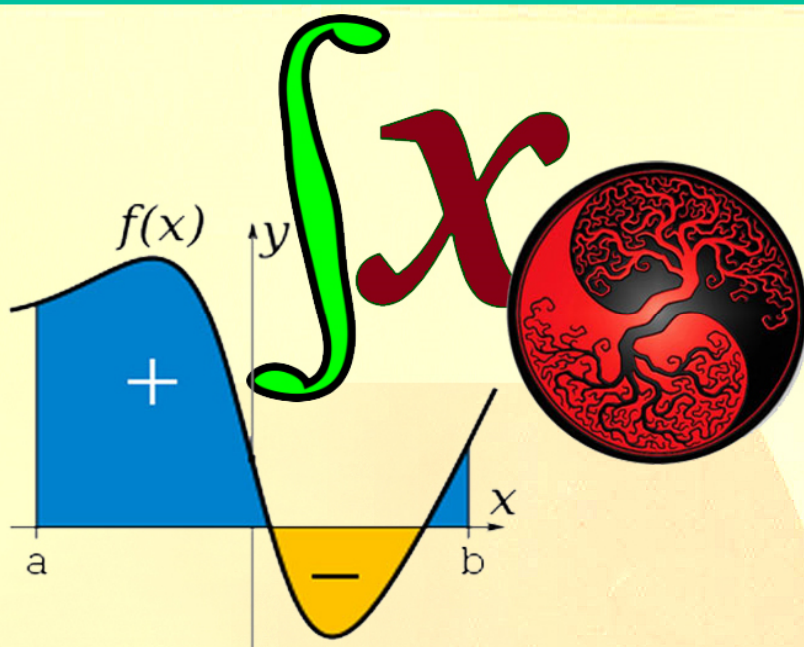


**TRƯỜNG THPT NHO QUAN A
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG**

CHUYÊN ĐỀ
CÁC DẠNG TÍCH PHÂN
HÀM ẨN ĐIỂN HÌNH



ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN HÀM ẨN THƯỜNG GẶP	3
DẠNG 1: ÁP DỤNG CÁC QUY TẮC VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP.....	3
DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN	17
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1:	17
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2:.....	23
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3.....	25
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5.....	33
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4 :.....	35
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4.....	39
DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN.....	40
DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1.....	51

MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN HÀM ẨN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: ỨNG DỤNG CÁC QUY TẮC VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

1) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ thì $(uv)' = u'v + uv'$.

- Nếu $[f(x).g(x)]' = h(x)$ thì $f(x).g(x) = \int h(x)dx$.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 3$ và $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết, ta có $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1 \Rightarrow xf'(x) + f(x) = 4x + 1$

$$\Rightarrow [xf(x)]' = 4x + 1 \Rightarrow xf(x) = \int (4x + 1)dx \Rightarrow xf(x) = 2x^2 + x + C.$$

+) Lại có $f(1) = 3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 5$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ và thỏa mãn đẳng thức

$$2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}} \text{ với mọi } x \in (-1; +\infty). \text{ Giá trị của } f(0) \text{ bằng}$$

A. $f(0) = 2 - \sqrt{3}$.B. $f(0) = e - \sqrt{3}$.C. $f(0) = \sqrt{3}$.D. $f(0) = 1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

+) Từ giả thiết, ta có

$$2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow 2f(x) + (x - 1)(x + 1)f'(x) = \frac{x(x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2f(x)}{(x + 1)^2} + \frac{x - 1}{x + 1}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)' f(x) + \frac{x - 1}{x + 1}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x - 1}{x + 1} \cdot f(x)\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + C \quad (*)$$

+) Lại có (*) thỏa mãn với mọi $x \in (-1; +\infty)$ nên thay $x = 1$ vào (*) ta có $C = -2$.

$$\text{Suy ra } \frac{x - 1}{x + 1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - 2. \text{ Do đó } f(0) = 2 - \sqrt{3}.$$

Câu 3. (SỞ LẠNG SƠN 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 4x^3 + 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.B. $\frac{9}{2}$.C. $\frac{16}{15}$.D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]'$. Từ giả thiết ta có: $[f(x) \cdot f'(x)]' = 4x^3 + 2x$

Suy ra: $f(x) \cdot f'(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + C$. Với $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Nên ta có: $f(x) \cdot f'(x) = x^4 + x^2$

Suy ra: $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{8}{15} \Rightarrow f^2(1) = \frac{16}{15}$.

Câu 4. (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$. **B.** $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$. **C.** $f^2(2) = \ln 2 + 1$. **D.**

$f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$; $x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)] \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2. \text{ Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2\ln 2 + 2.$$

Câu 5. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

$[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + x \cdot f'(x) \geq x^{2018} \forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$.

B. $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$.

C. $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$.

D. $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $g(x) = x^3 \cdot f(x) - \frac{x^{2021}}{2021}$ trên $[0;1]$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - x^{2020} = x^2 \cdot [3f(x) + x \cdot f'(x) - x^{2018}] \geq 0 \forall x \in [0;1]$.

Do đó $g(x)$ là hàm số không giảm trên $[0;1]$, suy ra $g(x) \geq g(0) \forall x \in [0;1]$

$$\text{Hay } x^3 \cdot f(x) - \frac{x^{2021}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0;1].$$

Vậy: $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}.$

2) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ thì $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ với $v \neq 0.$

- Nếu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = h(x)$ thì $\frac{f(x)}{g(x)} = \int h(x) dx.$

Hệ quả: Nếu $u = u(x)$ thì $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ với $u \neq 0.$

- Nếu $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g(x)$ thì $\frac{1}{f(x)} = \int g(x) dx$

Câu 6. (ĐỀ THPT QUỐC GIA NĂM 2018 – MÃ ĐỀ 101) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$

và $f'(x) = 2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$ Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}.$

B. $-\frac{2}{3}.$

C. $-\frac{19}{36}.$

D. $-\frac{2}{15}.$

Lời giải

Chọn B

+) Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -2x \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int 2x dx$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C.$

+) Lại có $f(2) = -\frac{2}{9} \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}.$

Câu 7. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x^2 f'(x) + f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty).$ Tính $f(2)$ biết $f(1) = e.$

A. $f(2) = e^2.$

B. $f(2) = \sqrt[3]{e}.$

C. $f(2) = 2e^2.$

D. $f(2) = \sqrt{e}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(1; 2) \Rightarrow f(1) \cdot f(2) > 0, \forall x \in (1; 2).$

Mà $f(1) = e > 0$ nên $f(2) > 0.$

Do đó $x^2 f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)}.$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &= -\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\ln|f(x)| \Big|_1^2 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - 1\right) &= -(\ln|f(2)| - \ln|f(1)|) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -[\ln f(2) - \ln e] \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= -\ln f(2) + 1 \Leftrightarrow \ln f(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$ và $f'(x) = [xf(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -x^2 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{-x^3 + 10}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2}.$$

Câu 9. (QUYỀN LƯU LẦN 1) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 2$,

$f(x) \neq 0, \forall x > 0$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $-\frac{2}{5}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in [1; 2] (*)$$

Lấy tích phân 2 vế (*) trên $[1; 2]$ ta được

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} &= \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \Big|_1^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} &= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$ và

$$f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x), \forall x \in [1; 2]. \text{ Giá trị của tích phân } \int_1^2 xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\ln \frac{4}{3}$.

B. $\ln \frac{3}{4}$.

C. $\ln 3$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x) \Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{[xf(x)]^2} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{xf(x)} \right]' = -2x - 1 \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = \int (-2x - 1) dx \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = -x^2 - x + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xf(x) = -\frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow \int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 \frac{-1}{x(x+1)} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x} \Big|_1^2 = \ln \frac{3}{4}.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9\ln 2$.

