

CHUYÊN ĐỀ

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ, LƯỢNG GIÁC GIẢI BÀI TOÁN TÌM GTLN - GTNN MÔĐUN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

 Lưu ý:

2. Bất đẳng thức tam giác

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$.
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$.
- $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$.
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$.

3. Bất đẳng thức AM-GM

Với $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm ta luôn có $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, n là số tự nhiên lớn hơn 1. Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

4. Bất đẳng thức Bunyakovsky

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

B. BÀI TẬP

Kỹ thuật 1: Đánh giá hai modun với nhau

Kỹ thuật này chúng ta tận dụng các phép đánh giá

➤ $|a + b| \leq |a| + |b|$

➤ $|a + b| \geq |a| - |b|$

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}|$ là

A. $\sqrt{5}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{2}$.

Phân tích

- Nhận thấy bên trong mô đun chỉ có 1 vị trí chứa z bởi vậy ta sẽ nghĩ đến đánh giá hai modun $|z^2 - i|$, $|z|$ với nhau.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các mô đun với nhau $|a + b| \leq |a| + |b|$ và $|a + b| \geq |a| - |b|$.

Lời giải

Ta có: $|z^2 - i| \geq |z^2| - |i| = |z|^2 - 1$. Do đó $|z|^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq |z| \leq \sqrt{2}$.

Với $z = 1 + i$, ta có $|z^2 - i| = |i| = 1$ và $|\bar{z}| = \sqrt{2}$.

Do đó $|\bar{z}|_{\max} = |z|_{\max} = \sqrt{2}$.

Vậy chọn **đáp án D**

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+1-i|$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 8.

Phân tích

- Đề bài cho $w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực nên ta tìm cách biểu diễn số phức z theo số thực đó. Sau đó ta nhận thấy z là ẩn của phương trình bậc hai. Từ đó ta sẽ tìm được $|z|$.
- Nhận thấy bên trong mô đun chỉ có 1 vị trí chứa z bởi vậy ta sẽ nghĩ đến đánh giá hai modun $|z+1-i|$, $|z|$ với nhau.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các mô đun với nhau $|a+b| \leq |a|+|b|$ và $|a+b| \geq |a|-|b|$.

Lời giải

Ta có $w = \frac{z}{2+z^2} \Leftrightarrow w(2+z^2) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{w}z + 2 = 0$ (*).

(*) là phương trình bậc hai với hệ số thực $\frac{1}{w} \in \mathbb{R}$. Vì z thỏa (*) nên z là nghiệm phương trình (*). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của (*).

Suy ra $z_1 z_2 = 2 \Rightarrow |z_1 z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1| |z_2| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Suy ra $P = |z+1-i| \leq |z| + |1-i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = 1-i$.

Vậy chọn **đáp án A**

Câu 3. Cho số phức z thỏa $|z| \geq 2$. Tìm tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

Phân tích

- Nhận thấy $\left| \frac{z+i}{z} \right|$ có thể viết lại thành $\left| 1 + \frac{i}{z} \right|$ tức là bên trong cũng chỉ có một vị trí chứa z . Nên ta tìm cách đánh giá $\left| \frac{z+i}{z} \right|$ với $|z|$.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các mô đun với nhau $|a+b| \leq |a|+|b|$ và $|a+b| \geq |a|-|b|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left| 1 + \frac{i}{z} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z = -2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z = 2i$.

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1|+3|z-i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{3}{2} \leq |z| \leq 2$.

B. $|z| > 2$.

C. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

D. $|z| < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Cách 1

Sử dụng bất đẳng thức modun, ta có

$$2\sqrt{2} \geq 2|z-1| + 3|z-i| \geq 2(|z-1| + |z-i|) \geq 2|z-1-(z-i)| = 2\sqrt{2}$$

Do đó dấu bằng phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} |z-i|=0 \\ |z-1|+|z-i|=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow z=i \Rightarrow |z|=1$$

Chọn **đáp án C**

Cách 2

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

Suy ra $2|z-1| + 3|z-i| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2MA + 3MB$ với $A(1;0), B(0;1)$.

Khi đó, điều kiện bài toán trở thành $2MA + 3MB \leq 2\sqrt{2} = 2AB$ (1).

