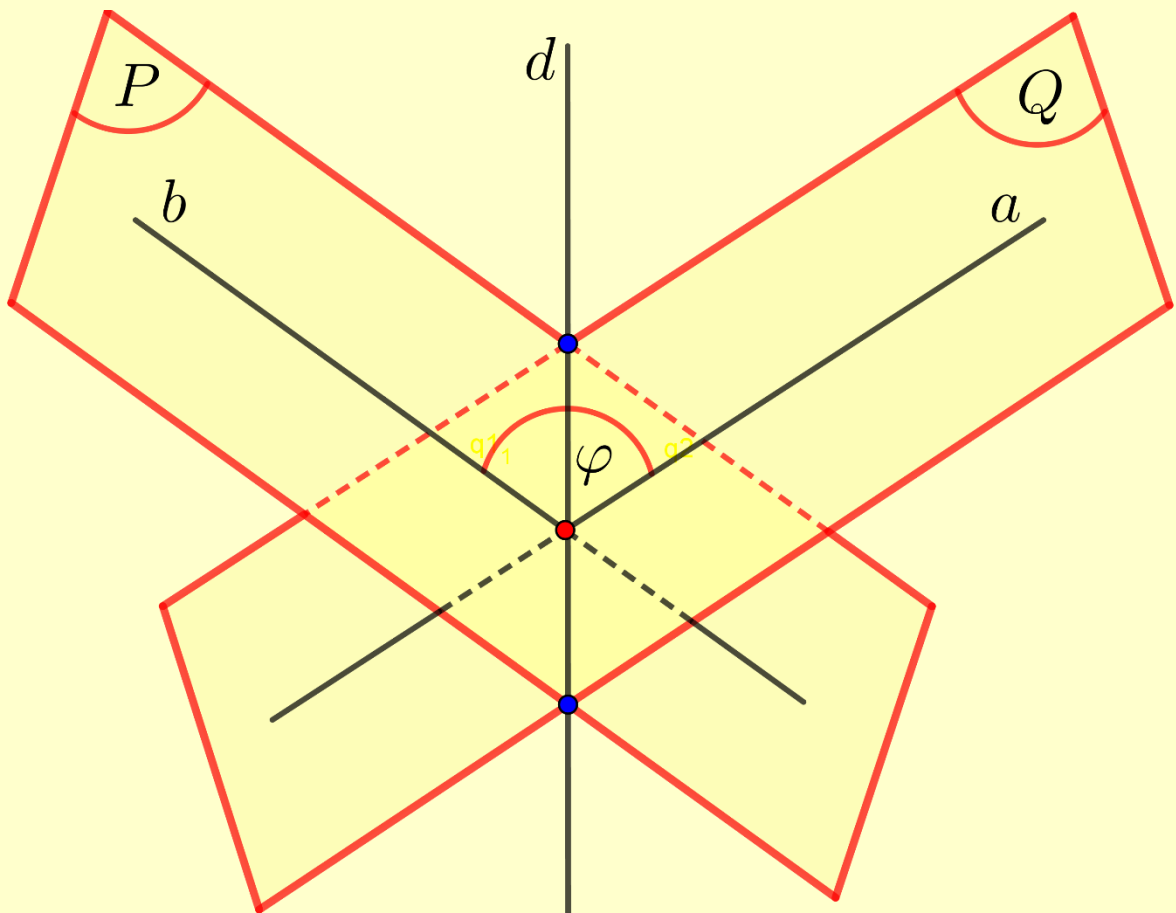


LÊ MINH TÂM

Chuyên Đề.

QUAN HỆ

SONG SONG

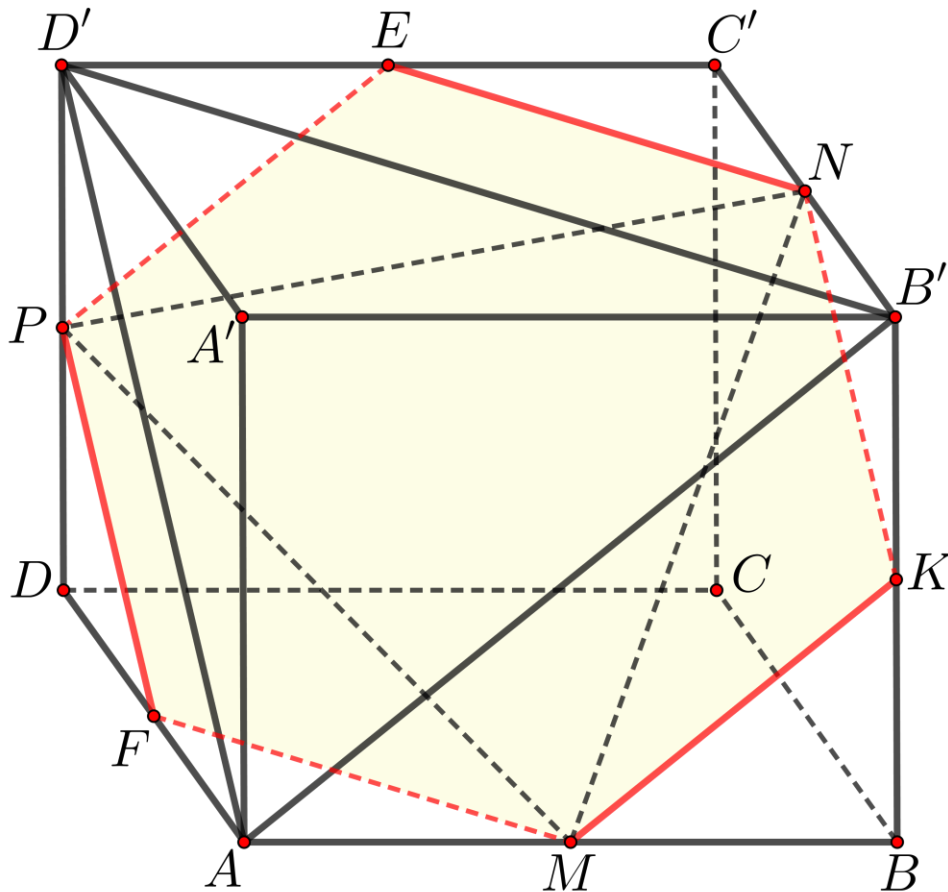


TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

BÀI 01. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG & MẶT PHẪNG	4
I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU	4
II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN	6
III. CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG	7
IV. HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN	7
V. CÁC DẠNG TOÁN	8
Dạng 01. XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG PHÂN BIỆT	8
Dạng 02. TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG D VÀ MẶT PHẪNG (P)	10
Dạng 03. CHỨNG MINH 03 ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ 03 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI	11
Dạng 04. THIẾT DIỆN CỦA HÌNH H KHI BỊ CẮT BỞI MẶT PHẪNG (P)	12
VI. BÀI TẬP RÈN LUYỆN	12
BÀI 02. HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU – HAI ĐƯỜNG SONG SONG	38
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	38
II. TÍNH CHẤT	38
III. CÁC DẠNG BÀI TẬP	41
Dạng 01. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	41
Dạng 02. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG CHỨA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	44
Dạng 03. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	48
Dạng 04. CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG DI ĐỘNG LUÔN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH	50
BÀI 03. ĐƯỜNG THẲNG & MẶT PHẪNG SONG SONG	52
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	52
II. TÍNH CHẤT	52
III. CÁC DẠNG BÀI TẬP	55
Dạng 01. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG	55
Dạng 02. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG	61
BÀI 04. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	69
I. ĐỊNH NGHĨA	69

II. TÍNH CHẤT:	69
III. ĐỊNH LÝ THALES TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN:	72
IV. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP:	73
V. HÌNH CHÓP CỤT:	75
III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.....	75
➤ Dạng 01. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	75
➤ Dạng 02. GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẪNG CÓ 1 MẶT PHẪNG SONG SONG VỚI MẶT THỨ BA	79
➤ Dạng 03. HÌNH LĂNG TRỤ - HÌNH HỘP	84
➤ Dạng 04. ĐỊNH LÝ THALES TRONG KHÔNG GIAN	90
➤ BÀI 05. TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG	94



BÀI 01

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG & MẶT PHẪNG

Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

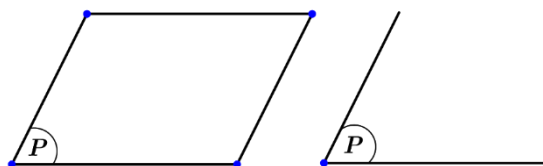
I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1. Mặt phẳng

– Hình ảnh mô phỏng trong thực tế ví dụ: mặt gương phẳng, mặt hồ phẳng lặng được xem là một phần của mặt phẳng.

Chú ý:

- Mặt phẳng ko có bề dày và không bị giới hạn.
- Cách biểu diễn mặt phẳng lên mặt phẳng hình học: dùng hình bình hành hay một góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình.
- Kí hiệu mặt phẳng: $mp(P)$, $mp(Q)$, ... $mp(\alpha)$, $mp(\beta)$, ...



1.2. Điểm thuộc mặt phẳng

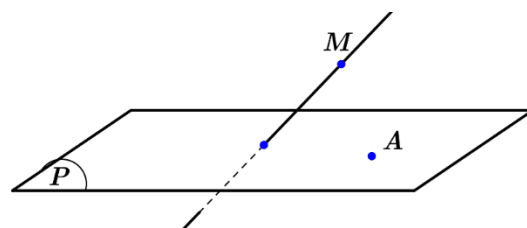
Cho điểm A và $mp(\alpha)$. Khi đó:

- Điểm A thuộc (α) hay A nằm trên (α) hay (α) chứa A hoặc đi qua A .

○ Kí hiệu: $A \in (\alpha)$

- Điểm A nằm ngoài (α) hay (α) không chứa A hoặc không đi qua A .

○ Kí hiệu: $A \notin (\alpha)$.

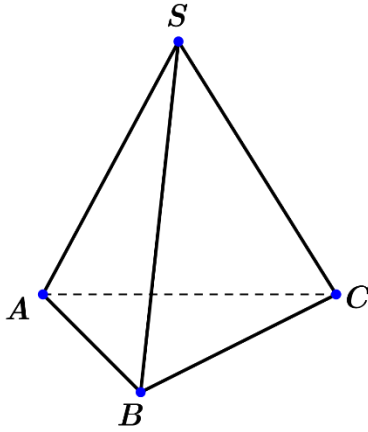


1.3. Hình biểu diễn của một hình không gian.

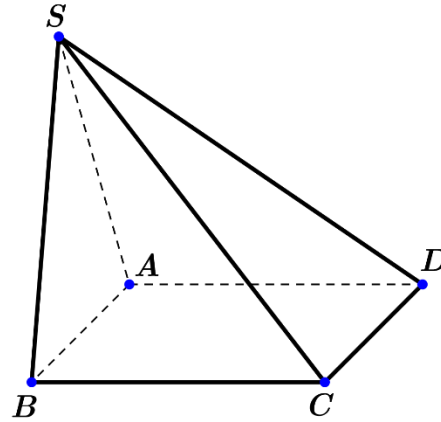
Khi vẽ một hình không gian lên bảng, lên giấy ta tuân thủ nguyên tắc sau:

- ① Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- ② Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- ③ Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm với đường thẳng.
- ④ Nét liền để vẽ đường nhìn thấy, nét đứt để vẽ đường bị che khuất.
- ⑤ Bảo toàn tỷ lệ giữa các đoạn thẳng song song, các đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng. Không bảo toàn về góc.
- ⑥ Một tam giác bất kỳ đều được coi là hình biểu diễn của tam giác có dạng tùy ý (vuông, cân, đều).

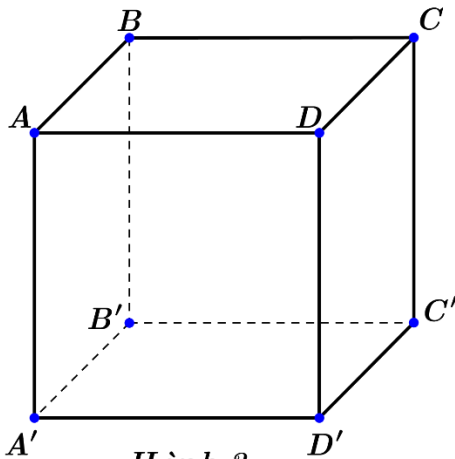
- ⑦ Hình bình hành là hình biểu diễn cho hình bình hành có dạng tùy ý (hình bình hành, vuông, chữ nhật, thoi) và kèm theo kí hiệu vuông, bằng nhau nếu là hình đặc biệt.
 Cho các hình 1 – 2 – 3 – 4 được đánh dấu như bên dưới.



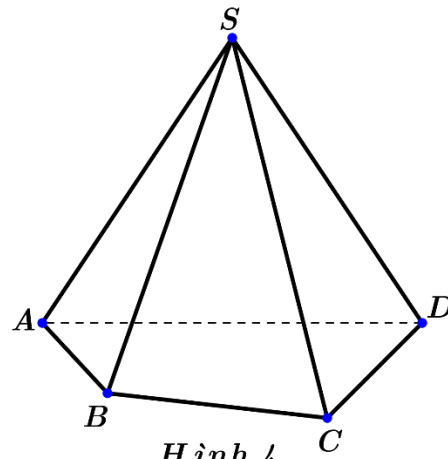
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- ⊙ Hãy kể tên các mặt phẳng thấy hay không thấy trong các hình 1, 2, 3, 4.

