

Họ, tên thí sinh: .....

Mã đề thi 666

Số báo danh: .....

**Câu 1.** Cho khối chóp có diện tích đáy bằng  $6 \text{ cm}^2$  và có chiều cao là  $2 \text{ cm}$ . Thể tích của khối chóp đó là

- A.  $6 \text{ cm}^3$ .                      B.  $3 \text{ cm}^3$ .                      C.  $4 \text{ cm}^3$ .                      D.  $12 \text{ cm}^3$ .
- C

**Câu 2.** Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số dương  $x$ ?

- A.  $(\log x)' = x \ln 10$ .              B.  $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ .              C.  $(\log x)' = \frac{\ln 10}{x}$ .              D.  $(\log x)' = \frac{x}{\ln 10}$ .
- B

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau

|      |           |      |           |      |           |     |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $0$  | $+\infty$ |     |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; +\infty)$ .                      B.  $(-\infty; -2)$ .                      C.  $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .                      D.  $(-2; +\infty)$ .
- A

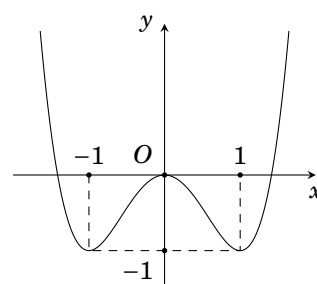
**Câu 4.** Tính theo  $a$  thể tích của một khối trụ có bán kính đáy là  $a$ , chiều cao bằng  $2a$ .

- A.  $2\pi a^3$ .                      B.  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .                      C.  $\frac{\pi a^3}{3}$ .                      D.  $\pi a^3$ .
- A

**Câu 5.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = x^4 - 2x^2$ .                      B.  $y = -x^4 + 2x^2$ .  
C.  $y = x^4 + 2x^2$ .                      D.  $y = x^4 - 3x^2 + 1$ .



A

**Câu 6.** Cho số phức  $z = 4 - 5i$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức  $\bar{z}$  là điểm nào?

- A.  $P(4; -5)$ .                      B.  $Q(-4; 5)$ .                      C.  $N(4; 5)$ .                      D.  $M(-5; 4)$ .

C

**Câu 7.** Cho  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$ . Tính  $I = \int_{\frac{2}{2}}^4 f(y) dy$ .

- A.  $I = 5$ . B.  $I = 3$ . C.  $I = -3$ . D.  $I = -5$ .

D

**Câu 8.** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_2(x-1) = 3$ .

- A.  $x = 8$ . B.  $x = 7$ . C.  $x = 9$ . D.  $x = 10$ .

C

**Câu 9.** Một khối lăng trụ có chiều cao bằng  $2a$  và diện tích đáy bằng  $2a^2$ . Tính thể tích khối lăng trụ.

- A.  $V = \frac{4a^3}{3}$ . B.  $V = \frac{2a^3}{3}$ . C.  $V = 2a^3$ . D.  $V = 4a^3$ .

D

**Câu 10.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) + 2 = 0$  là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

B

|         |           |      |     |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |      |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  |           |      | $2$ |           | $-3$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |           |      |           |

**Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình  $3^x \leq 9$  là

- A.  $(-\infty; 2]$ . B.  $(-\infty; 2)$ . C.  $[2; +\infty)$ . D.  $(2; +\infty)$ .

A

**Câu 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 2022x$ .

- A.  $\int \cos 2022x dx = 2022 \sin 2022x + C$ . B.  $\int \cos 2022x dx = \frac{1}{2022} \sin 2022x + C$ .  
C.  $\int \cos 2022x dx = -\frac{1}{2022} \sin 2022x + C$ . D.  $\int \cos 2022x dx = \sin 2022x + C$ .

B

**Câu 13.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 2022 - 2021i$  là

- A.  $-2022 + 2021i$ . B.  $2022 - 2021i$ . C.  $2022 + 2021i$ . D.  $-2022 - 2021i$ .

C

**Câu 14.** Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1-x}{-x+2}$  có phương trình lần lượt là

- A.  $x = 1; y = 2$ . B.  $x = 2; y = \frac{1}{2}$ . C.  $x = 2; y = -1$ . D.  $x = 2; y = 1$ .

D

**Câu 15.** Một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x$  là

- A.  $F(x) = e^x + 2$ . B.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ . C.  $F(x) = e^{2x}$ . D.  $F(x) = 2e^x$ .

A

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;3;-1)$  và  $B(-4;1;9)$ . Trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

- A.  $(-1;2;4)$ .      B.  $(-2;4;8)$ .      C.  $(-6;-2;10)$ .      D.  $(1;-2;-4)$ .

A

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z - 11 = 0$  và điểm  $M(-1;0;0)$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  tới mặt phẳng  $(P)$  là

- A.  $3\sqrt{3}$ .      B. 36.      C. 12.      D. 4.

D

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $4$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-3$ | $5$ | $-\infty$ |     |

Hàm số có giá trị cực tiểu bằng

- A. 0.      B. 4.      C. -3.      D. 5.

C

**Câu 19.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$  trên đoạn  $[-4;4]$ . Khi đó  $M + m$  bằng bao nhiêu?

- A. -1.      B. 48.      C. 11.      D. 55.

A

**Câu 20.** Cho hình phẳng  $(D)$  được giới hạn bởi các đường  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  và  $y = \sqrt{2x+1}$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng  $(D)$  xung quanh trục  $Ox$  được tính theo công thức nào sau đây?

- A.  $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ .      B.  $V = \int_0^1 (2x+1) dx$ .      C.  $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$ .      D.  $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ .

C

**Câu 21.** Gọi  $\ell$ ,  $h$ ,  $r$  lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của một hình nón. Thể tích của khối nón tương ứng bằng

- A.  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \ell$ .      B.  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .      C.  $V = 2\pi r \ell$ .      D.  $V = \pi r \ell$ .

B

**Câu 22.** Phương trình  $5^{2x+1} = 125$  có nghiệm là

- A.  $x = 3$ .      B.  $x = \frac{5}{2}$ .      C.  $x = \frac{3}{2}$ .      D.  $x = 1$ .

D

**Câu 23.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 5$  và  $u_6 = -160$ . Công bội  $q$  của cấp số nhân đã cho là

A.  $q = -3$ .

B.  $q = 3$ .

C.  $q = -2$ .

D.  $q = 2$ .

C

**Câu 24.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(5; -4; 2)$  và  $B(1; 2; 4)$ . Mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  có phương trình là

A.  $2x - 3y - z - 20 = 0$ . B.  $3x - y + 3z - 25 = 0$ . C.  $2x - 3y - z + 8 = 0$ . D.  $3x - y + 3z - 13 = 0$ .

A

**Câu 25.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2}$ , vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ ?

A.  $\vec{u} = (1; 3; 2)$ . B.  $\vec{u} = (-1; -3; 2)$ . C.  $\vec{u} = (1; -3; -2)$ . D.  $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ .

B

**Câu 26.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu có phương trình  $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5$  là

A.  $I(2; 3; 0), R = \sqrt{5}$ . B.  $I(2; 3; 1), R = 5$ . C.  $I(2; -2; 0), R = 5$ . D.  $I(-2; 3; 0), R = \sqrt{5}$ .

D

**Câu 27.** Cho  $a$  và  $b$  là hai số thực dương thỏa mãn  $a^3 b^2 = 32$ . Giá trị của  $3\log_2 a + 2\log_2 b$  bằng

A. 32. B. 2. C. 4. D. 5.

D

**Câu 28.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 5$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$  bằng

A. -8. B. 12. C. 1. D. -3.

A

**Câu 29.** Tập xác định của hàm số  $y = \ln(1-x)$  là

A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 1)$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . D.  $\mathbb{R}$ .

B

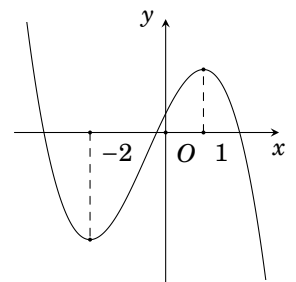
**Câu 30.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng?

A.  $ab > 0, bc < 0, cd < 0$ . B.  $ab > 0, bc < 0, cd > 0$ .

C.  $ab > 0, bc > 0, cd > 0$ . D.  $ab < 0, bc < 0, cd > 0$ .

B



**Câu 31.** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ . Đổi biến  $t = \sqrt{1+\ln x}$  ta được kết quả nào sau đây?

A.  $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$ . B.  $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t dt$ . C.  $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$ . D.  $I = 2 \int_1^2 t^2 dt$ .

A

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (x-1)(x-2)^{2022}(x+3)^{2021}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

A

**Câu 33.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -2; 3)$  và  $(S)$  đi qua điểm  $A(3; 0; 2)$ .

- A.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$ . B.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$ .  
C.  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$ . D.  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ .

D

**Câu 34.** Một nghiên cứu về hiệu quả của vắc xin cúm đã được tiến hành với một mẫu gồm 500 người. Một số người tham gia nghiên cứu không được tiêm vắc xin, một số được tiêm một mũi, và một số được tiêm hai mũi. Kết quả của nghiên cứu được thể hiện trong bảng.



|           | Không<br>vắc xin | Tiêm<br>1 mũi | Tiêm<br>2 mũi | Tổng<br>cộng |
|-----------|------------------|---------------|---------------|--------------|
| Cúm       | 7                | 2             | 13            | 22           |
| Không cúm | 149              | 52            | 277           | 478          |
| Tổng cộng | 156              | 54            | 290           | 500          |

Chọn ngẫu nhiên một người trong mẫu. Tìm xác suất để người được chọn đã bị cúm và đã tiêm một mũi vắc xin cúm.