Mặt khác, ta luôn có: $2MA + 3MB = 2(MA + MB) + MB \geq 2AB + MB$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra:

$$2AB + MB \leq 2MA + 3MB \leq 2AB \Rightarrow 2AB + MB \leq 2AB \Leftrightarrow MB \leq 0$$

$$\Rightarrow MB = 0 \Leftrightarrow M \equiv B(0;1) \Rightarrow |z| = 1 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

A. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 1$.

B. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 1$.

D. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 2$.

Phân tích

- Ta tìm cách đánh giá $|z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$ với $|z| = 1$.
- Công cụ chúng ta hay dùng để đánh giá các môđun với nhau $|a+b| \leq |a| + |b|$ và $|a+b| \geq |a| - |b|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M \leq |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5$.

Mặt khác: $M = \frac{|1-z^3|}{|1-z|} + |1+z^3| \geq \frac{|1-z^3|}{2} + \frac{|1+z^3|}{2} \geq \frac{|1-z^3+1+z^3|}{2} = 1$,

khi $z = -1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow M_{\min} = 1$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{13}$.

D. 5.

Phân tích

- Ta tìm cách đánh giá $\left|z + \frac{1}{z}\right|$ với $|z|$.

- Trước hết ta có bài toán tổng quát: Cho a, b, c là các số thực dương và số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left|az + \frac{b}{z}\right| = c$. Chứng minh rằng $\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a} \leq |z| \leq \frac{c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi z là số thuần ảo.

- Dựa vào dấu đẳng thức xảy ra ta chỉ cần tiến hành giải phương trình $az - \frac{b}{z} = c$ rồi lấy trị tuyệt đối mỗi nghiệm. Khi đó số dương nhỏ là $\min |z|$ số dương lớn là $\max |z|$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left|z - \frac{1}{|z|}\right| \leq \left|z + \frac{1}{z}\right| = 3 \Rightarrow |z|^2 - 3|z| - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq |z| \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Do đó } \min |z| = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \max |z| = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{13}$.

Kĩ thuật 2: Dùng các bất đẳng thức đại số

Kĩ thuật này chúng ta tận dụng các phép đánh giá

- Với $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm ta luôn có $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$. **C.** $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Phân tích

- Ta tìm cách biểu diễn $z + i, z - 2 - i$ theo $z - 1$. Khi đó $T = |z + i| + |z - 2 - i|$ biểu diễn được dưới dạng $\sqrt{} + \sqrt{}$ và $|z - 1|$ cũng biểu diễn được dưới dạng $\sqrt{}$
➤ Ta tìm cách đánh giá $\sqrt{} + \sqrt{}$ và $\sqrt{}$

Lời giải

Chọn B

$$T = |z + i| + |z - 2 - i| = |(z - 1) + (1 + i)| + |(z - 1) - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = z - 1. \text{ Ta có } |w| = 1 \text{ và } T = |w + (1 + i)| + |w - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = x + y.i. \text{ Khi đó } |w|^2 = 2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} T &= |(x + 1) + (y + 1)i| + |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)((x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2)} = \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 4$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $4 - \sqrt{7}$.

B. $4 + \sqrt{7}$.

C. 7.

D. $4 + \sqrt{5}$.

Phân tích

- Đề bài yêu cầu tính $M + m$ do vậy ta sẽ đi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$
- Đề bài cho $|z - 3| + |z + 3| = 8$ có 2 môđun mà môđun có thể biểu diễn qua căn. Tức là đề bài cho biết tổng hai căn. Do vậy ta sẽ đánh giá tổng hai căn với căn thứ ba.
- Công cụ để đánh giá tổng hai căn với căn thứ ba có thể dùng Bunhiacopxki.

Lời giải**Chọn B**

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } 8 = |z - 3| + |z + 3| \geq |z - 3 + z + 3| = |2z| \Leftrightarrow |z| \leq 4.$$

$$\text{Do đó } M = \max |z| = 4 \text{ khi } z = \pm 4.$$

$$\text{Mà } |z - 3| + |z + 3| = 8 \Leftrightarrow |x - 3 + yi| + |x + 3 + yi| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8 = 1 \cdot \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + 1 \cdot \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)} \sqrt{((x - 3)^2 + y^2) + ((x + 3)^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 18)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 18) \geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{7}.$$

$$\text{Do đó } m = \min |z| = \sqrt{7}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 4 + \sqrt{7}.$$

Câu 9. Tìm số phức z sao cho $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = 2 + i$.