Hình 1:	– Các mặt phẳng nhìn thấy là: $(SAB), (SBC)$. – Các mặt phẳng không nhìn thấy là: $(SAC), (ABC)$.
Hình 2:	– Các mặt phẳng nhìn thấy là: $(SBC), (SCD)$. – Các mặt phẳng không nhìn thấy là: $(SAB), (SAD), (ABCD)$.
Hình 3:	– Các mặt phẳng nhìn thấy là: $(ABCD), (ADD'A'), (DCC'D')$. – Các mặt phẳng không nhìn thấy là: $(A'B'C'D'), (ABB'A'), (BCC'B')$.
Hình 4:	– Các mặt phẳng nhìn thấy là: $(SAB), (SBC), (SCD)$. – Các mặt phẳng không nhìn thấy là: $(SAD), (ABCD)$.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

	TÍNH CHẤT	HÌNH MINH HỌA
01	☆ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 02 điểm phân biệt.	
02	☆ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng. ○ Kí hiệu: (ABC) .	
03	☆ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó. $\begin{cases} A \in a \cap (\alpha) \\ B \in a \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv a \subset (\alpha)$	
04	☆ Điểm M và đường thẳng AM đều nằm trong (ABC) vì M thuộc đường thẳng AB còn AM trùng với đường thẳng AB mà AB nằm trong (ABC) .	
05	☆ Tồn tại 04 điểm không cùng thuộc 01 mặt phẳng.	
06	☆ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có 01 điểm chung thì chúng còn có điểm chung khác nữa. ↳ Suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng. ↳ Đường thẳng chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.	
07	☆ Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả của hình học phẳng đều đúng.	

Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

III. CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

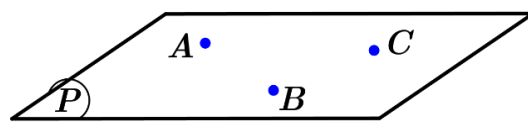
MẶT PHẪNG ĐƯỢC XÁC ĐỊNH

HÌNH MINH HỌA

01

☆ Khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.

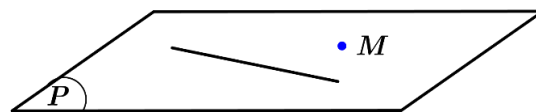
○ **Kí hiệu:** $mp(ABC)$ hoặc (ABC) .



02

☆ Khi biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó.

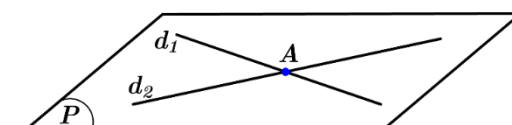
○ **Kí hiệu:** $mp(d; A)$ hoặc $mp(A; d)$.



03

☆ Khi biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

○ **Kí hiệu:** $mp(a; b)$ hoặc $mp(b; a)$.



IV. HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy S nằm ngoài (α) .

□ Lần lượt nối S với $A_1, A_2, ..., A_n$ được n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$.

□ Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$ gọi là hình chóp.

○ **Kí hiệu:** $S.A_1A_2...A_n$.

☆ Hình tứ diện là hình được tạo thành từ bốn tam giác $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ trong đó A, B, C, D không đồng phẳng.

– Đỉnh: A, B, C, D

– Mặt bên: $\triangle ABC; \triangle ABD; \triangle ACD$

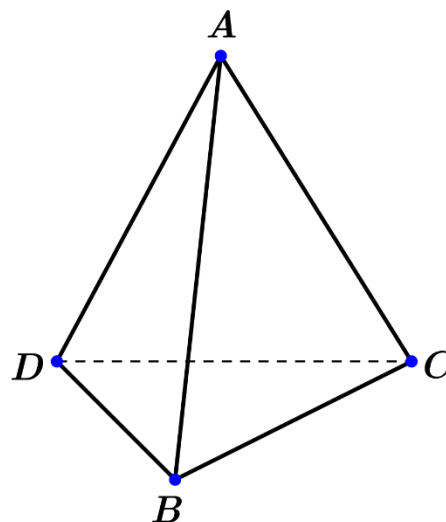
– Cạnh bên: $AB; AC; AD$

– Mặt đáy: $\triangle BCD$

– Cạnh đáy: $BC; BD; CD$

– Cặp cạnh đối diện: $BC; AD$ và $BD; AC$ và $AB; DC$.

– Đỉnh đối diện với mặt: đỉnh A đối diện (BCD) ; đỉnh B đối diện (ACD) ; đỉnh C đối diện (ABD) ; đỉnh D đối diện (ABC) .



Lưu ý: Tứ diện đều là hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều.

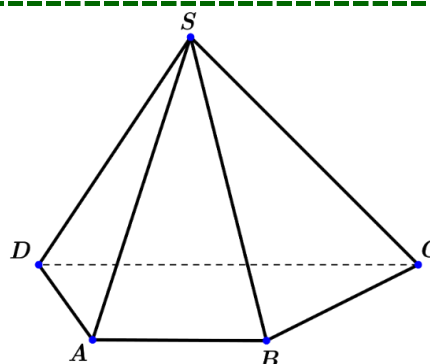
01

☆ Các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

– Mặt bên: $\triangle SBC; \triangle SAD; \triangle SCD; \triangle SAB$

– Cạnh bên: $SA; SB; SC; SD$

– Cạnh đáy: $AB; BC; AD; CD$



02

V. CÁC DẠNG TOÁN.

➤ Dạng 01. XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG PHÂN BIỆT.

□ **Giao tuyến** của hai mặt phẳng phân biệt là đường thẳng chung (đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm chung) của hai mặt phẳng đó.

Phương pháp giải

○ Ta thường gặp:

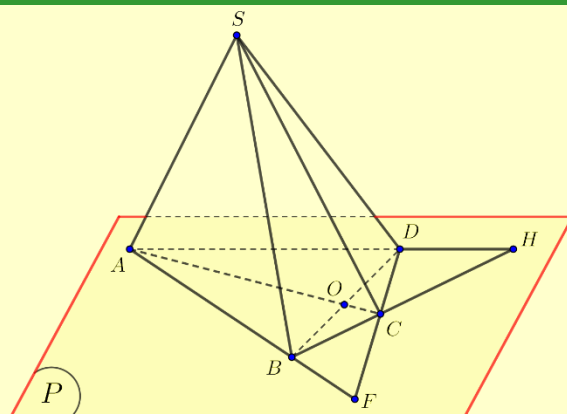
Tình huống 01	Giả thiết	$M = d_1 \cap d_2; d_1 \subset (\alpha); d_2 \subset (\beta)$
	Kết luận	$M \in (\alpha) \cap (\beta)$
Tình huống 02	Giả thiết	$M \in (\alpha) \cap (\beta); N \in (\alpha) \cap (\beta)$
	Kết luận	$(\alpha) \cap (\beta) = MN$

○ **Kỹ thuật:** Nối các đoạn hoặc kéo dài các đoạn thẳng có trong mặt phẳng để tìm điểm chung và chú ý nét vẽ đứt hoặc liền.

📖 Ví dụ 01.

Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) chứa tứ giác $ABCD$ có AB không song song CD ; BC không song song DA . Tìm giao tuyến của :

- $(SAB) \cap (SBC)$.
- $(SAB) \cap (SCD)$.
- $(SAD) \cap (SBC)$.
- $(SAC) \cap (SBD)$.



Lời giải

a. Tìm giao tuyến $(SAB) \cap (SBC)$.

Hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ có SB chung. Suy ra SB là giao tuyến,
Kí hiệu: $(SAB) \cap (SBC) = SB$.

b. Tìm giao tuyến $(SAB) \cap (SCD)$.

Có: $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (1).

Trong $(ABCD)$ có AB và CD không song song. Gọi $F = AB \cap CD$.

$$\begin{cases} F \in AB, AB \subset (SAB) \\ F \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SF$.

c. Tìm giao tuyến $(SAD) \cap (SBC)$.

Có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1).

Trong $(ABCD)$ có AD và BC không song song. Gọi $H = AD \cap BC$.

$$\begin{cases} H \in AD, AD \subset (SAD) \\ H \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAD) \cap (SBC) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SH$.

d. Tìm giao tuyến $(SAC) \cap (SBD)$.

Có: $S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$.

Trong $(ABCD)$ có AC và BD không song song. Gọi $O = AC \cap BD$.

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

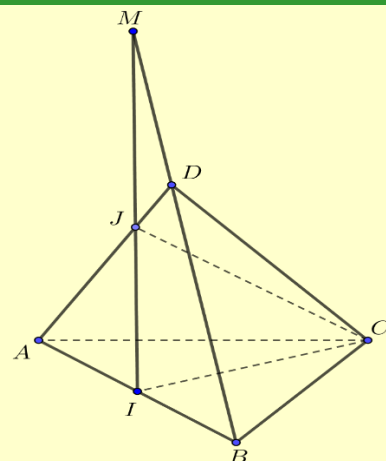
Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Ví dụ 02.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{2}AB, AJ = \frac{3}{2}JD$. Tìm giao tuyến của:

a. $(ACD) \cap (CIJ)$.

b. $(CIJ) \cap (BCD)$.



Lời giải

a. Tìm giao tuyến $(ACD) \cap (CIJ)$.

Có: $C \in (ACD) \cap (CIJ) \quad (1)$.

$J \in AD, AD \subset (ACD) \Rightarrow J \in (ACD) \cap (CIJ) \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (ACD) \cap (CIJ) = CJ$.

b. Tìm giao tuyến $(CIJ) \cap (BCD)$.

Có: $C \in (CIJ) \cap (BCD) \quad (1)$.

Trong (ABD) có BD và IJ không song song. Gọi $M = BD \cap IJ$.

$$\begin{cases} M \in BD, BD \subset (BCD) \\ M \in IJ, IJ \subset (CIJ) \end{cases} \Rightarrow M \in (BCD) \cap (CIJ) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (CIJ) \cap (BCD) = CM$

Dạng 02. TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG d VÀ MẶT PHẲNG (P) .

Phương pháp giải

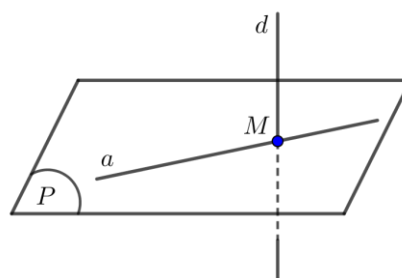
Bài toán: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Giả thiết

$$d \not\subset (P), M \in d, M \in (P)$$

Kết luận

$$M = d \cap (P)$$



○ Ta có các trường hợp sau xảy ra.

Trường hợp 01

Trong (P) có sẵn đường thẳng a cắt d tại M

Ta trình bày: $a \cap d = M, a \subset (P) \Rightarrow d \cap (P) = M$.

Trường hợp 02

Trong mặt phẳng (α) chưa có đường a cắt d . Khi đó

❑ **Bước 1:** Chọn mặt phẳng phụ (P) chứa d .

❑ **Bước 2:** Tìm giao tuyến a của (P) và (α) .

❑ **Bước 3:** Trong (P) , cho a cắt d tại M , khi đó M thuộc d , M thuộc a mà a chứa trong (α) . Vậy M là điểm cần tìm.

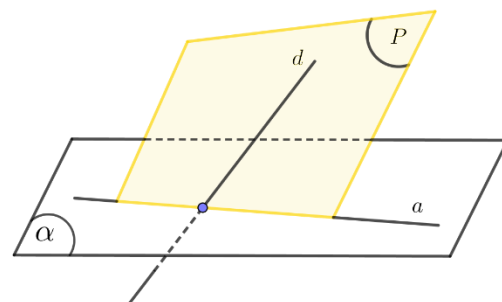
Ta trình bày:

❑ Chọn (P) chứa d .

❑ Tìm $(P) \cap (\alpha) = a$.

❑ Trong (P) , $a \cap d = M$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in a, a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \cap (\alpha) = M$$

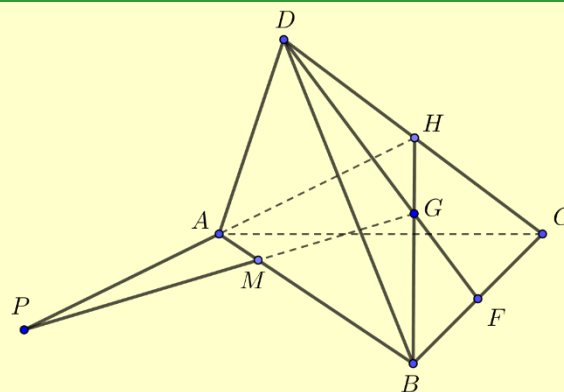


Ví dụ 03.

Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M thỏa mãn $AM = \frac{1}{4}AB$, G là trọng tâm $\triangle BCD$. Tìm:

a. Giao điểm của GD với (ABC) .

b. Giao điểm MG với (ACD) .



Lời giải

a. Giao điểm của GD với (ABC) .

Gọi F là trung điểm BC . G là trọng tâm $\triangle BCD$ nên $DG \cap BC = F$ mà $BC \subset (ABC)$
 $\Rightarrow DG \cap (ABC) = F$.

b. Giao điểm MG với (ACD) .

Trong (ABH) với H là trung điểm DC . Có AH, MG không song song.

Vì $\frac{BM}{AB} = \frac{3}{4}; \frac{BG}{BH} = \frac{2}{3}$. Gọi $P = AH \cap MG$. Mà $AH \subset (ACD)$
 $\Rightarrow MG \cap (ACD) = P$.

Dạng 03. CHỨNG MINH 03 ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ 03 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

Phương pháp giải

☉ Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng:

 Ta chứng minh ba điểm đó đồng thời thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) suy ra ba điểm A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.

 Cơ sở $\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow AB \subset (\alpha) \cap (\beta) \\ C \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases}$.

☉ Muốn chứng minh ba đường a, b, c thẳng đồng quy tại một điểm:

 Ta chọn một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b . Gọi $I = a \cap b$ chứng minh $I \in c$ (chứng minh ba điểm thẳng hàng như trên).

Ví dụ 04.

Cho 3 điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P) , $BC \cap (P) = M, CA \cap (P) = N, AB \cap (P) = Q$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

$$BC \cap (P) = M \Rightarrow M \in (ABC) \cap (P) \quad (1)$$

$$CA \cap (P) = N \Rightarrow N \in (ABC) \cap (P) \quad (2)$$

$$AB \cap (P) = Q \Rightarrow Q \in (ABC) \cap (P) \quad (3)$$

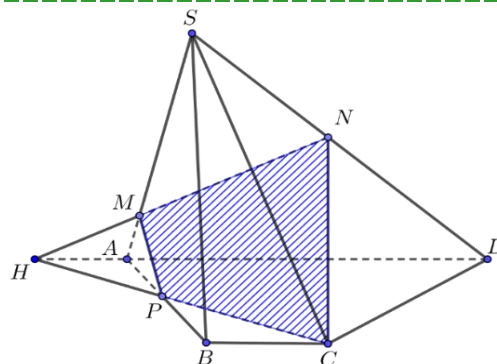
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow M, N, Q$ thẳng hàng.