B. $T = 9$.

C. $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$.

D. $T = 2 - 9\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế } -\int \frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } C = \frac{1}{9} \text{ suy ra } f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$$

$$\text{Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x \right) dx = \left(9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9\ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C. \text{ Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và

$$f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x), \forall x \in [1; 2]. \text{ Giá trị của } \int_1^2 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $1 + \ln 2$.

B. $1 - \ln 2$.

C. $\frac{1}{2} - \ln 2$.

D. $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } f(x) - (x+1)f'(x) = 2xf^2(x) \Rightarrow \frac{f(x) - (x+1)f'(x)}{f^2(x)} = 2x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x+1}{f(x)} \right]' = 2x \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow \frac{x+1}{f(x)} = x^2 + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{3}$ và

$f(x) - f'(x) = [f(x)]^2$ với mọi $x \in [0; 1]$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 1$.

A. $\ln 2$.

B. $\ln \frac{4}{3}$.

C. $\ln 12$.

D. $\ln \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Ta có } f(x) - f'(x) = [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f(x) - f'(x)}{[f(x)]^2} = 1 \Rightarrow \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{[f(x)]^2} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{(e^x)' f(x) - e^x f'(x)}{[f(x)]^2} = e^x \Rightarrow \left[\frac{e^x}{f(x)} \right]' = e^x \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = \int e^x dx = e^x + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = e^x + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}.$$

$$+) \text{ Do đó } S = \int_0^1 \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \ln(2 + e^x) \Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $x(f'(x) - x) = f(x) - 1, \forall x > 0$. Giá trị của $f(e)$ bằng

- A. $e^2 + e$. B. $e^2 + 1$. C. $e^2 - e$. D. $e^2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết, ta có $x(f'(x) - x) = f(x) - 1 \Rightarrow xf'(x) - f(x) = x^2 - 1$

$$\Rightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x + \frac{1}{x} + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(e) = e^2 + 1.$$

Câu 16. (PHAN ĐÌNH TÙNG HÀ TĨNH) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, biết $x.f(x) \neq -1, \forall x \neq 0$; $f(1) = -2$ và $(x.f(x) + 1)^2 - x.f'(x) - f(x) = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính

$$\int_1^e f(x) dx.$$

- A. $\frac{1}{e} - 2$. B. $2 - \frac{1}{e}$. C. $-\frac{1}{e}$. D. $\frac{1}{e} - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } [x.f(x) + 1]^2 - x.f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow [x.f(x) + 1]^2 = x.f'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x.f'(x) + f(x)}{[x.f(x) + 1]^2} = 1 \text{ (do } x.f(x) \neq -1, \forall x \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{x.f(x) + 1} \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{x.f(x) + 1} = x + C$$

$$\text{Do } f(1) = -2 \text{ nên } \frac{-1}{f(1) + 1} = C + 1 \Leftrightarrow 1 = C + 1 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{-1}{x.f(x) + 1} = x \Leftrightarrow x^2.f(x) + x = -1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1 - x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Suy ra } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln|x| \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e} - 2.$$

Câu 17. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(12; \frac{25}{2} \right)$. B. $\left(13; \frac{27}{2} \right)$. C. $\left(\frac{23}{2}; 12 \right)$. D. $\left(14; \frac{29}{2} \right)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x \in (1; +\infty)$ nên ta có

$$(x^2 f'(x) - 2xf(x)) \ln x = x^4 - xf(x) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \right) \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x dx = \int \left(1 - \frac{f(x)}{x^3} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} - \int \frac{f(x)}{x^3} dx = x - \int \frac{f(x)}{x^3} dx + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2(x+C)}{\ln x}.$$

Theo bài ra $f(\sqrt[3]{e}) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{\ln x}.$

Do đó $f(2) = \frac{8}{\ln 2} \in \left(\frac{23}{2}; 12 \right).$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$. Biết rằng

$f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1)$. Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b.$$

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}.$

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}.$

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}.$

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}.$

Lời giải

Chọn D

$\forall x \in (0;1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 4 \sin x \cos x}{f^2(\sin x)} dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, đổi cận $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ta có $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$

Câu 19. (NAM TIỀN HẢI THÁI BÌNH LẦN 1) Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục trên

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 0$; $f(0) = 1$ và $f''(x) \cdot f(x) + \left[\frac{f'(x)}{\cos x}\right]^2 = [f'(x)]^2$. Tính

$$T = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

A. $T = \frac{3}{4}$.

B. $T = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $T = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f''(x) \cdot f(x) + \left[\frac{f'(x)}{\cos x}\right]^2 = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = -\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\tan x + C. \text{ Vì } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{f'(x)}{f(x)} = -\tan x. \text{ Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\tan x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln f(0) = \ln \frac{1}{2} - \ln 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

3) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ thì $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ với $u > 0$.

- Nếu $[\sqrt{f(x)}]' = h(x)$ thì $\sqrt{f(x)} = \int h(x) dx$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$f'(x) = 2\sqrt{f(x)}, \forall x \in [0;1]$ và $f(0) = 1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. 7.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

+) Từ giả thiết, ta có

$$f'(x) = 2\sqrt{f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{f(x)})' = 1 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \int dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x + C$$

$$\text{+) Lại có } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 \Big|_0^1 = \frac{7}{3}.$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$[f'(x)]^2 - 16x^2 \cdot f(x) = 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{28}{15}$.

B. $\frac{8}{15}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải**Chọn A**

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } [f'(x)]^2 = 16x^2 \cdot f(x) \Rightarrow \frac{[f'(x)]^2}{4f(x)} = 4x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{f(x)} \right]' = 2x \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \frac{28}{15}.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt, \quad g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx.$$

A. $\frac{1011}{2}$.

B. $\frac{1009}{2}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. 505.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) = 2018 \sqrt{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int_0^t dx \Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(x)} \right) \Big|_0^t = 2018x \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(t)} - 1 \right) = 2018t \text{ (do } g(0) = 1) \Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt = \left(\frac{1009}{2} t^2 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1011}{2}.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $[f(x) + xf'(x)]^2 = 4f(x), \forall x \in [1; 4]$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

A. $4 - 2\ln 2$.

B. $4 + 2\ln 2$.

C. $4 + \ln 2$.

D. $4 - \ln 2$.

Lời giải**Chọn B**

$$+) \text{ Ta có } (f(x) + xf'(x))^2 = 4f(x) \Rightarrow \frac{(f(x) + xf'(x))^2}{4f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{(f(x) + xf'(x))^2}{4xf(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(x)' f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(xf(x))'}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{xf(x)})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xf(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \sqrt{xf(x)} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \sqrt{xf(x)} = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x}.$$

$$+) \text{ Do đó } S = \int_1^4 \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int_1^4 \left(4 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = 4x \Big|_1^4 - 8\sqrt{x} \Big|_1^4 + \ln x \Big|_1^4 = 4 + 2\ln 2.$$

Câu 24. Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x)\sqrt{x^2+1} &= 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3. \end{aligned}$$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$?

A. $I = \frac{1186}{45}$.

B. $I = \frac{1174}{45}$.

C. $I = \frac{1222}{45}$.

D. $I = \frac{1201}{45}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1; 4].$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \text{ Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

Câu 26. (LÝ NHÂN TÔNG) Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn

$$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1+f^2(x)} \text{ với mọi } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ và } f(0) = \sqrt{3}. \text{ Giá trị của } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ bằng}$$

A. 2.

B. 1.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ta có } f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \cos x (*).$$

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + C$.

Ta có $f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2$, dẫn đến $f(x) = \sqrt{(\sin x + 2)^2 - 1}$. Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

4) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ thì $(e^u)' = u' \cdot e^u$;

- Nếu $(e^{f(x)})' = g(x)$ thì $e^{f(x)} = \int g(x) dx$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$f'(x) \cdot e^{f(x)-x^2-1} = 2x, \forall x \in [0;1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 2.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $f'(x) \cdot e^{f(x)-x^2-1} = 2x \Rightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2xe^{x^2+1} \Rightarrow (e^{f(x)})' = 2xe^{x^2+1}$

$\Rightarrow e^{f(x)} = \int 2xe^{x^2+1} dx \Rightarrow e^{f(x)} = e^{x^2+1} + C$.

+) Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow e^{f(x)} = e^{x^2+1} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$.

+) Do vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$.

Câu 28. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

và thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$, tính tích phân

$$I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx.$$

A. $I = \frac{9}{2}$.

B. $I = \frac{45}{8}$.

C. $I = \frac{11}{2}$.

D. $I = \frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot \frac{e^{f^3(x)}}{e^{x^2+1}} = \frac{2x}{f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (e^{f^3(x)})' = (e^{x^2+1})' \Leftrightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C(*)$.

Thế $x=0$ vào $(*)$ ta được $e = e + C \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\sqrt{7}} x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot (16-1) = \frac{45}{8}.$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$f'(x)(1+e^{f(x)}) = 1+e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$.

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} +) \text{ Ta có } f'(x)(1+e^{f(x)}) &= 1+e^x \Rightarrow f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 1+e^x \Rightarrow [f(x) + e^{f(x)}]' = 1+e^x \\ \Rightarrow f(x) + e^{f(x)} &= x + e^x + C. \end{aligned}$$

$$+) \text{ Lại có } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) + e^{f(x)} = x + e^x.$$

Xét hàm số $g(t) = t + e^t$ với $t \in \mathbb{R}$. $g'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } f(x) + e^{f(x)} = x + e^x \Rightarrow f(x) = x. \text{ Do đó } S = \int_1^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = 4.$$

Câu 30. (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\text{mãn } 3f^2(x) \cdot f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0). \text{ Biết rằng } I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x)dx = \frac{a}{b} \text{ là phân số tối}$$

giản. Tính $T = a - 3b$

A. $T = 6123$.B. $T = 12279$.C. $T = 6125$.D. $T = 12273$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0) \Leftrightarrow (f^3(x))' e^{f^3(x)} - e^{f^3(x)} = (4x+1) \cdot e^{2x^2+x+1} - e^{2x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow [f^3(x) - x]' e^{f^3(x)-x} = (2x^2+1)' \cdot e^{2x^2+1} \Rightarrow e^{f^3(x)-x} = e^{2x^2+1} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^3(x) - x = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^3(x) = 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x)dx = \frac{12285}{4}.$$

5) Quy tắc: Nếu $u = u(x)$ nhận giá trị dương trên K thì $[\ln u]' = \frac{u'}{u}$ trên K .

- Nếu $[\ln(f(x))]' = g(x)$ thì $\ln(f(x)) = \int g(x)dx$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$.B. $f(-1) = e^3$.C. $f(-1) = e^4$.D. $f(-1) = 3$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi:

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -4$$

$$\ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1) \cdot e^4 = e^4.$$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}, \forall x \geq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $1 < f(5) < 2$. **B.** $2 < f(5) < 3$. **C.** $4 < f(5) < 5$. **D.** $3 < f(5) < 4$.

Lời giải**Chọn D**

+) Từ giả thiết, ta có $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C.$$

+) Lại có $f(1) = 1 \Rightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2\sqrt{3x+1}-4}{3} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = 2x[1 + f(x)], \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 2xf(x) dx \text{ bằng}$$

- A.** $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** $e+2$. **D.** e .

Lời giải**Chọn A**

+) Từ giả thiết, ta có $\frac{f'(x)}{1+f(x)} = 2x \Rightarrow \frac{[1+f(x)]'}{1+f(x)} = 2x \Rightarrow [\ln(1+f(x))] = 2x$

$$\Rightarrow \ln[1+f(x)] = \int 2x dx \Rightarrow \ln[1+f(x)] = x^2 + C.$$

+) Lại có $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln[1+f(x)] = x^2 \Rightarrow 1+f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - 1.$

+) Vậy $\int_0^1 2xf(x) dx = \int_0^1 2x(e^{x^2} - 1) dx = e^{x^2} \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 = e - 2.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = 1 \text{ và } f'(x) = \frac{1}{x} f(x), \forall x \in [1;2]. \text{ Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi}$$

đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ quay quanh trục hoành.

- A.** 7π . **B.** $\frac{7\pi}{3}$. **C.** $\frac{5\pi}{3}$. **D.** 3π .

Lời giải**Chọn B**

$$+) \text{ Từ giả thiết, ta có } f'(x) = \frac{1}{x} f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln f(x) = \ln x + C.$$

$$+) \text{ Lại có } f(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7\pi}{3}.$$

Câu 35. (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^x f(x)$ với $f(x) \neq 0, \forall x$ và $f(0) = 1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

A. $e+1$.

B. e^{e-2} .

C. $e-1$.

D. e^{e+1} .

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^x f(x)$, ta có

$$f'(x) = f(x)(e^x - 2x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^x - 2x \text{ (vì } f(x) \neq 0, \forall x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (e^x - 2x) dx \Rightarrow \ln |f(x)| = e^x - x^2 + C.$$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = -1$. Khi đó, ta được: $\ln |f(x)| = e^x - x^2 - 1$.

Thế $x=1$, ta có: $\ln |f(1)| = e - 2 \Rightarrow |f(1)| = e^{e-2}$.

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1:

Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$, tính $\int_a^b f(x) \cdot dx$. Hoặc cho $\int_a^b f(x) \cdot dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$ và lưu ý cho học sinh tích phân của hàm số thì không phụ thuộc vào biến số.

Câu 36. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16.

B. 4.

C. 32.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $\int_0^2 f(2x) dx$. Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

$$\text{Do đó } \int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Câu 37. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 f(t) 2dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4.$$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$. Tính

tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 9$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

• Xét $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$, đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 16 \Rightarrow t = 4$ nên $I = 2 \int_1^4 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = \frac{6}{2} = 3$.

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$, đặt $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \Rightarrow J = \int_0^1 f(u) du = 3$

Vậy $I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 3 + 3 = 6$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Tính

$\int_{-2}^2 f(5|x| + 2) dx$.

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x) dx = 2$. Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \Rightarrow \int_0^2 f(u) du = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

$$\text{Nên } 14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84.$$

$$+ \text{ Xét } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx + \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

$$* \text{ Tính } I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx.$$

Đặt $t = 5|x| + 2$. Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$* \text{ Tính } I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

Đặt $t = 5|x| + 2$. Khi $0 < x < 2$, $t = 5x + 2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 32.$$

Hoặc: Do hàm $f(5|x|+2)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 2 \int_0^2 f(5|x|+2) dx = 2 \cdot 16 = 32$.

Câu 40. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi) Cho $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx \text{ bằng}$$

A. 2.

B. $-\frac{4}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3 \cos x + 1} \Rightarrow dt = \frac{-3 \sin x}{2\sqrt{3 \cos x + 1}} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 2; \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó: } J = \int_2^1 -\frac{2}{3} f(t) dt = \int_1^2 \frac{2}{3} f(t) dt = \frac{2}{3} \int_1^2 f(x) dx = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$.

