

SỞ GD & ĐT TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG TH – THCS – THPT
LÊ THÁNH TÔNG
(Đề có 5 trang)

ĐỀ KIỂM TRA ĐỊNH KỲ
Môn: TOÁN, Lớp 12

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Mã đề: 803

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố xung khắc A và B có xác suất thỏa mãn $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Giá trị của $P(A \cup B)$ bằng

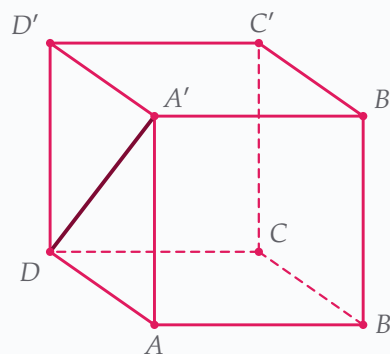
- (A) 0,21. (B) 0,4. (C) 0. (D) 1.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $u_2 = 1$. Giá trị công sai d bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) -2. (D) 1.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình bên). Đường thẳng $A'D$ song song với mặt phẳng

- (A) $(AA'D'D)$.
(B) $(A'B'CD)$.
(C) $(BB'C'C)$.
(D) $(AA'C'C)$.



Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 2]$ như sau:

x	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Hàm số đồng biến trên khoảng

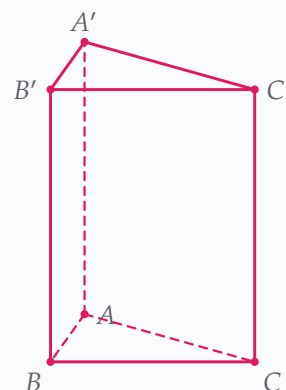
- (A) $(-1; 0) \cup (1; 2)$. (B) $(0; 5)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; -3; 1)$ và $C(4; -1; 4)$. Số đo góc $\widehat{BAC}$ bằng

- (A) 30° . (B) 120° . (C) 60° . (D) 90° .

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (xem hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$.
 (B) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 (C) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{BC}$.
 (D) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC'}$.



Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - cb \neq 0$) có đồ thị (C). Có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2
		$-\infty$	

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(a;b)$. Giá trị $2a + b$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) -2. (D) -1.

Câu 8. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hóa nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 300x + 30000$. Chi phí để sản xuất thêm đơn vị hàng hóa thứ 301 xấp xỉ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của triệu đồng).

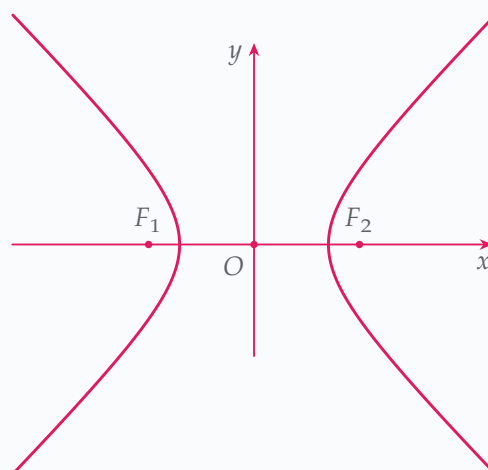
- (A) 3302,7. (B) 3270,0. (C) 32,5. (D) 32,7.

Câu 9. Mùa giải 2026 – 2027, giải vô địch quốc gia Tây Ban Nha (La Liga) có 20 đội bóng tham gia. Các đội bóng đấu vòng tròn hai lượt đi và về. Toàn bộ mùa giải có bao nhiêu trận đấu?

- (A) 400. (B) 190. (C) 380. (D) 200.

Câu 10. Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho hypebol (H) có dạng như hình vẽ bên và độ dài trục thực bằng 16. Điểm $N(-10; y_N) \in (H)$, giá trị $F_1N - F_2N$ bằng

- (A) -10.
 (B) -16.
 (C) 16.
 (D) 10.



Câu 11. Khảo sát thời gian (đơn vị: phút) học trực tuyến trong một ngày của 42 học sinh, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

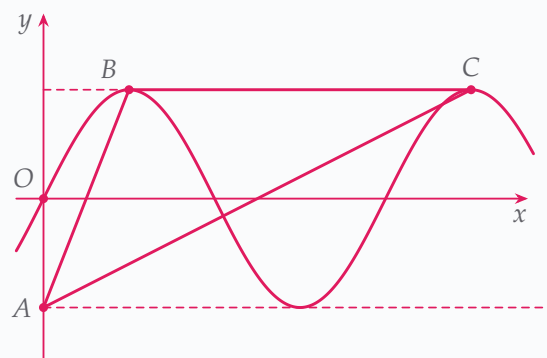
Thời gian học trực tuyến	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số học sinh	4	8	14	7	4	5

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên thuộc nhóm nào sau đây?

- ☐ (A) [30; 40).
 ☐ (B) [40; 50).
 ☐ (C) [50; 60).
 ☐ (D) [60; 70).

Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y = 2 \sin x$ như hình vẽ bên. Tính diện tích tam giác ABC ?

- ☐ (A) 2π .
☐ (B) 3π .
☐ (C) 4π .
☐ (D) 5π .



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một hộp đựng 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp, gọi A là biến cố: “Rút được thẻ đánh số chia hết cho 2” và B là biến cố: “Rút được thẻ đánh số chia hết cho 3”.

- a) $P(A) = 0,5$.
 b) Xác suất để tấm thẻ được rút ra chia hết cho 6 bằng $\frac{1}{6}$.
 c) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.
 d) Xác suất để tấm thẻ được rút ra không chia hết cho 2 và cho 3 bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -1; 4)$, $B(-2; 2; 3)$ và hai điểm M, N thay đổi sao cho M luôn thuộc mặt phẳng (Oxy) và $\overrightarrow{MN} = (-2; -2; 1)$.

- a) Hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(0; 1; 4)$.
 b) Điểm $D(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NM}$, khi đó $a + b + c = 1$.
 c) Điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn A, B, C thẳng hàng, khi đó $3\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{CB}$.
 d) Giá trị nhỏ nhất của $AM + MN + NB$ bằng 12.

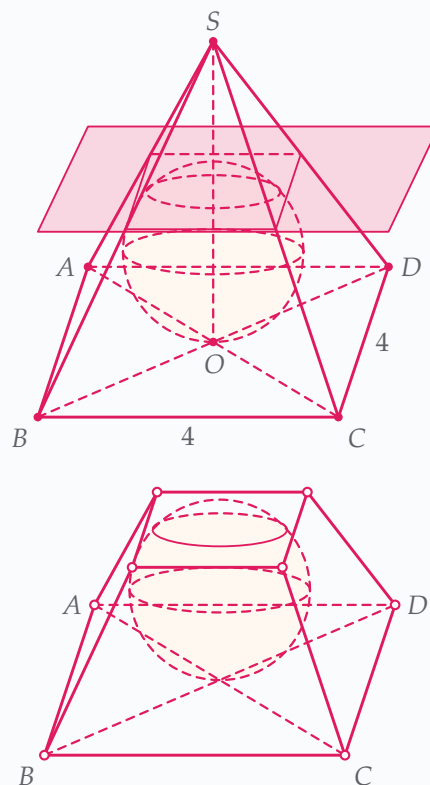
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$, có đồ thị (C) .

- a) Tập giá trị của hàm số là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
 b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(1; 3)$.
 c) Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là A, B . Điểm $M(3; 7)$ thuộc đường thẳng (AB) .

- d) Khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{2}$.

Câu 4. Một mô hình thủy tinh được cấu tạo bởi một khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 4, O là giao điểm của AC, BD và một khối cầu (S) nội tiếp khối chóp. Biết $V_{(S)} = \frac{1}{3}R_{(S)}S_{tp}$ trong đó $(R_{(S)})$: bán kính mặt cầu nội tiếp khối chóp, S_{tp} là diện tích toàn phần của hình chóp, $V_{(S)}$ thể tích khối cầu (S) .