B. $z = 5 + 5i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = 4 + 3i$.

Lời giải**Chọn B****Cách 1**

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó } |z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

$$\text{Ta có } P = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow P - 23 = 4(x - 3) + 2(y - 4)$$

$$\text{Suy ra } |P - 23| = |4(x - 3) + 2(y - 4)| \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)((x - 3)^2 + (y - 4)^2)} = \sqrt{20 \cdot 5} = 10.$$

$$\text{Suy ra } 13 \leq P \leq 33.$$

$$\text{Do đó: } P_{\max} = 33 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 4}{2} \\ 4(x - 3) + 2(y - 4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = 5 + 5i.$$

Cách 2

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó } |z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-3=\sqrt{5}\sin t \Leftrightarrow x=3+\sqrt{5}\sin t \\ y-4=\sqrt{5}\cos t \Leftrightarrow y=4+\sqrt{5}\cos t \end{cases}.$$

$$P=|z+2|^2-|z-i|^2=4x+2y+3=4(3+\sqrt{5}\sin t)+2(4+\sqrt{5}\cos t)+3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t=P-23$$

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác

$$\Rightarrow (4\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2\geq(P-23)^2\Leftrightarrow P^2-46P+429\leq 0\Leftrightarrow 13\leq P\leq 33.$$

Vậy GTLN của P là $33 \Rightarrow z=5+5i$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\leq 1$ và số phức $w=\frac{2z-i}{2+iz}$. Khi đó, kết luận nào sau đây đúng?

A. $|w|>2$.

B. $|w|\leq 1$.

C. $|w|=2$.

D. $1<|w|<2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow a^2+b^2\leq 1$ do $|z|\leq 1$.

$$|w|=\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right|=\left|\frac{2a+(2b-1)i}{(2-b)+ai}\right|=\frac{|2a+(2b-1)i|}{|(2-b)+ai|}=\sqrt{\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2}\leq 1$.

Thật vậy ta có: $4a^2+(2b-1)^2\leq(2-b)^2+a^2\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a^2+b^2\leq 1$.

Câu 11. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Giá trị lớn nhất của

biểu thức của $P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|$ bằng bao nhiêu?

A. $P_{\max}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

B. $P_{\max}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

C. $P_{\max}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

D. $P_{\max}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

Phân tích

➤ Với phép biến đổi

$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})$$

giúp ta đánh giá $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|$ và $|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức biến đổi $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|\leq\sqrt{(1^2+2^2+2^2)}\sqrt{(|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2)}=3\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Suy ra $P_{\max}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\rightarrow$ đáp án B.

Câu 12. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 4\sqrt{6}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ với $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} z_1 + z_2 = 8 + 6i \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = 8 + 6i \\ |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 8 \\ b_1 + b_2 = 6 \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 104 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 52 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \stackrel{\text{Bunh}}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2 \cdot 52} = 2\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26}$$

$\rightarrow$ đáp án B.

Cách 2: Áp dụng công thức biến đổi $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ và $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ta có:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= 2(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$\text{Suy ra } |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2} = \frac{8^2 + 6^2 + 2^2}{2} = 52 \quad (*)$$

$$P = |z_1| + |z_2| \stackrel{\text{Bunh}}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2 \cdot 52} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26} \rightarrow \text{đáp án B.}$$

Câu 13. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có: } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$$

Đặt $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ ta có:

$$A = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}$$

$$A^2 \leq (1^2 + 1^2)((a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2) = 2(2(a^2 + b^2) - 4b + 12)$$

$$= 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + 2b - 7) \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