B. $I = 2 \ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } 2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=dt \Rightarrow K=\int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Xét } M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2 \ln^2 2.$$

$$\text{Do đó } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2 \ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2 \ln^2 2.$$

Câu 42. Cho $\int_0^1 f(2x+1) dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

A. 26.

B. 22.

C. 27.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } 2x+1=t \Rightarrow 12 = \int_1^3 f(t) d\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 24.$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot f(\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d(\sin^2 x) = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 3 + 24 = 27.$$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x) dx = 5$.

$$\text{Tính } I = \int_1^3 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{5}{2}$.B. $I = \frac{7}{2}$.C. $I = \frac{9}{2}$.D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. Khi đó

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$, với $x \in [a; b]$. Đổi cận: khi $x = a \Rightarrow t = b$; khi $x = b \Rightarrow t = a$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_a^b xf(x)dx &= \int_a^b xf(a+b-x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \\ \Rightarrow 2 \int_a^b xf(x)dx &= (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trên với $a=1, b=3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

$$\text{Khi đó } \int_1^3 xf(x)dx = \frac{1+3}{4} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t = 4-x$, với $x \in [1; 3]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 xf(x)dx &= \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4 \int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 t.f(t)dt \\ \Rightarrow 5 &= 4 \int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và

$$\int_1^3 xf(x)dx = -2. \text{ Giá trị } \int_1^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_1^3 xf(x)dx \quad (1).$$

Đặt $x = 4-t$, ta có $dx = -dt$; $x=1 \Rightarrow t=3, x=3 \Rightarrow t=1$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-t)f(t)dt, \text{ hay } I = \int_1^3 (4-x)f(x)dx \quad (2).$$

$$\text{Cộng (1) và (2) về theo về ta được } 2I = \int_1^3 4f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{I}{2} = -1.$$

Câu 45. (HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

$$* I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\cos^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx.$$

$$\text{Đặt } \cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x dx = -dt.$$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

$$\text{Khi đó } I_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt$$

.

$$* I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } \ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} dx = dt.$$

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

$$\text{Khi đó } I_2 = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt$$

.

$$* \text{ Tính } I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx. \text{ Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8.$$

.

Câu 46. (CHUYÊN KHTN) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6. \text{ Tính tích phân } \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$$

A. 4

B. 6

C. 7

D. 10

Lời giải

Chọn C

+) Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

Đổi cận:

Khi đó $\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t^3} 3t^2 dt = 3 \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2$

+) Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \cos x \sin x dx \Rightarrow dt = -2 \cos^2 x \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{1}{2t} dt$

Đổi cận:

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 12$

+) Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow dt = 2x^2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{dt}{t}$

Đổi cận:

Khi đó $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{2+12}{2} = 7$

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + 1} dt = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2 + 1 - 1) f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 + 4 = 6$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2:

Tính $\int_a^b f(x) dx$, biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x)$.

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

+ Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$

+ Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

+ Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

+ Học sinh có thể nhớ công thức hoặc thực hiện hai lần đổi biến khác nhau như dạng 1.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Lời giải

Chọn B**Cách 1: (Dùng công thức)**

$$\text{Biến đổi } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2.3x^2 \cdot f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \text{ với } A=1, B=-2.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \frac{-6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào (*)}, \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -4$.B. $I = \frac{1}{2}$.C. $I = \frac{4}{3}$.D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn D**Cách 1: (Dùng công thức)**

$$\text{Với } f(x) + f(2-x) = 2x \text{ ta có } A=1; B=1, \text{ suy ra: } I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2x dx = 4 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } u = 2-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=2 \text{ và } x=2 \Rightarrow u=0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(2-x) dx = \int_2^0 f(u) du = -\int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Thay vào (*), ta được } 2 \int_0^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Câu 50. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 15$.

Lời giải

Chọn C**Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)**Với: $f(x) + (2x)f(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$. Ta có:

$A = 1; B = 1; C = 3$ và $u = x^2 - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = -1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$. Khi đó áp dụng công thức có:

$$I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1+3} \int_{-1}^2 4x^3 dx = \frac{x^4}{5} \Big|_{-1}^2 = 3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)Từ $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx + 3 \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{-1}^2 4x^3 dx \quad (*)$$

+) Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x dx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx = \int_{-1}^2 f(u) du = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (1)$$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{2}^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Thay (1), (2) vào (*) ta được: } 5 \int_{-1}^2 f(x) dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = 3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3**Phương pháp:**

Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

$$\text{Cho } A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x) \text{ với } A^2 \neq B^2 \text{ khi đó } f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2} \quad (*)$$

$$+ \text{ Hệ quả 1 của (*): } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$$

$$+ \text{ Hệ quả 2 của (*): } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B} \text{ với } g(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt, $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

Hay $4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Suy ra:

$$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(\frac{-2}{x} - x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 52. (NGUYỄN DU ĐAK-LAK 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn

$f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$. Giá trị tích phân $I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx$ bằng

A. $\frac{8}{9}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$.

+ Đổi cận: $x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$.

+ Ta có $I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx = -\int_3^{\frac{1}{3}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t+1} dt$.

Suy ra:

$$2I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x+1)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1) dx = \frac{16}{9}.$$

Vậy $I = \frac{8}{9}$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$,

$\int_3^9 f(x) dx = k$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ theo k .

A. $I = -\frac{45+k}{9}.$

B. $I = \frac{45-k}{9}.$

C. $I = \frac{45+k}{9}.$

D. $I = \frac{45-2k}{9}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dt.$$

$$\text{Mà } 2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x) \right] dx = -\frac{5}{4} \int_1^3 x dx - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx \quad (*)$$

$$\text{Đặt } u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 3 \\ x = 3 \Rightarrow u = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(u) du = -5 - \frac{k}{9} = -\frac{45+k}{9}.$$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính giá trị

$$\text{của } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = \frac{2}{2019}.$

B. $I = \frac{2}{1009}.$

C. $I = \frac{4}{2019}.$

D. $I = \frac{1}{1009}.$

Lời giải

Chọn C**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ ta có $A=1; B=2018$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$$

Cách 2:

Áp dụng Hệ quả 2: $Af(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

$$\text{Ta có } f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x}{2019}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2019} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$$

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị của

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{2019e}$.

B. $I = \frac{e^2 - 1}{2018e}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{e^2 - 1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(-x) + 2018f(x) = e^x$ ta có $A = 1; B = 2018$.

$$\text{Suy ra } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{1 + 2018} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2019} e^x \Big|_{-1}^1 = \frac{e^2 - 1}{2019e}.$$

Cách 2: (Dùng công thức)

$$\text{Áp dụng Hệ quả 1: } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}.$$

Ta có:

$$f(-x) + 2018f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{2018e^x - e^{-x}}{2018^2 - 1} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2019 \cdot 2017} \int_{-1}^1 (2018e^x - e^{-x}) dx$$

$$\approx 1,164 \cdot 10^{-3} \approx \frac{e^2 - 1}{2019e} \text{ (Casio).}$$

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng kết quả

$$\text{“Cho } A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x) \text{ (với } A^2 \neq B^2) \text{ khi đó } f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{a}\right)}{A^2 - B^2}.”$$

Ta có

$$2f(2x) + f(1-x) = 12x^2 = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2 - 1} = \frac{6x^2 - 3(x-1)^2}{3} = x^2 + 2x - 1.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}, \text{ khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: } y = 4x - 2.$$

Câu 57. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

A. $I = 2018$.

B. $I = \frac{1009}{2}$.

C. $I = 4036$.

D. $I = 1008$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng Hệ quả

$$A.g(x) + B.g(-x) = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{h(x)}{A+B} \text{ với } h(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

$$\text{Ta có: } g(x) + g(-x) = 1 = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 2018.$$

$$\text{Chú ý: Nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } [-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Câu 58. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x)dx$ bằng

A. $2a^2$.

B. a .

C. a^2 .

D. $2a$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} f(-t)(-dt) = \int_{-a}^a f(-t)dt = \int_{-a}^a f(-x)dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-a}^a a dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x)dx = 2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = a^2.$$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2 \sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giả sử } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx, \text{ đổi cận } x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 0 \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Câu 60. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$. Tính tích

phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

Xét $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx$ Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$; Đổi cận: $x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$.

Theo giả thiết ta có: $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos x} dx$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Tính

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Lời giải

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ (1) Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t) \cdot (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\cos 2x)} dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - (-1)] = 4$$

$$\Rightarrow I = 2$$

Chọn D

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - 1$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Cách 1: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} [3f(t) - 2f(-t)] dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(-x)] dx$$

Suy ra, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x) dx \Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(x)] dx \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x) = f(-x) = \tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a; b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2; \text{ Với } x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2.$$

$$\text{Ta được } I = - \int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx.$$

$$\text{Khi đó ta có: } 2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx. \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}; x = \ln 2 \Rightarrow u = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u(u+1)} du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 64. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$.