- a) Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt đáy $(ABCD)$ bằng $\sqrt{2}$.
- b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).
- c) Gọi α là một góc phẳng của góc nhị diện $[O, SD, C]$, giá trị $\tan \alpha = 2$.
- d) Để sử dụng phần không gian bên trong của khối cầu (S) để nuôi cá, người ta cắt mô hình này bằng một mặt phẳng (β) song song với mặt đáy $(ABCD)$. Để tối ưu hóa phần không gian này thì tổng chu vi giữa giao tuyến của mặt phẳng (β) và mô hình này phải nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất này bằng 18,89 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 0]$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

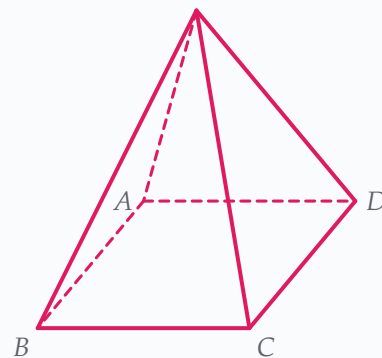
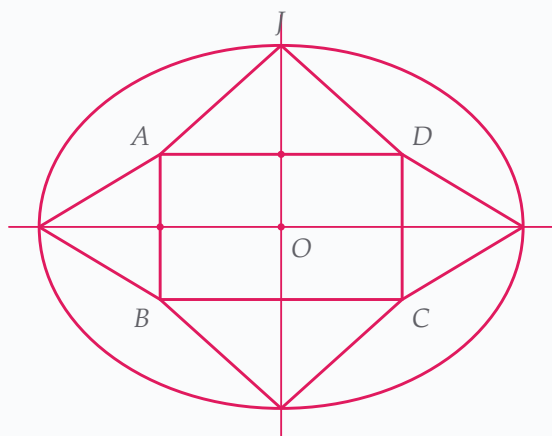
Câu 2. Một cá nhân gây thiệt hại cho tài sản nhà nước với tổng số tiền là 450 (triệu đồng). Để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, người này được yêu cầu phải hoàn thành việc bồi thường ít nhất 60% tổng số tiền gốc trong vòng 6 tháng đầu tiên. Phương thức bồi thường được thỏa thuận như sau: Tháng thứ nhất người đó nộp m (triệu đồng); kể từ tháng thứ hai, mỗi tháng số tiền nộp bằng 90% số tiền đã nộp ở tháng liền trước đó. Số tiền m nhỏ nhất mà người này phải nộp trong tháng đầu tiên là bao nhiêu để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$ và $D'(3; 5; 4)$. Gọi tọa độ điểm $A'(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $2a + b + c$?

KQ:

Câu 4. Cho một tấm bìa hình elip tâm O có độ dài trục lớn và trục bé lần lượt bằng 8 và 6. Một hình chữ nhật có các cạnh song song hoặc vuông góc với hai trục của elip như hình vẽ, người ta tiến hành cắt ra các tam giác cân từ tấm bìa có một cạnh chung với hình chữ nhật sao cho có thể gấp vụn thành một hình chóp tứ giác có tất cả các cạnh bên bằng nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp tạo thành bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

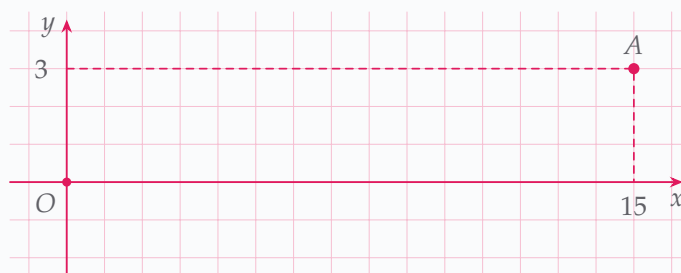


KQ:

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , một con ếch đang đứng tại điểm O và bắt đầu nhảy. Ở mỗi bước, con ếch nhảy ngẫu nhiên theo một trong hai cách sau:

- Bước lên: Sang phải một đơn vị theo trục Ox và lên trên một đơn vị theo trục Oy .
- Bước xuống: Sang phải một đơn vị theo trục Ox và xuống dưới một đơn vị theo trục Oy .

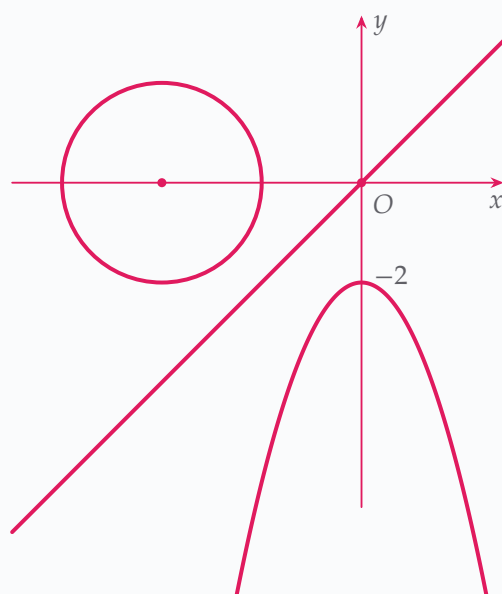
Xác suất để con ếch đến được điểm $A(15;3)$ sau 15 lần nhảy và không nhảy xuống điểm có tung độ âm bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P) : y = -x^2 - 2$ và đường tròn $(C) : (x+4)^2 + y^2 = 4$. Một chất điểm xuất phát từ một điểm bất kì thuộc (P) di chuyển đến đường tròn $(d) : y = x$, tiếp tục di chuyển trên đường tròn (d) một đoạn bằng 1 sau đó di chuyển đến một điểm thuộc đường tròn (C) . Tính quãng đường ngắn nhất mà chất điểm hoàn thành chặng đường trên? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:



— HẾT —

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Mai Thành Luân (Semiconductor Engineer)

SĐT / ZALO

0854070701

TIKTOK

Bao Đâu Bách Khoa (IC Design)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố xung khắc A và B có xác suất thỏa mãn $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Giá trị của $P(A \cup B)$ bằng

- A. 0,21. B. 0,4. C. 0. D. 1.

Lời giải

Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên theo quy tắc cộng xác suất

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,7 = 1.$$

Chọn đáp án D.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $u_2 = 1$. Giá trị công sai d bằng

- A. 3. B. -3. C. -2. D. 1.

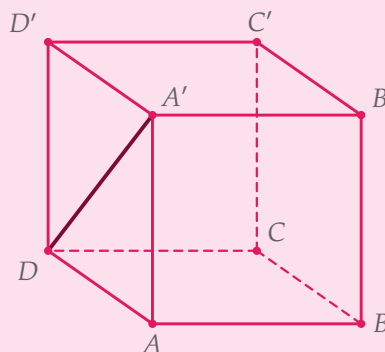
Lời giải

Công sai của cấp số cộng là $d = u_2 - u_1 = 1 - (-2) = 3$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình bên). Đường thẳng $A'D$ song song với mặt phẳng

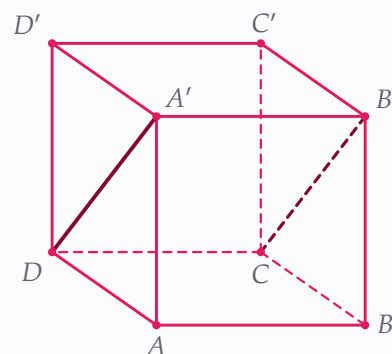
- A. $(AA'D'D)$.
B. $(A'B'CD)$.
C. $(BB'C'C)$.
D. $(AA'C'C)$.



Lời giải

Hai đoạn $A'B'$ và DC cùng song song và bằng AB , nên tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành. Từ đó $A'D \parallel B'C$, mà $B'C \subset (BB'C'C)$ còn $A'D$ không nằm trong mặt phẳng ấy, do đó $A'D \parallel (BB'C'C)$.

Ba mặt phẳng còn lại đều bị loại: $A'D$ nằm hẳn trong $(AA'D'D)$ và trong $(A'B'CD)$, còn với $(AA'C'C)$ thì $A'D$ cắt mặt phẳng này tại A' .