Dạng 04. THIẾT DIỆN CỦA HÌNH H KHI BỊ CẮT BỞI MẶT PHẪNG (P).

Phương pháp giải

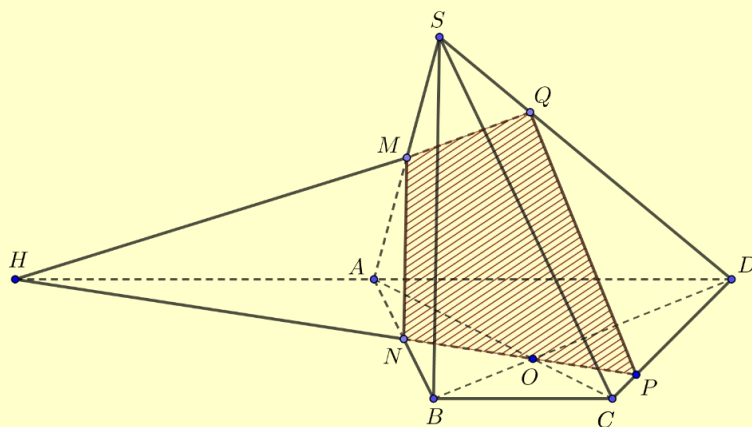
☞ Khi cắt hình H bởi mặt phẳng (P) ta được phần chung của H và (P) phần chung này gọi là thiết diện của hình H và (P)

☞ Xem hình minh họa sau: Tứ giác $MNCP$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (CHN) .



Ví dụ 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AD=2BC$, AB không song song CD . Lấy điểm M và N lần lượt là trung điểm của SA, AB . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNO) với hình chóp $S.ABCD$.



Lời giải

Gọi $P = NO \cap CD \Rightarrow CD \cap (MNO) = P$.

Gọi $H = NP \cap AD \Rightarrow H \in (SAD)$

Gọi $Q = HM \cap SD \Rightarrow Q = (MNO) \cap SD$

Do đó thiết diện tạo bởi (MNO) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

VI. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

1. (SAC) và (SBD) .
2. (SAC) và (MBD) .
3. (MBC) và (SAD) .
4. (SAB) và (SCD) .

Lời giải

1. (SAC) và (SBD) .

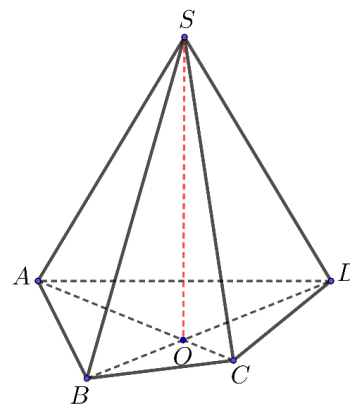
♦ Gọi O là giao điểm của AC và BD .

♦ Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$

♦ Vì $O = AC \cap BD$

♦ Nên $\begin{cases} O \in (SAC) \\ O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2).$

♦ Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.



② (SAC) và (MBD) .

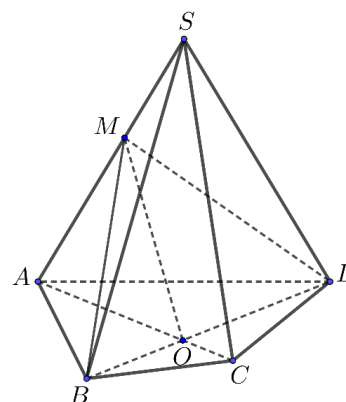
♦ Vì $M \in SA$ nên $M \in (SAC)$.

♦ Do đó $\begin{cases} M \in (SAC) \\ M \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (MBD) \quad (3)$

♦ Vì $O = AC \cap BD$.

♦ Nên $\begin{cases} O \in (SAC) \\ O \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD) \quad (4).$

♦ Từ (3) và (4) suy ra $(SAC) \cap (MBD) = MO$.



③ (MBC) và (SAD) .

♦ Gọi E là giao điểm của BC và AD .

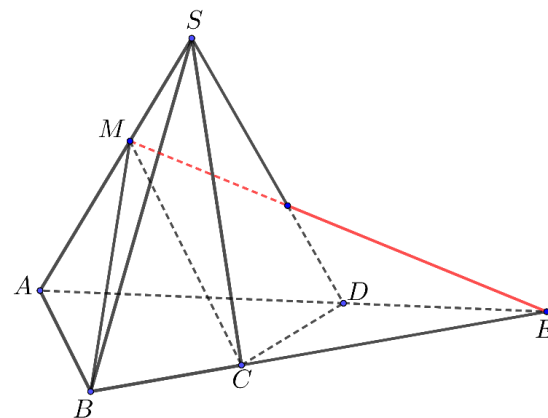
♦ Vì $M \in SA$ nên $M \in (SAD)$

♦ Do đó $\begin{cases} M \in (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAD) \cap (MBC) \quad (5)$

♦ Vì $E = BC \cap AD$

♦ Nên $\begin{cases} E \in (MBC) \\ E \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MBC) \cap (SAD) \quad (6).$

♦ Từ (5) và (6) suy ra $(MBC) \cap (SAD) = ME$.



④ (SAB) và (SCD) .

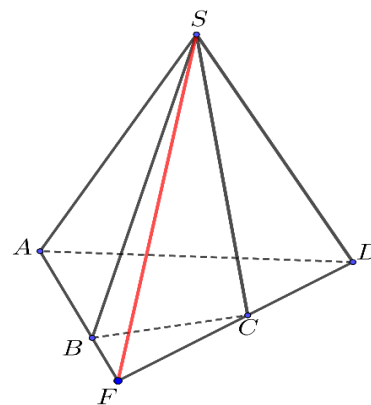
♦ Gọi F là giao điểm của AB và CD .

♦ Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (7)$

♦ Vì $F = AB \cap CD$

♦ Nên $\begin{cases} F \in (SAB) \\ F \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD) \quad (8).$

♦ Từ (7) và (8) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SF$.



Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC . Gọi I là điểm nằm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

1. (MNI) và (BCD) .
2. (MNI) và (ABD) .
3. (MNI) và (ACD) .

Lời giải

1. (MNI) và (BCD) .

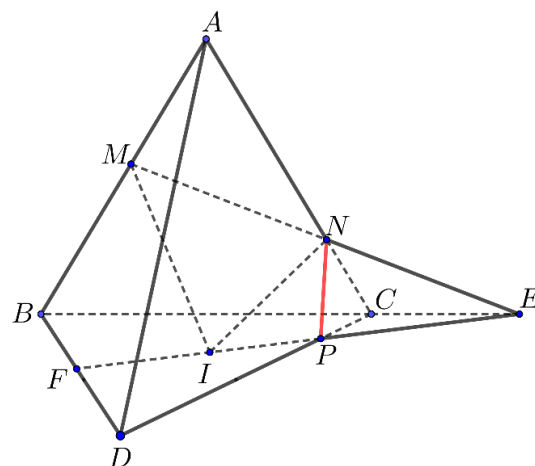
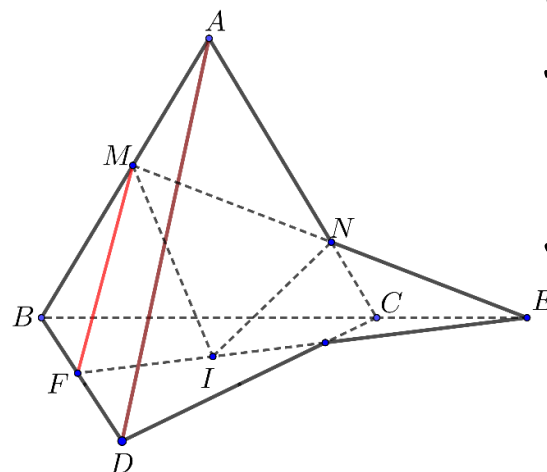
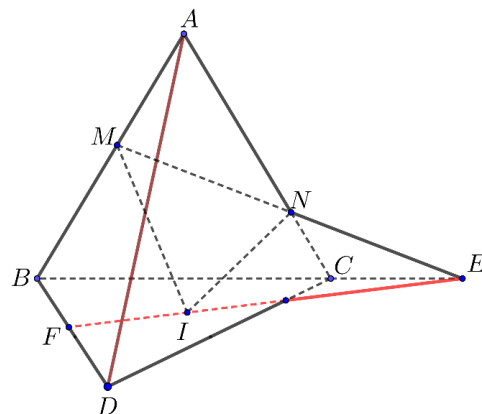
- ♦ Gọi E là giao điểm của MN và BC .
- ♦ Ta có $\begin{cases} I \in (IMN) \\ I \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IMN) \cap (BCD) \quad (1).$
- ♦ Vì $E = MN \cap BC$
- ♦ Nên $\begin{cases} E \in (IMN) \\ E \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (IMN) \cap (BCD) \quad (2).$
- ♦ Từ (1) và (2) suy ra $(IMN) \cap (BCD) = IE$.

2. (MNI) và (ABD) .

- ♦ Gọi F là giao điểm của IE và BD .
- ♦ Vì $M \in AB$ nên $M \in (ABD)$
- ♦ $\begin{cases} M \in (ABD) \\ M \in (IMN) \end{cases} \Rightarrow M \in (IMN) \cap (ABD) \quad (3)$
- ♦ Vì $F = IE \cap BD$
- ♦ Nên $\begin{cases} F \in (IMN) \\ F \in (ABD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IMN) \cap (ABD) \quad (4).$
- ♦ Từ (3) và (4) suy ra $(IMN) \cap (ABD) = MF$.

3. (MNI) và (ACD) .

- ♦ Gọi P là giao điểm của IE và CD .
- ♦ Vì $N \in AC$ nên $N \in (ACD)$
- ♦ $\begin{cases} N \in (ACD) \\ N \in (IMN) \end{cases} \Rightarrow N \in (IMN) \cap (ACD) \quad (5).$
- ♦ Vì $P = IE \cap CD$
- ♦ Nên $\begin{cases} P \in (IMN) \\ P \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow P \in (IMN) \cap (ACD) \quad (6).$
- ♦ Từ (5) và (6) suy ra $(IMN) \cap (ACD) = NP$.



Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

Cho tứ diện $S.ABC$. Lấy $M \in SB, N \in AC, I \in SC$ sao cho MI không song song với BC , NI không song song với SA . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt và .

❶. (MNI) và (ABC) .

❷. (MNI) và (SAB) .

Lời giải

❶. (MNI) và (ABC) .

♦ Trong mặt phẳng (SBC) , kéo dài IM cắt BC tại G .

$$\begin{cases} G \in MI, MI \subset (MNI) \\ G \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow G$ là điểm chung I của (MNI) và (ABC) .

$$\begin{cases} N \in (MNI) \\ N \in AC, AC \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow N$ là điểm chung II của (MNI) và (ABC) .

♦ Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNI) là NG .

❷. (MNI) và (SAB) .

♦ Trong mặt phẳng (ABC) , nối NG cắt AB tại D .

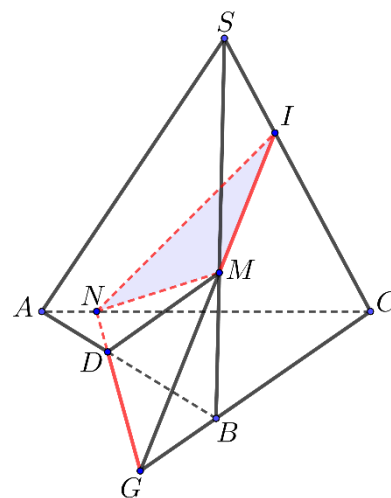
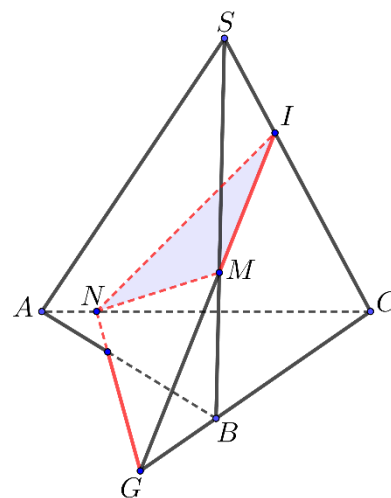
$$\begin{cases} D \in AB, AB \subset (ABC) \\ D \in NG, NG \subset (MNI) \end{cases}$$

$\Rightarrow D$ là điểm chung I của hai mặt phẳng (MNI) và (SAB) .

$$\begin{cases} M \in (MNI) \\ M \in SB, SB \subset (SAB) \end{cases}$$

$\Rightarrow M$ là điểm chung II của hai mặt phẳng (MNI) và (SAB) .

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MNI) và (SAB) là MD .



Bài 04.

Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD , N là một điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

❶. (AMN) và (BCD) .

❷. (DMN) và (ABC) .

Lời giải

1. (AMN) và (BCD) .

♦ Trong mặt phẳng (ABD) , AM cắt BD tại E ;

♦ Trong mặt phẳng (BCD) , EN cắt DC tại F .

$$\begin{cases} E \in AM, AM \subset (AMN) \\ E \in DB, DB \subset (BCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow E$ là điểm chung I của (AMN) và (BCD) .

$$\begin{cases} F \in EN, EN \subset (AMN) \\ F \in DC, DC \subset (BCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow F$ là điểm chung II của (AMN) và (BCD)

♦ Vậy EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) ; (BCD)

2. (DMN) và (ABC) .

