

GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN BẰNG NHIỀU CÁCH

(MỘT PHƯƠNG PHÁP NHẪM PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH)

NGUYỄN THÀNH LONG

Gửi tặng: www.toanmath.com

Tải thêm tài liệu môn Toán THPT tại:

- + Trang web: www.toanmath.com
- + Fanpage: www.facebook.com/toanmath
- + Groups: <https://www.facebook.com/groups/toanmath>

Bản soạn. 13.03.2011

GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN BẰNG NHIỀU CÁCH

(Một phương pháp nhằm phát triển tư duy)

I. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ t = 0 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t (\tan^2 t + 1 - 1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t (\tan^2 t + 1) dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t d(\tan t) + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \left(\frac{\tan^2 t}{2} + \ln |\cos t| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Nhận xét: Đối với tích phân dạng $I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u, u^2 + a^2) du, u = u(x)$ thì ta có thể đặt $u = a \tan t$

Cách 2: Phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{xdx}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} x^2 \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{3}} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} x \ln(x^2 + 1) dx}_J = 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \ln(x^2 + 1) d(x^2 + 1)$$

$$\text{Tính } J = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(x^2 + 1) d(x^2 + 1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 1) \\ dv = d(x^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ v = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = 3\ln 2 - \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} d(x^2 + 1) = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Chú ý: Sở dĩ ta sử dụng được phương pháp này là vì

Khi tích phân hàm phân thức mà ta phân tích được về dạng $I = \int \frac{P(x)}{Q^n(x)} dx = \int \frac{f(x)Q'(x)}{Q^n(x)} dx$ thì

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{Q'(x)}{Q^n(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$$

Cách 3: Kỹ thuật tách thành tích kết hợp phương pháp đổi biến số

Nhận xét: Ta có $x^3 = x^2 \cdot x$ và $(x^2 + 1)' = 2x$ từ đó ta định hướng giải như sau

$$\text{Phân tích } I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 x}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t - 1 \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} (t - \ln|t|) \Big|_1^4 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Cách 4: Phân tích và đưa vào vi phân

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) d(x^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} d(x^2 + 1) - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

Cách 5: Chia đa thức để tách thành tổng hai tích phân đơn giản hơn

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Nhận xét: Đây là tích phân hàm phân thức mà có bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu chính vì thế ta chia đa thức để tách thành tổng các tích phân là phương pháp tối ưu nhất

Cách 6: Phân tích tử thức chứa mẫu thức (thực chất là chia đa thức)

Ta có $x^3 = x(x^2 + 1) - x$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Bài 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{3x^3}{(x-1)(x-2)} dx$

Giải:

Cách 1: Phân tích tử thức chứa nghiệm của mẫu thức

Phân tích $x^3 = x(x^2 - 3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 2) + 7(x-1) + 1$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{x(x^2 - 3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 2) + 7(x-1) + 1}{x^2 - 3x + 2} dx \\ &= \int \left(x + 3 + \frac{7}{x-2} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 7 \ln|x-2| + \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + 7 \ln|x-2| + \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \frac{x^2}{2} + 3x + 8 \ln|x-2| - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Cách 2: Kết hợp phân tích tử thức chứa nghiệm ở mẫu thức và kĩ thuật “nhảy tầng lầu”

Phân tích $x^3 = x(x^2 - 3x + 2) + 3(x-1)(x+1) - (2x-3)$

$$= x(x^2 - 3x + 2) + 3(x-1)[(x-2) + 3] - (2x-3) = x(x^2 - 3x + 2) + 3(x-1)(x-2) + 9(x-1) - (2x-3)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{x(x^2 - 3x + 2) + 3(x-1)[(x-2) + 3] - (2x-3)}{x^2 - 3x + 2} dx \\ &= \int \left(x + 3 + \frac{9}{x-2} \right) dx - \int \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9 \ln|x-2| - \ln|x^2 - 3x + 2| + C \end{aligned}$$

Cách 3: Kết hợp phân tích tử thức chứa nghiệm ở mẫu thức và đồng nhất thức

Phân tích $x^3 = x(x^2 - 3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 2) + 7x + 6$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{x(x^2 - 3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 2) + 7x + 6}{x^2 - 3x + 2} dx \\ &= \int (x+3) dx + \int \frac{7x+6}{x^2 - 3x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + I_1. \end{aligned}$$

Tính I_1 bằng phương pháp đồng nhất thức....

Cách 4: Chia đa thức để tách thành tổng hai tích phân đơn giản hơn

$$I = \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(x + 3 + \frac{9x-8}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \int (x+3) dx + \underbrace{\int \frac{9x-8}{x^2 - 3x + 2} dx}_{I_1}$$

Tính I_1 bằng phương pháp đồng nhất thức....

Bài 3: Tìm nguyên hàm sau: $I = \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp đổi biến số

$$\text{Đặt } u = x+1 \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ x = u-1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{(u-1)^3}{u^2} du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2} du = \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{u^2}{2} - 3u + 3\ln|u| + \frac{1}{u} + C$$

với $u = x+1$

Cách 2: Phân tích tử thức chứa nghiệm ở mẫu thức

$$\text{Phân tích } x^3 = x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x+1) - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x+1) - 1}{x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int \left[x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Cách 3: Kết hợp phân tích tử thức chứa nghiệm ở mẫu thức và kĩ thuật nhảy tầng lầu

$$\text{Phân tích } x^3 = x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) - 1 + \frac{3}{2}(2x+2)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) - 1 + \frac{3}{2}(2x+2)}{x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int \left(x - 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx + \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 1| + C \end{aligned}$$

Cách 4: Kết hợp phân tích tử thức chứa nghiệm ở mẫu thức và đồng nhất thức

$$\text{Phân tích } x^3 = x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) + 3x + 2$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int (x - 2) dx + \int \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + I_1 \quad . \end{aligned}$$

Tính I_1 bằng phương pháp đồng nhất thức

Cách 5: Chia đa thức để tách thành tổng các tích phân đơn giản

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx = \int \left[x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Cách 6: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{x^3}{x+1} + 3 \int \frac{x^2}{x+1} dx = -\frac{x^3}{x+1} + 3 \int \frac{x^2-1+1}{x+1} dx \\ &= -\frac{x^3}{x+1} + 3 \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{x^3}{x+1} + 3 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{39}}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đưa vào vi phân

Phân tích $x^2 = [(1-x)-1]^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(1-x)^{39}} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{39}} = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}$$

$$I = \int \frac{1}{(1-x)^{37}} dx - 2 \int \frac{1}{(1-x)^{38}} dx + \int \frac{1}{(1-x)^{39}} dx = \frac{1}{36} \frac{1}{(1-x)^{36}} - \frac{2}{37} \frac{1}{(1-x)^{37}} + \frac{1}{38} \frac{1}{(1-x)^{38}} + C$$

Cách 2:

Đặt $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$

$$\Rightarrow I = - \int \frac{(1-t)^2 dt}{t^{39}} = - \int \frac{1}{t^{39}} dt + 2 \int \frac{1}{t^{38}} dt - \int \frac{1}{t^{37}} dt = \frac{1}{38} \frac{1}{t^{38}} - \frac{2}{37} \frac{1}{t^{37}} + \frac{1}{36} \frac{1}{t^{36}} + C$$

Nhận xét:

Cách 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{dx}{(1-x)^{39}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{38(1-x)^{38}} \end{cases}$$

Khi đó $I = x^2 \frac{1}{38(1-x)^{38}} - \frac{1}{19} \int \frac{x}{(1-x)^{38}} dx \dots$ đến đây các bạn có thể tự làm rồi

Bài 5: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{10}}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đưa vào vi phân

Sử dụng đồng nhất thức: $x^3 = [(x-1)+1]^3 = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^{10}} = \frac{1}{(x-1)^7} - \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{3}{(x-1)^9} - \frac{1}{(x-1)^{10}}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x-1)^7} - 3 \int \frac{dx}{(x-1)^8} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^9} - \int \frac{dx}{(x-1)^{10}} = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{(x-1)^6} + \frac{3}{7} \frac{1}{(x-1)^7} - \frac{3}{8} \frac{1}{(x-1)^8} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x-1)^9} + C \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi số

Đặt $t = x - 1$ ta có: $x = t + 1$ nên $dx = dt$

$$A = \int \frac{(t+1)^3}{t^{10}} dt = \int \frac{(t^3 + 3t^2 + 3t + 1)dt}{t^{10}} = \int t^{-7} dt + 3 \int t^{-8} dt + 3 \int t^{-9} dt + \int t^{-10} dt$$
$$= -\frac{1}{6} \frac{1}{(x-1)^6} + \frac{3}{7} \frac{1}{(x-1)^7} - \frac{3}{8} \frac{1}{(x-1)^8} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x-1)^9} + C$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{dx}{(x-1)^{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = -\frac{1}{9(x+1)^9} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = -x^3 \frac{1}{9(x+1)^9} + \frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{x^2}{(x+1)^9} dx}_{I_1} \dots$$

đến đây rồi ta có thể tính I_1 bằng phương pháp tích phân từng phần **hoặc** phân tích

$$x^2 = (x^2 - 1) + 1 = (x+1)(x-1) + 1$$

Nhận xét :

- Đối với **bài 3, bài 4** và mà ta sử dụng phương pháp đồng nhất thức thì giải hệ quả thật là nan giải phải không, chính vì thế mà lựa chọn phương pháp nào mà hiệu quả và nhanh về đích nhất
Qua **bài 3, bài 4 và bài 5** ta **chú ý**

- Đối với tích phân hàm phân thức có dạng $I = \int \frac{P(x)}{(x+a)^n} dx$ thì đặt $t = x + a$ là một phương pháp hiệu quả nhất

- Khi tính tích phân hàm phân thức mà ta phân tích được về dạng $I = \int \frac{P(x)}{Q^n(x)} dx = \int \frac{f(x)Q'(x)}{Q^n(x)} dx$ thì ta sử

dụng phương pháp tích phân từng phần nhưng nên làm khi bậc của $(x+a)$ là $n = 1, 2$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{Q'(x)}{Q^n(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$$

