta có: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA}) = MD^2 - AD^2 = MD^2 - \frac{AB^2}{4}$

Phân tích tương tự với $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

Khi đó,

$$S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MD^2 + ME^2 + MF^2 - \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{4}$$

S nhỏ nhất khi $MD^2 + ME^2 + MF^2$ nhỏ nhất

Gọi G là trọng tâm của $\triangle DEF \Rightarrow G(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3})$

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 = 3MG^2 + GD^2 + GE^2 + GF^2$$

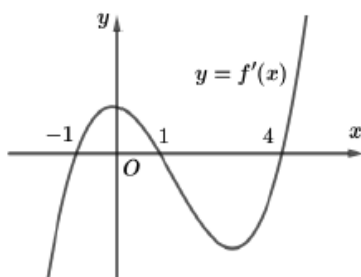
$MD^2 + ME^2 + MF^2$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất.

Do $M(a; b; 0) \in (Oxy) \Rightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow 3a + b = \frac{19}{3}$$

Chọn A

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Cho các mệnh đề

(I) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại

(II) $f(1) > f(2) > f(4)$

(III) $\max_{[-1;4]} f(x) = f(1)$

Số các mệnh đề đúng:

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Lời giải

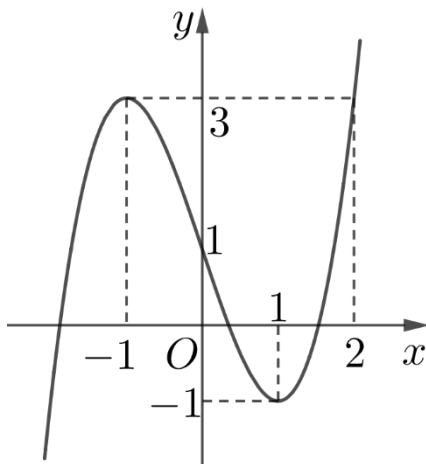
Từ đồ thị $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Số mệnh đề đúng: 3

Chọn A

Câu 8. . Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 7.

LỜI GIẢI

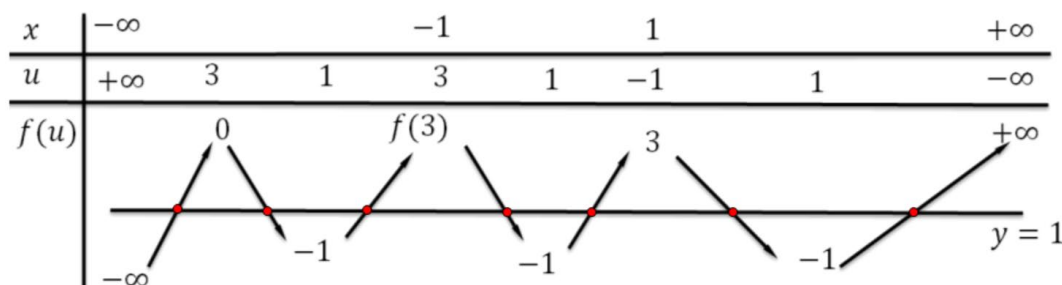
Câu

D.

Đặt $u = f(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(3) > 3$

Bảng giá trị tương ứng:



Dựa vào bảng trên ta có phương trình $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Một cửa hàng trang sức khảo sát một số khách hàng xem họ dự định mua trang sức với mức giá nào (đơn vị: triệu đồng). Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)
Số khách hàng	20	75	48	23	12

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 9,98. **B.** 15. **C.** 4,43. **D.** 14,41.

Lời giải

Ta có $n = 20 + 75 + 48 + 23 + 12 = 178 \Rightarrow \frac{n}{4} = 44,5$.

Suy ra nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [9;12).

$$\Rightarrow Q_1 = a_2 + \frac{\frac{n}{4} - m_1}{m_2} \cdot (a_3 - a_2) = 9 + \frac{44,5 - 20}{75} \cdot (12 - 9) = \frac{499}{50}.$$

Ta có $\frac{3n}{4} = 133,5$.

Suy ra nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm [12;15).

$$\Rightarrow Q_3 = a_3 + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + m_2)}{m_3} \cdot (a_4 - a_3) = 12 + \frac{133,5 - 95}{48} \cdot (15 - 12) = \frac{461}{32}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị cần tìm là $\Delta_Q = \frac{461}{32} - \frac{499}{50} \approx 4,43$.

Câu 10. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$. Hệ số của x^5 trong khai triển $(1-3x)^{2n}$ bằng:

A. $-3^5 \cdot C_{10}^5$. **B.** $-3^5 \cdot C_{12}^5$. **C.** $3^5 \cdot C_{10}^5$. **D.** $6^5 \cdot C_{10}^5$.

Lời giải

ĐK: $n \geq 3; n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 100 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 100.$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 2 \cdot n(n-1) = 100 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5(t/m).$$

Khi đó: $(1-3x)^{2n} = (1-3x)^{10}$.

Số hạng tổng quát khi khai triển nhị thức trên là: $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot (-3x)^k = (-3)^k \cdot C_{10}^k \cdot x^k$.

Hệ số của $x^5 \Leftrightarrow k = 5$. Do đó ta có hệ số của x^5 là: $-3^5 \cdot C_{10}^5$.

Câu 11. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L = a + b$.

