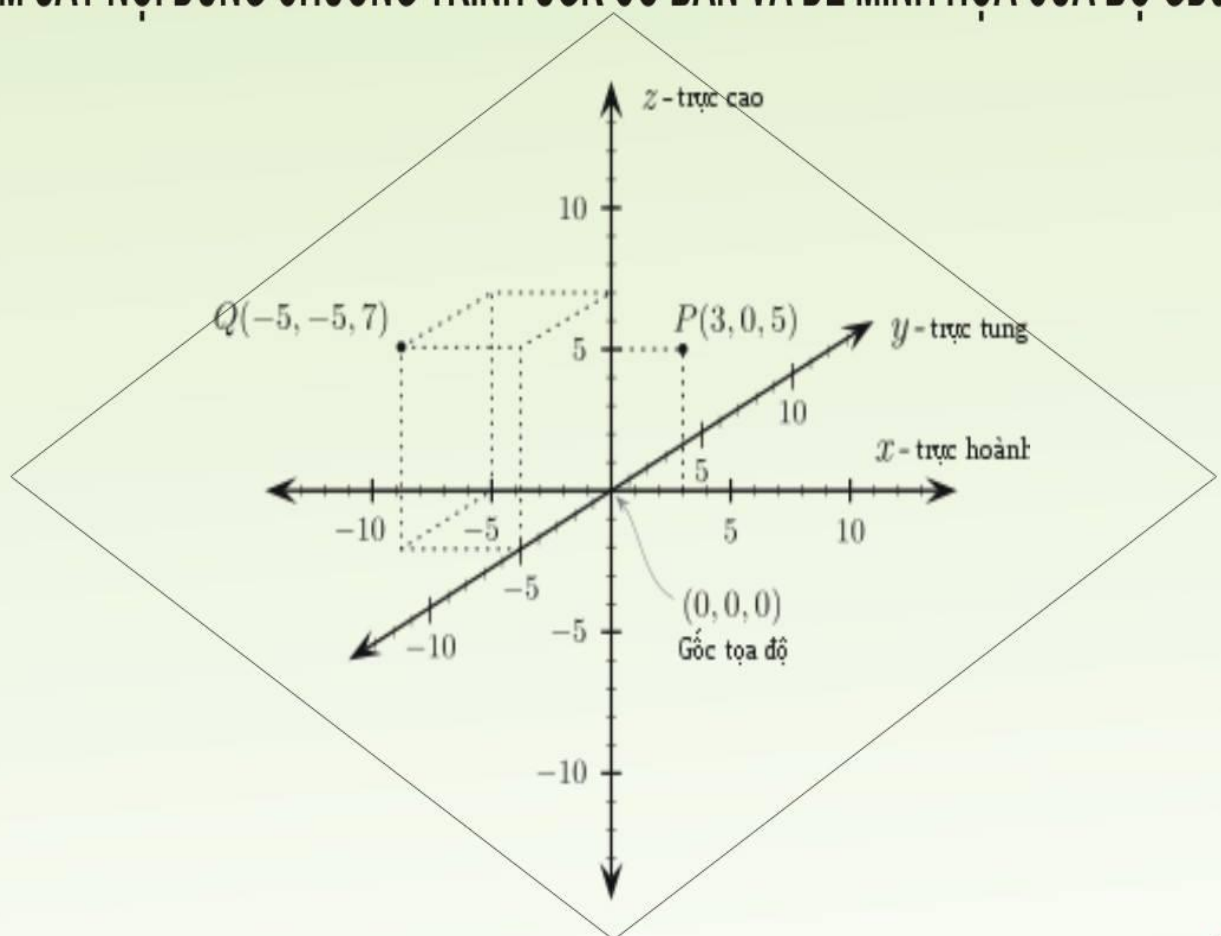


TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

TRONG KHÔNG GIAN

(BÁM SÁT NỘI DUNG CHƯƠNG TRÌNH SGK CƠ BẢN VÀ ĐỀ MINH HỌA CỦA BỘ GD&ĐT)



THÁNG 1 NĂM 2017

Lời nói đầu

Chào các Em học sinh thân mến!

Bắt đầu từ năm 2017, kỳ thi THPT Quốc gia sẽ áp dụng hình thức trắc nghiệm đối với môn Toán. Đó là một điều mới mẻ đối với tất cả các em cũng như các Thầy giáo, Cô giáo. Khi biết thông tin về sự đổi mới này, bản thân các em học sinh rất bối rối vì bị bất ngờ bởi các em ít được tiếp xúc với hình thức trắc nghiệm môn Toán từ trước đến nay. Chính vì vậy các Thầy giáo, Cô giáo đã không quản vất vả mang đến cho các em nguồn học liệu tốt nhất, cô đọng nhất để các em được rèn luyện trước kỳ thi sắp tới!

Các Thầy, Cô xin gửi tới các em cuốn:

“PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN”.

Nội dung cuốn tài liệu bám sát nội dung kiến thức trong cấu trúc ĐỀ MINH HỌA của Bộ GD&ĐT và SGK Hình học 12 Cơ bản. Tài liệu được chia thành 5 phần:

Phần 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

Phần 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN.

Phần 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.

Phần 4. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG.

Phần 5. GIẢI TOÁN HÌNH KG BẰNG PP TỌA ĐỘ.

Thầy hy vọng rằng cuốn tài liệu sẽ giúp các em chuẩn bị thật tốt cho kỳ thi THPT Quốc gia. Cuối cùng xin chúc các em đạt điểm cao trong kỳ thi sắp tới!

Mặc dù đã hết sức cố gắng và tâm huyết để có tập tài liệu này, song trong quá trình biên soạn chắc chắn không tránh khỏi sai sót nhất định. Rất mong sự thông cảm của bạn đọc gần xa góp ý để chúng tôi có những sửa chữa kịp thời và hoàn thiện tài liệu theo email mr.nguyenquocthinh@gmail.com !

Trong cuốn tài liệu có sử dụng tư liệu của nhiều tác giả. Nhưng do tài liệu được phát hành với mục đích phi lợi nhuận nên kính mong các thầy cô lượng thứ!

Nhóm tác giả:

1. Thầy Nguyễn Quốc Thịnh – THPT Trần Tất Văn, An Lão, Hải Phòng.
2. Thầy Lê Văn Định – TT GDNN GDTX Thanh Oai, Hà Nội.
3. Thầy Nguyễn Đăng Tuấn – TT GDNN GDTX Phú Lộc, Thừa Thiên Huế.
4. Thầy Đoàn Trúc Danh – Tân An, Long An.
5. Thầy Đặng Công Vinh Bửu – THPT Nguyễn Hữu Cầu, TP Hồ Chí Minh.
6. Thầy Ngô Nguyễn Anh Vũ – Đà Nẵng.
7. Thầy Trần Bá Hải – THPT Quỳnh Hợp 1, Nghệ An.
8. Thầy Lưu Chí Tài – THPT Marie Curie, Hải Phòng.
9. Cô Nguyễn Thảo Nguyên.
10. Thầy Nguyễn Hoàng Kim Sang – THPT Thanh Bình, Tân Phú, Đồng Nai.
11. Cô Nguyễn Ngân Lam – THPT Trần Hưng Đạo, Hải Phòng.

Mùa xuân, tháng 1 năm 2017.

Chương III: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

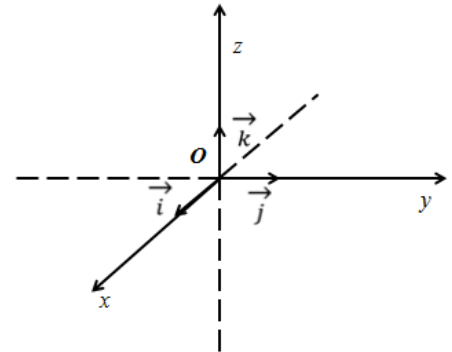
PHẦN 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN:

Hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các *véc tơ đơn vị* trên các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$. Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*. Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng tọa độ*.

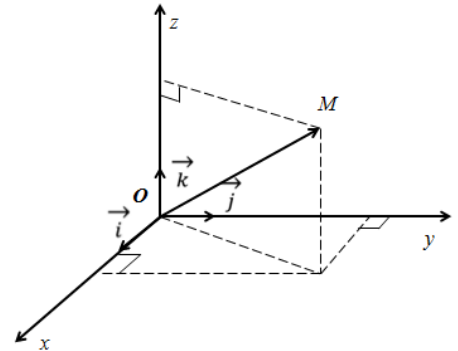
Không gian gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ được gọi là *không gian $Oxyz$* .



2. TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM:

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tùy ý.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ và gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là *tọa độ của điểm M* đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ đã cho. Như vậy tương ứng với 1 – 1 giữa mỗi điểm M trong không gian với bộ ba số $(x; y; z)$ gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước. Ta viết: $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$.



3. III. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VÉCTƠ:

Trong không gian $Oxyz$ cho véctơ $\vec{a}$ với $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Khi đó bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ được gọi là *tọa độ của véctơ $\vec{a}$* đối với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước. Ta viết: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

4. IV. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VÉCTƠ:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và một số thực k . Khi đó ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

Chú ý.

$$1. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$2. \vec{0} = (0; 0; 0).$$

3. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\neq \vec{0}$) cùng phương $\Leftrightarrow$ có một số thực k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \\ b_3 = ka_3 \end{cases}$$

4. Nếu $A = (a_1; a_2; a_3), B = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$.

5. V. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG:

1. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

2. Độ dài của một vectơ: Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, ta có $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3. Khoảng cách giữa hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$ và $B = (x_B; y_B; z_B)$ là

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

4. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$$\text{Ta có: } \cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad \text{và } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

6. VI. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU:

Trong không gian $Oxyz$ mặt cầu tâm $I = (a; b; c)$ bán kính R có phương trình là:
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = R^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I = (A; B; C)$ và có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm, một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thỏa mãn một số điều kiện cho trước, tọa độ các điểm đặc biệt của tam giác, tứ diện.

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa có liên quan đến vectơ: tọa độ vectơ, độ dài vectơ, biết phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng, biết tính tổng, hiệu, tích vectơ với một số, biết tính các tọa độ trọng tâm của một tam giác, trung điểm đoạn thẳng ...

Một số công thức cần nhớ:

Xét tam giác ABC ta có các điểm đặc biệt sau:

$$G \text{ là trọng tâm của } \Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

$$H \text{ là trực tâm của } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$A' \text{ là chân đường cao hạ từ đỉnh } A \text{ của } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$D \text{ là chân đường phân giác trong của góc } A \text{ của } \Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$E \text{ là chân đường phân giác ngoài của góc } A \text{ của } \Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{EC}$$

Xét tứ diện $ABCD$ ta có các điểm đặc biệt sau:

$$G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

$$H \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ trên } (BCD) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \text{ đồng phẳng.} \end{cases}$$

- VD 1.** Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là
A. $(-6; 8; 4)$.. **B.** $(6; 8; 4)$.. **C.** $(3; 4; 2)$.. **D.** $(-3; 4; 2)$..

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa $\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$ nên tọa độ của $\vec{a} = (-6; 8; 4)$

Chọn đáp án **A.**

- VD 2.** Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a} = (5; 7; 2)$. Tọa độ của vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là
A. $(5; 7; 2)$.. **B.** $(-5; -7; -2)$.. **C.** $(2; 7; 5)$.. **D.** $(-2; -7; -5)$..

Hướng dẫn giải

Vectơ $\vec{a} = (5; 7; 2)$ có vectơ đối là $-\vec{a} = -(5; 7; 2) = (-5; -7; -2)$.

Chọn đáp án **B.**

- VD 3.** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(5; 7; 2), B(3; 0; 4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là
A. $\overrightarrow{AB} = (-2; -7; 2)$.. **B.** $\overrightarrow{AB} = (2; 7; 2)$.. **C.** $\overrightarrow{AB} = (8; 7; 6)$.. **D.** $\overrightarrow{AB} = (2; 7; -2)$..

Hướng dẫn giải

Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (3-5; 0-7; 4-2) = (-2; -7; 2)$

Chọn đáp án **A**.

VD 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (5; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 4)$, $\vec{c} = (-6; 1; -1)$. Tọa độ của vectơ: $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ là.

A. $(3; 22; -3)$. **B.** $(3; 22; 3)$. **C.** $(-3; 22; -3)$. **D.** $(3; -22; 3)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3\vec{a} = 3(5; 7; 2) = (15; 21; 6) \\ -2\vec{b} = -2(3; 0; 4) = (-6; 0; -8) \\ \vec{c} = (-6; 1; -1) \end{cases}$$

Vậy $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (15-6-6; 21+0+1; 6-8-1) = (3; 22; -3)$. Chọn đáp án **A**.

VD 5. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác là

A. $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **C.** $G\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **D.** $G(4; -1; -1)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức xác định tọa độ trọng tâm tam giác ta có tọa độ trọng tâm G cần tìm là

$$G\left(\frac{1+2+1}{3}; \frac{0+1-2}{3}; \frac{-2-1+2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right),$$

Chọn đáp án **B**.

VD 6. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Xác định tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(0; -3; 1)$. **B.** $D(0; 3; 1)$. **C.** $D(3; 0; 1)$. **D.** $D(0; -3; -1)$.

Hướng dẫn giải

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 1), \text{ gọi } D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (1-x; -2-y; 2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1-x \\ 1=-2-y \\ 1=2-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**.

Dạng 2. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng.**Phương pháp giải:**

Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ.

Sử dụng các công thức tính khoảng cách

- VD 1.** Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a} = (5; 7; 2)$, $\vec{b} = (1; 3; -4)$, tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá trị bằng
- A.** 18.. **B.** 34 .. **C.** 14 .. **D.** 0 .

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích vô hướng của hai vectơ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 5 + 21 - 8 = 18$

Chọn đáp án **A.**

- VD 2.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$ Tính $\cos BAC$ bằng
- A.** $\frac{9}{2}$.. **B.** $\frac{-9}{2\sqrt{35}}$.. **C.** $\frac{9}{\sqrt{35}}$.. **D.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 5; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -1)$

$$\cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dots = \frac{9}{2\sqrt{35}} \text{ Chọn đáp án C.}$$

- VD 3.** Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Độ dài đường trung bình MN bằng
- A.** $\frac{21}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có tọa độ $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$, $N\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Vậy độ dài đường trung bình } MN = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án **D.**

Dạng 3. Lập phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính của mặt cầu đó**Phương pháp giải:**

- Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Dạng khai triển của phương trình mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}, a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

- VD 1.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(5; -3; 7)$ và có bán kính $R = 2$ là
- A.** $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 4$.. **B.** $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 2$.
- C.** $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2$.. **D.** $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

- VD 2.** Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu đi qua điểm $M(5; -2; 1)$ và có tâm $I(3; -3; 1)$ là
- A.** $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.. **B.** $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$.
- C.** $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{5}$.. **D.** $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{IM} = (2; 1; 0)$. Do đó $R = |\overrightarrow{IM}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Chọn **A**.

- VD 3.** Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu đường kính AB với $A(4; -3; 7), B(2; 1; 3)$ là
- A.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 3$.. **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.
- C.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.. **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 3$.

Hướng dẫn giải

Tâm của mặt cầu là trung điểm I của đoạn AB , $I(3; -1; 5)$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 4; -4) \Rightarrow AB = 6 \Rightarrow R = 3$$

Chọn **B**.

Dạng 4. Cho biết phương trình mặt cầu, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

Phương pháp giải:

- Biến đổi phương trình mặt cầu về dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Khi đó mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .
- Dạng khai triển của phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Khi đó mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- VD 1.** Trong không gian Oxyz, cho phương trình mặt cầu $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 3y + 15z - 2 = 0$. Tâm và bán kính của mặt cầu đó là

- A.** Tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.
- B.** Tâm $I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{49}{6}$.
- C.** Tâm $I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.
- D.** Tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{49}{6}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{6}.$$

Chọn **C**.

C. BÀI TẬP CÓ GIẢI**DẠNG ĐIỀN KHUYẾT**

Các câu hỏi trong phần này đều lấy trong không gian $Oxyz$

- Câu 1.** Cho điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$, tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$
- Câu 2.** Cho hai điểm A, B phân biệt, M là trung điểm AB . Tọa độ điểm $M = (\dots; \dots; \dots)$
- Câu 3.** Cho tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác. Khi đó tọa độ $G = (\dots; \dots; \dots)$
- Câu 4.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, điều kiện để hai vectơ cùng phương là ... một số thực k sao cho $\vec{u} = k\vec{v}$
- Câu 5.** Cho vectơ $\vec{a} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ khi đó tọa độ của $\vec{a} = (\dots; \dots; \dots)$
- Câu 6.** Hai vectơ vuông góc với nhau khi và chỉ khi ... của chúng bằng 0
- Câu 7.** Trong không gian một mặt cầu luôn được xác định khi biết hai yếu tố: ... mặt cầu và bán kính của nó.
- Câu 8.** Cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R , điểm $M(x; y; z)$ nằm trong mặt cầu khi và chỉ khi: $IM \dots R \Leftrightarrow \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2} \dots R$
- Câu 9.** Cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R , điểm $M(x; y; z)$ nằm trên mặt cầu khi và chỉ khi: $IM \dots \Leftrightarrow \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2} \dots R$
- Câu 10.** Cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R , điểm $M(x; y; z)$ nằm ngoài mặt cầu khi và chỉ khi: $IM \dots R \Leftrightarrow \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2} \dots R$
- Câu 11.**
- Câu 12.** Mặt cầu có đường kính là AB thì có bán kính là.....
 Đáp án: $R = \frac{AB}{2}$
- Câu 13.** Tâm của mặt cầu đi qua hai điểm A và B nằm trên.....
 Đáp án: mặt phẳng trung trực của đoạn AB
- Câu 14.** Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính là.....
 Đáp án: $R = d(I, (P))$
- Câu 15.** Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng d có bán kính là.....
 Đáp án: $R = d(I, d)$
- Câu 16.** Mặt cầu có tâm $I(a, b, c) \in Ox$ thì.....
 Đáp án: $b = c = 0$
- Câu 17.** Mặt cầu có tâm $I(a, b, c) \in (Oxy)$ thì.....
 Đáp án: $c = 0$

DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Dạng 1: Tìm tọa độ của một điểm, một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thỏa mãn một số điều kiện cho trước, tọa độ các điểm đặc biệt của tam giác, tứ diện.

Câu 1. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$ là

A. $\vec{d} = \left(11; \frac{1}{3}; 18\frac{1}{3}\right)$.. **B.** $\vec{d} = (11; 1; 18)$.. **C.** $\vec{d} = \left(11; -\frac{1}{3}; 18\frac{1}{3}\right)$.. **D.** $\vec{d} = \left(11; \frac{1}{3}; -18\frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$4\vec{a} = (8; -20; 12), -\frac{1}{3}\vec{b} = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), 3\vec{c} = (3; 21; 6) \Rightarrow \vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \frac{1}{3}; 18\frac{1}{3}\right)$$

Đáp án **A.**

Câu 2. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ là

A. $\vec{d} = (0; -27; 3)$.. **B.** $\vec{d} = (0; 27; 3)$.. **C.** $\vec{d} = (0; -27; -3)$.. **D.** $\vec{d} = (0; -2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\vec{a} = (2; -5; 3), -4\vec{b} = (0; -8; 4), -2\vec{c} = (-2; -14; -4) \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0; -27; 3)$$

Đáp án **A.**

Câu 3. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (-4; 1; -1)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ là

A. $\vec{d} = (4; -2; 3)$.. **B.** $\vec{d} = (-4; -2; 3)$.. **C.** $\vec{d} = (-4; 2; 3)$.. **D.** $\vec{d} = (4; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **B.**

Câu 4. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (-4; 1; -1)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$ là

A. $\vec{d} = (-9; -2; -1)$.. **B.** $\vec{d} = (-9; 2; -1)$.. **C.** $\vec{d} = (-9; 2; 1)$.. **D.** $\vec{d} = (-9; -2; 1)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **C.**

Câu 5. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ là

A. $\vec{d} = (1; 0; 4)$.. **B.** $\vec{d} = (-1; 0; -4)$.. **C.** $\vec{d} = (0; 1; 4)$.. **D.** $\vec{d} = (-1; 0; 4)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **D.**

Câu 6. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$ tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $\vec{d} = (-7; 0; -4)$.. **B.** $\vec{d} = (-7; 0; 4)$.. **C.** $\vec{d} = (7; 0; -4)$.. **D.** $\vec{d} = (7; 0; 4)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **C.**

- Câu 7.** Cho ba véctor $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$ tọa độ véctor $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$ là
- A.** $\vec{d} = (6; 12; -6)$.. **B.** $\vec{d} = (-6; 12; 6)$.. **C.** $\vec{d} = (6; 12; 6)$.. **D.** $\vec{d} = (1; 2; 1)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **C**.

- Câu 8.** Cho ba véctor $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$ tọa độ véctor $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ là
- A.** $\vec{d} = (19; -69; 17)$. **B.** $\vec{d} = \left(\frac{19}{2}; -\frac{69}{2}; 17\right)$.
- C.** $\vec{d} = \left(\frac{19}{2}; \frac{69}{2}; 17\right)$. **D.** $\vec{d} = \left(\frac{19}{2}; -\frac{69}{2}; -17\right)$.

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 1, 2 Đáp án **B**.

- Câu 9.** Cho ba véctor $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$ tọa độ véctor $\vec{d}$ thỏa mãn $2\vec{d} - 3\vec{a} = \vec{c}$ là
- A.** $\vec{d} = \left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.. **B.** $\vec{d} = \left(\frac{7}{2}; -3; \frac{5}{2}\right)$.. **C.** $\vec{d} = (7; 3; 5)$.. **D.** $\vec{d} = \left(\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$2\vec{d} - 3\vec{a} = \vec{c} \Rightarrow \vec{d} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} = \left(\frac{3}{2} + 2; 3; \frac{9}{2} - 2\right) = \left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$$

Đáp án **A**.

- Câu 10.** Cho ba véctor $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$ tọa độ véctor $\vec{d}$ thỏa mãn $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + 3\vec{d} = \vec{0}$ là
- A.** $\vec{d} = (0; -2; -3)$.. **B.** $\vec{d} = (0; 2; -3)$.. **C.** $\vec{d} = (0; -2; 3)$.. **D.** $\vec{d} = (0; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải

$$2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + 3\vec{d} = \vec{0} \Rightarrow \vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = (0; -2; -3)$$

Đáp án **A**.

- Câu 11.** Cho ba điểm $A = (1; -1; 1)$, $B = (0; 1; 2)$, $C = (1; 0; 1)$ tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
- A.** $G = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$.. **B.** $G = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$.. **C.** $G = \left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{4}{3}\right)$.. **D.** $G = \left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án **A**.

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC \text{ là: } \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = 0 \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 12. Cho vectơ $\vec{u} = (3; 2; -5)$ trong các vectơ sau vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$

- A.** $\vec{a} = (6; -4; 10)$.. **B.** $\vec{b} = \left(2; \frac{4}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.. **C.** $\vec{c} = (6; 4; 10)$.. **D.** $\vec{d} = (1; -4; 2)$.

Hướng dẫn giải

Để $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ cùng phương với $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ thì $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$

Thỏa mãn điều kiện Đáp án **B**

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ biết $A(1; 0; 2), B(-2; 1; 3), C(3; 2; 4), D(6; 9; -5)$. Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ là.

- A.** $G(-2; -3; -1)$.. **B.** $G(-2; -3; 1)$.. **C.** $G(2; 3; 1)$.. **D.** $G(2; 3; -1)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Trọng tâm tứ diện } ABCD \text{ là: } \begin{cases} x_G = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 2 \\ y_G = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = 3 \\ z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = 1 \end{cases}$$

Đáp án **C**.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Xác định tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- A.** $C(2; 2; 0)$. **B.** $C(2; 0; 2)$. **C.** $C(0; 2; 2)$. **D.** $C(2; 0; -2)$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Xác định tọa độ đỉnh B' của hình hộp

- A.** $B'(6; 5; -4)$. **B.** $B'(-4; 5; -6)$. **C.** $B'(4; -6; -5)$. **D.** $B'(4; 6; -5)$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Xác định tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A.** $A'(3; 5; -6)$. **B.** $A'(-3; -5; -6)$. **C.** $A'(-3; 5; -6)$. **D.** $A'(3; -5; -6)$.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Xác định tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

- A.** $D'(3; -4; -6)$. **B.** $D'(-3; 4; -6)$. **C.** $D'(3; 4; -6)$. **D.** $D'(3; 4; 6)$.

Hướng dẫn giải Câu 14 – 17

Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Gọi $C(x_C; y_C; z_C)$ ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0), \overrightarrow{BC} = (x_C - 2; y_C - 1; z_C - 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \\ z_C - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}$$

Vậy $C(2;0;2)$ **Câu 14 đáp án B.**

Gọi $B'(x_{B'}; y_{B'}; z_{B'})$ ta có $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'B'}$

$$\overrightarrow{CB} = (0;1;0), \overrightarrow{C'B'} = (x_{B'} - 4; y_{B'} - 5; z_{B'} + 5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} - 4 = 0 \\ y_{B'} - 5 = 1 \\ z_{B'} + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 4 \\ y_{B'} = 6 \\ z_{B'} = -5 \end{cases}$$

Vậy $B'(4;6;-5)$ **Câu 15 đáp án D.**

Gọi $A'(x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$ ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$

$$\overrightarrow{BA} = (-1;-1;-1), \overrightarrow{B'A'} = (x_{A'} - 4; y_{A'} - 6; z_{A'} + 5)$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 4 = -1 \\ y_{A'} - 6 = -1 \\ z_{A'} + 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = 5 \\ z_{A'} = -6 \end{cases}$$

Vậy $A'(3;5;-6)$ **Câu 16 đáp án A.**

Gọi $D'(x_{D'}; y_{D'}; z_{D'})$ ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$

$$\overrightarrow{CD} = (-1;-1;-1), \overrightarrow{C'D'} = (x_{D'} - 4; y_{D'} - 5; z_{D'} + 5)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} - 4 = -1 \\ y_{D'} - 5 = -1 \\ z_{D'} + 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = 3 \\ y_{D'} = 4 \\ z_{D'} = -6 \end{cases}$$

Vậy $D'(3;4;-6)$ **Câu 17 đáp án C**

Câu 18. Cho hai bộ ba điểm

(I): $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$ và (II): $M(1;1;1), N(-4;3;1), P(-9;5;1)$

Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Bộ ba điểm(I) thẳng hàng..

B. Bộ ba điểm(II) thẳng hàng.

C. Cả hai bộ ba điểm đều thẳng hàng..

D. Cả hai bộ ba điểm đều không thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1), \overrightarrow{AC} = (-1;-3;0)$ không cùng phương nên (I) không thẳng hàng

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-5;2;0); \overrightarrow{MP} = (-10;4;0) = -2\overrightarrow{MN}$ nên $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương hay (II) thẳng hàng

Đáp án **B.**

Dạng 2. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (3;0;-6), \vec{b} = (2;-4;0)$, xác định giá trị $\vec{a} \cdot \vec{b}$

A. 6 ..

B. 7 ..

C. 8 ..

D. 5 .

Hướng dẫn giải

$$\vec{a} = (3;0;-6), \vec{b} = (2;-4;0) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3.2 + 0.(-4) + (-6).0 = 6$$

Đáp án **A.**

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{c} = (1; -5; 2), \vec{d} = (4; 3; -5)$, xác định giá trị $\vec{c} \cdot \vec{d}$

A. 20.

B. -21.

C. 21.

D. -19.

Hướng dẫn giải

$$\vec{c} = (1; -5; 2), \vec{d} = (4; 3; -5) \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 1.4 + (-5).3 + 2.(-5) = -21$$

Đáp án B.

Câu 21. Cho điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 1; 0), C(3; 1; -1)$. Tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$.B. $M\left(\frac{5}{6}; 0; \frac{7}{6}\right)$.C. $M\left(-\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$.D. Không tồn tại M .**Hướng dẫn giải**

$$M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x; 0; z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (1-x; 1; 1-z); \overrightarrow{MB} = (-1-x; 1; -z); \overrightarrow{MC} = (3-x; 1; -1-z)$$

M cách đều 3 điểm A, B, C nên $MA = MB = MC$ hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-x)^2 + 1 + (1-z)^2 = (-1-x)^2 + 1 + (-z)^2 \\ (1-x)^2 + 1 + (1-z)^2 = (3-x)^2 + 1 + (-1-z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ z = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$ Đáp án A.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4; -1; 1), B(2; 1; 0)$. Khoảng cách giữa hai điểm A, B là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Đáp án A.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 3; 4), B(6; 0; 4)$. Khoảng cách giữa hai điểm A, B là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -3; 0) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Đáp án C.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1; -1; 1), B(1; 3; 1), C(4; 3; 1), D(4; -1; 1)$. Kết luận nào sau đây là đúng

A. $ABCD$ là một tứ diện..B. $ABCD$ là một hình bình hành.C. $ABCD$ là một hình thang..D. $ABCD$ là một hình chữ nhật.**Hướng dẫn giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (0; 4; 0); \overrightarrow{AD} = (3; 0; 0); \overrightarrow{CB} = (-3; 0; 0); \overrightarrow{CD} = (0; -4; 0)$$

Ta thấy $AB \perp AD, CB \perp CD; AB = CD, AD = CB$

Nên $ABCD$ là một hình chữ nhật. Đáp án D.

Dạng 3+4. Phương trình mặt cầu.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là

- A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

- Phương trình mặt cầu dưới dạng khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- Mặt cầu qua A, B, C, D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + d = -1 \\ -2b + d = -1 \\ -2c + d = -1 \\ -2a - 2b - 2c + d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

- Bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Chọn **A.**

Câu 26. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) là

- A.** 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{9}$

Hướng dẫn giải

- Bán kính bằng $d(I, (\alpha)) = 2$
- Chọn **A.**

Câu 27. Cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$, $D(2;2;1)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tọa độ là

- A.** $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **C.** $(3; 3; 3)$. **D.** $(3; -3; 3)$

Hướng dẫn giải

- Dùng dạng khai triển của phương trình mặt cầu
- Giải hệ phương trình tìm tâm $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$
- Chọn **B.**

Câu 28. Bán kính của mặt cầu tâm $I(3;3;-4)$ tiếp xúc với trục Oy bằng

- A.** 5. **B.** 4. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

- Hình chiếu vuông góc của I lên Oy là $H(0;3;0)$
- Bán kính bằng $IH = 5$
- Chọn **A**.

Câu 29. Mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là:

- A.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. **D.** $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Hướng dẫn giải

- Bán kính mặt cầu $d(I, (Oyz)) = 2$
- Chọn **A**.

Câu 30. Cho mặt cầu tâm $I(4;2;-2)$, bán kính r tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 12x - 5z - 19 = 0$. Bán kính r bằng

- A.** 39. **B.** 3. **C.** 13. **D.** $\frac{39}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

- $r = d(I, (P)) = 3$
- Chọn **B**

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ đường kính bằng 10 có phương trình là:

- A.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$. **B.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 100$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 100$.

Hướng dẫn giải

- Mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ đường kính bằng 10 nên có bán kính $R = 5$ có phương trình:
 $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

- Chọn đáp án **A**.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với giá trị nào của m thì phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-1)y + 4z + 5m = 0$ là phương trình mặt cầu?

- A.** $m \leq 1 \vee m \geq \frac{5}{2}$.. **B.** $1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.. **C.** $m \geq 3$.. **D.** $m < 1 \vee m > \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

- Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi

$$(-m)^2 + (m-1)^2 + 2^2 - 5m > 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}$$

- Chọn đáp án **D**.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	B	C	D	D	C	B	A	A	A	B	C	B	D	A	C	B	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32								
A	A	C	D	A	A	B	A	A	B	A	D								

DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1: Tìm tọa độ của một điểm, một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thỏa mãn một số điều kiện cho trước, tọa độ các điểm đặc biệt của tam giác, tứ diện.

Bài 1. Cho vectơ $\vec{u}$ có điểm đầu là $(1; -1; 3)$ và điểm cuối là $(-2; 3; 5)$. Trong các vectơ sau vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$: $\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{u} = (-3; 4; 2)$; $\vec{a} = (-6; 8; 4)$; $\vec{b} = (0; 4; 2)$; $\vec{c} = (1; -4; 2)$

Vậy chỉ có $\vec{a}$ cùng phương $\vec{u}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (5; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 4)$, $\vec{c} = (-6; 1; -1)$. Tìm tọa độ và độ dài vectơ $\vec{m}, \vec{n}$ biết $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{i}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \dots = (3; 22; 3) \Rightarrow |\vec{m}| = \sqrt{502}$

$\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{i} = \dots = (16; 39; 16) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{2033}$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{AM} = 2\vec{AB} + 3\vec{BC} - \vec{OM}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y; z)$

Ta có $\vec{AB} = (1; 1; 1)$; $\vec{BC} = (-1; -3; 3)$; $\vec{OM} = (x; y; z)$; $\vec{AM} = (x - 1; y; z + 2)$

Và $2\vec{AB} + 3\vec{BC} - \vec{OM} = (-1 - x; -7 - y; 11 - z)$

$$\text{Nên } \vec{AM} = 2\vec{AB} + 3\vec{BC} - \vec{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 - x \\ y = -7 - y \\ z + 2 = 11 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{7}{2} \\ z = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy $M\left(0; -\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$, $C(2; 0; 1)$

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ hình chiếu B' của B trên AC .

c) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{9}{4}; -3; 0\right), \overrightarrow{AC} = (4; -3; 0)$. Vì $\frac{4}{9} \neq \frac{-3}{-3}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi $B' = (x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (4; -3; 0), \overrightarrow{AB'} = (x+2; y-3; z-1), \overrightarrow{BB'} = \left(x - \frac{1}{4}; y; z-1\right)$

Để B' là hình chiếu của B trên AC thì $\begin{cases} \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \\ \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = t\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 4t \\ y-3 = -3t \\ z-1 = 0 \\ 4\left(x - \frac{1}{4}\right) - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{18}{25} \\ x = \frac{22}{25} \\ y = \frac{21}{25} \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $B' \left(\frac{22}{25}; \frac{21}{25}; 1\right)$.

c) Ta có $AB = \frac{15}{4}, AC = 5, \Rightarrow k = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, gọi $D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong góc

$$A, \text{ ta có: } \overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow x = \frac{x_B + \frac{3}{4}x_C}{1 + \frac{3}{4}} = 1, y = \frac{y_B + \frac{3}{4}y_C}{1 + \frac{3}{4}} = 0, z = \frac{z_B + \frac{3}{4}z_C}{1 + \frac{3}{4}} = 1$$

Vậy $D(1; 0; 1)$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Gọi $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{v} = 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{w} = 2\vec{c} - 3\vec{a}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Muốn chứng minh ba vectơ đồng phẳng ta cần tìm hai số p, q sao cho $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$

Giả sử ta có

$$\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{c} - 3\vec{a} = p(\vec{a} - 2\vec{b}) + q(3\vec{b} - \vec{c}) \Leftrightarrow (3+p)\vec{a} + (3q-2p)\vec{b} - (q+2)\vec{c} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{Vì ba vectơ } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ tùy ý nên để (1) xảy ra thì: } \begin{cases} 3+p=0 \\ 3q-2p=0 \\ q+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-3 \\ q=-2 \end{cases}$$

Vậy $\vec{w} = -3\vec{u} - 2\vec{v}$, nên ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho một vectơ $\vec{a}$ tùy ý khác vectơ $\vec{0}$. Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz và vectơ $\vec{a}$. Chứng minh rằng: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{a}_0$ là vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{a}$, ta có $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$

Gọi $\vec{OA_0} = \vec{a}_0$; A_1, A_2, A_3 theo thứ tự lần lượt là hình chiếu vuông góc của A_0 lên các trục tọa

độ Ox, Oy, Oz . Khi đó ta có: $\frac{|\vec{OA_1}|}{|\vec{OA_0}|} = \cos \alpha, \frac{|\vec{OA_2}|}{|\vec{OA_0}|} = \cos \beta, \frac{|\vec{OA_3}|}{|\vec{OA_0}|} = \cos \gamma$

Vì $|\vec{OA_0}| = 1 \Rightarrow |\vec{OA_1}| = \cos \alpha, |\vec{OA_2}| = \cos \beta, |\vec{OA_3}| = \cos \gamma$

Ta có $\vec{OA_0} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} \Rightarrow \vec{OA_0} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$

Mà $\vec{OA_0} = \vec{a}_0$ và $|\vec{a}_0| = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Bài 7. Bộ ba điểm nào sau đây thẳng hàng

- a) $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$. b) $A(1;1;1), B(-4;3;1), C(-9;5;1)$.
 c) $A(0;-2;5), B(3;4;4), C(2;2;1)$. d) $A(1;-1;5), B(0;-1;6), C(3;-1;5)$.
 e) $A(1;2;4), B(3;7;4), C(0;1;5)$.

Hướng dẫn giải

Để xác định bộ ba điểm A, B, C thẳng hàng ta thực hiện các bước như sau

Bước 1: xác định tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$

Bước 2: tìm số k thỏa mãn $\vec{AB} = k\vec{AC}$

Nếu tồn tại số k thì bộ ba điểm A, B, C thẳng hàng

Thực hiện như vậy đối với bài toán trên ta được kết quả

a, c, d, e) Không thẳng hàng

b) Thẳng hàng

Dạng 2. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng.

Bài 8. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian với các tọa độ đã cho là:

- a) $\vec{a} = (3;0;-6), \vec{b} = (2;-4;c)$
 b) $\vec{a} = (1;-5;2), \vec{b} = (4;3;-5)$
 c) $\vec{a} = (0;\sqrt{2};\sqrt{3}), \vec{b} = (1;\sqrt{3};-\sqrt{2})$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tọa độ tính tích vô hướng của hai vectơ ta dễ dàng tính được kết quả

- a) $6 - 6c$; b) -21 ; c) 0

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Chứng minh rằng tam giác ABC nhọn.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{AB} = (-a;b;0); \vec{AC} = (-a;0;c) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2 > 0 \Rightarrow \angle BAC < 90^\circ$

Lập luận tương tự ta cũng chứng minh hai góc còn lại nhọn.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;-1;0), B(2;2;1), C(13;3;4)$.

- a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giáC.
 b) Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

- a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1); \overrightarrow{AC} = (12; 4; 4)$ dễ thấy hai vectơ trên không cùng phương
 Vậy ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác
 b) $AB = \sqrt{11}; AC = 4\sqrt{11}$, E là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC
 Ta có: $\overrightarrow{EB} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \dots E\left(\frac{21}{5}; \frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Dạng 3+4. Phương trình mặt cầu.

Bài 11. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây:

- a. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;
 b. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

- A. Tâm $I(4;1;0)$, bán kính $R = 4$.
 B. Tâm $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{433}}{6}$.

Bài 12. Trong mỗi trường hợp sau, hãy viết phương trình mặt cầu:

- a. Đi qua ba điểm $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) ;
 b. Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox ;
 c. Có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) .

Hướng dẫn giải

- A. Mặt cầu có tâm $I(0;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oyz)
 A, B, C thuộc mặt cầu tâm $I \Leftrightarrow IA = IB = IC$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-b)^2 + c^2 = 4^2 + (6-b)^2 + (2-c)^2 \\ (8-b)^2 + c^2 = (12-b)^2 + (4-c)^2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow b = 7$ và $c = 5$. Vậy $I(0;7;5)$
 Bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 25} = \sqrt{26}$
 $\Rightarrow$ Phương trình của mặt cầu là $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.
 B. Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên tia Ox và mặt cầu (S) tiếp xúc với mp (Oyz) nên tiếp điểm là $O(0;0;0)$
 $\Rightarrow$ Bán kính của mặt cầu là $R = IO = 2$ và $I(2;0;0)$.
 $\Rightarrow$ Phương trình của mặt cầu là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$
 C. Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mp (Oyz)
 $\Rightarrow$ Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, mp(Oyz)) = |x_I| = 1$
 $\Rightarrow$ Phương trình của mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**PHẦN 1 BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Dạng 1: Tìm tọa độ của một điểm, một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thỏa mãn một số điều kiện cho trước, tọa độ các điểm đặc biệt của tam giác, tứ diện.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -3; 4)$.

a) Tìm y, z để vectơ $\vec{b} = (2; y; z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm $\vec{c}$ biết $\vec{c}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $|\vec{c}| = 3|\vec{a} + \vec{b}|$.

Bài 2. Cho $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (-3; 5; 2), \vec{c} = (0; 4; 3)$. Tìm tọa độ và độ dài vectơ $\vec{m}, \vec{n}$ biết:

a) $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} + 5\vec{j}$ b) $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{k}$.

Bài 3. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hãy tìm tọa độ các điểm:

a) $M_1; M_2; M_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$

b) M', M'', M''' lần lượt là các điểm đối xứng với M qua gốc tọa độ O và qua trục Oy .

Bài 4. Cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; -1; 0), C(3; 1; -1)$

a) Tìm điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai điểm B, C

b) Tìm điểm N thuộc (Oxy) cách đều A, B, C

c) Tìm điểm P thuộc (Oxy) sao cho $PA + PC$ ngắn nhất.

Bài 5. Cho hai điểm $A(1; 1; 2), B(-1; 3; -9)$

a) Tìm điểm M thuộc trục Oy sao cho tam giác ABM vuông tại M

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oyz) . Hỏi N chia đoạn AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm N .

c) Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi đường thẳng AB và các trục tọa độ. Hãy tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$.

Dạng 2. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng.

Bài 6. Tìm độ dài đường phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$ biết:

a) $A(1; -2; 2), B(-5; 6; 4), C(0; 1; -2)$

b) $A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3)$

Bài 7. Cho bốn điểm $A(-1; 2; 4), B(2; 1; 3), C(0; 0; 5), D(3; 0; -2)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện. Tính thể tích của tứ diện và độ dài đường cao của tứ diện xuất phát từ đỉnh D

b) Xét hình hộp $ABCD'.A'B'C'D'$ tìm tọa độ các đỉnh A', B', C', D' của hình hộp đó

c) Tìm tọa độ điểm K nằm trong mặt phẳng (ABC) sao cho $\triangle BCK$ vuông tại B và $\triangle ACK$ vuông tại A

d) Tìm tọa độ điểm I là chân đường phân giác trong của góc A của $\triangle ADE$ trong đó $E(1; 3; 7)$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Dạng 3+4. Phương trình mặt cầu

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$ hãy xác định tâm và bán kính các mặt cầu có phương trình sau đây:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 16z - 26 = 0$;
- b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 12z - 100 = 0$.