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{A. } I = -\frac{4}{15}.$$

$$\text{B. } I = \frac{1}{15}.$$

$$\text{C. } I = \frac{4}{75}.$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{25}.$$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Với } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \text{ ta có } A=2; B=3.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2+3} \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Áp dụng kết quả

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}.”$$

$$\text{Ta có: } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2} = \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,2(6) = \frac{4}{15} (*) \text{ Đặt}$$

$$u = 1-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$5\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{75}.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

$$\text{Bài toán: “ Cho } f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2, \text{ khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases} \text{ và } x=a \Rightarrow t=b; x=b \Rightarrow t=a.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k+\frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)}.$$

$$2I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}.$$

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$$\forall x \in [0;1]. \text{ Tính giá trị } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $\frac{3}{2}.$

B. $\frac{1}{2}.$

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có: } 1+f(x) = f(x)f(1-x) + f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{f(1-x)+1}$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1 \text{ hay } 2I = 1. \text{ Vậy } I = \frac{1}{2}.$$

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(2018-x) = 1$. Giá trị của tích

$$\text{phân } I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$

C. $I = 1009$

D. 4016

Lời giải

Chọn C

$$\text{ta có } I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{2018-0}{2 \cdot 1} = 1009.$$

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; 5]$. Biết

$$f(x) \cdot f(5-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = 5-t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 5; x = 5 \Rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_5^0 \frac{dt}{1+f(5-t)} = \int_0^5 \frac{f(t)dt}{1+f(t)} \text{ (do } f(5-t) = \frac{1}{f(t)})$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^5 dt = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{2}.$$

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; a]$ ($a > 0$). Biết

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{a}{2}$.

B. $I = 2a$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = \frac{a}{4}$.

Lời giải:

$$I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} \text{ (1) Đặt } t = a-x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^0 -\frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx \text{ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{1}{1+f(a-x)} \right] dx$$

$$= \frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x) \cdot f(a-x)+f(x)+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)} dx = \int_0^a dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$$

Chọn A

Câu 69. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và

$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá

trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (11; 22).

B. (0; 9).

C. (7; 21).

D. (2017; 2020).

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$$

Cách 2. Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

$$\text{Dễ dàng tính được } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4 :

Câu 70. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1, 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 5$ và $\int_0^1 g(x)dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 10$.

B. $\int_{-1}^1 g(x)dx = 14$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$.

D.

Lời giải

Nhớ 2 tích chất sau để làm trắc nghiệm nhanh:

Câu 71. Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ 2. Nếu hàm $f(x)$ LẼ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Nếu chứng minh thì như sau:

$$\text{Đặt } A = \int_{-1}^1 f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x)dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$$\Rightarrow A_1 = \int_1^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(-t) dt = \int_0^1 f(-x) dx \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số})$$

$$\text{tích phân}) = \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{Do } f(x) \text{ là hàm chẵn} \Rightarrow f(-x) = f(x))$$

$$\text{Vậy } A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 10 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 g(x) dx}_{B_1} + \underbrace{\int_0^1 g(x) dx}_{B_2}$$

$$B_1 = \int_{-1}^0 g(x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$$\Rightarrow B_1 = \int_1^0 g(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 g(-t) dt = \int_0^1 g(-x) dx \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số})$$

$$\text{tích phân}) = -\int_0^1 g(x) dx \quad (\text{Do } f(x) \text{ là hàm chẵn} \Rightarrow g(-x) = -g(x))$$

$$\text{Vậy } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

A. $I = -10.$

B. $I = -6.$

C. $I = 6.$

D. $I = 10.$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(ax) dx$ và tính chất $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ với $f(x)$ là hàm

số lẻ trên đoạn $[-a; a]$.

Áp dụng, ta có:

$$\bullet 4 = \int_1^2 f(-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-4} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x) dx = 8.$$

$$\bullet 2 = \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$$

Suy ra: $0 = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$
 $\Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0 - 2) + I \Leftrightarrow I = -6.$

Cách 2: Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2.$

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó $\int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x).$

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

$$\text{Xét } \int_1^2 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\text{Do } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

Câu 73. (SỞ ĐÀ NẴNG 2019) Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx = 8.$ Giá trị

của $\int_0^2 f(x) dx$ bằng:

A. 8.

B. 2.

C. 1.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{+) Ta có } 8 = \int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx + \int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx. \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x} dx:$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx.$ Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0.$ Khi đó

$$I = \int_1^0 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}} dt = \int_0^1 \frac{5^t f(-2t)}{5^t + 1} dt.$$

Vì $y = f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $f(-2t) = f(2t), \forall t \in \mathbb{R}.$

Do đó $I = \int_0^1 \frac{5^t f(2t)}{5^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x + 1} dx$. Thay vào (1) thu được

$$8 = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{f(2x)}{1 + 5^x} dx = \int_0^1 \frac{(5^x + 1) f(2x)}{5^x + 1} dx = \int_0^1 f(2x) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 8 \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 16.$$

Câu 74. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx \text{ bằng}$$

A. $I = 1$.

B. $I = 3$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{f(x)}{1 + e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(x)}{1 + e^t} dt.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1 + e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^x \cdot f(x)}{1 + e^x} dx.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1 + e^t} dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{1 + e^t} dx = \int_0^1 \frac{(1 + e^t) \cdot f(t)}{1 + e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 1.$$

Câu 75. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a; a]$.

Áp dụng ta có:

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 + 2 = 3$$

Cách 2: Do $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1$ và $\int_1^2 f(x) dx = 2$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

Mặt khác $\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx$ và $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét $I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = -\int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t}+1} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t+1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

“ Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ “

Cách giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} yg(y) dy$$

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1) dy$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + y) dy = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{đáp án D}$$

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$\text{tích phân } I = \int_0^5 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = \frac{5}{12}$.

D. $I = \frac{5}{3}$.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = 6(y^2 - y + 1)dy$.

Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ và $x = 5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Leftrightarrow y = 1$.

Khi đó $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1)dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y)dy = \frac{5}{2}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_{-2}^1 f(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{4}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{7}{3}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải**Chọn A**

Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2)dy$.

Đổi cận: Với $x = -2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 1$; $x = 1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0$.

Khi đó: $I = \int_1^0 y(-3y^2 - 2)dy = \frac{7}{4}$.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Tích phân từng phần với hàm ẩn thường áp dụng cho những bài toán mà giả thiết hoặc kết luận có một trong các tích phân sau:

$$\int_a^b u(x) \cdot f'(x) \cdot dx \text{ hoặc } \int_a^b u'(x) \cdot f(x) \cdot dx.$$

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 8$. **B.** $I = -8$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = -4$.

Lời giải**Chọn B**

$A = \int_0^1 (x+1)f'(x)dx$ Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x)dx$ chọn $v = f(x)$

$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -8$

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761 .

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Từ } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 \quad (x=1) \\ f(1) = 2 \quad (x=0) \end{cases}, \text{ suy ra } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3) dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận: Với } t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$$

Câu 81. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$

với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức

$a^{2019} + b^{2019}$ bằng

A. $2^{2018} + 1$.

B. 2.

C. 0.

D. $2^{2018} - 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } u = f(x), dv = e^x dx; \text{ ta có } du = f'(x) dx, v = e^x.$$

$$\text{Khi đó, } \int_0^1 e^x f(x) dx = [e^x f(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = [e^x f(x)]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = [e^x f(x)]_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \int_0^1 [e^x f(x)]' dx = [e^x f(x)]_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b, a, b \in \mathbb{R} \text{ suy ra } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Do đó } a^{2019} + b^{2019} = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 0.$$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và

$$g(x) f'(x) = x(x-2)e^x. \text{ Tính giá trị của tích phân } I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx?$$

A. -4.

B. $e-2$.

C. 4.

D. $2-e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0$ (vì $f'(0), f'(2) \neq 0$)

$$I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx = \int_0^2 f(x)dg(x) = \left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 g(x).f'(x)dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x)e^x dx = 4.$$

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1$

và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$ bằng:

A. 4.

B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1.$$

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \frac{f(x)}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \frac{f(x)}{\cos x} dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = 1 - I_1.$$

$$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}.$$

Câu 84. (THPT SƠN TÂY HÀ NỘI 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8; f(2) = 2. \text{ Tính } I = \int_{-2}^1 f(2x) dx.$$

A. $I = -5$.B. $I = -10$.C. $I = 5$.D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{ Xét } J = \int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8.$$

Đặt $u = x$ và $dv = f'(2x-4) dx = d\left(\frac{1}{2} f(2x-4)\right)$, ta được $du = dx$ và $v = \frac{1}{2} f(2x-4)$.