Bài 11: (ĐHDB – B 2004) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

HD:

Cách 1: Biến đổi số

Nhân cả tử và mẫu cho x^2

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$\text{Đặt } t = 1 + x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t - 1 \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{cases}$$

Cách 3: Biến đổi số

Đặt $x = \tan u \dots$ Bạn đọc tự giải

Cách 4: Đưa vào vi phân

Phân tích tử $1 = (1 + x^2) - x^2$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln|x| \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Bài 12: Tính tích phân sau: } I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5 + x^3}$$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp phân tích

Cách 1.1: Phân tích: $1 = x^2 + 1 - x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{8} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

Cách 1.2: Phân tích: $1 = x^4 + 1 - x^4 = x^4 + (1 - x^2)(1 + x^2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^4+1-x^4}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^4+(1-x^2)(1+x^2)}{x^3(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^3} = \frac{x}{x^2+1} + x^{-3} - \frac{1}{x}$$

... tự làm nhé

Cách 2: Kết hợp kỹ thuật tách thành tích và phương pháp biến đổi số

$$\text{Phân tích } I = \int_1^2 \frac{1}{x^3(x^2+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=1 \end{cases}$$

Khi đó $I = -\int_1^{\frac{1}{2}} t \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + 1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^3}{t^2 + 1} dx \dots$ đến đây lại trở thành **bài 1**, các bạn tha hồ mà làm nhé

Cách 3: Sử dụng kĩ thuật nhân trên tử và phương pháp đổi biến số

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^3(x^2 + 1)} dx = \int_1^2 \frac{x}{x^4(x^2 + 1)} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^5 \frac{dt}{t(t-1)^2} = \frac{1}{2} \int_2^5 \left[\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t} \right] dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t-1} + \ln \left| \frac{t}{t-1} \right| \right) \Big|_2^5 = \frac{3}{8} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

Hoặc các bạn có thể đặt $u = t - 1$ hoặc phân tích $1 = t - (t - 1)$ hoặc đồng nhất thức

Cách 4: Sử dụng kĩ thuật nhân trên tử và phương pháp đưa vào vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{x^3(x^2 + 1)} dx = \int_1^2 \frac{x}{x^4(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^4(x^2 + 1)} d(x^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x^4(x^2 + 1)} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^4} d(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} d(x^2 + 1) = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx \dots \text{ôì đến đây lại thành } \textbf{cách 1} \text{ rồi, lòng vòng quá, bỏ qua thôi...} \end{aligned}$$

Cách 5: Sử dụng phương pháp đồng nhất thức

$$\frac{1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1} \text{ đến đây thì đồng nhất thức hai vế để giải hệ tìm } I = A, B, C, D, E \text{ tuy nhiên}$$

việc giải hệ là phức tạp chính vì thế trong trường hợp này ta nên làm theo **cách 1, cách 2 và cách 3** là hiệu quả nhất

Cách 6: Đặt $x = \tan u \Rightarrow dx = (\tan^2 + 1) du \dots$ bạn đọc tự làm

$$\textbf{Bài 14:} \text{ Tính tích phân sau: } I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Giải:

$$\textbf{Nhận xét: } x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Cách 1: Dựa vào nhận xét trên ta sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - (x - 1)(x + 1)$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx - \int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} dx = I_1 - I_2$$

Tính I_1 bằng cách đặt $t = x^3 + 1$ **hoặc** $I_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(x^3 + 1)}{x^3 + 1}$

Tính I_2 phân tích $x - 1 = \frac{1}{2}(2x - 1) - \frac{1}{2}$ (**kĩ thuật nhảy tầng lầu**)

$$\text{Ta có } I_2 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Cách 2: Đồng nhất thức

$$\text{Xét } \frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

Đến đây ta có thể đồng nhất hệ số giải hệ tìm A, B, C **hoặc** cho một số giá trị riêng là

$$x = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}; x = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{3}; x = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \dots \text{Bạn tự giải tiếp nhé}$$

$$\text{Kết quả ta được } I = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Cách 3: Đổi biến số kết hợp kĩ thuật “nhảy tầng lầu”

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)[(x+1)^2-3(x+1)+3]}$$

$$\text{Đặt } x+1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$= \int_1^2 \frac{dt}{t(t^2-3t+3)} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(t^2-3t+3)-(t^2-3t)}{t(t^2-3t+3)} dt = \frac{1}{3} \left(\int_1^2 \frac{dt}{t} - \int_1^2 \frac{t-3}{t^2-3t+3} dt \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\int_1^2 \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(t^2-3t+3)}{t^2-3t+3} + \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2}{t^2-3t+3} \right| + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-3}{\sqrt{3}} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Bài 15: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{3x^4 - 5x^3 + 7x - 8}{(x+2)^{50}} dx$.

Giải :

Cách 1: Biến đổi số

$$\text{Đặt } x+2=t \Rightarrow \begin{cases} x=t-2 \\ dx=dt \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{3x^4 - 5x^3 + 7x - 8}{(x+2)^{50}} dx = \int \frac{3(t-2)^4 - 5(t-2)^3 + 7(t-2) - 8}{t^{50}} dt$$

Cách 2: Đồng nhất tử thức chứa nghiệm của mẫu thức

Phân tích $3x^4 - 5x^3 + 7x - 8 = a(x+2)^4 + b(x+2)^3 + c(x+2)^2 + d(x+2) + e \dots$ đồng nhất để tìm a, b, c, d, e

...

Cách 3: Khai triển Taylor (tham khảo)

Đặt $P_4(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x - 8$

Áp dụng khai triển Taylor ta có

$$P_4(x) = P_4(-2) + \frac{P_4'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{P_4''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{P_4^{(3)}(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{P_4^{(4)}(-2)}{4!}(x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow P_4(x) = 66 - 149(x+2) + 48(x+2)^2 - 29(x+2)^3 + 3(x+2)^4$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{66 - 149(x+2) + 48(x+2)^2 - 29(x+2)^3 + 3(x+2)^4}{(x+2)^{50}} dx$$

$$= \int \left[66(x+2)^{-50} - 149(x+2)^{-49} + 48(x+2)^{-48} - 29(x+2)^{-47} + 3(x+2)^{-46} \right] dx$$

$$= \frac{-66}{49(x+2)^{49}} + \frac{149}{48(x+2)^{48}} - \frac{48}{47(x+2)^{47}} + \frac{29}{46(x+2)^{46}} - \frac{3}{45(x+2)^{45}} + C$$

Bài 16: (ĐHTN – 2001) Tính tích phân sau: $I = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx$

Giải:

$$\text{Ta có } \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1} dx$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}. \text{ Đặt } t = \tan u \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 u) du.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 u}{1+\tan^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Cách khác:

Ta có thể gộp hai lần đặt là $x - \frac{1}{x} = \tan u \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = (1 + \tan^2 u) du \dots$ bạn đọc tự giải

Bài 17: Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$

Giải:

Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$\text{Biến đổi } I = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx$$

$$\text{Đặt } u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{du}{u^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} \right| \Bigg|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(5 - 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{6 - \sqrt{2}}$$

Cách 2: Phân tích $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ và sử dụng đồng nhất thức

$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \dots$ đồng nhất hệ số tìm A, B, C và D nhưng cách này dài và rất phức tạp nên không đưa ra

Nhận xét:

- Qua các ví dụ trên ta thấy kỹ thuật chia thực sự rất hiệu quả trong việc chuyển tích phân ban đầu thành tích phân đơn giản hơn

- Thông thường để sử dụng kỹ thuật chia thì trên tử là một đa thức bậc hai $P(x) = x^2 - 1$ còn mẫu là một đa thức bậc 4: $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sao cho hệ số $a = e = 1$

- Tích phân trên đưa về dạng $I = \int f\left(x \pm \frac{1}{x}\right) \left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right) dx$ đặt $t = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right) dx$

Tương tự ta có thể giải bài toán này

1. Tính tích phân sau $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

$$I = \int_1^2 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx. \text{ Đặt } u = x - \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

2. (ĐHQGHN – A 2001) Tính tích phân bất định sau:

$$I = \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 5x + 1)(x^2 - 3x + 1)} dx = -\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - 3x + 1} \right| + C$$

Bài 18: Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 x^3 (x^4 + 1)^4 dx$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = x^4 + 1 \Rightarrow dt = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{dt}{4}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 x^3 (x^4 + 1)^4 dx = \frac{1}{4} \int_1^2 t^4 dt = \left(\frac{1}{20} t^5 \right) \Big|_1^2 = \frac{31}{20}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = x^4 \Rightarrow \frac{dt}{4} = x^3 dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{4} \int_0^1 (1+t)^4 dt = \frac{1}{4} \int_0^1 (1+4t+6t^2+4t^3+t^4) dt = \frac{1}{4} \left(t+2t^2+2t^3+t^4+\frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{31}{20}$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp biến đổi vi phân

$$I = \int_0^1 x^3 (x^4 + 1)^4 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^4 + 1)^4 d(x^4 + 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4 + 1)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{31}{20}$$

Cách 4: Sử dụng phương pháp phân tích

$$\text{Phân tích } x^3 (x^4 + 1)^4 = x^3 (x^{16} + 4x^{12} + 6x^8 + 4x^4 + 1) = (x^{19} + 4x^{15} + 6x^{11} + 4x^7 + x^3)$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 x^3 (x^4 + 1)^4 dx = \int_0^1 (x^{19} + 4x^{15} + 6x^{11} + 4x^7 + x^3) dx = \left(\frac{x^{20}}{20} + \frac{x^{16}}{4} + \frac{x^{12}}{2} + \frac{x^8}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{31}{20}$$

Nhận xét: Mỗi cách giải có một đặc thù riêng nên lựa chọn cách nào là phù hợp hơn, tùy vào mỗi người, theo tôi **cách 1 và cách 3** là hiệu quả nhất