A. $L = 43$.

B. $L = 23$.

C. $L = 13$.

D. $L = 53$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) = \frac{a}{b} \text{ thì } \frac{1}{L} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2}{x} \right) = \frac{b}{a}.$$

Ta có

$$\frac{b}{a} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+4} - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x+4}}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \right)$$

$$\text{Xét } L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} (\sqrt[3]{x+1} - 1)}{x} \right). \text{Đặt } t = \sqrt[3]{x+1}. \text{ Khi đó: } \begin{cases} x = t^3 - 1 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$L_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^3+3}(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^3+3}}{(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Xét } L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{b}{a} = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{15}{28} \Rightarrow a = 28, b = 15 \Rightarrow a + b = 43 \Rightarrow a + b = 43.$$

Câu 12. Hai máy bay MiG-41 và MiG-31 xuất phát cùng một lúc tại một sân bay M . Lúc t giờ, chiếc MiG-41 đến vị trí N cách sân bay 200 km về phía nam và 100 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 km ; chiếc MiG-31 đến vị trí P cách sân bay 100 km về phía bắc và 150 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 80 km . Góc giữa hai đường thẳng MN và MP gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $133,31^\circ$.

B. $56,68^\circ$.

C. $46,69^\circ$.

D. $50,52^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, có gốc tọa độ O trùng với sân bay M , mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông, tia Oz hướng lên bầu trời, đơn vị đo lấy theo km .

Trong không gian tọa độ $Oxyz$ như trên ta có: $M(0;0;0)$, $N(200;100;50)$, $P(-100;-150;80)$.

Nên: $\overrightarrow{MN}(200;100;50)$, $\overrightarrow{MP}(-100;-150;80)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \cos(MN, MP) &= \left| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}|} \\ &= \frac{|200 \cdot (-100) + 100 \cdot (-150) + 50 \cdot 80|}{\sqrt{200^2 + 100^2 + 50^2} \cdot \sqrt{(-100)^2 + (-150)^2 + 80^2}} = \frac{31000}{500\sqrt{8169}}. \text{ Suy ra: } (MN, MP) \approx 46,69^\circ. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án **(C)**

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

B. $OM = \sqrt{26}$.

C. $OM = \sqrt{14}$.

D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{DB} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 0; 3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh **(D)** Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x$$

$$MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y$$

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z$$

$$\sqrt{3}MD = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z$$

$$\text{Do đó } P \geq (6-x) + (2-y) + (3-z) + (x+y+z) = 11.$$

$$P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11 khi: } \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

$$\text{Khi đó } M(1; 2; 3) \text{ suy ra } OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300; 150; 7)$ đến điểm $N(800; 550; 13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.

A. $\left(925; 650; \frac{29}{2}\right)$. **B.** $(500; 400; 6)$. **C.** $\left(425; 250; \frac{17}{2}\right)$. **D.** $\left(625; 750; \frac{25}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{MN} = (500; 400; 6).$$

$$\text{Giả sử sau 5 phút tiếp theo, vị trí máy bay ở điểm } P \text{ thì } \overrightarrow{NP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} = \left(125; 100; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Do đó, tọa độ điểm } P \text{ là } \left(925; 650; \frac{29}{2}\right)$$

Câu 15. Cho phương trình $\sin x + \sin 5x = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1 + \sin 2x \\ 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 1 - \sin 4x \end{cases}$$

$$\text{Do đó phương trình tương đương với } \sin x + \sin 5x = \sin 2x + \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cdot \cos 2x = 2 \sin 3x \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Câu 16. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng $100m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Đáy trên bể người ta để 20% diện tích để làm nắp bể. Hãy xác định chiều rộng của đáy bể để tiết kiệm vật liệu xây bể nhất (làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. 3,4 .

B. 3,5 .

C. 4,39 .

D. 4,40 .

Lời giải

Chọn A

♦ Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x(m)$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$. Gọi

h là chiều cao của bể ta có $V = Sh = 2x^2 \cdot h = 100 \Rightarrow h = \frac{50}{x^2}$.

Diện tích của bể là

$$S = 2h \cdot x + 2 \cdot 2hx + 2x^2 + (1 - 20\%)2x^2 = \frac{19}{5}x^2 + 6hx = \frac{19}{5}x^2 + 6 \cdot \frac{50}{x^2} \cdot x = \frac{19}{5}x^2 + \frac{300}{x}.$$

♦ Xét hàm số $f(x) = \frac{19}{5}x^2 + \frac{300}{x}$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{38}{5}x - \frac{300}{x^2} = \frac{38x^3 - 1500}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 38x^3 - 1500 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1500}{38}} \approx 3,4.$$

Ta có để tiết kiệm vật liệu nhất thì chiều rộng đáy bể là $x = 3,4$.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $(2^{|\cos x|} + x^2)^{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{2^{|\cos x|} + x^2}$ có nghiệm là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số nghiệm.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \neq 0 \\ 2^{|\cos x|} + x^2 > 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$(2^{|\cos x|} + x^2)^{\frac{x+1}{x}} = (2^{|\cos x|} + x^2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|\cos x|} + x^2 = 1(1) \\ \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

Xét (1) $\Leftrightarrow 2^{|\cos x|} + x^2 \geq 2^0 + 0 = 1$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Câu 18. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau.