♦ Trong mặt phẳng (ABD) , DM cắt AB tại G ;

♦ Trong mặt phẳng (BDC) , DN cắt BC tại H

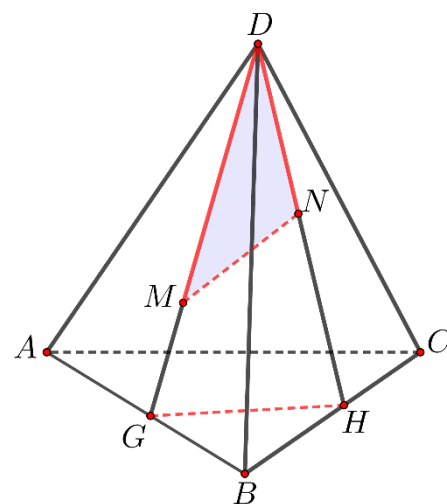
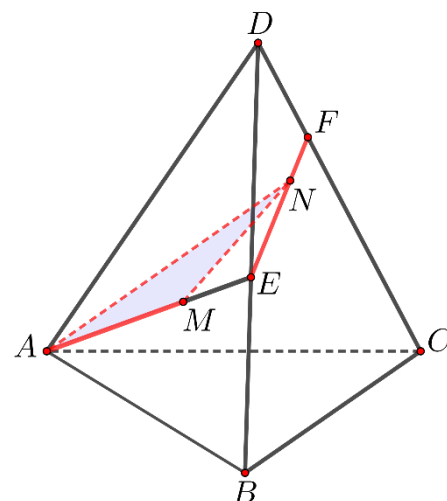
$$\begin{cases} G \in DM, DM \subset (DMN) \\ G \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow G$ là điểm chung I của 2 mặt phẳng (ABC) và (DMN) .

$$\begin{cases} H \in DN, DN \subset (DMN) \\ H \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow H$ là điểm chung II của 2 mặt phẳng (ABC) và (DMN)

Vậy GH là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) ; (ABC)



Bài 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA . Tìm giao tuyến của:

1. (MNP) và (SAB) .

2. (MNP) và (SAD) .

3. (MNP) và (SBC) .

4. (MNP) và (SCD)

Lời giải

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt AB, AD lần lượt tại F và G

Trong mặt phẳng (SAB) nối FP cắt SB tại H .

Trong mặt phẳng (SAD) nối GP cắt SD tại I .

1. (MNP) và (SAB) .

$$\begin{cases} H \in FP, FP \subset (MNP) \\ H \in SB, SB \subset (SAB) \end{cases}$$

$\Rightarrow H$ là điểm chung thứ I của $(MNP); (SAB)$

♦ P là điểm chung thứ II của $(MNP); (SAB)$

♦ Vậy giao tuyến của (MNP) và (SAB) là PH

2. (MNP) và (SAD) .

$$\begin{cases} I \in GP, GP \subset (MNP) \\ I \in SD, SD \subset (SAD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I$ là điểm chung thứ I của $(MNP); (SAD)$

♦ P là điểm chung thứ II của $(MNP); (SAD)$

♦ Vậy giao tuyến của (MNP) và (SAD) là PI

3. (MNP) và (SBC) .

$$\begin{cases} H \in FP, FP \subset (MNP) \\ H \in SB, SB \subset (SBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow H$ là điểm chung thứ I của $(MNP); (SBC)$

♦ M là điểm chung thứ II của $(MNP); (SBC)$

♦ Vậy giao tuyến của (MNP) và (SBC) là MH

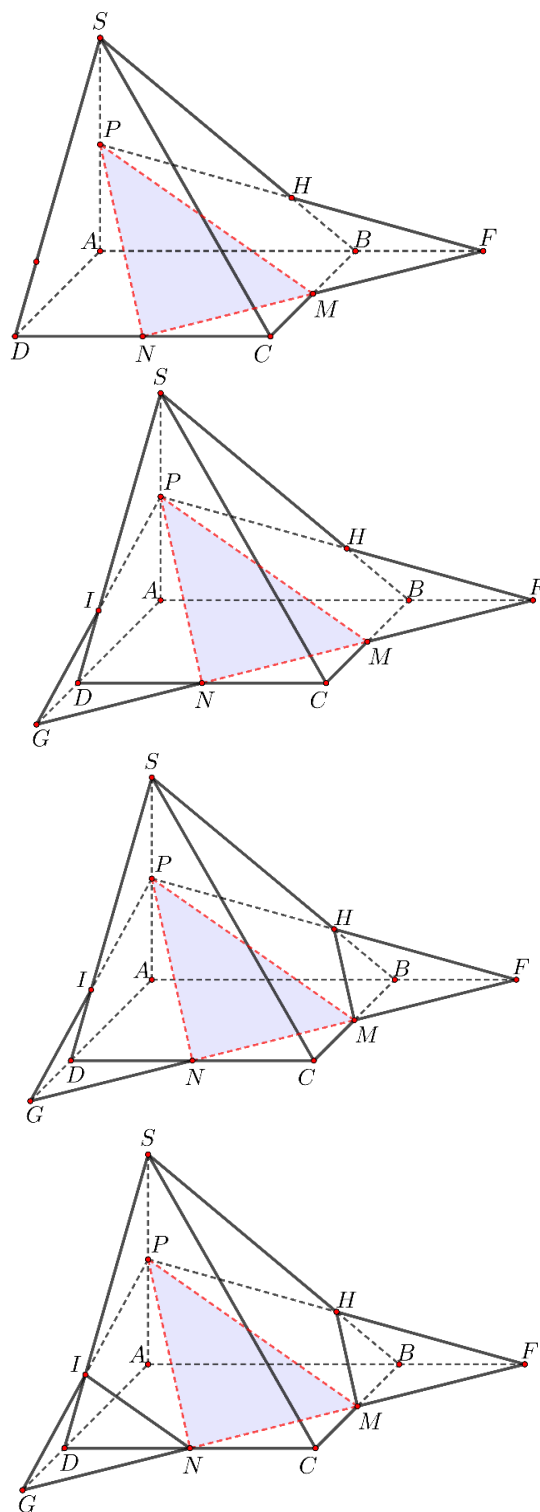
4. (MNP) và (SCD)

$$\begin{cases} I \in GP, GP \subset (MNP) \\ I \in SD, SD \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I$ là điểm chung thứ I của $(MNP); (SCD)$

♦ N là điểm chung thứ II của $(MNP); (SCD)$

♦ Vậy giao tuyến của (MNP) và (SCD) là IN



Bài 06.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ có các cạnh đối không song song. Hai điểm $M; G$ lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB; \triangle SAD; N \in SG (N \neq G), P$ nằm trong tứ giác $ABCD$. Tìm giao tuyến của:

1. (MNP) và $(ABCD)$.

2. (MNP) và (SAC) .

3. (MNP) và (SCD) .

Lời giải

❶. (MNP) và $(ABCD)$.

♦ Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD .

♦ Vì $N \neq G' \Rightarrow MN \cap EF = I$.

$$\begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \\ I \in EF, EF \subset (ABCD) \Rightarrow I \in (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (MNP) \cap (ABCD)$$

$$\Rightarrow I \in (MNP) \cap (ABCD)$$

♦ Lại có $P \in (MNP) \cap (ABCD)$.

♦ Vậy $(MNP) \cap (ABCD) = IP$.

❷. (MNP) và (SAC) .

♦ Trong $(ABCD)$ gọi $J = IP \cap AC, H = EF \cap AC$.

♦ Trong (SEF) gọi $K = MN \cap SH$.

$$\begin{cases} J \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC) \\ J \in IP, IP \subset (MNP) \Rightarrow J \in (MNP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SAC)$$

$$\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SAC)$$

$$\begin{cases} K \in SH, SH \subset (SAC) \Rightarrow K \in (SAC) \\ K \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in (MNP) \cap (SAC)$$

$$\Rightarrow K \in (MNP) \cap (SAC)$$

♦ Vậy $(MNP) \cap (SAC) = JK$.

❸. (MNP) và (SCD) .

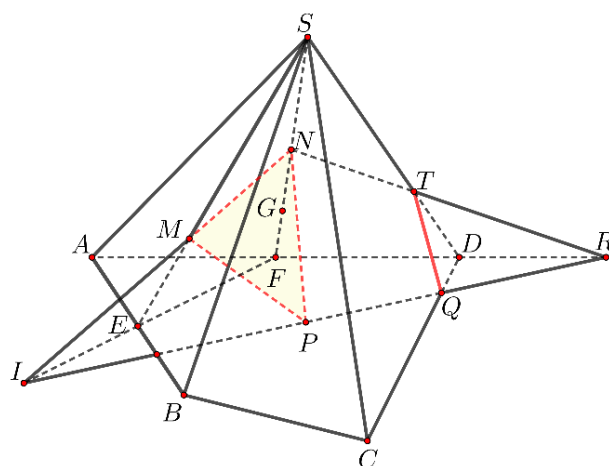
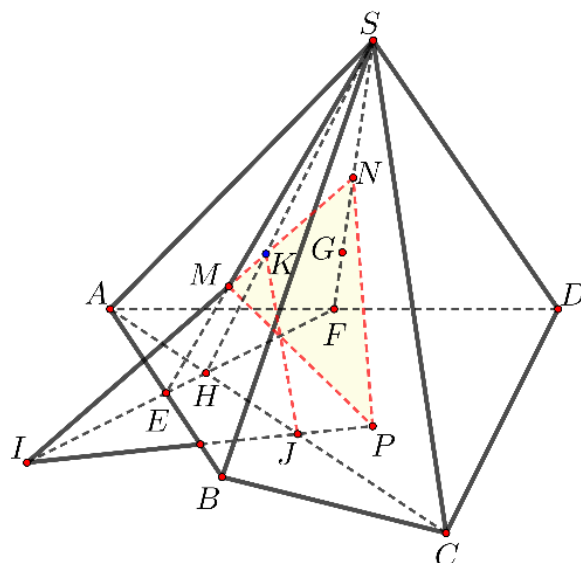
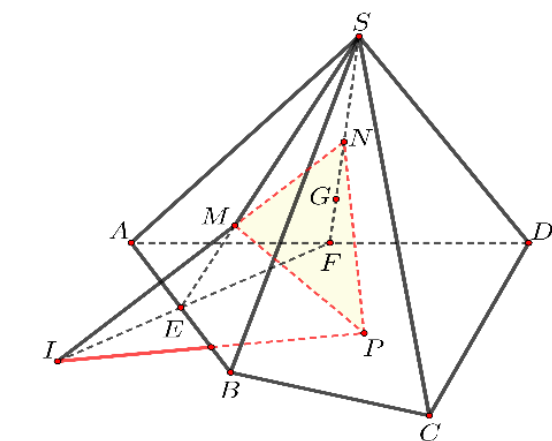
♦ Trong $(ABCD)$ gọi Q, R lần lượt là giao điểm của IP với CD, AD .

♦ Trong (SAD) gọi T là giao điểm của NR với SD ,

$$\begin{cases} Q \in CD, CD \subset (SCD) \\ Q \in IP, IP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q \in (MNP) \cap (SCD)$$

$$\begin{cases} T \in SD, SD \subset (SCD) \\ T \in NR, NR \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T \in (MNP) \cap (SCD)$$

♦ Vậy $(MNP) \cap (SCD) = QT$.



Biên Soạn: **LÊ MINH TÂM**

Bài 07.

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

❶. (SGG') và $(ABCD)$.

❷. $(CDGG')$ và (ABS) .

❸. (ADG') và (SBC) .

Lời giải

1. (SGG') và $(ABCD)$.

♦ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC , ta có

$$\begin{cases} M \in AD, AD \subset (ABCD) \\ M \in SG, SG \subset (SGG') \end{cases} \Rightarrow M \in (SGG') \cap (ABCD)$$

$$\begin{cases} N \in BC, BC \subset (ABCD) \\ N \in SG', SG' \subset (SGG') \end{cases} \Rightarrow N \in (SGG') \cap (ABCD)$$

♦ Vậy $(SGG') \cap (ABCD) = MN$.

2. $(CDGG')$ và (ABS) .

♦ Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB , ta có

$$\begin{cases} E \in SA, SA \subset (SAB) \\ E \in DG, DG \subset (CDGG') \end{cases} \Rightarrow E \in (CDGG') \cap (SAB)$$

$$\begin{cases} F \in SB, SB \subset (SAB) \\ F \in CG', CG' \subset (CDGG') \end{cases} \Rightarrow F \in (CDGG') \cap (SAB)$$

♦ Vậy $(CDGG') \cap (SAB) = EF$.

3. (ADG') và (SBC) .

♦ Trong mp $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap MN$.

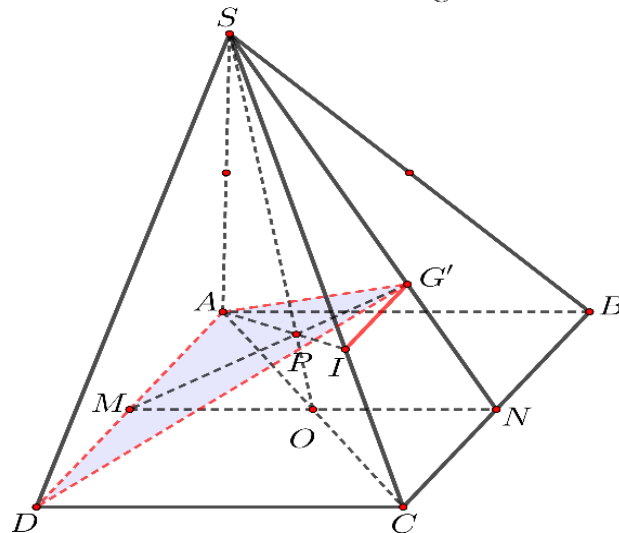
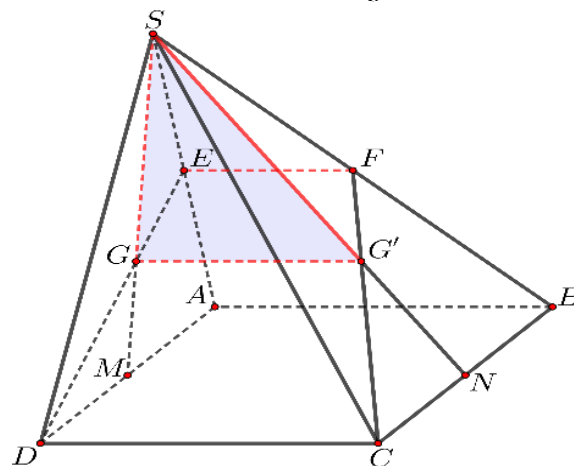
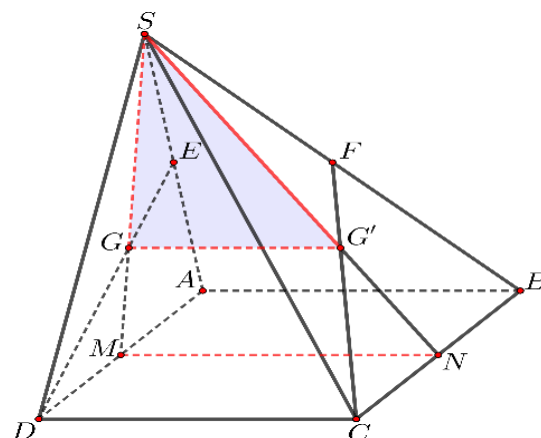
♦ Trong mp (SMN) , gọi $P = G'M \cap SO$.