- A.  $\frac{29}{50}$ . B.  $\frac{239}{250}$ . C.  $\frac{1}{250}$ . D.  $\frac{11}{250}$ .

C

**Câu 35.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$  là  $S = (a; b) \cup (c; d)$  với  $a, b, c, d$  là các số thực. Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

B

**Câu 36.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x + 2021$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A. 2. B. 6. C. 5. D. 4.

B

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = CB = CA$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm  $I$  của cạnh  $AB$ . Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng

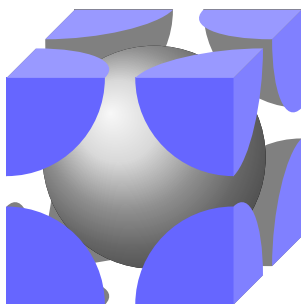
- A.  $45^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

A

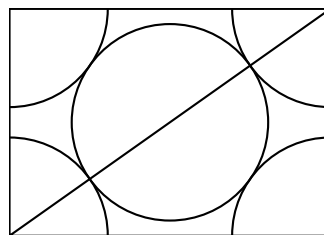
**Câu 38.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-m^2}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m > 4$ .                      B.  $3 < m \leq 4$ .                      C.  $m \leq -2$ .                      D.  $-2 < m \leq 3$ .
- D

**Câu 39.** Crôm ( $Cr$ ) có cấu trúc tinh thể lập phương tâm khối, mỗi nguyên tử  $Cr$  có hình dạng cầu với bán kính  $R$ . Một ô cơ sở của mạng tinh thể  $Cr$  là một hình lập phương có cạnh bằng  $a$ , chứa một nguyên tử  $Cr$  ở chính giữa và mỗi góc chứa  $\frac{1}{8}$  nguyên tử  $Cr$  khác (Hình a), (Hình b mô tả thiết diện của ô cơ sở nói trên với mặt chéo của nó).



Hình a.



Hình b.

Độ đặc khít của  $Cr$  trong một ô cơ sở là tỉ lệ % thể tích mà  $Cr$  chiếm chỗ trong ô cơ sở đó. Tỉ lệ lỗ trống trong một ô cơ sở là

- A. 32%.                      B. 46%.                      C. 18%.                      D. 54%.
- A

**Câu 40.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SD$ . Khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SAC)$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\frac{a}{4}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ .                      D.  $\frac{a}{2}$ .
- C

**Câu 41.** Cho hai số thực  $a, b$  lớn hơn 1 thỏa mãn  $a + b = 2020$ . Gọi  $m, n$  là hai nghiệm của phương trình  $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 2 = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $mn + 4a$  là

- A. 8076.                      B. 8077.                      C. 8078.                      D. 8079.
- A

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2. \end{cases}$

Tính tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \cdot f(\sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx + 2 \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} \cdot f(1 + e^{2x}) dx$ .

- A. 79.                      B. 78.                      C. 77.                      D. 76.
- A

**Câu 43.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $SAB$  là tam giác đều cạnh  $a\sqrt{3}$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ , đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  góc  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

A.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .  
D

B.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $2a^3\sqrt{6}$ .

D.  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 44.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và trục hoành đồng thời có diện tích  $S = a$ . Biết rằng  $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b$  và  $f(3) = c$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

A.  $I = a - b + c$ .

B.  $I = -a + b - c$ .

C.  $I = -a + b + c$ .  
**Lời giải.**

D.  $I = a - b - c$ .

Ta có

$$S = a \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - f(3) = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần với  $u = x + 1$  và  $dv = f'(x)dx$ , ta được

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b \Leftrightarrow (x+1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = b$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - I = b \Leftrightarrow a + c - I = b \Leftrightarrow I = a - b + c.$$

Chọn đáp án **A**

□

A

**Câu 45.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1;2;3)$  và cắt các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (khác gốc tọa độ  $O$ ) sao cho  $M$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình là

A.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$ .    B.  $3x + 2y + z - 10 = 0$ .    C.  $x + 2y + 3z - 14 = 0$ .    D.  $x + 2y + 3z + 14 = 0$ .

**Lời giải.**

Đầu tiên, ta sẽ chứng minh  $M$  cũng là hình chiếu từ điểm  $O$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Thật vậy, do  $CM \perp AB$  và  $OC \perp AB$  nên  $(OCM) \perp AB$  suy ra  $(OCM) \perp (ABC)$ .

Tương tự,  $(OAM) \perp (ABC)$ . Hai mặt phẳng  $(OCM)$ ,  $(OAM)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  nên giao tuyến của chúng là  $OM \perp (ABC)$ .

Do đó, mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua  $M(1;2;3)$  và nhận  $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$  làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  có dạng

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

C

**Câu 46.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$  và điểm  $M(0;1;0)$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và cắt  $(S)$  theo đường tròn  $(C)$  có chu vi nhỏ nhất. Gọi  $N(x_0; y_0; z_0)$  là điểm thuộc đường tròn  $(C)$  sao cho  $ON = \sqrt{6}$ . Tính  $y_0$ .

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải.**

Nhận thấy rằng, mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1;2;1)$ , bán kính  $R = \sqrt{6}$  và điểm  $M$  là điểm nằm trong mặt cầu này.

Gọi  $r$  là bán kính hình tròn  $(C)$  và  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $(P)$ . Dễ thấy rằng  $H$  là tâm đường tròn  $(C)$ . Khi đó, ta có

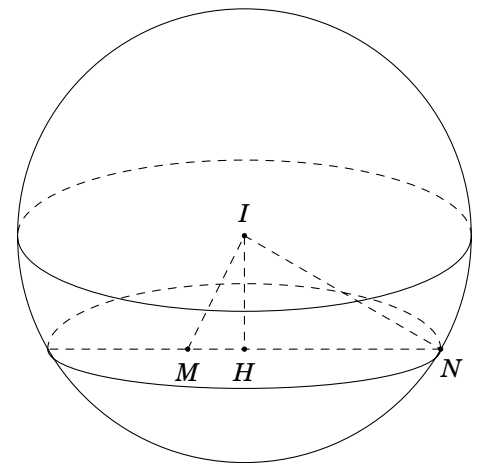
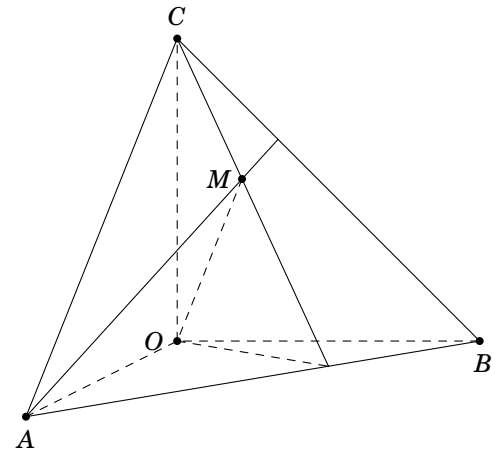
$$r = \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IM^2}.$$

Vậy để  $(C)$  có chu vi nhỏ nhất thì  $r$  nhỏ nhất khi đó  $H$  trùng với  $M$ .

Khi đó mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M(0;1;0)$  và nhận vectơ  $\overrightarrow{IM} = (1;-1;-1)$  làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng  $(P)$  có dạng

$$x - (y-1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z = -1.$$

Điểm  $N$  vừa thuộc mặt cầu  $(S)$  vừa thuộc mặt phẳng  $(P)$  và thỏa  $ON = \sqrt{6}$  nên tọa độ của  $N$



thỏa hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = -6 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1. \end{cases}$$

Lấy phương trình đầu trừ hai lần phương trình thứ ba ta được  $-2y_0 = -4 \Leftrightarrow y_0 = 2$ .

Chọn đáp án **C**

□

C

**Câu 47.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để phương trình

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$ ?

A. 10.

B. 9.

C. 11.

D. 8.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} &= 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m) \\ \Leftrightarrow \frac{7^{x^2-2x}}{7^{3^m}} + \frac{2^{x^2-2x}}{2^{3^m}} &= 7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m \\ \Leftrightarrow 7^{x^2-2x-3^m} + 2^{x^2-2x-3^m} &= 7(x^2 - 2x - 3^m) + 2. \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt  $x^2 - 2x - 3^m = a$ .

Khi đó (\*) trở thành  $7^a + 2^a = 7a + 2 \Leftrightarrow 7^a + 2^a - 7a - 2 = 0$ .

Xét hàm số  $f(a) = 7^a + 2^a - 7a - 2$ .

Ta có  $f'(a) = 7^a \ln 7 + 2^a \ln 2 - 7$ .

Ta có  $f''(a) = 7^a (\ln 7)^2 + 2^a (\ln 2)^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Suy ra  $f'(a)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , do đó  $f'(a) = 0$  có tối đa 1 nghiệm.

Mà  $f'(0) = \ln 7 + \ln 2 - 7 < 0$  và  $f'(1) = 7 \ln 7 + 2 \ln 2 - 7 > 0$ .