$A'D \parallel B'C$ nên $A'D \parallel (BB'C'C)$

Chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 2]$ như sau:

x	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-4	1	0	5	

Hàm số đồng biến trên khoảng

A. $(-1; 0) \cup (1; 2)$.

B. $(0; 5)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

• **Đọc bảng biến thiên.** Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có $f'(x) > 0$ với $x \in (-1; 0)$ và $x \in (1; 2)$, còn $f'(x) < 0$ với $x \in (0; 1)$. Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$, $(1; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

• **Chọn khoảng.** Khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ nằm trong khoảng $(1; 2)$, nên hàm số đồng biến trên $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

• **Loại các phương án khác.** Tập $(-1; 0) \cup (1; 2)$ không phải là một khoảng, và hàm số cũng không đồng biến trên tập này: khi x tăng từ một giá trị gần 0 (bên trái 0) sang một giá trị gần 1 (bên phải 1) thì giá trị của hàm số giảm từ gần 1 xuống gần 0. Các khoảng $(0; 5)$ và $(-1; 1)$ đều chứa khoảng $(0; 1)$, nơi hàm số nghịch biến.

Chọn đáp án D.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;1)$, $B(0;-3;1)$ và $C(4;-1;4)$. Số đo góc $\widehat{BAC}$ bằng

- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -1; 3)$.

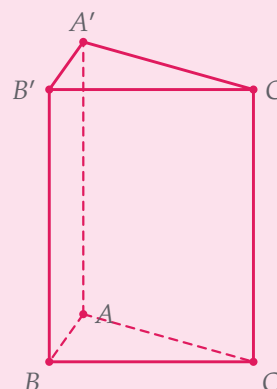
Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 0$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, tức là $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (xem hình bên).

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$.
 B. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{BC}$.
 D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC'}$.



Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành trong hình bình hành $ABB'A'$, ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA'} \neq \overrightarrow{AB}$, nên A sai.

Theo quy tắc hiệu hai vector, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, là vector đối của $\overrightarrow{AC}$, nên B sai.

Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$. Nếu hai vector này bằng nhau thì $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$, trái với giả thiết A, B, C không thẳng hàng. Vậy D sai.

Còn theo quy tắc ba điểm thì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - cb \neq 0$) có đồ thị (C). Có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		—	—
$f(x)$	-2	$+\infty$	$-\infty$

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(a;b)$. Giá trị $2a + b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. -2. D. -1.

Lời giải

• **Độc hai đường tiệm cận từ bảng biến thiên.** Khi $x \rightarrow 1^-$ thì $f(x) \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow 1^+$ thì $f(x) \rightarrow -\infty$, nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng. Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $f(x) \rightarrow -2$, nên đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang.

• **Tâm đối xứng.** Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng, do đó $I(1; -2)$. Theo cách kí hiệu của đề, $a = 1, b = -2$ và $2a + b = 2 - 2 = 0$.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hóa nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 300x + 30000$. Chi phí để sản xuất thêm đơn vị hàng hóa thứ 301 xấp xỉ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của triệu đồng).

- A. 3302,7. B. 3270,0. C. 32,5. D. 32,7.

Lời giải

Chi phí để sản xuất thêm đơn vị hàng hóa thứ 301 là $C(301) - C(300)$.

Ta có

$$\begin{aligned} C(300) &= \frac{1}{8} \cdot 300^3 - \frac{5}{2} \cdot 300^2 + 300 \cdot 300 + 30000 \\ &= 3\,375\,000 - 225\,000 + 90\,000 + 30\,000 = 3\,270\,000, \\ C(301) &= \frac{1}{8} \cdot 301^3 - \frac{5}{2} \cdot 301^2 + 300 \cdot 301 + 30000 \\ &= 3\,408\,862,625 - 226\,502,5 + 90\,300 + 30\,000 = 3\,302\,660,125. \end{aligned}$$

Do đó $C(301) - C(300) = 32\,660,125$ (nghìn đồng) $\approx 32,7$ (triệu đồng).

Chọn đáp án D.

Câu 9. Mùa giải 2026 – 2027, giải vô địch quốc gia Tây Ban Nha (La Liga) có 20 đội bóng tham gia. Các đội bóng đấu vòng tròn hai lượt đi và về. Toàn bộ mùa giải có bao nhiêu trận đấu?

- A. 400. B. 190. C. 380. D. 200.

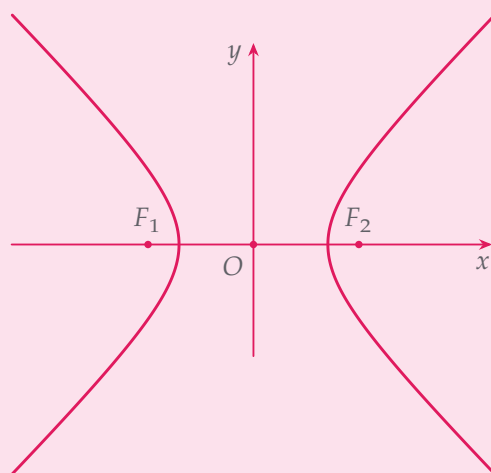
Lời giải

Mỗi trận đấu lượt đi ứng với một tập hợp gồm hai đội, nên số trận lượt đi là $C_{20}^2 = 190$. Lượt về cũng có 190 trận. Vậy toàn bộ mùa giải có $2 \cdot 190 = 380$ trận.

Chọn đáp án C.

Câu 10. Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho hypebol (H) có dạng như hình vẽ bên và độ dài trục thực bằng 16. Điểm $N(-10; y_N) \in (H)$, giá trị $F_1N - F_2N$ bằng

- A. -10.
B. -16.
C. 16.
D. 10.



Lời giải

Hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $2a = 16$, tức $a = 8$; hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ với $c > 0$.

• **So sánh F_1N và F_2N .** Với $N(-10; y_N)$ ta có

$$F_1N^2 - F_2N^2 = [(-10 + c)^2 + y_N^2] - [(-10 - c)^2 + y_N^2] = -40c < 0,$$

nên $F_1N < F_2N$.

Theo định nghĩa hypebol thì $|F_1N - F_2N| = 2a = 16$; kết hợp với $F_1N < F_2N$ ta được $F_1N - F_2N = -16$.

Chọn đáp án B.

Câu 11. Khảo sát thời gian (đơn vị: phút) học trực tuyến trong một ngày của 42 học sinh, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian học trực tuyến	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số học sinh	4	8	14	7	4	5

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên thuộc nhóm nào sau đây?

- A.** [30; 40). **B.** [40; 50). **C.** [50; 60). **D.** [60; 70).

Lời giải

Cỡ mẫu $n = 42$. Tần số tích lũy của các nhóm lần lượt là 4; 12; 26; 33; 37; 42.

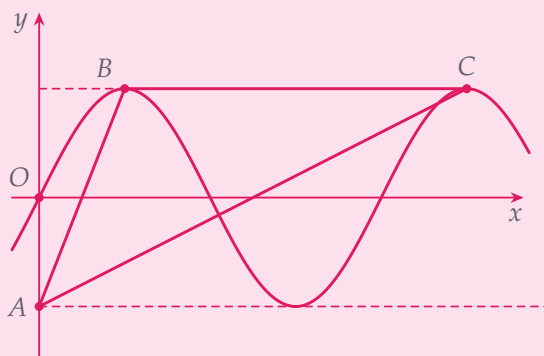
Tứ phân vị thứ ba Q_3 ứng với vị trí $\frac{3n}{4} = 31,5$. Vì $26 < 31,5 \leq 33$ nên Q_3 thuộc nhóm [40; 50). Cụ thể,

$$Q_3 = 40 + \frac{31,5 - 26}{7} \cdot 10 \approx 47,86 \in [40; 50).$$

Chọn đáp án B.

Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y = 2 \sin x$ như hình vẽ bên. Tính diện tích tam giác ABC?

- A.** 2π .
B. 3π .
C. 4π .
D. 5π .



Lời giải

• **Tọa độ ba đỉnh.** Hàm số $y = 2 \sin x$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Theo hình vẽ, B và C là hai điểm cực đại liên tiếp, A thuộc trục tung ở mức $y = -2$, nên

$$A(0; -2), \quad B\left(\frac{\pi}{2}; 2\right), \quad C\left(\frac{5\pi}{2}; 2\right).$$

• **Diện tích.** Cạnh BC nằm trên đường thẳng $y = 2$, có độ dài $BC = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng $2 - (-2) = 4$. Vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 4 = 4\pi.$$

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một hộp đựng 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp, gọi A là biến cố: “Rút được thẻ đánh số chia hết cho 2” và B là biến cố: “Rút được thẻ đánh số chia hết cho 3”.