♦ Trong mp (SAC) , gọi $I = AP \cap SC$. Ta có

$$\begin{cases} I \in AP, AP \subset (ADG') \\ I \in SC, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (ADG') \cap (SBC)$$

♦ Lại có $G' \in (ADG') \cap (SBC)$.

♦ Vậy $(ADG') \cap (SBC) = IG'$.



Bài 08.

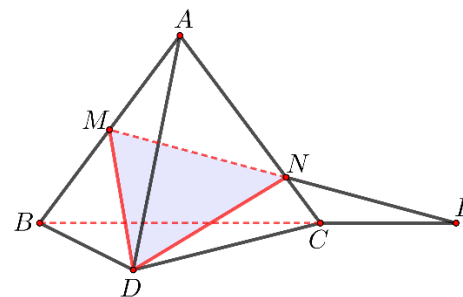
Cho tứ diện $ABCD$. Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (DMN) .

Lời giải

♦ Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} = \frac{AN}{AC}$ nên theo định lý

talet $MN \cap BC = I$.

♦ Vậy $\begin{cases} I \in BC \\ I \in (DMN) \end{cases} \Rightarrow I = BC \cap (DMN)$.



Bài 09.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J là trung điểm của SA, SB . Lấy điểm M tùy ý trên SD . Tìm giao điểm của:

❶. IM và (SBC) .

❷. JM và (SAC) .

❸. SC và (IJM) .

Lời giải

❶. IM và (SBC) .

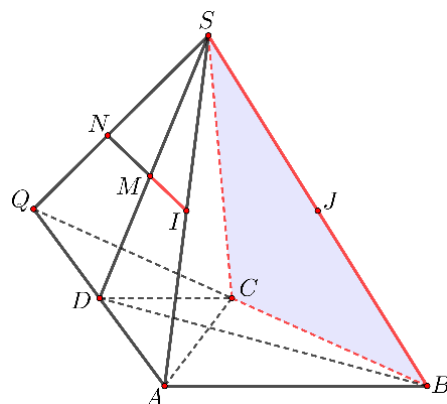
♦ Ta có $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB nên gọi $Q = BC \cap AD$.

♦ Và $(SBC) \cap (SAD) = S$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = SQ$

♦ Trong (SAD) gọi $N = IM \cap SQ$

$\Rightarrow N = IM \cap (SBC)$.

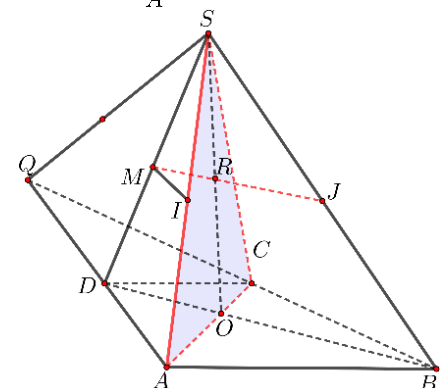


❷. JM và (SAC) .

♦ Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

♦ Trong mặt phẳng (SAC) gọi $R = JM \cap SO$.

$\Rightarrow \begin{cases} R \in (SAC) \\ R \in JM \end{cases} \Rightarrow R = JM \cap (SAC)$

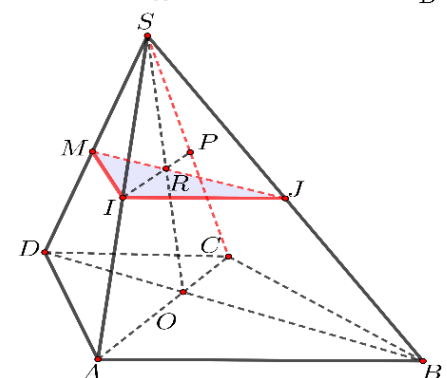


❸. SC và (IJM) .

♦ Ta có $\begin{cases} R \in JM \\ JM \in (IJM) \end{cases} \Rightarrow R \in (IJM)$

♦ Trong (SAC) gọi

$P = IR \cap SC \Rightarrow \begin{cases} P \in (IJM) \\ P \in SC \end{cases} \Rightarrow P = SC \cap (IJM)$.



Bài 10.

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi E là trung điểm SC .

1. Tìm giao tuyến của (BDE) và (SAC) .
2. Tìm giao tuyến của (ABE) và (SBD) .
3. Tìm giao điểm của SD và (ABE) .

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (BDE) và (SAC) .

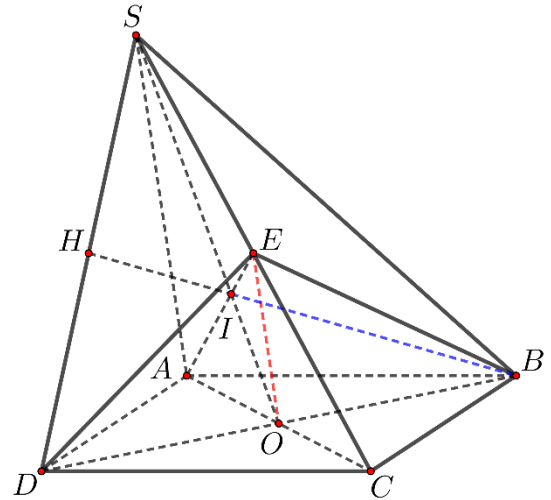
♦ Ta có: $\begin{cases} O \in (BED) \cap (SAC) \\ E \in (BED) \cap (SAC) \end{cases}$
 $\Rightarrow OE = (BED) \cap (SAC)$.

2. Tìm giao tuyến của (ABE) và (SBD) .

♦ Trong mp (SAC) , gọi $I = SO \cap AE$. Khi đó:
 $\begin{cases} B \in (ABE) \cap (SBD) \\ I \in (ABE) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow BI = (ABE) \cap (SBD)$.

3. Tìm giao điểm của SD và (ABE) .

♦ Trong (SBD) , gọi $H = SD \cap IB$
 $\Rightarrow H = SD \cap (ABE)$.



Bài 11.

Cho hình chóp $SABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD , P là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SP = 3PB$.

1. Tìm giao điểm Q của SC và (MNP) .
2. Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải

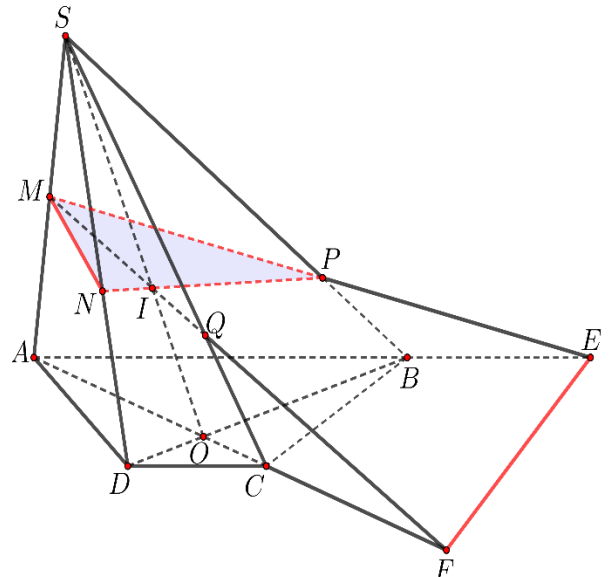
1. Tìm giao điểm Q của SC và (MNP) .

♦ Gọi O là giao điểm của AC và BD ,
 I là giao điểm của SO và NP .

♦ Ta có: $\begin{cases} M \in (SAC) \cap (MNP) \\ I \in (SAC) \cap (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow MI = (SAC) \cap (MNP)$.

♦ Trong (SAC) , gọi $Q = MI \cap SC$
 $\Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$.

2. Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.



- ♦ Trong (SAB) , gọi $E = MP \cap AB \Rightarrow E \in (ABCD) \cap (MNP)$ (1).
- ♦ Trong (SAC) , gọi $F = MQ \cap AC \Rightarrow F \in (ABCD) \cap (MNP)$ (2).
- ♦ Từ (1) và (2) suy ra $EF = (ABCD) \cap (MNP)$.

Bài 07.

Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD . Gọi O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD .

- ❶. Tìm giao tuyến của (BCD) và (OMN) .
- ❷. Tìm giao điểm của BD và (OMN) .
- ❸. Tìm giao điểm của BC và (OMN) .
- ❹. Tìm giao điểm của MN và (ABO) .
- ❺. Tìm giao điểm của AO và (BMN) .

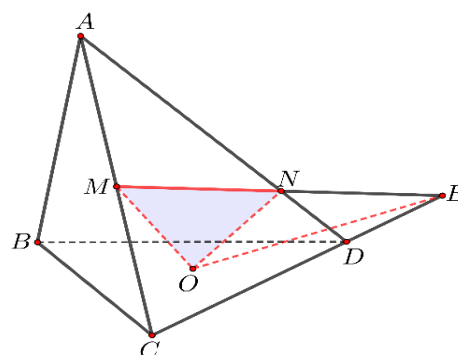
Lời giải

- ❶. Tìm giao tuyến của (BCD) và (OMN) .

- ♦ Trong mp (ABD) , gọi $E = MN \cap CD$.

$$\text{♦ Ta có: } \begin{cases} O \in (OMN) \cap (BCD) \\ E \in (OMN) \cap (BCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OE = (OMN) \cap (BCD)$$



- ❷. Tìm giao điểm của BD và (OMN) .

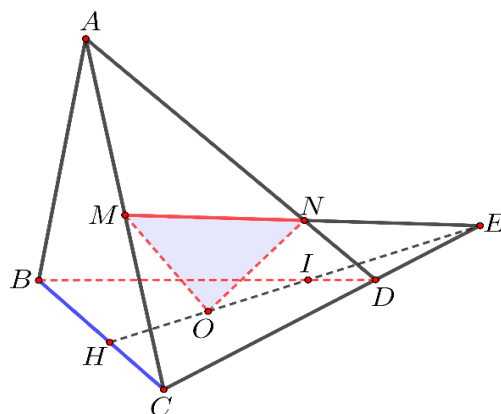
- ♦ Trong (BCD) , gọi $I = OE \cap BD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in BD \\ I \in OE, OE \in (OMN) \end{cases} \rightarrow I = BD \cap (OMN).$$

- ❸. Tìm giao điểm của BC và (OMN) .

- ♦ Trong (BCD) , gọi $H = OE \cap BC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in BC \\ H \in OE, OE \in (OMN) \end{cases} \rightarrow H = BC \cap (OMN).$$



- ❹. Tìm giao điểm của MN và (ABO) .

- ♦ Trong (BCD) , gọi $K = OB \cap CD$.

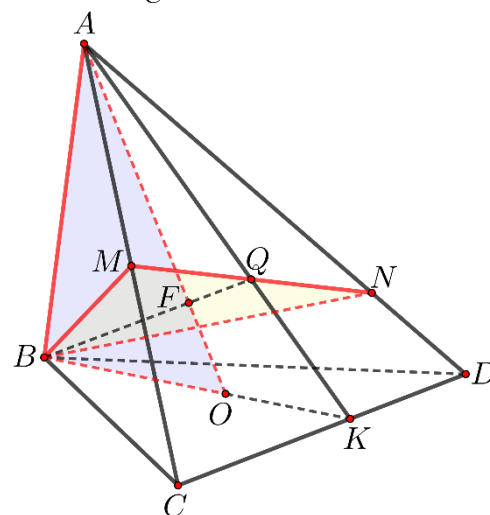
- ♦ Trong (ACD) , gọi $Q = MN \cap AK$.

- ♦ Suy ra $Q = MN \cap (ABO)$.

- ❺. Tìm giao điểm của AO và (BMN) .

- ♦ Trong (ABK) , gọi $F = AO \cap BQ$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AO \\ F \in BQ, BQ \in (OMN) \end{cases} \rightarrow F = AO \cap (BMN)$$



Bài 08.

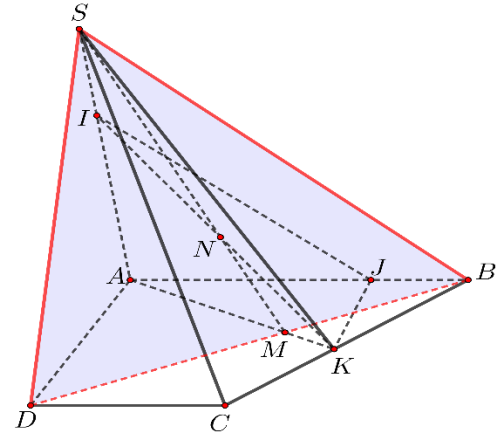
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J, K là ba điểm trên SA, AB, BC .

1. Tìm giao tuyến IK với (SBD) .
2. Tìm các giao điểm của (IJK) với SD và SC .

Lời giải

1. Tìm giao tuyến IK với (SBD) .

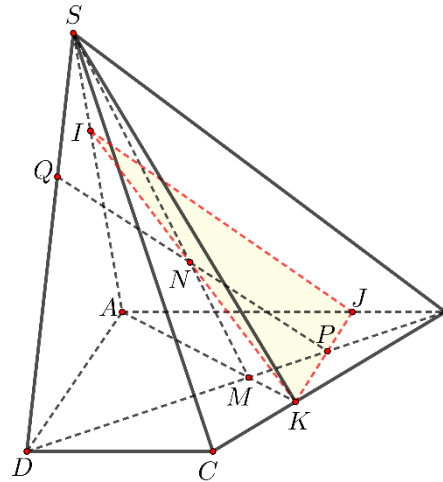
- ♦ Trong $(ABCD)$, vẽ $AK \cap BD = M$
- ♦ Trong (SAK) , vẽ $SM \cap IK = N$
- $\Rightarrow \begin{cases} N \in SM \subset (SBD) \\ N \in IK \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow IK \cap (SBD) = N$.