Bài 19: (ĐH KTQD – 1997) Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 x^5 (1 - x^3)^6 dx = \frac{1}{168}$

Giải:

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x^5 (1 - x^3)^6 dx = \int_0^1 x^3 (1 - x^3)^6 x^2 dx$$

Cách 1: Đổi biến số

$$\text{Đặt } t = 1 - x^3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{dt}{3} = x^2 dx \\ x^3 = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_1^0 t^6 (1-t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^6 (1-t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (t^6 - t^7) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{168}$$

Cách 2: Đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx = \int_0^1 x^2 [1-(1-x^3)] (1-x^3)^6 dx = \int_0^1 x^2 (1-x^3)^6 dx - \int_0^1 x^2 (1-x^3)^7 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^3)^6 d(1-x^3) + \int_0^1 (1-x^3)^7 d(1-x^3) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1-x^3)^7}{7} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-x^3)^8}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{168} \end{aligned}$$

Cách 3: Khai triển $(1-x^3)^6$ thành tổng các đa thức $\Rightarrow x^5(1-x^3)^6$.. cách này không khó nhưng khai triển phức tạp... chỉ tham khảo thôi

Chú ý: Nếu ta đặt $t = x^3$ cũng ra nhưng sẽ dài và phức tạp, bạn đọc có thể tham khảo

$$\text{Bài 20: Tính tích phân sau } I = \int_0^2 x(x+1)^2 dx$$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp phân tích

$$\text{Ta có } x(x+1)^2 = x(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 + x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{34}{3}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đưa vào vi phân

$$\text{Ta có } x(x+1)^2 = [(x+1)-1](x+1)^2 = (x+1)^3 - (x+1)^2$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 (x+1)^3 dx - \int_0^2 (x+1)^2 dx = \int_0^2 (x+1)^3 d(x+1) - \int_0^2 (x+1)^2 d(x+1) = \frac{(x+1)^4}{4} - \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{34}{3}$$

Cách 3: Đổi biến số

$$\text{Đặt } t = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ dx = dt \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^3 (t-1)t^2 dt = \int_1^3 (t^3 - t^2) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{34}{3}$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x+1)^2 \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x+1)dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = (x+1)^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 x^2 (x+1) dx = 6 - \int_0^2 (x^3 + x^2) dx = 6 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{34}{3}$$

$$\text{Bài 21: Tính tích phân sau: } I = \int_{-1}^0 x^2 (x+1)^9 dx$$

Giải:

Cách 1: Biến đổi số

$$\text{Đặt } t = x+1 \Rightarrow dt = dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 x^2 (x+1)^9 dx = \int_0^1 (t-1)^2 t^9 dt = \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) t^9 dt = \int_0^1 (t^{11} - 2t^{10} + t^9) dt \\ &= \left(\frac{t^{12}}{12} - 2\frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{2}{11} + \frac{1}{10} = \frac{1}{660} \end{aligned}$$

Cách 2: Phương pháp phân tích

$$\text{Phân tích } x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 x^2 (x+1)^9 dx = \int_{-1}^0 [(x+1)^2 - 2(x+1) + 1] (x+1)^9 dx = \int_{-1}^0 [(x+1)^{11} - 2(x+1)^{10} + (x+1)^9] dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^{12}}{12} - 2\frac{(x+1)^{11}}{11} + \frac{(x+1)^{10}}{10} \right] \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{660} \end{aligned}$$

Hoặc phân tích x^2 theo $(x+1)$ như sau

$$x^2 (x+1)^9 = [(x^2 - 1) + 1] (x+1)^9 = \{(x+1)[(x+1) - 2] + 1\} (x+1)^9 = (x+1)^{11} - 2(x+1)^{10} + (x+1)^9$$

Nhận xét:

- Với bài toán này ta sử dụng phương pháp phân tích tức là khai triển $(x+1)^9$ hay phương pháp tích phân từng phần như **bài 20** thì cũng ra nhưng rất dài và phức tạp vì bậc của $(x+1)$ là lớn

$$\text{Bài 22: Tính tích phân: } I = \int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10} dx$$

Giải:

Cách 1: Đổi biến số

$$\text{Đặt } t = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow dt = (2 + 6x)dx \Rightarrow dt = 2(1 + 3x)dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = (1 + 3x)dx$$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=6 \end{cases}$.

$$I = \int_1^6 t^{10} \frac{dt}{2} = \int_1^6 \frac{t^{10}}{2} dt = \frac{t^{11}}{22} \Big|_1^6 = \frac{6^{11}}{22} - \frac{1^{11}}{22} = \frac{6^{11}}{22} - 1$$

Cách 2: Đưa vào vi phân

$$I = \int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+2x+3x^2)^{10} (1+2x+3x^2)' dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+2x+3x^2)^{10} d(1+2x+3x^2) = \frac{(1+2x+3x^2)^{11}}{22} \Big|_0^1 = \frac{6^{11}}{22} - 1$$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: (ĐHV – D 2000) Tính tích phân sau: $I = \int_0^2 \frac{3x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$

Đs: $I = 9 \ln 3 - 8$

Bài 2: Tính tích phân sau: $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 3x + 1)(x^2 + x + 1)} dx$

HD:

Chia cả tử và mẫu cho x^2 ta được

$$I = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)} dx$$

Cách 1: Biến đổi số đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

Cách 2: Biến đổi vi phân

$$I = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)} dx = \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)} dx = \frac{1}{2} \left[\ln\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) - \ln\left(x + \frac{1}{x} + 3\right) \right] \Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2} \ln \frac{7}{10}$$

Cách 3: Đồng nhất thức

Bài 3: Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$.

HD:

Đồng nhất thức: $x^5 = x^3(x^2 + 1) - x(x^2 + 1) + x$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Hoặc chia tử cho mẫu để tách thành tổng các tính phân đơn giản **Hoặc** đặt $x = \tan t$

Bài 4: (ĐHKT – 1994) Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3} dx$

HD:

Phân tích $x = \frac{1}{2}(1+2x-1) \Rightarrow \frac{x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3} \right]$ ta được $I = \frac{1}{18}$

Hoặc đặt $t = 1 + 2x$ **Hoặc** tích phân từng phần

Bài 10: Tính tích phân: $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 - 3}{x(x^4 + 3x^2 + 2)} dx = -\frac{21}{4} \ln 2 + \frac{13}{4} \ln 3$

HD:

Cách 1: Nhân cả tử và mẫu cho x rồi đặt $t = x^2$

Cách 2: Phân tích mẫu $x(x^4 + 3x^2 + 2) = x(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ và sử dụng đồng nhất thức

Bài 5: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{2x+5}{(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$

HD:

Phân tích $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$

Cách 1: Sử dụng đồng nhất thức khi mẫu số là 4 nghiệm đơn

Cách 2: Sử dụng đổi biến số đặt $t = x^2 + 5x$

Cách 3: Sử dụng phương pháp phân tích

$$2x+5 = \frac{1}{2}(2x+5) \left[(x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 5x + 4) \right]$$

Bài 6: Tính tích phân: $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4} dx = -\frac{3}{44}$

HD:

Phân tích $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x^2 + x + 2)^2$

Cách 1: Đồng nhất thức

Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho x^2 và đặt $t = x + \frac{2}{x}$ **Hoặc** đưa vào vi phân

Bài 7: Tính tích phân sau: $I = \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^3}$

HD:

Cách 1: Đặt $x = \tan t$

Cách 2: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3} \end{cases}$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp phân tích thành hai tích phân đơn giản

Phân tích $x^2 = (x^2 + 1) - 1$

$$\text{Khi đó } I = \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} - \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$$

II. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

Bài tập giải mẫu:

$$\text{Bài 1: (ĐHGTVT – 1998) Tính tích phân: } I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

Giải:

Cách 1: Biến đổi số

$$\text{Đặt } u = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^3 - 1}{3} \\ dx = u^2 du \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{7}{3} \Rightarrow u = 2 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{\frac{u^3 - 1}{3} + 1}{u} u^2 du = \frac{1}{3} \int_1^2 (u^3 + 2) u du = \frac{1}{3} \int_1^2 (u^4 + 2u) du = \frac{1}{3} \left(\frac{u^5}{5} + u^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{46}{15}$$

Cách 2: Biến đổi số

$$\text{Đặt } u = 3x+1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u-1}{3} \\ dx = \frac{du}{3} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{7}{3} \Rightarrow u = 8 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{u-1}{\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}} + 1 du = \frac{1}{9} \int_1^8 \frac{u+2}{\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}} du = \frac{1}{9} \int_1^8 \left(u^{\frac{2}{3}} + 2u^{\frac{1}{3}} \right) du = \frac{1}{9} \left(\frac{3u^{\frac{5}{3}}}{5} + 3u^{\frac{2}{3}} \right) \Big|_1^8 = \frac{46}{15}$$

Cách 3: Đưa vào vi phân

$$\text{Phân tích } x+1 = \frac{1}{3}(3x+1) + \frac{2}{3}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{\frac{1}{3}(3x+1) + \frac{2}{3}}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{1}{9} \int_0^{\frac{7}{3}} (3x+1)^{\frac{2}{3}} d(3x+1) + \frac{2}{9} \int_0^{\frac{7}{3}} (3x+1)^{-\frac{1}{3}} d(3x+1) \\ &= \frac{1}{15} (3x+1)^{\frac{5}{3}} \Big|_0^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{3} (3x+1)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{\frac{7}{3}} = \frac{46}{15} \end{aligned}$$

Cách 4: Tính phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \frac{1}{2} (x+1) (3x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \frac{1}{2} (x+1) (3x+1)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{7}{3}} (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) \dots \text{bạn đọc tự giải}$$

$$\text{Bài 2: Tính tích phân: } I = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0$$

HD:

C1: Đặt $x = \tan t$

C2: Phân tích $x^3 = x(x^2+1) - x$

$$\text{C3: Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \end{cases}$$

C4: Đặt $x = -t$

C5: Phân tích $x^3 dx = x^2 x dx = [(x^2+1) - 1] d(x^2+1)$

$$\text{Bài 3: (ĐHBKHN – 1995) Tính tích phân sau: } I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Đặt $x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = \frac{1}{\sin t}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos^2 t}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$ (vì $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \sin t > 0$)

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

Nhân cả tử và mẫu cho x ta được

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2} x \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{2} x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 1} = t \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 + 1 \\ x dx = t dt \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{t(t^2 + 1)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1}$. Đặt $t = \tan u \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 u} du = (\tan^2 u + 1) du$

Đổi cận $\begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\pi}{3} \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 u + 1}{\tan^2 u + 1} du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du = u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

Đặt $x^2 - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t + 1 \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{cases}$... tương tự như cách 2

Cách 4: Phương pháp biến đổi số

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -dt$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} du = u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Cách 5: Phân tích $1 = -[(x^2 - 1) - x^2]$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = - \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx}_{I_2} \dots \text{bạn đọc tự giải}$$

Bài 3: (ĐH – A 2003) Tính tích phân: $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 - 4 \\ x dx = t dt \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4} \left(\int_3^4 \frac{dt}{t-2} - \int_3^4 \frac{dt}{t+2} \right) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{1/\sqrt{5}}^{1/2\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{4t^2+1}} = -\frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{5}}^{1/2\sqrt{3}} \frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2+1}} = -\frac{1}{2} \ln \left| 2t + \sqrt{4t^2+1} \right| \Big|_{1/\sqrt{5}}^{1/2\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } x = 2 \tan t \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt \text{ với } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ và } \sqrt{x^2+4} = \frac{2}{\cos t}.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \Bigg|_{\alpha}^{\pi/3} = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} \quad (\text{trong đó } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{5})$$

Bài 4: (ĐHDB – A 2003) Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

Giải:

$$\text{Phân tích } I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} . x dx$$

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1-t^2 \\ x dx = -t dt \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_1^0 t^2 (1-t^2) dt = \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = 1-x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1-t \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} (1-t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}$$

Cách 3: Đặt $t = x^2 \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx \dots$ tự giải

Cách 4: Lượng giác hóa

$$\text{Đặt } x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) \cos t dt$$

Cách 4.1.

$$\text{Đặt } \sin t = u \Rightarrow \cos t dt = du$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 u^2 (1-u^2) du = \int (u^2 - u^4) du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right)$$

Cách 4.2.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) d(\sin t) = \left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\sin^5 t}{5} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}.$$

Cách 4.3.

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cos t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \cos t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -\frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \cos t dt \dots$$

Cách 5: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2-1) \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \dots \text{bạn đọc tự giải}$$

Cách 6: Phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = x\sqrt{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = x^2 \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}} \bigg|_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 x(x^2-1)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (x^2-1)^{\frac{2}{3}} d(x^2-1) \dots \text{bạn đọc giải tiếp}$$

Bài 5: (ĐH – A 2004) Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$

Giải:

Cách 1:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow t^2 = x-1 \Leftrightarrow x = t^2+1 \Leftrightarrow dx = 2tdt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t} 2tdt = 2 \int_0^1 \frac{t^3+t}{t+1} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt \\ = 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln|t+1| \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2 \ln 2 \right) = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$$

$$\text{Cách 2: } t = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2(t-1)dt \\ x = (t-1)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= 2 \int_1^2 \frac{(t-1)[(t-1)^2+1]}{t} dt = 2 \int_1^2 \frac{t^3-3t^2+4t-1}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t^2-3t+4-\frac{1}{t} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + 4t - \ln|t| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

Tổng quát: $\int_a^b \frac{p(x)}{\sqrt{ax+b+c}} dx$ với $p(x)$ là một đa thức chứa x , m, n, c là các hằng số ta đặt $t = \sqrt{ax+b+c}$ hoặc $t = \sqrt{ax+b}$

Bài 6: Tính tích phân sau: $I = \int_2^3 \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} dx$

Giải:

Cách 1: Dựa vào đạo hàm

Đặt $f(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$. Ta biến đổi $f(x)$ về dạng

$$f(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = \sqrt{4-x} + \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = (x)' \sqrt{4-x} + (\sqrt{4-x})' x$$

Xét hàm số $F(x) = x\sqrt{4-x}$ vì $F'(x) = (x)' \sqrt{4-x} + (\sqrt{4-x})' x = f(x)$

Vậy $F(x) = x\sqrt{4-x} + C$ là một họ nguyên hàm của hàm số đã cho

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} dx = F(x) \Big|_2^3 = x\sqrt{4-x} \Big|_2^3 = 3$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đổi biến số

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4-x} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-t^2 \\ dx = -2tdt \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{8-3(4-t^2)}{t} t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (3t^2-4) dt = (t^3-4t) \Big|_1^{\sqrt{2}} = 3$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp đổi biến số

Đặt $t = 4-x$...bạn đọc tự giải

Cách 4: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 8-3x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -3dx \\ v = -2\sqrt{4-x} \end{cases}$$

Khi đó $I = -2(8-3x)\sqrt{4-x} \Big|_2^3 - 6 \int_2^3 \sqrt{4-x} dx = \dots 3$

Bài 7: Tính tích phân sau: $I = \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{x^2 dx}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}.$

Giải:

Cách 1:

Đặt $x-1 = \sqrt{3} \cos t \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sqrt{3} \sin t dt \\ x^2 = 3 \cos^2 t - 2\sqrt{3} \cos t + 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int \frac{-\sqrt{3} \sin t (3 \cos^2 t - 2\sqrt{3} \cos t + 1) dt}{(3+3 \cos^2 t) \sqrt{3} \sin t} = - \int \left(1 + \frac{-2\sqrt{3} \cos t}{3+3 \cos^2 t} - \frac{2}{3+3 \cos^2 t} \right) dt.$

Cách 2:

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} + \int \frac{(2x-4)dx}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}} = I_1 + I_2$

Tính $I_2 = \int \frac{(2x-4)dx}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}} = \int \frac{2t dt}{(3+t^2)\sqrt{3-t^2}} - 2 \int \frac{dt}{(3+t^2)\sqrt{3-t^2}} = J_1 + J_2$

Tính J_1 bằng cách đặt $\sqrt{3-t^2} = u$, tính J_2 bằng cách đặt $\sqrt{3-t^2} = u(\sqrt{3}-t)$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: (ĐHĐN- 1997) Tính tích phân: $I = \int_2^7 \frac{1}{\sqrt{2+x+1}} dx = 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3$

HD: Sử dụng phương pháp biến đổi số

Đặt $t = \sqrt{2+x+1}$ Hoặc $t = \sqrt{2+x}$

Bài 2: (ĐHSP QN – 1999) Tính tích phân: $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} = \frac{1}{10} (28 - 3\sqrt[3]{4})$

Bài 13: (ĐBĐH 2 – A 2005) Tính tích phân: $I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{231}{10}$

Bài 14: (ĐBĐH 1 – A 2008) Tính tích phân: $I = \int_{-\frac{1}{2}}^3 \frac{x}{\sqrt[3]{2x+2}} dx = \frac{12}{5}$

Bài 15: (ĐBĐH 1 – A 2007) Tính tích phân: $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx = 2 + \ln 2$

Bài 16: (CĐXD – 2005) Tính tích phân: $I = \int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} dx$

III. TÍCH PHÂN HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: (PVBC TT – 1999) Tính tích phân sau: $I = \int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Đặt $\ln x = u$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

Đặt $\sqrt[3]{2 + \ln^2 x} = t \Rightarrow t^3 = 2 + \ln^2 x \Rightarrow \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{\ln x}{x} dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = e \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt[3]{3} \\ t = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} t \cdot t^2 dt = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} t^3 dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{8} (3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2})$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

Đặt $2 + \ln^2 x = t \Rightarrow \frac{dt}{2} = \frac{\ln x}{x} dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = e \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_2^3 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 = \frac{3}{8} (3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2})$

Cách 4: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^e (2 + \ln^2 x)^{\frac{1}{3}} (2 + \ln^2 x)' dx = \frac{1}{2} \int_1^e (2 + \ln^2 x)^{\frac{1}{3}} d(2 + \ln^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (2 + \ln^2 x)^{\frac{4}{3}} \Big|_1^e = \frac{3}{8} (3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

Bài 2: (ĐH – B 2004) Tính tích phân sau: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \cdot \ln x}{x} dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Đặt $t = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{t^2 - 1}{3} \\ \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt \end{cases}$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=e \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t^2-1}{3} t^2 dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{135}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = 1 + 3 \ln x \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{t-1}{3} \\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{3} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=e \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=1 \end{cases} \dots \text{ tương tự cách 1}$$

Cách 3: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x} \cdot \ln x}{x} dx = \frac{1}{3} \int_1^e \sqrt{1+3 \ln x} \cdot \ln x d(1+3 \ln x) = \frac{1}{9} \int_1^e \sqrt{1+3 \ln x} [(1+3 \ln x) - 1] d(1+3 \ln x) \\ &= \frac{1}{9} \int_1^e (1+3 \ln x)^{\frac{3}{2}} d(1+3 \ln x) - \frac{1}{9} \int_1^e (1+3 \ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+3 \ln x) \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{2}{5} (1+3 \ln x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+3 \ln x)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_1^e = \frac{116}{135} \end{aligned}$$

$$\text{Cách 4: } t = \ln x \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \sqrt{1+3t} \cdot t dt \dots \text{ đến đây rồi ta có thể làm bằng nhiều cách như biến đổi số đặt } u = 1+3t \text{ hoặc}$$

$$u = \sqrt{1+3t} \text{ hoặc đưa vào vi phân bằng cách phân tích } t = \frac{1}{3}(1+3t) - \frac{1}{3}$$

$$\text{Bài 3: Tính tích phân sau: } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2 \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\text{Biến đổi } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int_1^e \sqrt{1+\ln x} d(1+\ln x) = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} \Big|_1^e = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}.$$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