Bài 10. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của một mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu, hãy tìm tâm và tính bán kính của nó.

- a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$;
- b. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z + 30 = 0$;
- c. $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$;
- d. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$;
- e. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$.

Bài 11. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau đây:

- a. Có đường kính AB với $A = (4; -3; 7), B = (2; 1; 3)$.
- b. Đi qua điểm $A = (5; -2; 1)$ và có tâm $C = (3; -3; 1)$.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- a. Có tâm $I(5; -3; 7)$ và có bán kính $r = 2$;
- b. Có tâm là điểm $C(4; -4; 2)$ và đi qua gốc tọa độ;
- c. Đi qua điểm $M(2; -1; -3)$ và có tâm $C(3; -2; 1)$.

Bài 13. Viết phương trình mặt cầu:

- a. Có tâm $I(1; 0; -1)$, đường kính bằng 8.
- b. Có đường kính AB với $A = (-1; 2; 1), B = (0; 2; 3)$.
- c. Có tâm $O(0; 0; 0)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $(3; -2; 4)$, bán kính bằng 1.
- d. Có tâm $I(3; -2; 4)$ và đi qua $A(7; 2; 1)$.
- e. Có tâm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .
- f. Có tâm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .
- g. Có tâm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) .

Bài 14. Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- a. đi qua $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$ và có tâm nằm trên mp (Oxy) .
- b. đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz .
- c. đi qua bốn điểm $A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2), D(2; 2; 1)$.

PHẦN 2: DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VÉCTƠ

- Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ của điểm M là:
A. $(0; 2; 1)$. B. $(2; 0; 1)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(0; 1; 2)$.
- Câu 2.** Trong các cặp véctơ sau, cặp véctơ đối nhau là
A. $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (-1; -2; 1)$. B. $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (1; 2; -1)$.
C. $\vec{a} = (-1; -2; 1), \vec{b} = (-1; -2; 1)$. D. $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (-1; -2; 0)$.
- Câu 3.** Điểm $M(-4; 0; 7)$ nằm trên:
A. mp(Oxz). B. trục Oy . C. mp(Oxy). D. mp(Oyz).
- Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 2; 1)$ trên Ox có tọa độ là:
A. $(0; 0; 1)$. B. $(3; 0; 0)$. C. $(-3; 0; 0)$. D. $(0; 2; 0)$.
- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 1; -2)$. Điểm N đối xứng với M qua trục Ox có tọa độ là:
A. $N(3; -1; 2)$. B. $N(0; 1; -2)$. C. $N(-3; 1; -2)$. D. $N(3; 0; 0)$.
- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 4; 5)$. Điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là:
A. $(3; 4; -5)$. B. $(3; -4; -5)$. C. $(-3; 4; 5)$. D. $(-3; -4; -5)$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 véctơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$; $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:
A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- Câu 8.** Cho 3 điểm $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; -6)$, $C(6; 0; -1)$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
A. -67 . B. 65 . C. 67 . D. 33 .
- Câu 9.** Cho $\vec{a}(-2; 5; 3)$, $\vec{b}(-4; 1; -2)$. Kết quả của biểu thức $\left[\vec{a}, \vec{b} \right]$ là
A. $\sqrt{216}$. B. $\sqrt{405}$. C. $\sqrt{749}$. D. $\sqrt{708}$.
- Câu 10.** Cho ba véctơ $\vec{a} = (5; -7; 2)$; $\vec{b} = (0; 3; 4)$; $\vec{c} = (-1; 1; 3)$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{n} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$.
A. $\vec{n} = (13; -7; 28)$. B. $\vec{n} = (13; -7; -28)$. C. $\vec{n} = (13; 7; 28)$. D. $\vec{n} = (13; 7; -28)$.
- Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $\vec{b} \perp \vec{a}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

- Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$ và $B(4;-5;2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:
A. $(-3;8;-4)$. **B.** $(3;-8;4)$. **C.** $(3;2;4)$. **D.** $(-3;2;4)$.
- Câu 13.** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ $mp(Oxy)$.
A. $A(1;2;3)$. **B.** $B(0;1;2)$. **C.** $C(0;0;2)$. **D.** $D(2;0;0)$.
- Câu 14.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu A' của điểm $A(3;2;1)$ lên trục Ox có tọa độ là:
A. $(3;2;0)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;0;1)$. **D.** $(0;2;0)$.
- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;3;-1)$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là:
A. $(-1;5;2)$. **B.** $(3;-1;4)$. **C.** $(1;5;2)$. **D.** $(1;-5;-2)$.
- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;3;-1)$. Khi đó:
A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1;5;2)$. **C.** $\vec{a} - \vec{b} = (3;-1;-4)$. **B.** $\vec{b} - \vec{a} = (3;-1;4)$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
- Câu 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;3;-1)$. Khi đó:
A. $3\vec{a} + \vec{b} = (1;9;8)$. **B.** $\vec{a} - 2\vec{b} = (5;4;5)$.
B. $2\vec{b} - \vec{a} = (5;-4;5)$. **D.** $\vec{a} - 2\vec{b} = (-3;8;1)$.
- Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;3;-1)$. Khi đó:
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **C.** $2\vec{b} \cdot \vec{a} = -2$. **D.** $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3;8;1)$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;3;-1)$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là:
A. $(-1;5;2)$. **B.** $(3;-1;4)$. **C.** $(1;5;2)$. **D.** $(1;-5;-2)$.
- Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-2;1;0)$; $\vec{b} = (1;3;-2)$; $\vec{c} = (2;4;3)$. Tọa độ của $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ là:
A. $(-3;7;9)$. **B.** $(5;3;-9)$. **C.** $(-3;-7;-9)$. **D.** $(3;7;9)$.
- Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Nếu là điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:
A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **D.** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$.
- Câu 22.** Cho $A(-1;2;3)$; $B(0;1;-3)$. Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA}$ khi đó tọa độ điểm M là.
A. $M(3;4;9)$. **B.** $M(-3;4;15)$. **C.** $M(1;0;-9)$. **D.** $M(-1;0;9)$.
- Câu 23.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;0;0)$; $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM là:
A. $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{30}$.

- Câu 24.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1), B(3;-2;1)$. Tọa độ điểm C đối xứng với A qua B là:
A. $C(-1;2;-1)$. **B.** $C(1;-2;-1)$. **C.** $C(1;2;1)$. **D.** $C(4;-2;1)$.
- Câu 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}(1;1;2), \vec{v}(-1;m;m-2)$. Khi đó $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14}$ thì:
A. $m=1; m=-\frac{11}{5}$. **B.** $m=-1; m=-\frac{11}{3}$. **C.** $m=1; m=-3$. **D.** $m=-1$.
- Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(-1;1;0), \vec{b}(1;1;0)$ và $\vec{c}(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **B.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **C.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **D.** $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- Câu 27.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(-1;1;0), \vec{b}(1;1;0)$ và $\vec{c}(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
- Câu 28.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$ và $D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó tọa độ trung điểm G của đoạn thẳng MN là:
A. $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. **B.** $G(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. **C.** $G(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. **D.** $G(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.
- Câu 29.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3), \vec{b} = (-2;3;-1)$. Kết luận nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1;5;2)$. **B.** $\vec{a} - \vec{b} = (3;-1;-4)$.
C. $\vec{b} - \vec{a} = (3;-1;4)$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
- Câu 30.** Cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;-1;2)$ và $C(1;0;1)$. Kết luận nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} = (-1;-3;-1)$. **B.** $\overrightarrow{AC} = (-1;3;-1)$. **C.** $\overrightarrow{BC} = (-1;-3;1)$. **D.** $\overrightarrow{BA} = (1;-3;1)$.
- Câu 31.** Cho hai điểm $A(0;1;0)$ và $B(1;0;1)$ Tính:
A. $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$. **B.** $AB = 1$. **C.** $AB = \sqrt{5}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-1;1;-1)$.
- Câu 32.** Cho ba điểm $B(1;0;-1)$ và $C(0;-1;2)$. Độ dài đoạn thẳng BC bằng
A. 2. **B.** $\sqrt{11}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{5}$.
- Câu 33.** Cho hai điểm $A(1;2;0), B(1;0;-1)$ Độ dài đoạn thẳng AB bằng?
A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{5}$.

- Câu 34.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(4;-2;-4), \vec{b}(6;-3;2)$ thì $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ có giá trị bằng
A. 250. **B.** $\sqrt{200}$. **C.** 200^2 . **D.** 200.
- Câu 35.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;4), B(-2;2;6), C(6;0;-1)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng
A. -27. **B.** 65. **C.** 67. **D.** 33.
- Câu 36.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ: $\vec{a} = (-1, 1, 0); \vec{b} = (1, 1, 0); \vec{c} = (1, 1, 1)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai
A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **B.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **C.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **D.** $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- Câu 37.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết góc $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ thì $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng:
A. 1.. **B.** 2.. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$.
- Câu 38.** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (5; 7; 0), \vec{c} = (3; -2; 4)$. Bộ số $(m; n; p)$ thỏa mãn hệ thức $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ là
A. $(0; 0; 0)$.. **B.** $(1; 0; 0)$. **C.** $(0; 1; 0)$.. **D.** $(1; 1; 1)$.
- Câu 39.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2), \vec{c} = (3; 2; -4)$. Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa mãn $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5, \vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \vec{x} \cdot \vec{c} = 20$. Tọa độ $\vec{x}$ là
A. $\vec{x} = (2; 3; -2)$.. **B.** $\vec{x} = (2; 3; 1)$.. **C.** $\vec{x} = (3; 2; -2)$.. **D.** $\vec{x} = (1; 3; 2)$.
- Câu 40.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (x; 2; 1), \vec{b} = (2; 1; 2)$. Tìm x , biết $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$.
A. $x = \frac{1}{2}$.. **B.** $x = \frac{1}{3}$.. **C.** $x = \frac{3}{2}$.. **D.** $x = \frac{1}{4}$..
- Câu 41.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 2; -1), B(-2; 3; 0), C(x; 3; -1)$. Giá trị của x để tam giác ABC đều là
A. $x = -1$. **B.** $x = -3$. **C.** $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ **D.** $x = 1$.
- Câu 42.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 1), B(0; 3; -1)$ và điểm C nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm C có tọa độ là
A. $(1; 2; 3)$. **B.** $(1; 2; 1)$. **C.** $(1; 2; 0)$ **D.** $(1; 1; 0)$.
- Câu 43.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$ Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

B. $\vec{ac} = 1$.

C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$ Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

A. $x = 4; y = -7$.

B. $x = -4; y = -7$.

C. $x = 4; y = -7$.

D. $x = -4; y = 7$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $P(x; -1; -1), Q(3; -3; 1)$, biết $PQ = 3$, giá trị của x là:

A. 2 hoặc 4.

B. -2 hoặc -4.

C. 2 hoặc -4.

D. 4 hoặc -2.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (x; 2; 1), \vec{b} = (2; 1; 2)$. Tìm x biết $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$.

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{3}$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $x = \frac{1}{4}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (3; -2; 4); \vec{b} = (5; 1; 6); \vec{c} = (-3; 0; 2)$ Tọa độ của $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}$ đồng thời vuông góc với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là:

A. $(0; 0; 1)$.

B. $(0; 0; 0)$.

C. $(0; 1; 0)$.

D. $(1; 0; 0)$.

Câu 48. Cho ba điểm $A(1; 1; 4), B(-1; 3; 2), C(-1; 2; 3)$ Tính tọa độ trung điểm I của đoạn AC

A. $I(0; 0; 6)$.

B. $I\left(0; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

C. $I\left(-\frac{1}{3}; 2; \frac{8}{3}\right)$.

D. $I\left(0; \frac{3}{2}; 2\right)$.

Câu 49. Cho điểm $M(1; -1; 1)$ và $H(0; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho đoạn thẳng MN nhận H làm trung điểm.

A. $N(-1; 3; 3)$.

B. $N(-1; 3; 4)$.

C. $N(-1; 3; 6)$.

D. $N(-1; 3; 7)$.

Câu 50. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}(2; 5; 0)$ và $\vec{b}(3; -7; 0)$ là:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 135° .

Câu 51. Cho 4 điểm $M(2; -3; 5), N(4; 7; -9), P(3; 2; 1), Q(1; -8; 12)$. Bộ 3 điểm nào sau đây là thẳng hàng:

A. M, N, P .

B. M, N, Q .

C. M, P, Q .

D. N, P, Q .

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1), P(1; m-1; 2)$ Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Câu 53. Cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; m)$ Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng 45°
Một học sinh giải như sau:

Bước 1: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}$

Bước 2: Góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° suy ra $\frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1} \quad (*)$

Bước 3: phương trình $(*) \Leftrightarrow (1-2m)^2 = 3(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{6} \\ m = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A.** Bài giải đúng. **B.** Sai ở bước 1. **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 3.

TỌA ĐỘ ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -4; 2), B(-3; 2; 1), C(3; -1; 4)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC là:

- A.** $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{7}{3}\right)$. **B.** $G(3; -9; 21)$. **C.** $G\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$. **D.** $G\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{7}{5}\right)$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$. **B.** $\left(\frac{10}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 3); B(-1; 3; 2); C(-1; 2; 3)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(0; 0; 6)$.. **B.** $G\left(0; \frac{3}{2}; 3\right)$.. **C.** $G\left(-\frac{1}{3}; 2; \frac{8}{3}\right)$.. **D.** $G\left(0; \frac{3}{2}; 2\right)$.

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{10}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -4; 2), B(-3; 2; 1), C(3; -1; 4)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{7}{3}\right)$. **B.** $(3; -9; 21)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{7}{5}\right)$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(0; 1; 1)$. Biết D là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Hãy tìm tọa độ của điểm D .

- A.** $D(1; 1; 1)$. **B.** $D(0; 0; 1)$. **C.** $D(0; 2; 1)$. **D.** $D(2; 0; 0)$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1), B(2; 3; -2), C(1; 0; 1)$.

Trong các điểm $M(4; 3; -2), N(-1; -2; 3), P(2; 1; 0)$, điểm nào là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C ?

- A.** Cả điểm M và N . **B.** Chỉ có điểm M . **C.** Chỉ có điểm N . **D.** Chỉ có điểm P .

- Câu 61.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;1)$. Biết $MNPQ$ là hình bình hành. Tìm tọa độ điểm Q .
- A. $(-1;2;1)$. B. $(1;2;1)$. C. $(-2;1;2)$. D. $(-2;3;4)$.
- Câu 62.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $C(0;4;0)$. Biết điểm $B(a;b;c)$ là điểm sao cho tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật. Tính giá trị của biểu thức $P=a-4b+c$.
- A. 14. B. 12. C. -14. D. -12.
- Câu 63.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OADB$ có $\overrightarrow{OA}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$. Khi đó tọa độ tâm hình bình hành $OADB$ là:
- A. $(0;1;0)$.. B. $(1;0;0)$.. C. $(1;0;1)$. D. $(1;1;0)$.
- Câu 64.** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là:
- A. $(2;3;1)$. B. $(2;-3;1)$.. C. $(-2;3;1)$. D. $(2;3;-1)$.
- Câu 65.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;0;1)$ và $D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó tọa độ trung điểm G của đoạn thẳng MN là:
- A. $G\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. B. $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. C. $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
- Câu 66.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$; $D(1;-1;1)$ và $C'(4;5;5)$. Tọa độ của C và A' là:
- A. $C(2;0;2)$, $A'(3;5;4)$. B. $C(2;5;-7)$, $A'(3;4;-6)$.
C. $C(4;6;-5)$, $A'(3;5;-6)$. D. $C(2;0;2)$, $A'(3;4;-6)$..
- Câu 67.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ O , B nằm trên tia Ox , D nằm trên tia Oy và A' nằm trên tia Oz . Kết luận nào sau đây **SAI**?
- A. $A(0;0;0)$. B. $D'(0;1;1)$. C. $C'(1;1;1)$. D. $A'(1;-1;-1)$.
- Câu 68.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$ và điểm C nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm C có tọa độ là
- A. $(1;2;3)$. B. $(1;2;1)$. C. $(1;2;0)$ D. $(1;1;0)$.
- Câu 69.** Chọn hệ tọa độ sao cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $C(2;2;0)$ và tâm I của hình lập phương có tọa độ là $(1;1;1)$. Tìm tọa độ của đỉnh B' .
- A. $(2;0;2)$. B. $(0;-2;2)$. C. $(2;0;2)$ hoặc $(0;2;2)$. D. $(2;2;0)$.
- Câu 70.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tọa độ điểm $D \in Ox$ thỏa mãn $AD=BC$ là:
- A. $(0;0;0)$ hoặc $(6;0;0)$. B. $(0;0;2)$ hoặc $(0;0;8)$.
C. $(0;0;-3)$ hoặc $(0;0;3)$. D. $(0;0;0)$ hoặc $(0;0;-6)$.

- Câu 71.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;1;0)$; $B(1;-1;0)$. Gọi M là điểm trên trục tung và cách đều A và B thì:
A. $M(2;0;0)$. **B.** $M(0;-2;0)$. **C.** $M(0;2;0)$ **D.** $M(0;0;2)$.
- Câu 72.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;0)$, $C(3;1;-1)$. Tọa độ điểm N thuộc (Oxy) cách đều A, B, C là:
A. $\left(0; \frac{7}{4}; 2\right)$. **B.** $\left(2; \frac{7}{4}; 0\right)$. **C.** $\left(2; -\frac{7}{4}; 0\right)$. **D.** $\left(-2; -\frac{7}{4}; 0\right)$.
- Câu 73.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(-1;-1;0)$, $C(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oy và cách đều B, C .
A. $\left(0; \frac{9}{4}; 0\right)$. **B.** $\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$. **C.** $\left(0; -\frac{9}{2}; 0\right)$. **D.** $\left(0; -\frac{9}{4}; 0\right)$.
- Câu 74.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$ và D thuộc trục Oy . Tính tổng tung độ của các điểm D . Biết thể tích tứ diện bằng 5.
A. -6. **B.** 2. **C.** 7. **D.** -4.
- Câu 75.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$ mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là
A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Câu 76.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2,3,1)$ $B\left(\frac{1}{4};0;1\right)$, $C(2,0,1)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC là
A. $(1;0;1)$. **B.** $(-1;0;1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(1;0;-1)$.
- Câu 77.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(0;0;1)$ thì trực tâm H của tam giác ABC là
A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;1;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;0;0)$.
- Câu 78.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là
A. $H\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{8}; -\frac{11}{8}\right)$. **D.** $H\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{8}; -\frac{11}{8}\right)$.
- Câu 79.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-1;0)$, $B(2;2;1)$, $C(13;3;4)$, $D(1;1;1)$. Tọa độ chân đường cao H của tứ diện $ABCD$ đỉnh D là
A. $H\left(\frac{10}{9}; \frac{10}{9}; \frac{5}{9}\right)$. **B.** $H\left(\frac{10}{9}; -\frac{10}{9}; \frac{5}{9}\right)$. **C.** $H\left(-\frac{10}{9}; \frac{10}{9}; \frac{5}{9}\right)$. **D.** $H\left(\frac{10}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{5}{9}\right)$.

XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

- Câu 80.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$. Bán kính R của mặt cầu:
- A. $R = \sqrt{17}$. B. $R = \sqrt{88}$. C. $R = 2$. D. $R = 5$.
- Câu 81.** Trong không gian $Oxyz$, tâm I của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ có tọa độ là:
- A. $I(4; 1; 0)$. B. $I(4; -1; 0)$. C. $I(-4; 1; 0)$. D. $I(-4; -1; 0)$.
- Câu 82.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là:
- A. $I(1; -2; 0), R = 2$. B. $I(1; -2; 1), R = 2$. C. $I(1; -2; 1), R = \sqrt{6}$. D. $I(1; -2; 0), R = \sqrt{6}$.
- Câu 83.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$. Hãy tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $I(-5; 4; 0), R = 3$. B. $I(-5; 4; 0), R = 9$. C. $I(5; -4; 0), R = 3$. D. $I(5; -4; 0), R = 9$.
- Câu 84.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Hãy tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$. B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$. C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$. D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.
- Câu 85.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hãy tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $I(0; 0; 0)$ và $R = 3$. B. $I(0; 0; 1)$ và $R = 9$. C. $I(1; 1; 1)$ và $R = 3$. D. $I(0; 1; 0)$ và $R = 3$.
- Câu 86.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 8y + 2 = 0$. Hãy tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $I(-2; 4; 0); R = 3\sqrt{2}$. B. $I(-1; 2; 0); R = \sqrt{7}$. C. $I(-1; 2; 0); R = 2$. D. $I(-1; 2; -1); R = \sqrt{6}$.
- Câu 87.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ và $R = \frac{1}{4}$. B. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$ và $R = \frac{1}{2}$. C. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$ và $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ và $R = \frac{1}{2}$.
- Câu 88.** Trong mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:
- A. (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$. B. (S) có bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

C. (S) đi qua điểm $N(-3; 4; 2)$.D. (S) đi qua điểm $M(1; 0; 1)$.**Câu 89.** Tìm tâm và bán kính của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0$ làA. Tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.B. Tâm $I(1; 1; 3)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{14}}{2}$.C. Tâm $I(1; 1; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.D. Tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{14}}{2}$.**Câu 90.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ có tâm I, bán kính R là :A. $I(-2; 4; -6), R = \sqrt{58}$.B. $I(2; -4; 6), R = \sqrt{58}$.C. $I(-1; 2; -3), R = 4$.D. $I(1; -2; 3), R = 4$.**Câu 91.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu:A. $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$.B. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$.C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$.D. $x^2 + (y - z)^2 - 2x - 4(y - z) - 9 = 0$.**Câu 92.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m - 2)y - 2(m + 3)z + 8m + 37 = 0$ là phương trình của mặt cầu:A. $m < -2$ hay $m > 4$.B. $m < -4$ hay $m > 2$.C. $m < -4$ hay $m > -2$.D. $m \leq -2$ hay $m \geq 4$.**Câu 93.** Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx + 4my - 6mz + 28m = 0$ là phương trình mặt cầu:A. $m < 0$ hoặc $m > 2$.B. $0 < m < 2$.C. $m < 0$.D. $m > 2$.**Câu 94.** Trong mặt cầu (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:A. (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$.B. (S) có bán kính $R = 2\sqrt{3}$.C. (S) đi qua điểm $M(1; 0; 1)$.D. (S) đi qua điểm $N(-3; 4; 2)$.**Câu 95.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$. Khẳng định đúng là:

A. M nằm ngoài (S).

B. M nằm trong (S).

C. M nằm trên (S).

D. M trùng với tâm của (S).

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm $O(0; 0; 0), A(1; 2; 3), B(2; -1; -1)$. Trong ba điểm trên số điểm nằm bên trong mặt cầu là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm $O(0; 0; 0), A(1; 2; 3), B(2; -1; -1)$. Trong ba điểm trên số điểm thuộc mặt cầu là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

- Câu 98.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình là $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z = 0$. Biết OA , (O là gốc tọa độ) là đường kính của mặt cầu (S) . Tọa độ điểm A là
A. $A(-1; 3; 2)$. **B.** $A(-1; -3; 2)$. **C.** $A(2; -6; -4)$. **D.** $A(-2; 6; 4)$.
- Câu 99.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB . Biết điểm $A(-1; -1; 0)$ thuộc mặt cầu (S) . Tọa độ điểm B là
A. $B(-5; 3; -2)$. **B.** $B(-11; 5; 0)$. **C.** $B(-11; 5; -4)$. **D.** $B(-5; 3; 0)$.
- Câu 100.** Trong không gian $Oxyz$ mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$. Có bán kính nhỏ nhất khi m bằng:
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 0 .

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

- Câu 101.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(4; -1; 3)$ và bán kính $\sqrt{5}$ là:
A. $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5$. **B.** $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$.
C. $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$. **D.** $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 5$.
- Câu 102.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; -1; 2)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là:
A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$. **B.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$.
C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. **D.** $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$.
- Câu 103.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(5; 4; 3)$, bán kính $R = 4$. Hãy tìm phương trình của mặt cầu (S) ?
A. $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 2$. **B.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$.
C. $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 2$. **D.** $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 16$.
- Câu 104.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -3)$ bán kính $R = 2$ là:
A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 10 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$. **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$.
- Câu 105.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(5; 4; 3)$, bán kính $R = 5$. Phương trình mặt cầu (S) là
A. $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 25$. **B.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 25$.
C. $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 25$. **D.** $(x+5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 25$.

- Câu 106.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;5), B(2;1;1)$ và $C(0;0;3)$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng 3.
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 3$.
- Câu 107.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;-2)$, biết diện tích mặt cầu bằng 100π . Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 4 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 86 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$.
- Câu 108.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$, biết thể tích khối cầu bằng 972π . Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
 C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 81$. D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
- Câu 109.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;1;2)$ và đi qua $A(-2;1;6)$ có phương trình là:
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$.
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 5$.
- Câu 110.** Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$ khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{3}$.
- Câu 111.** Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;2)$ và đi qua điểm $A(2;0;1)$ có phương trình là:
- A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$. B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 2$.
 C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$. D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.
- Câu 112.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;1;2)$ và đi qua $A(-2;1;6)$ có phương trình là :
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$.
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 5$.
- Câu 113.** Phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ đi qua $(3;2;-1)$ là:
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z - 6 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 12 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 6 = 0$.
- Câu 114.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-3), B(4;3;-2), C(6;-4;-1)$. Phương trình mặt cầu tâm A đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là:
- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6$. B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$.
 C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$. D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; -1; 2)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 1)$ có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 2$.

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$.

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$.

D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $M(5; -2; 1)$. Phương trình mặt cầu (S) có dạng:

A. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 5$.

D. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy .

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3; -4; -2)$ và tiếp xúc với trục Ox . Bán kính mặt cầu (S) là:

A. $R=5$.

B. $R=2\sqrt{5}$.

C. $R=3\sqrt{2}$.

D. $R=3$.

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với trục Oy . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$.

B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 45$.

C. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$.

D. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 54$.

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(1; 1; 9), C(1; 4; 0)$. Mặt cầu (S) đi qua điểm B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại C có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 5$.

C. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25$.

D. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 5$.

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1), B(1; 2; -1), C(-1; 2; 3)$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là:

A. $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 8$.

C. $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$.

B. $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

D. $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

Câu 122. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 2$.

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$.

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; 4)$. Mặt cầu (S) có tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (xOz) là:

A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$.

B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 18$.

C. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 4$.

D. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 13$.

Câu 124. Viết phương trình mặt cầu (S) qua điểm $A(1; 2; 0)$ và có tâm là gốc tọa độ O .

A. $2x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

B. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 2)$, $N(3; 1; 4)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 3$.

B. $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$.

Câu 126. Lập phương trình mặt cầu đường kính AB với $A(6; 2; -5)$ và $B(-4; 0; 7)$

A. $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 62$.

B. $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 62$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 62$.

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$; $B(2; 1; 3)$ là:

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 3$.

D. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 3$.

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 0; -3)$, $B(2; 2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu đường kính AB ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 1 = 0$.

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 1)$, $B(-1; 0; 3)$. Tâm mặt cầu (S) đường kính AB có tọa độ là:

A. $I(0; -2; 4)$.

B. $I(2; -2; -2)$.

C. $I(0; -1; 2)$.

D. $I(-2; 2; 2)$.

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là:

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

D. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(2; 1; 0)$, $B(1; 1; 3)$, $C(2; -1; 3)$, $D(1; -1; 0)$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, $R = GA = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

B. $G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, $R = GA = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

C. $G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, $R = GA = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

D. $G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, $R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ và $D(1; 1; 1)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 134. Cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$, $D(2; 2; 2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính:

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 135. Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ là :

A. $\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 12

Câu 136. Cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $O(0; 0; 0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$.

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu đi qua bốn điểm $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$, $D(4; 1; 0)$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 3 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 3 = 0$.

Câu 138. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; -1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(3; 0; 1)$. Mặt cầu đi qua 4 điểm O , A , B , C . (O là gốc tọa độ) có bán kính bằng:

A. $R = \sqrt{13}$.

B. $R = 2\sqrt{13}$.

C. $R = \sqrt{14}$.

D. $R = 2\sqrt{14}$.

Câu 139. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 10 = 0$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$.

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) qua ba điểm $A(1; -2; 4)$, $B(1; 3; -1)$, $C(2; -2; -3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 21 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 3z - 21 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 21 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 21 = 0$.

Câu 141. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0), B(-3; 4; 2)$ và I là điểm thuộc trục Ox . Phương trình mặt cầu tâm I qua A, B có phương trình là:

A. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 20$.

B. $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 20$.

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{11}{4}$.

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$.

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$ và có tâm nằm trên trục Ox . Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 29$.

B. $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

C. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 29$.

D. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Câu 143. Cho mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1, 2, -4); B(1, -3, 1); C(2, 2, 3)$. Toạ độ tâm I là

A. $(-2, 1, 0)$.

B. $(0; 0; -2)$.

C. $(2; -1; 0)$.

D. $(0, 0, 1)$.

Câu 144. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của đoạn AD , N là tâm hình vuông $CC'D'D$. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, C', M, N .

A. $\sqrt{35}$.

B. $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

C. 4.

D. 7.

Câu 145. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 2; 0), B(-1; 1; 4)$ và $C(3; -2; 1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A, B, C và độ dài $OI = \sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính mặt cầu (S) là:

A. $R = 2$.

B. $R = 3$.

C. $R = 4$.

D. $R = 5$.

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A \equiv O$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C tiếp xúc với AB' .

A. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{49}{10}$.

B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{64}{10}$.

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{25}{10}$.

D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{81}{10}$.

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại A , đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , $B(1; 2; 0)$ và tam giác ABC có diện tích bằng 5. Gọi M là trung điểm của CC' . Biết rằng điểm $A'(0; 0; 2)$ và điểm C có tung độ dương. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'M$.

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y - 3z + 1 = 0$.

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y - 3z = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y - 3z = 0$.

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y - 3z - 1 = 0$.

Câu 148. Mặt cầu tâm $I(2; 4; 6)$ tiếp xúc với trục Oz có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 20$.

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 40$.

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 52$.

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56$.

Câu 149. Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình:

- A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 16.$ B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4.$
 C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 36.$ D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56.$

Câu 150. Cho các điểm $A(2;1;-1)$ và $B(1;0;1)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oy có đường kính là:

- A. $2\sqrt{6}.$ B. $2\sqrt{2}.$ C. $4\sqrt{2}.$ D. $\sqrt{6}.$

Câu 151. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(1;-3;0)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều. Điểm nào sau đây **không** thuộc mặt cầu (S) :

- A. $(2;-1;1).$ B. $(3;-3;2\sqrt{2}).$ C. $(3;-3;-2\sqrt{2}).$ D. $(1;-3;2\sqrt{3}).$

Câu 152. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) :

- A. $(2;1;1).$ B. $(2;1;0).$ C. $(2;0;0).$ D. $(1;0;0).$

Câu 153. Cho ba điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$, $D(4;1;0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0.$ B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 3 = 0.$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z - 3 = 0.$ D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 3z - 3 = 0.$

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	B	C	C	D	D	C	A	A	B	D	A	A	A	A	D	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	C	D	C	D	C	D	A	A	A	B	D	D	A	D	C	A	A	D
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	C	A	D	A	D	B	B	D	D	B	D	D	A	B	C	D	A	B	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	C	A	A	A	A	D	C	C	A	A	C	A	A	B	A	A	B	A	D
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	A	C	A	A	C	B	C	D	D	B	A	A	D	A	A	A	A	D	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A	B	B	B	B	B	D	A	C	C	B	C	A	A	A	D	D	B	C	A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	C	C	D	B	C	B	D	C	C	D	D	A	B	B	B	A	C	C	D
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153							
B	B	A	B	B	A	C	A	A	A	C	A	A							

PHẦN 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .

Chú ý: Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (α) .

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của (α) .
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Các trường hợp riêng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Chú ý: • Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình: $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
- $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B; C)$

Phương pháp giải:

Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n}(2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x + 3y + 5z - 16 = 0.$

B. $2x + 3y + 5z + 16 = 0.$

C. $2x + 3y + 5z - 28 = 0.$

D. $2x + 3y + 5z + 28 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2(x - 1) + 3(y + 2) + 5(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5z - 16 = 0$

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và nhận $\vec{n}(4;5;6)$ làm véc tơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $4x + 5y + 6z + 32 = 0$.

B. $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

C. $x + 2y + 3z - 32 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 32 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình mặt phẳng (α) là : $4(x-1)+5(y-2)+6(z-3)=0 \Leftrightarrow 4x+5y+6z-32=0$

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(2;0;1)$ và nhận $\vec{n}(1;1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x + 0y + z + 3 = 0$.

B. $x + y + z + 3 = 0$.

C. $2x + 0y + z - 3 = 0$.

D. $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng (α) là : $1(x-2)+1(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0$

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và song song với một mặt phẳng

Phương pháp giải:

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ nên phương trình có dạng:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x - y + 2z - 11 = 0$.

B. $2x - y + 3z + 11 = 0$.

C. $2x - y + 3z - 11 = 0$.

D. $2x - y + 3z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 4 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;-1;3)$ do đó $\vec{n}(2;-1;3)$ làm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nên có phương trình $2x - y + 3z - 11 = 0$.

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3y + z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x - 3y + z - 11 = 0$.

B. $2x - 3y + z + 11 = 0$.

C. $x - 2y + 3z - 11 = 0$.

D. $2x - 3y + z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2; -3; 1)$ do đó $\vec{n}(2; -3; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nên có phương trình $2x - 3y + z - 11 = 0$.

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(2; 6; -3)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $z - 3 = 0$.

B. $x + y - 8 = 0$.

C. $2x + 6y - 3z = 0$.

D. $z + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{k}(0; 0; 1)$ do đó chọn $\vec{k}(0; 0; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nên có phương trình $z + 3 = 0$.

Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và vuông góc với 2 mặt phẳng cho trước. (Hoặc viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và song song hoặc chứa giá của hai véc tơ cho trước.)

Phương pháp giải:

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$; $(Q): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ nên có một véc tơ pháp tuyến: $\Rightarrow \vec{n} = [\vec{n}_Q, \vec{n}_P] = (A; B; C)$

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(-2; 3; 1)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $2x + y + 2z + 5 = 0$; $3x + 2y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $-3x + 4y + z + 19 = 0$

B. $3x + 4y - z - 19 = 0$

C. $-3x + 4y + z - 19 = 0$

D. $3x + 4y + z + 19 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n_Q}, \vec{n_P}] = (-3; 4; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2; 3; 1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình :
 $-3x + 4y + z - 19 = 0$

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; -5)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $3x - 2y + 2z + 7 = 0$; $5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x + y - 2z - 15 = 0$.

B. $2x + y - 2z + 15 = 0$.

C. $2x + y + 2z - 15 = 0$.

D. $2x - y - 2z - 15 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n_Q}, \vec{n_P}] = (2; 1; -2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; -5)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $2x + y - 2z - 15 = 0$

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(0; 2; 0)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $z - 3 = 0$; $3x - 4y + 7z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $4x - 3y - 6 = 0$

B. $4x + 3y + 6 = 0$

C. $4x - 3y + 6 = 0$

D. $4x + 3y - 6 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n_Q}, \vec{n_P}] = (4; 3; 0)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; 2; 0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $4x + 3y - 6 = 0$

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.

Phương pháp giải:

Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M; N, P$ nên có một vectơ pháp tuyến :
 $\Rightarrow \vec{n} = [\vec{MN}, \vec{MP}] = (A; B; C)$

$$(\alpha): A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(2;-1;3); B(4;0;1); C(-10;5;3)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

B. $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

C. $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

D. $x + 2y + 2z + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $x + 2y + 2z - 6 = 0$

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;0;0); B(0;-2;0); C(0;0;-3)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $6x - 3y - 2z - 6 = 0$.

B. $6x - 3y - 2z + 6 = 0$.

C. $6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

D. $6x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6; -3; -2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $6x - 3y - 2z - 6 = 0$

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;1;1); B(4;3;2); C(5;2;1)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $x - 4y + 5z + 2 = 0$.

B. $x - 4y + 5z - 2 = 0$.

C. $x + 4y + 5z - 10 = 0$.

D. $x - 4y - 5z + 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; -4; 5)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $x - 4y + 5z - 2 = 0$

Dạng 5. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm và vuông góc với 1 mặt phẳng**Phương pháp giải:**

Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M; N$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một véc tơ pháp tuyến: $\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \vec{n}_p] = (A; B; C)$

$$(\alpha): A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0; 2; 0); B(0; 0; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x + y + z - 2 = 0$.

B. $2x - z = 0$.

C. $2x + z = 0$.

D. $2x + y + z = 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (2; 0; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; 2; 0)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $2x + z = 0$

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0); B(2; 3; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

B. $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.

C. $4x - 3y + 2z + 3 = 0$.

D. $4x + 3y - 2z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (4; -3; -2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; 1; 0)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $4x - 3y - 2z + 3 = 0$

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(1; 0; 1); B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + z + 7 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x - 2z - 1 = 0$.

B. $x - 2z + 1 = 0$.

C. $x + 2z - 3 = 0$.

D. $-x - 2z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_Q}] = (1; 0; -2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; 1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $x - 2z + 1 = 0$

Dạng 6. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN .

Phương pháp giải:

Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của hai điểm $M; N$ và vuông góc với MN nên có một vectơ pháp tuyến : $\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{MN} = (A; B; C)$

$$(\alpha): A(x - x_I) + B(y - y_I) + C(z - z_I) = 0$$

VD 1. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2; 3; 7); B(4; 1; 3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + y - 2z + 9 = 0$.

B. $x - y - 2z - 9 = 0$.

C. $x - y - 2z + 9 = 0$.

D. $x - y + 2z + 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2; -2; -4)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm trung điểm $I(3; 2; 5)$ của AB và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình : $x - y - 2z + 9 = 0$

VD 2. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1; -2; 4); B(3; 6; 2)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + 4y - z - 7 = 0$.

B. $x + 4y - z + 7 = 0$.

C. $x + 4y + z - 7 = 0$.

D. $x - 4y - z - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2; 8; -2)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm trung điểm $I(2; 2; 3)$ của AB và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình: $x + 4y - z - 7 = 0$

VD 3. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(-2; 3; -7); B(4; -1; 3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $3x + 2y - 5z - 11 = 0$.

B. $3x - 2y - 5z + 11 = 0$.

C. $3x - 2y + 5z - 11 = 0$.

D. $3x - 2y - 5z - 11 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (6; -4; 10)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm trung điểm $I(1; 1; -2)$ của AB và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình: $3x - 2y + 5z + 9 = 0$

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.**Phương pháp giải:**

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình: $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\bullet (\alpha), (\beta) \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

$$\bullet (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$\bullet (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\bullet (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

VD 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - 2z + 5 = 0$ và

$(\beta): 3x + 4y - 8z - 5 = 0$. Khi đó vị trí tương đối của (α) và (β) là:

A. (α) cắt (β) .

B. $(\alpha) // (\beta)$.

C. $(\alpha) \equiv (\beta)$.

D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Vì } \frac{2}{3} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{-2}{-8} \Rightarrow (\alpha) \text{ cắt } (\beta).$$

VD 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 5x + 5y - 5z - 1 = 0$ và

$(\beta): 3x + 3y - 3z + 7 = 0$. Khi đó vị trí tương đối của (α) và (β) là:

A. (α) cắt (β) .

B. $(\alpha) // (\beta)$.

C. $(\alpha) \equiv (\beta)$.

D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

VD 3. Vì $\frac{5}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-5}{-3} \neq \frac{-1}{7} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - 4z + 6 = 0$ và

$(\beta): 2x + 3y - z + 5 = 0$. Khi đó vị trí tương đối của (α) và (β) là:

A. (α) cắt (β) .

B. $(\alpha) // (\beta)$.

C. $(\alpha) \equiv (\beta)$.

D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Vì } 1.2 + (-2).3 + (-4).(-1) = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta).$$

VD 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - 4z + 5 = 0$ và

$$(\beta): 5x - 5y - 10z + \frac{25}{2} = 0. \text{ Khi đó vị trí tương đối của } (\alpha) \text{ và } (\beta) \text{ là:}$$

A. (α) cắt (β) .

B. $(\alpha) // (\beta)$.

C. $(\alpha) \equiv (\beta)$.

D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Vì } \frac{2}{5} = \frac{-2}{-5} = \frac{-4}{-10} = \frac{5}{\frac{25}{2}} \Rightarrow (\alpha) \equiv (\beta).$$

Dạng 8. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm trên một mặt phẳng. Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Giả sử mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.

- $H(x; y; z)$ là hình chiếu của $M(x_M; y_M; z_M)$ lên mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n} \\ H \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = At + x_M \\ y = Bt + y_M \\ z = Ct + z_M \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có t rồi suy ra x, y, z .

- $M'(x'; y'; z')$ là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_H - x_M \\ y' = 2y_H - y_M \\ z' = 2z_H - z_M \end{cases}$$

Từ đó xác định được tọa độ của điểm M' .