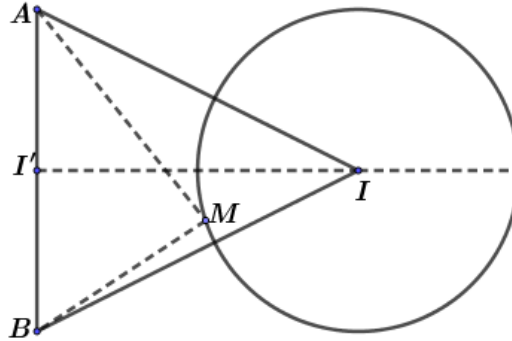
$$4a + 2b - 7 = 4(a - 4) + 2(b - 3) + 15 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)((a - 4)^2 + (b - 3)^2)} + 15 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $A^2 \leq 200$

$$\text{Đề } A_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 7 = 25 \\ \frac{a-4}{4} = \frac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $P = a + b = 10$.

Cách 2:



$$\text{Do } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Rightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$$

Suy ra $M \in (C)$ có tâm $I(4;3)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $I'(0;1)$

$$\text{Suy ra } P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$$

$$\text{Mặt khác ta có } MA^2 + MB^2 = 2MI'^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Suy ra $P_{\max} \Leftrightarrow MI'_{\max} \Leftrightarrow I'$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng. Vì ta thấy $IA = IB \Rightarrow MA = MB$ nên xảy ra dấu =.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (a - 4; a - 3)$, $\overrightarrow{II'} = (-4; -2)$ nên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow -2(a - 4) = -4(b - 3) \Leftrightarrow a = 2b - 2.$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \\ a = 2b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b = 2 \\ a = 6; b = 4 \end{cases}$$

Mặt khác

$$M(2;2) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{10}$$

$$M(6;4) \Rightarrow P = MA + MB = 10\sqrt{2}$$

Vậy đề $P_{\max}$ thì $M(6;4)$ Suy ra $a + b = 10$.

Cách 3

$$\text{Ta có } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{5} \sin \alpha + 4 \\ b = \sqrt{5} \cos \alpha + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}$$

$$= \sqrt{10\sqrt{5} \sin \alpha + 30} + \sqrt{6\sqrt{5} \sin \alpha + 8\sqrt{5} \cos \alpha + 30}.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski

$$M \leq \sqrt{2(16\sqrt{5} \sin \alpha + 8\sqrt{5} \cos \alpha + 60)} = \sqrt{2[8\sqrt{5}(2 \sin \alpha + \cos \alpha) + 60]} \leq 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Nên } M_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \sin \alpha + 4 = 6 \\ b = \sqrt{5} \cos \alpha + 3 = 4 \end{cases}.$$

Vậy $P = a + b = 10$.

Kĩ thuật 3: Dồn biến

Kĩ thuật này chúng ta đi theo hướng

- Với số phức ở dạng đại số từ đề bài ta đi tìm mối liên hệ giữa phần thực và phần ảo. Nếu làm được điều này ta sẽ dồn về 1 biến.
- Từ đề bài chúng ta đánh giá về một môđun có thể là $|z|$.

Câu 14. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z = 1 - 2i$. **B.** $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. **C.** $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **D.** $z = -1 + 2i$.

Phân tích

- Đề bài cho $|z + 3i| = |z + 2 - i|$ nên ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa phần thực và phần ảo của số phức z . Bởi vậy $|z|$ sẽ dồn được một biến.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y + 3)i| = |(x + 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1.$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y + 1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ khi } y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \text{ Vậy } z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Câu 15. Cho z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm GTLN của $|w|$ với $w = \frac{2+i}{z}$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{8}$. **C.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $|w| = \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 2 - 4i| = |x + yi - 2i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

Ta có

$$w = \frac{2+i}{z} \Rightarrow |w| = \left| \frac{2+i}{z} \right| = \frac{|2+i|}{|z|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + (4-x)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2 - 8x + 16}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(x-2)^2 + 8}}.$$

Ta có $\sqrt{2(x-2)^2+8} \geq \sqrt{8}$ nên $|w| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}} \leq \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Vậy $|w|_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 16. Cho các số phức $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -5-3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm $M(x; y) \in d: x-2y+1=0$ nên $M(2y-1; y) \Rightarrow z_3 = 2y-1+yi$

Do đó $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1 = 3(2y-1+yi) - (-5-3i) - 2(1+3i) = 6y + (3y-3)i$

Suy ra $|w| = \sqrt{(6y)^2 + (3y-3)^2} = 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1} = 3\sqrt{5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq 3\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \forall y \in \mathbb{R}$

Vậy $\min|w| = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{1}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Câu 17. Cho z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm GTLN của $|w|$ với $w = \frac{2+i}{z}$.