- a) $P(A) = 0,5$.
- b) Xác suất để tấm thẻ được rút ra chia hết cho 6 bằng $\frac{1}{6}$.
- c) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.
- d) Xác suất để tấm thẻ được rút ra không chia hết cho 2 và cho 3 bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Không gian mẫu có $n(\Omega) = 30$ kết quả đồng khả năng.

- a) Từ 1 đến 30 có 15 số chia hết cho 2, nên $P(A) = \frac{15}{30} = 0,5$. Vậy a) đúng.
- b) Các số chia hết cho 6 là 6, 12, 18, 24, 30, gồm 5 số. Xác suất cần tìm bằng $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Vậy b) đúng.
- c) Có 10 số chia hết cho 3 nên $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Biến cố AB là “rút được thẻ đánh số chia hết cho 6”, $P(AB) = \frac{1}{6}$. Theo công thức cộng xác suất

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Vậy c) đúng.

- d) Biến cố “thẻ được rút ra không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3” là biến cố đối của $A \cup B$, nên xác suất của biến cố này bằng $1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Vậy d) đúng.

Đáp số. a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -1; 4)$, $B(-2; 2; 3)$ và hai điểm M, N thay đổi sao cho M luôn thuộc mặt phẳng (Oxy) và $\overrightarrow{MN} = (-2; -2; 1)$.

- a) Hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(0; 1; 4)$.
- b) Điểm $D(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NM}$, khi đó $a + b + c = 1$.
- c) Điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn A, B, C thẳng hàng, khi đó $3\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{CB}$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của $AM + MN + NB$ bằng 12.

Lời giải

- **a)** Hình chiếu vuông góc của $A(3; -1; 4)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $H(3; -1; 0)$, khác $(0; 1; 4)$. Vậy a) sai.
- **b)** Ta có $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} = (2; 2; -1)$. Từ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NM}$ suy ra $D(-2 + 2; 2 + 2; 3 - 1) = D(0; 4; 2)$, do đó $a + b + c = 6$. Vậy b) sai.
- **c)** Gọi $C(x; y; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5; 3; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (x - 3; y + 1; -4)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, tức là

$$x - 3 = -5k, \quad y + 1 = 3k, \quad -4 = -k \implies k = 4, \quad x = -17, \quad y = 11.$$

Vậy $C(-17; 11; 0)$, $\overrightarrow{CA} = (20; -12; 4)$, $\overrightarrow{CB} = (15; -9; 3)$ và $3\overrightarrow{CA} = (60; -36; 12) = 4\overrightarrow{CB}$. Vậy c) đúng.

- **d)** Độ dài $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ không đổi. Lấy điểm $D(0; 4; 2)$ như ở ý b), khi đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DB}$, suy ra $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{MD}$ và $NB = MD$. Do đó

$$AM + MN + NB = AM + MD + 3.$$

Hai điểm A và D nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) (vì $z_A = 4 > 0$, $z_D = 2 > 0$). Gọi $A'(3; -1; -4)$ là điểm đối xứng với A qua (Oxy) , thì $AM = A'M$ với mọi $M \in (Oxy)$ và

$$AM + MD = A'M + MD \geq A'D = \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 + 1)^2 + (2 + 4)^2} = \sqrt{70}.$$

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn $A'D$ với (Oxy) (giao điểm này tồn tại vì A' và D nằm khác phía đối với (Oxy)). Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + MN + NB$ là $\sqrt{70} + 3 \approx 11,37$, khác 12. Vậy d) sai.

Đáp số. a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$, có đồ thị (C) .

- a)** Tập giá trị của hàm số là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- b)** Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(1; 3)$.
- c)** Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là A, B . Điểm $M(3; 7)$ thuộc đường thẳng (AB) .
- d)** Khoảng cách từ điểm $O(0; 0)$ đến đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

- **Khảo sát.** Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Viết lại $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$, ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

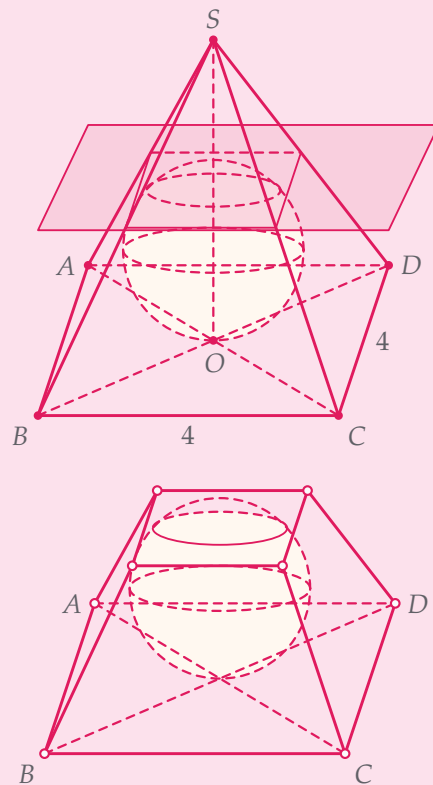
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$; đạt cực đại tại $x = 0$ với $f(0) = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 2$ với $f(2) = 5$. Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- **a)** Từ sự biến thiên trên, tập giá trị của hàm số là $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. Vậy a) sai.
- **b)** Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng; vì $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$ nên đường thẳng $y = x + 2$ là tiệm cận xiên. Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai tiệm cận, $I(1; 3)$. Vậy b) đúng.
- **c)** Hai điểm cực trị là $A(0; 1)$ và $B(2; 5)$. Đường thẳng AB có hệ số góc $\frac{5-1}{2-0} = 2$ nên có phương trình $y = 2x + 1$. Với $x = 3$ thì $y = 7$, tức $M(3; 7) \in AB$. Vậy c) đúng.
- **d)** Tiệm cận xiên $\Delta : x - y + 2 = 0$. Khoảng cách từ O đến Δ là $\frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$. Vậy d) đúng.

Đáp số. a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng.

Câu 4. Một mô hình thủy tinh được cấu tạo bởi một khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 4, O là giao điểm của AC, BD và một khối cầu (S) nội tiếp khối chóp. Biết $V_{(S)} = \frac{1}{3}R_{(S)}S_{tp}$ trong đó $(R_{(S)})$: bán kính mặt cầu nội tiếp khối chóp, S_{tp} là diện tích toàn phần của hình chóp, $V_{(S)}$ thể tích khối cầu (S) .

- a)** Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt đáy $(ABCD)$ bằng $\sqrt{2}$.
- b)** Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).
- c)** Gọi α là một góc phẳng của góc nhị diện $[O, SD, C]$, giá trị $\tan \alpha = 2$.
- d)** Để sử dụng phần không gian bên trong của khối cầu (S) để nuôi cá, người ta cắt mô hình này bằng một mặt phẳng (β) song song với mặt đáy $(ABCD)$. Để tối ưu hóa phần không gian này thì tổng chu vi giữa giao tuyến của mặt phẳng (β) và mô hình này phải nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất này bằng 18,89 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

• **Các yếu tố của hình chóp.** Vì $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 và $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông. Ta có $AC = 4\sqrt{2}$, $OA = OC = OD = 2\sqrt{2}$.

• **a)** Trong tam giác vuông SOA : $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng $2\sqrt{2}$, khác $\sqrt{2}$. Vậy a) sai.

• **b)** $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 16 = \frac{32\sqrt{2}}{3}$. Vậy b) đúng.

• **c)** Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD . Vì $OC \perp BD$ và $OC \perp SO$ nên $OC \perp (SBD)$, suy ra $OC \perp SD$. Cùng với $OK \perp SD$ ta được $SD \perp (OKC)$, do đó $SD \perp CK$. Vậy $\widehat{OKC}$ là góc phẳng của góc nhị diện $[O, SD, C]$, tức $\alpha = \widehat{OKC}$.