VD 1. Tọa độ hình chiếu H của điểm $M(1; -1; 2)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 2 = 0$ là:

A. $H\left(\frac{13}{11}; -\frac{5}{11}; \frac{20}{11}\right)$.

B. $H\left(-\frac{13}{11}; \frac{5}{11}; \frac{20}{11}\right)$.

C. $H\left(\frac{13}{11}; \frac{5}{11}; -\frac{20}{11}\right)$.

D. $H\left(-\frac{13}{11}; -\frac{5}{11}; \frac{20}{11}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: (α) có VTPT là $\vec{n} = (1; 3; -1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của $M(1; -1; 2)$ lên mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = t\vec{n} \\ H \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = -t + 2 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{11} \\ x = t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{11} \\ y = -\frac{5}{11} \\ z = \frac{20}{11} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{11}; -\frac{5}{11}; \frac{20}{11}\right).$$

VD 2. Tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$ là:

A. $M'(0; 2; -1)$.

B. $M'(4; 2; -3)$.

C. $M'(2; -1; 5)$.

D. $M'(0; 1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

(α) có VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của $M(1; 2; 3)$ lên mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = t\vec{n} \\ H \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 3 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right).$$

$M'(x'; y'; z')$ là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_H - x_M = 0 \\ y' = 2y_H - y_M = 1 \Rightarrow M'(0;1;3) \\ z' = 2z_H - z_M = 3 \end{cases}$$

VD 3. Tọa độ H là hình chiếu của điểm $M(2; -3; 1)$ qua mặt phẳng $(\alpha): -x + 2y + z + 1 = 0$ là:

A. $H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)$. **B.** $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)$. **C.** $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

(α) có VTPT là $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của $M(2; -3; 1)$ lên mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = t\vec{n} \\ H \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = t + 1 \\ -x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(1; -1; 2).$$

Dạng 9. Tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý: • Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

• Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

VD 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 5)$ và mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - y + 2z - 6 = 0$. Khoảng cách từ điểm M mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{5\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Áp dụng công thức } d(M, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{11}{3}.$$

VD 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x - y + z - 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm A mặt phẳng (P) là:

A. $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Áp dụng công thức } d(A, (P)) = \frac{|1.2 - 1.1 + 1.(-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

VD 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$

$(\beta): 2x + 3y - z + 16 = 0$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là:

A. $\sqrt{14}$.

B. 0.

C. 15.

D. $\sqrt{23}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Vì } \frac{2}{2} = \frac{3}{3-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{16} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Chọn $M(0; 0; 2) \in (\alpha)$ thì khoảng cách giữa (α) và (β) là:

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = \frac{|2.0 + 3.0 - 2 + 16|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{14}.$$

Dạng 10. Tìm góc giữa hai mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Vì góc giữa $(\alpha), (\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ nên

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Chú ý: • $0^\circ \leq ((\alpha), (\beta)) \leq 90^\circ$.

• $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

VD 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình:

$(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và $(\beta): x - y + z - 5 = 0$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) , $\cos \varphi$ là số nào?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

(α) có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$

(β) có VTPT là $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

VD 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình:

$(\alpha): 2x - y + 2z - 4 = 0$ và $(\beta): x - 2y - 2z + 4 = 0$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ bằng:

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

(α) có VTPT là $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$

(β) có VTPT là $\vec{n}_2 = (1; -2; -2)$

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4 + 4}} = 0$$

$$\Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 90^\circ.$$

VD 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình:

$(\alpha): x - 2y + 3z + 6 = 0$ và $(\beta): x - 3z + 1 = 0$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) , $\cos \varphi$ là số nào?

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(α) có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; -2; 3)$

(β) có VTPT là $\vec{n}_2 = (1; 0; -1)$

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$\Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 90^\circ.$$

C. BÀI TẬP CÓ GIẢI

DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua điểm $B(3;4;-5)$ và song song với giá của mỗi vector $\vec{a} = (3;1;-1), \vec{b} = (1;-2;1)$ là:

A. $x - 4y - 7z - 16 = 0.$

B. $x - 4y + 7z + 16 = 0.$

C. $x + 4y + 7z + 16 = 0.$

D. $x + 4y - 7z - 16 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1; -4; -7) \Rightarrow$ Vector pháp tuyến của (α) là: $\vec{n} = (1; 4; 7)$

Phương trình (α) có dạng: $x + 4y + 7z + D = 0$.

Vì $B \in (\alpha) \Rightarrow 3 + 16 - 35 + D = 0 \Leftrightarrow D = 16$

Vậy $(\alpha): x + 4y + 7z + 16 = 0$

Câu 2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(3, -1, 2), B(4; -2; -1), C(2, 0, 2)$ là:

A. $x + y - 2 = 0.$

B. $x - y + 2 = 0.$

C. $x + y + 2 = 0.$

D. $x - y - 2 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -3), \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; 3; 0)$

$\Rightarrow$ vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là: $\vec{n} = (1; 1; 0)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $A(3; -1; 2)$ và nhận vector $\vec{n} = (1; 1; 0)$ làm pháp tuyến nên phương trình có dạng: $x + y - 2 = 0$.

Câu 3. Cho hai mặt phẳng $(P): x - 5y + 2z - 4 = 0$ và $(Q): 2x + y - z + 9 = 0$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(P), (Q)$, $\cos \varphi$ là số nào?

A. $\frac{\sqrt{5}}{6}.$

B. $\frac{\sqrt{6}}{5}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

(P) có VTPT $\vec{n}_1 = (1; -5; 2)$

(Q) có VTPT $\vec{n}_2 = (2; 1; -1)$

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{1 + 25 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 4. Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 3), B(3; 1; 2)$ và song song với vector $\vec{a} = (3; -1; -4)$ là:

A. $9x + y - 7z + 40 = 0$.

B. $9x - y + 7z - 40 = 0$.

C. $9x - y - 7z + 40 = 0$.

D. $9x + y + 7z - 40 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -1) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{a}] = (-9; 1; -7)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và nhận vector $\vec{n} = (-9; 1; -7)$ làm vector pháp tuyến nên phương trình có dạng: $9x - y + 7z - 40 = 0$

Câu 5. Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(4; -1; 1), B(3; 1; -1)$ và song song với trục Ox là:

A. $y + z + 2 = 0$.

B. $y - z - 2 = 0$.

C. $y + z = 0$.

D. $y - z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -2), \text{ vector đơn vị của trục } Ox \text{ là } \vec{i} = (1; 0; 0)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{i}] = (0; -2; -2)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(4; -1; 1)$ và nhận vector $\vec{n} = (0; -2; -2)$ làm vector pháp tuyến nên phương trình có dạng: $y + z = 0$

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(3; -2; 1), B(-4; 0; 3), C(1; 4; -3), D(2; 3; 5)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng chứa AC và song song với BD là:

A. $12x + 10y + 21z + 35 = 0$.

B. $12x - 10y + 21z - 35 = 0$.

C. $12x - 10y - 21z - 35 = 0$.

D. $12x + 10y - 21z + 35 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = (-2; 6; -4); \overrightarrow{BD} = (6; 3; 2) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}] = (24; -20; -42)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $A(4; -1; 1)$ và nhận vector $\vec{n} = (24; -20; -42)$ làm vector pháp tuyến nên phương trình có dạng: $12x - 10y - 21z - 35 = 0$.

Câu 7. Cho ba điểm $A(4; 3; 2), B(-1; -2; 1), C(-2; 2; -1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là:

A. $x - 4y + 2z + 4 = 0$.

B. $x + 4y - 2z - 4 = 0$.

C. $x - 4y + 2z + 4 = 0$.

D. $x - 4y - 2z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (-1; 4; -2)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng vuông góc với BC có dạng: $-x + 4y - 2z + D = 0$

Vì phương trình mặt phẳng đi qua A nên $-4 + 4.3 - 2.2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -4$

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $-x + 4y - 2z - 4 = 0$ hay $x - 4y + 2z + 4 = 0$

Câu 8. Cho hai điểm $A(1;-4;4), B(3;2;6)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là:

A. $x - 3y + z + 4 = 0$.

B. $x - 3y - z + 4 = 0$.

C. $x + 3y - z - 4 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;-1;5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (2; 6; 2)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $I(2;-1;5)$ và nhận vector $\overrightarrow{AB} = (2; 6; 2)$ làm VTPT nên có dạng: $x + 3y + z - 4 = 0$

Câu 9. Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là:

A. $x + y + z = 0$.

B. $x + y = 0$.

C. $x - y = 0$.

D. $z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{k}(0;0;1)$ và đi qua $O(0;0;0)$ nên có phương trình $z = 0$.

Câu 10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1), B(1;0;4), C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là:

A. $2x + y + 5z - 5 = 0$.

B. $x + 2y - 5z + 5 = 0$.

C. $x + 2y + 5z - 5 = 0$.

D. $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Véc tơ chỉ phương (VTCP) đường thẳng BC là $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng BC nên có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$.

Phương trình mặt phẳng là: $-(x-2) - 2(y+1) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0$.

Câu 11. Mặt phẳng (Oyz) có phương trình là:

A. $y + z = 0$.

B. $x = 0$.

C. $y - z = 0$.

D. $y - z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình mặt phẳng (Oyz) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{i}(1;0;0)$ và đi qua $O(0;0;0)$ nên có phương trình $x=0$

Câu 12. Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

A. $y=0$.

B. $x+z=0$.

C. $x-z=0$.

D. $x-y+z=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (Oxz) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{j}(0;1;0)$ và đi qua $O(0;0;0)$ nên có phương trình $y=0$.

Câu 13. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;0;0)$ và nhận $\vec{n}(1,2,3)$ làm véc tơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x+2y+3z-3=0$.

B. $x+2y+3z+3=0$.

C. $3(x-1)=0$.

D. $2y+3z-3=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $1(x-3)+2(y-0)+3(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-3=0$

Câu 14. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$ và vuông góc với trục Oy. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $z+2=0$.

B. $x+z+1=0$.

C. $y-3=0$.

D. $x+y+z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{j}(0;1;0)$ và đi qua $M(1;3;-2)$ nên có phương trình $y-3=0$

Câu 15. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;2;0)$ và nhận $\vec{i}(1,0,0)$ làm véc tơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $3x+2y-3=0$.

B. $y-2=0$.

C. $z=0$.

D. $x-3=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{i}(1;0;0)$ và đi qua $M(3;2;0)$ nên có phương trình $x-3=0$

Câu 16. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$ và vuông góc với đường thẳng BC với $B(0;2;-3); C(1;-4;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x - 6y + 4z + 25 = 0$.

B. $x - 6y + 4z - 25 = 0$.

C. $x + 6y + 4z + 25 = 0$.

D. $x + 6y + 4z - 25 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (1; -6; 4)$ và đi qua $M(1;3;-2)$ nên có phương trình $x - 6y + 4z + 25 = 0$

Câu 17. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và song song hoặc chứa giá của hai véc tơ $\vec{u} = (3;2;1); \vec{v} = (-3;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + 3y + 3z - 9 = 0$.

B. $x - 3y + 3z + 9 = 0$.

C. $x - 3y + 3z - 9 = 0$.

D. $x - 3y - 3z - 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (2; -6; 6)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $x - 3y + 3z - 9 = 0$

Câu 18. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;1;-1)$ và song song hoặc chứa giá của hai vectơ $\vec{u} = (2;-1;3); \vec{v} = (-1;-2;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

B. $x - 13y - 5z - 5 = 0$.

C. $x - 13y + 5z + 5 = 0$.

D. $x + 13y - 5z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (1; -13; -5)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình:
 $x - 13y - 5z + 5 = 0$

Câu 19. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $O(0;0;0)$ và song song hoặc chứa giá của hai vectơ $\vec{u} = (2;0;0); \vec{v} = (4;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2y - z = 0$.

B. $2y + z = 0$.

C. $x + 2y + z = 0$.

D. $-x + 2y + z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; -4; -2)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; 0; 0)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình :

$$2y + z = 0$$

Câu 20. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -3; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(R): x - 2y - z + 8 = 0$

A. $7x + 5y - 3z + 14 = 0.$

B. $4x - 3y - 24 = 0.$

C. $-4x + 3y + 24 = 0.$

D. $4x - 3y = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n}_Q, \vec{n}_R] = (7; 5; -3)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -3; 2)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình:

$$7x + 5y - 3z + 14 = 0$$

Câu 21. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(5; 1; 3); B(1; 6; 2); C(5; 0; 4)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $x + y - z - 3 = 0.$

B. $x + y + z - 9 = 0.$

C. $x - y + z - 7 = 0.$

D. $x + y + z + 9 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (4; 4; 4)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(5; 1; 3)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình :

$$x + y + z - 9 = 0$$

Câu 22. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(5; 1; 3); B(5; 0; 4); C(4; 0; 6)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $2x + y + z - 14 = 0.$

B. $2x + y + z + 14 = 0.$

C. $2x + y - z - 8 = 0.$

D. $2x - y + z - 12 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{AC}, \vec{AB}] = (2; 1; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(5; 1; 3)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình :

$$2x + y + z - 14 = 0$$

Câu 23. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;-5)$ lên các trục tọa độ $Ox; Oy; Oz$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $15x + 10y - 6z - 30 = 0.$

B. $15x + 10y - 6z + 30 = 0.$

C. $15x + 10y + 6z - 30 = 0.$

D. $-15x + 10y - 6z - 30 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $A; B; C$ là hình chiếu của điểm $M(2;3;-5)$ lên các trục tọa độ $Ox; Oy; Oz$. Lúc đó ta có $A(2;0;0); B(0;3;0); C(0;0;-5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-5} = 1 \Leftrightarrow 15x + 10y - 6z - 30 = 0.$$

Cách khác: Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (15; 10; -6)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình:

$$15x + 10y - 6z - 30 = 0$$

Câu 24. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ $Oxy; Oyz; Ozx$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + y + z - 1 = 0.$

B. $x + y + z - 3 = 0.$

C. $x + y + z - 2 = 0.$

D. $x + y + z + 2 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A; B; C$ là hình chiếu của điểm $M(1;1;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ $Oxy; Oyz; Oxz$. Lúc đó ta có: $A(1;1;0); B(0;1;1); C(1;0;1)$

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;0)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình:

$$x + y + z - 2 = 0$$

Câu 25. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của điểm $M(30;15;6)$ lên các trục tọa độ $Ox; Oy; Oz$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + 2y - 5z - 30 = 0.$

B. $x + 2y + 5z + 30 = 0.$

C. $x + 2y + 5z - 90 = 0.$

D. $x + 2y + 5z - 30 = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $A; B; C$ là hình chiếu của điểm $M(30;15;6)$ lên các trục tọa độ $Ox; Oy; Oz$. Lúc đó ta có $A(30;0;0); B(0;15;0); C(0;0;6)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0.$$

Câu 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(3; -1; 2)$, $B(-3; 1; 2)$ là:

- A.** $3x - y = 0$. **B.** $3x + y = 0$.
C. $x - 3y = 0$. **D.** $x + 3y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

VTPT của mặt phẳng là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-6; 2; 0)$.

Tọa độ M trung điểm AB là: $M(0; 0; 2)$.

Phương trình mặt phẳng: $-6(x - 0) + 2(y - 0) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y = 0$.

Câu 27. Cho ba mặt phẳng: $x + y + 2z + 1 = 0$; $(\beta): x + y - z + 2 = 0$; $(\gamma): x - y + 5 = 0$;

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $(\alpha) // (\gamma)$. **B.** $(\alpha) \perp (\beta)$.
C. $(\gamma) \perp (\beta)$. **D.** $(\alpha) \perp (\gamma)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Véc tơ pháp tuyến của các mặt là: $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)$; $\vec{n}_\beta = (1; 1; -1)$; $\vec{n}_\gamma = (1; -1; 0)$; nhận thấy $\vec{n}_\alpha \neq k \vec{n}_\gamma$ do đó $(\alpha) // (\gamma)$; là sai

Câu 28. Với giá trị nào của m để cặp mặt phẳng sau đây vuông góc?

$(\alpha): 2x + my + 2mz - 9 = 0$ và $(\beta): 6x - y - z - 10 = 0$

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng là: $\vec{n}_\alpha = (2; m; 2m)$; $\vec{n}_\beta = (6; -1; -1)$. Để hai mặt phẳng vuông góc thì $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 29. Xác định giá trị của m và n để cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau:

$(\alpha): 2x + my + 3z - 5 = 0$

$(\beta): nx - 8y - 6z + 2 = 0$

- A.** $\begin{cases} m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m = -4 \\ n = -4 \end{cases}$.

$$\text{C. } \begin{cases} m = 4 \\ n = 4 \end{cases}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} m = -4 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -12 \\ -6m = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$$

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình:
 $(\alpha): 2x + (m+1)y + 3z - 5 = 0$, $(\beta): (n+1)x - 6y - 6z = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau khi và chỉ khi tích $m.n$ bằng:

A. 5.

B. 10.

C. -10.

D. -5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} = \frac{m+1}{-6} = \frac{3}{-6} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow m.n = -10.$$

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - my + 3z + m + 6 = 0$ và $(\beta): (m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$. Với giá trị nào của m thì (α) và (β) song song với nhau?

A. 1.

B. 2.

C. -3.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Hai mặt phẳng } (\alpha) // (\beta) \text{ nếu } \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m+6}{-10} \quad (*).$$

$$\text{Xét phương trình } \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

$$\text{Thay } m = 1 \text{ vào } (*) \text{ ta có: } \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \neq \frac{7}{-10}. \text{ Vậy } m = 1 \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

$$\text{Thay } m = -4 \text{ vào } (*) \text{ ta có: } \frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq \frac{3}{-19}. \text{ Vậy } m = -4 \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng: $(\alpha): 3x - 5y + mz - 3 = 0$, $(\beta): 2x + ny - 3z + 1 = 0$. Cặp số (m, n) bằng bao nhiêu thì (α) và (β) song song với nhau?

A. $(3; 3)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(1; 2)$.

D. $\left(-\frac{9}{2}; -\frac{10}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hai mặt phẳng $(\alpha) // (\beta)$ nếu $\frac{3}{2} = \frac{-5}{n} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{-5}{n} \\ \frac{3}{2} = \frac{m}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{10}{3} \\ m = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Câu 33. Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $O(0;0;0)$ lên mặt phẳng tọa độ $(\alpha): x+2y+5z-30=0$. Tọa độ của H là:

- A. $H(2;1;5)$. B. $H(1;2;5)$. C. $H(1;0;5)$. D. $H(5;1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $H(x;y;z)$ là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $O(0;0;0)$ lên mặt phẳng tọa độ (α) .

Lúc đó ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và $\overrightarrow{OH}$ cùng phương, tức là $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{n_\alpha}$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x+2y+5z-30=0 \\ x=t \\ y=2t \\ z=5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+4t+25t-30=0 \\ x=t \\ y=2t \\ z=5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow H(1;2;5)$$

Câu 34. Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên mặt phẳng tọa độ Oxy . Tọa độ của H là:

- A. $H(1;1;0)$. B. $H(1;1;1)$. C. $H(1;0;0)$. D. $H(0;0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên mặt phẳng tọa độ Oxy . Lúc đó tọa độ của H có dạng $H(x;y;0)$ và do đó $\overrightarrow{MH}(x-1;y-1;-1)$ mà

$$\overrightarrow{MH} \perp (Oxy) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{i} = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(1;1;0)$$

Câu 35. Gọi H là Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên mặt phẳng Oyz . Tọa độ của H là:

- A. $H(0;0;1)$. B. $H(1;0;1)$. C. $H(1;0;0)$. D. $H(0;1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên mặt phẳng tọa độ Oyz . Lúc đó tọa độ của H có dạng $H(0;y;z)$ và do đó $\overrightarrow{MH}(-1;y-1;z-1)$ mà

$$\overrightarrow{MH} \perp (Oyz) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{k} = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(0;1;1)$$

Câu 36. Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ (Oxz) .
Tọa độ của H là:

- A.** $H(0;1;1)$. **B.** $H(1;0;1)$. **C.** $H(1;0;0)$. **D.** $H(0;1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;1;1)$ lên mặt phẳng tọa độ (Oxz) . Lúc đó tọa độ của H có dạng $H(x;0;z)$ và do đó $\overrightarrow{MH}(x-1;-1;z-1)$ mà

$$\overrightarrow{MH} \perp (Oxz) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{i} = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow H(1;0;1)$$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y+4z+1=0$ và $(\beta): x+2y+2z+2=0$ là:

- A.** $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) // (\beta) \text{ nên } d[(\alpha), (\beta)] = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc hợp bởi mặt phẳng $(\alpha): \sqrt{2}x+y+z-5=0$ và mặt phẳng (Oxy) là?

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt phẳng (α) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}; 1; 1)$

Mặt phẳng (Oxy) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 39. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $A(-2; 4; 3)$ trên mặt phẳng $2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có toạ độ là:

- A. $(1; -1; 2)$. B. $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$. C. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$. D. $(2; -3; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Giải tự luận

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 6)$

Đường thẳng AH vuông góc (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 6)$ làm vector chỉ phương

$$\Rightarrow \text{Đường thẳng } AH \text{ đi qua } A(-2; 4; 3) \text{ có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Ta có $H \in d \Rightarrow H(-2 + 2t; 4 - 3t; 3 + 6t)$ mặt khác vì $H \in (P)$ nên:

$$2(-2 + 2t) - 3(4 - 3t) + 6(3 + 6t) + 19 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} \Rightarrow H\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$$

Cách 2: Giải trắc nghiệm

Ứng dụng công thức giải nhanh tìm hình chiếu của một điểm lên mặt phẳng

$$\text{Hằng số } t = -\frac{Ax_A + By_A + Cz_A + D}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 19}{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{Toạ độ điểm H là: } \begin{cases} x_H = x_A + At = -2 + 2\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{20}{7} \\ y_H = y_A + Bt = 4 + (-3)\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{37}{7} \\ z_H = z_A + Ct = 3 + 6\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$$

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng qua 3 điểm $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(2; -1; 1)$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ:

- A. $M\left(\frac{11}{5}; 0; 0\right)$. B. $M\left(\frac{-11}{5}; 0; 0\right)$. C. $M\left(\frac{11}{7}; 0; 0\right)$. D. $M(3; 0; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -2; 3) \\ \overrightarrow{AC} = (1; -3; 2) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 7; 8)$$

Mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;1;1)$ và nhận $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5;7;8)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là: $5(x-1)+7(y-2)+8(z+1)=0 \Leftrightarrow 5x+7y+8z-11=0$

Gọi M là giao điểm của (ABC) với trục Ox . $M(x;0;0) \in Ox$

$$M(x;0;0) \in (ABC): 5x+7y+8z-11=0 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $E(4;-1;1)$, $F(3;1;-1)$ và chứa trục Ox . Phương trình nào là phương trình tổng quát của (P) :

- A. $(P): x+y=0$. B. $(P): x+y+z=0$. C. $(P): y+z=0$. D. $(P): x+z=0$.

Hướng dẫn giải :

Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{EF} = (-1;2;-2)$

Trục Ox có véc tơ chỉ phương là: $\vec{i} = (1;0;0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{EF}, \vec{i}] = (0;-2;-2)$$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và nhận $\Rightarrow [\overrightarrow{EF}, \vec{i}] = (0;-2;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $y+z=0$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x-4y+z+12=0$. Phương trình của mặt phẳng (P) là:

- A. $x-4y+z+4=0$. B. $x-4y+z-12=0$.
C. $x-4y+z-4=0$. D. $x-4y+z+3=0$.

Hướng dẫn giải :

Chọn A.

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1;-4;1)$

Vì mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}_{(Q)} = (1;-4;1)$ làm vector pháp tuyến.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ có phương trình là:

$$1(x-1)-4(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x-4y+z+4=0$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;6;-3)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x-2=0$, $(\beta): y-6=0$, $(\gamma): z+3=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. (α) đi qua điểm I . B. $(\gamma) // Oz$.
C. $(\beta) // (xOz)$. D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

Mặt phẳng $(\gamma): z + 3 = 0$ cắt trục Oz tại điểm $M(0; 0; -3)$

Câu 44. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa trục Oy và điểm $M(1; 4; -3)$ là:

- A. $3x + z = 0$. B. $3x + y = 0$. C. $x + 3z = 0$. D. $3x + z = 0$.

Hướng dẫn giải :

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (1; 4; -3)$

Trục Oy có véc tơ chỉ phương là: $\vec{j} = (0; 1; 0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{OM}, \vec{j}] = (3; 0; 1)$$

Mặt phẳng (Q) đi qua $O(0; 0; 0)$ và nhận $[\overrightarrow{OM}, \vec{j}] = (3; 0; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $3x + z = 0$

Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2y + z = 0$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. $(\alpha) // Ox$. B. $(\alpha) // (yOz)$. C. $(\alpha) // Oy$. D. $(\alpha) \supset Ox$.

Hướng dẫn giải :

Chọn D.

Ta thấy $O(0; 0; 0)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2y + z = 0$ nên loại các câu A; B và C.

Câu 46. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(-2; -4; 3)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ là :

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 11.

Hướng dẫn giải :

Chọn C.

$$\text{Ta có } d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1.$$

Câu 47. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -1; -1)$ trên mặt phẳng $(P): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Độ dài đoạn AH là:

- A. 55. B. $\frac{11}{5}$. C. $\frac{1}{25}$. D. $\frac{22}{5}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

Vì H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) nên

$$\text{Ta có } AH = d(A, (P)) = \frac{|16 \cdot 2 + 12 + 15 - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{11}{5}.$$

Câu 48. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$ và $(\beta): 2x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa (α) và (β) là:

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. 2. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{7}{2\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn D.

Ta có

$$(\alpha): x + y - z + 5 = 0$$

$$(\beta): 2x + 2y - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{Vì } (\alpha) \parallel (\beta) \text{ nên ta có } d((\alpha), (\beta)) = \frac{\left|5 - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{2\sqrt{3}}.$$

Câu 49. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α) . Khoảng cách giữa (α) và (β) là:

A. $\frac{9}{14}$. B. $\frac{9}{\sqrt{14}}$. C. $\frac{3}{14}$. D. $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

$$(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}_{(\alpha)} = (3; -2; -1)$$

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \text{ đi qua } M(1; 7; 3) \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_{(\alpha)} = (2; 1; 4)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (\beta) \supset \Delta \\ (\beta) \parallel (\alpha) \end{cases} \text{ nên } (\beta) \text{ đi qua điểm } M(1; 7; 3) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n}_{(\beta)} = (3; -2; -1)$$

$$\text{Do đó } mp(\beta) \text{ là } 3x - 2y - z + 14 = 0$$

$$\text{Vì } (\alpha) \parallel (\beta) \text{ nên ta có } d((\alpha), (\beta)) = \frac{|14 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

Câu 50. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 3), B(-1; 3; 2), C(-1; 2; 3)$. Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến $mp(ABC)$ bằng:

A. $\sqrt{3}$.

B. 3.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 1; 0)$$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$ là

$$x - 1 + 2(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

$$\text{Do đó } d(O, (ABC)) = \frac{|9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3.$$

DẠNG TỰ LUẬN

Bài 1. Viết phương trình của mặt phẳng:

- Đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến.
- Đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3; 0; 1)$.
- Đi qua ba điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -1)$.
- Đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$.
- Đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + z - 7 = 0$.
- Đi qua ba điểm $M(2; 0; -1)$, $N(1; -2; 3)$, $P(0; 1; 2)$.
- Đi qua hai $A(1; 1; -1)$, $B(5; 2; 1)$ và song song với trục Oz .
- Đi qua điểm $M(3; 2; -1)$ và song song với mặt phẳng có phương trình $x - 5y + z = 0$.
- Đi qua hai điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$.
- Đi qua điểm $G(1; 2; 3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A , B , C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC .
- Đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC .

Hướng dẫn giải

- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến là: $2(x - 1) + 3(y + 2) + 5(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5z - 16 = 0$.
- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và nhận $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (2; -6; 6)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2(x - 0) - 6(y + 1) + 6(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 9 = 0$$
- Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 0; -1) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 3; 6)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $A(-3;0;0)$ và nhận $\vec{n} = (2;3;6)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $2(x+3)+3(y-0)+6(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+6z+6=0$

d) Đi qua điểm $M(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+3z+4=0$.

Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng: $2x-y+3z+4=0$ nên phương trình có dạng: $2x-y+3z+D=0$

Vì $M(2;-1;2) \in (\alpha) \Rightarrow 2.2-1.(-1)+2.3+D=0 \Leftrightarrow D=-11$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-y+3z-11=0$.

e) Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;2;2)$ và (β) có VTPT là: $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = (2;-1;1)$

Vì (α) đi qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(5;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+z-7=0 \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(\beta)}}] = (4;0;-8)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(1;0;1)$ và nhận $\vec{n} = (4;0;-8)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-1)-8(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2z+1=0$.

f) Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1;-2;4)$, $\overrightarrow{MP} = (-2;1;3) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (-10;-5;-5)$

Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua $M(2;0;-1)$ và nhận $\vec{n} = (-10;-5;-5)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $-10(x-2)-5(y-0)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-3=0$

g) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;1;2)$ và Oz có vector đơn vị là $\vec{k} = (0;0;1)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = (1;-4;0)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm đi qua $A(1;1;-1)$ và nhận $\vec{n} = (1;-4;0)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $1(x-1)-4(y-1)+0(z+1)=0 \Leftrightarrow x-4y+3=0$

h) Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng: $x-5y+z=0$ nên phương trình có dạng: $x-5y+z+D=0$ (α)

Vì $M(3;2;-1) \in (\alpha) \Rightarrow 3-5.2+(-1)+D=0 \Leftrightarrow D=8$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x-5y+z+8=0$

i) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1)$ và $\vec{n} = (1;-1;1)$ là VTPT của mặt phẳng $x-y+z+1=0$.

$\Rightarrow \vec{m} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (0;2;2)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm đi qua $A(0;1;1)$ và nhận vector $\vec{m} = (0;2;2)$ làm VTPT nên có phương trình là: $0(x-0)+2(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow y+z-2=0$.

j) Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Vì (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A, B, C \Rightarrow A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Mặt khác: $G(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \frac{a}{3}=1, \frac{b}{3}=2, \frac{c}{3}=3 \Rightarrow a=3, b=6, c=9$

$\Rightarrow A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;9)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

k) Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Vì (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A, B, C \Rightarrow A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

H là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = c = 2a \neq 0$.

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a$

Mặt khác, ta có: $H(2;1;1) \in (\alpha) \Rightarrow 2.2 + 1 + 1 = 2a \Leftrightarrow a = 3$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $2x + y + z - 6 = 0$.

Bài 2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2;3;7), B(4;1;3)$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB chính là đoạn thẳng qua trung điểm I của AB và vuông góc với vector $\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -4)$ và $I(3; 2; 5)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x-3) - 2(y-2) - 4(z-5) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 9 = 0.$$

Bài 3.

- Lập phương trình của các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$.
- Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $M(2;6;-3)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

Hướng dẫn giải

- Mặt phẳng (Oxy) qua điểm $O(0;0;0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$ và là vector chỉ phương của trục Oz . Phương trình mặt phẳng (Oxy) có dạng:

$$0.(x-0) + 0.(y-0) + 1.(z-0) = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Tương tự ta có, phương trình mặt phẳng (Oyz) là: $x=0$ và phương trình mặt phẳng (Oxz) là: $y=0$.

- b) Mặt phẳng (P) qua điểm $M(2;6;-3)$ song song với mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $z+3=0$.

Tương tự mặt phẳng (Q) qua $M(2;6;-3)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là: $x-2=0$.

Mặt phẳng qua $M(2;6;-3)$ song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y-6=0$.

Bài 4. Lập phương trình của mặt phẳng:

- Chứa trục Ox và điểm $P(4;-1;2)$.
- Chứa trục Oy và điểm $Q(1;4;-3)$.
- Chứa trục Oz và điểm $R(3;-4;7)$.

Hướng dẫn giải

- a) Gọi (α) là mặt phẳng qua P và chứa trục Ox thì (α) qua điểm $O(0;0;0)$ và chứa giá của các vector $\vec{OP}=(4;-1;2)$ và $\vec{i}=(1;0;0)$. Khi đó $\vec{n}=[\vec{OP}, \vec{i}]= (0;2;1)$ là vector pháp tuyến của (α) .

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $2y+z=0$.

- b) Tương tự phần a) mặt phẳng (β) qua điểm $Q(1;4;-3)$ và chứa trục Oy thì (β) qua điểm $O(0;0;0)$ có $\vec{OQ}=(1;4;-3)$ và $\vec{j}=(0;1;0)$. Khi đó $\vec{n}=[\vec{OQ}, \vec{j}]= (3;0;1)$ là vector pháp tuyến của (β) .

Phương trình mặt phẳng (β) có dạng: $3x+z=0$.

- c) Mặt phẳng (γ) qua điểm $R(3;-4;7)$ và chứa trục Oz chứa giá của các vector $\vec{OR}=(3;-4;7)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$. Khi đó $\vec{n}=[\vec{OR}, \vec{k}]= (4;3;0)$ là vector pháp tuyến của (γ) .

Phương trình mặt phẳng (γ) có dạng: $4x+3y=0$.

Bài 5. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$.

- Viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD) .
- Viết phương trình mp (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD .

Hướng dẫn giải

- a) • Mặt phẳng (ACD) đi qua $A(5;1;3)$ và chứa giá của các vector $\vec{AC}=(0;-1;1)$ và $\vec{AD}=(-1;-1;3)$.

Vector $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (-2; -1; -1)$ vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Phương trình (ACD) có dạng: $2(x-5) + (y-1) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 14 = 0$.

• Tương tự: Mặt phẳng (BCD) qua điểm $B(1; 6; 2)$ và nhận vector $\vec{m} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]$ làm vector pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (3; -6; 4)$ và $\vec{m} = (-12; -10; -6)$

Phương trình mặt phẳng (BCD) có dạng:

$$-12(x-1) - 10(y-6) - 6(z-2) = 0 \Leftrightarrow 6x + 5y + 3z - 42 = 0$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$

Mặt phẳng (α) qua cạnh AB và song song với CD thì (α) qua A và nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (10; 9; 5)$ làm vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

Bài 6. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng sau:

- $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$;
- $x - 2y + z - 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$;
- $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y + 2z + 3 = 0$;
- $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;
- $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

Hướng dẫn giải

- Ta có: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-7} \Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau.
- Ta có: $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau.
- Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow$ hai mặt phẳng song song nhau.
- Ta có: $\frac{3}{9} \neq \frac{-2}{-6} \neq \frac{3}{-9} \Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau.
- Ta có: $\frac{1}{10} = \frac{-1}{-10} = \frac{2}{20} = \frac{-4}{-40} \Rightarrow$ hai mặt phẳng trùng nhau.

Bài 7. Xác định m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau song song:

- $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$.
- $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.
- $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$.
- $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Hai mặt phẳng $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$ song song với nhau khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4 \end{cases}.$$

b) Hai mặt phẳng $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$ song song với nhau khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{3}{2} = \frac{-5}{n} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{10}{3} \\ m = -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

c) Hai mặt phẳng $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$ song song với nhau khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{2}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

d) Hai mặt phẳng $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$ song song với nhau khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \neq \frac{-2}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{2} \\ m = 4 \end{cases}.$$

Bài 8. Cho hai mặt phẳng $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$.

- Tìm m để hai mặt phẳng đó song song.
- Tìm m để hai mặt phẳng đó trùng nhau.
- Tìm m để hai mặt phẳng đó cắt nhau.
- Tìm m để hai mặt phẳng đó vuông góc.

Hướng dẫn giải

a) Để hai mặt phẳng song song thì

$$\frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \\ \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \\ 5m^2 - 29m + 24 \neq 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên không có m thỏa mãn đề bài.

b) Để hai mặt phẳng trùng nhau thì

$$\frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{m-6}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \\ \frac{3}{5m+1} = \frac{m-6}{-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \\ 5m^2 - 29m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

c) Để hai mặt phẳng cắt nhau thì

$$\frac{2}{m+3} \neq \frac{-m}{-2} \neq \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m+3} \neq \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{5m+1} \\ \frac{3}{5m+1} \neq \frac{m-6}{-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+3m-4 \neq 0 \\ 5m^2+m-6 \neq 0 \\ 5m^2-29m+24 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

d) VTPT của hai mặt phẳng là: $\vec{n}_1 = (2; -m; 3), \vec{m} = (m+3; -2; 5m+1)$

Để hai mặt phẳng vuông góc thì $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-9}{19}$.

Bài 9. Tính khoảng cách từ điểm $A(2; 4; -3)$ lần lượt đến các mặt phẳng (P) sau:

- a) $2x - y + 2z - 9 = 0$;
- b) $12x - 5z + 5 = 0$;
- c) $x = 0$.

Hướng dẫn giải

$$a) d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 5.$$

$$b) d(A, (P)) = \frac{|12 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{44}{13}.$$

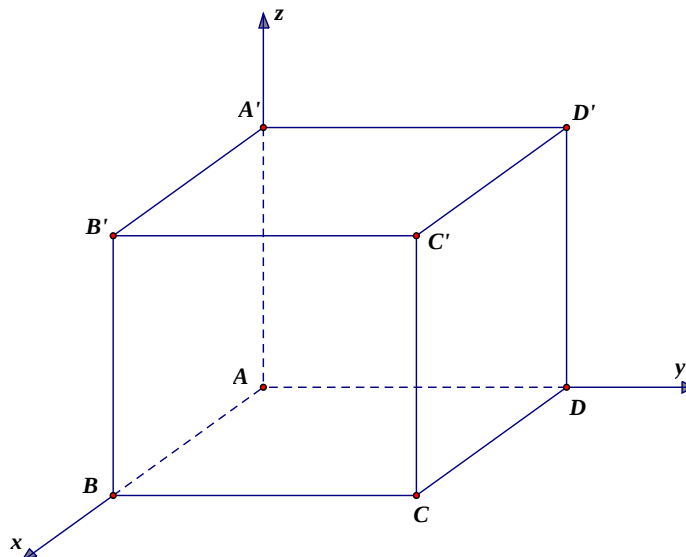
$$c) d(A, (P)) = 2.$$

Bài 10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp tọa độ:

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

- a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau.
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1)$. Khi đó $B'(1;0;1), D'(0;1;1), C'(1;1;1)$.

- a) Mặt phẳng $(AB'D')$ qua điểm A và nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}]$ làm vector pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{AB'} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{AD'} = (0;1;1)$ và $\vec{n} = (-1;-1;1)$.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$ có dạng:

$$x + y - z = 0. \quad (1)$$

Tương tự, mặt phẳng $(BC'D)$ qua điểm B nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}]$ làm vector pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (0;1;1)$ và $\vec{m} = (1;1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng $(BC'D)$ có dạng:

$$x + y - z - 1 = 0. \quad (2)$$

So sánh hai phương trình (1) và (2), ta thấy hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau.

- b) Vì $(AB'D') \parallel (BC'D)$ nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BC'D)$ chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng. Ta có: $d(A, (BC'D)) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11. Tìm tập hợp các điểm các điều hai mặt phẳng sau:

- a) $(\alpha): 2x - y + 4z + 5 = 0$ và $(\alpha'): 3x + 5y - z - 1 = 0$;
 b) $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): 6x - 3y + 2z - 2 = 0$;
 c) $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 2y + z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

- a) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cách đều $(\alpha), (\alpha')$. Ta có:

$$\begin{aligned} d(M, (\alpha)) &= d(M, (\alpha')) \Leftrightarrow \frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9 + 25 + 1}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm \sqrt{3}(3x + 5y - z - 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0 \\ (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm là hai mặt phẳng:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})x - (\sqrt{5}+5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5}+\sqrt{3})z + 5\sqrt{5}+\sqrt{3} &= 0 \text{ và} \\ (2\sqrt{5}+3\sqrt{3})x - (\sqrt{5}-5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5}-\sqrt{3})z + 5\sqrt{5}-\sqrt{3} &= 0.\end{aligned}$$

b) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cách đều $(\alpha), (\alpha')$. Ta có:

$$\begin{aligned}d(M, (\alpha)) &= d(M, (\alpha')) \Leftrightarrow \frac{|2x+y-2z-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|6x-3y+2z-2|}{\sqrt{36+9+4}} \\ \Leftrightarrow 7(2x+y-2z-1) &= \pm 3(6x-3y+2z-2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+16y-20z-1=0 \\ 32x-2y-8z-13=0 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm là hai mặt phẳng: $-4x+16y-20z-1=0$ và $32x-2y-8z-13=0$.

c) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cách đều $(\alpha), (\alpha')$. Ta có:

$$\begin{aligned}d(M, (\alpha)) &= d(M, (\alpha')) \Leftrightarrow \frac{|x+2y+z-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|x+2y+z+5|}{\sqrt{1+4+1}} \\ \Leftrightarrow x+2y+z-1 &= \pm(x+2y+z+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 = x+2y+z+5 \\ x+2y+z-1 = -x-2y-z-5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow -1 &= 5 \text{ (vô lý) hoặc } x+2y+z+2=0\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm là mặt phẳng: $x+2y+z+2=0$.

Bài 12. Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau:

a) M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mp $(\alpha): 2x+3y+z-17=0$.

b) M cách đều 2 mp $x+y-z+1=0$ và $x-y+z+5=0$.

Hướng dẫn giải

Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; c)$.

a) Ta có: $MA = \sqrt{4+9+(4-c)^2} = \sqrt{18+(4-c)^2}$

Vì M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mp $(\alpha): 2x+3y+z-17=0$ nên ta có:

$$\begin{aligned}MA &= d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow MA^2 = [d(M, (\alpha))]^2 \Leftrightarrow 18+(4-c)^2 = \frac{(c-17)^2}{14} \Leftrightarrow c=3 \\ \Rightarrow M &(0; 0; 3).\end{aligned}$$

b) Vì M cách đều 2 mp $x+y-z+1=0$ và $x-y+z+5=0$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\frac{|1-c|}{\sqrt{3}} &= \frac{|c+5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1-c = \pm(c+5) \Leftrightarrow c=-2. \\ \Rightarrow M &(0; 0; 2).\end{aligned}$$

Bài 13. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $4x+3y-12z+1=0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có dạng $4x + 3y - 12z + D = 0$.

Mặt khác: (α) tiếp xúc với mặt cầu $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 + 6 - 36 + D|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4 \Leftrightarrow |-26 + D| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 78 \\ D = -26 \end{cases}$$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(0;2;0)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x + 3y - 4z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $2x + 3y - 4z + 6 = 0$. B. $2x + 3y - 4z - 6 = 0$.
C. $2x + 3y + 4z - 6 = 0$. D. $2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Câu 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;2;-1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x - 5y + z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x - 5y + z + 8 = 0$. B. $x - 5y + z - 8 = 0$. C. $x - 5y + z + 18 = 0$. D. $x + 5y + z + 8 = 0$.