A. $\frac{137}{625}$.

B. $\frac{42}{625}$.

C. $\frac{32}{125}$.

D. $\frac{207}{625}$.

Lời giải

Đáp án D

Gọi A là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ nhất là màu trắng”,

B là biến cố “Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ hai là màu trắng”.

Ta có $P(A) = \frac{3}{25}$, $P(B) = \frac{10}{25}$.

Vì A và B là hai biến cố độc lập.

Nên xác suất để 2 quả cầu lấy ra đều màu trắng: $P(AB) = P(A).P(B) = \frac{3}{25} \cdot \frac{10}{25} = \frac{30}{625}$.

Tương tự, xác suất để hai quả cầu lấy ra đều là

Màu xanh $\frac{15}{25} \cdot \frac{9}{25} = \frac{135}{625}$

Màu đỏ $\frac{7}{25} \cdot \frac{6}{25} = \frac{42}{625}$.

Vậy xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau: $\frac{30}{625} + \frac{135}{625} + \frac{42}{625} = \frac{207}{625}$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 1$, cạnh bên $AA' = 3$. Gọi M là một điểm trên đoạn CC' sao cho $CM = 2MC'$. Tính độ dài của véc tơ $\overrightarrow{BM}$.

A. $\sqrt{6}$.

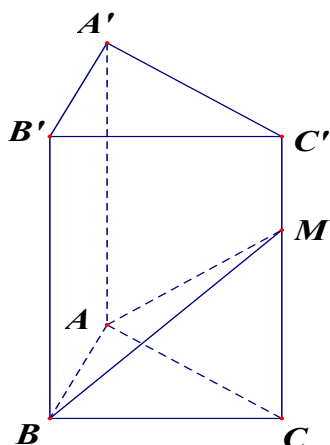
B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{11}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn A



$$|\overrightarrow{BM}| = BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + \left(\frac{2}{3}CC'\right)^2} = \sqrt{1+1+2^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB , mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính độ dài SH .

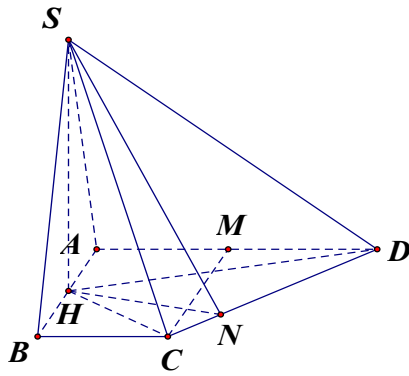
A. $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Từ H dựng $HN \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHN) \Rightarrow \left(\widehat{(SCD); (ABCD)} \right) = \widehat{SNH} = 60^\circ$

Lại có $S_{ABCD} = S_{\triangle AHD} + S_{\triangle HCD} + S_{\triangle HBC} \Rightarrow S_{\triangle HCD} = S_{ABCD} - S_{\triangle HAD} - S_{\triangle HBC}$

$$\Rightarrow S_{\triangle HCD} = \frac{(a+2a)a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Lại

có

$$S_{\triangle HCD} = \frac{1}{2} HN \cdot CD \Rightarrow \frac{1}{2} HN \cdot CD = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow HN = \frac{3a^2}{2 \cdot CD} = \frac{3a^2}{2\sqrt{CM^2 + MD^2}} = \frac{3a^2}{2 \cdot a\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Trong tam giác SAH có $SH = HN \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$.

a) Khi $m = 1$ thì đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1 - x)^2}$.

b) Khi $m = 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 và $|x_1 - x_2| = 2$.

c) Khi $m = 1$ thì góc giữa tiệm cận đứng và tiệm cận xiên bằng 45°

d) Khi $m = 4$ khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Lời giải

(a) Khi $m = 1$ thì $y = \frac{x^2 + x}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1 - x)^2}$.

Vậy **(a) Sai**.

(b) Khi $m = 1$ thì $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1 - x)^2}$, $y' = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Hàm số

có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Ta có $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$

Vậy **(b) Sai**.

(c) Khi $m = 1$ thì $y = \frac{x^2 + x}{1 - x} = -x - 2 + \frac{2}{1 - x}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - (-x + 2)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1-x} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = -x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} (y) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Do đó góc giữa hai đường tiệm cận bằng 45°

Vậy **(c) Đúng.**

(d) Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x + m \text{ có 2 nghiệm} \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 + m > 0 \Leftrightarrow \boxed{m > -1} \\ 1 + m \neq 0 \end{cases} \quad (2)$

Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2 , nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m$ (3)

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$y_1 = \frac{2x_1 + m}{-1} = -2x_1 - m$; $y_2 = -2x_2 - m$ (thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

Theo đề bài, ta có: $MN = 10 \Leftrightarrow MN^2 = 100 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100$ (4)

Thay (3) vào (4), ta được: $(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 20$

$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2 = 20 \Leftrightarrow 4 + 4m = 20 \Rightarrow m = 4$

Thử lại ở (2) $\Rightarrow \boxed{m = 4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy **(d) Đúng.**

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(5; -2; 0), B(4; 5; -2), C(0; 3; 2), A'(9; 0; 5)$. Gọi M là trung điểm AA' .

a) Tọa độ $D(1; -4; 4)$.