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} x \cdot f(2x-4) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = \frac{3}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx.$$

$$\text{Vì } J=8 \Rightarrow 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 f(2x-4) dx = 8 \Rightarrow \int_0^3 f(2x-4) dx = -10.$$

$$\text{Đặt } 2t = 2x - 4 \Rightarrow 2dt = 2dx \Leftrightarrow dt = dx$$

Đổi cận:

x	0	3
t	-2	1

$$I_1 = \int_{-2}^1 f(2t) dt = \int_{-2}^1 f(2x) dx = -10.$$

$$\text{Vậy } I = -10.$$

TRƯỜNG HỢP RIÊNG:

Khi đề bài cho biết giá trị $f(a)$, $f(b)$, $\int_a^b u(x) \cdot f'(x) dx = h$, $\int_a^b [f'(x)]^2 dx = k$ (với $u(x)$ là một biểu thức chứa x đã tường minh), đề tìm $f(x)$ trước tiên ta đi tìm 2 số α, β sao cho $\int_a^b [f'(x) + \alpha u(x) + \beta]^2 dx = 0$, rồi suy ra $f'(x) = -\alpha u(x) - \beta$, sau đó nguyên hàm hai vế để tìm $f(x)$.

Câu 85. (NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$, thỏa các điều kiện $f(2) = 1$ và $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$:

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 2 - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx \Rightarrow - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Ta lại có: } \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^2 [f'(x)]^2 dx - \int_0^2 x \cdot f'(x) dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{1}{2} x \right]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{1}{2} x = 0 \text{ (vì } \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{1}{2} x \right]^2 dx \geq 0, \forall x \in [0; 2])$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^2 + C \Rightarrow f(2) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{4} x^2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_1^2 = \frac{1}{4}.$$

Câu 86. (CHUYÊN VINH LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36 \text{ và } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 4.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1.$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{5}{2} x^2 \end{cases}.$

Ta có: $I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = \frac{5}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx$

$$= \frac{5}{2} \cdot f(1) - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx, \text{ (vì } f(1) = 4)$$

Mà: $I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{18}{5}$

$$\Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 36 \Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx, \text{ (theo giả thiết: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [10x^2 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [10x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$$

Với $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10 \cdot 1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. Khi đó: $f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) dx = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$

Câu 87. (CHUYÊN VINH LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn

$$f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4 \text{ và } \int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{115}$.

B. $\frac{297}{115}$.

C. $\frac{562}{115}$.

D. $\frac{266}{115}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết: $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1.$

Tính: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}$.

Ta có: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$, (vì $f(2) = 3$)

Mà: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 23 \Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 4$

$\Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx$, (theo giả thiết: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$)

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left[\frac{4}{23} x^3 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) \left[\frac{4}{23} x^3 - f'(x) \right] dx = 0$

$\Rightarrow \frac{4}{23} x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{23} x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23} x^4 + C$

Với $f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{16}{23} + C \Rightarrow C = \frac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23}$.

Vậy $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23} \right) dx = \left(\frac{1}{115} x^5 + \frac{53}{23} x \right) \Big|_0^2 = \frac{562}{115}$.

Câu 88. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa

mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases}$ ta được $\begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3} (x-1)^3 \end{cases}$

Khi đó $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} (x-1)^3 f(x) \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx$.

$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1$.

Xét $\int_1^2 [f'(x) - k(x-1)^3]^2 dx = 0$ ($k \in \mathbb{R}$).

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^6 dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2k + \frac{k^2}{7} = 0 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \text{ nên } C = -\frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{7}{4} \int_1^2 [(x-1)^4 - 1] dx = \frac{7}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} - x \right]_1^2 = -\frac{7}{5}.$$

Câu 89. (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Cho hàm $f(x)$ có đạo

hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(2)=0, \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{45}$ và $\int_1^2 (x-1)f(x) dx = -\frac{1}{30}$. Tính

$$I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $I = -\frac{1}{36}.$

B. $I = -\frac{1}{15}.$

C. $I = \frac{1}{12}.$

D. $I = -\frac{1}{12}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét: } E = \int_1^2 (x-1)f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{(x-1)^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow E = \frac{(x-1)^2}{2} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx = -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx \Rightarrow -\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} f'(x) dx = -\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^2 f'(x) dx = \frac{1}{15}. \text{ Ta có: } \int_1^2 (x-1)^4 dx = \frac{1}{5} \text{ và } \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{45}.$$

$$\text{Ta tìm số } k \text{ để } \int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0.$$

$$\int_1^2 (f'(x) - k(x-1)^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - 2k \int_1^2 f'(x) \cdot (x-1)^2 dx + k^2 \int_1^2 (x-1)^4 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{45} - 2k \cdot \frac{1}{15} + k^2 \cdot \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } \int_1^2 \left(f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2 \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{3}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{9}(x-1)^3 - \frac{1}{9} \right] dx = -\frac{1}{12}.$$

Câu 90. (THPT NGHÈN LẦN 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa

mãn $f(1) = 1, \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{5}$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{4}$.

B. $I = \frac{1}{5}$.

C. $I = \frac{1}{4}$.

D. $I = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } A = \int_0^1 x f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}.$$

$$+ \text{Xét } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_0^1 x^2 f'(x) dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{9}{5} - 2k \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

$$(1) \text{ trở thành } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 6 \int_0^1 x^2 f'(x) dx + 9 \int_0^1 x^4 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0.$$

$$(f'(x) - 3x^2)^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx \geq 0.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = x^3.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Câu 91. (SỞ ĐÀ NẴNG 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1) = 0$,

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } [-1;1]. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{5}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

$$\text{Đặt } I = \int_{-1}^1 2f(x) dx.$$

$$\text{Dùng tích phân từng phần, ta có: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2x + 2 \end{cases}.$$

$$I = (2x+2)f(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x+2)f'(x) dx = 4f(1) - \int_{-1}^1 (2x+2)f'(x) dx = - \int_{-1}^1 (2x+2)f'(x) dx.$$

$$\text{Ta có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx + 2 \int_{-1}^1 2f(x) dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_{-1}^1 (2x+2) f'(x) dx + \int_{-1}^1 (2x+2)^2 dx = \int_{-1}^1 (8x^2 + 16x - 8) dx + \int_{-1}^1 (2x+2)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 [f'(x) - (2x+2)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x+2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{5}{3}.$$

Cách 2.

Chọn $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (lý do: về phải là hàm đa thức bậc hai).

$$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b.$$

Ta có:

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Rightarrow (2ax + b)^2 + 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 + 16x - 8$$

$$\Leftrightarrow (4a^2 + 4a)x^2 + (4ab + 4b)x + b^2 + 4c = 8x^2 + 16x - 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ 4ab + 4b = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases}.$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2 \text{ và } c = -3.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{5}{3}.$$

Câu 92. (THUẬN-THÀNH-BẮC-NINH) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa

$$\text{mãn } f(1) = 1 \text{ và } (f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx$$

bằng?