Câu 3. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(a;b;c)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $y - b = 0$. B. $z - c = 0$. C. $x - a = 0$. D. $y + z - b - c = 0$.

Câu 4. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(a;b;c)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x + y - b - a = 0$. B. $x - a = 0$. C. $y - b = 0$. D. $z - c = 0$.

Câu 5. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(a;b;c)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $y - b = 0$. B. $z - c = 0$. C. $x - a = 0$. D. $x + z - a - c = 0$.

Câu 6. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(4;0;1)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $2x + y - 2z + 3 = 0$; $-12x + 6y + 7 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. B. $x + 2y - 2z - 4 = 0$. C. $x + 2y + 2z + 6 = 0$. D. $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

Câu 7. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(2;5;-7)$ và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $x - 2y + 3z + 6 = 0$; $3x - 5z + 9 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $5x - 2y + 3z - 21 = 0$. B. $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.
C. $5x - 2y - 3z - 21 = 0$. D. $5x + 2y - 3z - 41 = 0$.

- Câu 8.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;-3)$ và song song hoặc chứa giá của hai véc tơ $\vec{u} = (0;1;0); \vec{v} = (1;4;-3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $3x - z - 6 = 0$. B. $3x - z = 0$. C. $-3x + z + 6 = 0$. D. $3x + z = 0$.
- Câu 9.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-4;7)$ và song song hoặc chứa giá của hai véc tơ $\vec{u} = (0;0;1); \vec{v} = (3;-4;7)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $4x + 3y = 0$. B. $4x - 3y - 24 = 0$. C. $-4x + 3y + 24 = 0$. D. $4x - 3y = 0$.
- Câu 10.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;6;2); B(5;0;4); C(4;0;6)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:
A. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$. B. $10x + 9y + 5z + 74 = 0$.
C. $10x + 9y - 5z - 74 = 0$. D. $10x - 9y + 5z + 34 = 0$.
- Câu 11.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(0;1;1); B(1;-2;0); C(1;0;2)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:
A. $-2x + y - z = 0$. B. $2x + y - z = 0$. C. $2x - y - z + 2 = 0$. D. $-2x - y - z + 2 = 0$.
- Câu 12.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(3;1;-1); B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $x - 13y - 5z + 5 = 0$. B. $2x + y + z - 2 = 0$.
C. $x - 13y - 5z - 5 = 0$. D. $2x + y + z = 0$.
- Câu 13.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(2;3;4); B(2;4;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $3x + 2z - 14 = 0$. B. $3x - 2z - 2 = 0$. C. $3x - 2z + 2 = 0$. D. $-3x - 2z - 2 = 0$.
- Câu 14.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;6;0); B(3;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 5x + 3y + 3z - 7 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $6x + 3y - 13z - 18 = 0$. B. $6x + 3y - 13z + 18 = 0$.
C. $6x + 3y + 13z - 18 = 0$. D. $-6x + 3y - 13z - 18 = 0$.
- Câu 15.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(2;0;0); B(0;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $3x + 2y - 5z - 6 = 0$. B. $3x + 2y - 5z + 6 = 0$.
C. $3x + 2y + 5z - 6 = 0$. D. $3x - 2y - 5z - 6 = 0$.
- Câu 16.** Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(1;2;3); B(3;3;5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 2y + z - 7 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $-3x - 4y - z + 8 = 0$. B. $3x - 4y - z - 8 = 0$.
C. $3x + 4 - z + 8 = 0$. D. $3x - 4y - z + 8 = 0$.
- Câu 17.** Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(-2;0;1), B(4;2;5)$. PT mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB là:
A. $3x + y + 2z - 10 = 0$. B. $3x + y + 2z + 10 = 0$.

C. $3x + y - 2z - 10 = 0$.

D. $3x - y + 2z - 10 = 0$.

Câu 18. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;1;1); B(-1;0;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x - y + z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $y + z + 2 = 0$.

B. $y + z - 2 = 0$.

C. $-y + z = 0$.

D. $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 19. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;3;1); B(3;-3;3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x - 3y + z - 4 = 0$.

B. $x - 3y + z + 4 = 0$.

C. $x - 3y - z - 4 = 0$.

D. $x + 3y + z - 4 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{a}(1;-1;2)$ và $\vec{b}(2;3;4)$ làm cặp vector chỉ phương, có phương trình là:

A. $2x - z - 1 = 0$.

B. $2x + y - z - 1 = 0$.

C. $2x - z + 1 = 0$.

D. $2x - y + z - 1 = 0$.

Câu 21. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(1;1;-1); B(5;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $2x + y + z - 2 = 0$.

B. $x - 4z - 3 = 0$.

C. $2x + y + z - 2 = 0$.

D. $x - 4z + 3 = 0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào có phương trình sau đây là mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(0;-1;2), B(-1;2;-3), C(0;0;-2)$?

A. $7x + 4y + z + 2 = 0$.

B. $3x + 4y + z + 2 = 0$.

C. $5x - 4y + z + 2 = 0$.

D. $7x + 4y - z + 2 = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(5;-2;0), B(-3;4;1)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{a}(1;1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $5x + 9y - 4z - 7 = 0$.

B. $5x + 9y - 14z - 7 = 0$.

C. $5x - 9y - 4z + 7 = 0$.

D. $5x + 9y + 4z + 7 = 0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5;4;3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là: (dùng pt đoạn chắn)

A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.

B. $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.

C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$.

D. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ là:

A. $13x - y - 5z + 5 = 0$.

B. $2x + y + 5z - 3 = 0$.

C. $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

D. $x - 2y - 5z + 3 = 0$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$. Phương trình của mặt phẳng là:

A. $4x - 2y + 3z + 5 = 0$.

B. $2x - y + 3z = 0$.

C. $2x - y + 3z - 7 = 0$.

D. $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-2; 1; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $3x + 2y - z + 5 = 0$ là:

A. $x - 5y - 7z = 0$. B. $x - 5y - 7z + 4 = 0$. C. $x + 5y - 7z = 0$. D. $x + 5y + 7z = 0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$, $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $(\alpha) // (\beta)$. B. $(\alpha) \perp (\beta)$. C. $(\alpha) \perp (\gamma)$. D. $(\beta) \perp (\gamma)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng CD có phương trình là:

A. $10x + 9y + 5z = 0$.

B. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

C. $10x - 9y + 5z + 74 = 0$.

D. $9x + 10y - 5z - 74 = 0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5; 4; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC$ có phương trình là:

A. $x + y + z - 12 = 0$.

B. $x + y + z = 0$.

C. $x + y + z + 3 = 0$.

D. $x - y + z = 0$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm M trên trục Oy cách đều hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$, $(\beta): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là:

A. $M(0; 2; 0)$.

B. $M(0; -3; 0)$.

C. $M(0; 1; 0)$.

D. $M(0; -1; 0)$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (α) là?

A. $2x + y + z - 6 = 0$.

B. $2x - y - z - 2 = 0$.

C. $x + y + z - 4 = 0$.

D. $2x - y + z - 4 = 0$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $G(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (α) là?

A. $2x + 3y + 6z - 18 = 0$.

B. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

C. $3x + 6y + 2z - 18 = 0$.

D. $6x + 2y + 3z - 18 = 0$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): y + 2z - 4 = 0$, $(\alpha_2): x + y - 5z - 5 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha_3): x + y + z - 2 = 0$. Phương trình của mặt phẳng (P) là?

A. $x + 2y - 3z - 9 = 0$.

B. $3x + 2y + 5z - 5 = 0$.

C. $3x + 2y + 5z + 4 = 0$.

D. $3x + 2y - 5z + 5 = 0$.

- A.** $2x - 21y - z + 23 = 0$
- B.** $2x - 21y + z + 23 = 0$.
- C.** $2x + 21y - z - 23 = 0$.
- D.** $2x - 21y + z - 23 = 0$

- A.** $(\alpha) \supset Oz$. **B.** $(\alpha) // Oy$. **C.** $(\alpha) // (yOz)$. **D.** $(\alpha) // Ox$.

- A.** $x+3z=0$. **B.** $3x+z=0$. **C.** $3x+y=0$. **D.** $3x-z=0$.

- A.** $(\gamma) // Oz$. **B.** (α) qua M . **C.** $(\beta) // (xOz)$. **D.** $(\alpha) \perp (\beta)$.

- A.** $x - 2y - 3z = 0$. **B.** $6x - 3y - 2z - 6 = 0$.
C. $3x - 2y - 5z + 1 = 0$. **D.** $x + 2y + 3z = 0$.

- A.** 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 9.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	A	B	C	C	C	D	D	C

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	A	C	D	A	C	A	B	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	A	C	D	A	A	C	A	C

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	D	B	A	D	A	C	A	B	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	A	B	D	D	C	B	D	B	B

ĐÁP ÁN PHẦN TỰ LUYỆN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	D	A	A	C	D	A	A

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	C	A	A	D	A	B	A	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	B	A	C	D	A	A	B	A

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	A	B	A	C	A	B	A	B	C

PHẦN 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

- **Phương trình tham số** của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ là:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì $(d): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ được gọi là **phương trình chính tắc** của d

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d, d' lần lượt đi qua hai điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vector chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Khi đó, ta có:

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}; \vec{a}'] = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}; \vec{a}'] = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$
- d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}; \vec{a}'] \neq \vec{0} \\ [\vec{a}; \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$
- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$
- $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$

3. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

Xét phương trình: $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (ẩn t) (*)

- $d // (\alpha) \Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm
- d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm
- $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow (*)$ có vô số nghiệm

4. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt cầu

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ (1) và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2)

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt cầu (S) ta thay (1) vào (2), a được phương trình: $(x_0 + ta_1 - a)^2 + (y_0 + ta_2 - b)^2 + (z_0 + ta_3 - c)^2 = R^2$ (*)

- d và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow d(I, d) > R$
- d tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow d(I, d) = R$
- d cắt (S) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow d(I, d) < R$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng (chương trình nâng cao)

Cho đường thẳng d đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$ và điểm M .

$$d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{[M_0M; \vec{a}]}|}{|\vec{a}|}$$

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (chương trình nâng cao)

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 .

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}}|}{|\overrightarrow{[\vec{a}_1, \vec{a}_2]}|}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1 .

7. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α) .

8. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Khi đó góc giữa d_1, d_2 là: $\cos(d_1; d_2) = |\cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2)| = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$

9. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) .

$$\sin(d, (\alpha)) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1.** Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm và biết 1 vectơ chỉ phương.**Phương pháp giải:**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

VD 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và $(Q): 3x + 2y - 5z - 4 = 0$. Giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = -4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 7t \\ z = 4t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Xét hệ $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases} (*)$

Cho $x = 0$ thay vào $(*)$ tìm được $y = -8, z = -4$

Đặt $A(0; -8; -4)$

Cho $z = 0$ thay vào $(*)$ tìm được $x = 2, y = -1$

Đặt $B(2; -1; 0) \Rightarrow \vec{AB} = (2; 7; 4)$ là một VTCP của $(P) \cap (Q)$

Như vậy, phương trình tham số của $(P) \cap (Q)$ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$

Chọn đáp án A.

Cách 2: Xét hệ $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases} (*)$

Cho $z = 0$ thay vào $(*)$ tìm được $x = 2, y = -1$

Đặt $B(2; -1; 0)$

$(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ có VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$

$(Q): 3x + 2y - 5z - 4 = 0$ có VTPT $\vec{n}_Q = (3; 2; -5)$

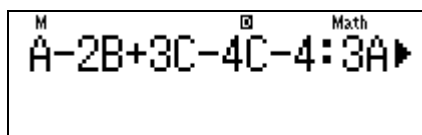
$\Rightarrow [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (4; 14; 8) \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (2; 7; 4)$ là một VTCP của giao tuyến $(P) \cap (Q)$

Như vậy, PTTS của $(P) \cap (Q)$ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$

Chọn đáp án A.**Cách 3: (kỹ năng máy tính cầm tay)**

Xem như phím A, B, C (trên máy) là x, y, z (trong phương trình), nhập cùng lúc 2 biểu thức

$$A - 2B + 3C - 4 : 3A + 2B - 5C - 4$$



Rút tọa độ điểm $(x_0; y_0; z_0)$ từ trong các PTTS của các câu, dùng lệnh **CALC** nhập vào máy.

KQ ứng với câu nào cho 2 đáp số cùng bằng 0 thì nhận (ở bài này tạm thời nhận A và B)

Tiếp tục cho $t = 1$ (ngoài nháp) vào mỗi PTTS được nhận để có bộ số $(x; y; z)$ lại thay vào 2 biểu thức đã nhập trên màn hình

Lại tìm bộ số cho 2 đáp số cùng bằng 0 (ở bài này câu A đảm bảo điều đó nên đáp án là A)

VD 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0; 0; 1)$. Đường thẳng d có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t. \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = -2t. \\ z = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t. \\ z = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Học thuộc lòng công thức $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và thay số vào nhé $\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = -2 + 0t \\ z = 0 + 1t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

Chọn đáp án A.

VD 3. Phương trình tham số của đường thẳng d biết đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ $\vec{a} = (1; -4; 5)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t. \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t. \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t. \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -4 - 2t. \\ z = -5 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -4; 5)$ có phương

trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t. \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

Chọn đáp án A.

VD 4. Phương trình tham số của đường thẳng d biết đi qua điểm $M(0; -2; 5)$ và có vectơ chỉ $\vec{a} = (1; -1; 3)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; 3)$ có phương trình

$$\text{tham số là: } \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$$

Chọn đáp án C.

VD 5. Phương trình tham số của đường thẳng d biết đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 0; 0)$ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 0; 0)$ có phương trình

$$\text{tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án C.

VD 6. Phương trình tham số của đường thẳng d biết đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - t \\ z = 1 + t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 - 3t \\ z = 0 + t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - 3t \\ z = 0 + t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua điểm qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ có phương

$$\text{trình tham số là: } \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 - 3t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Chọn đáp án B.

Dạng 2. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $M; N$.

Phương pháp giải:

- Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MN}$
- Phương trình đường thẳng cần tìm đi qua M (hoặc N) và có vectơ chỉ phương cùng phương với vectơ $\overrightarrow{MN}$

VD 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đoạn thẳng AB với hai đầu mút lần lượt là $A(2; 3; -1)$ và $B(1; 2; 4)$ có phương trình tham số là:

$$A. \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \quad (1 \leq t \leq 2).$$

$$B. \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 0).$$

$$C. \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

$$D. \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad (2 \leq t \leq 4).$$

Hướng dẫn giải

Phương pháp: Để tìm tọa độ các điểm đầu mút của một đoạn thẳng có phương trình tham số có điều kiện kèm theo ta thay giá trị (đầu mút) của tham số vào phương trình tìm x, y, z .

a) Với phương án A, thay $t = 1$ vào PTTS ta được tọa độ điểm là $(2; 3; -1)$

nhưng $t = 2$ thì ta lại được điểm $(3; 4; -6)$ khác tọa độ điểm A và điểm B

b) Với phương án B, thay $t = -1$ ta được tọa độ điểm $B(1; 2; 4)$

và $t = 0$ ta được tọa độ điểm $A(2; 3; -1)$.

Chọn đáp án : B

Lưu ý 1:

- Để viết phương trình tham số của đoạn thẳng AB ta viết phương trình tham số của đường thẳng AB , tìm giá trị t_A, t_B để từ phương trình tham số đó ta tìm lại được tọa độ của điểm A, B
- Kết quả phương trình tham số có kèm điều kiện của t là đoạn tạo bởi t_A, t_B
- Tuy nhiên phương pháp này chậm và rất khó để chọn phương án như cách cho đề bài này.

Lưu ý 2:

- Nếu HS nào dùng phương pháp thay tọa độ của mỗi điểm A và B vào phương trình tham số của từng phương án (A,B,C,D) để tìm giá trị t thì chỉ khi tìm được t_A, t_B là 2 đầu mút của đoạn điều kiện được cho kèm theo phương trình tham số, đó mới là phương án đúng.

VD 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(3; -1; 1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B ?

$$A. \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}.$$

$$B. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}.$$

$$C. \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

$$D. \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}.$$

Hướng dẫn giải:**Phương pháp tự luận:**

Gọi d là đường thẳng đi qua 2 điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(3; -1; 1)$. Đường thẳng d đi qua

$A(1; 2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_d} = \vec{AB} = (2; -3; 4)$ nên có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}.$$

Chọn đáp án B.

Phương pháp trắc nghiệm:

Đường thẳng đi qua $A(1; 2; -3)$ và $B(3; -1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 4)$ nên loại phương án A và C. Xét thấy điểm $A(1; 2; -3)$ thỏa mãn phương trình chính tắc ở phương án B nên chọn B là đáp án đúng.

VD 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -2; 1)$, $B(2; 1; 3)$ có phương trình:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AB đi qua $A(1; -2; 1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(1; 3; 2)$ làm một vectơ chỉ phương nên có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$

Chọn đáp án A.

VD 10. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $M(1; 2; 3)$ và $N(3; 0; 0)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 - 2t \\ z = 0 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\overrightarrow{MN} = (2; -2; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN

Chọn đáp án D.

VD 11. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -2; -3)$ và $B(3; 0; 1)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 - 2t \\ z = 0 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 4)$ nên một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (1; 1; 2)$

Chọn đáp án B.

VD 12. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -2; -3)$ và $B(3; 0; 1)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 - 2t \\ z = 0 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 4)$ nên một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (1; 1; 2)$

Mặt khác tọa độ trung điểm của AB là điểm $I(2; -1; -1)$

Chọn đáp án B.

Dạng 3. Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm M_0 và song song với 1 đường thẳng Δ cho trước.

Phương pháp giải:

- Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}$
- Phương trình đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có véc tơ chỉ phương cùng phương với véc tơ $\vec{u}$

VD 13. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;2)$ và song song với trục Ox là:

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Trục hoành Ox nhận véc tơ đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$ làm một VTCP

Đường thẳng d song song với trục hoành cũng phải nhận $\vec{i} = (1;0;0)$ làm VTCP luôn.

Ngoài ra $M(-2;1;2) \in d$ nên viết PTTS của d ta chọn được phương án C

Chọn đáp án C.

VD 14. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1;2;3)$ và song song với đường

thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 + 4t \\ z = 0 + 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 - 4t \\ z = 0 - 5t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có véc tơ $\vec{u} = (1;-4;-5)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d

Vì $\Delta // d$ nên véc tơ $\vec{u} = (1;-4;-5)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án A.

VD 15. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1;1;1)$ và song song với đường

thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có véc tơ $\vec{u} = (1;-4;-5)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d

Vì $\Delta // d$ nên véc tơ $\vec{a} = (-1;4;5)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án B.

VD 16. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1;1;1)$ và song song với đường

thẳng d có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{là}$$

A.
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\vec{u} = (1; 0; -2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

Vì $\Delta // d$ nên vectơ $\vec{a} = (-2; 0; 4)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án C.

Dạng 4. Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm M_0 và vuông góc với 1 mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp giải:

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$
- Phương trình đường thẳng cần tìm đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương cùng phương với vectơ $\vec{n}$

VD 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 5z + 4 = 0$. Phương trình chính tắc của Δ là:

A.
$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}.$$

B.
$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}.$$

C.
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

D.
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{5}.$$

Hướng dẫn giải

$(\alpha): 2x - 3y + 5z + 4 = 0$ có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -3; 5)$

Do $\Delta \perp (\alpha)$ nên Δ nhận $\vec{n}_\alpha$ làm một VTCP.

Ngoài ra, $M(2; 0; -3) \in \Delta$ nên phương trình chính tắc của Δ :
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$$

Chọn đáp án C.

VD 18. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $x - 4y - 5z + 3 = 0$ là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\vec{n} = (1; -4; -5)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $\Delta \perp (P)$ nên vectơ $\vec{n} = (1; -4; -5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án A.

VD 19. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $x - 5z + 3 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -3 - 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\vec{n} = (1; 0; -5)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $\Delta \perp (P)$ nên vectơ $\vec{u} = (-1; 0; 5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án A.

VD 20. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có vectơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng Oxy

Vì $\Delta \perp (Oxy)$ nên vectơ $\vec{n} = (0; 0; -1)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Chọn đáp án C.

Dạng 5. Phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Cách 1:

- Đặt 1 ẩn là t giải hệ phương trình theo t

Cách 2:

- Vectơ chỉ phương của đường thẳng chính là tích có hướng của 2 vectơ pháp tuyến 2 mặt phẳng
- Chọn 1 điểm thuộc cả 2 mặt phẳng chính là 1 điểm thuộc đường thẳng.

VD 21. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình

$(\alpha): x + 2y - z + 1 = 0$ và $(\alpha'): x + y + 2z + 3 = 0$

A. $\begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -5 + 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Đặt $z = t$ rồi tìm x, y theo t

Chọn đáp án A.

VD 22. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): 2x + 2y + z - 4 = 0$ và $(\alpha'): 2x - y - z + 5 = 0$

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = 6 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$

Đặt $x = t$ rồi tìm $y; z$ theo t

Chọn đáp án D.

VD 23. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x + y = 0$ và $(\alpha'): 2x - y + z - 15 = 0$

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 15 - 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 15 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 15 - 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = 15 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z - 15 = 0 \end{cases}$

Đặt $x = t$ rồi tìm $y; z$ theo t

Chọn đáp án A.

Dạng 6. Phương trình đường thẳng d đi qua 1 điểm M_0 và vuông góc với 2 đường thẳng $d_1; d_2$ không song song.

Phương pháp giải:

- Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$
- Phương trình đường thẳng cần tìm đi qua M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$

VD 24. Cho hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình

$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 đi qua

$M(1; -1; 2)$ vuông góc với cả d_1 và d_2 là

A. $\begin{cases} x = 1 - 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 - 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 - 9t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: vectơ chỉ phương của d_3 là $\vec{u}_3 = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (14; 17; 9)$

Chọn đáp án B.

VD 25. Cho hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}. \text{ Phương trình chính tắc của đường thẳng } d_3 \text{ đi qua}$$

$M(1; -1; 2)$ vuông góc với cả d_1 và d_2 là

A. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 - 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 - 9t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: vectơ chỉ phương của d_3 là $\vec{u}_3 = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (14; 17; 9)$

Chọn đáp án A.

VD 26. Cho hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}. \text{ Phương trình chính tắc của đường thẳng } d_3 \text{ đi qua } M(1; -1; 2)$$

vuông góc với cả d_1 và d_2 là

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + 1t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 1t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 1t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 1t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: vectơ chỉ phương của d_3 là $\vec{u}_3 = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-2; 3; -1)$

Chọn đáp án C.

Dạng 7. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của 1 điểm M_0 lên một mặt phẳng (α) cho trước. Tìm tọa độ điểm đối xứng với một điểm qua 1 mặt phẳng cho trước.

Phương pháp giải:

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M_0 và vuông góc với (α)
- Tọa độ H hình chiếu của điểm M_0 lên mặt phẳng (α) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} d \\ (\alpha) \end{cases}$
- Điểm M' là điểm đối xứng của điểm M_0 qua mặt phẳng (α) suy ra H là trung điểm của M_0M'

- VD 27.** Cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$. Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (α) là
- A. $(-1;2;0)$ B. $(1;2;0)$ C. $(-1;-2;0)$ D. $(-1;2;1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;4;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=2-t \end{cases} \quad \text{Tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=2-t \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

- VD 28.** Cho điểm $M(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+11=0$. Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (α) là
- A. $(-3;-1;-2)$ B. $(3;1;-2)$ C. $(-3;1;-2)$ D. $(-3;1;2)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2+2t \end{cases}$

$$\text{Tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2+2t \\ 2x-y+2z+11=0 \end{cases}$$

Chọn đáp án C.

- VD 29.** Cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$. Tọa độ điểm M' là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α) là
- A. $(-1;2;1)$ B. $(3;0;2)$ C. $(-3;0;-2)$ D. $(-3;0;2)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;4;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=2-t \end{cases} \quad \text{Tọa độ hình chiếu của } M \text{ trên } (\alpha) \text{ nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=2-t \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

Vì H là trung điểm của MM' nên tọa độ của điểm là $M'(-3;0;2)$

Chọn đáp án D.

- VD 30.** Cho điểm $M(1; -1; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 11 = 0$. M' là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α) là
- A. $(-7; 3; -6)$ B. $(7; 3; -6)$ C. $(-7; -3; -6)$ D. $(-7; 3; 6)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ hình chiếu của M trên (α) nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

Vì H là trung điểm của MM' nên tọa độ của điểm là $M'(-7; 3; -6)$

Chọn đáp án A.

Dạng 8. Hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d **Phương pháp giải:**

- Lấy $H \in d$. Tính $\overrightarrow{MH}$.
- H là hình chiếu của M trên $d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$.

- VD 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(-1; 2; 7)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên d ?
- A. $H(4; 5; 2)$. B. $H(2; 1; 0)$. C. $H(3; 3; 1)$. D. $H(1; -1; -1)$.

Hướng dẫn giải:**Phương pháp trắc nghiệm:**

Nhập vào máy tính: $1(-1-A) + 2(2-B) + 1(7-C)$

Sau đó: CALC tại $A=4, B=5, C=2$ ta được $-6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

CALC tại $A=2, B=1, C=0$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=3, B=3, C=1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án C.

CALC tại $A=1, B=-1, C=-1$ ta được $12 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 2; 1)$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(2+t; 1+2t; t)$

$\overrightarrow{AH} = (3+t; -1+2t; t-7)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1(3+t) + 2(-1+2t) + 1(t-7) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $H(3;3;1)$.

Chọn đáp án C.

VD 32. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2;-1;1)$ trên đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ là:}$$

- A. $(1;0;2)$. B. $(2;2;3)$. **C. $(0;-2;1)$.** D. $(-1;-4;0)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $1(-2-A) + 2(-1-B) + 1(1-C)$

Sau đó: CALC tại $A=1, B=0, C=2$ ta được $-6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

CALC tại $A=2, B=2, C=3$ ta được $-12 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=0, B=-2, C=1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án C.

CALC tại $A=-1, B=-4, C=0$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (1;2;1)$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(1+t;2t;2+t)$

$$\overrightarrow{MH} = (3+t;1+2t;t+1)$$

Ta có: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1(3+t) + 2(1+2t) + 1(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $H(0;-2;1)$.

Chọn đáp án C.

VD 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-5;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Hình chiếu

của A lên d có tọa độ là:

- A. $(2;-3;1)$.** B. $(2;-3;-1)$. C. $(2;3;1)$. D. $(-2;-4;3)$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $-4(3-A) - 1(-5-B) + 2(2-C)$

Sau đó: CALC tại $A=2, B=-3, C=1$ ta được $0 \Rightarrow$ Chọn đáp án A.

CALC tại $A=2, B=-3, C=-1$ ta được $4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=2, B=3, C=1$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=-2, B=-4, C=3$ ta được $-21 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-4; -1; 2)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(6-4t; -2-t; -1+2t)$

$$\vec{AH} = (3-4t; 3-t; 2t-3)$$

$$\text{Ta có: } \vec{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -4(3-4t) - 1(3-t) + 2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(2; -3; 1)$.

Chọn đáp án A.

Dạng 9. Hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) .

Phương pháp giải:

Trường hợp 1: d cắt (α) .

- Tìm giao điểm A của d và (α) .
- Lấy M cụ thể trên d . Tìm hình chiếu M' của M trên (α) .
- Hình chiếu d' là đường thẳng AM' .

Trường hợp 2: $d // (\alpha)$.

- Lấy M cụ thể trên d . Tìm hình chiếu M' của M trên d .
- Hình chiếu d' là đường thẳng qua M' và song song với d .

VD 34. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $(P): x+y+z-10=0$. Viết phương trình hình chiếu d' của d lên (P) .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$, lấy $M(0; 1; 3) \in d$.

Toạ độ giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ x+y+z-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow A(6; -2; 6)$$

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) .

Đường thẳng MH đi qua $M(0;1;3)$ và nhận $\vec{n} = (1;1;1)$ làm vector chỉ phương nên có phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{Toạ độ } H \text{ thỏa hệ } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \\ x + y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow H(2;3;5)$$

Đường thẳng d' qua $H(2;3;5)$ và nhận $\vec{AH} = (-4;5;-1)$ làm vector chỉ phương nên có phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 5t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

VD 35. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $(P): x+2y-2z-4=0$.
Viết phương trình hình chiếu d' của d lên (P) .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-2)$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2)$

Nhận thấy $d \parallel (P)$ nên gọi H là hình chiếu của M trên (P) thì d' qua H và $d' \parallel d$.

Đường thẳng MH đi qua $M(1;-1;2)$ và nhận $\vec{n} = (1;2;-2)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

$$\text{Toạ độ } H \text{ thỏa hệ } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1;0)$$

Đường thẳng d' qua $H(2;1;0)$ và nhận $\vec{u} = (2;1;2)$ làm vector chỉ phương nên có phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

VD 36. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$ và $(P): x-y+2z-13=0$.
Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua (P) .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 2)$, lấy $M(4; 1; 2) \in d$.

Toạ độ giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4} \\ x-y+2z-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0; 6)$$

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) .

Đường thẳng MH đi qua $M(4; 1; 2)$ và nhận $\vec{n} = (1; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x=4+t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$$

$$\text{Toạ độ } H \text{ thỏa hệ } \begin{cases} x=4+t \\ y=1-t \\ z=2+2t \\ x-y+2z-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \\ z=4 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow H(5; 0; 4)$$

Gọi M' đối xứng với M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(6; -1; 6)$

Đường thẳng d' qua $M'(6; -1; 6)$ và nhận $\vec{AM'} = (5; -1; 0)$ làm vectơ chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x=6+5t \\ y=-1-t \\ z=6 \end{cases}$$

Dạng 10. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 .

Phương pháp giải:

- Chuyển d_1, d_2 về dạng tham số.
- Giả sử A, B là chân đường vuông góc chung của d_1, d_2 .
- Tìm toạ độ A, B theo tham số của d_1, d_2 .
- Từ điều kiện $d \perp d_1, d \perp d_2$ suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{d_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow$ toạ độ của A và B .
- Đường thẳng d chính là đường thẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP.

VD 37. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có phương

$$\text{trình } (d_1): \begin{cases} x=1 \\ y=10+2t \\ z=t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x=3t \\ y=3-2t \\ z=-2 \end{cases}. \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng vuông góc chung của}$$

(d_1) và (d_2) . Phương trình của Δ là:

$$\begin{array}{llll}
 \text{A. } \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{177}{98} + 3t \\ z = -6t - \frac{17}{49} \end{cases} &
 \text{B. } \begin{cases} x = \frac{7}{3} - 46t \\ y = -147t \\ z = 246t \end{cases} &
 \text{C. } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - 3t \end{cases} &
 \text{D. } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 6 - 4t \end{cases}
 \end{array}$$

Hướng dẫn giải**Phương pháp trắc nghiệm:**

Nhập vào máy tính: $0A + 2B + 1C$

Sau đó: CALC tại $A = 2, B = 3, C = -6$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A = -46, B = -147, C = 246$ ta được $-48 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = 2, B = 3, C = -3$ ta được $3 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A = 2, B = -3, C = -4$ ta được $-10 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.**Phương pháp tự luận:**

(d_1) có VTCP là $\vec{u}_1 = (0; 2; 1)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_2 = (3; -2; 0)$.

Gọi $M(1; 10 + 2t_1; t_1) \in (d_1)$, $N(3t_2; 3 - 2t_2; -2) \in (d_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (3t_2 - 1; -2t_2 - 2t_1 - 7; -t_1 - 2)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 + 4t_2 = -16 \\ 4t_1 + 13t_2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{164}{49} \\ t_2 = \frac{9}{49} \end{cases}$$

Do đó: $M\left(1; \frac{162}{49}; \frac{164}{49}\right)$, $N\left(\frac{27}{49}; \frac{129}{49}; -2\right)$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{11}{49}(2; 3; -6)$

Từ đó suy ra phương trình của MN . Chọn A.

Cách làm trắc nghiệm:

(Δ) có VTCP là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 3; -6)$.

Chọn đáp án A.

VD 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{4} + t \\ z = \frac{11}{4} + t \end{cases} . \text{ Phương trình của } \Delta \text{ là:}$$

$$A. \begin{cases} x = t \\ y = -8 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$C. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

$$D. \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$$

Hướng dẫn giải**Phương pháp trắc nghiệm:**

(Δ) có VTCP là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; 4; 4) = -2(1; -2; -2)$. Chọn A hoặc D.

Để loại A hoặc D, ta cần xét thêm nó có cắt với (d_1) hay không bằng cách giải hệ.

Chọn đáp án B.**Phương pháp tự luận:**

(d_1) có VTCP là $\vec{u}_1 = (0; -1; 1)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_2 = (4; 1; 1)$.

Gọi $M(2; -t_1; 1+t_1) \in (d_1)$, $N\left(4t_2; \frac{7}{4} + t_2; \frac{11}{4} + t_2\right) \in (d_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(4t_2 - 2; t_2 + t_1 + \frac{7}{4}; t_2 - t_1 + \frac{7}{4}\right)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó: $M(2; 0; 1)$, $N(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 2) = -(1; -2; -2)$

Từ đó suy ra phương trình của MN .

Chọn đáp án B.

VD 39. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 6t' \\ y = 1 + t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases}$.

Phương trình nào sau đây là phương trình đường vuông góc chung của d và d' .

$$A. \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

$$B. \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

$$C. \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}.$$

$$D. \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (-4; 1; 1)$ và $\vec{b} = (-6; 1; 2)$.

Lấy $M(3-4t; -2+t; -1+t) \in d$, $N(-6t'; 1+t'; 2+2t') \in d'$.

$$\overrightarrow{MN} = (-6t' + 4t - 3; t' - t + 3; 2t' - t + 3)$$

$$MN \text{ là đoạn vuông góc chung} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' - 2t + 2 = 0 \\ 41t' - 27t + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-1; -1; 0), N(0; 1; 2)$$

Phương trình MN là phương trình đường vuông góc chung của d và d' nên có phương trình:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}.$$

Chọn đáp án C.

Dạng 11. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 cắt đường thẳng d và thỏa mãn điều kiện cho trước.

Điều kiện cho trước là:

- Vuông góc với đường thẳng Δ_1 cho trước.
- Song song với một mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp giải:

- Giả sử Δ cắt đường thẳng d tại $M \Rightarrow M$ có tọa độ phụ thuộc tham số t của d .
- Từ điều kiện cho trước dẫn đến một phương trình bậc nhất theo tham số $t \Rightarrow$ tọa độ M
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M_0 và có VTCP $\overrightarrow{MM_0}$.

VD 40. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2; 0; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc và cắt đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc và cắt d tại $M \Rightarrow M(1+t; 2t; 2+t)$.

Vì $d \perp \Delta \Rightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(1; 0; 2)$.

Phương trình Δ cần tìm là: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$

Chọn đáp án C.

VD 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và

điểm $A(1; 2; 2)$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ **B.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{4}$

$$C. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{5}.$$

$$D. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-4}.$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và cắt d_2 tại $M \Rightarrow M(1-t; 1+2t; -1+t)$.

$$\overrightarrow{AM} = (-t; 2t-1; t-3)$$

Vì $d_1 \perp \Delta \Rightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(-1; 5; 1)$.

Phương trình Δ cần tìm đi qua $A(1; 2; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (-2; 3; -1)$ làm vector chỉ phương nên

$$\text{có phương trình: } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

Chọn đáp án A.

VD 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$, mặt phẳng

$(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ qua A cắt d và song song với $mp(\alpha)$ có phương trình là

$$A. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

$$B. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$C. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

$$D. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -1)$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và cắt d tại $M \Rightarrow M(1-t; 1+2t; -1+t)$.

$$\overrightarrow{AM} = (-t; 2t-1; t)$$

Vì $(\alpha) \parallel \Delta \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -t = 1 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(2; -1; -2)$.

Phương trình Δ cần tìm đi qua $A(1; 2; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (1; -3; -1)$ làm vector chỉ phương nên

$$\text{có phương trình: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{-1}$$

Chọn đáp án B.

Dạng 12. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 và thỏa mãn điều kiện cho trước.

Điều kiện cho trước là:

- Đi qua một điểm M cho trước không thuộc d_1 và d_2 .
- Song song với đường thẳng d cho trước.
- Vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp giải:

- Giả sử Δ cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B , khi đó $A \in d_1, B \in d_2$.
- Từ điều kiện cho trước xác định được tọa độ điểm A, B .
- Khi đó đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua A và nhận vectơ $\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AB}$ làm VTCP.

Cụ thể:

- Nếu điều kiện là đi qua điểm M thì A, B, M thẳng hàng.
- Nếu điều kiện song song với đường thẳng d thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.
- Nếu điều kiện vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p}$.

VD 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: \frac{x-2}{3} = y+1 = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng cắt d_1 và d_2 đồng thời đi qua điểm $M(3;10;1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi đường thẳng cần tìm là d và giả sử d cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại

$$A(2+3a; -1+a; -3+2a) \in d_1 \text{ và } B(3+b; 7-2b; 1-b) \in d_2$$

Do đường thẳng d đi qua $M(3;10;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} = (3a-1; a-11; -4+2a); \overrightarrow{MB} = (b; -2b-3; -b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-1=kb \\ a-11=-2kb-3k \\ -4+2a=-kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x=3+2t \\ y=10-10t \\ z=1-2t \end{cases}$$

VD 44. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3 , biết phương trình của d_1, d_2, d_3 là:

$$d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=-2+6t \\ z=1-t \end{cases} \quad d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3} \quad d_3: \begin{cases} x=-1+2t' \\ y=3+t' \\ z=t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; 6; -1)$

Gọi đường thẳng cần tìm là d và giả sử d cắt hai đường thẳng d_2 và d_3 lần lượt tại

$$A(1+a; -2+4a; 2+3a) \in d_2 \text{ và } B(-1+2b; 3+b; b) \in d_3$$

$$\overrightarrow{AB} = (2b-a-2; b-4a+5; b-3a-2)$$

$$\text{Do đường thẳng } d \text{ song song với } d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} 2b - a - 2 = k \cdot 0 \\ b - 4a + 5 = k \cdot 6 \\ b - 3a - 2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(1; -2; 2), B(1; 4; 1)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 6; -1)$ nên có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

VD 45. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 6y - 3z + 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với (P) đồng thời cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -6; -3)$

Gọi đường thẳng cần tìm là d và giả sử d cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại

$$A(-1+2a; 1+3a; 2+a) \in d_1 \text{ và } B(2+b; -2+5b; -2b) \in d_2$$

$$\overrightarrow{AB} = (b-2a+3; 5b-3a-3; -2b-a-2)$$

$$\text{Do đường thẳng } d \text{ vuông góc với } (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a+3 = k \\ 5b-3a-3 = -6k \\ -2b-a-2 = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(1; 4; 3), B(2; -2; 0)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; -6; -3)$ nên có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Dạng 13. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Phương pháp giải:

- Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d_1 tại $A \Rightarrow A = (P) \cap d_1$
- Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d_2 tại $B \Rightarrow B = (P) \cap d_2$
- Tìm toạ độ điểm A và B , tính $\overrightarrow{AB}$
- Đường thẳng Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP.

VD 46. Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z + 1 = 0$ và cắt hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và } d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}.$$

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}.$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{1}.$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}.$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-1}.$

Hướng dẫn giải

Gọi A là giao điểm của d_1 và (α) nên tọa độ điểm A thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0; 1)$$

Gọi B là giao điểm của d_2 và (α) nên tọa độ điểm B thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ x = -2 \\ y = 9 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 9; 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 9; 3)$$

Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua $A(1; 0; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1; -3; -1)$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-1}.$

Chọn đáp án D.

VD 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1},$

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 2 = 0$. Phương trình chính tắc của

đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$

B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{4}.$

C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}.$

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}.$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tham số là $d_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 - 2t' \end{cases}$.

Gọi A là giao điểm của d_1 và (α) nên tọa độ điểm A thỏa hệ

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1; 1)$$

Gọi B là giao điểm của d_2 và (α) nên tọa độ điểm B thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 - 2t' \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow B(2; 3; -3)$$

Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua $A(-1; 1; 1)$ và có VTCP $\vec{u}_\Delta = \vec{AB} = (3; 2; -4)$ nên có phương trình chính tắc là: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$.

Chọn đáp án C.

VD 48. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 7 = 0$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ và $d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) cắt cả d_1 và d_2 là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tham số là $d_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 4 + t' \\ y = t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của d_1 và (α) nên tọa độ điểm A thỏa hệ

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \\ x - 3y + 2z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -1 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 4; 3)$$

Gọi B là giao điểm của d_2 và (α) nên tọa độ điểm B thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 - 2t' \\ x - 3y + 2z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -4)$$

Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua $A(-1; 4; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u}_\Delta = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$ nên

có phương trình chính tắc là: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án B.

Dạng 14. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A \in (P)$, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d .

Phương pháp giải:

- Tìm VTCP của d là $\overrightarrow{u}_d$ và VTPT của (P) là $\overrightarrow{n}_P$.
- Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u}_\Delta = [\overrightarrow{u}_d; \overrightarrow{n}_P]$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và có VTCP vừa tìm được ở trên.

VD 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases} \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } M(1; 2; 1) \text{ nằm trong } (P) \text{ và vuông góc với } d \text{ có phương}$$

trình:

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\overrightarrow{u}_d = (1; 2; 0)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (2; 1; -2)$.

Đường thẳng Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên có VTCP

$$\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u}_d; \overrightarrow{n}] = (-4; 2; -3) = -(4; -2; 3)$$

Δ đi qua $M(1;2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; -2; 3)$ nên có phương trình $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

Chọn đáp án D.