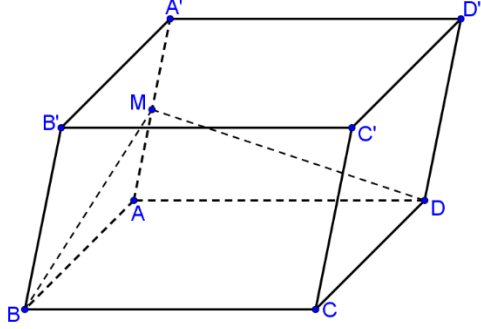
b) Giá trị $\cos(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MD}) = \frac{3\sqrt{609}}{609}$.

c) $|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'D'} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{29}$.

d) Điểm K di chuyển trên trục Ox . Đặt $Q = 2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| + 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}|$. Giá trị nhỏ nhất của Q bằng $6\sqrt{37}$.

Lời giải

(a) Đúng | (b) Sai | (c) Đúng | (d) Đúng.



(a) Gọi $D(x; y; z)$.

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 7; -2) \\ \overrightarrow{DC} = (-x; 3-y; 2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -1 \\ 3-y = 7 \\ 2-z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow D(1; -4; 4)$$

(b) M là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(7; -1; \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} = \left(-3; 6; -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow MB = \frac{3\sqrt{29}}{2}, \overrightarrow{MD} = \left(-6; -3; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow MD = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 18 - 18 - \frac{27}{4} = -\frac{27}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MD}) = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{MD}|} = \frac{-\frac{27}{4}}{\frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{2}} = \frac{-3\sqrt{609}}{609}.$$

(c) Ta có: $|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'D'} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{CM}|.$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CM} = \left(7; -4; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow CM = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'D'} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{29}.$$

(d) Ta có $Q = 2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| + 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| = 2|3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| + 3|2\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}|$

Với $G(3; 2; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABC và $I(2; 4; 0)$ là trung điểm BC .

$$\text{Ta có: } Q = 2|3\overrightarrow{KG}| + 3|2\overrightarrow{KI}| = 6(KG + KI)$$

Do G và I nằm cùng phía so với Ox nên gọi $G'(3; -2; 0)$ là điểm đối xứng của G qua Ox .

$$\text{Khi đó } Q = 2|3\overrightarrow{KG}| + 3|2\overrightarrow{KI}| = 6(KG + KI) = 6(KG' + KI) \geq 6G'I = 6\sqrt{37}.$$

Đẳng thức xảy ra khi K là giao điểm của $G'I$ và Ox .

Câu 3. Cho phương trình: $\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0$

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

c) Khi $m = -1$, tổng các nghiệm của phương trình trên $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng 0.

d) Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in (-2; -1).$

Lời giải**(a) Sai | (b) Đúng | (c) Đúng | (d) Sai.**Xét phương trình: $\frac{\cos 2x - m \cos x + 1}{2 \cos x + 1} = 0 \quad (1)$ **(a)** Đkxđ: $2 \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.**(b)** Khi $m = 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **(c)** Khi $m = -1$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} (L) \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Vì $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 0.

$$\textbf{(d)} \quad (1) \Leftrightarrow \cos 2x - m \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - m \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (2) \\ \cos x = \frac{m}{2} & (3) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vì $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên phương trình có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$.Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm khác

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{m}{2} < -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < \frac{m}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 0 \end{cases}$$

Câu 4.

Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị: độ C).

Nhóm	Hà Nội	Huế
[16,8;19,8)	2	1
[19,8;22,8)	3	2
[22,8;25,8)	2	3
[25,8;28,8)	1	2
[28,8;31,8)	4	4
	$n = 12$	$n = 12$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội là: 8,75.**b)** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 3,56.**c)** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Huế là: 7,75.**d)** Huế có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn Hà Nội vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn.**Lời giải**

(a) Xét số liệu ở Hà Nội:

Khoảng biến thiên: $R = 31,8 - 16,8 = 15$.

Số phần tử của mẫu là $n = 12$.

Tần số tích lũy của các nhóm lần lượt là $cf_1 = 2, cf_2 = 5, cf_3 = 7, cf_4 = 8, cf_5 = 12$.

Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{12}{4} = 3$ mà $2 < 3 < 5$ suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 3.

Xét nhóm 2 là nhóm $[19,8; 22,8)$ có $s = 19,8, h = 3, n_2 = 3$ và nhóm 1 là nhóm $[16,8; 19,8)$ có $cf_1 = 2$.

Ta có tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = s + \left(\frac{3 - cf_1}{n_2} \right) \cdot h = 19,8 + \left(\frac{3 - 2}{3} \right) \cdot 3 = 20,8$.

Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$ mà $8 < 9 < 12$ suy ra nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 9.

Xét nhóm 5 là nhóm $[28,8; 31,8)$ có $t = 28,8, l = 3, n_5 = 4$ và nhóm 4 là nhóm $[25,8; 28,8)$ có $cf_4 = 8$.