- A.** $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{8}$. **C.** $|w| = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $|w| = \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x+yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |x+yi-2-4i| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

Ta có

$$w = \frac{2+i}{z} \Rightarrow |w| = \left| \frac{2+i}{z} \right| = \frac{|2+i|}{|z|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+(4-x)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(x-2)^2+8}}.$$

Ta có $\sqrt{2(x-2)^2+8} \geq \sqrt{8}$ nên $|w| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x^2-8x+16}} \leq \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Vậy $|w|_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+1| + 2|z-1|$

- A.** $P_{\max} = 2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\max} = 2\sqrt{10}$. **C.** $P_{\max} = 3\sqrt{5}$. **D.** $P_{\max} = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $z = x+yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $x \in [-1; 1]$

Ta có $P = |z+1| + 2|z-1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{-2x+2}$.

Xét hàm $f(x) = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{-2x+2}$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta được

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{2}{\sqrt{-2x+2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{3}{5}$	1		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	4	$2\sqrt{5}$	2		

Dựa vào BBT, ta suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = 2$.

Cách 2: Bunhiacopxki

Theo BĐT Bunhiacopxki:

$$P = |z+1| + 2|z-1| \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)} \left(|z+1|^2 + |z-1|^2 \right) = \sqrt{10} \left(|z|^2 + 1 \right) = 2\sqrt{5}.$$

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$

B. $6\sqrt{5}$

C. $\sqrt{20}$

D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

Ta có: $P = |1+z| + 3|1-z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$; $x \in [-1; 1]$. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ và với

$x \in (-1; 1)$ ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1)$.

Ta có: $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$; $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{10}$.

Câu 20. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$.

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z . Các điểm $A(-2; 1)$, $B(4; 7)$, $C(1; -1)$.

Ta có $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2}$, mà $AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow MA + MB = AB$.

Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $AB: y = x + 3$, với $x \in [-2; 4]$.

Ta có $|z-1+i|=MC \Rightarrow |z-1+i|^2=MC^2=(x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(x+4)^2=2x^2+6x+17$

Đặt $f(x)=2x^2+6x+17, x \in [-2;4]$.

$$f'(x)=4x+6, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \text{ (nhận)}$$

Ta có $f(-2)=13, f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}, f(4)=73$.

Vậy $f(x)_{\max}=f(4)=73, f(x)_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}$.

$$\Rightarrow M=\sqrt{73}, m=\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}.$$

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1|+|(\bar{z}-2)i-1|=6$. Tính tổng $T=\max|z|+\min|z|$?

A. $T=\frac{5\sqrt{5}-2}{2}$.

B. $T=0$.

C. $T=6$.

D. $T=\frac{3\sqrt{5}-2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|(z+2)i+1|+|(\bar{z}-2)i-1|=6$

$$\Leftrightarrow |(a+bi+2)i+1|=2|(a-bi-2)i-1|=6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+(1-b)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=6$$

$$\Leftrightarrow 5(9-a^2)=9(b-1)^2 \Leftrightarrow a^2=\frac{45-9(b-1)^2}{5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{5} \leq b \leq 1+\sqrt{5}$$

$$\text{Khi đó } |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}.$$

Khảo sát hàm số, ta có

$$\min_{[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]} \sqrt{\frac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}=y(1-\sqrt{5})=\sqrt{5}-1;$$

$$\max_{[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]} \sqrt{\frac{45-9(b-1)^2}{5}+b^2}=y\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } T=\frac{5\sqrt{5}-2}{2}$$

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.n$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

➤ Cách 1:

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Đặt $t = |z + 1|$

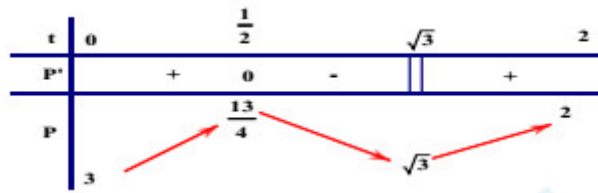
Ta có: $0 \leq |z| - 1 \leq |z + 1| \leq |z| + 1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$.