VD 50. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 2 = 0$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$. Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của (P) và d , vuông góc với d nằm trong

(P) có phương trình:

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của d và (P) suy ra tọa độ M thỏa hệ:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-1; -1; 1)$$

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; -3)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

Đường thẳng Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên có VTCP $\vec{u} = [\vec{u}_d; \vec{n}] = (4; -8; 0) = 4(1; -2; 0)$

Δ đi qua $M(-1; -1; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; -2; 0)$ nên có phương trình
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án D.

Dạng 15. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.**Phương pháp giải:**

- Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

- Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$

- Thay $(1), (2), (3)$ vào (4) ta có phương trình :

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 (*)$$

TH1: $(*)$ vô nghiệm thì d và (P) không có giao điểm hay d và (P) song song

TH2: $(*)$ có 1 nghiệm t duy nhất thì d và (P) có 1 giao điểm hay d và (P) cắt nhau tại 1 điểm

TH3: $(*)$ có vô số nghiệm thì d và (P) có vô số giao điểm hay d nằm trong mặt phẳng (P)

Chú ý:

- Trong trường hợp $d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$ thì VTCP của d và VTPT của (P) vuông góc
- Khi $d \parallel (P)$ thì khoảng cách giữa d và (P) chính là khoảng cách từ một điểm trên d đến mặt phẳng (P)

VD 51. (Bài 14 SGK trang 97) Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d có phương

trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- A. $d \perp (\alpha)$; B. d cắt (α) ; C. $d \parallel (\alpha)$; **D. $d \subset (\alpha)$.**

Hướng dẫn giải

Cách 1: Xét phương trình $2(-3 + t) + 2 - 2t + 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng với mọi t) vậy d và (α) có vô số điểm chung hay $d \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án D.

Cách 2: Ta có vector pháp tuyến của $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ là $\vec{n} = (2; 1; 3)$, vector chỉ phương đường thẳng d là $\vec{u} = (1; -2; 0)$ mà $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ (loại A và B).

Trên đường thẳng d lấy $M(-3; 2; 1)$, thay tọa độ M vào phương trình (α) ta được $-6 + 2 + 3 + 1 = 0$ đúng vậy $d \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án D.

VD 52. (Bài tập 3.71 - SBTCB trang 119) Tọa độ giao điểm M của đường thẳng

$$d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ và mặt phẳng } (\alpha): 3x+5y-z-2=0 \text{ là:}$$

- A. $(1;0;1)$; B. $(0;0;-2)$; C. $(1;1;6)$; D. $(12;9;1)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Thay x, y, z ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được:

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0 \Leftrightarrow 26t=-78 \Leftrightarrow t=-3. \text{ Vậy } d \text{ cắt } (\alpha) \text{ và giao điểm là } M_0(0;0;-2).$$

Chọn đáp án B.

VD 53. (Bài 3.72 SBTCB trang 120) Cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y+z+1=0$ và đường thẳng d có

$$\text{phương trình tham số: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+2t. \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- A. $d // (\alpha)$; B. $d \text{ cắt } (\alpha)$; C. $d \subset (\alpha)$; D. $d \perp (\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(1+t)+3(2-t)+1.(1+2t)+1=0 \Leftrightarrow 0.t=-3$ (phương trình vô nghiệm) vậy d và (α) không có điểm chung hay $d // (\alpha)$.

Chọn đáp án A.

VD 54. (Bài 3.73 SBTCB trang 120) Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng

$(\alpha): x+y+z-4=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- A. $d \text{ cắt } (\alpha)$; B. $d // (\alpha)$; C. $d \subset (\alpha)$; D. $d \perp (\alpha)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t. \end{cases}$$

Xét phương trình $(1+t)+(1+2t)+(2-3t)-4=0 \Leftrightarrow 0.t=0$ (phương trình vô số nghiệm) vậy $d \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án C.

Dạng 16. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.**Phương pháp giải:**

- Cho hai đường thẳng:
 Δ_1 đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{a}$.
 Δ_2 đi qua B và có vector chỉ phương $\vec{b}$.
- Ta có các trường hợp sau:
 - Δ_1 và Δ_2 cùng nằm trong một mp $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 - Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0} \\ [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$
 - Δ_1 và Δ_2 song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \\ [\overrightarrow{AB}, \vec{b}] \neq \vec{0} \end{cases}$
 - Δ_1 và Δ_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \\ [\overrightarrow{AB}, \vec{b}] = \vec{0} \end{cases}$
 - Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$

VD 55. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-4}$ và

$$\Delta_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - 8t \end{cases}. \text{ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?}$$

- A.** $\Delta_1 // \Delta_2$. **B.** $\Delta_1 \perp \Delta_2$. **C.** $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. **D.** Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có : Δ_1 đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1;-1;-4)$

Δ_2 đi qua điểm $B(0;1;-1)$ và có vector chỉ phương

$$\text{Vì } \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}] \neq \vec{0} \end{cases} \text{ nên } \Delta_1 // \Delta_2. \vec{u}(2;-2;-8)$$

Chọn đáp án A.

VD 56. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau có phương trình

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}. \text{ Tọa độ giao điểm của } d_1 \text{ và } d_2 \text{ là:}$$

- A.** $-3; 5; -5$. **B.** $3; 5; -5$. **C.** $3; 2; -5$. **D.** $3; -5; 5$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 7 + s \\ z = 3 + 4s \end{cases} ; (s \in \mathbb{R})$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 2s - 3t = 5 \quad (1) \\ s + 2t = -8 \quad (2) \\ 4s - t = -5 \quad (3) \end{cases}$. Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} s = -2 \\ t = -3 \end{cases}$ thỏa mãn (3), tức là d_1 và

d_2 cắt nhau. Khi đó thế $t = -3$ vào phương trình d_2 ta được $(-3; 5; -5)$

Chọn đáp án A.

VD 57. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{m}$ và

$(d_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$. Với giá trị nào của m thì (d_1) và (d_2) cắt nhau?

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của $(d_1): \begin{cases} x = 2s \\ y = -3s \\ z = ms \end{cases} ; (s \in \mathbb{R})$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Để (d_1) và (d_2) cắt nhau thì hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 3t - 2s = 1 \quad (1) \\ 2t + 3s = 5 \quad (2) \\ ms = t \quad (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$. Thế $\begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$ vào (3) ta được $m = 1$.

Chọn đáp án A.

VD 58. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt d' . **B.** d và d' chéo nhau. **C.** $d \equiv d'$. **D.** $d // d'$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận :

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Đường thẳng d' có VTCP $\vec{u}' = (2; 2; -2)$.

Ta thấy $\vec{u}' = 2\vec{u}$ nên $\vec{u}, \vec{u}'$ là hai vectơ cùng phương. Suy ra $d // d'$ hoặc $d \equiv d'$.

Mặt khác, lấy $M(1; 2; 3) \in d$, thay vào phương trình tham số của đường thẳng d' ta được:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t' \\ 2 = -1 + 2t' \\ 3 = 2 - 2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t' = \frac{3}{2} \\ t' = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}). \text{ Suy ra } M(1; 2; 3) \notin d'.$$

Từ đó suy ra $d \parallel d'$.

Chọn đáp án D.

Dạng 17. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Phương pháp giải:

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. Khoảng cách từ M đến d . Ký hiệu: $d(M, \Delta)$.

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[M_0 M, \vec{u}}|}{|\vec{u}|}$$

VD 59. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 0; 1)$ và đường thẳng d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}. \text{ Khoảng cách từ điểm } M \text{ tới đường thẳng } d \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{12}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{12}{\sqrt{6}}$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận:

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng d thì $H \in d \Rightarrow H(1+t; 2t; 2+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t-1; 2t; t+1)$ và $\vec{u} = (1; 2; 1)$ là một VTCP của d .

Vì $MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t-1+4t+t+1=0 \Leftrightarrow t=0$ nên $H(1; 0; 2)$.

Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng d bằng độ dài đoạn MH .

$$\text{Ta có } MH = |\overrightarrow{MH}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C.

Phương pháp trắc nghiệm:

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ M tới d là: $h = \frac{|\overrightarrow{[M_0 M, \vec{u}}|}{|\vec{u}|}$, với $M_0 \in d$.

Dạng 18. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.**Phương pháp giải:**

- Cho hai đường thẳng chéo nhau : $\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a't \\ y = y_2 + b't \\ z = z_2 + c't \end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Ký hiệu là $d(\Delta_1; \Delta_2)$.

- Ta có :

Δ_1 qua $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$ có $\vec{u}_1 = (a; b; c)$, Δ_2 qua $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$ có $\vec{u}_2 = (a'; b'; c')$.

- Khi đó: $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \right|}$

VD 60. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$, $(\Delta_2): \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) là:

- A.3.** B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{14}$. D.9.

Hướng dẫn giải

Δ_1 qua điểm $A(3; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(-4; 1; 1)$

Δ_2 qua điểm $B(0; 1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6; 1; 2)$

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 3), \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] = (1; 2; 2)$$

$$d_{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \right|} = 3.$$

Chọn đáp án A.

VD 61. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$, $d_2: \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

- A.25.** B.20. C.15. D. $\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(-7; 5; 9) \in d_1$, $H(0; -4; -18) \in d_2$. Ta có $\overrightarrow{MH} = (7; -9; -27)$, $\vec{a}_{d_2} = (3; -1; 4)$ suy ra

$$\left[\overrightarrow{MH}, \vec{a}_{d_2} \right] = (-63; -109; 20). \text{ Vậy } d(d_1, d_2) = d(M, d_2) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{MH}, \vec{a}_{d_2} \right] \right|}{\left| \vec{a}_{d_2} \right|} = 25.$$

Chọn đáp án A.

VD 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8} \text{ và } d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12} \text{ là:}$$

A. $\frac{\sqrt{35}}{17}$. B. $\sqrt{\frac{35}{17}}$. C. $\sqrt{\frac{854}{29}}$. **D. $\sqrt{30}$.**

Hướng dẫn giải

d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(4; -6; -8)$; d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6; 9; 12)$

Ta có: $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{-8}{12}$ nên $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Rightarrow d_1$ và d_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn $A(2; 0; -1) \in d_1, B(7; 2; 0) \in d_2$. Ta có: $\overrightarrow{AB}(5; 2; 1); [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2] = (15; -66; 57)$

$$\text{Khi đó: } d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2]}|}{|\vec{u}_2|} = \frac{\sqrt{(15)^2 + (-66)^2 + (57)^2}}{\sqrt{(-6)^2 + (9)^2 + (12)^2}} = \sqrt{30}$$

Chọn đáp án D.

Dạng 19. Góc giữa hai đường thẳng.

Phương pháp giải:

- Cho hai đường thẳng: $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và $d': \frac{x-x_1}{a'} = \frac{y-y_1}{b'} = \frac{z-z_1}{c'}$.
- Gọi $\alpha = (d, d')$. Thì: $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$

VD 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases}$

và $(d_2): \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ là:

A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Hướng dẫn giải

Vectơ chỉ phương của $d_1: \vec{u}_1 = (1; 0; 1)$

Vectơ chỉ phương của $d_2: \vec{u}_2 = (-2; 1; 2)$

Ta có: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Vậy số đo của góc tạo bởi d_1 và d_2 là: 90°

Chọn đáp án A.

- VD 64.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(\Delta_2): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + \sqrt{2}t \\ z = 2 + mt \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì (Δ_1) và (Δ_2) hợp với nhau một góc 60° ?
- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Véc tơ chỉ phương của $\Delta_1: \vec{u}_1 = (1; \sqrt{2}; 1)$

Véc tơ chỉ phương của $\Delta_2: \vec{u}_2 = (1; \sqrt{2}; m)$

Ta có: $\cos 60^\circ = \left| \cos \vec{u}_1, \vec{u}_2 \right| \Leftrightarrow |m + 3| = \sqrt{m^2 + 3} \Leftrightarrow m = -1$

Chọn đáp án A.

- VD 65.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, số đo của góc giữa 2 đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \text{ và } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ là}$$

- A. 0° . B. 30° . **C. 90° .** D. 60° .

Hướng dẫn giải

Δ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta(-1; 1; 1)$; d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d(2; -1; 3)$

$\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d = (-1)2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$ nên $(\Delta, d) = 90^\circ$

Chọn đáp án C.

Dạng 20. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu.

Phương pháp giải

- Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ .
Gọi H là hình chiếu của I trên Δ
 $d = IH$ là khoảng cách từ I đến Δ
- Ta có:
 - $d < R$ suy ra Δ cắt $S(I; R)$
 - $d = R$ suy ra Δ tiếp xúc với $S(I; R)$
 - $d > R$ suy ra Δ không cắt $S(I; R)$

VD 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình

$$\text{là } d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, (S) : x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6. \text{ Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu có tọa}$$

độ:

- A. $(2; 0; 0), (1; 3; 2)$ B. $(2; 2; 2), (1; 2; 3)$ C. $(2; 2; 2), (1; 3; 2)$ D. $(2; 2; 0), (1; 2; 3)$

Hướng dẫn giải

Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(1 - t)^2 + (2 + t)^2 + (2t + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow (1; 2; 3) \\ t = -1 \Rightarrow (2; 2; 0) \end{cases}$$

Chọn đáp án D.

VD 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình

$$\text{là } d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, (S) : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 11. \text{ Gọi } A, B \text{ lần lượt là giao điểm của đường thẳng}$$

d và mặt cầu (S) . Độ dài đoạn thẳng AB bằng:

- A. $4\sqrt{11}$ B. $\sqrt{33}$ C. $2\sqrt{11}$ D. $3\sqrt{11}$

Hướng dẫn giải

Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(3t)^2 + (t)^2 + (t)^2 = 11 \Leftrightarrow 11t^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow A(4; 1; 1) \\ t = -1 \Rightarrow B(-2; -1; -1) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{36 + 4 + 4} = 2\sqrt{11}$$

Chọn đáp án C.

C. BÀI TẬP CÓ GIẢI

DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. [SGK - NC] Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;0;1)$ trên đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ là:}$$

- A. $(1;0;2)$. B. $(2;2;3)$. C. $(0;-2;1)$. D. $(-1;-4;0)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $1(2-A) + 2(0-B) + 1(1-C)$

Sau đó: CALC tại $A=1, B=0, C=2$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=2, B=2, C=3$ ta được $-6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=0, B=-2, C=1$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=-1, B=-4, C=0$ ta được $12 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;2;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(1+t;2t;2+t)$

$$\vec{MH} = (t-1;2t;t+1)$$

$$\text{Ta có: } \vec{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 1(t-1) + 2(2t) + 1(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Vậy $H(1;0;2)$.

Chọn đáp án A.

Câu 2. [SGK - NC] Cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Hình chiếu của A lên d có tọa độ là:

- A. $(2;-3;1)$. B. $(2;-3;-1)$. C. $(2;3;1)$. D. $(-2;3;1)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $-4(1-A) - 1(1-B) + 2(1-C)$

Sau đó: CALC tại $A=2, B=-3, C=1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=2, B=-3, C=-1$ ta được $4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = 2, B = 3, C = 1$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A = -2, B = 3, C = 1$ ta được $-10 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-4; -1; 2)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(6-4t; -2-t; -1+2t)$

$$\vec{AH} = (5-4t; -3-t; 2t-2)$$

Ta có: $\vec{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -4(5-4t) - 1(-3-t) + 2(2t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $H(2; -3; 1)$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. [SBT - NC] Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và điểm $A(3; -2; 5)$. Tọa độ hình chiếu của điểm A trên d là

A. $(4; -1; 3)$.

B. $(-4; 1; -3)$.

C. $(4; -1; -3)$.

D. $(-4; -1; 3)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $4(3-A) - 2(-2-B) + 1(5-C)$

Sau đó: CALC tại $A = 4, B = -1, C = 3$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A = -4, B = 1, C = -3$ ta được $42 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = 4, B = -1, C = -3$ ta được $6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A = -4, B = -1, C = 3$ ta được $32 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (4; -2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(-8+4t; 5-2t; t)$

$$\vec{AH} = (-11+4t; 7-2t; t-5)$$

Ta có: $\vec{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4(-11+4t) - 2(7-2t) + 1(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Vậy $H(4; -1; 3)$.

Chọn đáp án A.

- Câu 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 5)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ . Tọa độ của H là:
- A. $H(4; 0; 2)$. B. $H(2; 0; 1)$. C. $H(4; 1; 2)$. D. $H(-4; 0; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp thử nghiệm:

Nhập vào máy tính: $1(2-A) + 1(-1-B) + 1(5-C)$

Sau đó: CALC tại $A=4, B=0, C=2$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=2, B=0, C=1$ ta được $3 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=4, B=1, C=2$ ta được $-1 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=-2, B=3, C=1$ ta được $8 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Gọi $H(4+t; t; 2+t) \in (\Delta)$. Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t+2; t+1; t-3)$.

$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Suy ra $H(4; 0; 2)$.

Chọn đáp án A.

- Câu 5.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -7 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 0; -1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Δ) . Tọa độ của A' là:

- A. $9; 6; -11$. B. $9; 3; 11$. C. $3; 2; 11$. D. $9; 6; 11$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp thử nghiệm:

Nhập vào máy tính: $2(1-A) - 1(0-B) + 1(-1-C)$

Sau đó: CALC tại $A=9, B=6, C=-11$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=9, B=3, C=11$ ta được $-25 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=3, B=2, C=11$ ta được $-14 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=9, B=6, C=11$ ta được $-22 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Gọi $H(3+2t; 4-t; -7+t)$ là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (Δ) .

Ta có:

$\overrightarrow{AH} = (2+2t; 4-t; -6+t)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Vì H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (Δ) nên $AH \perp (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có $H(5; 3; -6)$.

Khi đó A' là điểm đối xứng với A qua (Δ) khi H là trung điểm của đoạn AA' .

$$\text{Vậy: tọa độ điểm } H \text{ là } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ x_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow A'(9; 6; -11).$$

Chọn đáp án A.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 2)$ và đường thẳng Δ có phương

trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ là

A. $(0; -2; 1)$. B. $(-1; 1; -1)$. C. $(1; 0; 2)$. D. $(2; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $1(1-A) + 2(-3-B) + 1(2-C)$

Sau đó: CALC tại $A=0, B=-2, C=1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=-1, B=1, C=-1$ ta được $-3 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=1, B=0, C=2$ ta được $-6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=2, B=2, C=3$ ta được $-12 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Gọi $H(1+t; 2t; 2+t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ .

Ta có $\overrightarrow{MH} = (t; 2t+3; t)$ và $\vec{u}_\Delta = (1; 2; 1)$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Vì $MH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t + 2(2t+3) + t = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ nên $H(0; -2; 1)$

Chọn đáp án A.

Câu 7. [SBT - NC] Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là

$$\text{A. } \begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$, lấy $M(1; -1; 2) \in d$.

Toạ độ giao điểm A của d và (Oxy) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;-3;0)$$

Gọi H là hình chiếu của M trên $(Oxy) \Rightarrow H(1;-1;0)$

Đường thẳng d' đi qua $H(1;-1;0)$ và nhận $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = (2;1;0)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$$

Chọn đáp án B.

Công thức nhanh:

$$\text{➤ Hình chiếu vuông góc của đường thẳng } d: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ trên mặt phẳng } (Oxy) \text{ là}$$

$$d': \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=0 \end{cases}.$$

$$\text{➤ Hình chiếu vuông góc của đường thẳng } d: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ trên mặt phẳng } (Oyz) \text{ là}$$

$$d': \begin{cases} x=0 \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}.$$

$$\text{➤ Hình chiếu vuông góc của đường thẳng } d: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ trên mặt phẳng } (Oxz) \text{ là}$$

$$d': \begin{cases} x=x_0+at \\ y=0 \\ z=z_0+ct \end{cases}.$$

Câu 8. [SBT - NC] Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases}$ trên mặt

phẳng (Oxy) là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3+t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=0 \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=0 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=3+t \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn giải**Áp dụng công thức nhanh****Chọn đáp án C.**

Câu 9. [SBT - NC] Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases}$ trên mặt

phẳng (Oyz) là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3+t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=0 \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=0 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=3+t \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn giải**Áp dụng công thức nhanh****Chọn đáp án B.**

Câu 10. [SBT - NC] Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=-\frac{9}{5}-t \\ y=5t \\ z=\frac{7}{5}+3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+3z-1=0$. Gọi

d' là hình chiếu của d trên mặt phẳng (P) . Trong các vectơ sau, vectơ nào **không phải** là vectơ chỉ phương của d' ?

$$\text{A. } (5; -51; -39). \quad \text{B. } (10; -102; -78). \quad \text{C. } (-5; 51; 39). \quad \text{D. } (5; 51; 39).$$

Hướng dẫn giải:Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 5; 3)$ Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (3; -2; 3)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) , suy ra (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d; \vec{n}_p] = (21; 12; -13)$

Đường thẳng $d' = (P) \cap (Q)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_p; \vec{n}_Q] = (-10; 102; 78)$.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và

$$(d_2): \begin{cases} x = -6t' \\ y = 1 + t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases}. \text{ Độ dài đoạn vuông góc chung của } (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ là:}$$

- A.3. B.6. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{17}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $M(3-4t; -2+t; -1+t) \in (d_1)$ và $N(-6t'; 1+t'; 2+2t') \in (d_2)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-3+4t-6t'; 3-t+t'; 3-t+2t')$

Vec tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1 = (-4; 1; 1); \vec{u}_2 = (-6; 1; 2)$

Khi đó MN là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 18t - 27t' = 18 \\ 27t - 41t' = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$, ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2; 2) \Rightarrow MN = 3$.

Chọn đáp án A.

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ và

$(d_2): \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-3}$. Đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) có vectơ chỉ phương là:

- A. $\vec{a}(-3; -3; 1)$. B. $\vec{a}(3; -3; 3)$. C. $\vec{a}(1; 0; -1)$. D. $\vec{a}(1; -3; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $2A - 1B + 3C$

Sau đó: CALC tại $A = -3, B = -3, C = 1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A = 3, B = -3, C = 3$ ta được $18 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = 1, B = 0, C = -1$ ta được $-1 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A = 1, B = -3, C = 2$ ta được $11 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.

Phương pháp tự luận:

Ta có: Vec tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1 = (2; -1; 3); \vec{u}_2 = (-3; 2; -3)$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .

$$\Rightarrow \begin{cases} (\Delta) \perp (d_1) \\ (\Delta) \perp (d_2) \end{cases}$$

Khi đó: vector chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = [\vec{u_1}; \vec{u_2}] = (-3; -3; 1)$.

Chọn đáp án A.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$.

B. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$.

C. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-9}{4}$.

D. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{-4}$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $1A+2B-1C$ ($1; 2; -1$ là tọa độ vector chỉ phương d_1)

Sau đó: CALC tại $A=-1, B=2, C=-4$ ta được $7 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

CALC tại $A=2, B=1, C=4$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án B.

CALC tại $A=2, B=-1, C=4$ ta được $-4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=2, B=1, C=-4$ ta được $8 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án B.

Phương pháp tự luận:

Gọi A, B là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

$$A(7+m; 3+2m; 9-m) \in d_1 \text{ và } B(3-7n; 1+2n; 1+3n) \in d_2.$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4-7n-m; -2+2n-2m; -8+3n+m).$$

$$\text{Do } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6n-6m=0 \\ 62n+6m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases} \text{ nên } A(7; 3; 9), B(3; 1; 1), \overrightarrow{AB} = (-4; -2; -8).$$

$$\text{Đường thẳng } AB \text{ đi qua } A \text{ có phương trình } \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 14. [SBT - NC] Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm

$A(1; 2; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

$$A. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

$$B. \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

$$C. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}.$$

$$D. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}.$$

Hướng dẫn giải**Phương pháp thử nghiệm:**

Nhập vào máy tính: $2A - 1B + 1C$

Sau đó: CALC tại $A=1, B=-3, C=-5$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án A.

CALC tại $A=-1, B=-3, C=-5$ ta được $-4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A=1, B=3, C=5$ ta được $4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án C.

CALC tại $A=1, B=3, C=-4$ ta được $-6 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án A.**Phương pháp tự luận:**

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -1; 1)$.

Giả sử d cắt đường thẳng d_2 $N(1-b; 1+2b; -1+b) \in d_2$

Do đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với d_1 nên $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{u}_d = 0$

$$\Rightarrow 2(-b) - 1(2b-1) + 1(b-4) = 0 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow N(2; -1; -2)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{AN} = (1; -3; -5)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 15. [SBT - NC] Cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ qua A cắt d và song song với $\text{mp}(\alpha)$ có phương trình là

$$A. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

$$B. \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

$$C. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$D. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Hướng dẫn giải**Phương pháp thử nghiệm:**

Vì $\Delta // (\alpha)$ nên $\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

Nhập vào máy tính: $1A + 1B - 1C$

Sau đó: CALC tại $A=1, B=2, C=1$ ta được $2 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

CALC tại $A = -1, B = -2, C = 1$ ta được $-4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = 1, B = -2, C = -1$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án C.

CALC tại $A = 1, B = 2, C = 1$ ta được $2 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án C.

Phương pháp tự luận:

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Giả sử Δ cắt đường thẳng d tại $N(3+b; 3+3b; 2b) \in d$

$$\overrightarrow{AN} = (b+2; 3b+1; 2b+1)$$

Do đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -1)$ và song song với (α) nên $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} = 0$

$$1(b+2) + 1(3b+1) - 1(2b+1) = 0 \Leftrightarrow 2b = -2 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow N(2; 0; -2)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -1)$ và có VTCP $\overrightarrow{AN} = (1; -2; -1)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 16. [SBT - NC] Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}; d': \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$. Đường thẳng đi qua

$A(0; 1; 1)$ cắt d' và vuông góc d có phương trình là

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}.$

B. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}.$

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}.$

D. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}.$

Hướng dẫn giải

Phương pháp trắc nghiệm:

Nhập vào máy tính: $-2A+2B+1C$

Sau đó: CALC tại $A = 1, B = -3, C = 4$ ta được $-4 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

CALC tại $A = -1, B = 3, C = 4$ ta được $12 \neq 0 \Rightarrow$ loại đáp án B.

CALC tại $A = -1, B = -3, C = 4$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án C.

CALC tại $A = -1, B = -3, C = 4$ ta được $0 \Rightarrow$ chọn đáp án D.

Mặt khác đường thẳng đi qua $A(0; 1; 1)$ nên chọn đáp án D.

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-2; 2; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, giả sử Δ cắt đường thẳng d' tại $N(t; -t; 2) \in d'$

$$\overrightarrow{AN} = (t; -t-1; 1)$$

Do đường thẳng Δ đi qua $A(0; 1; 1)$ và vuông góc với d nên $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{u}_d = 0$

$$-2(t) + 2(-t-1) + 1(1) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow N\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; 1\right)$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(0; 1; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = 4 \cdot \overrightarrow{AN} = (-1; -3; 4)$ là:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 17. (Bài tập 24 - SGKNC trang 116) Cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y+z+1=0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2-3t \end{cases} \text{ Tọa độ giao điểm } A \text{ của } d \text{ và } (\alpha) \text{ là:}$$

- A. $A(3; 0; 4)$; B. $A(3; -4; 0)$; C. $A(-3; 0; 4)$; D. $A(3; 0; -4)$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(1+t)+3(2-t)+(2-3t)+1=0 \Leftrightarrow -5t=-10 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow A(3; 0; -4)$.

Chọn đáp án D.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=(m-1)t \\ y=(2m+1)t \\ z=1+(2m^2+1) \end{cases}$. Với giá trị nào

của m thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng Oyz ?

- A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=1 \vee m=-1$. D. $m=2$.

Hướng dẫn giải:

Do $d \subset Oyz$ nên $x=0 \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow m=1$.

Chọn đáp án A.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y-2z-5=0$. Với giá trị nào của m thì Δ vuông góc với (α) ?

- A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=3$. D. $m=-3$.

Hướng dẫn giải

Do $\Delta \perp (\alpha)$ nên $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{n}_\alpha$ cùng phương $\Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2m-1}{3} = \frac{2}{-2} \Rightarrow m=-1$.

Chọn đáp án B.

Câu 20. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 11t \\ y = -1 - 2t \\ z = 7t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha): 5x + my - 3z + 2 = 0$. Để (Δ) cắt (α) tại điểm có hoành độ bằng 0 thì giá trị thích hợp của m là:

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -3.

Hướng dẫn giải

Gọi $M = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow M(11t; -1 - 2t; 7t)$. Hoành độ của điểm M bằng 0 nên: $11t = 0 \Leftrightarrow t = 0$
 $\Rightarrow M(0; -1; 0) \in (\alpha) \Rightarrow 5 \cdot 0 + m(-1) - 3 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

Chọn đáp án A.

Câu 21. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng

d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

- A. d vuông góc với (P) . B. d cắt (P) .
 C. d song song với (P) . D. d thuộc (P) .

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(-3 + t) + (2 - 2t) + 3(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng)

Do đó hệ phương trình có vô số nghiệm. Vậy d thuộc (P) .

Chọn đáp án D.

Câu 22. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ giao điểm của $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 7 = 0$ là:

- A. $M(1; -1; 2)$. B. $M(2; 0; -2)$. C. $M(3; -1; 0)$. D. $M(-3; 1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và (P) .

$M \in d \Rightarrow M(3+t; -1-t; 2t)$

$M \in (P): 2(3+t) - (-1-t) - (2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 0$

Vậy: $M(3; -1; 0)$

Chọn đáp án C.

- Câu 23.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$. Tọa độ giao điểm H của d và (P) là
- A. $H(1; 0; 1)$. B. $H(0; 0; -2)$. C. $H(1; 1; 6)$. D. $H(12; 9; 1)$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Vì $H = d \cap (P)$ suy ra $H \in d \Rightarrow H(12 + 4t; 9 + 3t; 1 + t)$. Mà $H \in (P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ nên ta có: $3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 26t + 78 = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Vậy $H(0; 0; -2)$.

Chọn đáp án B.

- Câu 24.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + 3y + z + 1 = 0$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

- A. $d \parallel (P)$. B. d cắt (P) . C. $d \subset (P)$. D. $d \perp (P)$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ có VTCP $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Mặt phẳng $(P): x + 3y + z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1; 3; 1)$.

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}$. Từ đó suy ra $d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$.

Lấy điểm $M(1; 2; 1) \in d$, thay vào $(P): x + 3y + z + 1 = 0$ ta được: $1 + 3 \cdot 2 + 1 + 1 = 9 \neq 0$ nên $M \notin (P)$. Suy ra $d \parallel (P)$.

Chọn đáp án A.

- Câu 25.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. $d \perp (\alpha)$ B. d cắt (α) C. $d \parallel (\alpha)$ D. $d \subset (\alpha)$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận:

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1; -2; 0)$ và đi qua điểm $A(-3; 2; 1)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 1; 3)$.

Để thấy:
$$\begin{cases} 2x_A + y_A + 3z_A + 1 = -6 + 2 + 3 + 1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy d nằm trong mặt phẳng (P) .

Chọn đáp án D.

Phương pháp trắc nghiệm:

Xét hệ gồm phương trình d và phương trình (P) :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z + 1 = 0 \\ x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô số nghiệm}$$

Từ đó suy ra d nằm trong mặt phẳng (P) .

Chọn đáp án D.

Câu 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P) : x + 3y + z + 1 = 0$. Toạ độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng là:

A. $(3; 0; 4)$ B. $(3; -4; 0)$ C. $(-3; 0; 4)$ D. $(3; 0; -4)$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Xét hệ gồm phương trình d và phương trình (P) :
$$\begin{cases} x + 3y + z + 1 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $M(3; 0; -4)$.

Chọn đáp án D.

Phương pháp trắc nghiệm

Để thấy toạ độ các điểm $A(3; 0; 4)$; $B(3; -4; 0)$; $C(-3; 0; 4)$ không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) .

Kiểm tra $M(3; 0; -4)$ thỏa mãn phương trình $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và phương trình mặt phẳng

$(P) : x + 3y + z + 1 = 0$. Vậy suy ra d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $M(3; 0; -4)$.

Chọn đáp án D.

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P) : x + 2y - z + 3 = 0$. trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng** ?

A. d song song với mặt phẳng (P) .B. d cắt mặt phẳng (P) .C. d vuông góc với mặt phẳng (P) .D. d nằm trong mặt phẳng (P) .**Hướng dẫn giải****Phương pháp tự luận**Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(4; -1; 2)$ và đi qua điểm $A(3; -1; 4)$ Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 2; -1)$.

Để thấy: $\begin{cases} x_A + 2y_A - z_A + 3 = 3 - 2 - 4 + 3 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 4 - 2 - 2 = 0 \end{cases}$. Vậy d nằm trong mặt phẳng (P) .

Chọn đáp án D.**Phương pháp trắc nghiệm.**Chuyển phương trình d về dạng phương trình chính tắc: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$

Xét hệ gồm phương trình d và phương trình (P) :
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} \\ \frac{x-3}{4} = \frac{z-4}{2} \end{cases}$$

Để thấy hệ vô số nghiệm $(x; y; z)$. Từ đó suy ra d nằm trong mặt phẳng (P) .**Chọn đáp án D.**

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì d_1 và d_2 cắt nhau?

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = 2$ **Hướng dẫn giải** d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (m; 1; 2)$ qua $M_1(1; 0; -1)$, d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-1; 2; -1)$ qua $M_2(1; 2; 3)$.

d_1 cắt d_2 khi $\begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot (-5) + 2(m-2) + 4(2m+1) = 0 \\ (-5; m-2; 2m+1) \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Chọn đáp án A.

Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(3; -2; -4)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ tại điểm M. Tọa độ điểm M là:

A. $M(8; -8; 5)$.B. $M(8; -4; 5)$.C. $M(-2; 3; 1)$.D. $M(8; 8; 5)$.

Hướng dẫn giải

(α) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}(3; -2; -3)$; d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(3; -2; 2)$

Ta có: $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(2+3t; -4-2t; 1+2t)$; $\overrightarrow{AM}(-1+3t; -2-2t; 5+2t)$

Vì Δ song song với (α) nên:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-1+3t)3 + (-2-2t)(-2) + (5+2t)(-3) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Vậy: $M(8; -8; 5)$

Chọn đáp án A.

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và

$$d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}. \text{ Vị trí tương đối giữa } d_1 \text{ và } d_2 \text{ là:}$$

A. Trùng nhau. B. Song song. C. Cắt nhau. D. Chéo nhau.

Hướng dẫn giải

d_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1(4; -6; -8)$; d_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6; 9; 12)$

Ta có: $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{-8}{12}$ nên $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Rightarrow d_1$ và d_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn $A(2; 0; -1) \in d_1$. Thay vào phương trình đường thẳng $d_2: \frac{2-7}{-6} = \frac{0-2}{9} = \frac{-1}{12}$ (vô nghiệm)

Do đó: $A(2; 0; -1) \notin d_2$. Vậy d_1 song song d_2

Chọn đáp án B.

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và

$$d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}. \text{ Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng } d \text{ và } d' \text{ là}$$

A. $(-3; -2; 6)$ B. $(3; 7; 18)$ C. $(5; -1; 20)$ D. $(3; -2; 1)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' & (1) \\ -2 + 3t = -1 - 4t' & (2) \\ 6 + 4t = 20 + t' & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2) suy ra $t = 3$ và $t' = -2$. Thay vào phương trình (3) ta thấy nó thỏa mãn. Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là $t = 3, t' = -2$.

Suy ra d cắt d' tại điểm có tọa độ $(3; 7; 18)$.

Chọn đáp án B.

Câu 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$

Giá trị của tham số m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = 0$ D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} 1 + mt = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$

Để đường thẳng d và d' cắt nhau thì hệ phương trình trên phải có nghiệm duy nhất.

Từ phương trình (2) và (3) suy ra $t = 2$ và $t' = 0$. Thay vào phương trình (1) suy ra $m = 0$.

Chọn đáp án C.

Câu 33. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và

$d': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là

- A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d và d' ($M \in d, N \in d'$).

Vì $M \in d \Rightarrow M(1+2t; -1-t; 1)$ và $N \in d' \Rightarrow N(2-t'; -2+t'; 3+t')$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (1-2t-t'; -1+t+t'; 2+t')$.

Đường thẳng d và d' lần lượt có VTCP là $\vec{u}_d = (2; -1; 0)$ và $\vec{u}_{d'} = (-1; 1; 1)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-2t-t') - (-1+t+t') = 0 \\ -(1-2t-t') + (-1+t+t') + (2+t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ và $MN = |\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án B.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và d' là:

$$h = \frac{\left[\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}} \right], \overrightarrow{MM'} \right]}{\left[\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}} \right] \right]}, \text{ (với } M \in d, M' \in d').$$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và

$$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{6}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

- A. d_1 cắt d_2 B. d_1 trùng d_2 C. $d_1 \parallel d_2$ D. d_1 chéo d_2

Hướng dẫn giải

Thứ nhất ta thấy d_1 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1; 2; 3)$; d_2 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2; 4; 6)$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1}.$$

Mặt khác $A_1(1; 0; 3) \in d_1$ nhưng không thuộc d_2 . Từ đó suy ra $d_1 \parallel d_2$.

Chọn đáp án C.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -7 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 0; -1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ . Tọa độ của A' là:

- A. $9; 6; -11$ B. $9; 3; 11$ C. $3; 2; 11$ D. $9; 6; 11$

Hướng dẫn giải

Gọi $H(3 + 2t; 4 - t; -7 + t)$ là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng Δ .

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (2 + 2t; 4 - t; -6 + t).$$

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Vì H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng Δ nên $AH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có $H(5; 3; -6)$.

Khi đó A' là điểm đối xứng với A qua Δ khi H là trung điểm của đoạn AA' .

$$\text{Vậy: tọa độ điểm } H \text{ là } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow A'(9; 6; -11).$$

Chọn đáp án A.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình

$$\text{là } d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, (S): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6. \text{ Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu có tọa}$$

độ:

- A. $(2; 0; 0), (1; 3; 2)$ B. $(2; 2; 2), (1; 2; 3)$
C. $(2; 2; 2), (1; 3; 2)$ D. $(2; 2; 0), (1; 2; 3)$

Hướng dẫn giải

Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(1-t)^2 + (2+t)^2 + (2t+1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow (1; 2; 3) \\ t=-1 \Rightarrow (2; 2; 0) \end{cases}$$

Chọn đáp án D.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình

$d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, (S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 11$
là . Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) . Độ dài đoạn thẳng AB bằng:

A. $4\sqrt{11}$

B. $\sqrt{33}$

C. $2\sqrt{11}$

D. $3\sqrt{11}$

Hướng dẫn giải

Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(3t)^2 + (t)^2 + (t)^2 = 11 \Leftrightarrow 11t^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow A(4; 1; 1) \\ t=-1 \Rightarrow B(-2; -1; -1) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{36 + 4 + 4} = 2\sqrt{11}$$

Chọn đáp án C.

DẠNG TỰ LUẬN**Câu 1.** [SGK – CB] Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- a) d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -3; 1)$.
- b) d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$.
- c) d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$
- d) d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$ và $Q(5; 4; 4)$.

Hướng dẫn giải

- a) PTTS của đường thẳng d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
- b) VTPT của $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$ là $\vec{a} = (1; 1; -1)$

PTTS của đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 1; -1)$ là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

- c) PTTS của đường thẳng d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng

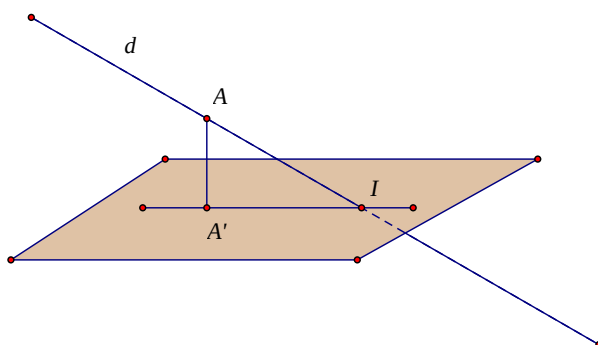
$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \text{ là } d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

- d) Ta có $\overrightarrow{PQ}(4; 2; 1)$. PTTS của đường thẳng d đi qua điểm $P(1; 2; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{PQ}(4; 2; 1)$

$$\text{là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 2. [SGK – CB] Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ lần lượt trên các mặt phẳng sau:

a) (Oxy) b) (Oyz) **Hướng dẫn giải**

a) PTTQ của (Oxy) là $z = 0$, $d \cap (Oxy) = I\left(\frac{5}{3}; -\frac{11}{3}; 0\right)$

Gọi $A(2; -3; 1)$ là điểm thuộc đường thẳng d , hình chiếu của $A(2; -3; 1)$ lên (Oxy) là

$$A'(2; -3; 0). \text{ Ta có } \overrightarrow{A'I} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right) = -\frac{1}{3}(1; 2; 0)$$

Vậy PTTS của đường thẳng $A'I$ đi qua $A'(2; -3; 0)$ và nhận $\vec{u}(1; 2; 0)$ làm VTCP là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) PTTQ của (Oyz) là $x = 0$, $d \cap (Oyz) = I(0; -7; -5)$

Gọi $A(2; -3; 1)$ là điểm thuộc đường thẳng d , hình chiếu của $A(2; -3; 1)$ lên (Oyz) là

$$A'(0; -3; 1). \text{ Ta có } \overrightarrow{A'I} = (0; -4; -6)$$

Vậy PTTS của đường thẳng $A'I$ đi qua $A'(0; -3; 1)$ và nhận $\overrightarrow{A'I} = (0; -4; -6)$ làm VTCP là

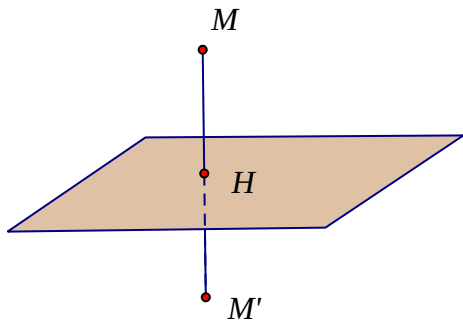
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 - 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Câu 3. [SGK – CB] Cho điểm $M(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M trên (α) ;

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α) ;

Hướng dẫn giải



a) Đường thẳng d đi qua $M(1; 4; 2)$ và vuông góc với $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$ có PTTS là:

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ . Gọi } d \cap (\alpha) = H(1+t; 4+t; 2+t), \text{ do } M' \in (\alpha) \text{ nên ta có } t = -2$$

Vậy $H(-1; 2; 0)$

b) Gọi $M'(x; y; z)$ là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (α) suy ra H là trung điểm

$$\text{đoạn } MM'. \text{ Vậy } \begin{cases} x+1=-2 \\ y+4=4 \\ z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow M'(-3; 0; -2)$$

Câu 4. [SGK – NC] Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây:

- Các trục tọa độ Ox , Oy , Oz .
- Đường thẳng đi qua $M(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 3; 5)$
- Đường thẳng đi qua $N(-2; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (0; 0; -3)$
- Đường thẳng đi qua $N(3; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - 5y + 4 = 0$
- Đường thẳng đi qua hai điểm $P(2; 3; -1)$ và $Q(1; 2; 4)$

Hướng dẫn giải

- Trục Ox đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và nhận VTCP là $\vec{i}(1; 0; 0)$ nên có PTTS là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự } Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}; \quad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

- Đường thẳng đi qua $M(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 3; 5)$

$$\text{Có PTTS là } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}, \text{ PTCT là } \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$$

- Đường thẳng đi qua $N(-2; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (0; 0; -3)$ là
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

- Đường thẳng đi qua $N(3; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - 5y + 4 = 0$ có dạng tham

$$\text{số là } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 \end{cases}$$

- Đường thẳng đi qua hai điểm $P(2; 3; -1)$ và $Q(1; 2; 4)$

$$\text{Có dạng tham số là: } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}, \text{ Dạng chính tắc: } \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{5}$$

Câu 5. [SGK – NC] Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây:

a) Đường thẳng đi qua điểm $(4;3;1)$ và song song với đường thẳng có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(-2;3;1)$ và song song với đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng đi qua điểm $(4;3;1)$ và song song với đường thẳng có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ có dạng tham số là } \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và chính tắc } \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(-2;3;1)$ và song song với đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3} \text{ có dạng tham số là } \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases},$$

$$\text{và dạng chính tắc là } \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}$$

Câu 6. [SBT – CB] Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có VTCP $\vec{a} = (3;3;1)$.

b) Δ đi qua điểm $B(1;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 9 = 0$.

c) Δ đi qua hai điểm $C(1;-1;1)$ và $D(2;1;4)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Phương trình tham số của đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{Phương trình chính tắc của đường thẳng } \Delta \text{ là } \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

b) Do $\Delta \perp (\alpha)$ nên Δ nhận $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 1)$ làm véc tơ chỉ phương

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$

c) $\overrightarrow{CD} = (1; 2; 3)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Câu 7. [SBT – CB] Cho điểm $M(1; -1; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 12 = 0$.