2. Tìm các giao điểm của (IJK) với SD và SC .

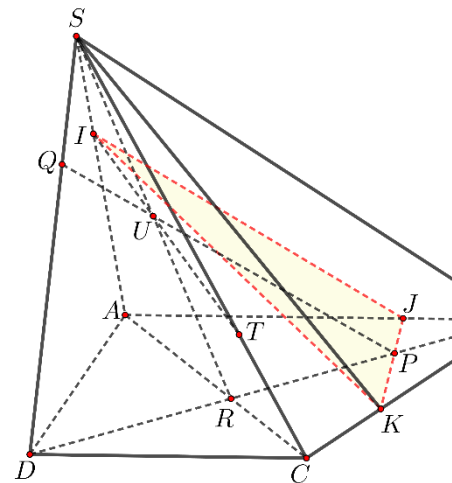
* Tìm giao điểm của (IJK) với SD

- ♦ Trong $(ABCD)$, vẽ $JK \cap BD = P$
- $\Rightarrow \begin{cases} P \in BD \subset (SBD) \\ P \in IK \subset (IJK) \end{cases}$
- ♦ Ta đã có $IK \cap (SBD) = N$ (theo CMT)
- ♦ Trong (SBD) , vẽ $PN \cap SD = Q$
- $\Rightarrow \begin{cases} Q \in SD \\ Q \in PN \subset (IJK) \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow SD \cap (IJK) = Q$.



* Tìm giao điểm của (IJK) với SC

- ♦ Trong $(ABCD)$, vẽ $AC \cap BD = R$
- ♦ Trong (SBD) , vẽ $PQ \cap SR = U$
- $\Rightarrow \begin{cases} U \in SR \subset (SAC) \\ U \in PQ \subset (IJK) \end{cases}$
- ♦ Trong (SAC) , vẽ $IU \cap SC = T$
- $\Rightarrow \begin{cases} T \in SC \\ T \in IU \subset (IJK) \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow SC \cap (IJK) = T$.



Bài 08.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SB ; N là trọng tâm tam giác SCD . Xác định giao điểm của:

1. MN với $(ABCD)$.
2. MN với (SAC) .
3. SC với (AMN) .
4. SA với (CMN) .

Lời giải

1. MN với $(ABCD)$.

- ♦ Vì N là trọng tâm tam giác SCD .
- ♦ Nên trong (SCD) , vẽ $SN \cap CD = P$
- ♦ Trong (SBP) , vẽ $MN \cap BP = Q$
- $\Rightarrow \begin{cases} Q \in MN \\ Q \in BP \subset (ABCD) \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow MN \cap (ABCD) = Q$.

2. MN với (SAC) .

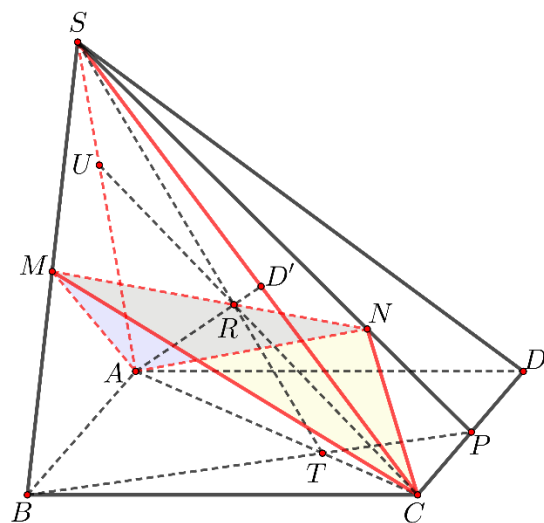
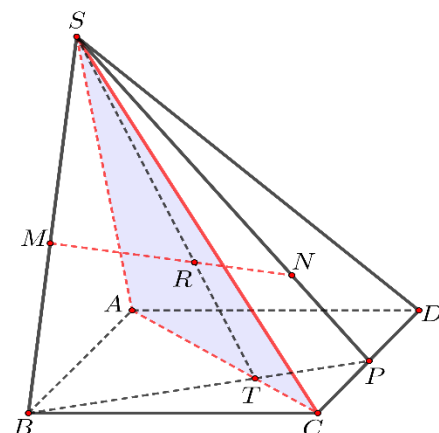
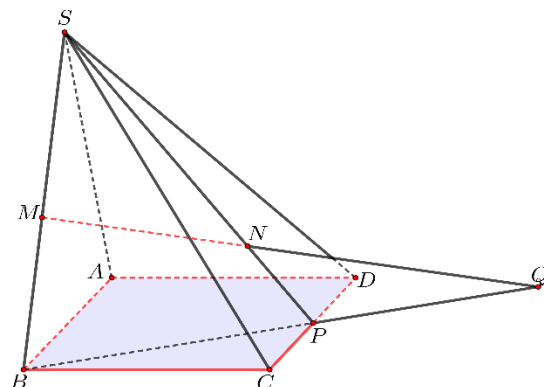
- ♦ Trong $(ABCD)$, vẽ $BP \cap AC = T$
- $\Rightarrow \begin{cases} T \in AC \\ T \in BP \subset (SBQ) \end{cases}$
- ♦ Trong (SBQ) , vẽ $ST \cap MN = R$
- $\Rightarrow \begin{cases} R \in ST \subset (SAC) \\ R \in MN \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow MN \cap (SAC) = R$.

3. SC với (AMN) .

- ♦ Trong (SAC) , vẽ $AR \cap SC = D'$
- $\Rightarrow \begin{cases} D' \in SC \\ D' \in AR \subset (AMN) \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow SC \cap (AMN) = D'$.

4. SA với (CMN) .

- ♦ Trong (SAC) , vẽ $CR \cap SA = U$
- $\Rightarrow \begin{cases} U \in SA \\ U \in CR \subset (CMN) \end{cases}$
- ♦ $\Rightarrow SA \cap (CMN) = U$.



Bài 09.

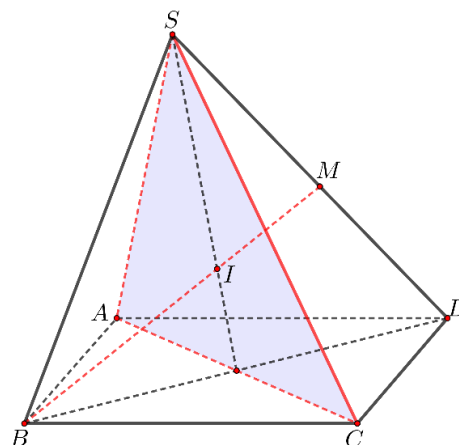
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD .

1. Tìm giao điểm I của BM với (SAC) . Chứng minh $BI = 2IM$.
2. Tìm giao điểm E của SA và (BCM) . Chứng minh E là trung điểm của SA .

Lời giải

1. Tìm giao điểm I của BM với (SAC) . Chứng minh $BI = 2IM$.

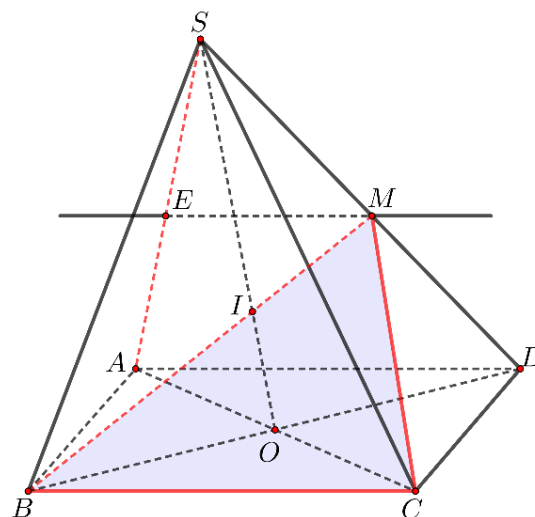
- ♦ Gọi $O = AC \cap BD$.
 - ♦ Ta có, $SO = (SAC) \cap (SBD)$.
 - ♦ Trong (SBD) , gọi $I = SO \cap BM$
- $$\Rightarrow \begin{cases} I \in SO \subset (SAC) \\ I \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in BM \end{cases} \Rightarrow I = BM \cap (SAC).$$
- ♦ $\triangle SBD$ có SO và BM là đường trung tuyến,
 - ♦ Mà $I = SO \cap BM$
 - ♦ Nên I là trọng tâm của $\triangle SBD$.
 - ♦ Do đó, $BI = 2IM$.



2. Tìm giao điểm E của SA và (BCM) . Chứng minh E là trung điểm của SA .

⊙ Tìm $(SAD) \cap (BCM)$:

- ♦ Ta có $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (BCM) \text{ và có chung điểm } M \\ AD \parallel BC \end{cases}$
- ♦ Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (BCM) là đường thẳng đi qua M và song song AD , BC cắt SA tại E .
- ♦ Suy ra, E là giao điểm của SA và (BCM) .
- ♦ Xét tam giác SAD có $ME \parallel AD$
- ♦ Mà M là trung điểm của cạnh SD ,
- ♦ Suy ra E là trung điểm của SA .



Bài 10.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB là đáy lớn và $AB = 3CD$. Gọi N là trung điểm CD , M là điểm trên cạnh SB thỏa mãn $SM = 3MB$; I là điểm trên cạnh SA thỏa mãn $AI = 3IS$.

1. Tìm giao điểm của MN và (SAD) .
2. Gọi H là giao điểm của CB và (IMN) . Tính $\frac{HB}{HC}$?

Lời giải

❶. Tìm giao điểm của MN và (SAD) .

♦ Tìm giao tuyến của (SBN) và (SAD) .

♦ Trong $(ABCD)$, gọi $P = BN \cap AD$

$\Rightarrow P \in (SBN) \cap (SAD) \Rightarrow SP = (SBN) \cap (SAD)$.

♦ Trong (SBN) , gọi $K = SP \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in SP \subset (SAD) \\ K \in MN \end{cases} \Rightarrow K = MN \cap (SAD)$.

❷. Gọi H là giao điểm của CB và (IMN) . Tính $\frac{HB}{HC}$?

⊙ Tìm giao tuyến của $(ABCD)$ và (IMN) .

♦ Ta có, $N \in DC \Rightarrow N \in (ABCD) \cap (IMN)$ (1).

♦ Trong (SAB) , gọi $Q = IM \cap AB$

$\Rightarrow \begin{cases} Q \in IM \subset (IMN) \\ Q \in AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow Q \in (ABCD) \cap (IMN)$ (2).

♦ Từ (1) và (2) suy ra, $NQ = (ABCD) \cap (IMN)$.

♦ Trong $(ABCD)$, gọi $H = CB \cap NQ$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in CB \\ H \in NQ \subset (IMN) \end{cases} \Rightarrow H = CB \cap (IMN)$.

⊙ Tính $\frac{HB}{HC}$:

♦ Xét tam giác SAB có $I \in SA; M \in SB; Q \in AB$. Do 3 điểm I, M, Q thẳng hàng

♦ Nên theo định lý Menelaus ta có: $\frac{IS}{IA} \cdot \frac{QA}{QB} \cdot \frac{MB}{MS} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{QA}{QB} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QB} = 9 \Rightarrow QA = 9QB \Rightarrow AB = 8QB \Rightarrow 6NC = 8QB \Rightarrow \frac{QB}{NC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

♦ Mặt khác, $NC \parallel QB \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{QB}{NC} = \frac{3}{4}$.

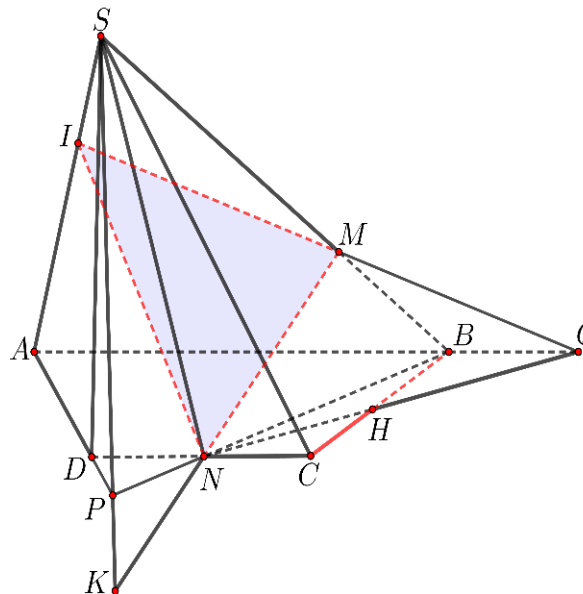
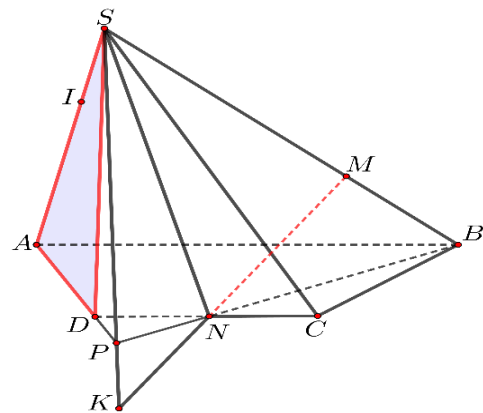
Bài 11.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm $P \in SC$ và không là trung điểm của SC .