Ta có tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = t + \left(\frac{9 - cf_4}{n_5} \right) \cdot l = 28,8 + \left(\frac{9 - 8}{4} \right) \cdot 3 = 29,55$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $Q_3 - Q_1 = 29,55 - 20,8 = 8,75$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Bảng giá trị đại diện:

Nhóm	Giá trị đại diện	Hà Nội	Huế
$[16,8; 19,8)$	18,3	2	1
$[19,8; 22,8)$	21,3	3	2
$[22,8; 25,8)$	24,3	2	3
$[25,8; 28,8)$	27,3	1	2
$[28,8; 31,8)$	30,3	4	4

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm tại Hà Nội là:

$$\bar{x}_1 = \frac{2 \cdot 18,3 + 3 \cdot 21,3 + 2 \cdot 24,3 + 1 \cdot 27,3 + 4 \cdot 30,3}{12} = 24,8.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm tại Hà Nội là:

$$s_1^2 = \frac{2(18,3 - 24,8)^2 + 3(21,3 - 24,8)^2 + 2(24,3 - 24,8)^2 + (27,3 - 24,8)^2 + 4(30,3 - 24,8)^2}{12} = 20,75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{20,75} \approx 4,56$.

Chọn SAI.

(c) Xét số liệu ở Huế:

Xét số liệu ở Huế:

Khoảng biến thiên: $R = 31,8 - 16,8 = 15$.

Số phần tử của mẫu là $n = 12$.

Tần số tích lũy của các nhóm lần lượt là $cf_1 = 1, cf_2 = 3, cf_3 = 6, cf_4 = 8, cf_5 = 12$.

Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{12}{4} = 3$ suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 3. Xét nhóm 2 là nhóm $[19,8;22,8)$ có $s = 19,8, h = 3, n_2 = 2$ và nhóm 1 là nhóm $[16,8;19,8)$ có $cf_1 = 1$

Ta có tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = s + \left(\frac{3 - cf_1}{n_2} \right) \cdot h = 19,8 + \left(\frac{3 - 1}{2} \right) \cdot 3 = 22,8$.

Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$ mà $8 < 9 < 12$ suy ra nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 9.

Xét nhóm 5 là nhóm $[28,8;31,8)$ có $t = 28,8, l = 3, n_5 = 4$ và nhóm 4 là nhóm $[25,8;28,8)$ có $cf_4 = 8$

Ta có tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = t + \left(\frac{9 - cf_4}{n_5} \right) \cdot l = 28,8 + \left(\frac{9 - 8}{4} \right) \cdot 3 = 29,55$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $Q_3 - Q_1 = 29,55 - 22,8 = 6,75$.

Chọn SAI.

(d) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\bar{x}_2 = \frac{18,3 + 2.21,3 + 3.24,3 + 2.27,3 + 4.30,3}{12} = 25,8.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$s_2^2 = \frac{(18,3 - 25,8)^2 + 3(21,3 - 25,8)^2 + 3(24,3 - 25,8)^2 + 2(27,3 - 25,8)^2}{12} + \frac{4(30,3 - 25,8)^2}{12} = 15,75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $s_2 = \sqrt{s_2^2} = \sqrt{15,75} \approx 3,97$.

Huế có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn Hà Nội vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn.

Chọn ĐÚNG.

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC , $SO = 2a$. Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M không trùng với A và H , mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) SO song song với mặt phẳng (P)

b) Cạnh bên của hình chóp đã cho bằng $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

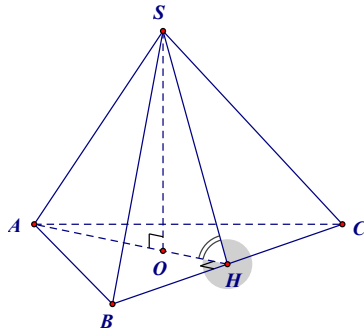
c) Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy có giá trị $\tan \alpha$ bằng $4\sqrt{3}$.

d) Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{3a^2}{4}$.

Lời giải

(a) Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp AH$. Mà $(P) \perp AH$ nên SO song song với mặt phẳng (P) hoặc $SO \subset (P)$

Vậy (a)-sai



(b) Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác vuông OSA ta có $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

Vậy (b)-đúng

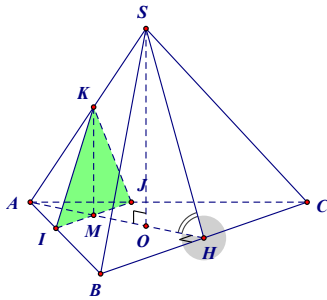
(c) Dễ thấy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp đã cho bằng góc $\widehat{OHS}$

Ta có $\tan \alpha = \tan \widehat{OHS} = \frac{SO}{OH} = \frac{3SO}{AH} = \frac{3 \cdot 2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$

Vậy (c)-đúng

(d) Đặt $AM = x$ với $0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta xét hai trường hợp sau:

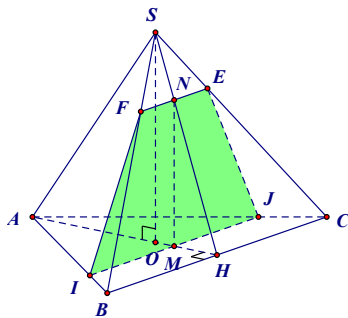
TH1: $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$, khi đó thiết diện là tam giác cân KIJ tại K như hình vẽ



Ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AH} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$ và $\frac{KM}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow KM = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$

Suy ra $dt(KIJ) = \frac{1}{2} IJ \cdot KM = 2x^2 \leq \frac{2a^2}{3}$

TH2: $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, khi đó thiết diện là hình thang cân $IJEF$ như hình vẽ