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α) .

Hướng dẫn giải

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

$MH \perp (\alpha)$ nên đường thẳng MH nhận $\overrightarrow{n_\alpha} = (2; -1; 2)$ làm véc tơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng MH là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ $H(1+2t; -1-t; 2+2t) \in (\alpha) \Rightarrow 2(1+2t) - (-1-t) + 2(2+2t) + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 9t + 19 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{9}$$

Vậy, $H\left(-\frac{29}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right)$

- M' đối xứng với M qua (α) , suy ra H là trung điểm của đoạn MM'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = -\frac{67}{9} \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{29}{9} \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = -\frac{58}{9} \end{cases}$$

Câu 8. [SBT – NC] Viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng d , biết:

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$ và $(\alpha'): x + y - z + 4 = 0$.
- d là giao tuyến của mặt phẳng $y - 2z + 3 = 0$ với mặt phẳng tọa độ (Oyz) .

Hướng dẫn giải

a) (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -3; 1)$

(α') có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 1; -1)$

Suy ra, véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 2; 4) = 2(1; 1; 2)$

Xét hệ: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$. Chọn $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2 \end{cases}$. Suy ra $M(-2; 0; 2) \in d$

Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

b) (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (0; 1; -2)$

(Oyz) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 0; 0)$

Suy ra, véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (0; -2; -1)$

Xét hệ: $\begin{cases} y - 2z + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Chọn $z = 0 \Rightarrow y = -3$. Suy ra $M(0; -3; 0) \in d$

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 - 2t \\ z = -t \end{cases}$

Câu 9. [SBT – NC] Cho hai điểm $A(2; 4; -1)$ và $B(5; 0; 7)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB , tia AB và đoạn thẳng AB .

Hướng dẫn giải

$\vec{AB} = (3; -4; 8)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

• Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$

• Gọi $M(x, y, z)$ thuộc đoạn AB . Khi đó: $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ -1 \leq z \leq 7 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

Suy ra, phương trình tham số của đoạn AB là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$, với $0 \leq t \leq 1$

- Phương trình tham số của tia AB là
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, \text{ với } t \geq 0$$

Câu 10. [SBT – NC] Viết phương trình đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây:

- a) Đi qua $A(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.
- b) Đi qua $A(-2; 1; 2)$ và song song với trục Oz .
- c) Đi qua $A(2; 3; -1)$ và $B(1; 2; 4)$.
- d) Đi qua $A(4; 3; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.
- e) Đi qua $A(1; 2; -1)$ và song song với đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và $(\alpha'): 2x - y + 5z - 4 = 0$.
- f) Đi qua $A(-2; 1; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$.
- g) Đi qua $A(2; -1; 1)$ và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có VTCP là $\vec{u}_1 = (-1; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$.

Hướng dẫn giải

- a) Đi qua $A(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

Ta có $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (-1; 3; 5)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(2; 0; -1) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (-1; 3; 5) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$

- b) Đi qua $A(-2; 1; 2)$ và song song với trục Oz .

Trục Oz có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(-2; 1; 2) \\ \text{VTCP } \vec{k} = (0; 0; 1) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$

- c) Đi qua $A(2; 3; -1)$ và $B(1; 2; 4)$.

Ta có $\vec{AB} = (-1; -1; 5)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(2; 3; -1) \\ \text{VTCP } \vec{AB} = (-1; -1; 5) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

d) Đi qua $A(4;3;1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ có VTCP $\vec{u} = (2; -3; 2)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(4;3;1) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (2; -3; 2) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

e) Đi qua $A(1;2;-1)$ và song song với đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và $(\alpha'): 2x - y + 5z - 4 = 0$.

$(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1; 1; -1)$

$(\alpha'): 2x - y + 5z - 4 = 0$ có VTPT $\vec{n}' = (2; -1; 5)$

Ta có $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (4; -7; -3)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(1;2;-1) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (4; -7; -3) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

f) Đi qua $A(-2;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$.

$(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1; 2; -2)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(-2;1;0) \\ \text{VTCP } \vec{n} = (1; 2; -2) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

g) Đi qua $A(2;-1;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có VTCPlà $\vec{u}_1 = (-1; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$.

Ta có $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-4; -2; 1)$

Đường thẳng được xác định $\begin{cases} \text{qua } A(2; -1; 1) \\ \text{VTCP } \vec{n} = (-4; -2; 1) \end{cases}$

Đường thẳng cần lập có phương trình $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 11. [SGK – CB] Cho điểm $A(1; 0; 0)$ và $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ ;
- Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

Hướng dẫn giải

- H là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta \Rightarrow H \in \Delta \Rightarrow H(2+t; 1+2t; t)$

$$\overrightarrow{AH} = (1+t; 1+2t; t)$$

$$\Delta \text{ có VTCP } \vec{u}_{\Delta} = (1; 2; 1)$$

$$AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow 1(1+t) + 2(1+2t) + 1 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

- A' đối xứng với A qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A'(2; 0; -1).$$

Câu 12. [SBT – CB] Cho điểm $M(2; -1; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng Δ .

Hướng dẫn giải

- H là hình chiếu vuông góc của M trên $\Delta \Rightarrow H \in \Delta \Rightarrow H(1+2t; -1-t; 2t)$

$$\overrightarrow{MH} = (2t-1; -t; 2t-1)$$

$$\Delta \text{ có VTCP } \vec{u}_{\Delta} = (2; 1; -2)$$

$$MH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(-t) - 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Vậy } H(1; -1; 0).$$

- M' đối xứng với M qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = 0 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = -1 \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M'(0; -1; -1).$$

Câu 13. [SBT – NC] Cho ba điểm $A(-1; 3; 2), B(4; 0; -3), C(5; -1; 4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm A trên đường thẳng BC .

Hướng dẫn giải

Đường thẳng BC đi qua điểm $B(4; 0; -3)$ và nhận vector $\overrightarrow{BC} = (1; -1; 7)$ làm VTCP nên có

$$\text{phương trình tham số: } \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng $BC \Rightarrow H \in BC \Rightarrow H(4 + t; -t; -3 + 7t)$

$$\overrightarrow{AH} = (5 + t; -t - 3; 7t - 5)$$

$$AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1(5 + t) - 1(-t - 3) + 7(7t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{17}$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right).$$

Câu 14. [SBT – NC] Cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và điểm $M(4; -3; 2)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên đường thẳng d .

Hướng dẫn giải

$$\text{Đường thẳng } d: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$d \text{ có VTCP } \overrightarrow{u_d} = (3; 2; -1)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(-2 + 3t; -2 + 2t; -t)$

$$\overrightarrow{MH} = (-6 + 3t; 1 + 2t; -2 - t)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 3(-6 + 3t) + 2(1 + 2t) - (-2 - t) \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Suy ra } H(1; 0; -1)$$

$$M' \text{ đối xứng với } M \text{ qua } d \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = -2 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 3 \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M'(-2; 3; 4).$$

Câu 15. [SBT – NC] Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3; 1; -1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$ và $(\alpha'): y - 2z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đường thẳng } d: \begin{cases} 4x + 3y - 13 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - \frac{3}{2}t \\ y = -5 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$d \text{ có VTCP } \vec{u_d} = \left(-\frac{3}{2}; 2; 1\right)$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } M \text{ lên } d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H\left(7 - \frac{3}{2}t; -5 + 2t; t\right)$$

$$\vec{MH} = \left(10 - \frac{3}{2}t; -6 + 2t; t + 1\right)$$

$$\text{Ta có } \vec{MH} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\left(10 - \frac{3}{2}t\right) + 2(-6 + 2t) + (t + 1) = 0 \Rightarrow t = \frac{104}{29}$$

$$\text{Suy ra } H\left(\frac{47}{29}; \frac{63}{29}; \frac{104}{29}\right)$$

$$M' \text{ đối xứng với } M \text{ qua } d \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = \frac{181}{29} \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{97}{29} \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{237}{29} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M'\left(\frac{181}{29}; \frac{97}{29}; \frac{237}{29}\right).$$

Câu 16. [SBT – NC] Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(2; -1; 1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): y + z - 4 = 0$ và $2x - y - z + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đường thẳng } d: \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$d \text{ có VTCP } \vec{u_d} = (0; -1; 1)$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } M \text{ lên } d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(1; 4 - t; t)$$

$$\vec{MH} = (-1; 5 - t; t - 1)$$

$$\text{Ta có } \vec{MH} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow -(5 - t) + (t - 1) = 0 \Rightarrow t = 3$$

Suy ra $H(1;1;3)$

$$M' \text{ đối xứng với } M \text{ qua } d \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = 0 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 3 \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = 5 \end{cases}$$

Vậy $M'(0;3;5)$.

Câu 17. [SGK – CB] Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ lần lượt trên các mặt phẳng sau:}$$

a) (Oxy)

b) (Oyz)

Hướng dẫn giải

➤ Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

➤ Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Câu 18. [SGK – NC] Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$.

a) Tìm một VTCP của d và một điểm nằm trên d .

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với $\text{mp}(P)$.

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên $\text{mp}(P)$.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;8;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (1;4;2)$.

b) Mặt phẳng (β) đi qua d và vuông góc với (P) có vector pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (2;1;-3)$$

$$(\beta) \text{ đi qua } d \text{ nên } M \in (\beta) \Rightarrow (\beta): 2(x-0) + (y-8) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

c) Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (β) chứa d vuông góc với (P) . Vậy phương trình hình chiếu của d lên (P) là

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}.$$

Câu 19. [SGK – NC] Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình:

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}; \quad (\alpha): 2x + y + z - 8 = 0$$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α) .

Hướng dẫn giải

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β) , trong đó (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -1; 1)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2; 3; 5)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (2; 1; 1)$

(β) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α) nên có VTPT $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (-2; 8; -4)$

(β) chứa d nên $M \in (\beta) \Rightarrow (\beta): -2(x-2) + 8(y+1) - 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8y - 4z + 16 = 0$

$$\text{Vậy phương trình hình chiếu là } \begin{cases} 2x + y + z - 8 = 0 \\ -2x + 8y - 4z + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{40}{9} - \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{8}{9} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 20. [SBT – NC] Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ trên mỗi mặt

phẳng sau: mp(Oxy), mp(Oxz), mp(Oyz), mp(α): $x + y + z - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

➤ Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

➤ Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

➤ Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

- Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β) , trong đó (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2; 3; 1)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$

(β) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α) nên có VTPT $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (2; -1; -1)$

(β) chứa d nên $M \in (\beta) \Rightarrow (\beta): 2(x-1) - 1(y+2) - 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 1 = 0$

Vậy phương trình hình chiếu là
$$\begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{13}{3} - t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 21. [SBT – NC] Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = \frac{7}{2} + 3t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$

trên mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hình chiếu vuông góc là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) trong đó (β) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (3; -2; -2)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; -2)$

(β) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (α) nên có VTPT $\vec{n}_\beta = \frac{1}{4}[\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (2; 1; 2)$

(β) chứa d nên $M \in (\beta) \Rightarrow (\beta): 2\left(x - \frac{7}{2}\right) + 1(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 7 = 0$

Vậy phương trình hình chiếu là
$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Câu 22. [SBT –CB] Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ và $d': \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-2t' \\ z=1 \end{cases}$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d' .

Hướng dẫn giải

d có VTCP là $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$, d' có VTCP là $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$.

Gọi $M(1-t_1; 2+2t_1; 3t_1) \in d$, $N(1+t_2; 3-2t_2; 1) \in d'$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (t_2 + t_1; -2t_2 - 2t_1 + 1; -3t_1 + 1)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14t_1 - 5t_2 = -5 \\ 5t_1 + 5t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{3} \\ t_2 = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } M\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 1\right), N\left(\frac{16}{15}; \frac{43}{15}; 1\right), \overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; 0\right)$$

Đường vuông góc chung đi qua $M\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 1\right)$ và nhận vector $\vec{u} = 5\overrightarrow{MN} = (2; 1; 0)$ làm VTCP nên

$$\text{có phương trình: } \begin{cases} x = \frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{8}{3} + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Câu 23. [SBT –NC] Viết phương trình đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

$$\text{a) } d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5} \text{ và } d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=2-2t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d và d' lần lượt có VTCP là $\vec{u}_d = (2; 3; -5)$, $\vec{u}_{d'} = (3; -2; -1)$.

$$\text{Điểm } M \in d \Rightarrow M(2+2t; 3+3t; -4-5t)$$

$$\text{Điểm } N \in d' \Rightarrow N(-1+3t'; 4-2t'; 4-t')$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-3+3t'-2t; 1-2t'-3t; 8-t'+5t)$$

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3+3t'-2t) + 3(1-2t'-3t) - 5(8-t'+5t) = 0 \\ 3(-3+3t'-2t) - 2(1-2t'-3t) - 1(8-t'+5t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t' - 38t = 43 \\ 14t' - 5t = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M(0; 0; 1), N(2; 2; 3) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2; 2; 2)$$

Vậy phương trình chính tắc của đường vuông góc chung Δ là: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

b) Tương tự, phương trình đường vuông góc chung là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{2}$.

Câu 24. [SGK – NC] Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(1; -1; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng sau đây:

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ và giả sử Δ cắt hai đường thẳng d và d' lần lượt tại $A(1+2a; a; 3-a) \in d$ và $B(b; -1-2b; 2+b) \in d'$

Do đường thẳng Δ đi qua $M(1; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} = (2a; a+1; 2-a); \quad \overrightarrow{MB} = (b-1; -2b; 1+b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = k(b-1) \\ a+1 = k(-2b) \\ 2-a = k(1+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ kb = \frac{1}{4} \\ k = \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{13} \\ k = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 1)$ và có VTCP

$$-2.\overrightarrow{MA} = -2\left(-3; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) = (6; 1; -7) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$$

Câu 25. [SGK – NC] Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3 , biết phương trình của d_1, d_2, d_3 là:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3} \quad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Gọi đường thẳng cần tìm là d và giả sử d cắt hai đường thẳng d_2 và d_3 lần lượt tại $A(1+t; -2+4t; 2+3t) \in d_2$ và $B(-4+5t'; -7+9t'; t') \in d_3$

$$\overrightarrow{AB} = (5t' - t - 5; 9t' - 4t - 5; t' - 3t - 2)$$

Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u} = (0; 4; -1)$

Do đường thẳng d song song $d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5t' - t - 5 = k \cdot 0 \\ 9t' - 4t - 5 = k \cdot 4 \\ t' - 3t - 2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -2; 2)$$

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; -2; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (0; 4; -1)$ nên có phương trình

$$\text{là: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Câu 26. Cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: \frac{x-2}{3} = y+1 = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng cắt d_1 và d_2 đồng thời đi qua điểm $M(3; 10; 1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi đường thẳng cần tìm là d và giả sử d cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại

$$A(2+3a; -1+a; -3+2a) \in d_1 \text{ và } B(3+b; 7-2b; 1-b) \in d_2$$

Do đường thẳng d đi qua $M(3; 10; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} = (3a-1; a-11; -4+2a); \overrightarrow{MB} = (b; -2b-3; -b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-1 = kb \\ a-11 = -2kb-3k \\ -4+2a = -kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 10-10t \\ z = 1-2t \end{cases}$$

Câu 27. [SBT – CB] Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): y+2z=0$ và

$$\text{cắt hai đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2-t' \\ y = 4+2t' \\ z = 4 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } A \text{ là giao điểm của } d_1 \text{ và } (\alpha) \text{ suy ra tọa độ } A \text{ thỏa } \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 4t \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0; 0)$$

Gọi B là giao điểm của d_2 và (α) suy ra tọa độ B thỏa
$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow B(8; -8; 4)$$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (7; -8; 4)$ làm VTCP nên có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -8t \\ z = 4t \end{cases}.$$

Câu 28. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 3 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 .

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tham số là $d_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$

Gọi $A = d_1 \cap (P) \Rightarrow A(1; 0; 2)$; $B = d_2 \cap (P) \Rightarrow B(2; 3; 1)$

Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua A và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AB} = (1; 3; -1)$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 29. [SGK – NC] Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}; \quad (P): 2x + z - 5 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1; 2; 3)$, nằm trong (P) và vuông góc với Δ .

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2; 2)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (2; 0; 1)$

Đường thẳng d nằm trong (P) và vuông góc với Δ nên có vector pháp tuyến

$$\vec{u} = [\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{n_p}] = (2; 3; -4)$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$.

Câu 30. [SBT – CB] Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. Gọi M là giao điểm của d và (α) , hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d và nằm trong (α) .

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Toạ độ điểm M thoả hệ
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(2; \frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (2; 1; -3)$

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (2; 1; 1)$

Đường thẳng Δ nằm trong (α) và vuông góc với d nên có vector pháp tuyến $\vec{u} = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (4; -8; 0)$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = \frac{1}{2} - 8t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Câu 31. (Hoạt động 5 trang 89) Xét số giao điểm của mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ với đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases}$ b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ c) $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

- a) Xét phương trình $2 + t + 3 - t + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý) vậy d và (α) không có điểm chung hay d và (α) song song nhau.
- b) Xét phương trình $1 + 2t + 1 - t + 1 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng với mọi t) vậy d và (α) có vô số điểm chung hay d và (α) trùng nhau.
- c) Xét phương trình $1 + 5t + 1 - 4t + 1 + 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (có một nghiệm t) vậy d và (α) có một điểm chung hay d và (α) cắt nhau. Khi đó giao điểm của d và (α) là $M(1; 1; 1)$.

Câu 32. (Bài tập 5 – SGK trang 90) Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) với trong các trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0;$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0;$

c) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + z - 4 = 0.$

Hướng dẫn giải

- a) Xét phương trình $3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 26t = -78 \Leftrightarrow t = -3$ vậy d và (α) có một điểm chung.
- b) Xét phương trình $1 + t + 3(2 - t) + 1 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 = 0$ (vô lý) vậy d và (α) không có điểm chung.
- c) Xét phương trình $1 + t + 1 + 2t + 2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng với mọi t) vậy d và (α) có vô số điểm chung.

Câu 33. (Ví dụ 1- SBTCB trang 106) Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ lần lượt với

các mặt phẳng sau :

- a) $(\alpha_1): x + y + z + 2 = 0;$
- b) $(\alpha_2): 4x + 8y + 2z - 7 = 0;$
- c) $(\alpha_3): x - y + 2z + 5 = 0;$
- d) $(\alpha_4): 2x - 2y + 4z - 10 = 0.$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 4; 1)$.

Các mặt phẳng $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 1; 1); \vec{n}_2 = (4; 8; 2); \vec{n}_3 = (1; -1; 2); \vec{n}_4 = (2; -2; 4).$

Ta có:

- a) $\vec{n}_1 \cdot \vec{a} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$. Vậy đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α_1) .

b) $\vec{n}_2 = 2\vec{a}$. Vậy đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α_2) .

$$\text{c) } \begin{cases} \vec{n}_3 \cdot \vec{a} = 2 - 4 + 2 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha_3) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ và (α_3) song song nhau.

$$\text{d) } \begin{cases} \vec{n}_4 \cdot \vec{a} = 4 - 8 + 4 = 0 \\ M_0 \in (\alpha_4) \text{ (vì } 2 \cdot (1) - 2 \cdot (2) + 4 \cdot (3) - 10 = 0) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α_4) .

Câu 34. (Ví dụ 2- SBTCB trang 106) Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$. Chứng minh rằng d cắt (α) và tìm tọa độ giao điểm.

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$$

Thay x, y, z ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được:

$$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ có một nghiệm } t.$$

$$\text{Vậy } d \text{ cắt } (\alpha) \text{ và giao điểm là } M_0\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Câu 35. (Bài tập 3.35 - SBTCB trang 113) Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) với trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ và } (\alpha): x + 2y + z - 3 = 0;$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ và } (\alpha): x + z + 5 = 0;$$

$$\text{c) } d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } (\alpha): x + y + z - 6 = 0;$$

Hướng dẫn giải

- a) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $t + 2(1 + 2t) + (1 - t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Vậy đường thẳng d cắt (α) tại $M_0(0; 1; 1)$.
- b) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $(2 - t) + (2 + t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = -9$. Phương trình vô nghiệm, vậy đường thẳng d song song với (α) .
- c) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $(3 - t) + (2 - t) + (1 + 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$. Phương trình luôn thỏa mãn với mọi t , vậy đường thẳng d chứa trong (α) .

Câu 36. (Bài tập 6.3 - SBTNC trang 131) Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (α) cho bởi các phương trình sau :

- a) $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0$;
- b) $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $(\alpha): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$;
- c) $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$, $(\alpha): x + 2y - 4z - 5 = 0$;
- d) $d: \frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$, $(\alpha): x - 3y + 2z - 5 = 0$;
- e) d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x + 5y + 7z + 16 = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 6 = 0$, $(\alpha): 5x - z - 4 = 0$;

Hướng dẫn giải

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(12; 9; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (4; 3; 1)$.
Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 26 \neq 0$ nên d cắt (α) .
- b) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-1; 3; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 4; 3)$. Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; -3; 2)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$ nên d song song với (α) .
- c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(9; 1; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (8; 2; 3)$. Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -4)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$ nên d song song (α) .

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(7;1;5)$ và có VTCP $\vec{a} = (5;1;4)$.

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;-3;2)$.

Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 8 \neq 0$ nên d cắt (α) .

e) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3;5;7)$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2;-1;1)$. Từ đó ta tính được $\vec{a} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (12;11;-13)$

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (5;0;-1)$.

Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$ nên d cắt (α) .

Câu 37. (Ví dụ 3 SGKCB trang 87) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \text{ và } d' : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCP lần lượt là: $\vec{a} = (2;3;1)$ và $\vec{a}' = (3;2;2)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a}'$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t' \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta được $t = -\frac{3}{5}$ và $t' = -\frac{2}{5}$, thay vào phương trình cuối không thỏa mãn. Ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Câu 38. (Ví dụ 4 SGKCB trang 88) Chứng minh hai đường thẳng sau đây vuông góc

$$d : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \text{ và } d' : \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCP lần lượt là: $\vec{a} = (-1;2;4)$ và $\vec{a}' = (2;3;-1)$.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a}' = -2 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow d \perp d'$.

Câu 39. (Bài tập 3 SGKCB trang 90) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$\text{a) } d : \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{4} \text{ và } d' : \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-20}{1};$$

$$\text{b) } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \text{ và } d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2};$$

Hướng dẫn giải

a) Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(2;3;4)$ và $\vec{a'}(1;-4;1)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a'}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} -3+2t=5+t' \\ -2+3t=-1-4t' \\ 6+4t=20+t' \end{cases}, \text{ từ hai phương trình đầu ta được } t=3 \text{ và } t'=-2, \text{ thay}$$

vào phương trình cuối ta được $18=18$ thỏa mãn. Ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại $M_0(3;7;18)$.

b) Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(1;1;-1)$ và $\vec{a'}(2;2;-2)$.

Vì $\vec{a'} = 2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ cùng phương. Từ đó suy ra d và d' song song hoặc trùng nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1+t=1+2t' \\ 2+t=-1+2t' \\ 3-t=2-2t' \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' song song nhau.

Câu 40. (Bài tập 4 SGKCB trang 90) Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1+at=1-t' \\ t=2+2t' \\ -1+2t=3-t' \end{cases} \text{ } d \text{ và } d' \text{ cắt nhau khi hệ có nghiệm duy nhất. Từ hai}$$

phương trình cuối ta được $t=2$ và $t'=0$, thay vào phương trình đầu ta được $1+2a=1-0 \Leftrightarrow a=0$. Vậy Khi $a=0$ thì d và d' cắt nhau.

Câu 41. (Bài tập 9 SGKCB trang 91) Chứng minh rằng hai đường thẳng sau đây chéo nhau:

$$d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-2t' \\ z=1 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(-1;2;3)$ và $\vec{a'}(1;-2;0)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a}'$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 1-t=1+t' \\ 2+2t=3-2t' \\ 3t=1 \end{cases}$$
 từ hai phương trình đầu ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai

đường thẳng d và d' chéo nhau.

Câu 42. (Ví dụ 1. SBTCB trang 103) Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ lần lượt với các đường thẳng sau

a) $d_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2};$

b) $d_2: \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3};$

c) $d_3: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5};$

d) $d_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -1; 5)$ và có VTCP $\vec{a}(2; 3; 1)$.

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(3; 2; 6)$ và có VTCP $\vec{a}_1(2; 4; 6)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_1] = (0; 0; 0)$ và M_1 thuộc Δ vì $\frac{3-1}{2} = \frac{2+1}{3} = \frac{6-5}{1}$. Vậy $\Delta \equiv d_1$

b) Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(4; 1; 3)$ và có VTCP $\vec{a}_2(6; 9; 3)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_2] = (0; 0; 0)$ và M_2 không thuộc Δ vì $\frac{4-1}{2} \neq \frac{1+1}{3}$. Vậy $\Delta // d_2$.

c) Đường thẳng d_3 đi qua điểm $M_3(3; 2; 6)$ và có VTCP $\vec{a}_3(4; 3; 5)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_3] = (12; -6; -6) \neq \vec{0}$ và $\vec{M_0M_3} = (2; 3; 1), \vec{M_0M_3} \cdot \vec{n} = 24 - 18 - 6 = 0$

Vậy Δ và d_3 cắt nhau.

d) Đường thẳng d_4 đi qua điểm $M_4(1; -2; -1)$ và có VTCP $\vec{a}_4(3; 2; 2)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_4] = (4; -1; -5) \neq \vec{0}$ và $\vec{M_0M_4} = (0; -1; -6), \vec{M_0M_4} \cdot \vec{n} = 0 + 1 + 30 \neq 0$

Vậy Δ và d_4 là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 43. (Ví dụ 2- SBTCB trang 106) Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$. Chứng minh rằng d cắt (α) và tìm tọa độ giao điểm.

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$$

Thay x, y, z ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được:

$$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ có một nghiệm } t.$$

Vậy d cắt (α) và giao điểm là $M_0\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 44. (Bài tập 3.35 - SBTCB trang 113) Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) với trong các trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $(\alpha): x + 2y + z - 3 = 0$;

b) $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(\alpha): x + z + 5 = 0$;

c) $d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$;

Hướng dẫn giải

a) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $t + 2(1 + 2t) + (1 - t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Vậy đường thẳng d cắt (α) tại $M_0(0; 1; 1)$.

b) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $(2 - t) + (2 + t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = -9$. Phương trình vô nghiệm, vậy đường thẳng d song song với (α) .

c) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được: $(3 - t) + (2 - t) + (1 + 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$. Phương trình luôn thỏa mãn với mọi t , vậy đường thẳng d chứa trong (α) .

Câu 45. (Bài tập 6.3 - SBTNC trang 131) Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (α) cho bởi các phương trình sau :

- a) $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, (\alpha): 3x+5y-z-2=0;$
- b) $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}, (\alpha): 3x-3y+2z-5=0;$
- c) $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}, (\alpha): x+2y-4z-5=0;$
- d) $d: \frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}, (\alpha): x-3y+2z-5=0;$
- e) d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x+5y+7z+16=0$ và $(Q): 2x-y+z-6=0$,
 $(\alpha): 5x-z-4=0;$

Hướng dẫn giải

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(12;9;1)$ và có VTCP $\vec{a}=(4;3;1)$.
Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(3;5;-1)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 26 \neq 0$ nên d cắt (α) .
- b) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-1;3;0)$ và có VTCP $\vec{a}=(2;4;3)$. Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(3;-3;2)$
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$ nên d song song với (α) .
- c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(9;1;3)$ và có VTCP $\vec{a}=(8;2;3)$. Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-4)$
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ và $M_0 \in (\alpha)$ nên d chứa trong (α) .
- d) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(7;1;5)$ và có VTCP $\vec{a}=(5;1;4)$.
Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(1;-3;2)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} = 26 \neq 0$ nên d cắt (α) .
- e) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;5;7)$. Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2=(2;-1;1)$. Từ đó ta tính được $\vec{a}=[\vec{n}_1; \vec{n}_2]=(12;11;-13)$
Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến $\vec{n}=(5;0;-1)$.
Vì $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$ nên d cắt (α) .

Câu 46. (Ví dụ 3 SGKCB trang 87) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(2; 3; 1)$ và $\vec{a'}(3; 2; 2)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a'}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t' \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta được $t = -\frac{3}{5}$ và $t' = -\frac{2}{5}$, thay vào phương trình cuối không thỏa mãn. Ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Câu 47. (Ví dụ 4 SGKCB trang 88) Chứng minh hai đường thẳng sau đây vuông góc

$$d: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(-1; 2; 4)$ và $\vec{a'}(2; 3; -1)$.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a'} = -2 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow d \perp d'$.

Câu 48. (Bài tập 3 SGKCB trang 90) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$\text{c) } d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{4} \text{ và } d': \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-20}{1};$$

$$\text{d) } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \text{ và } d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2};$$

Hướng dẫn giải

c) Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(2; 3; 4)$ và $\vec{a'}(1; -4; 1)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a'}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} -3+2t=5+t' \\ -2+3t=-1-4t' \\ 6+4t=20+t' \end{cases}, \text{ từ hai phương trình đầu ta được } t=3 \text{ và } t'=-2, \text{ thay}$$

vào phương trình cuối ta được $18=18$ thỏa mãn. Ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại $M_0(3;7;18)$.

d) Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(1;1;-1)$ và $\vec{a'}(2;2;-2)$.

Vì $\vec{a'}=2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ cùng phương. Từ đó suy ra d và d' song song hoặc trùng nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1+t=1+2t' \\ 2+t=-1+2t' \\ 3-t=2-2t' \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' song song nhau.

Câu 49. (Bài tập 4 SGKCB trang 90) Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1+at=1-t' \\ t=2+2t' \\ -1+2t=3-t' \end{cases} \quad d \text{ và } d' \text{ cắt nhau khi hệ có nghiệm duy nhất. Từ hai}$$

phương trình cuối ta được $t=2$ và $t'=0$, thay vào phương trình đầu ta được $1+2a=1-0 \Leftrightarrow a=0$. Vậy Khi $a=0$ thì d và d' cắt nhau.

Câu 50. (Bài tập 9 SGKCB trang 91) Chứng minh rằng hai đường thẳng sau đây chéo nhau:

$$d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-2t' \\ z=1 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d và d' có VTCPlần lượt là: $\vec{a}(-1;2;3)$ và $\vec{a'}(1;-2;0)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a}=k\vec{a'}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1-t=1+t' \\ 2+2t=3-2t' \\ 3t=1 \end{cases} \text{ từ hai phương trình đầu ta suy ra hệ vô nghiệm. Vậy hai}$$

đường thẳng d và d' chéo nhau.

Câu 51. (Ví dụ 1. SBTCB trang 103) Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ lần lượt với các đường thẳng sau

a) $d_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2}$

b) $d_2: \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3};$

c) $d_3: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5};$

d) $d_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -1; 5)$ và có VTCP $\vec{a}(2; 3; 1)$.

e) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(3; 2; 6)$ và có VTCP $\vec{a}_1(2; 4; 6)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_1] = (0; 0; 0)$ và M_1 thuộc Δ vì $\frac{3-1}{2} = \frac{2+1}{3} = \frac{6-5}{1}$. Vậy $\Delta \equiv d_1$

f) Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(4; 1; 3)$ và có VTCP $\vec{a}_2(6; 9; 3)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_2] = (0; 0; 0)$ và M_2 không thuộc Δ vì $\frac{4-1}{2} \neq \frac{1+1}{3}$. Vậy $\Delta // d_2$.

g) Đường thẳng d_3 đi qua điểm $M_3(3; 2; 6)$ và có VTCP $\vec{a}_3(4; 3; 5)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_3] = (12; -6; -6) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M_3} = (2; 1; 3), \overrightarrow{M_0M_3} \cdot \vec{n} = 24 - 18 - 6 = 0$

Vậy Δ và d_3 cắt nhau.

h) Đường thẳng d_4 đi qua điểm $M_4(1; -2; -1)$ và có VTCP $\vec{a}_4(3; 2; 2)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}_4] = (4; -1; -5) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M_4} = (0; -1; -6), \overrightarrow{M_0M_4} \cdot \vec{n} = 0 + 1 + 30 \neq 0$

Vậy Δ và d_4 là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 52. (Ví dụ 2. SBTCB trang 104) Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d': \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2t \\ z = -1+t. \end{cases}$

a) Xét vị trí tương đối giữa d và d' .

b) Tìm giao điểm nếu có của d và d' .

Hướng dẫn giải

a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = -1+t' \\ z = -t'. \end{cases}$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 3-t=1+2t' & (1) \\ 2t=-1+t' & (2) \\ -1+t=-t' & (3) \end{cases}, \text{ từ hai phương trình đầu ta được } t=0 \text{ và } t'=1, \text{ thay}$$

vào phương trình (3) thỏa mãn. Ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

b) Thay $t=0$ vào phương trình tham số của d' ta được giao điểm là $M(3;0;-1)$.

Câu 53. (Bài tập 3.33 SBTCB trang 112) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$\text{a) } d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \text{và} \quad d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{2};$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=9+2t' \\ y=8+2t' \\ z=10-2t' \end{cases};$$

$$\text{c) } d: \begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=-1-2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=0 \\ y=9 \\ z=5t' \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-1;1;-2)$ và có VTCP $\vec{a}(1;2;3)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(1;5;4)$ và có VTCP $\vec{a'}(3;2;2)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a'}] = (-2; 7; -4) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0} = (2; 4; 6), \overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n} = 0$. Vậy Δ và d_3 cắt nhau.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{a}(1;1;-1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(9;8;10)$ và có VTCP $\vec{a'}(2;2;-2)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a'}] = \vec{0}$ và $M_0 \notin d'$. Vậy Δ và d_3 song song.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0;0;-1)$ và có VTCP $\vec{a}(-1;3;-2)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(0;9;0)$ và có VTCP $\vec{a'}(0;0;5)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a'}] = (15; 5; 0) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0} = (0; 9; 1), \overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n} = 45 \neq 0$. Vậy Δ và d_3 chéo nhau.

Câu 54. (Bài tập 3.34 SBTCB trang 113) Tìm a để hai đường thẳng sau đây song song:

$$d: \begin{cases} x=5+t \\ y=at \\ z=2-t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=1+2t' \\ y=a+4t' \\ z=2-2t' \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Câu 55. Trong không gian Oxyz xét cặp đường thẳng d_m, d'_m có phương trình là:

$$d_m : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases} \quad d'_m : \begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt' \\ z = 1 - m + t'. \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng đó tùy theo giá trị của m.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_m đi qua điểm $M(1; m; 1 - m)$ và có VTCP $\vec{a}(m; 2; -3)$.

Đường thẳng d'_m đi qua điểm $M'(m; 0; 1 - m)$ và có VTCP $\vec{a}'(-2; m; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (m - 1; -m; 0)$.

Từ đó ta tính được $[\vec{a}; \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 4m^2 - 7m - 2 = (m - 2)(4m + 1)$.

Vậy :

Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -\frac{1}{4}$ thì hai đường thẳng là chéo nhau;

Nếu $m = 2$ thì $\vec{a}(2; 2; -3)$ và $\vec{a}'(-2; 2; 1)$ không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau;

Nếu $m = -\frac{1}{4}$ thì $\vec{a}(-\frac{1}{4}; 2; -3)$ và $\vec{a}'(-2; -\frac{1}{4}; 1)$ không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau.

Câu 56. (Bài tập 62 SBTNC trang 131) Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4},$ và $d' : \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1};$

b) $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1},$ và $d' : \frac{x}{-2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{1};$

c) $d : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8},$ và $d' : \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12};$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; 7; 3)$ và có VTCP $\vec{a}(2; 1; 4)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(6; -1; -2)$ và có VTCP $\vec{a}'(3; -2; 1)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}'] = (9; 10; -7) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0} = (5; -8; -5), \overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n} = 0$. Vậy d và d' cắt nhau.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; 2; 0)$ và có VTCP $\vec{a}(2; -2; 1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(0; -8; 4)$ và có VTCP $\vec{a}'(-2; 3; 1)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}'] = (-5; -4; 2) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0} = (-1; -10; 4), \overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n} \neq 0$. Vậy d và d' chéo nhau.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{a}(4; -6; -8)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(7; 2; 0)$ và có VTCP $\vec{a}'(-6; 9; 12)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{a}'] = \vec{0}$ và $M_0 \notin d'$. Vậy d và d' song song.

Câu 57. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình: $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$; $\Delta_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$. Tìm góc giữa hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương của $\vec{v}_1(2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; 2)$
Đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương của $\vec{v}_2(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$
Cosin góc α giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được cho bởi:

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng là $\alpha \approx 77,40^\circ$

Câu 58. (Bài 7 SGKCB trang 91) Cho điểm $A(1; 0; 0)$ và $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ ;

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

Hướng dẫn giải

a) Gọi $H(2+t; 1+2t; t)$ là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng Δ .

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (1+t; 1+2t; t).$$

VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Vì H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng Δ nên

$$AH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1+t+2(1+2t)+t=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{1}{2} \text{ ta có } H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ khi H là trung điểm của đoạn AA' .

$$\text{Vậy: tọa độ điểm } H \text{ là } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ x_{A'} = 2y_H - y_A \Rightarrow A'(2; 0; -1). \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$$

Câu 59. (Bài 3.40 SBTCTB trang 114) Cho điểm $M(2; -1; 1)$ và $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$.

- a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ ;
 b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng Δ .

Hướng dẫn giải

- a) Gọi $H(1+2t; -1-t; 2t)$ là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng Δ .

Ta có:

$$\overrightarrow{MH} = (-1+2t; -t; -1+2t).$$

VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

Vì H là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng Δ nên

$$MH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-1+2t) - 1(-t) + 2(-1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Với } t = \frac{4}{9} \text{ ta có } H\left(\frac{17}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{8}{9}\right).$$

- b) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua Δ khi H là trung điểm của đoạn MM' .

$$\text{Vậy: tọa độ điểm } H \text{ là } \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ x_{M'} = 2y_H - y_M \Rightarrow M'\left(\frac{16}{9}; -\frac{17}{9}; \frac{7}{9}\right). \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

Câu 60. Cho điểm $A(2; -1; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ hình chiếu của A trên d .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Hình chiếu của A trên d chính là giao điểm của d và mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với d . Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Khi đó tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = t \\ z = 2+t \\ x+y+z-6=0 \end{cases} \Rightarrow t=0. \text{ Vậy tọa độ hình chiếu } H \text{ là } (4; 0; 2).$$

Cách 2: $H \in d \Rightarrow H(4+t; t; 2+t); \overrightarrow{AH}(2+t; 1+t; -2+t)$. H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow 2+t+1+t-2+t=0 \Leftrightarrow t=0$. Vậy $H(4; 0; 2)$.

Câu 61. (Bài 3.36 SBTCTB trang 113) Tính khoảng cách từ điểm $A(1;0;1)$ đến đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d thì $H \in d \Rightarrow H(2t+1; 2t; t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (2t; 2t; t-1)$ và $\vec{u} = (2; 2; 1)$ là một VTCP của d .

Vì $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4t + 4t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9}$ nên $H\left(\frac{11}{9}; \frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$.

Khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng d bằng độ dài đoạn AH .

$$\text{Ta có } AH = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 62. Tính khoảng cách từ điểm $A(2; -1; 5)$ đến đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d thì $H \in d \Rightarrow H(4+t; t; 2+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (2+t; 1+t; -3+t)$ và $\vec{u} = (1; 1; 1)$ là một VTCP của d .

Vì $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2+t+1+t-3+t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ nên $H(4; 0; 2)$.

Khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng d bằng độ dài đoạn AH .

$$\text{Ta có } AH = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

Cách 2: d qua $M(4; 0; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AM} = (2; 1; -3)$,

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (4; -5; 1). \text{ Ta có: } d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}.$$

Câu 63. (Ví dụ 3 SBTCTB trang 111) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \text{ và } \Delta': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -1; 1)$ và có VTCP $\vec{a}(2; -1; 0)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(2; -2; 3)$ và có VTCP $\vec{a}'(-1; 1; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ' khi đó vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (-1; -2; 1)$. Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm M_0 nên phương trình mặt phẳng (α) là: $x + 2y - z + 2 = 0$.

$$\text{Khi đó } d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|2 - 4 - 3 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Cách 2: Ta có: $[\vec{a}, \vec{a}'] = (-1; -2; 1), \overrightarrow{M_0 M'_0} = (1; -1; 2)$.

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = \frac{|[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\|[\vec{a}, \vec{a}']\|} = \frac{|-1 + 2 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 64. (Bài 3.38 SBTCTB trang 113) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

$$\text{a) } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \text{ và } \Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases};$$

$$\text{b) } \Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \text{ và } \Delta': \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{3}.$$

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1:** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -1; 1)$ và có VTCP $\vec{a}(1; -1; 0)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(2; 2; 0)$ và có VTCP $\vec{a}'(-3; 3; 3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ' khi đó vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (-3; -3; 0)$. Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm M_0 nên phương trình mặt phẳng (α) là: $x + y = 0$. Khi đó $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|2 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = 2\sqrt{2}$.

Cách 2: Ta có: $[\vec{a}, \vec{a}'] = (-3; -3; 0), \overrightarrow{M_0 M'_0} = (1; 3; 1)$.

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = \frac{|[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\|[\vec{a}, \vec{a}']\|} = \frac{|-3 - 9|}{\sqrt{9 + 9 + 0}} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) **Cách 1:** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(0; 4; -1)$ và có VTCP $\vec{a}(1; -1; 2)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(0; 2; 0)$ và có VTCP $\vec{a}'(1; -3; -3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ' khi đó vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (9; 5; -2)$. Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm M_0 nên phương trình

mặt phẳng (α) là: $9x + 5y - 2z - 22 = 0$. Khi đó

$$d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|5 \cdot 2 - 22|}{\sqrt{81 + 25 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{110}}.$$

Cách 2: Ta có: $[\vec{a}, \vec{a'}] = (9; 5; -2), \overrightarrow{M_0 M'_0} = (0; -2; 1)$.

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[\vec{a}, \vec{a'}]} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{|\overrightarrow{[\vec{a}, \vec{a'}]}|} = \frac{|-10 - 2|}{\sqrt{81 + 25 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{110}}.$$

Câu 65. (Bài 3.39 SBTCTB trang 114) Cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và

$$\Delta': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

- Xét vị trí tương đối của Δ và Δ' .
- Tính khoảng cách giữa Δ và Δ' .

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -3; 4)$ và có VTCP $\vec{a}(2; 1; -2)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(-2; 1; -1)$ và có VTCP $\vec{a'}(-4; -2; 4)$.

Ta có: $\vec{a'} = 2\vec{a}$ và $M_0 \notin \Delta'$. Vậy Δ và Δ' song song.

b) Ta có $\overrightarrow{M_0 M'_0} = (-3; 4; -5), [\overrightarrow{M_0 M'_0}, \vec{a}] = (-3; -16; -11)$.

$$d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{M_0 M'_0}, \vec{a}]}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{9 + 256 + 121}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{386}}{3}.$$

Câu 66. (Bài 3.43 SBTCTB trang 114) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Bằng phương pháp tọa độ hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD' .

Hướng dẫn giải

Ta chọn hệ trục tọa độ như sau: C là gốc tọa độ, $\overrightarrow{AD} = \vec{i}, \overrightarrow{CB} = \vec{j}, \overrightarrow{CC'} = \vec{k}$. Ta có:

$$C(0; 0; 0), A'(a; a; a), D(a; 0; 0), D'(a; 0; a), \overrightarrow{CA'} = (a; a; a), \overrightarrow{DD'} = (0; 0; a), \overrightarrow{CD} = (a; 0; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{DD'}] = (a^2; -a^2; 0), d(CA', DD') = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{DD'}]} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{DD'}]}|} = \frac{|a^3|}{a^2 \sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 67. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $\Delta': \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(3; -2; -1)$ và có VTCP $\vec{a}(-4; 1; 1)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(0; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{a'}(-6; 1; 2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ' khi đó vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a'}] = (1; 2; 2)$. Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm M_0 nên phương trình mặt phẳng (α) là: $x + 2y + 2z + 3 = 0$. Khi đó $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|2 + 4 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$.

Cách 2: Ta có: $[\vec{a}, \vec{a'}] = (1; 2; 2), \overrightarrow{M_0 M'_0} = (-3; 3; 3)$.

Vậy $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[\vec{a}, \vec{a'}]} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{|\overrightarrow{[\vec{a}, \vec{a'}]}|} = \frac{|-3 + 6 + 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$.

Câu 68. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình:

$$d: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+5}{5}; (S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$$

Chứng minh rằng đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(2; 6; 5)$ và đi qua điểm $M(0; -3; -5)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Chuyển phương trình của d về dạng tham số:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 6t - 3, t \in R \\ z = 5t - 5 \end{cases}$$

Thay phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(2t-1)^2 + (6t-3)^2 + (5t-7)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 - 22t + 10 = 0, \quad \text{vô nghiệm}$$

Vậy đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Cách 2: Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(2; 6; 5)$ và đi qua điểm $M(0; -3; -5)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có: $\overrightarrow{MI}(1; 3; 7), [\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (27; -9; 0) \Rightarrow d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}|}{|\vec{u}|} = \frac{9\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 9\sqrt{2} > R$. Vậy

đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Câu 69. Cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương trình:

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}, (S): (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$$

Chứng minh rằng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B . Tính độ dài AB .

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm $M(1; 2; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -1; 2)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Ta có $d(I, (d)) = \frac{|\overrightarrow{MI}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3\sqrt{2} < R$. Suy ra d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B .

Khi đó, với H là trung điểm của AB thì: $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 6$.

Câu 70. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(2; 1; 0)$ có VTCP $\vec{a}(1; m; -2)$. Biện luận theo m số giao điểm của d và (S) .

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(2; 1; 0)$ có VTCP $\vec{a}(1; m; -2)$ là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt, t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình mặt cầu (S) , ta được phương trình: $(2+t)^2 + (1+mt)^2 + (-2t)^2 - 2(2+t) + 6(1+mt) - 4(-2t) + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(2m + 5)t + 20 = 0, (1)$$

Vậy số giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) là số nghiệm của phương trình (1)

Ta có $\Delta' = -4m^2 + 40m - 75$, do vậy:

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 152 \\ m < 52 \end{cases} \Rightarrow d$ không cắt (S) .

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 152 \\ m = 52 \end{cases} \Rightarrow d$ tiếp xúc với (S) .

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 52 < m < 152 \Rightarrow d$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

PHẦN 4: ÔN TẬP CHƯƠNG

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Trong không gian Oxyz cho ba vectơ: $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có : $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \neq 0$. Đáp án D.

Câu 2. Cho ba điểm $A(0; 2; 1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(1; 0; 0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $2x - 3y - 4z + 2 = 0$. B. $2x + 3y - 4z - 2 = 0$.
C. $10x - 4y - 6z + 21 = 0$. D. $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có : $\vec{AB} = (3; -2; 0)$, $\vec{AC} = (1; -2; -1) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (2; 3; -4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

Đáp án B.

Câu 3. Cho ba mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x + y - z + 2 = 0$, $(R): x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- A. $(P) \perp (Q)$. B. $(R) \perp (Q)$. C. $(P) \parallel (R)$. D. $(P) \perp (R)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

Đáp án C.

Câu 4. Cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình tham số của d là.

- A. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}(4; 3; -7)$ của mặt phẳng

(α) làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$

Đáp án B.

Câu 5. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình : $2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) là ?

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{9}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Do mặt cầu } (S) \text{ tiếp xúc mặt phẳng } (\alpha) \Rightarrow R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2.2 - 2.1 - (-1) + 3|}{\sqrt{4+4+1}} = 2.$$

Đáp án A.

Câu 6. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng MN với $M(1; 2; -4), N(5; 4; 2)$.

A. $10x + 9y + 5z - 70 = 0$.

B. $4x + 2y + 6z - 11 = 0$.

C. $2x + y + 3z - 6 = 0$.

D. $2x + 3z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (4; 2; 6)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; 3; -1)$.

Mặt phẳng trung trực của AB đi qua điểm I và nhận $\overrightarrow{MN}$ làm VTPT nên có phương trình :

$$4(x-3) + 2(y-3) + 6(z+1) = 0 \Rightarrow 2x + y + 3z - 6 = 0.$$

Đáp án C.

Câu 7. Cho $\vec{u}(2; -1; 1), \vec{v}(m; 3; -1), \vec{w}(1; 2; 1)$. Ba vector đồng phẳng khi giá trị của m là:.

A. -8 .

B. 4 .

C. $-\frac{7}{3}$.

D. $-\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có : } [\vec{u}; \vec{w}] = (-3; -1; 5) \Rightarrow [\vec{u}; \vec{w}] \cdot \vec{v} = -3m - 3 - 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{8}{3}.$$

Đáp án D.

Câu 8. Góc giữa đường thẳng $d : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 6 \\ z = 2 + t \end{cases}$ và mp $(P) : y - z + 1 = 0$ là:.

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải .

Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 1; -1)$.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (α) và đường thẳng d .

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Đáp án C.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1), P(1; m-1; 2)$. Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải.

$$\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2), \overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1) \Rightarrow 6 + 2m - 4 - 2 = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Đáp án D.

Câu 10. Cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Điểm nằm trên Oy cách đều (P) và (Q) là:

- A. $(0; 3; 0)$. B. $(0; -3; 0)$. C. $(0; -2; 0)$. D. $(0; 2; 0)$.

Hướng dẫn giải.

$$M(0; m; 0) \Rightarrow d(M; (P)) = d(M; (Q)) \Rightarrow |m+1| = |m+5| \Rightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3; 0).$$

Đáp án B.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) ?.

- A. $6x + 2y + 3z = 0$. B. $x + 2y + 2z - 7 = 0$.
C. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$. D. $2x + 3y + 6z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải .

(S) có tâm $I(1; -3; 2); R = 7$.

$$d(I; (\alpha_1)) = \frac{6-6+6}{\sqrt{36+4+9}} = \frac{6}{7}; \quad d(I; (\alpha_2)) = \frac{|1-6+4-7|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{8}{3}; \quad d(I; (\alpha_3)) = \frac{|6-6+6-55|}{\sqrt{36+4+9}} = 7.$$

Đáp án C.

Câu 12. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(1; 2; 1)$ làm trọng tâm?.

- A. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. B. $2x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $2x + 2y + z - 6 = 0$. D. $2x + 2y + 6z - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải .

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (ABC) cắt các trục Ox, Oy, Oz .

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 6 = b \\ 3 = c \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 6 = 0.$$

Đáp án B.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ: $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0)$. cho hình bình hành thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Tọa độ của tâm hình bình hành $OADB$ bằng bao nhiêu ?.

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(1; 0; 0)$. C. $(1; 0; 1)$. D. $(1; 1; 0)$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) = (0; 1; 0) \Rightarrow I(0; 1; 0).$$

Đáp án A.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?.

A. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện. B. $\triangle ABD$ là tam giác đều.

C. $AB \perp CD$.

D. $\triangle BCD$ là tam giác đều.

Hướng dẫn giải.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{CD} = (1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1.1 + 1.1 + 0 = 0 \Rightarrow AB \perp CD$.

Đáp án C.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính bằng bao nhiêu ?.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình tổng quát của mặt cầu là : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

$$\text{Mặt cầu đi qua bốn điểm } A, B, C, D \text{ ta có hệ : } \begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 1 - 2c + d = 0 \\ 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Đáp án A.

Câu 16. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?.

A. $d_1 \perp d_2$.

B. $d_1 // d_2$.

C. $d_1 \equiv d_2$.

D. d_1, d_2 chéo nhau.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}(2; 3; 4)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(3; 5; 7)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}(4; 6; 8)$.

Ta có : $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương $\Rightarrow d_1 // d_2, d_1 \equiv d_2$.

Thế tọa độ điểm M vào phương trình $d_2 : \frac{1-3}{4} = \frac{2-5}{6} = \frac{3-7}{8} = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow M \in d_2 \Rightarrow d_1 \equiv d_2$.

Đáp án C.

Câu 17. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$.

Hướng dẫn giải .

Đáp án B.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tọa độ 4 điểm $A(2; -1; 1)$; $B(1; 0; 0)$; $C(3; 1; 0)$ và $D(0; 2; 1)$. Cho các mệnh đề sau .:

(1) Độ dài $AB = \sqrt{2}$; (2) Tam giác BCD vuông tại B ; (3) Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 6.
Các mệnh đề đúng là .:

A. (1); (2). B. (3). C. (1); (3). D. (2).

Hướng dẫn giải.

$$\overline{AB} = (-1; 1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{3} \Rightarrow (1) \text{ sai loại đáp án A, C.}$$

$$\text{Mà } \overline{BC} = (2; 1; 1); \overline{BD} = (-1; 2; 1) \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{BD} = -2 + 2 + 1 = 1 \neq 0 \text{ loại D.}$$

Đáp án B.

Câu 19. Trong không gian cho hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$; $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$. Phương trình của

đường thẳng d đi qua $O(0; 0; 0)$ và vuông góc với cả d_1 và d_2 là:.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -5t \\ z = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (1; -5; 1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$$

Đáp án A.

Câu 20. Cho $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết mặt phẳng (ABC) qua điểm $I(1; 3; 3)$ và thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình (ABC) là.

A. $x + 3y + 3z - 21 = 0$. B. $3x + 3y + z - 15 = 0$.
C. $3x + y + z - 9 = 0$. D. $3x + y + z + 9 = 0$.

Hướng dẫn giải .

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \text{ Do } I \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức cau-chy: } 1 = \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{abc}} \Rightarrow \frac{1}{27} \geq \frac{9}{abc} \Rightarrow abc \geq 243.$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} abc \geq \frac{81}{2}.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của thể tích là } V_{OABC} = \frac{81}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{3}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \\ c = 9 \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x + y + z - 9 = 0$.

Đáp án C.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$.

- Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.
- Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
- Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

Hướng dẫn giải

- Theo phương trình đoạn chắn ta có: $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$

Thế tọa độ D vào vế phải của mặt phẳng (ABC) ta có: $-2 + 1 - 1 - 1 = 1 \neq 0$

Vậy $D \notin (ABC)$. Suy ra 4 điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện

- Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD

Ta có: $\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \right|$

$$\text{Mà } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

- Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1); \overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$

Gọi $\vec{n}$ là một vptt của mặt phẳng (BCD)

Ta có: $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-1; -2; 2)$

Phương trình mặt phẳng $(BCD): x + 2y - 2z + 2 = 0$

Chiều cao của hình chóp $A.BCD$ bằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) :

$$h = d(A, (BCD)) = \frac{|1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 1$$

Bài 2. Cho mặt cầu (S) có đường kính là AB biết rằng $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$.

- Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .
- Lập phương trình của (S) .
- Lập phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại A .

Hướng dẫn giải

- Tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I(1;1;1)$

$$\text{Bán kính } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-4-6)^2 + (0-2)^2 + (7+5)^2}}{2} = \sqrt{62}$$

- Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A chính là mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với bán kính IA

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ là một vptt của mặt phẳng (α)

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 5x + y - 6z - 62 = 0$

Bài 3. Cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Chứng minh rằng (α) cắt (S) theo một đường tròn. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R=10$

Mà $d(I, (\alpha)) = 6 < R$. Suy ra mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm J và có bán kính r

Xác định tâm J :

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (α)

$$d \text{ nhận } \vec{n}_\alpha(2; -2; -1) \text{ làm một VTCP} \Rightarrow d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

$$J = d \cap (\alpha) \text{ nên tọa độ của } J \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 18 + 9t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Vậy tâm $J(-1; 2; 3)$

Xác định bán kính r :

$$r^2 = R^2 - (d(I, (\alpha)))^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow r = 8$$

Bài 4. Cho $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và $d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

- Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α) .
- Viết phương trình mp (β) chứa M và vuông góc với d .

Hướng dẫn giải.

$$a) M = d \cap (\alpha) \text{ suy ra tọa độ của } M \text{ thỏa hệ phương trình: } \begin{cases} 3x + 5y - z - 2 = 0 \\ x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 26t + 78 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow M(0; 0; -2)$$

Mặt phẳng (β) vuông góc với d nên nhận một VTCP $\vec{a}(4; 3; 1)$ của d làm một VTPT do đó phương trình mặt phẳng $(\beta): 4x + 3y + z + 2 = 0$

Bài 5. Cho điểm $A(-1; 2; -3)$, vector $\vec{a} = (6; -2; -3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

- Viết pt mp (α) chứa A và vuông góc với giá của $\vec{a}$.

- b) Tìm giao điểm M của d và (α) .
- c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với giá của $\vec{a}$ và cắt d .

Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng (α) chứa $A(-1; 2; -3)$ và vuông góc với giá của $\vec{a} = (6; -2; -3)$ nên nhận $\vec{a}$ làm VTPT suy ra có phương trình $(\alpha): 6x - 2y - 3z + 1 = 0$

$$a) \quad M = d \cap (\alpha) \text{ suy ra tọa độ của } M \text{ thỏa hệ phương trình: } \begin{cases} 6x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow M(1; -1; 3)$$

- b) Đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng AM nên nhận $\overrightarrow{AM} = (2; -3; 6)$ làm VTCP

$$\text{có phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Bài 6. Viết phương trình mp (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$

$$\text{và song song với hai đường thẳng } d: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = -7 + 3t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 8. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{a}_d = (2; -3; 2)$

Đường thẳng d' có một VTCP là $\vec{a}_{d'} = (3; -2; 0)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(5; -1; -13)$ và bán kính $R = 5$

Phương trình mặt phẳng (α) song song với $d; d'$ nên nhận vector $\vec{n} = [\vec{a}_d; \vec{a}_{d'}] = (4; 6; 5)$ làm một VTPT suy ra phương trình mặt phẳng $(\alpha): 4x + 6y + 5z + m = 0$

Do (α) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow |m - 51| = 5\sqrt{77} \Rightarrow m = 51 \pm 5\sqrt{77}$

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$

Bài 7. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 11 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 2)$ là một VTPT của mặt phẳng (α)

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α)

$$d \text{ nhận } \vec{n}_\alpha(2; -1; 2) \text{ làm một VTCP} \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$H = d \cap (\alpha) \text{ nên tọa độ của thỏa hệ: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18 + 9t = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; 1; -2)$$

Bài 8. Cho điểm $M(2; 1; 0)$ và mp $(\alpha): x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (α) .

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{n}_\alpha = (1; 3; -1)$ là một VTPT của mặt phẳng (α)

Gọi H là hình chiếu vuông góc M của lên mặt phẳng (α)

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2; 1; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng (α)

$$d \text{ nhận } \vec{n}_\alpha(1; 3; -1) \text{ làm một VTCP} \Rightarrow d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

$$H = d \cap (\alpha) \text{ nên tọa độ thỏa hệ: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \\ x + 3y - z - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow 11t - 22 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow H(4; 7; -2)$$

M' đối xứng với M qua (α) suy ra H là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow M'(6; 13; -4).$$

Bài 9. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{-1}; d': \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-5}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d nên $M(t; -4+t; 3-t)$

Gọi N là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d' nên $N(1-2t'; -3+t'; 4-5t')$

Ta có $\vec{MN} = (1-2t'-t; 1+t'-t; 1-5t'+t)$, mặt phẳng (Oxz) có một VTPT $\vec{j}(0, 1, 0)$

Do đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) nên ta có $\vec{MN} = k\vec{j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2t'-t=0 \\ 1+t'-t=k \\ 1-5t'+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{7} \\ k = \frac{6}{7} \\ t' = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Đường thẳng Δ đi qua $M\left(\frac{3}{7}; -\frac{25}{7}; \frac{18}{7}\right)$ và nhận $\vec{j}(0,1,0)$ làm VTCP nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{25}{7} + m \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$$

Bài 10. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(1;-2;-5)$ qua đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng chứa A và vuông góc với Δ

Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u}_d(2;-1;2)$ làm một VTPT nên có phương trình :
 $2x - y + 2z + 6 = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow H = \Delta \cap (\alpha)$ nên tọa độ của

$$\text{thỏa hệ: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; -2)$$

Do A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ nên H là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2; 1)$$

Bài 11. Cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

- Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và d đồng phẳng.
- Tìm điểm I trên d sao cho $IA + IB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

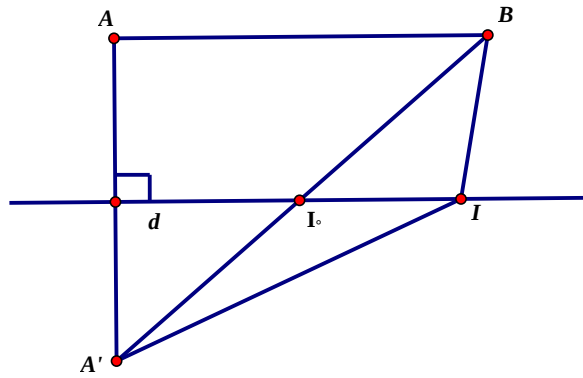
- Đường thẳng AB có một VTCP $\vec{AB} = (6; -4; 4)$

Đường thẳng d có một VTCP $\vec{u} = (3; -2; 2)$

Xét $\vec{n} = [\vec{AB}; \vec{u}] = (0; 0; 0) \Rightarrow$ hai đường thẳng d, AB cùng thuộc một mặt phẳng

- Ta nhận thấy: $\vec{AB} = 2\vec{u}$; $A \notin d \Rightarrow d \parallel AB$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d



Ta có: $IA + IB = IA' + IB \geq A'B$. Để $IA + IB$ nhỏ nhất khi $IA' + IB = A'B \Leftrightarrow I \equiv I_0$. Lúc đó điểm I là giao điểm của $A'B$ và d . Do $d \parallel AB$ nên I là giao điểm của d và mặt phẳng trung trực của AB .

Phương trình mặt phẳng (α) trung trực của AB : $3x - 2y + 2z - 14 = 0$

$$I = d \cap (\alpha) \Rightarrow 3(-1 + 3t) - 2(2 - 2t) + 2(2 + 2t) - 14 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 0; 4)$$

Bài 12. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = t' \end{cases}$.

- Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song d_2 .

Hướng dẫn giải

- Ta có: d_1 đi qua điểm $M(1; 0; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1; 1; -1)$

d_2 đi qua điểm $N(0; -1; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$

$$\text{Do } [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (2; -1; -3); \overrightarrow{MN} = (-1; -1; 0)$$

Xét $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_1; \vec{u}_2; \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng $\Rightarrow d_1; d_2$ chéo nhau

- Gọi $\vec{n}_\alpha$ là một VTPT của mặt phẳng (α)

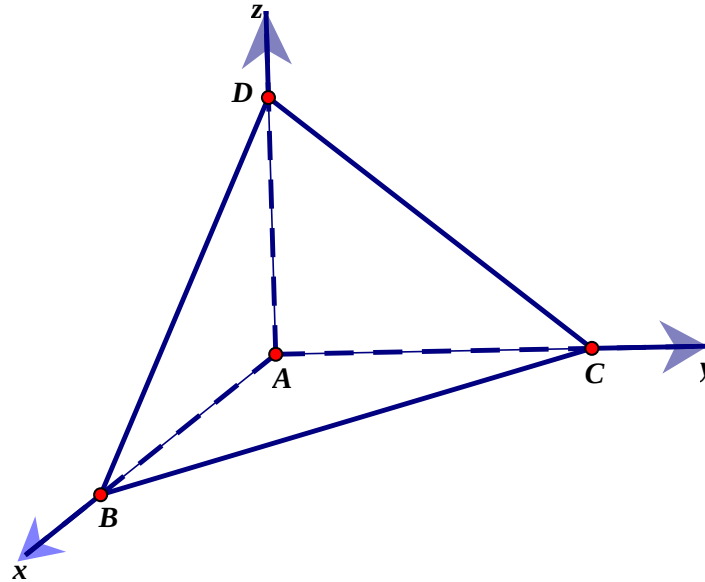
Do mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song $d_2 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (2; -1; -3)$

Mặt phẳng (α) đi qua M và có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -1; -3)$ có phương trình: $2x - y - 3z - 2 = 0$

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông với (ABC) . Biết rằng $AC = AD = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$

- Tính thể tích tứ diện $ABCD$
- Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BDC)

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục gốc tọa độ là điểm A , các đường thẳng AB, AC, AD theo thứ tự là các trục Ox, Oy, Oz .

Ta có : $A(0;0;0), B(3;0;0), C(0;4;0), D(0;0;4)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 8(\text{cm}^3)$$

Phương trình mặt phẳng (BCD) : $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$

$$d(A, (BDC)) = \frac{12}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$$

Bài 14. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng $(P_1): 2x + y + 2z + 1 = 0$ và $(P_2): 2x + y + 2z + 5 = 0$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P)

Theo đề:

$$d((P), (P_1)) = d((P), (P_2))$$

$$\Leftrightarrow d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow |2x + y + 2z + 1| = |2x + y + 2z + 5|$$

$$\Rightarrow 2x + y + 2z + 3 = 0$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $2x + y + 2z + 3 = 0$

Bài 15. Cho hai mặt phẳng $(P_1): 2x + y + 2z + 1 = 0$ và $(P_2): 4x - 2y - 4z + 7 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm của nó đến $(P_1), (P_2)$ là bằng nhau

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P)

$$\text{Theo đề: } d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|2x + y + 2z + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|4x - 2y - 4z + 7|}{\sqrt{16 + 4 + 16}}$$

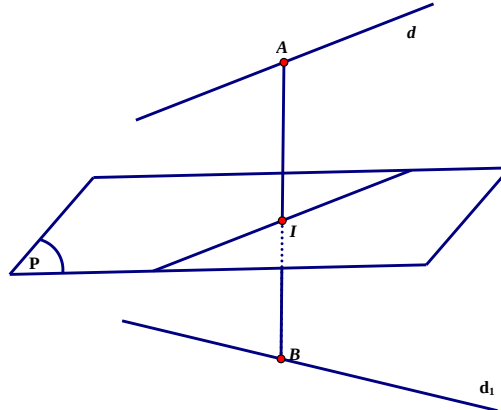
$$\Leftrightarrow 2|2x + y + 2z + 1| = |4x - 2y - 4z + 7|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y+8z-5=0 \\ 8x+9=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4y+8z-5=0$ và $8x+9=0$

- Bài 16.** Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=6 \\ y=-2t \\ z=7+t \end{cases}$ và $d_1: \begin{cases} x=-2+t' \\ y=-2 \\ z=-11-t' \end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ d, d_1 đến (P) là bằng nhau

Hướng dẫn giải.



Đường thẳng d đi qua $M(6;0;7)$ và có một VTCP $\vec{u}(0;-2;1)$

Đường thẳng d_1 đi qua $N(-2;-2;-11)$ và có một VTCP $\vec{u}_1(1;0;-1)$

Xét: $[\vec{u}; \vec{u}_1] = (2;1;2); \overrightarrow{MN}(-8;-2;-18) \Rightarrow [\vec{u}; \vec{u}_1] \cdot \overrightarrow{MN} = -16 - 2 - 36 \neq 0$ d, d_1 chéo nhau

Do d, d_1 chéo nhau nên (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn vuông góc chung AB của d, d_1 và song song với d, d_1

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t - t' = 14 \\ t + 2t' = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = -4 \end{cases} \Rightarrow A(6;4;5), B(-6;-2;-7)$

Gọi $\vec{n}$ là một VTCP của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}; \vec{u}_1] = (2,1,2)$

Gọi I là trung điểm AB nên $I(0;1;-1)$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z + 1 = 0$.

- Bài 17.** Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-3;2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(R): x - 2y - z + 8 = 0$

Hướng dẫn giải.

Gọi $\vec{n}$ là một VTCP của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n}_Q; \vec{n}_R] = (7;5;-3)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-3;2)$ và có một VTPT $\vec{n}$ nên có phương trình: $7x + 5y - 3z + 14 = 0$

Bài 18. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 9 \end{cases}$. Lập phương trình

đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P)

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;9)$ và có một VTCP $\vec{u} = (1;1;0)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P)

Ta có: $\vec{n}_Q = [\vec{u}; \vec{n}_P] = (-2; 2; 1)$

Phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - 2y + z - 9 = 0$

Khi đó $d' = (P) \cap (Q) \Rightarrow \vec{u}' = [\vec{n}_Q; \vec{n}_P] = (6; 3; 6)$

Gọi A là điểm thuộc $d' \Rightarrow$ tọa độ của A thỏa hệ: $\begin{cases} 2x - 2y - z + 9 = 0 \\ x + 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Cho $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - z + 7 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3; z = 1 \Rightarrow A(-3; 1; 1)$

Phương trình đường thẳng $d': \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Bài 19. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$. Viết phương

trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt và vuông góc với đường thẳng d

Hướng dẫn giải

Ta có: $\vec{u}(2; -1; 4)$ là VTCP của d

Gọi B là giao điểm của Δ, d

Do đó: $B(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t)$

$\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 21t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3; 2; -1)$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

Bài 20. Cho điểm $A(2; 0; 0); B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (x - 2; y; z) \Rightarrow C(2; 6; 0)$

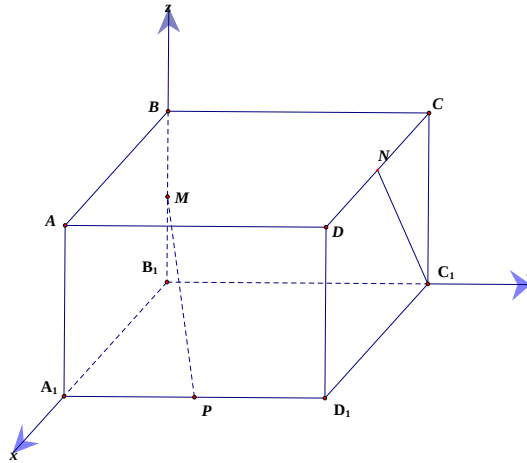
I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1; 3; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua I và vuông góc với OA là $x - 1 = 0$

Lúc đó (α) cắt OA tại $K(1; 0; 0) \Rightarrow d(I, OA) = IK = 5$.

Bài 21. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1 . Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng MP, C_1N .

Hướng dẫn giải



Ta chọn hệ trục như sau : B_1 là gốc tọa độ O , $\overrightarrow{B_1A_1}$ là trục Ox , $\overrightarrow{B_1C_1}$ là trục Oy , $\overrightarrow{B_1B}$ là trục Oz

Ta có: $M\left(0;0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};1;1\right), P\left(1;\frac{1}{2};0\right), C_1(0;1;0)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa C_1N và song song với MP

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α)

Ta có : $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}, \vec{n} \perp \overrightarrow{C_1N} \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{C_1N}] = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(2; -5; -1) = \frac{1}{4}\vec{n}'$

Mặt phẳng đi qua C_1 và có một VTPT $\vec{n}'(2; -5; -1)$ có phương trình : $2x - 5y - z + 5 = 0$

$$d(MP; C_1N) = d(M, (\alpha)) = \frac{3\sqrt{30}}{20}$$

$$\cos(MP, C_1N) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{C_1N}|}{|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{C_1N}|} = 0 \Rightarrow (MP, C_1N) = 90^\circ$$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-2;6;3), B(1;0;6), C(0;2;-1), D(1;4;0)$.

- Viết phương trình mp (BCD) . Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.
- Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.
- Viết phương trình mp (α) chứa AB và song song CD .

Đáp Án :

a) $8x - 3y - 2z + 4 = 0$. $A \notin (BCD)$.

b) $AH = d(A, (BCD)) = \frac{36}{\sqrt{77}}$

c) $x - z + 5 = 0$

Bài 2. Lập phương trình tham số của đường thẳng:

- Đi qua hai điểm $A(1;0;-3), B(3;-1;0)$.

b) Đi qua $M(2;3;5)$ và song song với $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-5}$

Đáp án :

a)
$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-t \quad \forall t \in R \\ z=-3+3t \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-4t \quad \forall t \in R \\ z=-5-5t \end{cases}$$

Bài 3. Cho $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$.

- Chứng minh rằng AB , AC , AD vuông góc với nhau từng đôi một. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.
- Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A , B , C , D .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng (ABD) .

Đáp án:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow AB \perp AC; AB \perp AD; AC \perp AD$

$$\Rightarrow V_{A.BCD} = \frac{1}{6} AB.AC.AD = \frac{4}{3}$$

b) $(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{21}{4}$

c) $(\alpha): 4z - 4 \pm \frac{\sqrt{21}}{2} = 0$

Bài 4. Cho các điểm : $A(-1;2;0)$, $B(-3;0;2)$, $C(1;2;3)$, $D(0;3;-2)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và phương trình chính tắc của đường thẳng AD .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AD và song song với BC .

Đáp án :

a) $3x - 5y - 2z + 13 = 0, \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$

b) $5x - 9y - 2z + 23 = 0$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x + y + 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(\beta): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

- Chứng minh (α) cắt (β) .
- Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao điểm của $(\alpha); (\beta)$.

Đáp án :

a) Ta có : $\frac{4}{2} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \vec{n}, \vec{n'}$ không cùng phương .Suy ra (α) cắt (β) .

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Bài 6. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(-1; -1; 1)$ và chứa đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

Đáp án:

$$(P): 2x + y + 2z + 1 = 0.$$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

- Viết phương trình (α) và (β) song song với nhau và lần lượt chứa d và d' .
- Lấy hai điểm $M(2; -1; 1); M'(2; 0; 1)$ lần lượt trên $d; d'$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) và khoảng cách từ M' đến mặt phẳng (α) . So sánh hai khoảng cách đó.

Đáp án:

$$\text{a) } (\alpha): 2x - y - 3z - 2 = 0, (\beta): 2x - y - 3z - 1 = 0$$

$$\text{b) } d(M, (\alpha)) = d(M', (\beta)) = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Bài 8. Cho $A(3; -2; -2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1), D(-1; 1; 2)$.

- Viết phương trình (BCD) . Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.
- Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc (BCD) .
- Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (BCD) .

Đáp án:

$$\text{a) } x + 2y + 3z - 7 = 0. A \notin (BCD). \text{ Suy ra 4 điểm } A, B, C, D \text{ là bốn đỉnh của tứ diện.}$$

$$\text{b) } (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14$$

$$\text{c) } H(4; 0; 1)$$

Bài 9. Cho $d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + t' \\ z = -3 + 2t' \end{cases}$.

- Chứng minh d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.
- Viết phương trình mặt phẳng đó.

Đáp án:

$$\text{a) } [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 0.$$

$$\text{b) } 6x - 8y + z + 11 = 0.$$

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P_2): 2x + y - 2z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{3}$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P_1); (P_2)$.

Đáp án:

$$(x-11)^2 + (y+26)^2 + (z+35)^2 = 1444, (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

B. CÁC ĐỀ KIỂM TRA.

Đề Kiểm Tra 45' Số 1

I. Phần Trắc Nghiệm

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vector: $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vector: $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$. B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$. D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Tọa độ trung điểm G của MN là:

- A. $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. B. $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. C. $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 4. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0, 0, -1)$ và song song với giá của vector $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (3; 0; 5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là

- A. $5x - 2y - 3z - 21 = 0$. B. $5x - 2y - 3z - 3 = 0$.
C. $10x - 4y - 6z + 21 = 0$. D. $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.

Câu 5. Gọi (α) là mặt phẳng cắt các trục tọa độ tại ba điểm $M(8; 0; 0), N(0; -2; 0), P(0; 0; 4)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$. B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.
C. $x - 4y + 2z = 0$. D. $x - 4y + 2z - 8 = 0$.

Câu 6. Cho đường thẳng Δ đi qua $A(2; 0; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

- A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

- Câu 7.** Xác định m để cặp mặt phẳng sau vuông góc với nhau: $7x - 3y + mz - 3 = 0$, $x - 3y + 4z + 5 = 0$
- A. 6. B. -4. C. 1. D. 2.
- Câu 8.** Cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 3z + 14 = 0$. Tìm tọa độ M' đối xứng với $M(1; -1; 1)$ qua (P)
- A. $M'(-1; 3; 7)$. B. $M'(2; -3; -2)$. C. $M'(1; -3; 7)$. D. $M'(2; -1; 1)$.
- Câu 9.** Bán kính mặt cầu tâm $I(1; 3; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$ là:
- A. $\sqrt{14}$. B. 14. C. $\sqrt{7}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 4 + t' \\ z = 4 \end{cases}$. Độ dài đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 là
- A. $\sqrt{6}$. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{6}$.
- Câu 11.** Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{4}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-19}{-4} = \frac{z}{1}$. Khi đó $\cos \alpha$ bằng:
- A. $\frac{2}{\sqrt{58}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{58}$.
- Câu 12.** Mặt phẳng (α) qua $A(1; -2; -5)$ và song song với mặt phẳng $(P): x - y + 1 = 0$ cách (P) một khoảng có độ dài là:
- A. 4. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.
- Câu 13.** Cho điểm $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Điểm M thuộc d có hoành độ dương sao cho ΔMOA cân tại O . Tìm tọa độ điểm M
- A. $M(2, 1, 4)$. B. $M(0, 0, 1)$. C. $M(1, 1, 4)$. D. $M(1, -1, 3)$.
- Câu 14.** Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với (P) có phương trình:
- A. $2x + 2y + z - 8 = 0$. B. $2x - 2y + z - 8 = 0$.
C. $2x - 2y + z + 8 = 0$. D. $2x + 2y - z - 8 = 0$.
- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; -3)$, $B(-1; -3; -2)$, $C(1; 5; 7)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó độ dài của OG là
- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. 3. D. 1.

II. Phần Tự Luận

- Bài 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OAIB.CEDF$ có tọa độ các đỉnh là $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$, $O(0;0;0)$
- Viết phương trình mặt phẳng (ABD) .
 - Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABD) .
 - Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC, EF .
- Bài 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

Đề Kiểm Tra 45' Số 2

I. Phần Trắc Nghiệm

- Câu 1.** Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+3z+1=0$ và đường thẳng d có phương trình tham số:
- $$\begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-2t \\ z = 1 \end{cases}$$
- Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. $d \perp (\alpha)$. B. d cắt (α) . C. $d // (\alpha)$. D. $d \subset (\alpha)$.
- Câu 2.** Cho 3 điểm $A(2;1;4)$, $B(-2;2;-6)$, $C(6;0;-1)$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
- A. -67. B. 65. C. 67. D. 33.
- Câu 3.** Cho điểm $M(1,2,3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz . Viết mặt phẳng (ABC) .
- A. $6x+3y+2z-6=0$. B. $6x-3y-2z+6=0$.
 C. $6x+3y-2z-3=0$. D. $6x+3y+2z-3=0$.
- Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;2;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;3;2)$. tọa độ của $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$ là:
- A. $(-1;-2;3)$. B. $(1,2,3)$. C. $(-1;-2;-3)$. D. $(-1;2;-3)$.
- Câu 5.** Điều kiện cần và đủ để ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ đồng phẳng là:
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. B. $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
 C. Ba vec tơ đôi một vuông góc nhau. D. Ba vectơ có độ lớn bằng nhau.
- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$, $C(2;2;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC :
- A. $G(6;3;6)$. B. $G(4;2;4)$. C. $G(-4;-3;-4)$. D. $G(4;3;-4)$.
- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(-2;1;3)$, $\vec{c}=(-4;3;5)$. Tìm hai số thực m, n sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c}$ ta được:
- A. $m=2; n=-3$. B. $m=-2; n=-3$. C. $m=2; n=3$. D. $m=-2; n=3$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $d_1; d_2$ cắt nhau. B. $d_1; d_2$ trùng nhau. C. $d_1 // d_2$. D. $d_1; d_2$ chéo nhau.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1), B(2;1;2)$ và $(P): x + 2y + 3z + 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) .

A. $(Q): x - 2y + z + 2 = 0$. B. $(Q): x + 2y + z + 2 = 0$.
C. $(Q): x - 2y - z - 2 = 0$. D. $(Q): x - 2y + z - 2 = 0$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-2;1;0)$ và đường thẳng $(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Điểm N thuộc (Δ) sao cho $MN = \sqrt{11}$. Tọa độ điểm N là:

A. $(1, 2, -1)$. B. $(-1, 2, 1)$. C. $(2, 1, 1)$. D. $(2, -1, 1)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với tọa độ $A(1;0;0); B(2;1;1); C(0;3;-2); D(1;3;0)$, thể tích của tứ diện đã cho là:

A. 1. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 6.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0$. Mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi là

A. 8π . B. 4π . C. $4\pi\sqrt{3}$. D. 2π .

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + 2z + 2 = 0$. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , đi qua $M(2;2;4)$ và cắt đường thẳng (d) .

A. $\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-4}{6}$. B. $\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}$.
C. $\frac{x+2}{9} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z+4}{6}$. D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

Câu 14. Phương trình đường thẳng qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{-3}$.

Câu 15. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + z = 2$. Tâm của đường tròn (C) là giao tuyến của (P) và (S) có tọa độ là ?