Suy ra  $f'(a) = 0$  có nghiệm duy nhất  $a_0 \in (0; 1)$ .

Suy ra  $f(a) = 0$  có tối đa 2 nghiệm.

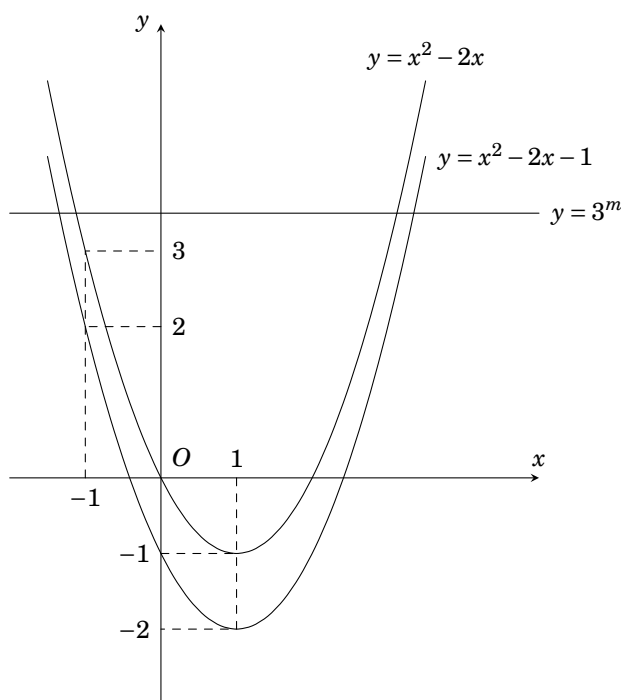
Bảng biến thiên của  $y = f(a)$

|         |           |   |          |   |           |
|---------|-----------|---|----------|---|-----------|
| $a$     | $-\infty$ | 0 | $a_0$    | 1 | $+\infty$ |
| $f'(a)$ |           | 0 | -        | 0 | +         |
| $f(a)$  | $+\infty$ | 0 | $f(a_0)$ | 0 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $f(a) = 0$  có đúng 2 nghiệm  $a = 0$  và  $a = 1$ .

$$\text{Từ đó } \begin{cases} a = x^2 - 2x - 3^m = 0 \\ a = x^2 - 2x - 3^m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m = x^2 - 2x \\ 3^m = x^2 - 2x - 1. \end{cases} \quad (**)$$

Đề (\*) có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$  thì (\*\*) có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$  hay tương đương với đồ thị hàm số  $y = 3^m$  cắt đồ thị các hàm số  $y = x^2 - 2x$  và  $y = x^2 - 2x - 1$  tại 4 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn  $-1$ .



Dựa vào đồ thị ta có  $3^m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 1$ .

Suy ra  $m \in \{1; 2; \dots; 10\}$ .

Vậy có 10 giá trị của  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

A

**Câu 48.** Cho lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = \sqrt{6}$ ,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $A'C = 3$  và mặt phẳng  $(AA'C'C)$  vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng  $(AA'C'C)$  và  $(AA'B'B)$  tạo với nhau góc  $\alpha$  có  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Thể tích  $V$  của khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  là

A. 12.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

**Lời giải.**

Để thấy

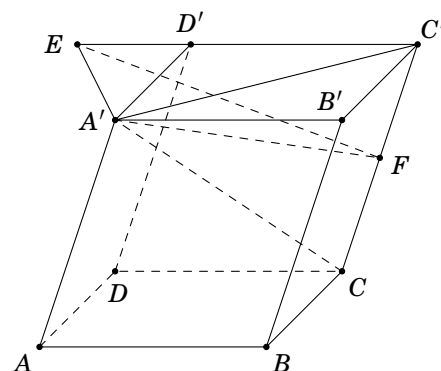
$$A'C' = \sqrt{A'D'^2 + A'B'^2} = 3 = A'C$$

nên tam giác  $A'CC'$  cân tại  $A'$ , do đó  $A'F \perp CC'$ , với  $F$  là trung điểm của  $CC'$ . Gọi  $E$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{C'E} = \frac{3}{2}\overrightarrow{C'D'}$ .

Khi đó  $C'E = \frac{3\sqrt{6}}{2}$  và  $D'E = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , suy ra

$$A'E^2 + A'C^2 = A'D'^2 + D'E^2 + A'C'^2 = \frac{27}{2} = C'E^2$$

hay tam giác  $EA'C'$  vuông tại  $A'$ . Lại có mặt  $(AA'C'C)$  vuông góc với đáy nên  $EA' \perp (AA'C'C)$ ,



suy ra  $EA' \perp A'F$  và  $CC' \perp (EA'F)$ , do đó

$$\widehat{EFA'} = (A'F, EF) = ((AA'C'A), (CDD'C')) = ((AA'C'C), (AA'B'B)) = \alpha$$

Ta có  $EA' = \sqrt{D'E^2 + A'D'^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , suy ra  $A'F = A'E \cot \alpha = 2\sqrt{2}$  và  $CC' = 2\sqrt{A'C'^2 - A'F^2} = 2$ , do đó chiều cao của khối lăng trụ là

$$h = d(C, (A'B'C'D')) = d(C, A'C') = \frac{A'F \cdot CC'}{A'C'} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy  $V = AB \cdot AD \cdot h = 8$ .

Chọn đáp án **C**

□

C

#### Câu 49.

Cho đường cong  $(C): y = x^3 + kx + 2$  và parabol  $P: y = -x^2 + 2$  tạo thành hai miền phẳng có diện tích  $S_1, S_2$  như hình vẽ bên.

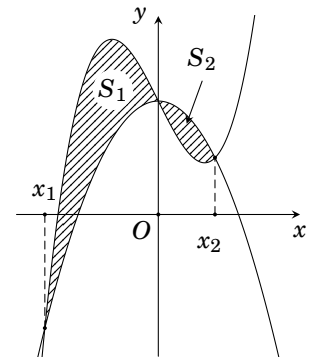
Biết rằng  $S_1 = \frac{8}{3}$ , giá trị của  $S_2$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{1}{4}$ .

C.  $\frac{3}{4}$ .

D.  $\frac{5}{12}$ .



#### Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $d$

$$x^3 + kx + 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x(x^2 + x + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + k = 0. \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt nên phương trình  $x^2 + x + k = 0$  có hai nghiệm phân

biệt  $x_1, x_2$  khác 0 và thỏa mãn  $x_1 < 0 < x_2$ . Do đó ta có

$$\begin{cases} k < 0 \\ x_2 = -1 - x_1 \\ k = -x_1^2 - x_1. \end{cases}$$

Trên đoạn  $[x_1; 0]$ ,  $x^3 + kx + 2 \geq -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + kx \geq 0$ . Theo bài ra, diện tích  $S_1 = \frac{8}{3}$  nên

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 |x^3 + x^2 + kx| dx &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + kx) dx &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^0 &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow -(3x_1^4 + 4x_1^3 + 6kx_1^2) &= 32 \\ \Leftrightarrow 3x_1^4 + 4x_1^3 + 6(-x_1^2 - x_1)x_1^2 &= -32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3x_1^4 + 2x_1^3 - 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 + 2)(3x_1^3 - 4x_1^2 + 8x_1 - 16) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ (vì } x_1 < 0). \end{aligned}$$

Với  $x_1 = -2 \Rightarrow k = -2, x_2 = 1$  và  $x^3 + x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 1]$ , ta có

$$S_2 = - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = - \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Chọn đáp án **D**

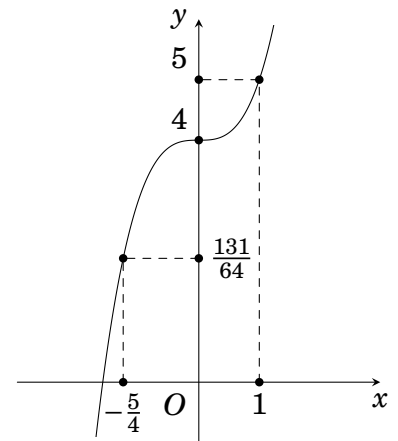
□

D

### Câu 50.

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có  $f'(1) = 3$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  và  $m \in [-10; 10]$  để phương trình  $\ln \frac{f(x)}{3mx^2} + x[f(x) - 3mx] = 3mx^3 - f(x)$  có hai nghiệm dương phân biệt?

- A. 18.      B. 9.      C. 10.      D. 15.



### Lời giải.

Do yêu cầu bài toán là phương trình có hai nghiệm dương phân biệt nên ta chỉ xét  $x > 0$ .

Giả sử  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Vì đồ thị đi qua các điểm  $A(-\frac{5}{4}; \frac{131}{64})$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(1; 5)$  nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{125}{64}a + \frac{25}{16}b - \frac{5}{4}c + d = \frac{131}{64} \\ d = 4 \\ a + b + c + d = 5. \end{cases} \quad (1)$$

Ta có  $f'(1) = 3 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 3$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 4$ , suy ra  $f(x) = x^3 + 4$ .

Điều kiện  $\frac{f(x)}{3mx^2} > 0 \Rightarrow m > 0$ .