A. $\frac{23}{15}.$

B. $\frac{13}{15}.$

C. $-\frac{17}{15}.$

D. $-\frac{7}{15}.$

Lời giải

Chọn B

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx. \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 4(6x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \int_0^1 (24x^2 - 4) f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x) \cdot f'(x) dx = 4 - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx.$$

Do đó:

$$(1) \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x) \right)^2 dx - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x) \cdot f'(x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx = \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - (4x^3 - 2x) \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}.$$

Câu 93. (THANH CHƯƠNG NGHỆ AN LẦN 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$$[0; \pi] \text{ thỏa mãn: } \int_0^{\pi} \left[f'(x) \right]^2 dx = \int_0^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{2} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \text{ Khi đó tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 0.

B. $\frac{\pi}{2} + 1.$

C. $\frac{\pi}{2}.$

D. $\frac{\pi}{2} - 1.$

Lời giải

Chọn B

$$*) \text{ Xét tích phân } I = \int_0^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx = - \int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Theo giả thiết } I = \frac{\pi}{2}, \text{ suy ra } \int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx = -\frac{\pi}{2}.$$

$$*) \text{ Tìm số thực } k \text{ thỏa mãn } f'(x) + k \cdot \sin x = 0. \text{ Khi đó } \int_0^{\pi} \left[f'(x) + k \cdot \sin x \right]^2 dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left[f'(x) \right]^2 dx + \int_0^{\pi} 2k \sin x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\pi} k^2 \sin^2 x dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) + k^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{Từ đó, } f'(x) + \sin x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f(x) = \cos x + C.$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ nên } C = 1. \text{ Vậy } f(x) = \cos x + 1.$$

$$*) \text{ Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) dx = (\sin x + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Trắc nghiệm:

$$\text{Từ giả thiết } \int_0^{\pi} \left[f'(x) \right]^2 dx = \frac{\pi}{2} \text{ và } \int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx = -\frac{\pi}{2} \text{ ta suy ra được } f'(x) = -\sin x.$$

Từ đó giải tiếp như phần trên.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } f(2018\pi).$$

A. -1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = \left[\sin x f(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx. \text{ Suy ra } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Hơn nữa ta tính được } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx = 0.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = -\sin x. \text{ Do đó } f(x) = \cos x + C. \text{ Vì } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Ta được } f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1.$$

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e$.B. $I = e - 2$.C. $I = \frac{e}{2}$.D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f'(x) + xe^x = 0 \quad \forall x \in [0;1] \text{ (do } (f'(x) + xe^x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0;1])$$

$$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \text{ nên } f(x) = (1-x)e^x$$

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$

Câu 96. (THPT-TOÀN-THẮNG-HẢI-PHÒNG) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$

thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1-2\ln 2}{2}.$

B. $\frac{3-2\ln 2}{2}.$

C. $\frac{3-4\ln 2}{2}.$

D. $\frac{1-\ln 2}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= \int_0^1 f(x) d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x \cdot f(x)}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx = - \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx &= - \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \left(x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

Khi đó:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 \frac{x \cdot f'(x)}{x+1} dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2 - 2\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) + \frac{3}{2} - 2\ln 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[[f'(x)]^2 - 2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx = 0 (*)$$

$$\text{Vì } \left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1] \text{ nên } \int_0^1 \left[f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx \geq 0, \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow f'(x) - \frac{x}{x+1} = 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = - \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = - \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= - \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1-2\ln 2}{2}$$

DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp:

+ Tìm $P(x) = \int p(x) dx$

+ Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow f'(x)e^{P(x)} + p(x) \cdot e^{P(x)} f(x) = q(x)e^{P(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

+ Lấy tích phân hai vế ta được $f(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx$. Từ đó suy ra $f(x)$.

Hệ quả 1: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

+ Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

+ Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

+ Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Hệ quả 2: Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

+ Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

+ Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

+ Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 97. (HSG cấp tỉnh – Phú Thọ 2018 – 2019): Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f(x) + f'(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-4 + \frac{10}{e}$.

B. -10 .

C. -2 .

D. $-2 + \frac{10}{e}$.

Lời giải

Chọn D

+) Từ giả thiết, ta có $e^x f(x) + e^x f'(x) = x^3 e^x \Rightarrow [e^x f(x)]' = x^3 e^x \Rightarrow e^x f(x) = \int x^3 e^x dx$
 $\Rightarrow e^x f(x) = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(x-1)e^x + C$

+) Lại có $f(0) = 4 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + \frac{10}{e^x} \Rightarrow f(1) = -2 + \frac{10}{e}$.

Câu 98. Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{9}{e}$ và $f'(x) + 3x^2 f(x) = (15x^4 + 12x)e^{-x^3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 3 + \frac{4}{e}$

B. $I = 2e - 1$

C. $I = 3 - \frac{4}{e}$

D. $I = 2e + 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(e^{3x} f(x))' = e^{3x} (f'(x) + 3x^2 f(x)) = e^{3x} (15x^4 + 12x)e^{-x^3} = 15x^4 + 12x$

Do đó: $e^{3x} f(x) = \int (15x^4 + 12x)dx = 3x^5 + 6x^2 + C \Rightarrow f(x) = (3x^5 + 6x^2 + C)e^{-3x}$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{9}{e} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (3x^5 + 6x^2)e^{-3x}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 ((3x^5 + 6x^2)e^{-3x}) dx = 3 - \frac{4}{e}.$$

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) = f(0) = 1$ và

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = x^3 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{107}{12} - \frac{21}{e}.$

B. $\frac{107}{21} - \frac{12}{e}.$

C. $\frac{107}{12} + \frac{21}{e}.$

D. $\frac{107}{21} + \frac{12}{e}.$

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$$f(x) + f'(x) + (f'(x) + f''(x)) = x^3 + 2x^2 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) + (f(x) + f'(x))' = x^3 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) + e^x (f(x) + f'(x))' = e^x (x^3 + 2x^2) \Leftrightarrow (e^x (f(x) + f'(x)))' = e^x (x^3 + 2x^2)$$

$$\Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) = \int e^x (x^3 + 2x^2) dx = e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + C$$

$$\text{Mặt khác } f(0) = f'(0) = 1 \text{ nên } 1 + 1 = -2 + C \Leftrightarrow C = 4 \Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) = e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4$$

$$\text{Do đó } (e^x f(x))' = e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4$$

$$\Rightarrow e^x f(x) = \int [e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4] dx = e^x (x^3 - 4x^2 + 10x - 12) + 4x + C$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 13 \Leftrightarrow f(x) = (4x + 13)e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 10x - 12$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [(4x + 13)e^{-x} + x^3 - 4x^2 + 10x - 12] dx = \frac{107}{12} - \frac{21}{e}.$$

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, $f(0) = 1$ và

$$f'(x) = f(x) + e^x + 1, \forall x \in [0; 1]. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $2e - 1.$

B. $2(e - 1).$

C. $1 - e.$

D. $1 - 2e.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = f(x) + e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 1 + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} f(x)]' = 1 + e^{-x} \Rightarrow e^{-x} f(x) = x - e^{-x} + C \Rightarrow f(x) = xe^x - 1 + Ce^x.$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = (x + 2)e^x - 1.$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 [(x + 2)e^x - 1] dx = 2(e - 1).$$

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) + x^2 e^x + 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$. Tính $f(3)$?