Tam giác OKC vuông tại O (vì $OC \perp (SBD) \supset OK$). Trong tam giác vuông SOD , đường cao $OK = \frac{SO \cdot OD}{SD} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{4} = 2$. Suy ra

$$\tan \alpha = \frac{OC}{OK} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Vậy c) sai.

• **d)** Trước hết tìm bán kính mặt cầu nội tiếp. Hệ thức $V = \frac{1}{3}R_{(S)}S_{tp}$ (với V là thể tích khối chóp) cho

$$S_{tp} = 4^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 16 + 16\sqrt{3}, \quad R_{(S)} = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{32\sqrt{2}}{16(1 + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035.$$

Đặt $r = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tâm I của mặt cầu thuộc SO và $OI = r$.

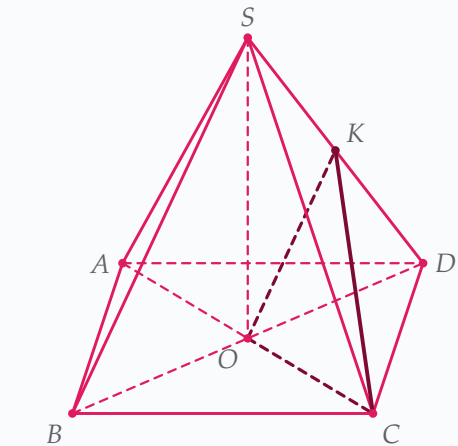
Gọi h là khoảng cách từ (β) đến mặt đáy. Mặt phẳng (β) cắt khối cầu khi và chỉ khi $0 < h < 2r$. Xét thiết diện của mô hình bởi mặt phẳng (SMN) , với M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD ; thiết diện này chứa đường tròn lớn của mặt cầu và bị (β) cắt theo đường thẳng EF (hình bên).

Giao tuyến của (β) với khối chóp là hình vuông; theo định lý Thalès, cạnh của hình vuông này bằng $x = 4 \cdot \frac{SO - h}{SO} = 4 - \sqrt{2}h$, chu vi bằng $16 - 4\sqrt{2}h$.

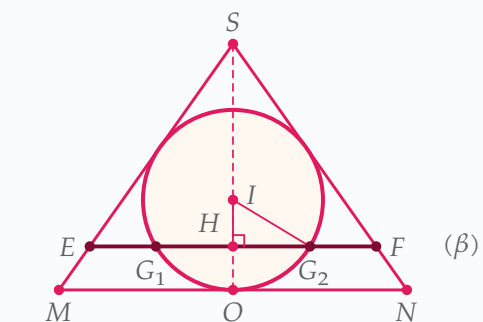
Giao tuyến của (β) với khối cầu là đường tròn bán kính $\rho = HG_2 = \sqrt{IG_2^2 - IH^2} = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$, chu vi bằng $2\pi\sqrt{2rh - h^2}$.

Tổng chu vi hai giao tuyến là

$$P(h) = 16 - 4\sqrt{2}h + 2\pi\sqrt{2rh - h^2}, \quad 0 < h < 2r.$$



$OC \perp (SBD)$ nên tam giác OKC vuông tại O



Thiết diện phẳng qua S, O và trung điểm M, N của BC, AD

Ta có

$$P'(h) = -4\sqrt{2} + \frac{2\pi(r-h)}{\sqrt{2rh-h^2}}.$$

Với $r \leq h < 2r$ thì $P'(h) < 0$. Với $0 < h < r$, $P'(h) = 0$ khi và chỉ khi $\pi(r-h) = 2\sqrt{2}\sqrt{2rh-h^2}$, tức $\pi^2(r-h)^2 = 8[r^2 - (r-h)^2]$, hay

$$(r-h)^2 = \frac{8r^2}{\pi^2 + 8} \Leftrightarrow h = h_0 = r \left(1 - \sqrt{\frac{8}{\pi^2 + 8}} \right) \approx 0,343.$$

Vì $\frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}}$ giảm trên $(0; r)$ và tiến tới $+\infty$ khi $h \rightarrow 0^+$ nên $P'(h) > 0$ trên $(0; h_0)$ và $P'(h) < 0$ trên $(h_0; 2r)$. Do đó $P(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = h_0$:

$$P(h_0) = 24 - 8\sqrt{3} + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{\pi^2 + 8} \approx 18,90,$$

còn khi $h \rightarrow 0^+$ thì $P(h) \rightarrow 16$ và khi $h \rightarrow 2r^-$ thì $P(h) \rightarrow 32 - 16\sqrt{3} \approx 4,29$. Như vậy tổng chu vi không có giá trị nhỏ nhất trên $(0; 2r)$; giá trị 18,89 nêu trong đề xấp xỉ giá trị lớn nhất chứ không phải giá trị nhỏ nhất của tổng chu vi. Vậy d) sai.

Đáp số. a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 0]$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Lời giải

Hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$ và

$$y' = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = (-x^2 + x)e^{-x} = x(1 - x)e^{-x}.$$

Với $x \in [-1; 0]$ ta có $x \leq 0$, $1 - x > 0$, $e^{-x} > 0$ nên $y' \leq 0$; hàm số nghịch biến trên $[-1; 0]$. Do đó

$$\max_{[-1; 0]} y = y(-1) = e, \quad \min_{[-1; 0]} y = y(0) = 1.$$

Tổng cần tìm bằng $e + 1 \approx 3,72 \approx 3,7$.

Đáp số. 3,7.

Câu 2. Một cá nhân gây thiệt hại cho tài sản nhà nước với tổng số tiền là 450 (triệu đồng). Để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự, người này được yêu cầu phải hoàn thành việc bồi thường ít nhất 60% tổng số tiền gốc trong vòng 6 tháng đầu tiên. Phương thức bồi thường được thoả thuận như sau: Tháng thứ nhất người đó nộp m (triệu đồng); kể từ tháng thứ hai, mỗi tháng số tiền nộp bằng 90% số tiền đã nộp ở tháng liền trước đó. Số tiền m nhỏ nhất mà người này phải nộp trong tháng đầu tiên là bao nhiêu để được giảm nhẹ trách nhiệm hình sự? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Lời giải

Số tiền nộp ở các tháng lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = m$ và công bội $q = 0,9$. Tổng số tiền nộp trong 6 tháng đầu là

$$S_6 = m \cdot \frac{1 - 0,9^6}{1 - 0,9} = 10m(1 - 0,9^6) \approx 4,6856m.$$

Yêu cầu $S_6 \geq 60\% \cdot 450 = 270$, tức là

$$m \geq \frac{270}{10(1 - 0,9^6)} \approx 57,62.$$

Vậy số tiền m nhỏ nhất, làm tròn đến hàng đơn vị, là 58 (triệu đồng).

Đáp số. 58.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$ và $D'(3; 5; 4)$. Gọi tọa độ điểm $A'(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $2a + b + c$?

KQ:

Lời giải

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}$ và $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Từ $\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}$, cộng vế theo vế ta được

$$2\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OC}.$$

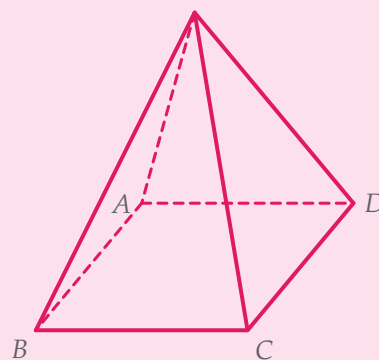
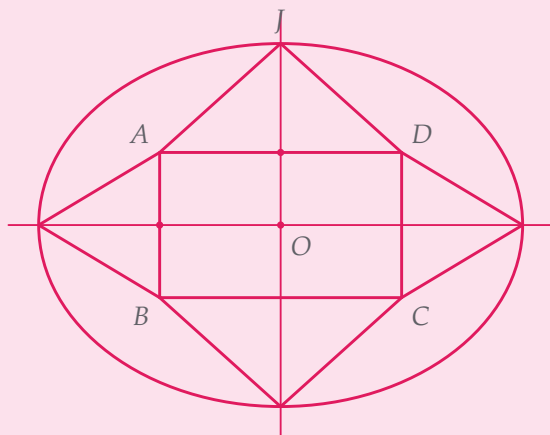
Do đó

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2} [(-3; 2; 1) + (-2; 1; 1) + (3; 5; 4) - (4; 2; 0)] = \frac{1}{2} (-6; 6; 6) = (-3; 3; 3).$$

Vậy $A'(-3; 3; 3)$ và $2a + b + c = -6 + 3 + 3 = 0$.