A. $(1, 1, 1)$.

B. $(0, 1, 0)$.

C. $(1, 0, 1)$.

D. $(0, 1, 1)$.

II. Phần Tự Luận

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(2; 4; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(2; 2; -1)$

- Chứng minh rằng các đường thẳng AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một.
- Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng AB và CD .
- Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD)

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; -2)$; $B(-3; 7; -8)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất

Đề Kiểm Tra 45' Số 3

I. Phần Trắc Nghiệm

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2, 0, 0)$; $N(0, -3, 0)$; $P(0, 0, 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $(2; 3; 4)$.

B. $(3; 4; 2)$.

C. $(-2; -3; 4)$.

D. $(-2; -3; -4)$.

Câu 2. Mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và $(P): x + 2y - z + 3 = 0$.

Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. d vuông góc (P) .

B. d song song với (P) .

C. d giao cắt với (P) .

D. d nằm trong với (P) .

Câu 4. Cho $A(1; 1; 3)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(-1; 2; 3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (ABC) bằng.

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1; 1; 1)$, mặt phẳng qua G và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là.

A. $x + y - z = 0$.

B. $x + y + z = 0$.

C. $x - y + z = 0$.

D. $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 6. Cho $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = \frac{-1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 5t \\ y = \frac{-1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = \frac{-1}{3} + 4t \\ z = 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 5t \\ y = \frac{-1}{3} - 4t \\ z = -3t \end{cases} \end{array}$$

Câu 7. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến giữa hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$ và $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và (P) . Khi đó

A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 30^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 90^\circ$.

Câu 8. Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oy và điểm $M(1;-1;1)$ là.

A. $x + z = 0$. B. $x - z = 0$. C. $x - y = 0$. D. $x + y = 0$.

Câu 9. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm $(0;0;0), (1;2;3), (2;-1;-1)$. Có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu (S) ?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0); B(1;1;0); C(0;1;0); D(0;0;2)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD .

Một học sinh làm như sau:

$$B1: \overrightarrow{AC} = (-1;1;0); \overrightarrow{BD} = (-1;-1;2); \overrightarrow{AB} = (0;1;0).$$

$$B2: [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}] = (2;2;2).$$

$$B3: d(AC, BD) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|}{\|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]\|} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài giải trên đúng hay sai ?. Nếu sai thì sai ở bước nào ?

A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 3. D. Đúng.

Câu 11. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường

$$\text{thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}. \text{ Phương trình của } d \text{ là}$$

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases} & \text{D. } \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}. \end{array}$$

- Câu 12.** Cho điểm $M(-1; 2; -3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ là:
- A. $6x - 3y - 2z + 6 = 0$. B. $6x + 2y + 3z + 6 = 0$.
 C. $6x - 2y + 3z + 6 = 0$. D. $6x - 3y + 2z + 6 = 0$.
- Câu 13.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Mặt cầu tiếp xúc với (S) và song song với (α) có phương trình là:
- A. $\begin{cases} 4x + 3y - 12z + 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z - 26 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 4x + 3y - 12z - 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z + 26 = 0 \end{cases}$.
 C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$. D. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
- Câu 14.** Cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. (α) và (β) vuông góc khi
- A. $|m| = \sqrt{2}$. B. $|m| = 1$. C. $|m| = 2$. D. $|m| = \sqrt{3}$.
- Câu 15.** Cho hai điểm $A(1; 4; 2) B(-1; 2; 4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Điểm $M \in \Delta$ mà $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất có tọa độ là.
- A. $(-1; 0; 4)$. B. $(0; -1; 4)$. C. $(1; 0; 4)$. D. $(1; 0; -4)$.

II. Phần Tự Luận

Bài 1. Cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 4 = 0$

- Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ giao điểm M của Δ và (P) .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.
- Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại M .

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 11 = 0.$$

- Lập phương trình (P) vuông góc với d và tiếp xúc với mặt cầu (S) .
- Lập phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua đường thẳng d .

Đề Kiểm Tra 45' Số 4

I. Phần Trắc Nghiệm

- Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -5; 7)$. Điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng Oxy có tọa độ là:
- A. $(2; 5; 7)$. B. $(2; -5; -7)$. C. $(-2; -5; 7)$. D. $(-2; 5; 7)$.

- Câu 2.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$ và $M(1; 2; -4)$. Tiếp diện của (S) tại M có phương trình là:
- A. $3x + y - 4z - 21 = 0$. B. $3x + y + 4z - 21 = 0$.
 C. $3x - y - 4z - 21 = 0$. D. $3x + y - 4z + 21 = 0$.
- Câu 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(2; -3; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) là:
- A. $x - 2 = 0$. B. $x + 2 = 0$. C. $2x + y = 0$. D. $2x - y + 1 = 0$.
- Câu 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt phẳng (ABC) ?
- A. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. B. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
 C. $6x + 3y + 2z + 6 = 0$. D. $12x + 6y + 4z - 12 = 0$.
- Câu 5.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0, (Q): 2x - y + 5z - 4 = 0$?
- A. $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = 2 + 7t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$.
 C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{-3}$. D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{-3}$.
- Câu 6.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ là:
- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 7.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - 2z - 5 = 0$. Với giá trị nào của m thì Δ vuông góc với (α) ?
- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.
- Câu 8.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ và $(d_2): \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-3}$. Đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) có vectơ chỉ phương là:
- A. $\vec{a}(-3; -3; 1)$. B. $\vec{a}(3; -3; 3)$. C. $\vec{a}(1; 0; -1)$. D. $\vec{a}(1; -3; 2)$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $d_1 \perp d_2$.

B. $d_1 // d_2$.

C. $d_1 \equiv d_2$.

D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 2; 1)$, $B(1; 0; 2)$ và $C(-1; 2; 3)$. Diện tích tam giác ABC là:

A. $\frac{5}{2}$.

B. $3\sqrt{5}$.

C. $4\sqrt{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-2; 1; 0)$ và đường thẳng

$$(\Delta): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}. \text{ Điểm } N \text{ thuộc } (\Delta) \text{ sao cho } MN = \sqrt{11}. \text{ Tọa độ điểm } N \text{ là:}$$

A. $(1, 2, -1)$.

B. $(-1, 2, 1)$.

C. $(2, 1, 1)$.

D. $(2, -1, 1)$.

Câu 12. Cho 2 đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=3-t' \\ y=4+t' \\ z=4 \end{cases}$. Độ dài đoạn

vuông góc chung của d_1 và d_2 là

A. $\sqrt{6}$.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 14. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; -8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là.

A. 11.

B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Gọi M là điểm trên (P) để tam giác ABM đều khi đó tọa độ điểm M là:

A. $M(-3; 1; 2)$.

B. $M(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-1}{2})$.

C. $M(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3})$.

D. $M(1; 2; -1)$.

II. Phần Tự Luận

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1, -1, -2)$; $B(3, 1, 1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 5 = 0$.

- Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .
- Viết phương trình (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) .
- Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) , đi qua I và vuông góc với AB .
- Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ ngắn nhất.

Bài 2. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (ABC) cắt các trục tọa độ lần lượt tại các điểm $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Biết khoảng cách từ điểm $O(0, 0, 0)$ đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

C. HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ

I. Kết Quả Phần Trắc Nghiệm :

Đề Số 1

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
D	C	D	B	D
Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
C	B	A	A	D
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15
A	C	D	A	D

Đề Số 2

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
D	D	A	A	B
Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
B	C	C	D	A
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15
C	B	B	D	C

Đề Số 3

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
A	A	D	A	D
Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
A	C	B	C	D
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15
A	D	A	C	A

Đề Số 4

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
B	A	A	C	B
Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
A	A	A	C	D
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15
A	D	D	A	A

II. Hướng Dẫn Phần Tự Luận :

Hướng dẫn giải đề số 1

Bài 1.

a) Ta có : $D(3; 4; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0; 4; 5)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; 0)$

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của mặt phẳng (ABD)

Lúc đó : $\vec{n} = [\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}] = (-20; -15; 12)$

Phương trình mặt phẳng (ABD) : $20x + 15y - 12z - 60 = 0$

Ta có $H(1;1;1)$. Đường thẳng MH đi qua H và nhận $\vec{n}_p(1;1;1)$ làm một VTCP có phương

$$\text{trình : } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} M = MH \cap (P) \Rightarrow \text{tọa độ điểm } M \text{ thỏa hệ : } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(0;0;0)$$

Hướng dẫn giải đề số 2

Bài 1.

- a) Ta có : $\vec{AB} = (-1;0;0)$, $\vec{AC} = (0;0;4)$, $\vec{AD} = (0;-2;0)$

Do $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0$, suy ra $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$. Vậy AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một.

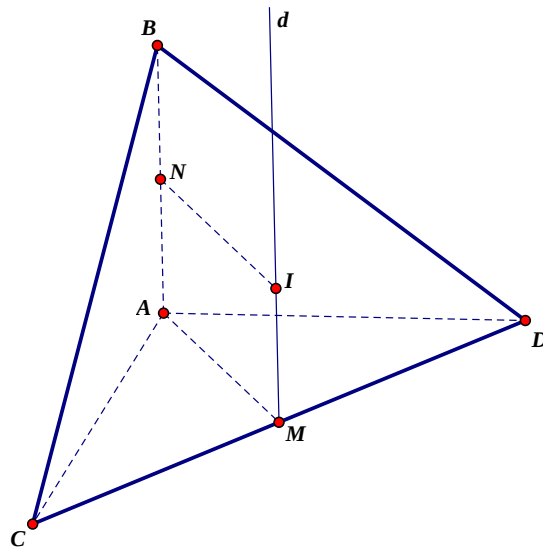
- b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CD . Ta có AH chính là đường vuông góc chung của AB, CD

$$\text{Ta có : } \vec{AB} = (-1;0;0), \vec{CD} = (0;-2;-4)$$

$$\text{Gọi } \vec{u} \text{ là một VTCP của đường thẳng } \Delta \Rightarrow \vec{u} = [\vec{AB}; \vec{CD}] = (0;-4;2)$$

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AH : \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

- c) Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD . Do ΔACD vuông tại A nên M là trung điểm $DC \Rightarrow M(2;3;1)$



Vẽ đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mp (ACD) . Kẻ đường trung trực của đường thẳng AB cắt d tại $I \Rightarrow IA = IC = ID = IB \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D

$$\text{Ta thấy } \vec{MI} = \frac{1}{2} \vec{AB} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; 3; 1\right); R^2 = IA^2 = \frac{21}{4}$$

Phương trình mặt cầu (S): $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{21}{4}$

d) Mặt phẳng $(\alpha) \parallel (ABD)$ nên có VTPT là $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 4)$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $z + m = 0$

Do (α) tiếp xúc với mặt cầu (S): $d(I, (\alpha)) = r \Rightarrow |1 + D| = \frac{\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow D = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): z - 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

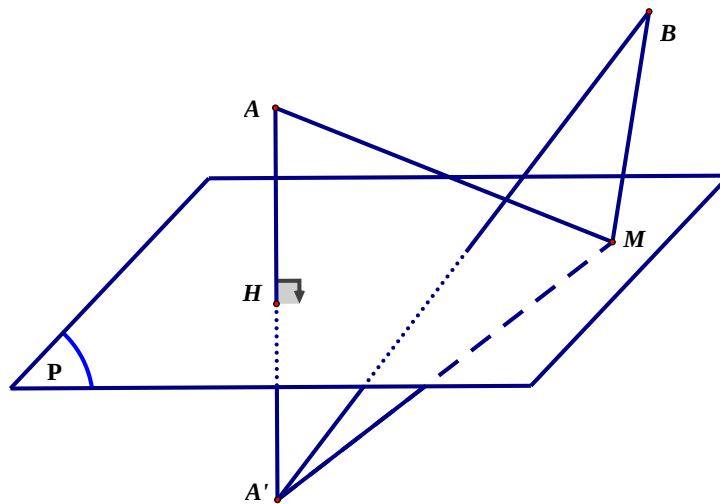
Bài 2. Đặt $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$. $f(A) = -6$; $f(B) = -30 \Rightarrow f(A) \cdot f(B) > 0 \Rightarrow A, B$ ở một bên đối với mặt phẳng (P)

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng AA' : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$

$H = AA' \cap P \Rightarrow$ tọa độ điểm H thỏa hệ: $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$

$\Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 2; -1)$. Lúc đó H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(3; 1; 0)$



Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

Để $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A', B, M$ thẳng hàng $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$

Đường thẳng $A'B$ đi qua $B(-3; 7; -8)$ và nhận $\overrightarrow{A'B} = (-6; 6; -18)$ làm một VTCP nên có

phương trình: $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 7 + t \\ z = -18 - 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải đề số 3

Bài 1.

- a) Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{n_p}(1; -2; 2)$ làm một VTCP

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Gọi M là giao điểm của Δ và (P)

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} x - 2y + 2z + 5 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Thay vào: } 1 + t - 2(2 - 2t) + 2(-1 + 2t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 9t = 9 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(2; 0; 1)$$

- b) Mặt phẳng (α) có dạng $x - 2y + 2z - m = 0$ ($m \neq 4$)

$$\text{Ta có: } d((P), (\alpha)) = d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow d(M, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|4 - m|}{3} = 2$$

$$\Leftrightarrow |4 - m| = 6 \Leftrightarrow m = -2, m = 10$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (\alpha_1): x - 2y + 2z + 2 = 0, (\alpha_2): x - 2y + 2z - 10 = 0$$

- c) Mặt cầu (S) có đường kính là $AM \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$, bán kính $R = \frac{AM}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{Phương trình mặt cầu: } (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$$

Bài 2.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-2, 1; -3); R = \sqrt{2 + 1 + 9 + 12} = 2\sqrt{6}$

(P) vuông góc với d nên nhận $\vec{u_d} = (2; -1; 1)$ làm một VTPT $\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x - y + z + m = 0$

$$\text{Do } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên: } d(I, (P)) = R \Rightarrow \frac{|m - 8|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m = -4; m = 20$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (P_1): 2x - y + z - 4 = 0, (P_2): 2x - y + z + 20 = 0$$

- b) Gọi I' là tâm của mặt cầu $(S') \Rightarrow I'$ đối xứng với I qua đường thẳng d

$$\text{Gọi } R' \text{ là bán kính mặt cầu } (S') \quad R' = R = 2\sqrt{6}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d'

Mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d :

$$2(x + 2) - (y - 1) + (z + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z + 8 = 0$$

$$\text{Ta có: } H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} 2x - y + z + 8 = 0 \\ x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow 6t + 9 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow H\left(-3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Mà H là trung điểm của $II' \Rightarrow I'(-4; 4; 4)$

Phương trình mặt cầu $(S'): (x+4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 24$

Hướng dẫn giải đề số 4

Bài 1. Ta có : $R = d(I; (P)) \Leftrightarrow R = \frac{|1+2-6-5|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$

a) Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = \frac{32}{7}$

Gọi $\vec{n}_Q$ là một VTPT của mặt phẳng (Q)

Ta có: $\vec{AB} = (2; 2; 3), \vec{n}_p = (1; -2; 3) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{AB}; \vec{n}_p] = (12; -3; -6) = 3(4; -1; -2)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(Q): 4x - y - 2z - 9 = 0$

b) Gọi $\vec{u}_\Delta$ là một VTCP của đường thẳng Δ

Ta có : $\vec{u}_\Delta = [\vec{AB}; \vec{n}_p] = (12; -3; -6) = 3(4; -1; -2) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = -2t \end{cases}$

c) Gọi K là trung điểm của $AB \Rightarrow K\left(2; 0; -\frac{1}{2}\right)$

Ta có : $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |2\vec{MK}| = 2MK$

Đề $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MK$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MK \perp (P) \Rightarrow$ Đường thẳng $MK: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -\frac{1}{2} + 3t \end{cases}$

$M = MK \cap (P) \Rightarrow M$ thỏa hệ : $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -\frac{1}{2} + 3t \end{cases} \Rightarrow 14t = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{9}{28} \Rightarrow M\left(\frac{65}{28}; -\frac{9}{14}; \frac{13}{28}\right)$

Bài 2. Mặt phẳng (ABC) có dạng : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$

Ta có : $\Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{d^2(O; (ABC))} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3$

$d^2(O; (ABC)) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow (ABC): x + y + z - 1 = 0$

PHẦN 5: GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BẢNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp (chú ý đến vị trí của gốc O)

Bước 2: Xác định tọa độ các điểm có liên quan (có thể xác định tọa độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)

Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào:

- Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).
- Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song, cùng phương, thẳng hàng, điểm chia đoạn thẳng để tìm tọa độ
- Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.
- Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán

Các dạng toán thường gặp:

- Độ dài đoạn thẳng
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng
- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng
- Góc giữa hai đường thẳng
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Góc giữa hai mặt phẳng
- Thể tích khối đa diện
- Diện tích thiết diện
- Chứng minh các quan hệ song song, vuông góc
- Bài toán cực trị, quỹ tích

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Hình chóp tam giác

Dạng 1. Dạng tam diện vuông

Ví dụ 1. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ vuông góc nhau từng đôi một. Gọi M là điểm cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là 1, 2, 3. Giá trị a, b, c để thể tích khối chóp $O.ABC$ nhỏ nhất là

- A.** $a = 3; b = 6; c = 9$. **B.** $a = 1; b = 1; c = 1$. **C.** $a = b = c$. **D.** $a = 1; b = 2; c = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

$$d[M, (OAB)] = 3 \Rightarrow z_M = 3. \text{ Tương tự } \Rightarrow M(1; 2; 3).$$

$$\text{PT } mp(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \forall M \in (ABC)$$

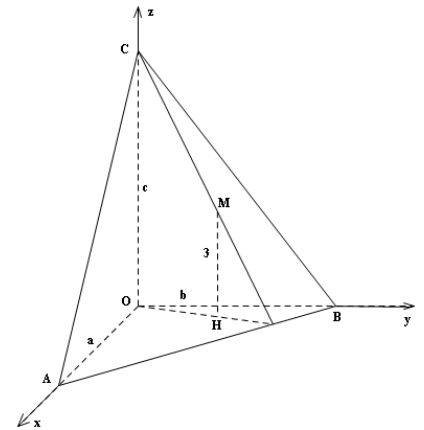
$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1).$$

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc \quad (2).$$

$$(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27.$$

$$(2) \Rightarrow V_{\min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } a = 3; b = 6; c = 9$$

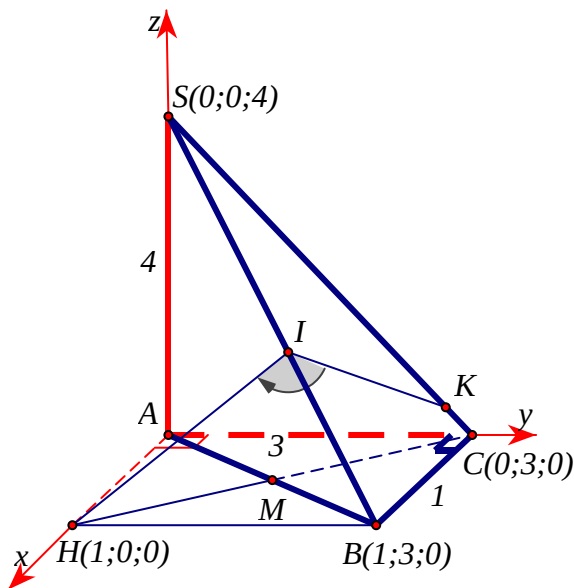


Dạng 2. Dạng tứ diện có một cạnh vuông góc một mặt tại góc nhọn của tam giác vuông

Ví dụ 2. Tứ diện $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy và $\triangle ABC$ vuông tại C . Độ dài của các cạnh $SA = 4$, $AC = 3$, $BC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , H là điểm đối xứng của C qua M . Tính góc α là góc phẳng nhị diện $[H, SB, C]$ (tính đến độ, phút, giây)

A. $\alpha = 82^\circ 35' 57''$. B. $\alpha = 97^\circ 24' 2''$. C. $\alpha = 63^\circ 30'$. D. $\alpha = 15^\circ 14' 13''$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ: $O \equiv A(0;0;0)$; $B(1;3;0)$; $C(0;3;0)$; $S(0;0;4)$ và $H(1;0;0)$

Dựng $mp(P)$ qua H vuông góc SB tại I cắt đường thẳng SC tại K , dễ thấy $[H, SB, C] = (\overline{IH}, \overline{IK})$ (1)

* Tìm tọa độ véc tơ

$$\bullet \overrightarrow{SB} = (1; 3; -4) \text{ và } \overrightarrow{SC} = (0; 3; -4),$$

* Phương trình tham số đường thẳng $SB: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+3t \\ z = -4t \end{cases}$, $SC: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3+3t \\ z = -4t \end{cases}$, phương trình mp

$$(P): x + 3y - 4z - 1 = 0$$

* Tìm tọa độ giao điểm $I = SB \cap (P)$ và $K = SC \cap (P) \Rightarrow I\left(\frac{17}{26}; \frac{51}{26}; \frac{18}{13}\right)$, $K\left(0; \frac{51}{26}; \frac{18}{13}\right)$. Tọa độ véctơ

$$\overrightarrow{IH} = \left(\frac{9}{26}; -\frac{51}{26}; -\frac{18}{13}\right), \overrightarrow{IK} = \left(-\frac{17}{26}; 0; 0\right).$$

$$\bullet \cos \alpha = \cos[H, SB, C] = \cos(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IK}}{|\overrightarrow{IH}| \cdot |\overrightarrow{IK}|} = \frac{-\frac{153}{676}}{\frac{3\sqrt{442}}{26} \cdot \frac{17}{26}} \approx -0.1427$$

$$\bullet \alpha = 98^\circ 12' 13''$$

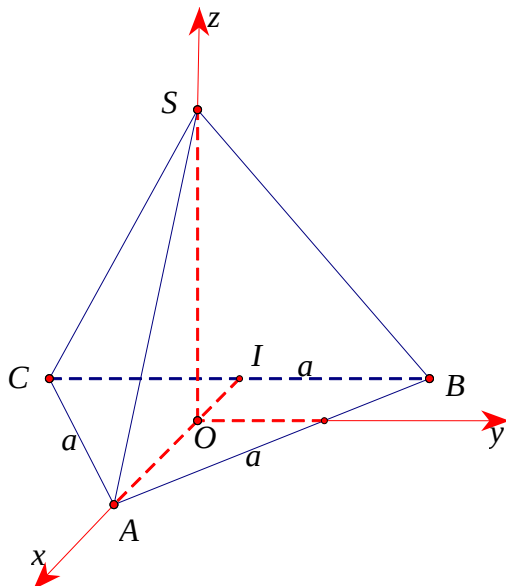
Dạng 3. Dạng hình chóp tam giác đều $S.ABC$:

Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường cao bằng h . Gọi O là tâm tam giác đều ABC .

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA . Đặt $SO = h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

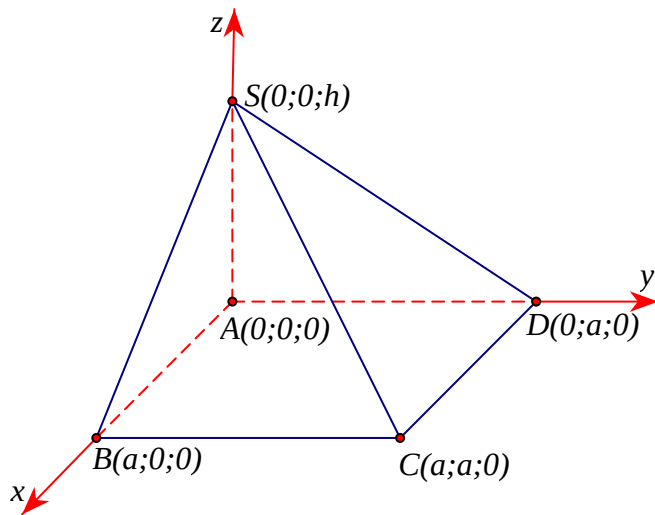
$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right), S(0;0;h). \text{ Suy ra tọa độ } \Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

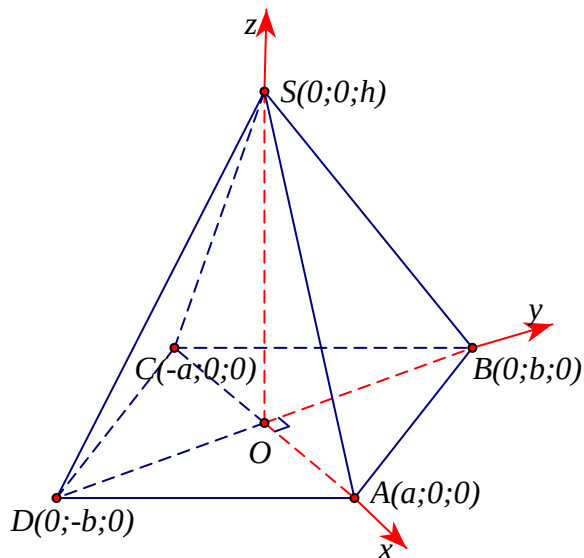


2. Hình chóp tứ giác

Dạng 1. Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình chữ nhật): Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông

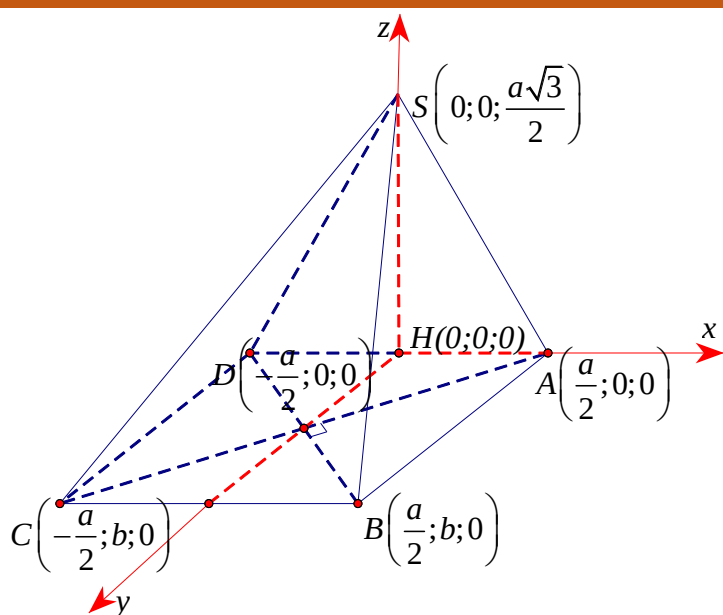


Dạng 2. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O và có đường cao $SO \perp (ABCD)$: Ta chọn hệ trục tọa độ: Tia OA , OB , OS lần lượt là Ox , Oy , Oz . Giả sử số đo $SO = h$, $OA = a$, $OB = b$ thì ta có tọa độ $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $S(0;0;h) \Rightarrow C(-a;0;0)$, $D(0;-b;0)$.



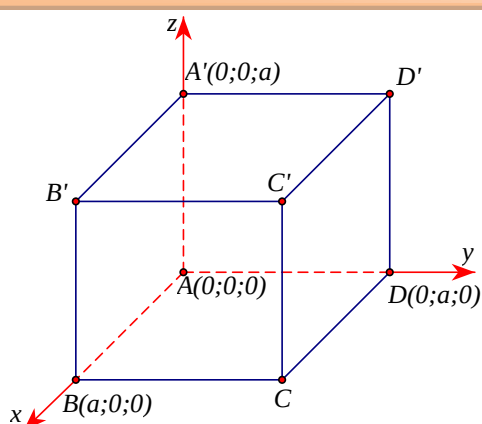
Dạng 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và có cạnh $AB = b$, tam giác SAD đều cạnh a và $mp(SAD) \perp (ABCD)$: Ta gọi H là trung điểm AD , trong $(ABCD)$ ta vẽ tia $Hy \perp AD$. Ta chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$: $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};b;0\right)$,

$$C\left(-\frac{a}{2};b;0\right), D\left(-\frac{a}{2};0;0\right), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

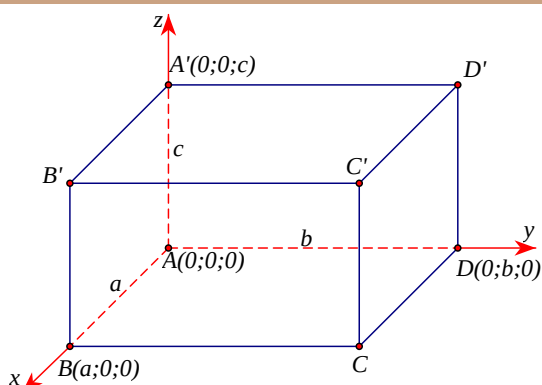


3. Hình lăng trụ đứng

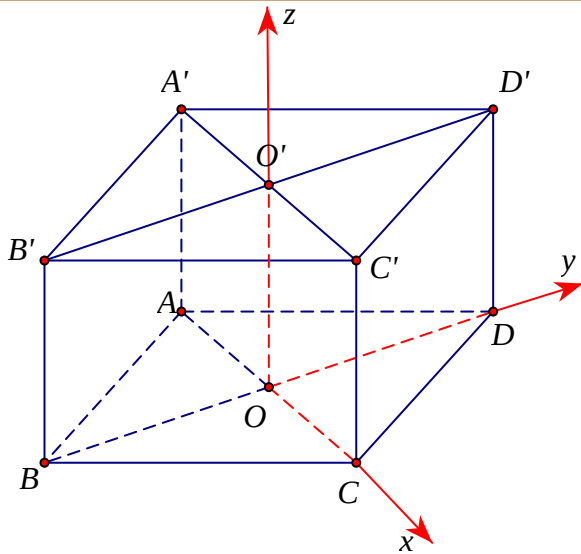
Dạng 1. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a : Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$; $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$



Dạng 2. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, $D(0;b;0)$; $A'(0;0;c)$, $B'(a;0;c)$, $C'(a;b;c)$, $D'(0;b;c)$



Dạng 3. Hình hộp đứng đáy hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: gốc trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC, BD ; hai trục Ox, Oy lần lượt chứa hai đường chéo của hình thoi, trục Oz đi qua tâm hai đáy.



B. BÀI TẬP CÓ GIẢI

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc nhau từng đôi một, có độ dài $AB = 3$, $AC = AD = 4$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD)

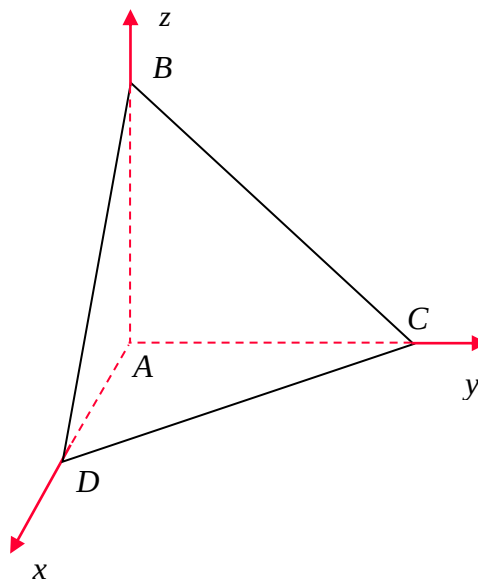
A. $d = \frac{6\sqrt{34}}{17}$.

B. $d = \frac{12}{5}$.

C. $d = \frac{1}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{34}}{17}$

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau: $O \equiv A(0;0;0)$; $D(4;0;0)$; $C(0;4;0)$; $B(0;0;3)$

* Tìm phương trình mặt phẳng (BCD) : $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 4z - 12 = 0$

* Tính khoảng cách $d = d[A, (BCD)] = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AD = a$, có tam giác ABC vuông tại A và $AC = b$, $AB = c$. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c .

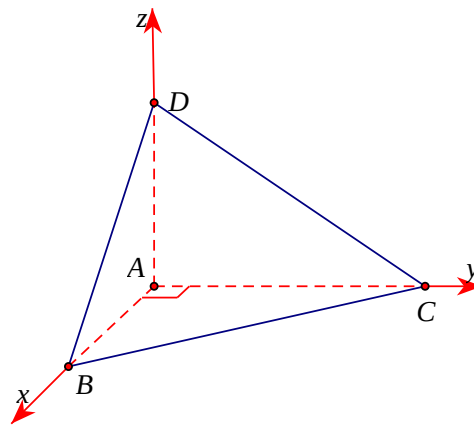
A. $S = \frac{1}{2}abc$.

B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

C. $S = \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$.

D. $S = \frac{1}{2}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau: $O \equiv A(0;0;0)$; $B(c;0;0)$; $C(0;b;0)$; $D(0;0;a)$

* Tìm tọa độ véc tơ

• Cạnh của tam giác BCD : $\overrightarrow{BC} = (-c; b; 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-c; 0; a)$

• Véc tơ tích có hướng $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (ab; ac; bc)$

* Sử dụng công thức tính diện tích tam giác

• $S_{BCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

Câu 3. Cho tứ diện $O.ABC$ có các tam giác OAB , OBC , OCA đều là tam giác vuông tại đỉnh O . Gọi α , β , γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng (OBC) , (OCA) , (OAB) với mặt phẳng (ABC) . Tìm hệ thức lượng giác liên hệ giữa α , β , γ .

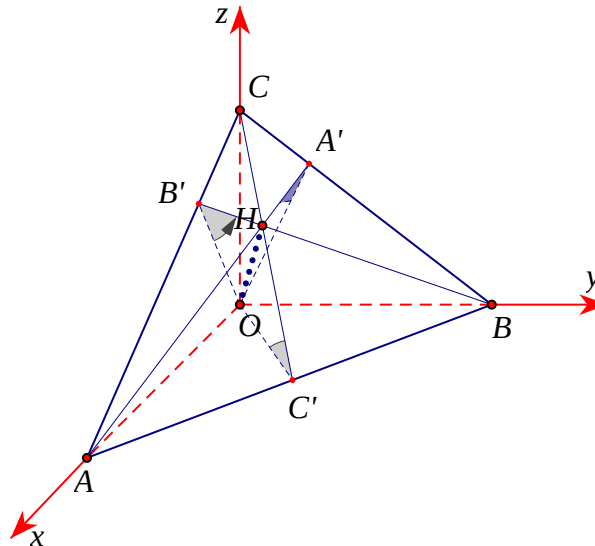
A. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

B. $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

C. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

D. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau: $O(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$$

* Tìm vector pháp tuyến của

- Mặt phẳng (ABC) : $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc; ca; ab)$
- Mặt phẳng (OBC) : $\vec{i} = (1; 0; 0)$ (vì: $Ox \perp (OBC)$)
- Mặt phẳng (OCA) : $\vec{j} = (0; 1; 0)$ (vì: $Oy \perp (OCA)$)
- Mặt phẳng (OAB) : $\vec{k} = (0; 0; 1)$ (vì: $Oz \perp (OAB)$)

* Sử dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng

- $\cos \alpha = \cos[(OBC), (ABC)] \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$
- $\cos \beta = \cos[(OCA), (ABC)] \Rightarrow \cos \beta = \frac{|ac|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$
- $\Rightarrow \cos \gamma = \frac{|ab|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

* Biến đổi và kết luận $\cos \gamma = \cos[(OAB), (ABC)]$

- $\cos^2 \alpha = \frac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$
- $\cos^2 \beta = \frac{c^2a^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$
- $\cos^2 \gamma = \frac{a^2b^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$

$$\text{Vậy } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Câu 4. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

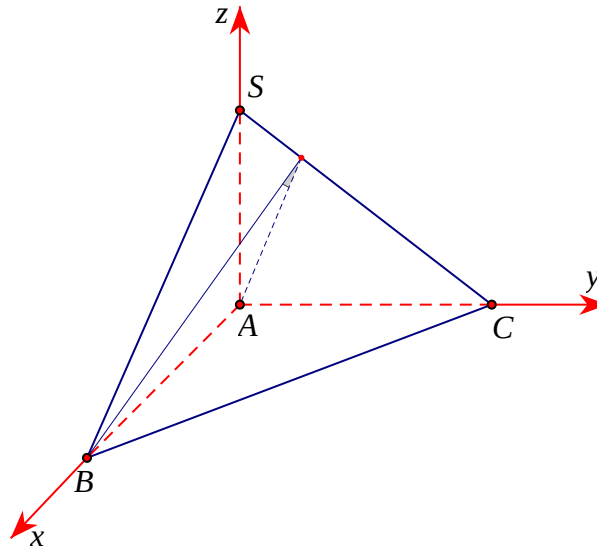
A. $\varphi = 120^\circ$.

B. $\varphi = 30^\circ$.

C. $\varphi = 45^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau: $O \equiv A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(0;a;0)$;

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

* Tìm vector pháp tuyến của

• Mặt phẳng (SAC) : $\vec{i} = (1; 0; 0)$ (vì $Ox \perp (SAC)$)

• Mặt phẳng (SBC) : có cặp véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{SB} = \left(a; 0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(0; a; -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$ véc

tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2\right)$ hay là $\vec{n} = (1; 1; \sqrt{2})$

* Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{i} \cdot \vec{n}|}{|\vec{i}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 5. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AI và SC , với I là trung điểm cạnh BC .

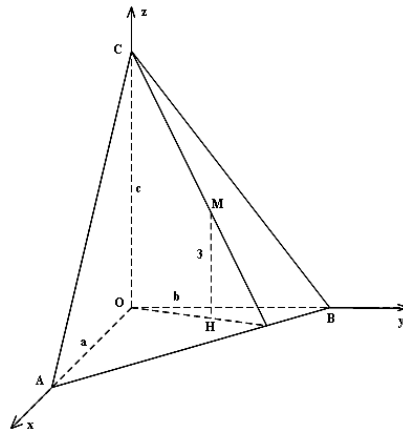
A. $d = \frac{a}{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

$$d[M, (OAB)] = 3 \Rightarrow z_M = 3. \text{ Tương tự } \Rightarrow M(1;2;3).$$

$$\text{PT } mp(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1).$$

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc \quad (2).$$

$$(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27.$$

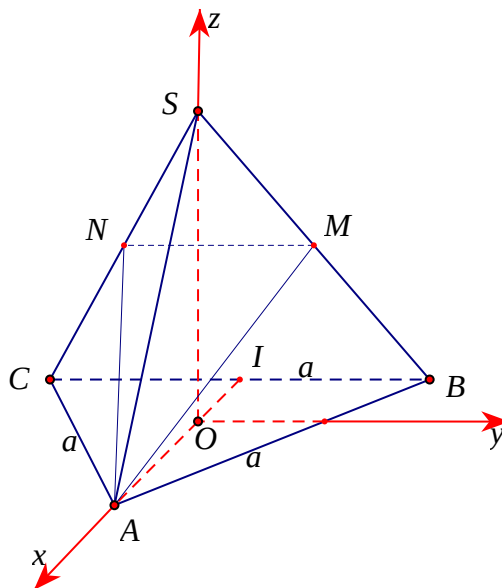
$$(2) \Rightarrow V_{\min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } a=3; b=6; c=9$$

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SC . Cho biết (AMN) vuông góc với SBC ; Tính theo a diện tích ΔAMN .

$$\text{A. } S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{B. } S_{AMN} = \frac{a^2}{2} \quad \text{C. } S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \quad \text{D. } S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{10}}{8}.$$

Hướng dẫn giải



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) , ta suy ra O là trọng tâm ΔABC . Gọi I là trung điểm của BC , ta có: $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA . Đặt $SO = h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được: $O(0; 0; 0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$, $S(0; 0; h)$

Suy ra tọa độ $\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$ và $N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$.

* Vectơ pháp tuyến mp(AMN): $\vec{n}_{(AMN)} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$, mp(SBC):

$\vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$. Từ giả thiết $(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} \cdot \vec{n}_{(SBC)} = 0$

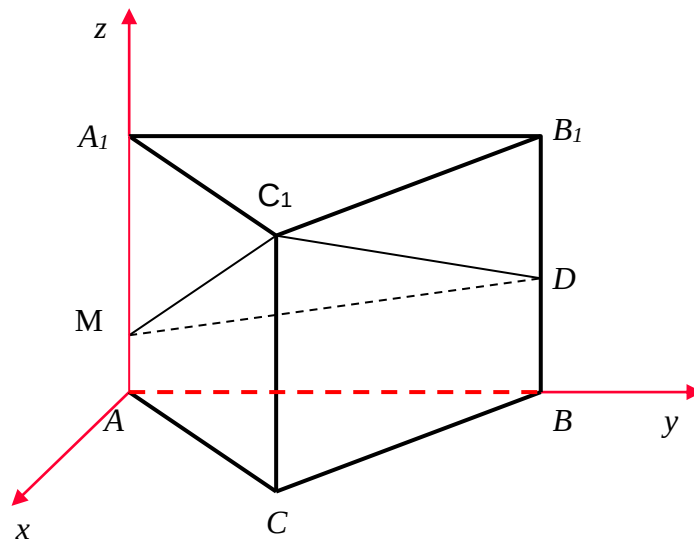
$$\Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12}.$$

* Diện tích tam giác AMN : $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , có $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là trung điểm của BB_1 ; Lấy điểm M di động trên cạnh AA_1 . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích tam giác MC_1D .

A. $S_{MC_1D} = \frac{3a^2}{4}$. B. $S_{MC_1D} = \frac{5a^2}{4}$. C. $S_{MC_1D} = \frac{a^2\sqrt{42}}{4}$. D. $S_{MC_1D} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A(0; 0; 0)$; $B \in Oy$: $B(0; a; 0)$, $A_1 \in Oz$: $A_1(0; 0; 2a)$

$\Rightarrow C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a\right)$ và $D(0; a; a)$

Do M di động trên AA_1 có tọa độ $M(0; 0; t)$ với $t \in [0; 2a]$

Ta có: $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}\|$

$$\overrightarrow{DC_1} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a \right), \overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a) \Rightarrow [\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DM}] = \frac{-a}{2} (t-3a; \sqrt{3}(t-a); a\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \left| [\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DM}] \right| = \frac{a}{2} \sqrt{(t-3a)^2 + 3(t-a)^2 + 3a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}.$$

$$S_{\Delta DC_1 M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$$

Xét $f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2$ với $t \in [0; 2a]$. Ta có $f'(t) = 8t - 12a$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$

Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $t = 0$ ($M \equiv A$), vậy GTLN của diện tích là

$$S_{MC_1 D} = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}$$