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(x)}{3mx^2} + x[f(x) - 3mx] &= 3mx^3 - f(x) \\ \Leftrightarrow \ln f(x) - \ln(3mx^2) + x[f(x) - 3mx^2] &+ f(x) - 3mx^2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Nếu  $f(x) > mx^2$  thì  $\log f(x) > \log(mx^2)$  và  $xf(x) > x(mx^2), \forall x > 0 \Rightarrow (3)$  vô nghiệm.

Tương tự nếu  $f(x) < mx^2$  thì phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó  $f(x) = 3mx^2 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 3mx^2 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 4}{3x^2} = m, \text{ vì } x > 0$ .

Xét hàm số  $g(x) = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$  với  $x > 0$ .

$$g'(x) = \frac{3x^4 - 24x}{9x^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vì  $x > 0$  nên ta nhận  $x = 2$ . Ta có bảng biến thiên

|      |           |                               |           |
|------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$  | 0         | 2                             | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -      0      +               |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$<br>1<br>$\nearrow$ | $+\infty$ |

Để phương trình  $\frac{x^3 + 4}{3x^2} = m$  có hai nghiệm dương phân biệt thì  $m > 1$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [-10; 10]$  nên  $m \in \{2; 3; \dots; 10\}$ . Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số  $m$  thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**



B

———— HẾT ————

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1:** Cho khối chóp có diện tích đáy bằng  $6 \text{ cm}^2$  và có chiều cao là  $2 \text{ cm}$ . Thể tích của khối chóp đó là

- A.** 6 cm<sup>3</sup>.                      **B.** 3 cm<sup>3</sup>.                      **C.** 4 cm<sup>3</sup>.                      **D.** 12 cm<sup>3</sup>.

## Lời giải

Áp dụng công thức tính thể tích  $V = \frac{1}{3}h \times S = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^3$ .

**Câu 2:** Hằng thức nào sau đây đúng với mọi số dương  $x$ ?

- A.**  $(\log x)' = x \ln 10$ .      **B.**  $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ .      **C.**  $(\log x)' = \frac{\ln 10}{x}$ .      **D.**  $(\log x)' = \frac{x}{\ln 10}$ .

## Lời giải

Áp dụng công thức tính đạo hàm  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau

|      |           |      |           |      |           |     |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $0$  | $+\infty$ |     |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(0; +\infty)$ .      **B.**  $(-\infty; -2)$ .      **C.**  $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .      **D.**  $(-2; +\infty)$ .

## Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên hàm  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; -3)$  và  $(-1; +\infty)$ .

Suy ra hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

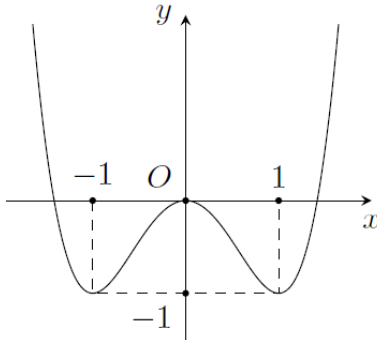
**Câu 4:** Tính theo  $a$  thể tích của một khối trụ có bán kính đáy là  $a$ , chiều cao bằng  $2a$ .

- A.**  $2\pi a^3$ .      **B.**  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .      **C.**  $\frac{\pi a^3}{3}$ .      **D.**  $\pi a^3$ .

### Lời giải

Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ  $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$ .

**Câu 5:** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.**  $y = x^4 - 2x^2$ .      **B.**  $y = -x^4 + 2x^2$ .      **C.**  $y = x^4 + 2x^2$ .      **D.**  $y = x^4 - 3x^2 + 1$ .

### Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có hệ số  $a > 0$  và đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên  $ab < 0$ , đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên  $c = 0$ .

- Câu 6:** Cho số phức  $z = 4 - 5i$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức  $\bar{z}$  là điểm nào?  
**A.**  $P(4; -5)$ . **B.**  $Q(-4; 5)$ . **C.**  $N(4; 5)$ . **D.**  $M(-5; 4)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\bar{z} = 4 + 5i$ . Như vậy điểm có tọa độ  $(4; 5)$  biểu diễn số phức  $\bar{z}$  trên mặt phẳng tọa độ.

- Câu 7:** Cho  $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$ . Tính  $I = \int_{-2}^4 f(y)dy$ .  
**A.**  $I = 5$ . **B.**  $I = 3$ . **C.**  $I = -3$ . **D.**  $I = -5$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\int_{-2}^4 f(y)dy = \int_{-2}^{-2} f(y)dy + \int_{-2}^4 f(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^4 f(y)dy = -\int_{-2}^2 f(y)dy + \int_{-2}^4 f(y)dy = -1 + (-4) = -5.$$

- Câu 8:** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_2(x-1) = 3$ .  
**A.**  $x = 8$ . **B.**  $x = 7$ . **C.**  $x = 9$ . **D.**  $x = 10$ .

**Lời giải**

Điều kiện  $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Ta có  $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$  (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 9$ .

- Câu 9:** Một khối lăng trụ có chiều cao bằng  $2a$  và diện tích đáy bằng  $2a^2$ . Tính thể tích khối lăng trụ.  
**A.**  $V = \frac{4a^3}{3}$ . **B.**  $V = \frac{2a^3}{3}$ . **C.**  $V = 2a^3$ . **D.**  $V = 4a^3$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức tính thể tích hình lăng trụ  $V = S \times h = 2a \times 2a^2 = 4a^3$ .

- Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) + 2 = 0$  là

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-3$ | $+\infty$ |

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải**

Ta có  $f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2$ .

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-3$ | $+\infty$ |     |

$y = -2$

Theo bảng biến thiên ta thấy đường thẳng  $y = -2$  cắt đồ thị  $f(x)$  tại 3 điểm phân biệt nên phương trình  $f(x) + 2 = 0$  có 3 nghiệm.

**Câu 11:** Tập nghiệm của bất phương trình  $3^x \leq 9$  là

**A.**  $(-\infty; 2]$ .

**B.**  $(-\infty; 2)$ .

**C.**  $[2; +\infty)$ .

**D.**  $(2; +\infty)$ .

**Lời giải**

Ta có  $3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$ . Suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = (-\infty; 2]$ .

**Câu 12:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 2022x$ .

**A.**  $\int \cos 2022x dx = 2022 \sin 2022x + C$ .

**B.**  $\int \cos 2022x dx = \frac{1}{2022} \sin 2022x + C$ .

**C.**  $\int \cos 2022x dx = -\frac{1}{2022} \sin 2022x + C$ .

**D.**  $\int \cos 2022x dx = \sin 2022x + C$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức  $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$  suy ra

$$\int \cos 2022x dx = \frac{1}{2022} \sin 2022x + C.$$

**Câu 13:** Số phức liên hợp của số phức  $z = 2022 - 2021i$  là

**A.**  $-2022 + 2021i$ .

**B.**  $2022 - 2021i$ .

**C.**  $2022 + 2021i$ .

**D.**  $-2022 - 2021i$ .

**Lời giải**

Số phức liên hợp của số phức  $z$  là  $\bar{z} = 2022 - (-2021i) = 2022 + 2021i$ .

**Câu 14:** Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1-x}{-x+2}$  có phương trình lần lượt là

**A.**  $x = 1; y = 2$ .

**B.**  $x = 2; y = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $x = 2; y = -1$ .

**D.**  $x = 2; y = 1$ .

**Lời giải**

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{-x+2} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{-x+2} = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{-x+2} = +\infty$ .

Đồ thị hàm số  $y = \frac{1-x}{-x+2}$  có đường tiệm cận đứng là  $x = 2$  và đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ .

**Câu 15:** Một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x$  là

**A.**  $F(x) = e^x + 2$ .

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$ .

**C.**  $F(x) = e^{2x}$ .

**D.**  $F(x) = 2e^x$ .

**Lời giải**

Ta có  $F(x) = \int e^x dx = e^x + C$ .

Chọn  $C = 2$ , có  $F(x) = e^x + 2$ .

**Câu 16:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 3; -1)$  và  $B(-4; 1; 9)$ . Trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

**A.**  $(-1; 2; 4)$ .

**B.**  $(-2; 4; 8)$ .

**C.**  $(-6; -2; 10)$ .

**D.**  $(1; -2; -4)$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức trung điểm  $I = \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right) = (-1; 2; 4)$ .

**Câu 17:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z - 11 = 0$  và điểm  $M(-1; 0; 0)$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  tới mặt phẳng  $(P)$  là

**A.**  $3\sqrt{3}$ .

**B.** 36.

**C.** 12.

**D.** 4.

**Lời giải**

Ta có  $d(M, (P)) = \frac{|-1 - 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4$ .

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |   |   |           |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 4 | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | —         | 0 | + | 0         | —         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | 5 |           | $-\infty$ |

Hàm số có giá trị cực tiểu bằng

**A.** 0.

**B.** 4.

**C.** -3.

**D.** 5.

**Lời giải**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3.

**Câu 19:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$  trên đoạn  $[-4; 4]$ . Khi đó  $M + m$  bằng bao nhiêu?

**A.** -1.

**B.** 48.

**C.** 11.

**D.** 55.

**Lời giải**

Ta có  $y' = 3x^2 - 6x - 9$ .

Khi đó  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1. \end{cases}$

Ta tính các giá trị sau  $y(-4) = -41$ ,  $y(-1) = 40$ ,  $y(3) = 8$ ,  $y(4) = 15$ .