A. $6e^3 + 3.$

B. $6e^2 + 3.$

C. $3e^2 - 1.$

D. $9e^3 - 1.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) - f(x) = x^2 e^x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = x^2 + e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = x^2 + e^{-x}.$$

$$\text{Do đó: } e^{-x} f(x) = \int (e^{-x} f(x)) dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 e^x}{3} - 1 + C e^x.$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -1 + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 e^x}{3} - 1 \Rightarrow f(3) = 9e^3 - 1.$$

Câu 102. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f'(x) - f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = e. \text{ Giá trị của } f(5) \text{ bằng}$$

A. $3e^{12} - 1.$

B. $5e^{17}.$

C. $5e^{17} - 1.$

D. $3e^{12}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) - f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2+2x-1}{2}} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (x^2 + 1)e^{\frac{x^2-1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \int_1^5 (e^{-x} f(x))' dx = \int_1^5 (x^2 + 1)e^{\frac{x^2-1}{2}} dx \Leftrightarrow e^{-x} f(x) \Big|_1^5 = \int_1^5 x^2 e^{\frac{x^2-1}{2}} dx + \int_1^5 e^{\frac{x^2-1}{2}} dx \Leftrightarrow e^{-5} f(5) - 1 = I_1 + I_2 (*)$$

$$\text{Xét: } I_2 = \int_1^5 e^{\frac{x^2-1}{2}} dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^{\frac{x^2-1}{2}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x e^{\frac{x^2-1}{2}} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I_2 = x e^{\frac{x^2-1}{2}} \Big|_1^5 - \int_1^5 x^2 e^{\frac{x^2-1}{2}} dx = 5e^{12} - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 + I_2 = 5e^{12} - 1 (*) \Leftrightarrow e^{-5} f(5) - 1 = 5e^{12} - 1 \Leftrightarrow f(5) = 5e^{17}.$$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 + 4e - 4.$

B. $4e^2 - 2e + 1.$

C. $2e^3 - 2e + 2.$

D. $4e^2 - 4e + 2.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Biến đổi giả thiết } (x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{x+2}{x}f(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-x} f'(x)}{x^2} - \frac{(x+2)}{x^3} e^{-x} f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x}}{x^2} f(x) \right]' = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}}{x^2} f(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \Rightarrow f(x) = -x^2 + Cx^2 e^x$$

$$\text{Mà } f(1) = e \Rightarrow C = \frac{e+1}{e} \Rightarrow f(x) = -x^2 + (e+1)x^2 e^{x-1}$$

Vậy, $f(2) = -4 + 4e(e+1) = 4e^2 + 4e - 4$.

Câu 104. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$$3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + 3e^{-2x}}. \text{ Khi đó:}$$

A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{2}.$

B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{4}.$

C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8}{3}.$

D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + 3e^{-2x}} = \frac{\sqrt{e^{2x} + 3}}{e^x}$

Nhân hai vế giả thiết với e^{3x} ta được $\Rightarrow 3e^{3x}f(x) + e^{3x}f'(x) = e^{2x}\sqrt{e^{2x} + 3}.$

$$\Leftrightarrow [e^{3x}f(x)]' = e^{2x}\sqrt{e^{2x} + 3}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1 [e^{3x}f(x)]' dx = \int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x} + 3} dx$

$$\Leftrightarrow [e^{3x}f(x)]_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{e^{2x} + 3})^3 \Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8}{3}.$$

Câu 105. Trong những hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } I = \int_0^1 f(x)dx \text{ là}$$

A. $\frac{1}{2019.2021}$

B. $\frac{1}{2018.2021}$

C. $\frac{1}{2020.2021}$

D. $\frac{1}{2017.2021}$

Lời giải

Chọn A

$$+ 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{3}{x}f(x) \geq x^{2017}, x \neq 0$$

$$+ P(x) = 3\ln x \Rightarrow e^{P(x)} = x^3.$$

$$+ \text{Nhân hai vế của (*) cho } x^3 \text{ ta được } x^3 f'(x) + 3x^2 f(x) \geq x^{2019} \Rightarrow (x^3 f(x))' \geq x^{2020}, \text{ đúng } \forall x \in [0;1]$$

$$+ \text{Lấy tích phân từ 0 đến hai vế có } (x^3 f(x)) \Big|_0^t \geq \int_0^t x^{2020} dx = \frac{1}{2021} x^{2021} \Big|_0^t = \frac{t^{2021}}{2021}, \forall t \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq \frac{t^{2018}}{2021} \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{t^{2018}}{2021} = \frac{1}{2019.2021}.$$

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017} \cdot e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}.$

B. $f(1) = 2018e^{-2018}.$

C. $f(1) = 2018e^{2018}.$

D. $f(1) = 2017e^{2018}.$

Lời giải

Chọn A

$$+ P(x) = -\int 2018 dx = -2018x$$

+ Nhân hai vế với e^{-2018x} ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018e^{-2018x}f(x) = 2018x^{2017} \Rightarrow (f(x)e^{-2018x})' = 2018x^{2017}$$

+ Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được

$$(f(x)e^{-2018x}) \Big|_0^1 = \int_0^1 2018x^{2017} dx \Rightarrow f(1) = 2019e^{2018}$$

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$2xf(x) + f'(x) = x(x^2 - 1) \text{ với mọi } x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{e-4}{8e}.$

B. $\frac{1}{6}.$

C. $\frac{7}{6}.$

D. $\frac{e-4}{4e}.$

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế giả thiết với e^{x^2} ta được $e^{x^2}.2xf(x) + e^{x^2}.f'(x) = e^{x^2}.x(x^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow [e^{x^2}f(x)]' = x^3e^{x^2} - xe^{x^2} \Rightarrow$$

$$e^{x^2}f(x) = \int x(x^2 - 1)e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 2) + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2) + Ce^{-x^2}.$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2) + e^{-x^2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}(x^2 - 2) + e^{-x^2} \right] dx = \frac{e-4}{8e}.$$

Câu 108. (CHUYÊN LAM SƠN LẦN 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0, \pi]$. Biết $f(0) = 2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x) + \sin x.f(x) = \cos x.e^{\cos x}, \forall x \in [0, \pi]$. Tính

$$I = \int_0^\pi f(x).dx \text{ (làm tròn đến phần trăm).}$$

A. $I \approx 6,55.$

B. $I \approx 17,30.$

C. $I \approx 10,31.$

D. $I \approx 16,91.$

Lời giải

Chọn B

$f'(x) + \sin x.f(x) = \cos x.e^{\cos x}$. Chia hai vế đẳng thức cho $e^{\cos x}$ ta được

$$f'(x).e^{-\cos x} + e^{-\cos x}.\sin x.f(x) = \cos x \text{ (vế trái có dạng } u'v + uv')$$

$$\Leftrightarrow (f(x).e^{-\cos x})' = \cos x \Leftrightarrow \int (f(x).e^{-\cos x})' dx = \int \cos x dx \Leftrightarrow f(x).e^{-\cos x} = \sin x + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 2e \text{ nên } 2e.e^{-1} = C \Rightarrow C = 2. \text{ Vậy } f(x) = \frac{\sin x + 2}{e^{-\cos x}} = e^{\cos x}(\sin x + 2).$$

$$I = \int_0^\pi f(x).dx = \int_0^\pi e^{\cos x}(\sin x + 2) dx.$$

Sử dụng MTCT (đổi đơn vị rad). KQ: 10,31

Câu 109. Suy ra. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+ Trước tiên ta đưa phương trình về dạng tổng quát $f'(x) + \frac{1}{x(x+1)} f(x) = 1$

+ $P(x) = \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln \frac{x}{x+1}$. (ta chỉ cần xét $x > 0$)

+ Nhân hai vế cho $e^{P(x)}$ ta được $f'(x) \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x}{x+1}$

+ Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta có

$$\left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx = \left(x - \ln(x+1) \right) \Big|_1^2 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức

$f(x) + \tan x f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = -\frac{4}{9}$.

B. $P = -\frac{2}{9}$.

C. $P = \frac{7}{9}$.

D. $P = \frac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $\Rightarrow \cot x \cdot f(x) + f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \cdot \cot x$

Nhân thêm 2 vế với $e^{\int \cot x dx} = \sin x$ ta có

$$\cos x f(x) + \sin x f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin x f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Suy ra $\sin x f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

• Với $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \ln 2 \rightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi \sqrt{3} - 2 \ln 2 + 2C$.

• Với $x = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + C \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{9} \pi \sqrt{3} + \ln 3 - 2 \ln 2 + 2C$.

Suy ra $\sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{9} \pi \sqrt{3} - \ln 3 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow P = a + b = -\frac{4}{9}.$