$$t^2 = |z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} = 1 + |z|^2 + 2a = 2 + 2a \Rightarrow a = \frac{t^2 - 2}{2}$$

$$|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z\bar{z}| = |z||z - 1 + \bar{z}| = |z||2a - 1| = |t^2 - 3| \Rightarrow P = t + |t^2 - 3| \text{ với } t \in [0; 2]$$

$$P = t + |t^2 - 3| = \begin{cases} t^2 + t - 3, & \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ -t^2 + t + 3, & 0 \leq t \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



$$\Rightarrow \underset{[0;2]}{Max} P = \frac{13}{4}; \underset{[0;2]}{Min} P = \sqrt{3} \Rightarrow M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

➤ Cách 2:

$$z = r(\cos x + i \sin x) = a + bi$$

$$\text{Do } |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z\bar{z} = |z|^2 = 1 \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{cases}$$

$$P = \sqrt{2 + 2\cos x} + |2\cos x - 1|, \text{ đặt } t = \cos x \in [-1; 1] \Rightarrow f(t) = \sqrt{2 + 2t} + |2t - 1|$$

$$\text{TH1: } t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2t}} + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \max f(t) = f(1) = 3 \\ \min f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2t}} - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{8} \Rightarrow \max f(t) = f\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Max} f(t) = \frac{13}{4}; \text{Min} f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức P với

$$P = |1 + z^2| - |1 + z|$$

A. $2 + \sqrt{2}$.

B. $1 + 2\sqrt{2}$.

C. $-1 + 2\sqrt{2}$.

D. $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có

$$P = \frac{|1 + z^2|}{|z|} - |1 + z| = |z + \bar{z}| - |1 + z| = 2|x| - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2|x| - \sqrt{2 + 2x} \text{ vì } x^2 + y^2 = 1.$$

Khảo sát hàm số $f(x) = 2|x| - \sqrt{2 + 2x}$ với $x \in D = [-1; 1]$.

+ Với $x \geq 0$ ta có $f(x) = 2x - \sqrt{2+2x}$ ta có $f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2+2x}} = \frac{2\sqrt{2+2x}-1}{\sqrt{2+2x}}$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}$ nên ta có $\max P = P(1) = 0; \min P = P(0) = -\sqrt{2}$.

+ Với $-1 \leq x \leq 0$ ta được $f(x) = -2x - \sqrt{2+2x}$

$f'(x) = -2 - \frac{1}{\sqrt{2+2x}} < 0$ trên tập điều kiện. Hàm số nghịch biến trên $[-1; 0]$. Từ đó ta được

$\max P = P(-1) = 2; \min P = P(0) = -\sqrt{2}$.

+ Từ trên ta được $\max_{[-1;1]} P = P(-1) = 2; \min_{[-1;1]} P = P(0) = -\sqrt{2}$. Vậy kết.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$

Ta có: $z + \bar{z} = 2a$; $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Khi đó $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}| = \left| z \left(z^2 + 3 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \right| - |z + \bar{z}|$

$P = |z| \cdot \left| z^2 + 3 + \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right| - |z + \bar{z}| = |z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 1| - |z + \bar{z}|$

$P = |(z + \bar{z})^2 + 1| - |z + \bar{z}| = |4a^2 + 1| - 2|a| = 4a^2 + 1 - 2|a| = \left(2|a| - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

Kỹ thuật 4: Lượng giác hóa

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

B. $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$.

C. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Đặt $x = 1 + 2\sin t$; $y = -2 + 2\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2} \sin(t + \alpha)$; ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5} \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9+4\sqrt{5}}; \sqrt{9+4\sqrt{5}} \right]$

$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ đạt được khi $z = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10+4\sqrt{5}}{5}i$.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $4\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{5}$.