Ta có $IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$; $\frac{EF}{BC} = \frac{OM}{OH} = \frac{AM - AO}{OH} \Rightarrow EF = \frac{(AM - AO) \cdot BC}{OH} = 2(x\sqrt{3} - a)$

$$\text{và } \frac{MN}{SO} = \frac{HM}{HO} = \frac{AH - AM}{HO} \Rightarrow MN = \frac{(AH - AM)SO}{HO} = 2(3a - 2x\sqrt{3})$$

$$\text{Suy ra } dt(IJEF) = \frac{(IJ + EF) \cdot MN}{2} = \frac{3a^2}{4} - \left(4x - \frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \leq \frac{3a^2}{4}$$

So sánh hai trường hợp trên ta thấy, diện tích lớn nhất của thiết diện là $\frac{3a^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

. **Vậy (d)-đúng**

Câu 6. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50.

a) Số cách chọn được hai thẻ chẵn là 1225.

b) Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $\frac{37}{49}$.

c) Số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là 780.

d) Xác suất để chọn được hai thẻ mà hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3 bằng 0,65 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

(a) Số cách chọn hai thẻ là $C_{25}^2 = 300$.

(b) Số cách chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số lẻ là $C_{25}^2 = 300$

Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $1 - \frac{C_{25}^2}{C_{50}^2} = \frac{37}{49}$.

(c) Xét ba thẻ có số ghi lần lượt là a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, khi đó $a + c = 2b$, suy ra a, c cùng tính chẵn lẻ.

Do đó số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là $C_{25}^2 + C_{25}^2 = 600$

(d) +) $n(\Omega) = C_{50}^2 = 1225$

+) Gọi A là biến cố hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3

Giả sử 2 số được chọn là a, b . Theo giả thiết $(a^2 - b^2) : 3 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) : 3 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b) : 3 \\ (a + b) : 3 \end{cases}$

Từ số 1 đến số 50 có 16 số chia hết cho 3; 17 số chia 3 dư 1; 17 số chia 3 dư 2.

Nếu $(a - b) : 3$ thì a, b phải đồng dư khi chia 3 $\Rightarrow$ số cách chọn là: $C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2$

Nếu $(a + b) : 3$ thì hoặc a và b cùng chia hết cho 3 hoặc một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2 $\Rightarrow$ số cách chọn là: $C_{16}^2 + C_{17}^1 \cdot C_{17}^1$

Lại có: $\begin{cases} (a - b) : 3 \\ (a + b) : 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : 3 \\ b : 3 \end{cases} \Rightarrow$ số cách chọn là: C_{16}^2

Do đó: $n(A) = (C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2) + (C_{16}^2 + C_{17}^1 C_{17}^1) - C_{16}^2 = C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^1 C_{17}^1$

Vậy $P(A) = \frac{C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^1 C_{17}^1}{C_{50}^2} = \frac{681}{1225} \approx 0,56$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$, a, b là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a + b - 2 > 0 \\ 24 + 3(3a + b) < 0 \end{cases}$.

Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(1) = a + b - 2 > 0 \\ f(3) = 9a + 3b + 24 = 24 + 3(3a + b) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$.

$$\text{Mặt khác: } 2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

$$\text{Xét } g(x) = 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2.f'(x).f''(x) + 2f(x).f'''(x) - 2f'(x).f''(x) = 2f(x).f'''(x) = 12f(x).$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; 1) \\ x = x_2 \in (1; 3) \\ x = x_3 \in (3; +\infty) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

The graph illustrates the function $g(x)$ and its derivative $g'(x)$ across the domain $x \in (-\infty, +\infty)$. The x-axis is marked with $-\infty$, x_1 , x_2 , x_3 , and $+\infty$. The y-axis is marked with $+\infty$ and $y = 0$. The function $g(x)$ is shown as a blue curve that starts at $+\infty$ for $x \rightarrow -\infty$, decreases to a local minimum at x_1 , increases to a local maximum at x_2 , decreases to a local minimum at x_3 , and then increases back to $+\infty$ for $x \rightarrow +\infty$. The derivative $g'(x)$ is shown as a sequence of signs: $-$ for $x < x_1$, 0 at x_1 , $+$ for $x_1 < x_2$, 0 at x_2 , $-$ for $x_2 < x_3$, 0 at x_3 , and $+$ for $x > x_3$.

Do $g(x_2) = 2.f(x_2).f''(x_2) - [f'(x_2)]^2 = -[f'(x_2)]^2 < 0$ nên $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; -3), B(4; 0; 5), C(2; 0; 1)$ và $D(6; -2; 11)$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm sao cho hai biểu thức $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x + 3y + z$

Lời giải

Đáp án: 8

Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-a) - 3(4-a) - (2-a) = 0 \\ 2(2-b) - 3(-b) - (-b) = 0 \\ 2(-3-c) - 3(5-c) - (1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow H(6; -2; 11) \Rightarrow H \equiv D$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4 = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 - 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 + MD^4 \\ &= -2MH^2 + 2HA^2 - 3HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) + MH^4 \\ &= -2MH^2 + MH^4 + 2HA^2 - 3HB^2 - HC^2. \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $-2MH^2 + MH^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $-2MH^2 + MH^4 = (MH^2 - 1)^2 - 1 \geq -1$. Suy ra $-2MH^2 + MH^4$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $MH = 1$. Hay $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2 = 1$ (1)