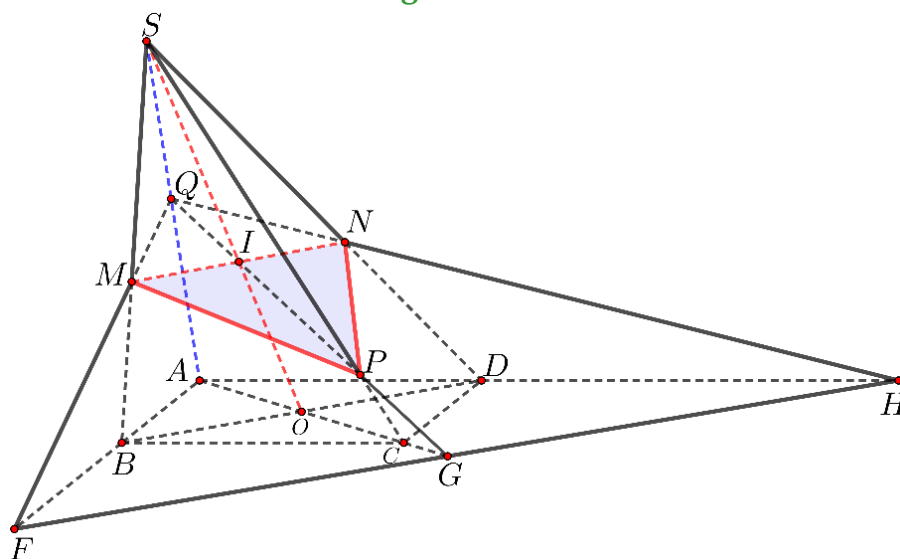
❶. Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (MNP) .

❷. Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP) .

❸. Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.



Lời giải



- ❶. Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (MNP) .
 - ♦ Ta có MN, SO đều thuộc mặt phẳng (SBD) ,
 - ♦ Gọi $I = MN \cap SO \Rightarrow I = SO \cap (MNP)$
- ❷. Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP) .
 - ♦ Ta có IP, SA cùng thuộc mặt phẳng (SAC) .
 - ♦ Gọi $Q = IP \cap SA, IP \subset (MNP) \Rightarrow Q = SA \cap (MNP)$
- ❸. Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD .
 Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.
 - ♦ Ta có $F = QM \cap AB \Rightarrow F \in (MNP) \cap (ABCD)$.
 - ♦ $G = QP \cap AC \Rightarrow G \in (MNP) \cap (ABCD)$
 - ♦ $H = QN \cap AD \Rightarrow H \in (MNP) \cap (ABCD)$
 - ♦ Vậy F, G, H là ba điểm chung của (MNP) và $(ABCD)$
 Nên F, G, H thẳng hàng.

📌 Bài 12.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song với AD . Gọi M là trung điểm của SC và O là giao điểm của AC và BD .

- ❶. Tìm giao điểm N của SD với mặt phẳng (MAB) .
- ❷. Chứng minh: SO, AM, BN đồng quy.

Lời giải

- ❶. Tìm giao điểm N của SD với mặt phẳng (MAB) .
- ♦ Ta có AM, SO cùng thuộc mặt phẳng (SAC) ,
 - ♦ Gọi $I = SO \cap AM \Rightarrow I \in (ABM) \Rightarrow BI \subset (ABM)$.
 - ♦ Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $N = BI \cap SD$

$$\begin{cases} N \in SD \\ N \in BI \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (ABM).$$

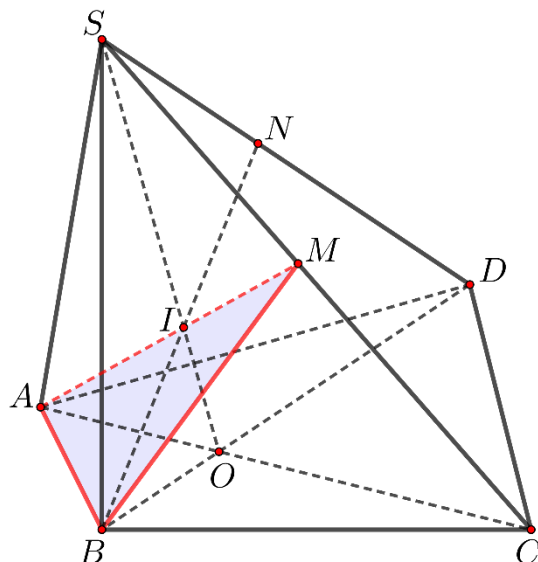
- ❷. Chứng minh: SO, AM, BN đồng quy.

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ O \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$$

$$\begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$$

$\longrightarrow SO, AM, BN$ đồng quy tại I .



Bài 13.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ có các cạnh đối không song song $AC \cap BD = O$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC .

- ❶. Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.
- ❷. $AC \cap DB = O, EH \cap FK = I$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.
- ❸. $AD \cap BC = M, EK \cap FH = N$. Chứng minh S, M, N thẳng hàng.
- ❹. $AB \cap CD = P, EF \cap HK = Q$. Chứng minh A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải

- ❶. Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.

$$\begin{aligned} &\text{♦ Trong } (SAC): \\ &I = SO \cap EH \Rightarrow (SBD) \cap (EFH) = FI \\ &\text{♦ Trong } (SDB): K = SD \cap FI \Rightarrow K = SD \cap (EFH) \end{aligned}$$

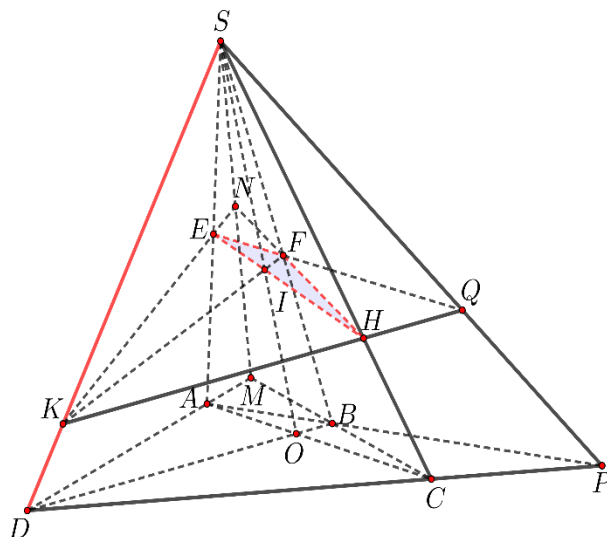
- ❷. $AC \cap DB = O, EH \cap FK = I$.

Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

$$\begin{aligned} &\text{♦ } EH \cap FK = I \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD). \\ &\text{♦ Mặt khác } (SBD) \cap (SAC) = SO \Rightarrow I \in SO \\ &\Rightarrow S, I, O \text{ thẳng hàng.} \end{aligned}$$

- ❸. $AD \cap BC = M, EK \cap FH = N$. Chứng minh S, M, N thẳng hàng.

$$\begin{aligned} &\text{♦ } EK \cap FH = N \Rightarrow N \in d = (SAD) \cap (SBC) \\ &\text{♦ Mặt khác } (SAD) \cap (SBC) = SM \Rightarrow N \in SM \end{aligned}$$



$\Rightarrow S, M, N$ thẳng hàng.

④. $AB \cap CD = P, EF \cap HK = Q$. Chứng minh A, P, Q thẳng hàng.

♦ $EF \cap HK = Q \Rightarrow Q \in (SAB) \cap (SCD)$.

♦ Mặt khác $(SAB) \cap (SCD) = SP \Rightarrow I \in SP$

$\Rightarrow S, P, Q$ thẳng hàng.

Bài 14.

Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB

①. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC), (SBI)$.

②. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

③. AD cắt BC tại O, OJ cắt SC tại M . Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

Lời giải

①. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC), (SBI)$.

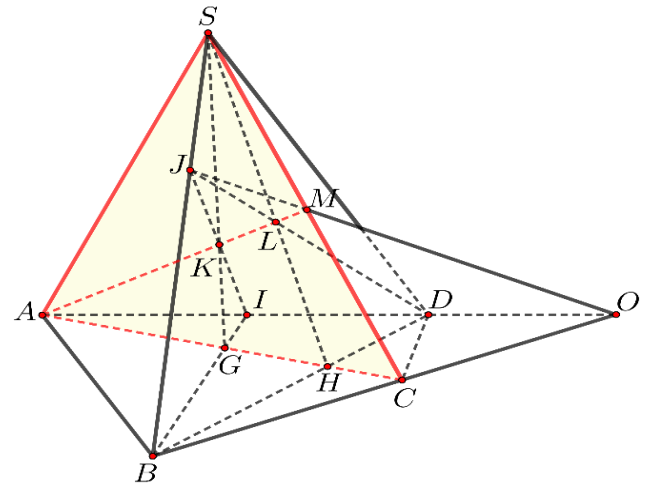
Tìm giao điểm K của IJ và (SAC) .

♦ Trong $(ABCD)$

$$G = AC \cap BI \Rightarrow SG = (SAC) \cap (SBI).$$

♦ Ta có:
$$\begin{cases} IJ \subset (SBI) \\ (SBI) \cap (SAC) = SG \\ K = IJ \cap (SAC) \end{cases}$$

♦ $\Rightarrow K = IJ \cap SG$ trong (SAC) .



②. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) . Tìm giao điểm L của DJ và (SAC)

♦ Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH = (SAC) \cap (SDB)$

♦ Ta có:
$$\begin{cases} DJ \subset (SBD) \\ (SBD) \cap (SAC) = SH \Rightarrow L = DJ \cap SH \text{ trong } (SAC) \\ L = DJ \cap (SAC) \end{cases}$$

③. AD cắt BC tại O, OJ cắt SC tại M . Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

♦ A, K, L, M thuộc các đường thẳng $OA, IJ, JD, JO \Rightarrow A, K, L, M \in (AOJ)$

♦ A, K, L, M thuộc các đường thẳng $AC, SG, SH, SC \Rightarrow A, K, L, M \in (SAC)$

♦ $\Rightarrow I, K, L, M \in (SAC) \cap (OAJ)$ nên A, K, L, M thẳng hàng.

Bài 15.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB ; lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SC, SD . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(ABM); (AMN)$

①. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (ABM) .

②. Xác định thiết diện của hình chóp với (AMN) .

Lời giải

❶. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (ABM) :

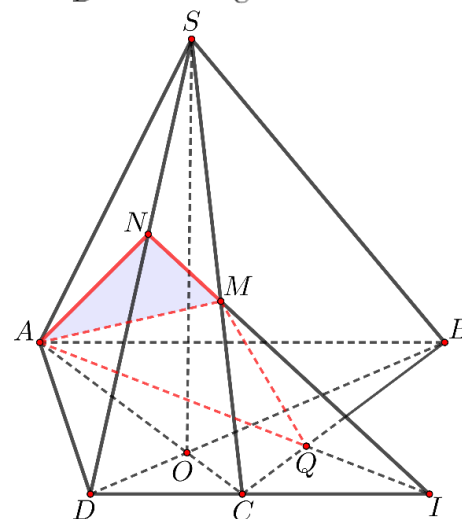
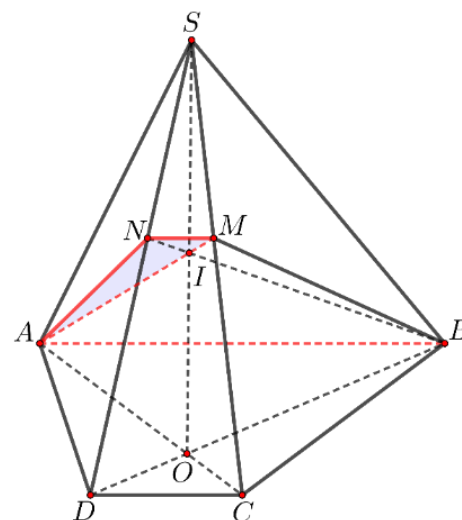
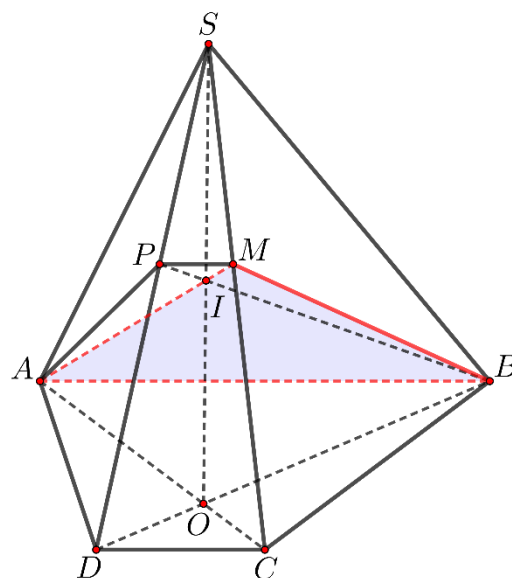
- ♦ Gọi $O = AC \cap BD$
- ♦ Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap AM$
- ♦ Trong (SCD) , gọi $P = BI \cap SD$
 $\Rightarrow P \in (SCD) \cap (ABM)$.
- ♦ Ta có :
 $(ABM) \cap (SBC) = BM$.
 $(ABM) \cap (SCD) = MP$
 $(ABM) \cap (SAD) = AP$.
- ♦ Vậy thiết diện là hình thang $ABMP$ (Vì $AB // MP$)

❷. Xác định thiết diện của hình chóp với (AMN) .

⊙ Nếu $MN \parallel AB$: $(AMN) \equiv (ABMN) \Rightarrow$ thiết diện cần tìm là tứ giác $ABMN$.

⊙ Nếu MN không song song AB :

- ♦ Trong mặt phẳng (SCD) , gọi $I = MN \cap CD$
- ♦ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $Q = AI \cap BC$.
- ♦ Ta có:
 $(AMN) \cap (SAD) = AN$
 $(AMN) \cap (ABCD) = AQ$
 $(AMN) \cap (SCD) = QM$
 $(AMN) \cap (SCD) = MN$
- ♦ Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $AQMN$.



Bài 16.

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

- ❶. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .
- ❷. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .
- ❸. Gọi N là trung điểm của AD , tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

- ❶. Tìm giao tuyến của (SAB) và (PCD) .