Đáp số. 0.

Câu 4. Cho một tấm bìa hình elip tâm O có độ dài trục lớn và trục bé lần lượt bằng 8 và 6. Một hình chữ nhật có các cạnh song song hoặc vuông góc với hai trục của elip như hình vẽ, người ta tiến hành cắt ra các tam giác cân từ tấm bìa có một cạnh chung với hình chữ nhật sao cho có thể gấp vắn thành một hình chóp tứ giác có tất cả các cạnh bên bằng nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp tạo thành bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

Lời giải

• **Đặt ẩn.** Chọn hệ trục Oxy có gốc tại tâm elip, trục Ox theo trục lớn. Elip có $a = 4, b = 3$; bốn đỉnh của elip là $J(0;3), E(-4;0), G(0;-3), H(4;0)$ và đây là đỉnh của bốn tam giác cân (theo hình vẽ). Gọi $A(-p;q), B(-p;-q), C(p;-q), D(p;q)$ với $0 < p < 4, 0 < q < 3$ là bốn đỉnh của hình chữ nhật.

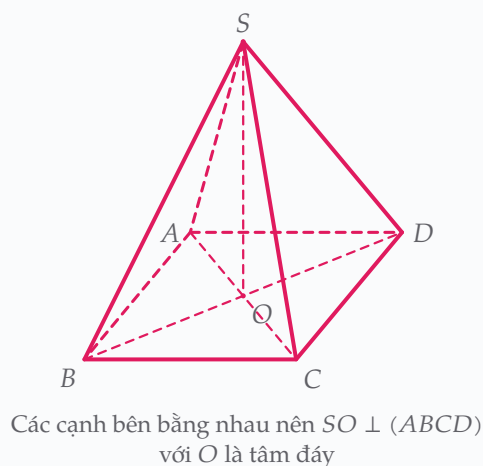
• **Điều kiện các cạnh bên bằng nhau.** Khi gấp, các cạnh bên của hình chóp là các cạnh bên của bốn tam giác cân. Do tính đối xứng, chỉ cần $JA = EA$, tức là $p^2 + (3-q)^2 = (4-p)^2 + q^2$, hay $8p - 6q = 7$, suy ra $p = \frac{6q+7}{8}$.

• **Thể tích khối chóp.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2q, AD = 2p$ và các cạnh bên bằng $l = JA$; do đó hình chiếu của S trên mặt đáy là tâm O của hình chữ nhật và chiều cao $h = \sqrt{l^2 - OA^2}$.
Vì $l^2 = JA^2 = p^2 + (3-q)^2$ và $OA^2 = p^2 + q^2$ nên

$$h = \sqrt{(3-q)^2 - q^2} = \sqrt{9-6q}, \quad 0 < q < \frac{3}{2}.$$

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4pq \cdot \sqrt{9-6q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6q+7}{2} \cdot q\sqrt{9-6q} = \frac{1}{6} (6q^2 + 7q) \sqrt{9-6q}, \quad q \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$



• **Tìm giá trị lớn nhất.** Xét $g(q) = (6q^2 + 7q)\sqrt{9 - 6q}$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned} g'(q) &= (12q + 7)\sqrt{9 - 6q} - \frac{3(6q^2 + 7q)}{\sqrt{9 - 6q}} = \frac{(12q + 7)(9 - 6q) - 3(6q^2 + 7q)}{\sqrt{9 - 6q}} \\ &= \frac{-90q^2 + 45q + 63}{\sqrt{9 - 6q}} = \frac{-9(10q^2 - 5q - 7)}{\sqrt{9 - 6q}}. \end{aligned}$$

$g'(q) = 0 \Leftrightarrow 10q^2 - 5q - 7 = 0 \Leftrightarrow q = q_0 = \frac{5 + \sqrt{305}}{20} \approx 1,123$ (nghiệm dương). Vì $g'(q) > 0$ trên $(0; q_0)$ và $g'(q) < 0$ trên $\left(q_0; \frac{3}{2}\right)$ nên g đạt giá trị lớn nhất tại q_0 . Khi đó $p_0 = \frac{6q_0 + 7}{8} \approx 1,717$, $h_0 = \sqrt{9 - 6q_0} \approx 1,504$ và

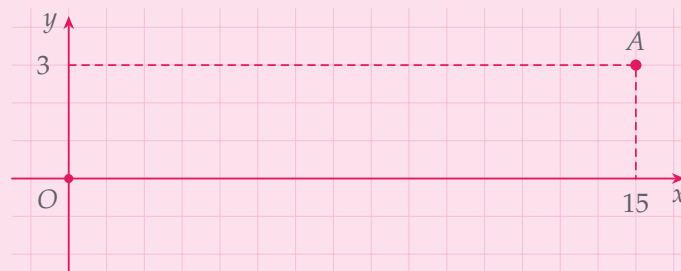
$$V_{\max} = \frac{4}{3} p_0 q_0 h_0 \approx \frac{4}{3} \cdot 1,717 \cdot 1,123 \cdot 1,504 \approx 3,87.$$

Đáp số. 3,87.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , một con ếch đang đứng tại điểm O và bắt đầu nhảy. Ở mỗi bước, con ếch nhảy ngẫu nhiên theo một trong hai cách sau:

- Bước lên: Sang phải một đơn vị theo trục Ox và lên trên một đơn vị theo trục Oy .
- Bước xuống: Sang phải một đơn vị theo trục Ox và xuống dưới một đơn vị theo trục Oy .

Xác suất để con ếch đến được điểm $A(15; 3)$ sau 15 lần nhảy và không nhảy xuống điểm có tung độ âm bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

Lời giải

Cách 1 (đếm số đường đi tới từng điểm).

Mỗi lần nhảy con ếch có hai cách chọn và các lần nhảy độc lập với nhau, nên dãy 15 lần nhảy có $n(\Omega) = 2^{15} = 32768$ kết quả đồng khả năng. Việc còn lại là đếm những dãy nhảy đưa con ếch tới $A(15; 3)$ mà không điểm nào trên đường đi có tung độ âm.

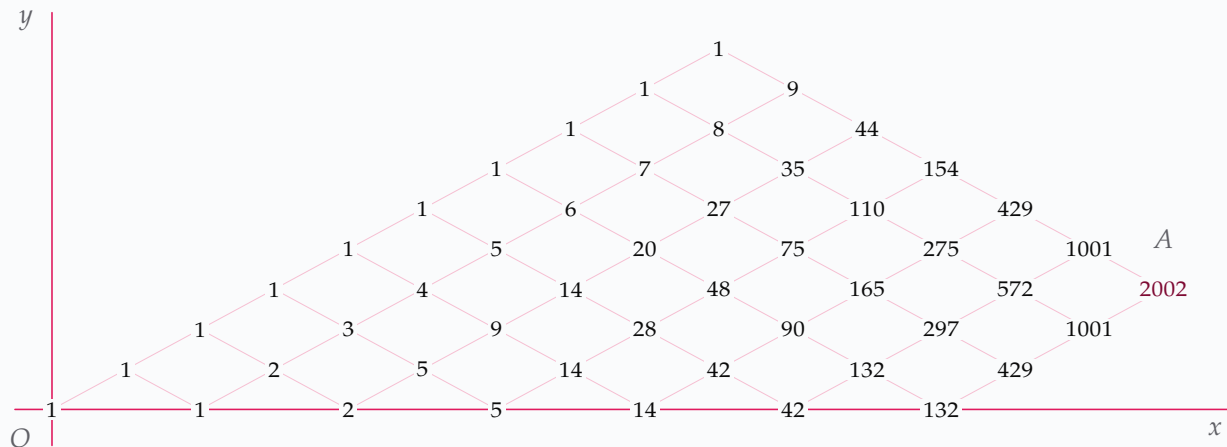
• **Công thức truy hồi.** Sau bước thứ n con ếch ở một điểm có hoành độ n . Gọi $a(n; y)$ là số đường đi thoả mãn yêu cầu, xuất phát từ O và kết thúc tại điểm $(n; y)$. Muốn tới $(n; y)$, ở bước liền trước con ếch phải ở $(n - 1; y - 1)$ rồi bước lên, hoặc ở $(n - 1; y + 1)$ rồi bước xuống. Hai khả năng đó không

thể xảy ra đồng thời, nên theo quy tắc cộng

$$a(n; y) = a(n-1; y-1) + a(n-1; y+1), \quad a(0; 0) = 1.$$

Yêu cầu không nhảy xuống điểm có tung độ âm được thể hiện ngay trong cách đếm: các điểm nằm dưới trục hoành bị loại, ta quy ước $a(n; y) = 0$ khi $y < 0$.