Như vậy,  $M = y(-1) = 40$  và  $m = y(-4) = -41$  suy ra  $M + m = -1$ .

**Câu 20:** Cho hình phẳng  $(D)$  được giới hạn bởi các đường  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  và  $y = \sqrt{2x+1}$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng  $(D)$  xung quanh trục  $Ox$  được tính theo công thức nào sau đây?

**A.**  $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ .

**B.**  $V = \int_0^1 (2x+1) dx$ .

**C.**  $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$ .

**D.**  $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ .

**Lời giải**

Công thức tính thể tích là  $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$ .

**Câu 21:** Gọi  $\ell$ ,  $h$ ,  $r$  lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của một hình nón. Thể tích của khối nón tương ứng bằng

A.  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \ell$ .

**B.  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .**

C.  $V = 2\pi r \ell$ .

D.  $V = \pi r \ell$ .

**Lời giải**

Công thức thể tích khối nón  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

**Câu 22:** Phương trình  $5^{2x+1} = 125$  có nghiệm là

A.  $x = 3$ .

B.  $x = \frac{5}{2}$ .

C.  $x = \frac{3}{2}$ .

**D.  $x = 1$ .**

**Lời giải**

Ta xét

$$5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

**Câu 23:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 5$  và  $u_6 = -160$ . Công bội  $q$  của cấp số nhân đã cho là

A.  $q = -3$ .

B.  $q = 3$ .

**C.  $q = -2$ .**

D.  $q = 2$ .

**Lời giải**

Ta có

$$u_6 = -160 \Leftrightarrow u_1 q^5 = -160 \Leftrightarrow q^5 = -32 \Leftrightarrow q = -2.$$

**Câu 24:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(5; -4; 2)$  và  $B(1; 2; 4)$ . Mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  có phương trình là

**A.  $2x - 3y - z - 20 = 0$ .**

B.  $3x - y + 3z - 25 = 0$ .

C.  $2x - 3y - z + 8 = 0$ .

D.  $3x - y + 3z - 13 = 0$ .

**Lời giải**

Mặt phẳng cần tìm đi qua  $A(5; -4; 2)$  và nhận vector  $\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 2)$  hay  $\vec{n} = (2; -3; -1)$  làm vector pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng có dạng

$$2(x-5) - 3(y+4) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - z - 20 = 0.$$

**Câu 25:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2}$ , vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng  $d$ ?

A.  $\vec{u} = (1; 3; 2)$ .

**B.  $\vec{u} = (-1; -3; 2)$ .**

C.  $\vec{u} = (1; -3; -2)$ .

D.  $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ .

**Lời giải**

Một vector chỉ phương của đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2}$  là  $(1; 3; -2)$  hay  $(-1; -3; 2)$ .

**Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu có phương trình  $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5$  là

A.  $I(2; 3; 0), R = \sqrt{5}$ .

B.  $I(2; 3; 1), R = 5$ .

C.  $I(2; -2; 0), R = 5$ .

**D.  $I(-2; 3; 0), R = \sqrt{5}$ .**

**Lời giải**

Phương trình mặt cầu  $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5$  có tọa độ tâm  $I(-2; 3; 0)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

**Câu 27:** Cho  $a$  và  $b$  là hai số thực dương thỏa mãn  $a^3b^2 = 32$ . Giá trị của  $3\log_2 a + 2\log_2 b$  bằng

A. 32.

B. 2.

C. 4.

**D. 5.**

**Lời giải**

Ta xét

$$a^3b^2 = 32 \Leftrightarrow \log_2(a^3b^2) = \log_2 32 \Leftrightarrow \log_2 a^3 + \log_2 b^2 = 5 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5.$$

**Câu 28:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x)dx = 5$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$  bằng

**A. -8.**

B. 12.

C. 1.

D. -3.

**Lời giải**

Ta có

$$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 g(x)dx = 2 - 2 \cdot 5 = -8.$$

**Câu 29:** Tập xác định của hàm số  $y = \ln(1-x)$  là

A.  $(1; +\infty)$ .

**B.  $(-\infty; 1)$ .**

C.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

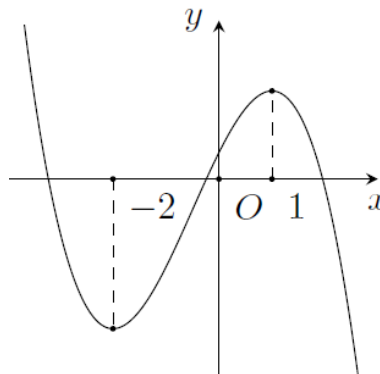
D.  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định  $\Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$ .

**Câu 30:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



A.  $ab > 0, bc < 0, cd < 0$ . **B.  $ab > 0, bc < 0, cd > 0$ .**

C.  $ab > 0, bc > 0, cd > 0$ . D.  $ab < 0, bc < 0, cd > 0$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét.

Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra  $a < 0$ .

Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra  $d > 0$ .

Hàm số có các điểm cực trị  $x = 1$  và  $x = -2$  nên phương trình  $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$  có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = -2$ . Ta có  $\frac{-2b}{3a} = -1$  và  $\frac{c}{3a} = -2$ . Do đó  $b < 0$  và  $c > 0$ .

Như vậy  $ab > 0$ ,  $bc < 0$  và  $cd > 0$ .

**Câu 31:** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ . Đổi biến  $t = \sqrt{1+\ln x}$  ta được kết quả nào sau đây?

**A.  $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$ .**

B.  $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t dt$ .

C.  $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$ .

D.  $I = 2 \int_1^2 t^2 dt$ .

**Lời giải**

Thực hiện đổi biến  $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x} dx$ .

Với  $x=1 \Rightarrow t=1$ ,  $x=e \Rightarrow t=\sqrt{2}$ .

Như vậy

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2 dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt.$$

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (x-1)(x-2)^{2022}(x+3)^{2021}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 1.

**D.** 0.

**Lời giải**

Xét  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=-3$ .

$f'(x)$  đổi dấu khi đi qua nghiệm  $x=1$  và  $x=-3$ . Do đó  $f(x)$  có 2 điểm cực trị.

**Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -2; 3)$  và  $(S)$  đi qua điểm  $A(3; 0; 2)$ .

**A.**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$ .

**B.**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$ .

**C.**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$ .

**D.**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ .

**Lời giải**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -2; 3)$  và bán kính  $IA = \sqrt{(3-1)^2 + (0+2)^2 + (2-3)^2} = 3$ .

Vậy phương trình mặt cầu có dạng  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ .

**Câu 34:** Một nghiên cứu về hiệu quả của vắc xin cúm đã được tiến hành với một mẫu gồm 500 người. Một số người tham gia nghiên cứu không được tiêm vắc xin, một số được tiêm một mũi, và một số được tiêm hai mũi. Kết quả của nghiên cứu được thể hiện trong bảng.



|           | Không<br>vắc xin | Tiêm<br>1 mũi | Tiêm<br>2 mũi | Tổng<br>cộng |
|-----------|------------------|---------------|---------------|--------------|
| Cúm       | 7                | 2             | 13            | 22           |
| Không cúm | 149              | 52            | 277           | 478          |
| Tổng cộng | 156              | 54            | 290           | 500          |

Chọn ngẫu nhiên một người trong mẫu. Tìm xác suất để người được chọn đã bị cúm và đã tiêm một mũi vắc xin cúm.

**A.**  $\frac{29}{50}$ .

**B.**  $\frac{239}{250}$ .

**C.**  $\frac{1}{250}$ .

**D.**  $\frac{11}{250}$ .

**Câu 35:** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$  là  $S = (a; b) \cup (c; d)$  với  $a, b, c, d$

là các số thực. Khi đó  $a+b+c+d$  bằng

**A.** 3.

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 1.

**Lời giải**

Điều kiện phương trình  $-1 < x < 2$ . Xét bất phương trình

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x) &\Leftrightarrow -\log_3(x+1) > \log_3(2-x) \\
&\Leftrightarrow \log_3(2-x) + \log_3(x+1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \log_3[(2-x)(x+1)] < 0 \\
&\Leftrightarrow (2-x)(x+1) < 1 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + x + 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).
\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là  $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$ .

Vậy  $a+b+c+d=2$ .

**Câu 36:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x + 2021$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

A. 2.

**B. 6.**

C. 5.

D. 4.

**Lời giải**

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = mx^2 - 4mx + (3m+5)$ .

Xét hai trường hợp sau

Khi  $m=0$  thì  $y' = 5 > 0 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi  $m \neq 0$ .

Để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Nghĩa là

$$mx^2 - 4mx + (3m+5) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vậy có 6 giá trị thỏa mãn đề bài.

**Câu 37:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA=SB=CB=CA$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm  $I$  của cạnh  $AB$ . Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng

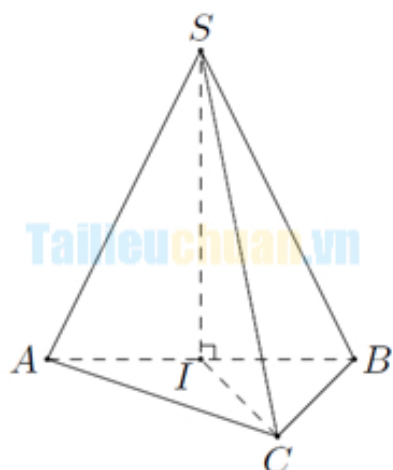
**A.  $45^\circ$ .**

B.  $30^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**



Nhận thấy rằng,  $\triangle SAB = \triangle CAB$  do đó hai đường trung tuyến tương ứng bằng nhau tức  $CI = SI$ .