Mặt khác, ta có $Q = x + 2y + 2z - 24 = (x-6) + 2(y+2) + 2(z-11)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$Q^2 = [1(x-6) + 2(y+2) + 2(z-11)]^2 \leq 9[(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2] = 9$$

$$\Rightarrow -3 \leq Q \leq 3. \text{ Nên } Q_{\min} = -3.$$

$$\text{Khi: } \begin{cases} \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-11}{2} \\ x+2y+2z-24=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{31}{3} \end{cases}. \text{ Suy ra } x+3y+z=8$$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là chữ nhật, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ($ABCD$), $SA = a$, $SC = a\sqrt{3}$ và số đo α của góc nhị diện $[S, AD, B]$ thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{4\sqrt{15}}{5}$. Gọi I là điểm thỏa mãn $3\vec{IA} + 2\vec{IC} + 4\vec{IS} = \vec{0}$. Mặt phẳng (α) đi qua AI và lần lượt cắt các tia SB , SC , SD tại ba điểm phân biệt M , N , P . Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.MNP$ (làm tròn đến hàng đơn vị và lấy $a = 15$).

Lời giải

Trả lời: 75,3

Gọi H là hình chiếu của S trên $AC \Rightarrow AC = 2a, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{a}{2}$.

Mà $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD$.

Dựng $HK \perp AD, K \in AD \Rightarrow SK \perp AD$.

$\Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc phẳng nhị diện $[S, AD, B] \Rightarrow \tan \widehat{SKH} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$.

+) $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HK$.

$\Rightarrow \frac{SH}{KH} = \frac{4\sqrt{15}}{5} \Rightarrow KH = \frac{a\sqrt{5}}{8}$.

$\Rightarrow DC = \frac{AC}{AH} \cdot KH = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{165}}{24}$.

Gọi N là điểm thỏa mãn $\vec{NC} + 2\vec{NS} = \vec{0}$.

Vì $3\vec{IA} + 2\vec{IC} + 4\vec{IS} = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{IA} + 6\vec{IN} = \vec{0}$.

$\Rightarrow N = SC \cap AI \Rightarrow N = SC \cap (\alpha)$ và $\frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$.

Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y (x, y > 0)$.

$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{xy}{3} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{xy}{3} V_{S.BCD}$

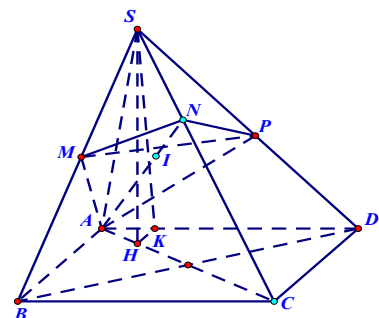
Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.BCD}}$

$\Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot y = xy + x \cdot \frac{1}{3} \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$.

$\Rightarrow 4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{xy}{3} V_{S.BCD} \geq \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3 \sqrt{165}}{48} = \frac{a^3 \sqrt{165}}{576}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.



Suy ra khối chóp $SMNP$ có thể tích nhỏ nhất là $V_{\min} = \frac{a^3 \sqrt{165}}{576}$.

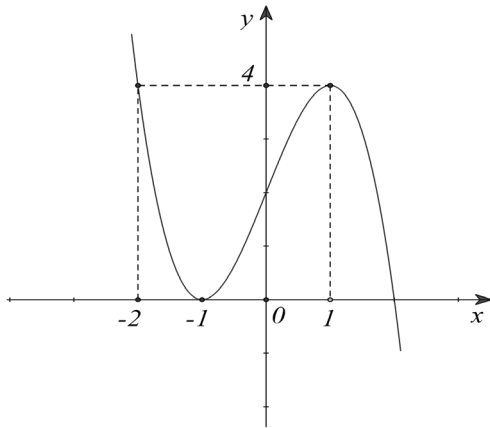
Khi $a = 15 \Rightarrow V_{\min} \approx 33,5$.

Câu 4. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ với $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị $-1; 1$ và $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?

Lời giải

Đáp số: -45.

Từ giả thiết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có hai cực trị $-1; 1$ thỏa mãn $f'(-2) = 2f'(0)$, $f''(2) = -9$, ta tìm được hàm số $f'(x) = -x^3 + 3x + 2$. Ta có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



+ Ta có $g'(x) = 2f'(2x-3) - \frac{2x}{1+x^2} - 2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-1; 2\right) \Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right]$$

(1)

+ Đặt $t = 2x - 3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow t \in (-2; 1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-2; 1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

Tức là $f'(2x-3) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

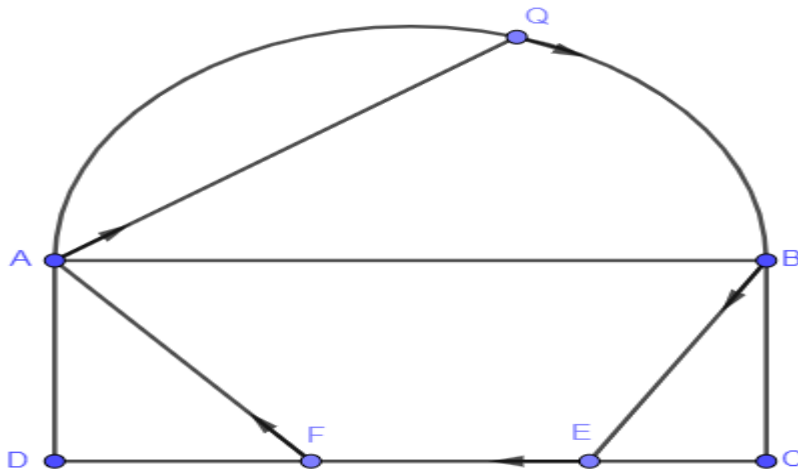
$-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min_{x \in (\frac{1}{2}; 2)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x = 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-10; 10)$ thì $m \in \{-9; -8; \dots; -2; -1\}$. Vậy tổng bằng -45.