• **Điền số vào lưới.** Chỉ những điểm còn đi tiếp được tới $A(15; 3)$ mới cần tính, tức các điểm $(n; y)$ với $y \geq 0$ và $|3 - y| \leq 15 - n$. Xuất phát từ $a(0; 0) = 1$, mỗi số là tổng của hai số ở hai điểm kề bên trái, ta lần lượt được các giá trị sau.



Số ghi tại mỗi điểm là số đường đi hợp lệ từ O tới điểm đó

Chẳng hạn tại $(4; 2)$ ta có $a(4; 2) = a(3; 1) + a(3; 3) = 2 + 1 = 3$; tại các điểm sát trục hoành như $(4; 0)$ thì chỉ còn một số hạng, $a(4; 0) = a(3; 1) = 2$.

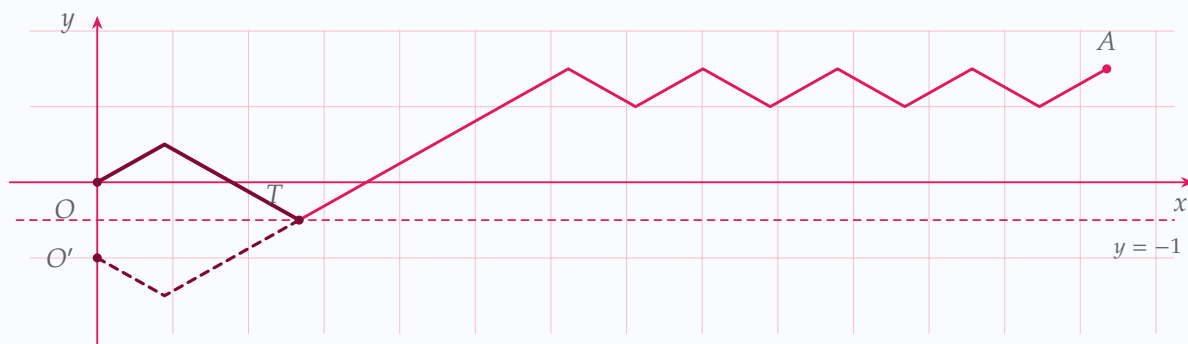
Số đường đi thuận lợi là $a(15; 3) = 1001 + 1001 = 2002$, vậy

$$P = \frac{2002}{32768} \approx 0,061 \approx 0,06.$$

Cách 2 (đếm phân bù bằng phép lấy đối xứng).

• **Bỏ tạm điều kiện về tung độ.** Trong 15 bước, gọi k là số bước lên thì số bước xuống là $15 - k$ và tung độ điểm cuối bằng $k - (15 - k) = 2k - 15$. Để tới $A(15; 3)$ phải có $k = 9$. Một đường đi hoàn toàn được xác định khi biết 9 bước nào là bước lên, nên số đường đi từ O tới A (chưa xét điều kiện tung độ) là $C_{15}^9 = 5005$.

• **Đếm những đường đi bị loại.** Một đường đi bị loại khi nó có điểm tung độ âm, mà mỗi bước chỉ thay đổi tung độ một đơn vị nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi đường đi có đi qua một điểm ở mức $y = -1$. Xét một đường như vậy và gọi T là điểm ở mức $y = -1$ mà nó gặp đầu tiên. Lấy đối xứng phần đường đi từ O đến T qua đường thẳng $y = -1$, giữ nguyên phần từ T trở đi, ta được một đường đi mới: điểm $O(0; 0)$ biến thành $O'(0; -2)$, còn T giữ nguyên, nên đó là một đường đi từ $O'(0; -2)$ tới $A(15; 3)$.



Đường đi bị loại (nét liền đậm từ O) và đường đi từ O' nhận được sau khi lấy đối xứng đoạn OT qua đường thẳng $y = -1$; hai đường trùng nhau kể từ T

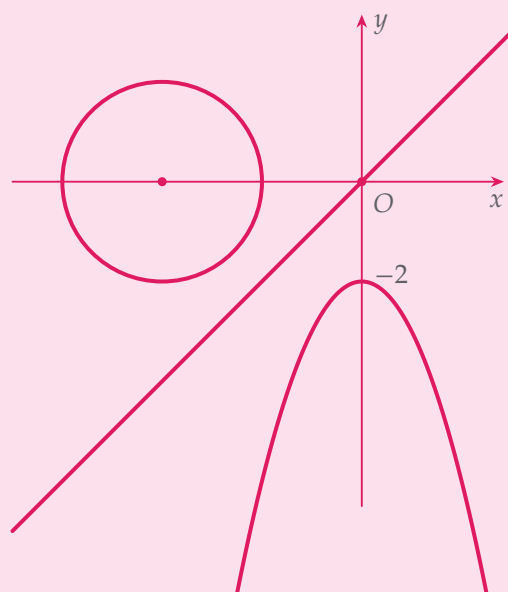
Ngược lại, mỗi đường đi từ O' tới A đều phải gặp mức $y = -1$, vì tung độ xuất phát bằng -2 , tung độ kết thúc bằng 3 và mỗi bước chỉ đổi một đơn vị. Lấy đối xứng phần đầu của nó qua $y = -1$ ta lại được một đường đi bị loại từ O tới A . Hai phép lấy đối xứng này ngược nhau, nên số đường đi bị loại đúng bằng số đường đi từ O' tới A .

Đường đi từ $O'(0; -2)$ tới $A(15; 3)$ có tung độ tăng 5 đơn vị, nên số bước lên k' thỏa mãn $2k' - 15 = 5$, tức $k' = 10$; có $C_{15}^{10} = 3003$ đường như vậy. Do đó số đường đi thuận lợi là $5005 - 3003 = 2002$, dẫn tới cùng kết quả $P = \frac{2002}{32768} \approx 0,06$.

Đáp số. 0,06.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol (P) : $y = -x^2 - 2$ và đường tròn (C) : $(x+4)^2 + y^2 = 4$. Một chất điểm xuất phát từ một điểm bất kì thuộc (P) di chuyển đến đường tròn (d) : $y = x$, tiếp tục di chuyển trên đường tròn (d) một đoạn bằng 1 sau đó di chuyển đến một điểm thuộc đường tròn (C) . Tính quãng đường ngắn nhất mà chất điểm hoàn thành chặng đường trên? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:



Lời giải

Cách 1 (dùng vectơ và đạo hàm).