Vậy tam giác  $SIC$  vuông tại  $I$  và có  $CI = SI$  nên đây là tam giác vuông cân.

Do đó  $\angle SCI = 45^\circ$  đây cũng chính là góc giữa  $SC$  và  $(ABC)$ .

**Câu 38:** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-m^2}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $m > 4$ .

B.  $3 < m \leq 4$ .

C.  $m \leq -2$ .

**D.  $-2 < m \leq 3$ .**

**Lời giải**

Ta có  $y' = \frac{-m^2-1}{(x-m^2)^2} < 0$  với mọi  $x \in [-3;-2]$ .

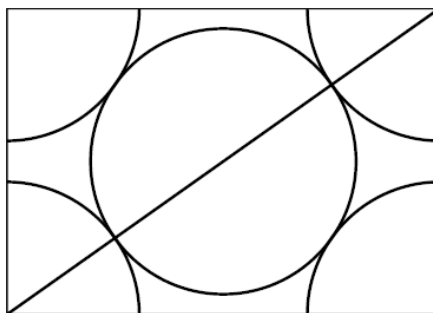
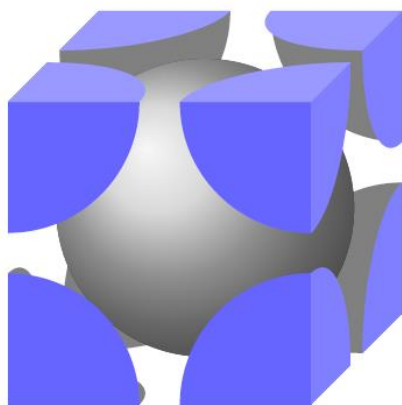
Do  $m^2 \notin [-3;-2]$  nên hàm số xác định và liên tục trên  $[-3;-2]$ .

Suy ra hàm số nghịch biến trên  $[-3;-2]$ .

Do đó giá trị nhỏ nhất của  $y$  đạt tại  $x = -2$ .

$$\text{Xét } y(-2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{-2-m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0.$$

**Câu 39:** Crôm ( $Cr$ ) có cấu trúc tinh thể lập phương tâm khối, mỗi nguyên tử  $Cr$  có hình dạng cầu với bán kính  $R$ . Một ô cơ sở của mạng tinh thể  $Cr$  là một hình lập phương có cạnh bằng  $a$ , chứa một nguyên tử  $Cr$  ở chính giữa và mỗi góc chứa  $\frac{1}{8}$  nguyên tử  $Cr$  khác (Hình a), (Hình b mô tả thiết diện của ô cơ sở nói trên với mặt chéo của nó).



Hình a Hình b

Độ đặc khít của  $Cr$  trong một ô cơ sở là tỉ lệ % thể tích mà  $Cr$  chiếm chỗ trong ô cơ sở đó. Tỉ lệ lỗ trống trong một ô cơ sở là

**A. 32%.**

B. 46%.

C. 18%.

D. 54%.

**Lời giải**

Độ dài đường chéo của ô cơ sở là  $4R$ . Gọi cạnh của ô cơ sở là  $a$ , ta có  $3a^2 = (4R)^2 \Leftrightarrow a = \frac{4R}{\sqrt{3}}$ .

Thể tích của ô cơ sở là  $V = a^3 = \frac{64R^3}{3\sqrt{3}}$ .

Thể tích  $Cr$  chiếm chỗ trong ô cơ sở là  $V_1 = 2V_{Cr} = \frac{8\pi R^3}{3}$ .

Độ đặc khít của  $Cr$  là  $\frac{V_1}{V} \cdot 100\% \approx 68\%$  nên tỉ lệ lỗ trống là 32%.

**Câu 40:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SD$ . Khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SAC)$  bằng

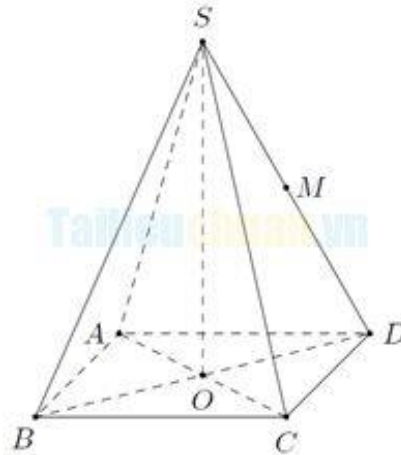
A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

B.  $\frac{a}{4}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

D.  $\frac{a}{2}$ .

**Lời giải**



Do  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều nên  $ABCD$  là hình vuông.

Gọi  $O$  là tâm của hình vuông ta có  $SO \perp (ABCD)$ .

Ta thấy rằng  $DO \perp AC$  và  $SO \perp OD$  nên  $DO \perp (SAC)$  do đó  $d(D; (SAC)) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Mà  $M$  là trung điểm của  $SD$  nên

$$d(M; (SAC)) = \frac{1}{2} d(D; (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

**Câu 41:** Cho hai số thực  $a, b$  lớn hơn 1 thỏa mãn  $a+b=2020$ . Gọi  $m, n$  là hai nghiệm của phương trình  $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 2 = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $mn+4a$  là

A. 8076.

B. 8077.

C. 8078.

D. 8079.

**Lời giải**

Ta xét phương trình

$$(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} \log_a^2 x - 2\log_a x - 2 = 0. \quad (1)$$

Do  $a, b > 1$  nên  $\frac{1}{\log_a b} > 0$  nên (1) luôn có hai nghiệm.

Với  $m, n$  là nghiệm của phương trình, ta có

$$\log_a m + \log_a n = 2\log_a b \Leftrightarrow \log_a(mn) = \log_a b^2 \Leftrightarrow mn = b^2.$$

$$\text{Xét } mn + 4a = b^2 + 4a = b^2 + 4(2020 - b) = b^2 - 4b + 8080 = (b - 2)^2 + 8076 \geq 8076.$$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của  $mn + 4a$  là 8076. Dấu bằng xảy ra khi  $a = 2018$  và  $b = 2$ .

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x > 2 \\ 2x+1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$  Tính tích phân

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \cdot f(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx + 2 \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} \cdot f(1+e^{2x}) dx.$$

A. 79.

B. 78.

C. 77.

D. 76.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow t dt = x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ và } x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Đặt } u = 1 + e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = e^{2x} dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = \ln 2 \Rightarrow u = 5 \text{ và } x = \ln 3 \Rightarrow u = 10.$$

Như vậy

$$I = \int_1^2 f(t) dt + \int_5^{10} f(u) du = \int_1^2 (2t+1) dt + \int_5^{10} 2u du = 79.$$

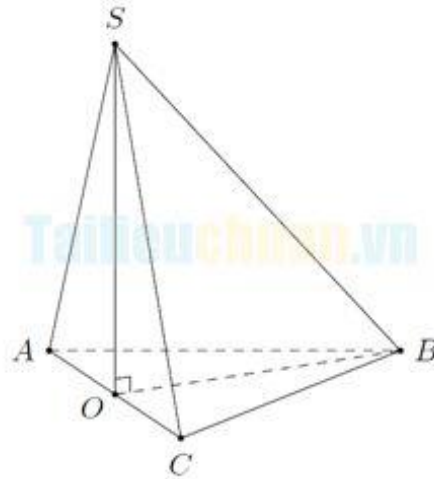
**Câu 43:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $SAB$  là tam giác đều cạnh  $a\sqrt{3}$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ , đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  góc  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

**A.**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .

**B.**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**C.**  $2a^3\sqrt{6}$ .

**D.**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .

**Lời giải**

Gọi  $O$  là trung điểm của  $AC$ , vì  $BA = BC$  nên  $BO \perp AC$ .

Mà  $(SAC) \perp (SAB)$  nên  $BO \perp (SAC)$ .

Khi đó, các tam giác vuông  $BOA$ ,  $BOC$ ,  $BOS$  bằng nhau nên  $OA = OC = OS$ .

Suy ra tam giác  $SAC$  vuông tại  $S$ .

Vì  $(SAC)$  vuông góc với  $(ABC)$  và góc giữa  $SC$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$  nên góc  $SCA = 60^\circ$ .

$$\text{Như vậy } OS = OA = OC = \frac{AC}{2} = \frac{SA}{2 \sin SCA} = a.$$

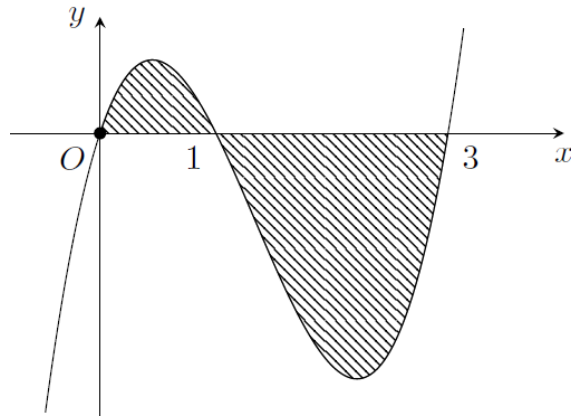
$$\text{Suy ra } BO = \sqrt{SB^2 - OS^2} = a\sqrt{2}.$$

Diện tích  $\triangle SAC$  tính bằng công thức

$$S = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AC \sin SAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot 2a \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

$$\text{Như vậy } V = \frac{1}{3} \cdot BO \cdot S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{6}}{6} a^3.$$

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và trục hoành đồng thời có diện tích  $S = a$ . Biết rằng  $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b$  và  $f(3) = c$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .



**A.**  $I = a - b + c$ .

**B.**  $I = -a + b - c$ .

**C.**  $I = -a + b + c$ .

**D.**  $I = a - b - c$ .

**Lời giải**

Ta có

$$S = a \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - f(3) = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần với  $u = x+1$  và  $dv = f'(x)dx$ , ta được

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b \Leftrightarrow (x+1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = b$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - I = b \Leftrightarrow a + c - I = b \Leftrightarrow I = a - b + c$$

**Câu 45:** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1;2;3)$  và cắt các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (khác gốc toạ độ  $O$ ) sao cho  $M$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình là

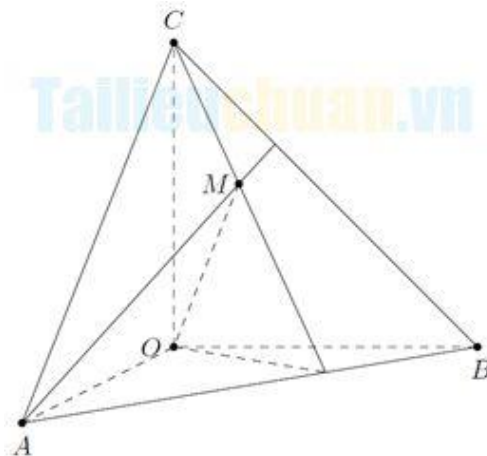
**A.**  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$ .

**B.**  $3x + 2y + z - 10 = 0$ .

**C.**  $x + 2y + 3z - 14 = 0$ .

**D.**  $x + 2y + 3z + 14 = 0$ .

**Lời giải**



Đầu tiên, ta sẽ chứng minh  $M$  cũng là hình chiếu từ điểm  $O$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Thật vậy, do  $CM \perp AB$  và  $OC \perp AB$  nên  $(OCM) \perp AB$  suy ra  $(OCM) \perp (ABC)$ .

Tương tự,  $(OAM) \perp (ABC)$ . Hai mặt phẳng  $(OCM)$ ,  $(OAM)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  nên giao tuyến của chúng là  $OM \perp (ABC)$ .

Do đó, mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua  $M(1;2;3)$  và nhận  $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$  làm vector pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  có dạng

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

**Câu 46:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$  và điểm  $M(0;1;0)$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và cắt  $(S)$  theo đường tròn  $(C)$  có chu vi nhỏ nhất. Gọi  $N(x_0; y_0; z_0)$  là điểm thuộc đường tròn  $(C)$  sao cho  $ON = \sqrt{6}$ . Tính  $y_0$ .

A. 3.

B. 1.

**C. 2.**

D. 4.

**Lời giải**

Nhận thấy rằng, mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1;2;1)$ , bán kính  $R = \sqrt{6}$  và điểm  $M$  là điểm nằm trong mặt cầu này.

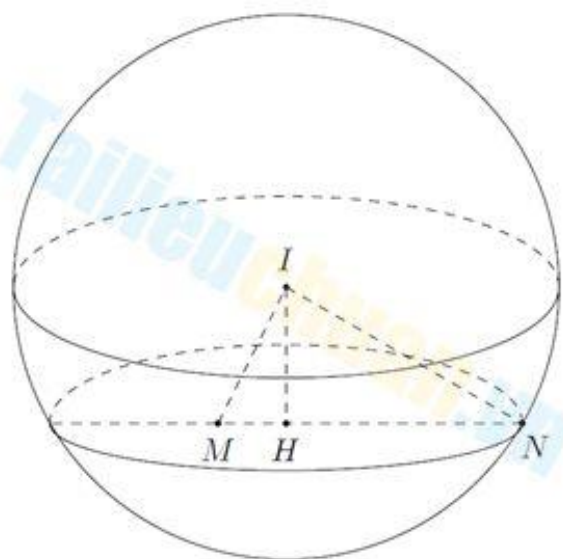
Gọi  $r$  là bán kính hình tròn  $(C)$  và  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $(P)$ . Dễ thấy rằng  $H$  là tâm đường tròn  $(C)$ . Khi đó, ta có

$$r = \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IM^2}.$$

Vậy để  $(C)$  có chu vi nhỏ nhất thì  $r$  nhỏ nhất khi đó  $H$  trùng với  $M$ .

Khi đó mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M(0;1;0)$  và nhận vector  $\overrightarrow{IM} = (1;-1;-1)$  làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng  $(P)$  có dạng

$$x - (y-1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z = -1.$$



Điểm  $N$  vừa thuộc mặt cầu  $(S)$  vừa thuộc mặt phẳng  $(P)$  và thỏa  $ON = \sqrt{6}$  nên tọa độ của  $N$  thỏa hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = -6 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1. \end{cases}$$

Lấy phương trình đầu trừ hai lần phương trình thứ ba ta được  $-2y_0 = -4 \Leftrightarrow y_0 = 2$ .

**Câu 47:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10;10]$  để phương trình

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$ ?

**A. 10.**

**B. 9.**

**C. 11.**

**D. 8.**

**Lời giải**

Ta có

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m)$$

$$\Leftrightarrow \frac{7^{x^2-2x}}{7^{3^m}} + \frac{2^{x^2-2x}}{2^{3^m}} = 7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m$$

$$\Leftrightarrow 7^{x^2-2x-3^m} + 2^{x^2-2x-3^m} = 7(x^2 - 2x - 3^m) + 2. (*)$$

Đặt  $x^2 - 2x - 3^m = a$ .

Khi đó  $(*)$  trở thành  $7^a + 2^a = 7a + 2 \Leftrightarrow 7^a + 2^a - 7a - 2 = 0$ .

Xét hàm số  $f(a) = 7^a + 2^a - 7a - 2$ .

Ta có  $f'(a) = 7^a \ln 7 + 2^a \ln 2 - 7$ .

Ta có  $f''(a) = 7^a (\ln 7)^2 + 2^a (\ln 2)^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Suy ra  $f'(a)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , do đó  $f'(a) = 0$  có tối đa 1 nghiệm.

Mà  $f'(0) = \ln 7 + \ln 2 - 7 < 0$  và  $f'(1) = 7 \ln 7 + 2 \ln 2 - 7 > 0$ .

Suy ra  $f'(a) = 0$  có nghiệm duy nhất  $a_0 \in (0; 1)$ .

Suy ra  $f(a) = 0$  có tối đa 2 nghiệm.

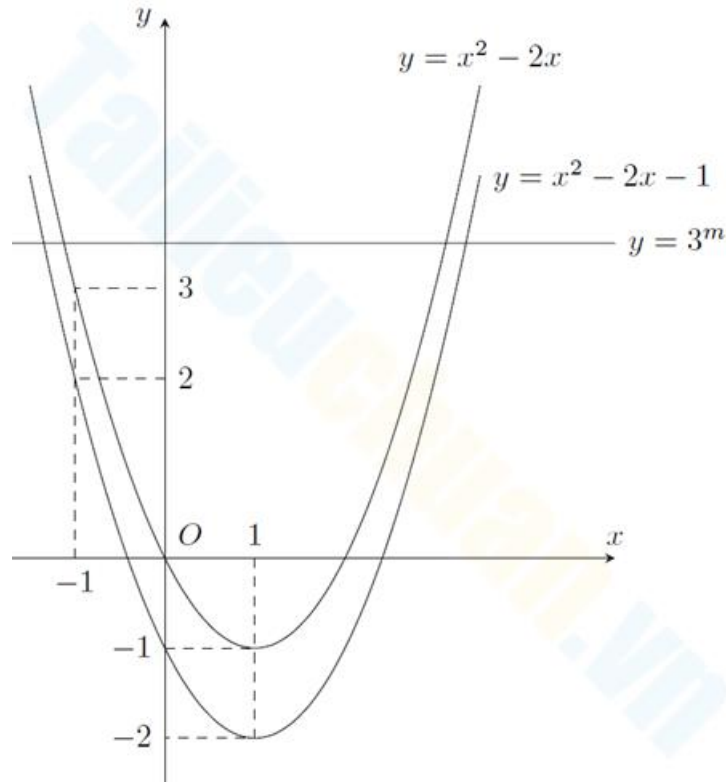
Bảng biến thiên của  $y = f(a)$

|         |           |     |          |     |           |
|---------|-----------|-----|----------|-----|-----------|
| $a$     | $-\infty$ | $0$ | $a_0$    | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(a)$ |           |     | $-$      | $0$ | $+$       |
| $f(a)$  | $+\infty$ | $0$ | $f(a_0)$ | $0$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $f(a) = 0$  có đúng 2 nghiệm  $a = 0$  và  $a = 1$ .

$$\text{Từ đó } \begin{cases} a = x^2 - 2x - 3^m = 0 \\ a = x^2 - 2x - 3^m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m = x^2 - 2x \\ 3^m = x^2 - 2x - 1 \end{cases} (**)$$

Để  $(*)$  có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$  thì  $(**)$  có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn  $-1$  hay tương đương với đồ thị hàm số  $y = 3^m$  cắt đồ thị các hàm số  $y = x^2 - 2x$  và  $y = x^2 - 2x - 1$  tại 4 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn  $-1$ .