Đặt $t = 1 + \ln x$ hoặc $t = \ln x$

$$\text{Bài 4: (ĐH – B 2010) Tính tích phân sau: } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = e \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{u du}{(2+u)^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+u} - \frac{2}{(2+u)^2} \right) du = \int_0^1 \frac{d(2+u)}{2+u} - 2 \int_0^1 \frac{d(2+u)}{(2+u)^2} = \left(\ln|2+u| + \frac{2}{2+u} \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = 2 + \ln x \Rightarrow \begin{cases} \ln x = t - 2 \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 \frac{(t-2)}{t^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(\ln|t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$$

Cách 3: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx = \int_1^e \frac{\ln x d(2+\ln x)}{(2+\ln x)^2} = \int_1^e \frac{(2+\ln x) - 2}{(2+\ln x)^2} d(2+\ln x) = \int_1^e \frac{d(2+\ln x)}{(2+\ln x)} - 2 \int_1^e \frac{d(2+\ln x)}{(2+\ln x)^2} \\ &= \left(\ln|(2+\ln x)| + \frac{2}{2+\ln x} \right) \Big|_1^e = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cách 4: Phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x(2+\ln x)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{2+\ln x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\ln x \cdot \frac{1}{2+\ln x} \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)} dx = -\frac{1}{3} + \int_1^e \frac{d(2+\ln x)}{2+\ln x} = -\frac{1}{3} + \ln(2+\ln x) \Big|_1^e = -\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{Bài 4: Tính tích phân sau: } I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^2 = \ln 2.$$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\text{Biến đổi } I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^e \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln|1+\ln x| \Big|_1^e = \ln 2$$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt: } t = \ln x$$

$$\text{Bài 5: Tính tích phân sau: } I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

Giải:

Cách 1:

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \sin t dt = -\cos t \Big|_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1$$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\text{Biến đổi } I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \sin(\ln x) d(\ln x) = -\cos(\ln x) \Big|_1^e = 1 - \cos 1$$

$$\text{Bài 6: Tính tích phân sau: } I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^5 x}$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=e \\ x=e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^5 x} = \int_1^2 \frac{dt}{t^5} = \left(-\frac{1}{4t^4} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{64}.$$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\text{Biến đổi } I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^5 x} = \int_e^{e^2} \ln^{-5} x d(\ln x) = -\frac{1}{4 \ln^4 x} \Big|_e^{e^2} = \frac{15}{64}$$

Bài 7: Tính tích phân sau: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$

Giải:

Cách 1: Đổi biến và sử dụng tích phân từng phần

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow e^t = x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\ln 2 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\ln 2} \frac{t}{e^t} dt = \int_0^{\ln 2} e^{-t} t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=t \\ dv=e^{-t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=-e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -te^{-t} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-t} dt = -\frac{\ln 2}{2} - e^{-t} \Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

Cách 2: Tích phân từng phần

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = \frac{\ln x}{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} \\ v = \frac{\ln^2 x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

Cách 3: Tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \int_1^2 x^{-2} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

Bài 8: Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

Giải:

Cách 1: Sử dụng tích phân liên kết

$$\text{Liên kết của } I \text{ là } J = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

Ta có

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$I - J = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln|e^x + e^{-x}| \Big|_0^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln 2 = \ln \frac{e^2 + 1}{2e}$$

Cộng lại ta được $2I = 1 + \ln \frac{e^2 + 1}{2e} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[1 + \ln \frac{e^2 + 1}{2e} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi số

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x$

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = e \\ t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^e \frac{dt}{1 + \frac{1}{t}} = \int_1^e \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \Big|_1^e = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \int_1^e \frac{e^x \cdot e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Đặt $e^x = \tan t \Rightarrow e^x dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (\tan^2 + 1) dt$

Khi đó $I = \int_1^e \frac{\tan x}{\tan^2 + 1} (\tan^2 + 1) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \tan x dx = -\ln|\cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} = \frac{1}{2} \ln 2 - \ln|\cos \alpha|$ (với $\alpha = \arctan e$)

Bài 9: (ĐH DB – B 2003) Tính tích phân sau: $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

Giải:

Cách 1: Tách thành tích để sử dụng phương pháp biến đổi số

Đặt $\sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow \begin{cases} e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x = \ln 5 \\ x = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = 2 \int_1^2 \frac{(t^2 + 1)t dt}{t} = 2 \int_1^2 (t^2 + 1) dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 + 2t \Big|_1^2 = \frac{20}{3}$

Cách 2: Tách thành tích để sử dụng phương pháp biến đổi số

Đặt $e^x - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} e^x = t + 1 \\ e^x dx = t dt \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x = \ln 5 \\ x = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^4 \frac{(t+1)tdt}{t^{\frac{1}{2}}} = \int_1^4 (t+1)t^{\frac{1}{2}} dt = \int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{20}{3}$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Phân tích } I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = 2\sqrt{e^x - 1} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = e^x \cdot 2\sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} \cdot e^x dx = 16 - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} d(e^x - 1) = 16 - \frac{4}{3} (e^x - 1) \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{20}{3}$$

Hoặc có thể tính nhanh như sau

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x d(\sqrt{e^x - 1}) = 2 e^x \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x \sqrt{e^x - 1} dx \\ &= 16 - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} d(e^x - 1) = 16 - \frac{4}{3} (e^x - 1) \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Cách 4: Đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x - 1) = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x - 1) + 1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \left(\sqrt{e^x - 1} + \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \right) d(e^x - 1) \\ &= \left(\frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2(e^x - 1)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Bài 10: (ĐH – D 2009) Tính tích phân sau: $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đồng nhất thức $1 = (e^x - 1) - e^x$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{1}{e^x - 1} dx = \int_1^3 \left(-1 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx = -\int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = -x \Big|_1^3 + \ln|e^x - 1| \Big|_1^3 \\ &= -2 + \ln \left| \frac{e^3 - 1}{e - 1} \right| = -2 + \ln(e^2 + e + 1) \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx = (t+1) dx \Rightarrow \frac{dt}{(t+1)} = dx$$

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=e^3-1 \\ t=e-1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{e-1}^{e^3-1} \frac{dt}{(t+1)t} \dots \text{Bạn đọc tự giải tiếp}$$

Chú ý: Có thể đặt $t = e^x$

Cách 3: Dựa vào đạo hàm

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{-(e^x - 1) + e^x}{e^x - 1} = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1} = -(x)' + \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = -(x)' + [\ln(e^x - 1)]' = [-x + \ln(e^x - 1)]'$$

$$\Rightarrow F(x) = -x + \ln(e^x - 1)$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1} = F(x) \Big|_1^3 = [-x + \ln(e^x - 1)] \Big|_1^3 = -2 + \ln(e^2 + e + 1)$$

$$\text{Bài 11: (ĐH - A 2010) Tính tích phân sau: } I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 \cdot e^x}{1 + 2e^x} dx$$

Giải:

$$\frac{x^2 + e^x + 2x^2 \cdot e^x}{1 + 2e^x} = \frac{x^2(1 + 2e^x) + e^x}{1 + 2e^x} = x^2 + \frac{e^x}{1 + 2e^x}$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 \cdot e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{e^x}{1 + 2e^x} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx}_{I_1}$$

Tính I_1 bằng các cách như sau đặt $t = 1 + 2e^x$ hoặc $t = e^x$ hoặc

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1 + 2e^x)}{1 + 2e^x} = \frac{1}{2} \ln(1 + 2e^x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + 2e}{3}\right)$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + 2e}{3}\right)$$

$$\text{Bài 12: (ĐHK D-2004) Tính tích phân sau: } I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - (2x + \ln(x-1)) \Big|_2^3 = \ln 216 - \ln 4 - 2 - \ln 2 = \ln 27 - 2.$$

$$\text{Hoặc } I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx = \int_2^3 \ln x(x-1) dx = \int_2^3 \ln x dx + \int_2^3 \ln(x-1) dx = I_1 + I_2$$

Áp dụng TPTP là xong

$$\text{Bài 10: (ĐHDB – 2002) Tính tích phân sau: } I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\ln 3} \frac{d(e^x + 1)}{\sqrt{(e^x + 1)^3}} = \int_0^{\ln 3} (e^x + 1)^{-\frac{3}{2}} d(e^x + 1) = -2(e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\ln 3} = \sqrt{2} - 1$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x}$$

$$\Rightarrow I = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{tdt}{t^3} = -2 \cdot \frac{1}{t} \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{2} - 1$$

Hoặc đặt $t = e^x + 1$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

$$\text{Bài 1: (ĐHDB – D 2005) Tính tích phân sau } I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \frac{76}{15}$$

HD:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\ln x + 1} \text{ hoặc } t = \ln x \text{ hoặc biến đổi vi phân } I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{\ln x + 1}} d(\ln x)$$

hoặc tích phân từng phần

$$\text{Bài 2: (ĐHBK – 2000) Tính tích phân sau: } I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

$$\text{Đs: } I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Bài 3: (ĐHHH – 98) Tính tích phân: } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$$

HD: Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x}$

$$\text{Đs: } I = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 4: $I = \int_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = e^2 - e$

HD:

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{dt}{2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Tổng quát: $I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)} g(x) dx$ mà $f'(x) = kg(x)$; $k \in \mathbb{R}^*$ đặt $t = f(x)$

IV. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot \cos 2x dx$

Giải:

Cách 1: Tích phân từng phần

Đặt $\begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \cos x \sin x dx = -\sin 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cos^2 x \cdot \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos 4x)}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx \\ &= \left(\frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} (4 + \pi) \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng tích phân liên kết

Liên kết với I là $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \cos 2x dx$

Ta có $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$ (1)

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$
 (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được $I = \frac{1}{16} (4 + \pi)$

Cách 3: Sử dụng phương pháp phân tích

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} (\pi + 4)$$

Bài 2: (ĐHTM – 2000) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

Giải:

Cách 1: Sử dụng đồng nhất thức

$$\frac{4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{2[(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)]}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} - \frac{2(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} dx}_{I_1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

Tính I_1 bằng cách biến đổi $(\sin x + \cos x)^2 = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ **hoặc** bằng cách đặt $t = \tan x$

Cách 2: Sử dụng tích phân liên kết

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx.$

Khi đó $I + J = 4$ và $J - I = 0$ nên $I = 2$

Cách 3: Đổi biến số theo cận

Phân tích $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x}{\cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx$

Đặt $x - \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} \\ t = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos^3 t} dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos t)}{\cos^3 t} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \left(\frac{1}{2\cos^2 t} + \tan t \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

Cách 4: Đổi biến số theo cận

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \\ t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos t}{[\cos t + \sin t]^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{[\cos x + \sin x]^3} dx$

$$\Rightarrow I + I = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \Rightarrow I = 2$$

Cách 5:

Ta có $\frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{\sin x}{\sin^3 x (1 + \cot x)^3} = \frac{1}{\sin^2 x (1 + \cot x)^3}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x (1 + \cot x)^3} dx$

Đặt $t = \cot x \dots$ bạn đọc tự giải

Cách 6:

Ta có

$$\frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{\sin x}{\cos^3 x (\tan x + 1)^3} = \frac{\tan x}{\cos^2 x (\tan x + 1)^3}$$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos^2 x (\tan x + 1)^3} dx$

Đặt $t = \tan x \dots$ bạn đọc tự giải

Cách 7:

$t = \tan x \dots$ bạn đọc tự giải

Bài 3: Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp phân tích kết hợp với phương pháp đưa vào vi phân

$$\text{Phân tích } \tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x = \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \tan x \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x d(\tan x) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\ &= \left(\frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x| \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp phân tích kết hợp với phương pháp đưa vào vi phân

$$\text{Phân tích } \tan^3 x = (\tan^3 x + \tan x) - \tan x = \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x \dots \text{trở lại cách 1}$$

Cách 3: Phương pháp đổi biến số

$$t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{t^2 + 1} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt = \int_1^{\sqrt{3}} t dt - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{t^2}{2} \Bigg|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

Cách 4: Phương pháp đổi biến số

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t^2)}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \left(-\frac{1}{2t^2} - \ln t \right) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

Cách 5: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x dx}{\cos^3 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos^2 x - 1) d(\cos x)}{\cos^3 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^{-1} x d(\cos x) \\ &= \ln |\cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2 \cos^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

Bài 4: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp phân tích

Cách 1.1: Sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích

Ta có $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos 2x \cdot \sin x}{2} \dots$ bạn đọc tự giải tiếp

Cách 1.2: Sử dụng công thức nhân 3

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

Khi đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \sin 3x) dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x d(3x) = \left(-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin^2 x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \sin x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Khi đó

$$I = -\sin x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{2}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Chú ý: Có thể đặt $t = \sin x$

Cách 3: Dùng phương pháp đưa vào vi phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Chú ý: Có thể đặt $t = \sin x$

Cách 4:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx \Rightarrow \begin{cases} dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \dots \text{Bạn đọc tự giải}$$

Bài 5: Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng kỹ thuật nhân trên tử

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$$

Cách 1.1: Đổi biến số đưa về tích phân hàm phân thức

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{[(1-t)(1+t)]^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1+t) + (1-t)}{(1-t)(1+t)} \right]^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{2}{1-t^2} \right] dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

Cách 1.2: Đưa trực tiếp vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{[(1 - \cos x)(1 + \cos x)]^2} \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(1 + \cos x) + (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \right]^2 d(\cos x) = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right)^2 d(\cos x) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{(1 - \cos x)^2} + \frac{1}{(1 + \cos x)^2} + \frac{2}{1 - \cos^2 x} \right] d(\cos x) = - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3
 \end{aligned}$$

Cách 2: Đổi biến số

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx \Rightarrow \begin{cases} dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{2dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(t^2 + 1) \right) \cdot \frac{8t}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) \Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3$$

Cách 3: Sử dụng phương pháp phân tích và phương pháp tích phân từng phần

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx}_J \quad (1)$$

$$\text{Tính } J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -\frac{1}{2 \sin^2 x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } J = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } I = \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}}_K$$

Chú ý:

$$\text{- Để tính } J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx \text{ ta có thể làm như sau } J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x} dx}_I - \underbrace{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx}_K$$

$$\text{- Để tính } K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \text{ ta có thể làm như sau}$$

Nhân cả tử và mẫu cho $\sin x$ ta được

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$K = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{Hoặc } K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{Hoặc đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{dt}{2(1+t^2)} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Cách 4: Tách thành tích ở dưới mẫu và Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ v = -\cot x \end{cases}$$

Khi đó

$$I = -\frac{\cot x}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx}_J. \text{ Đến đây ta tích phân } J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx \text{ áp dụng (cách 3)}$$

Hoặc có thể tính nhanh như sau

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} d(\cot x) = -\frac{\cot x}{\sin x} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x d\left(\frac{1}{\sin x}\right) \\ &= -\frac{\cot x}{\sin x} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cot x}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx}_J \end{aligned}$$

Cách 5: Đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^3} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{8 \left(\tan \frac{x}{2}\right)^3 \left(\cos \frac{x}{2}\right)^6} = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\tan \frac{x}{2}\right)^3} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad (*) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 + 2 \tan \frac{x}{2} + \tan^4 \frac{x}{2}\right)}{\left(\tan \frac{x}{2}\right)^3} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2 \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2} + 2 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2 \right] \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

Bài 6: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Giải:

Cách 1:

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x}{\tan x + 1} = \frac{\tan x + 1 - 1}{\tan x + 1} = 1 - \frac{1}{\tan x + 1}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\tan x + 1}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x + 1} dx}_J$$

từ đó đặt $t = \tan x$

Cách 2:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \dots \text{bạn đọc tự giải}$$

Cách 3:

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Chú ý: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

Cách 4: Sử dụng tích phân liên kết

$$\text{Chọn } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \text{ là tích phân liên kết của } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \\ I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{cộng theo từng vế ta được } 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Cách 5: Sử dụng phương pháp đồng nhất thức

$$\text{Phân tích } \sin x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x + \sin x - \cos x)$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx$$

Chú ý: Có thể dựa vào đồng nhất thức sau

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = A \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} + B \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = (A - B) \sin x + (A + B) \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

... quay trở lại cách 5

Cách 6: Sử dụng kỹ thuật nhân

$$\text{Ta có } \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \left(\tan 2x - \frac{1}{\cos 2x} + 1 \right)$$

Cách 7: Sử dụng phương pháp phân tích

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2} \left[1 - \cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Cách 8: Biến đổi số theo cận

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow dx = dt \dots \text{bạn đọc tự giải}$$

Bài 7: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{1}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} dx = \sqrt{2} \ln \left \frac{\sin x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \right + C$

Giải:

Cách 1: Ta có

$$1 = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right] = \sqrt{2} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos x + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin x \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \right)$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \sqrt{2} \int \frac{d \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \ln |\sin x| - \sqrt{2} \ln \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sin x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \right| + C$$

Cách 2: Dựa vào đặt thù của hàm số đã cho ta có :

$$I = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sin x (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x (\cot x - 1)} = \sqrt{2} \int \frac{d(\cot x - 1)}{\cot x - 1} = -\sqrt{2} \ln |\cot x - 1| + C$$

Tương tự : (ĐHMDC – 2000) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$

HD:

$$\frac{dx}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{2 \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{6} \right) - x \right] dx}{\sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = 2 \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right] dx$$

Bài 8: Tìm nguyên hàm: $I = \int \tan x \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$

Giải:

Cách 1:

Ta có:

$$\tan x \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1 = \frac{\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1$$

Khi đó xét: $J = \int \frac{dx}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Sử dụng đồng nhất thức: $1 = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{4} \right) - x \right] = \sqrt{2} \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos x - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin x \right]$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \tan x$$

$$J = \sqrt{2} \int \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx + \sqrt{2} \int \tan x dx = -\sqrt{2} \ln \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sqrt{2} \ln |\cos x| + C$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \right| - x + C$$

Cách 2:

$$J = \int \frac{dx}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos x (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x (1 - \tan x)}$$

$$= -\sqrt{2} \int \frac{d(1 - \tan x)}{1 - \tan x} = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| + C \Rightarrow I = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| - x + C$$

Bài 9: (ĐH – B 2003) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$

Đặt $1 + \sin 2x = t \Rightarrow \cos 2x dx = \frac{dt}{2}$ **hoặc** $\sin 2x = t$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin 2x)'}{(1 + \sin 2x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Cách 3: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

Biến đổi $1 - 2\sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ và $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Hoặc đặt $t = \sin x + \cos x$

$$\text{Bài 10: (ĐH – A 2005) Tính tích phân sau: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$$

Giải:

Cách 1: Phương pháp biến đổi số

Ta có: $\sin 2x + \sin x = \sin x(2\cos x + 1)$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 3\cos x} \text{ ta được } dt = \frac{-3\sin x}{2\sqrt{1 + 3\cos x}} dx \Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = -\frac{2dt}{3};$$

$$\cos x = \frac{t^2 - 1}{3} \Rightarrow 2\cos x + 1 = \frac{2t^2 + 1}{3}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \left(\frac{4t^2}{9} + \frac{2}{9} \right) dt = \left(\frac{4}{27} t^3 + \frac{2}{9} t \right) \Big|_1^2 = \frac{34}{27}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

Đặt $t = 1 + 3\cos x$...bạn đọc tự giải

Cách 3: Phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2\cos x + 1 \\ dv = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = -\frac{d(1 + 3\cos x)}{3\sqrt{1 + 3\cos x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin x \\ v = -\frac{2}{3}\sqrt{1 + 3\cos x} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3}(2\cos x + 1)\sqrt{1 + 3\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + 3\cos x} dx = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos x} d(1 + 3\cos x) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \sqrt{(1 + 3\cos x)^3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{34}{27} \end{aligned}$$

Cách 4: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

Phân tích

$$\frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{1+3\cos x}} d(1+3\cos x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}(1+3\cos x) + \frac{1}{3}}{\sqrt{1+3\cos x}} d(1+3\cos x) =$$

$$= -\frac{2}{9} \sqrt{1+3\cos x} d(1+3\cos x) - \frac{1}{9\sqrt{1+3\cos x}} d(1+3\cos x)$$

Tổng quát: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \cdot \sin 2x + b \sin x}{\sqrt{c+d\cos x}} dx$ hoặc $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \cdot \sin 2x + b \cos x}{\sqrt{c+d\sin x}} dx$ ta đặt $\sqrt{c+d\cos x} = t$.