C. 3.

D. $3 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$|(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |(1-i)| \cdot \left| z + \frac{-6-2i}{1-i} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5} \sin t$; $y = 4 + \sqrt{5} \cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$|z|^2 = (2 + \sqrt{5} \sin t)^2 + (4 + \sqrt{5} \cos t)^2 = 25 + (4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t)$$

$$= 25 + \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 + 20 \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [\sqrt{5}; 3\sqrt{5}]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5} \text{ đạt được khi } z = 3 + 6i.$$

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

A. $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$.

B. $\sqrt{26 - 6\sqrt{17}}$.

C. $\sqrt{26 + 8\sqrt{17}}$.

D. $\sqrt{26 - 4\sqrt{17}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 2i = x + (y - 2)i$. Ta có:

$$|z - 1 + 2i| = 9 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Đặt $x = 1 + 3 \sin t$; $y = -2 + 3 \cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

$$\Rightarrow |z - 2i|^2 = (1 + 3 \sin t)^2 + (-4 + 3 \cos t)^2 = 26 + 6(\sin t - 4 \cos t) = 26 + 6\sqrt{17} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{26 - 6\sqrt{17}} \leq |z - 2i| \leq \sqrt{26 + 6\sqrt{17}} \Rightarrow |z - 2i|_{\max} = \sqrt{26 + 6\sqrt{17}}.$$

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$\text{tìm } Q = |z - 1| + \left| z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|. \text{ Tính } P = M + m.$$

A. $4 + 2\sqrt{3}$.

B. $2 + 2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{6}$.

D. $2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } |z| = 1 \Rightarrow z = \cos x + i \sin x \text{ và } Q = |\cos x + i \sin x - 1| + \left| \cos x + i \sin x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$$

$$= \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} + \sqrt{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{2 - \cos x + \sqrt{3} \sin x} \in \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}; 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right].$$

$$\text{Do đó } P = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Cách 2: Khi biết $|z|=1$, xét ba điểm $M(a;b)$, $A(1;0)$, $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ta có $Q=MA+MB$ và M, A, B cùng thuộc đường tròn $(O,1)$ suy ra $(MA+MB)_{\max} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung lớn $\widehat{AB}$. $(MA+MB)_{\min} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$.

Câu 29. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-7-9i|+\sqrt{2}|(1+i)z+8-8i|$ là?

- A. $3\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $z-1-i=5(\cos x+i\sin x)$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= |1+i+5(\cos x+i\sin x)-7-9i|+2\left|1+i+5(\cos x+i\sin x)+\frac{8-8i}{1+i}\right| \\ &= |(5\cos x-6)+i(5\sin x-8)|+2\left|(5\cos x+1)+\frac{8-8i}{1+i}\right| \\ &= \sqrt{(5\cos x-6)^2+(5\sin x-8)^2}+2\sqrt{(5\cos x+1)^2+(5\sin x-7)^2} \\ &= \sqrt{25-60\cos x-80\sin x+100}+2\sqrt{25+10\cos x-70\sin x+50} \geq 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2|+|z+2-2i|$. Tính $P=M+m$

- A. $P=2+\sqrt{17}$. B. $P=2+2\sqrt{17}$. C. $P=\sqrt{2+2\sqrt{17}}$. D. $P=\sqrt{2+\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $z-i=2(\cos x+i\sin x)$ và

$$\begin{aligned} |z+2|+|z+2-2i| &= |2(\cos x+i\sin x)+i+2|+|2(\cos x+i\sin x)+i+2-2i| \\ &= \sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x+1)^2}+\sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x-1)^2} \\ &= \sqrt{9+8\cos x+4\sin x}+\sqrt{9+8\cos x-4\sin x} \\ &= \sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{(9+8\cos x)^2-16\sin^2 x}} \\ &= \sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{80\cos^2 x+144\cos x+65}} \in [2; 2\sqrt{17}]. \end{aligned}$$

Câu 31. Gọi $z=x+yi(x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2+|z+2|^2=26$ và

$\left|z-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy .

- A. $xy=\frac{9}{4}$. B. $xy=\frac{13}{2}$. C. $xy=\frac{16}{9}$. D. $xy=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+iy(x, y \in \mathbb{R})$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2+y^2=36$.