Dựa vào đồ thị ta có  $3^m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 1$ .

Suy ra  $m \in \{1; 2; \dots; 10\}$ .

Vậy có 10 giá trị của  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 48:** Cho lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = \sqrt{6}$ ,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $A'C = 3$  và mặt phẳng  $(AA'C'C)$  vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng  $(AA'C'C)$  và  $(AA'B'B)$  tạo với nhau góc  $\alpha$  có  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Thể tích  $V$  của khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  là

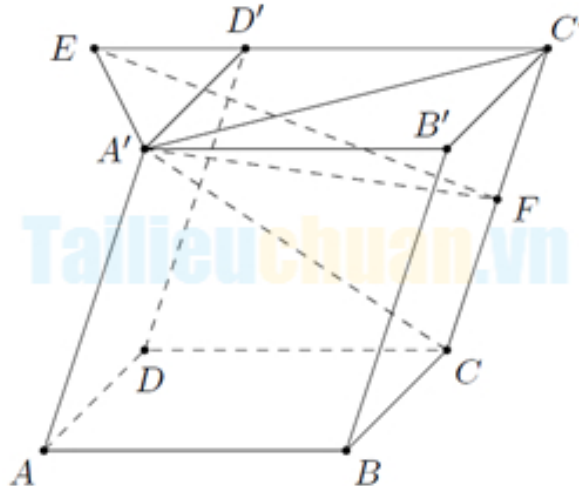
A. 12.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Lời giải



Dễ thấy  $A'C' = \sqrt{A'D'^2 + A'B'^2} = 3 = A'C$  cho nên tam giác  $A'CC'$  cân tại  $A'$ , do đó  $A'F \perp CC'$ , với  $F$  là trung điểm của  $CC'$ . Gọi  $E$  là điểm thỏa mãn  $\overline{CE} = \frac{3}{2} \overline{CD'}$ .

Khi đó  $C'E = \frac{3\sqrt{6}}{2}$  và  $D'E = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , suy ra  $A'E^2 + A'C^2 = A'D'^2 + D'E^2 + A'C'^2 = \frac{27}{2} = C'E^2$

hay tam giác  $EA'C'$  vuông tại  $A'$ . Lại có mặt  $(AA'C'C)$  vuông góc với đáy nên  $EA' \perp (AA'C'C)$ , suy ra  $EA' \perp A'F$  và  $CC' \perp (EA'F)$ , do đó

$$\angle EFA' = (\angle A'F, EF) = ((AA'C'A), (CDD'C')) = ((AA'C'C), (AA'B'B)) = \alpha$$

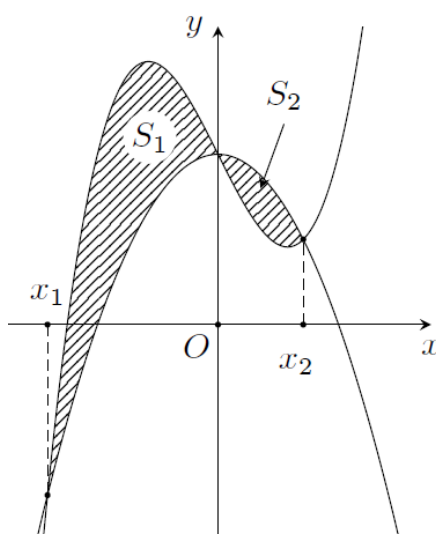
Ta có  $EA' = \sqrt{D'E^2 + A'D'^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , suy ra  $A'F = A'E \cot \alpha = 2\sqrt{2}$  và

$CC' = 2\sqrt{A'C'^2 - A'F^2} = 2$ , do đó chiều cao của khối lăng trụ là

$$h = d(C, (A'B'C'D')) = d(C, A'C') = \frac{A'F \cdot CC'}{A'C'} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy  $V = AB \cdot AD \cdot h = 8$ .

**Câu 49:** Cho đường cong  $(C): y = x^3 + kx + 2$  và parabol  $P: y = -x^2 + 2$  tạo thành hai miền phẳng có diện tích  $S_1, S_2$  như hình vẽ.



Biết rằng  $S_1 = \frac{8}{3}$ , giá trị của  $S_2$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{1}{4}$ .

C.  $\frac{3}{4}$ .

**D.  $\frac{5}{12}$ .**

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $P$

$$x^3 + kx + 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x(x^2 + x + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + k = 0. \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt nên phương trình  $x^2 + x + k = 0$  có hai nghiệm phân

biệt  $x_1, x_2$  khác 0 và thỏa mãn  $x_1 < 0 < x_2$ . Do đó ta có  $\begin{cases} k < 0 \\ x_2 = -1 - x_1 \\ k = -x_1^2 - x_1. \end{cases}$

Trên đoạn  $[x_1; 0]$ ,  $x^3 + kx + 2 \geq -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + kx \geq 0$ . Theo bài ra, diện tích  $S_1 = \frac{8}{3}$  nên

$$\int_{x_1}^0 |x^3 + x^2 + kx| dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + kx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^0 = \frac{8}{3}$$

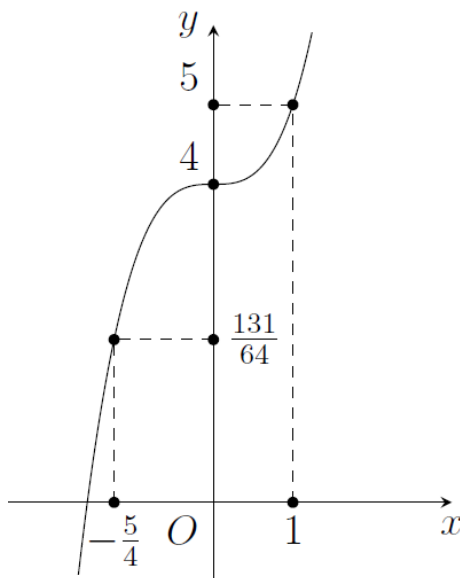
$$\Leftrightarrow -(3x_1^4 + 4x_1^3 + 6kx_1^2) = 32 \Leftrightarrow 3x_1^4 + 4x_1^3 + 6(-x_1^2 - x_1)x_1^2 = -32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 2x_1^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(3x_1^3 - 4x_1^2 + 8x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ (vì } x_1 < 0)$$

Với  $x_1 = -2 \Rightarrow k = -2, x_2 = 1$  và  $x^3 + x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 1]$ , ta có

$$S_2 = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

**Câu 50:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có  $f'(1) = 3$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  và  $m \in [-10; 10]$  để phương trình  $\ln \frac{f(x)}{3mx^2} + x[f(x) - 3mx] = 3mx^3 - f(x)$  có hai nghiệm dương phân biệt?

**A.** 18.

**B.** 9.

**C.** 10.

**D.** 15.

**Lời giải**

Do yêu cầu bài toán là phương trình có hai nghiệm dương phân biệt nên ta chỉ xét  $x > 0$ .

Giả sử  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Vì đồ thị đi qua các điểm  $A(-\frac{5}{4}; \frac{131}{64})$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(1; 5)$

$$\text{nên ta có } \begin{cases} -\frac{125}{64}a + \frac{25}{16}b - \frac{5}{4}c + d = \frac{131}{64} \\ d = 4 \\ a + b + c + d = 5. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f'(1) = 3 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 4$ , suy ra  $f(x) = x^3 + 4$ .

Điều kiện  $\frac{f(x)}{3mx^2} > 0 \Rightarrow m > 0$ .

$$\ln \frac{f(x)}{3mx^2} + x[f(x) - 3mx] = 3mx^3 - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) - \ln(3mx^2) + x[f(x) - 3mx^2] + f(x) - 3mx^2 = 0. \quad (3)$$

Nếu  $f(x) > mx^2$  thì  $\log f(x) > \log(mx^2)$  và  $xf(x) > x(mx^2), \forall x > 0 \Rightarrow (3)$  vô nghiệm.

Tương tự nếu  $f(x) < mx^2$  thì phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó  $f(x) = 3mx^2 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 3mx^2 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 4}{3x^2} = m$ , vì  $x > 0$ .

Xét hàm số  $g(x) = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$  với  $x > 0$ .

$$g'(x) = \frac{3x^4 - 24x}{9x^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vì  $x > 0$  nên ta nhận  $x = 2$ . Ta có bảng biến thiên

|      |           |       |           |
|------|-----------|-------|-----------|
| $x$  | 0         | 2     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - 0 + |           |
| $y$  | $+\infty$ | 1     | $+\infty$ |

Để phương trình  $\frac{x^3 + 4}{3x^2} = m$  có hai nghiệm dương phân biệt thì  $m > 1$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [-10; 10]$  nên  $m \in \{2; 3; \dots; 10\}$ . Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số  $m$  thoả yêu cầu bài toán.

**HẾT**