Bài 11: (ĐH – A 2009) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

HD:

Cách 1: $I = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx}_{I_2}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$

Khi đó

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

Chú ý:

Có thể tính I_1 như sau

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int_0^1 (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int_0^1 (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

Cách 2: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} - 1 \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \dots$

Bài 12: (ĐH – A 2006) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \frac{2}{3}$

HD:

Cách 1: Phương pháp phân tích kết hợp biến đổi số

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} dx$$

Đặt $t = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow \frac{dt}{3} = \sin 2x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{t} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}$

Hoặc đặt $t = \sqrt{1 + 3\sin^2 x}$

Cách 2: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} d(1 + 3\sin^2 x)$$

$$= \frac{2}{3} (1 + 3\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Cách 3: Phương pháp phân tích kết hợp biến đổi số

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2} + 4 \frac{1 - \cos 2x}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\frac{5 - 3\cos 2x}{2}}} dx$$

Và đặt $t = \sqrt{\frac{5 - 3\cos 2x}{2}}$ hoặc $t = \frac{5 - 3\cos 2x}{2}$ hoặc đưa vào vi phân

Tổng quát: Để tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$ với $a, b \neq 0$

Ta đặt: $u = \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

Bài 13: (Đề 68 IVa) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$

Giải:

Cách 1: Phân tích

$$\frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} = \frac{4\sin^3 x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{4\sin^3 x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = 4\sin x - 4\sin x \cos x = 4\sin x - 2\sin 2x$$

Khi đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x - 2\sin 2x) dx = \left(\cos 2x - 4\cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x - 4\sin x \cos x) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\cos x) \\ &= -4\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \end{aligned}$$

Cách 3:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4(1 - \cos^2 x)\sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$\text{Đặt } t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -dt = \sin x dx \\ \cos x = t - 1 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_2^1 \frac{4[1 - (t-1)^2]}{t} dt = \int_1^2 (-4t + 8) dt = \left(-2t^2 + 8t \right) \Big|_1^2 = 2$$

Chú ý: Có thể đặt $t = \cos x$

Cách 4:

$$\frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} = \frac{32\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = 16\sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \dots \text{Quá hay phải không, bạn tự giải tiếp nhé}$$

Cách 5:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \dots \text{Chắc chắn sẽ ra cú yên tâm làm tiếp đi}$$

Chú ý:

$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} = \frac{4\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 4\sin x - 2\sin 2x \dots$ Phân tích đến đây rồi thì có những cách nào, bạn đọc tự khám phá nhé!

Tương tự $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3 x}{1+\sin x} dx = 2$

Bài 14: (KTQS – 1997) Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx$

Giải:

Cách 1: Phương pháp đưa vào biểu thức vi phân

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin x} \cdot \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \cot x d(\cot x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cot^2 x} \cdot \cot x d(\cot x) = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^{\frac{5}{2}} x d(\cot x) = -\frac{3}{8} \cot^{\frac{8}{3}} x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{8\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

Cách 2: Phương pháp biến đổi số

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$$

Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Khi đó

$$I = - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 \sqrt[3]{-t^2} . dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{3}{8} t^{\frac{8}{3}} \bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 = -\frac{1}{8\sqrt[3]{3}}$$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^4 x} dx$$

Nhận xét: Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ đối với $\cos$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{\sqrt[3]{t^3 - t}}{t^4} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{t^2}}}{t^3} dt$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{t^2}} \Rightarrow u^3 = 1 - \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{3}{2} u^2 du = \frac{dt}{t^3}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{3}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^0 u^3 du = \frac{3}{2} \frac{u^4}{4} \bigg|_{-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^0 = -\frac{1}{8\sqrt[3]{3}}$$

Bài 15: (Đề 104. IVa) Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp phân tích nhờ đồng nhất thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Khi đó

$$I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right] dx = (\tan x - \cot x) \bigg|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = 4$$

Cách 2: Sử dụng công thức nhân đôi

$$I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 2x} = 2 \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2 \cot^2 2x \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = 4$$

Cách 3: Phương pháp biến đổi số

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ và $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1 + t^2}{t^2} \dots$

Bài 16: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$

Giải:

Cách 1: Đồng nhất thức

Ta phân tích: $\cos^2 x = (A \sin x + B \cos x)(\sin x + \cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= (\sqrt{3}B + C) \cos^2 x + (B + \sqrt{3}A) \sin x \cos x + (A + C) \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}B + C = 1 \\ B + \sqrt{3}A = 0 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos x + \frac{1}{4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}$$

Khi đó $I = \left(\frac{1}{4} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}}_{I_1}$

Tính: $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(\frac{1}{4} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x + \frac{1}{8} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3 \ln 3 - 2}{8}$$

Cách 2: Tích phân liên kết

Sử dụng tích phân liên kết $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$

Giải hệ $\begin{cases} I - 3J = -1 \\ I + J = \frac{\ln 3}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{3 \ln 3 - 2}{8}$

Tổng quát: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos^2 x dx}{A \sin x + B \cos x}$ tích phân liên kết thường là $J = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^2 x dx}{A \sin x + B \cos x}$

Bài 17: Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$

Giải:

Cách 1: Đưa vào vi phân

Phân tích $\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos^4 x}{\sin^4 x} = \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) \tan^4 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

Khi đó

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan^4 x + \tan^2 x) dx = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^4 x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x dx}_{I_2}$$

Tính

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^4 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [(\tan^4 x + \tan^2 x) - (\tan^2 x + 1) + 1] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 (\tan^2 + 1) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan^2 x + 1) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x d(\tan x) - \tan x \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + x \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

Tính $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [(\tan^2 x + 1) - 1] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan^2 x + 1) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = (\tan x - x) \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dots$ tự giải nhé

Cách 2:

Phân tích $\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{[\cos x (1 - \sin^2 x)]^2}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x \sin^4 x}{\sin^4 x} = \cot^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - 2 \cot^2 x + \cos^2 x$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x d(\cot x) - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{\cot^3 x}{3} - 2(-\cot x - 1) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8} - \frac{23}{12}
 \end{aligned}$$

Cách 3:

Nhận xét: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn đối với sin và cos nên ta có thể đặt $t = \tan x$ nhưng cách đó khá dài và phức tạp nên không nêu ra, bạn đọc tự khám phá nhé!

Bài 18: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \sin x \cdot \cos^5 x dx$

Giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \cos^3 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} = t \Rightarrow 1 - \cos^3 x = t^6 \Rightarrow \begin{cases} \cos^3 x = 1 - t^6 \\ \sin x \cdot \cos^2 x dx = 2t^5 dt \end{cases}.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = 2 \int_0^1 t(1 - t^6)t^5 dt = \int_0^1 (t^6 - t^{12}) dt = 2 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^{13}}{13} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{12}{91}$$

Hoặc : Đặt $1 - \cos^3 x = t$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đưa vào vi phân

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \cos^3 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \cos^3 x d(1 - \cos^3 x) = \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} [(1 - \cos^3 x) - 1] d(1 - \cos^3 x) \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} (1 - \cos^3 x) d(1 - \cos^3 x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} d(1 - \cos^3 x)
 \end{aligned}$$

Bài 19: (ĐH – B 2005) Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx$

Giải:

Cách 1: Đổi biến số

Phân tích

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$\text{Đặt } t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = -\sin x dx \\ \cos x = t - 1 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -2 \int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t| \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(1 - \cos^2 x) - 1]}{1 + \cos x} d(\cos x) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos x - \frac{1}{1 + \cos x} \right) d(\cos x) = \left(\sin x - \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|1 + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Chú ý: $d(\cos x) = d(1 + \cos x)$ và ta có thể đặt $t = \cos x$

Tổng quát: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin 2x \cdot \cos x}{b + c \cdot \cos x} dx$ ta đặt $t = b + c \cdot \cos x$ hoặc $t = \cos x$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: (ĐH – A 2008) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$

HD:

Cách 1: Biến đổi $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \tan^2 x) \cos^2 x$

Đặt $t = \tan x$

Hoặc sử dụng công thức $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Tổng quát:

1. $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \tan^4 x}{b \cos 2x} dx$ với $a, b \in \mathbb{R}^*$

Biến đổi $b \cos 2x = b(\cos^2 x - \sin^2 x) = b(1 - \tan^2 x) \cos^2 x$ đặt $t = \tan x$

2. Mở rộng hơn

$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \tan^4 x}{b \sin^2 x + c \sin x \cos x + d \cos^2 x} dx$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

Biến đổi $b \sin^2 x + c \sin x \cos x + d \cos^2 x = (b \tan^2 x + c \tan x + d) \cos^2 x$ đặt $t = \tan x$

Bài 2: (ĐH AN– 1998): Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

Cách 1:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

Cách 2: Biến đổi số

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Đặt $t = \tan x$

Cách 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\cos^2 x} \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Bài 3: (Đề 84.IV a) Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cot x)}{\sin^2 x} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cot^2 x] d(\cot x) = - \left(\cot x + \frac{\cot^3 x}{3} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$$

Bài 4: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{4}$

HD:

C1: Hạ bậc biến đổi tích thành tổng

C2: Tích phân liên kết

Bài 5: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^4} dx$

HD: $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ và $(\sin x + \cos x)^4 = (1 + \sin 2x)^2 = 4\cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Từ đây ta có các cách sau

Cách 1:

Biến đổi $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} dx$

đặt $t = 1 + \sin 2x$ hoặc $t = \sin 2x$ hoặc biến đổi vi phân trực tiếp

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{(1 + \sin 2x)^2} \text{ hoặc đặt } t = \tan x$$

Cách 2:

Biến đổi $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^4} dx$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ hoặc biến đổi vi phân trực tiếp

Cách 3:

Biến đổi $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{4\cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$

Bài 6: (ĐHGT TPHCM – 2000) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

HD:

Ta có $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan^2 x (1 + \tan^2 x) d(\tan x)$

Đs: $\frac{42\sqrt{3} - 8}{15}$

Bài 7: (ĐHĐN – 2000) Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

HD:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = - \ln \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Bài 8: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$

HD:

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (\tan^2 x + 1) dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx = \int_0^1 \frac{t^6 dt}{t^2 + 1} = \int_0^1 \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t \right) \Bigg|_0^1 - \int_0^1 du = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

Bài 9: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{8}{15}$

Bài 10: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

HD:

$$I = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} d(1 + \cos^2 x) = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2} (t - \ln t) \Bigg|_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

Bài 11: Tính tích phân sau: $I = \int \tan^4 x dx$

HD:

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \sin^2 x d(\tan x) = \int \tan^2 x (1 - \cos^2 x) d(\tan x) = \int \tan^2 x \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x} \right) d(\tan x) \\ &= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \frac{\tan^2 x + 1 - 1}{1 + \tan^2 x} d(\tan x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \end{aligned}$$

Bài 12: (ĐHTL – 2000) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$

Đs: $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 3$

V. BÀI TẬP HỖN HỢP CỦA NHIỀU HÀM SỐ

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: (ĐH TL2001) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

Giải:

Cách 1:

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ 1 + \tan x = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} = \frac{2}{1 + \tan t} \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = (\ln 2) \cdot \frac{\pi}{4} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Cách 2:

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx = \\ &= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx}_J - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Tính } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx}_K = \frac{\pi}{8} \ln 2 + K$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow -dt = dx$$

$$\text{Khi đó } K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Cách 3: Tích phân từng phần

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1 + \tan x) \\ dv = dx \end{cases}$...Bạn đọc tự giải

Bài 2: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

HD:

Đặt $x = \tan t$ ta được $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt$;

đặt $t = \frac{\pi}{4} - x$ ta được $I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan u} du = \ln 2 \int_0^{\pi/4} du - I$

Bài 3: Tính tích phân sau: $I = \int_2^5 \frac{\ln(\sqrt{x-1}+1)}{x-1+\sqrt{x-1}} dx$

Giải:

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx \Rightarrow 2(t-1)dt = dx \\ x = (t-1)^2 + 1 \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=2 \end{cases}$

Khi đó

$$I = 2 \int_2^3 \frac{(t-1) \ln t}{(t-1)^2 + t - 1} dt = 2 \int_2^3 \frac{\ln t}{t} dt = 2 \int_2^3 \ln t d(\ln t) = \ln^2 t \Big|_2^3 = \ln^2 3 - \ln^2 2$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{x-1}$... bạn đọc tự giải

Bài 4: Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{1 + \sin 2x}$

Giải:

Cách 1: Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

Cách 2: Biến đổi $1 + \sin 2x = 1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, tích phân từng phần

$$I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} x d(\cos^3 x) = -\frac{1}{3} \left(x \cos^3 x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos^3 x dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$$

Bài 5: (ĐH DHN – A 2000) Tính tích phân sau:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1 + \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Giải:

Cách 1:

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{1 + \cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx}_{I_2}$$

$$\text{Tính: } I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = e^x \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx$$

$$\text{Tính: } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx$$

$$\text{Vậy } I = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1 + \cos x} \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= e^x \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} \cdot dx = e^x \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Sử dụng định nghĩa:

$$\text{Ta có } \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x} = \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{e^x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} e^x = \left(\tan \frac{x}{2} \right)' e^x + \tan \frac{x}{2} (e^x)' = \left(e^x \tan \frac{x}{2} \right)'$$

Hoặc ta biến đổi:

$$\frac{(1 + \sin x)}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} e^x dx}_{I_1}$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} e^x dx$$

Bài 6: (ĐH GTVT – 1998) Tính tích phân sau: $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$

Cách 1:

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x} = \frac{(-x)' \ln x - (-x)(\ln x)'}{\ln^2 x} \Rightarrow F(x) = \frac{-x}{\ln x}$$

Khi đó

$$I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \left. \frac{-x}{\ln x} \right|_e^{e^2} = e - \frac{e^2}{2}$$

Cách 2:

$$I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} x d \left(\frac{1}{\ln x} \right) - \int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \left. -\frac{x}{\ln x} \right|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} - \int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x}$$

Bài 7: Tính tích phân sau $I = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cos^2 x dx$

Giải:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cdot \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} x \cdot (\sin 3x + \sin x) dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = (\sin 3x + \sin x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \cos x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{4} x \left(\frac{-1}{3} \cos 3x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) dx = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{x}{2} \left(\frac{-1}{3} \cos 3x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{18} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{5}{9}.$$

Cách 2: Đặt $x = \pi - t \dots$ bạn đọc tự giải

Chú ý: Qua mấy bài toán trên ta có nhận xét

Dựa vào đạo hàm ta có thể tính Nguyên hàm của một các dạng đặc biệt

Dạng 1: Nguyên hàm của các hàm số dạng tích thương

Dạng Tổng	Cấu trúc hàm số	Nguyên hàm
Hiệu	$f(x) = u' + v' = (u + v)'$	$F(x) = u + v$
Tích	$f(x) = u' - v' = (u - v)'$	$F(x) = u - v$
Thương	$f(x) = u'v + v'u = (uv)'$	$F(x) = uv$
	$f(x) = \frac{u'v + v'u}{v^2} = \left(\frac{u}{v}\right)'$	$F(x) = \frac{u}{v}$

Dạng 2: Các dạng nguyên hàm đơn giản chứa e^x

Đặc trưng	Nguyên hàm	Hàm số (đạo hàm)
e^x	$F(x) = u(x)e^x$	$F'(x) = [u'(x) + u(x)]e^x = f(x)$
e^{-x}	$F(x) = u(x)e^{-x}$	$F'(x) = [u'(x) - u(x)]e^{-x} = f(x)$
e^{ax+b}	$F(x) = u(x)e^{ax+b}$	$F'(x) = [u'(x) + au(x)]e^{ax+b} = f(x)$
$e^{v(x)}$	$F(x) = u(x)e^{v(x)}$	$F'(x) = [u'(x) + v'(x)u(x)]e^{v(x)} = f(x)$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

Giải:

Cách 1: Tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 e^x \\ du = \frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x e^x (x+2) dx \\ v = -\frac{1}{x+2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{x^2 e^x}{x+2} \Big|_0^1 + \underbrace{\int_0^1 x e^x dx}_{I_1}$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_0^1 x e^x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I_1 = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{x^2 e^x}{x+2} \Big|_0^1 + (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = 1$$

Cách 2:

$$\text{Phân tích } x^2 = (x^2 + 4x + 4) - 4(x+2) + 4 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 4$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)^2} e^x dx = \int_0^1 \frac{(x+2)^2 - 4(x+2) + 4}{(x+2)^2} e^x dx = \int_0^1 e^x dx - \underbrace{4 \int_0^1 \frac{e^x}{x+2} dx}_J + 4 \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

Tính J làm xuất hiện tích phân mà làm triệt tiêu một tích phân

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

$$\text{Bài 1: Tính tích phân sau: } I = \int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{(x+1)^2} dx$$

HD: Sử dụng tích phân từng phần

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2 e^{2x}}{(x+1)^2} dx = - \int_0^1 x^2 e^{2x} d\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= -\frac{x^2 e^{2x}}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1} d(x^2 e^{2x}) = -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 2x e^{2x} dx = -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 x d(e^{2x}) = -\frac{e^2}{2} + x e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Bài 2: Tính tích phân sau: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4x \tan \frac{x}{2} + x^2 \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) \right] dx = \frac{\pi^2}{8} \tan \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Bài 3: (ĐHLN – 2001) Tính tích phân sau: } I = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^2} dx = 1$$

$$\text{Bài 4: Tính tích phân sau: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} (1 + x \cos x) dx = \frac{\pi}{2} e$$

Bài 5: (ĐHTN – 1996) Tính tích phân sau: $I = \int_e^{e^2} \left(\sqrt{2 \ln x} + \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \right) dx = 2\sqrt{2}e^2 - 2e$

LỜI KẾT:

Đây thực sự chưa phải là những bài toán và cách giải hay, chưa có nhiều bài tập phong phú và đa dạng, song cũng góp phần nhỏ bé nào đó cho các bạn và Tôi hi vọng các bạn sẽ thích thú và tìm thêm những bài tập hay và những cách giải đặc sắc hơn....

Tuy nhiên năng lực và kinh nghiệm còn thiếu. Rất mong các bạn học sinh và các bạn đồng nghiệp góp ý kiến, bổ sung thêm giúp tôi và các bạn hoàn thiện hơn ... Xin chân thành cảm ơn

Góp ý theo địa chỉ Email: Loinguyen1310@gmail.com hoặc địa chỉ: Nguyễn Thành Long
Số nhà 15 – Khu phố 6 – Phường ngọc trạo – Thị xã bìm sơn – Thành phố thanh hóa

MỤC LỤC

I. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ.....	Trang 2
II. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ.....	Trang 18
III. TÍCH PHÂN HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT.....	Trang 26
IV. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC.....	Trang 35

Tải thêm tài liệu môn Toán THPT tại:

+ Trang web: www.toanmath.com

+ Fanpage: www.facebook.com/toanmath

+ Groups: <https://www.facebook.com/groups/toanmath>