Đặt $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left| z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \right| = \sqrt{18 - 18 \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \leq 6.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Kĩ thuật 5: Sử dụng biểu thức liên hợp $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = |z+1-i|$ là

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Do w là số thực, suy ra:

$$\begin{aligned} w = \bar{w} &\Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{2+z^2} \right)} \Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2} = \frac{\bar{z}}{2+\bar{z}^2} \Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2} = \frac{\bar{z}}{2+\bar{z}^2} \Leftrightarrow 2z + z \cdot \bar{z}^2 = 2\bar{z} + z^2 \cdot \bar{z} \\ &\Leftrightarrow (z - \bar{z})(2 - z \cdot \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \cdot \bar{z} = 2 \end{cases} \begin{matrix} z \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ (*).

Cách 1 (Theo đại số và kết hợp bất đẳng thức)

$$\begin{aligned} M = |z+1-i| &= |(x+1) + (y-1)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} \\ &\xrightarrow{(*)} \sqrt{2x - 2y + 4}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M^2 = 2x - 2y + 4 \leq \sqrt{(2^2 + 2^2)(x^2 + y^2)} + 4 = \sqrt{8 \cdot 2} + 4 = 8 \Rightarrow M \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow M_{\max} = 2\sqrt{2}$$

Cách 2 (Theo hình học)

Gọi điểm $T(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$

$\xrightarrow{(*)} T$ thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có } M = |(x+1) + (y-1)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = TA \text{ với } A(-1;1).$$

$$\text{Do } A(-1;1) \in (C) \text{ suy ra } M_{\max} = TA_{\max} = 2R = 2\sqrt{2}.$$

Chú ý: Nếu $A \notin (C) \Rightarrow M_{\max} = TA_{\max} = OA + R$.

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \frac{2\sqrt{17}+1}{2}$.

B. $P = \sqrt{17}$.

C. $P = \frac{\sqrt{17}+1}{2}$.

D. $P = \frac{2\sqrt{17}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z^2 + 4| &= |z| \Leftrightarrow \left| \frac{z^2 + 4}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| z + \frac{4}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \left(z + \frac{4}{z} \right) \overline{\left(z + \frac{4}{z} \right)} = 1 \Leftrightarrow \left(z + \frac{4}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{4}{\bar{z}} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + \frac{16}{z \cdot \bar{z}} + 4 \left(\frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \right) = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + \frac{4(z^2 + \bar{z}^2)}{|z|^2} = 1. \end{aligned}$$

Vậy với $a = |z| > 0$, ta có $1 \geq a^2 + \frac{16}{a^2} - 8 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2}$.

Do đó $P = \frac{\sqrt{17}-1}{2} + \frac{\sqrt{17}+1}{2} = \sqrt{17}$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tính $P = \max|z| + \min|z|$.

A. $P = 3$.

B. $P = \sqrt{13}$.

C. $P = 3\sqrt{13}$

D. $P = 3 + \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = 9 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} = 9 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{(z + \bar{z})^2 - 2|z|^2}{|z|^2} = 9$$

$$\Rightarrow 9 \geq |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{-2|z|^2}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} \leq 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-3}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow P = \sqrt{13}$$

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

Đặt $t = |z+1|$, ta có $0 = |z|-1 \leq |z+1| \leq |z|+1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$.

$$\text{Ta có } t^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } |z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z\bar{z}| = |z||z-1+\bar{z}| = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = |t^2-3|.$$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2-3|, t \in [0; 2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4}; \min f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z}\right| = 4$. Tính $P = \max|z| + \min|z|$.

A. $P = 4\sqrt{2}$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = \sqrt{4\sqrt{2}-2}$.

D. $P = 2\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có

$$\left(z^3 + \frac{1}{z}\right)\overline{\left(z^3 + \frac{1}{z}\right)} = 16 \Leftrightarrow \left(z^3 + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}^3 + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 16$$

$$\Leftrightarrow |z|^6 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{z^4 + \bar{z}^{-4}}{|z|^2} = 16 \Leftrightarrow |z|^6 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{(z^2 + \bar{z}^2)^2 - 2|z|^4}{|z|^2} = 16$$

$$\Rightarrow 16 \geq |z|^6 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{-2|z|^4}{|z|^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = \sqrt{4\sqrt{2}-2}.$$

_____ **TOANMATH.com** _____