Câu 5. Một khu đất trống bằng phẳng hình chữ nhật $ABCD$, bên cạnh là một bờ hồ hình bán nguyệt có đường kính AB như hình vẽ bên dưới. Từ vị trí A , anh Quang chèo một chiếc thuyền với vận tốc 6 km/h đến điểm Q trên bờ hồ. Sau đó, anh Quang chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 8 km/h, rồi chạy bộ theo đường gấp khúc $BEFA$ để quay về vị trí A , trong đó vận tốc chạy bộ của anh Quang trên đoạn BE và FA là 6 km/h, vận tốc chạy bộ của anh Quang trên đoạn EF là 10 km/h (E, F là hai vị trí bất kỳ trên đoạn CD mà anh Quang lựa chọn). Thời gian ngắn nhất mà anh Quang di chuyển từ A rồi quay về A là bao nhiêu, biết $AD = 3$ (km), $AB = 4$ (km), $\widehat{QAB} = \frac{\pi}{3}$ (thời gian tính bằng phút và làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 123.

Ta có $\triangle AQB$ vuông tại $Q \Rightarrow AQ = AB \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$ (km).

Độ dài cung tròn $\widehat{QB}$ là $l = \frac{4\pi}{3}$.

Thời gian anh Quang chèo từ A đến Q là: $t_1 = \frac{AQ}{6} = \frac{1}{3}$ (giờ)

Thời gian anh Quang đi từ Q đến B là: $t_2 = \frac{l}{8} = \frac{\pi}{6}$ (giờ).

Gọi $EC = x$ và $DF = y$ ($0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $x + y \leq 4$)

$$\text{Quãng đường đi từ } B \text{ đến } E \text{ là } BE = \sqrt{9+x^2} \Rightarrow t_3 = \frac{BE}{6} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$$

$$\text{Quãng đường đi từ } F \text{ về } A \text{ là } AF = \sqrt{9+y^2} \Rightarrow t_4 = \frac{AF}{6} = \frac{\sqrt{9+y^2}}{6}$$

$$\text{Và quãng đường đi } E \text{ đến } F \text{ là } EF = 4 - (x+y) \Rightarrow t_5 = \frac{4-(x+y)}{10}$$

Vậy tổng thời gian mà anh Quang đi từ B đến A theo đường gấp khúc là $T = t_3 + t_4 + t_5$

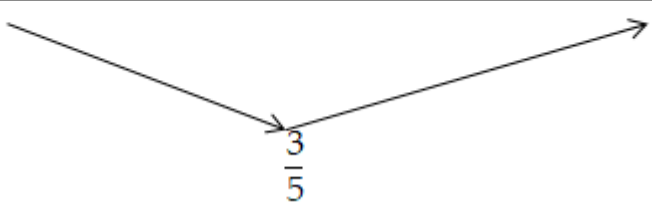
$$\Rightarrow T(x; y) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{2-x}{10} + \frac{\sqrt{9+y^2}}{6} + \frac{2-y}{10} = f(x) + f(y)$$

Đây là một biểu thức có dạng đối xứng 2 biến x, y và ta cần tìm $\min T(x; y)$

$$\text{Khi đó ta xét } f(u) = \frac{\sqrt{9+u^2}}{6} + \frac{2-u}{10}, 0 \leq u \leq 4$$

$$\text{Xét } f'(u) = \frac{u}{6\sqrt{9+u^2}} - \frac{1}{10}, f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{9}{4}$$

Lập bảng biến thiên

u	0	$\frac{9}{4}$	4
$f'(u)$	-	0	+
$f(u)$			

$$\text{Ta có } \min_{[0;4]} f(u) = f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\text{Do đó ta có } \min T(x; y) = \frac{6}{5} \text{ (giờ).}$$

Thời gian ngắn nhất mà anh Quang di chuyển từ A rồi quay về A là $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{6}{5} = \frac{46+5\pi}{30}$ (giờ)
 ≈ 123 (phút).

Câu 6. Có hai hộp đựng bi, các viên bi được đánh các số tự nhiên. Hộp I có 7 viên bi được đánh số 1; 2; ...; 7. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số lẻ ở hộp II là $\frac{6}{11}$. Xác suất để lấy được cả hai viên bi lấy ra đều mang số lẻ là $\frac{a}{b}$, biết $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $b - a$.

Lời giải

Trả lời: 53.

Gọi X là biến cố “Lấy được cả hai viên bi mang số lẻ”.

Gọi A là biến cố: “Lấy được viên bi mang số lẻ ở hộp I ”. Khi đó $P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$.

Gọi B là biến cố: “Lấy được viên bi mang số lẻ ở hộp II ”. Theo đề bài $P(B) = \frac{6}{11}$.

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $X = A.B$.

Theo công thức nhân xác suất ta có

$$P(X) = P(A.B) = P(A).P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{77} = \frac{a}{b} \Rightarrow b - a = 53.$$

----HẾT----

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>