• **Kí hiệu các điểm.** Theo phương trình và hình vẽ, $(d) : y = x$ là một đường thẳng. Gọi $M \in (P)$ là điểm xuất phát, $N \in (d)$ là điểm chất điểm tới (d) , $N' \in (d)$ với $NN' = 1$ và $K \in (C)$ là điểm kết thúc. Quãng đường là

$$L = MN + NN' + N'K = MN + 1 + N'K.$$

• **Thu gọn $N'K$.** Đường tròn (C) có tâm $I(-4;0)$, bán kính $R = 2$. Khoảng cách từ I đến (d) bằng $\frac{|-4-0|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2$ nên mọi điểm của (d) nằm ngoài (C) ; do đó $N'K \geq N'I - 2$, dấu bằng khi K là giao điểm của đoạn $N'I$ với (C) . Suy ra

$$L \geq MN + N'I - 1.$$

• **Thu gọn $N'I$.** Đặt $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là vectơ đơn vị của (d) ; ta có $\overrightarrow{NN'} = \varepsilon \vec{v}$ với $\varepsilon = 1$ hoặc $\varepsilon = -1$. Gọi I_ε là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{I_\varepsilon I} = \varepsilon \vec{v}$, khi đó $NN'I I_\varepsilon$ là hình bình hành nên $N'I = NI_\varepsilon$. Cụ thể

$$I_1 \left(-4 + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ khi } \varepsilon = -1,$$

$$I_2 \left(-4 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ khi } \varepsilon = 1.$$

• **Hai phía của (d) .** Với mọi điểm $(x; y) \in (P)$ ta có $y - x = -x^2 - x - 2 < 0$ (tam thức có $\Delta = 1 - 8 < 0$), nên (P) nằm trọn về phía $y < x$ của (d) . Với I_1 và I_2 đều có $y - x = 4 > 0$, nên chúng nằm ở phía còn lại. Do đó với mọi $N \in (d)$,

$$MN + NI_\varepsilon \geq MI_\varepsilon,$$

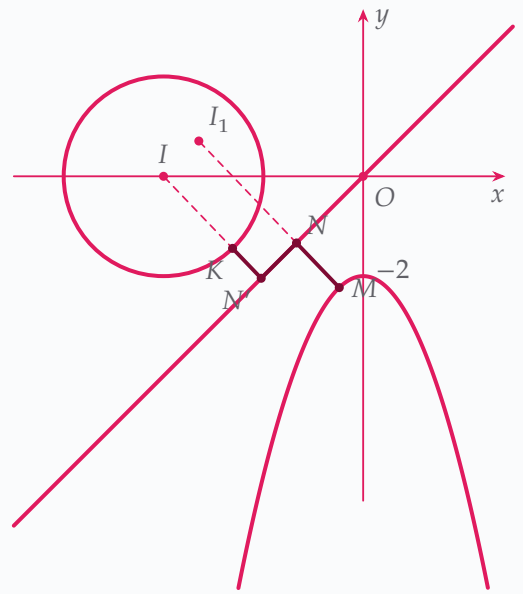
dấu bằng khi N là giao điểm của đoạn MI_ε với (d) . Vậy $L \geq MI_\varepsilon - 1 \geq d(I_\varepsilon, (P)) - 1$.

• **Khoảng cách từ I_ε đến (P) .** Với $I_\varepsilon(x_0; y_0)$ và $M(t; -t^2 - 2) \in (P)$, đặt $\varphi(t) = MI_\varepsilon^2 = (t - x_0)^2 + (t^2 + 2 + y_0)^2$. Ta có

$$\varphi'(t) = 2(t - x_0) + 4t(t^2 + 2 + y_0) = 2[2t^3 + (5 + 2y_0)t - x_0].$$

Vì $5 + 2y_0 > 0$ trong cả hai trường hợp nên hàm số $2t^3 + (5 + 2y_0)t - x_0$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $\varphi'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương đúng một lần và φ đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm duy nhất t_ε của phương trình $\varphi'(t) = 0$.

- Với I_1 : $2t^3 + (5 + \sqrt{2})t + 4 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, giải bằng máy tính cầm tay được $t_1 \approx -0,479$; khi đó $M_1(-0,479; -2,230)$ và $M_1 I_1 \approx 4,067$.
- Với I_2 : $2t^3 + (5 - \sqrt{2})t + 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ cho $t_2 \approx -0,903$; khi đó $M_2(-0,903; -2,815)$ và $M_2 I_2 \approx 4,349$.



Đường đi ngắn nhất $M \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow K$; M, N, I_1 thẳng hàng

Vậy quãng đường ngắn nhất là

$$L_{\min} = M_1 I_1 - 1 \approx 4,067 - 1 = 3,067 \approx 3,1,$$

đạt được khi chất điểm xuất phát từ M_1 , tới (d) tại $N = M_1 I_1 \cap (d)$, đi trên (d) về phía tâm I một đoạn bằng 1 tới N' , rồi đi thẳng tới giao điểm K của đoạn $N'I$ với (C) .

Cách 2 (dùng phép tịnh tiến và bảng giá trị).

Vẫn kí hiệu M, N, N', K như trên và dùng lại hình ở Cách 1.

• **Rút gọn chặng cuối.** Với ba điểm N', K, I ta luôn có $N'K \geq N'I - KI = N'I - 2$, dấu bằng khi K nằm trên đoạn $N'I$, tức K là giao điểm của đoạn ấy với (C) . Khoảng cách từ $I(-4;0)$ đến (d) bằng $\frac{|-4-0|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 = R$, nên mọi điểm của (d) đều nằm ngoài (C) và giao điểm nói trên luôn tồn tại. Do đó

$$L = MN + 1 + N'K \geq MN + N'I - 1.$$

• **Dời tâm đường tròn để bỏ đoạn trượt.** Tịnh tiến điểm I theo vectơ $\overrightarrow{N'N}$ ta được điểm J . Khi đó $\overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{N'I}$ nên $NJ = N'I$, và bất đẳng thức trên trở thành $L \geq MN + NJ - 1$. Vectơ $\overrightarrow{N'N}$ nằm trên (d) và có độ dài 1, nên J chỉ nhận một trong hai vị trí cố định

$$I_1 \left(-4 + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{hoặc} \quad I_2 \left(-4 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

tùy theo chất điểm trượt trên (d) về phía nào.

• **Duỗi thẳng đường đi.** Mọi điểm $(x; y)$ của (P) đều có $y - x = -x^2 - x - 2 < 0$ vì tam thức $-x^2 - x - 2$ có $\Delta = 1 - 8 < 0$ và hệ số $a = -1 < 0$; trong khi I_1 và I_2 đều có $y - x = 4 > 0$. Vậy M và J nằm khác phía đối với (d) , nên đoạn MJ cắt (d) và với mọi $N \in (d)$,

$$MN + NJ \geq MJ,$$

dấu bằng khi N chính là giao điểm đó. Suy ra $L \geq MJ - 1$, nghĩa là quãng đường ngắn nhất ứng với vị trí M trên (P) làm MJ nhỏ nhất.

• **Tìm MJ nhỏ nhất bằng bảng giá trị.** Đặt $M(t; -t^2 - 2)$ và $J(x_0; y_0)$, khi đó

$$f(t) = MJ = \sqrt{(t - x_0)^2 + (t^2 + 2 + y_0)^2}.$$

Vì $f(t) \rightarrow +\infty$ khi $|t| \rightarrow +\infty$ nên f có giá trị nhỏ nhất. Lập bảng giá trị của f bằng máy tính cầm tay với bước 0,5 trên đoạn $[-3; 1]$:

t	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(t)$ với $J = I_1$	11,71	8,99	6,83	5,27	4,36	4,07	4,26	4,81	5,67
$f(t)$ với $J = I_2$	10,43	7,86	5,95	4,78	4,36	4,48	4,88	5,43	6,15

Với $J = I_1$, giá trị nhỏ nhất rơi vào lân cận $t = -0,5$; thu hẹp bước về 0,1 rồi 0,01 quanh đó được $\min f \approx 4,067$. Làm tương tự với $J = I_2$, giá trị nhỏ nhất rơi vào lân cận $t = -0,9$ và bằng khoảng 4,349. Vị trí $J = I_1$ cho kết quả nhỏ hơn, vậy

$$L_{\min} \approx 4,067 - 1 = 3,067 \approx 3,1.$$

Trên hình, ở đường đi ngắn nhất hai đoạn MN và $N'K$ song song với nhau, vì cùng phương với $\overrightarrow{N'I}$; đường đi tối ưu vì thế có dạng một bậc thang.

Đáp số. 3,1.

— HẾT —

BẢNG ĐÁP ÁN

Phần I – Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	A	C	D	D	C	A	D	C	B	B	C

Phần II	a)	b)	c)	d)
Câu 1	Đúng	Đúng	Đúng	Đúng
Câu 2	Sai	Sai	Đúng	Sai
Câu 3	Sai	Đúng	Đúng	Đúng
Câu 4	Sai	Đúng	Sai	Sai

Phần III – Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	3,7	58	0	3,87	0,06	3,1