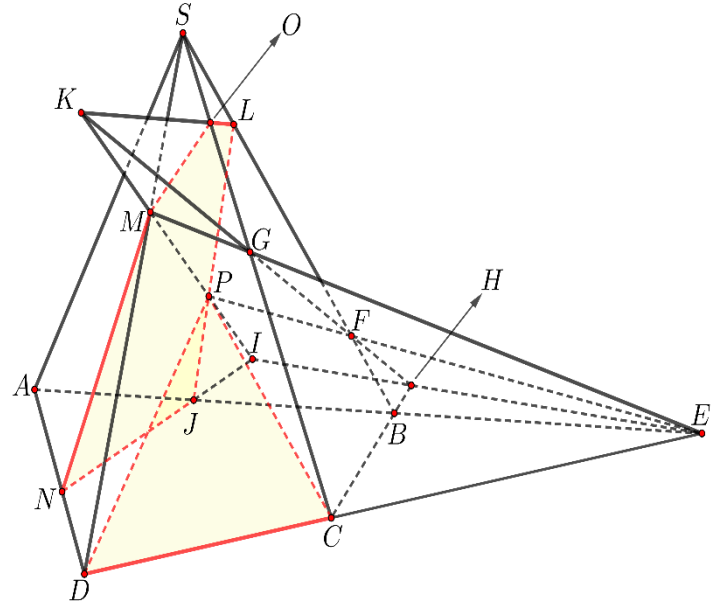
- ♦ Ta có P là điểm chung thứ I.
- ♦ Gọi $E = AB \cap CD$
Nên E là điểm chung thứ II.
 $\Rightarrow PE = (SAB) \cap (PCD)$

- ❷. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM)

- ♦ Chọn $(SCD) \supset SC$.
- ♦ Ta có: $M \in (SCD) \cap (ABM)$
- ♦ Nên M là điểm chung thứ I.
- ♦ $E = AB \cap CD$ nên E là điểm chung thứ II.
- ♦ $\Rightarrow (SCD) \cap (ABM) = ME$
- ♦ Gọi $G = SC \cap ME \Rightarrow SC \cap (ABM) = \{G\}$

- ❸. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$.

- ♦ Ta có $(MNP) \cap (SAD) = MN$
- ♦ Gọi $\begin{cases} F = PE \cap SB \\ H = GF \cap CB \end{cases}$ và $\begin{cases} I = EH \cap MP \\ J = AB \cap NI \end{cases} \Rightarrow J \in (MNP)$
- ♦ Gọi $\begin{cases} PJ \cap SB = L \\ MP \cap FG = K \\ O = KL \cap SC \end{cases}$
- ♦ Suy ra thiết diện của (MNP) và $S.ABCD$ là ngũ giác $MNJLO$.



Bài 17.

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi K là trọng tâm tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD, SD .

- ❶. Tìm giao điểm H của IK với mặt phẳng (SAB) .
- ❷. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

❶. Tìm giao điểm H của IK với (SAB) .

- ♦ Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$.
- ♦ Vì K là trọng tâm tam giác SAC nên $K \in SO$.

♦ Gọi $E = IO \cap AB \Rightarrow IK \subset (SIE)$

♦ Ta có:

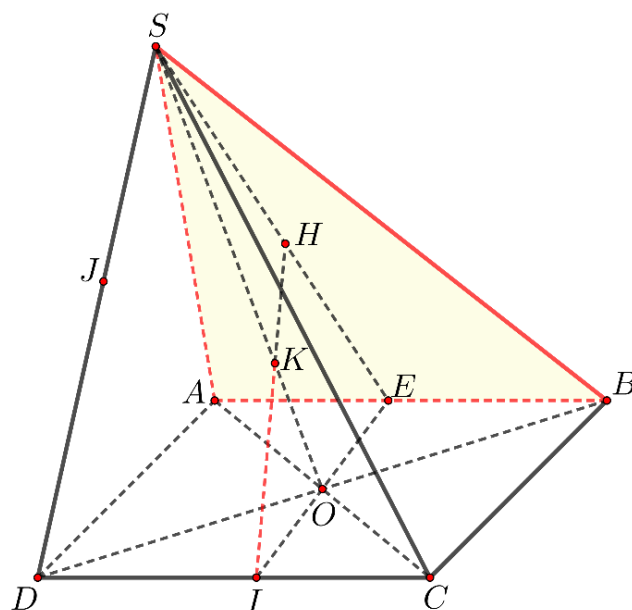
S là điểm chung thứ I của (SAB) và (SIE)

E là điểm chung thứ II của (SAB) và (SIE)

$$\Rightarrow (SAB) \cap (SIE) = SE$$

♦ Gọi $IK \cap SE = H$

$$\Rightarrow IK \cap (SIE) = \{H\}.$$



❷. Xác định thiết diện tạo bởi (IJK) và $S.ABCD$.

♦ Xét tam giác SBD có SO là trung tuyến

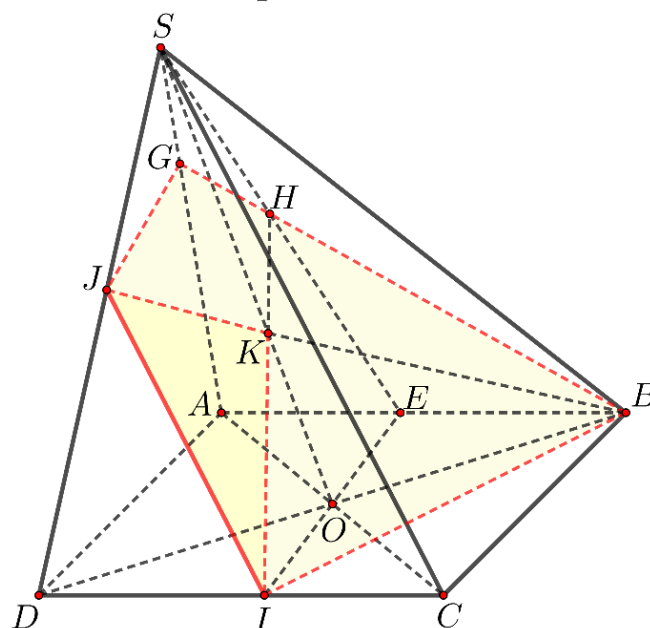
$$SK = \frac{2}{3}SO,$$

♦ Nên K là trọng tâm suy ra $B \in JK$.

♦ Gọi $G = BH \cap SA$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (IJK) \cap (ABCD) = BI \\ (IJK) \cap (SAB) = BG \\ (IJK) \cap (SAD) = GJ \\ (IJK) \cap (SCD) = JI \end{array} \right.$$

♦ Suy ra thiết diện là tứ giác $BIJG$.



🔗 Bài 18.

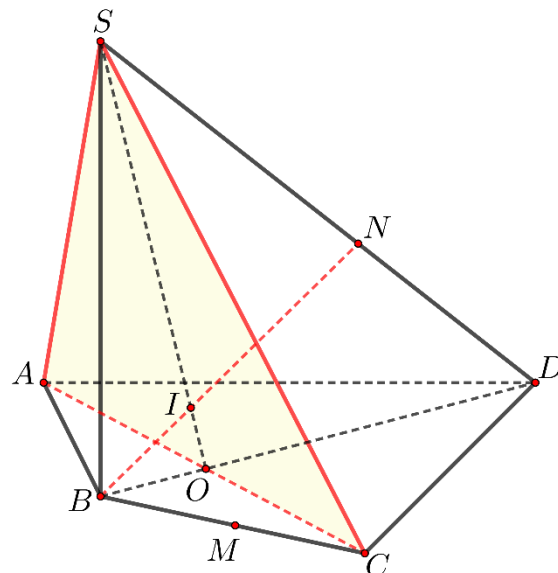
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD .

- ❶. Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .
- ❷. Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .
- ❸. Chứng minh I, J, C thẳng hàng.
- ❹. Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

Lời giải

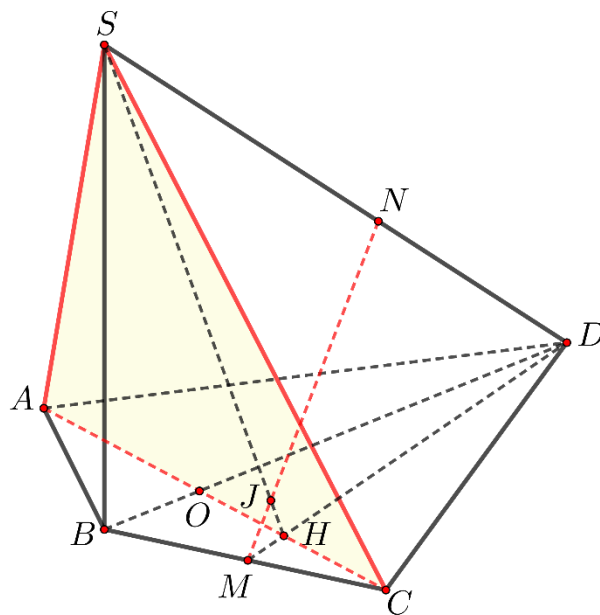
1. Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .

- ♦ Trong mp $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$
- ♦ Ta có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)
- $O \in AC; AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$
- $O \in BD; BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD)$
- ♦ Do đó: $O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)
- ♦ $\xrightarrow{(1) \& (2)} SO = (SAC) \cap (SBD)$
- ♦ Trong (SBD) gọi $I = SO \cap BN$
- ♦ Ta có: $I \in BN$
- $I \in SO; SO \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$
- ♦ Vậy $I = BN \cap (SAC)$.



2. Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .

- ♦ Trong $(ABCD)$ gọi $H = AC \cap MD$
- ♦ Ta có: $S \in (SAC) \cap (SMD)$ (3)
- $H \in AC; AC \subset (SAC) \Rightarrow H \in (SAC)$
- $H \in MD; MD \subset (SMD) \Rightarrow H \in (SMD)$
- ♦ Do đó: $H \in (SAC) \cap (SMD)$ (4)
- ♦ $\xrightarrow{(3) \& (4)} SH = (SAC) \cap (SMD)$
- ♦ Trong (SMD) gọi $J = SH \cap MN$
- ♦ Ta có: $J \in MN$
- $J \in SH; SH \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC)$
- ♦ Vậy $J = MN \cap (SAC)$.

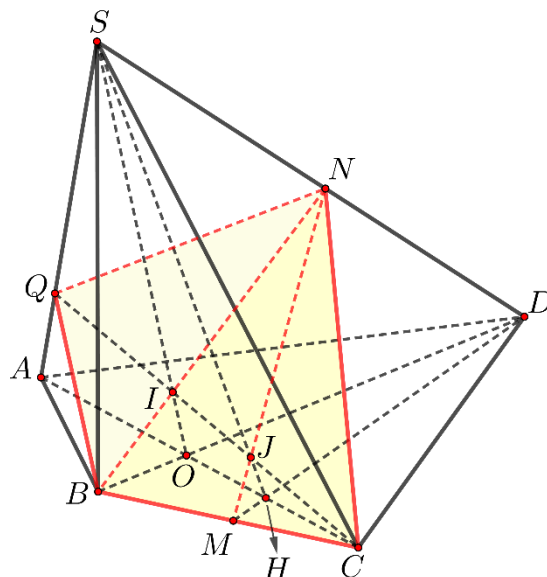


3. Chứng minh I, J, C thẳng hàng.

- ♦ Ta có: $C \in (SAC) \cap (BNC)$ (5)
- $\begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in BN; BN \subset (BNC) \Rightarrow I \in (BNC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (BNC)$ (6)
- ♦ $\xrightarrow{(5) \& (6)} CI = (SAC) \cap (BNC)$ (*)
- ♦ Mặt khác: $\begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in MN; MN \subset (BNC) \Rightarrow J \in (BNC) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (BNC)$ (**)
- ♦ Từ (*) và (**) suy ra I, J, C thẳng hàng.

④. Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

- ♦ Trong (SAC) gọi $Q = SA \cap CI$
- ♦ Ta có: $(SAB) \cap (BCN) = BQ$
 $(SBC) \cap (BCN) = BC$
 $(ABCD) \cap (BCN) = BC$
 $(SCD) \cap (BCN) = CN$
 $(SAD) \cap (BCN) = NQ$
- ♦ Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $BCNQ$.



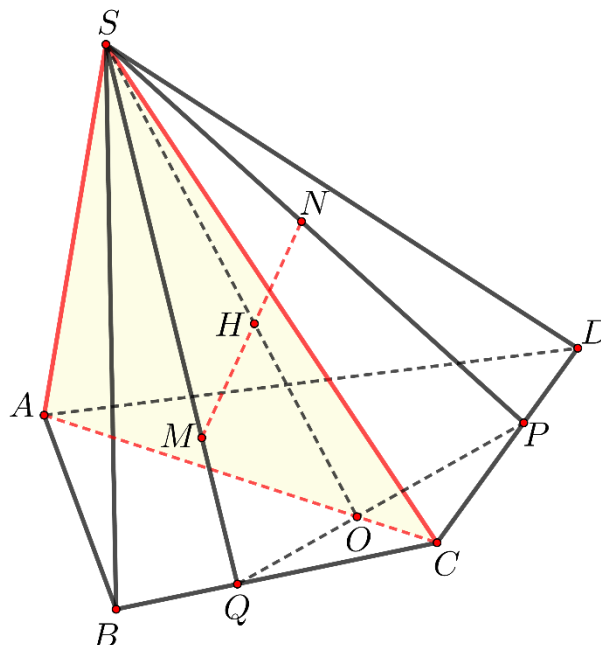
Bài 19.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .

- ①. Tìm giao điểm của MN và (SAC) .
- ②. Tìm giao điểm của SC và (AMN) .
- ③. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .

Lời giải

- ①. Tìm giao điểm của MN và (SAC) .
 - ♦ Trong (SBC) gọi $Q = SM \cap BC$.
 - ♦ Trong (SDC) gọi $P = SN \cap DC$.
 - ♦ Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap PQ$
 - ♦ Ta có: $S \in (SAC) \cap (SPQ)$ (1)
 $O \in AC; AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$
 $O \in PQ; PQ \subset (SPQ) \Rightarrow O \in (SPQ)$
 - ♦ Do đó: $O \in (SAC) \cap (SPQ)$ (2)
 $\xrightarrow{(1) \& (2)} SO = (SAC) \cap (SPQ)$
 - ♦ Trong (SPQ) gọi $H = MN \cap SO$.
 - ♦ Ta có: $H \in SO; SO \subset (SAC) \Rightarrow H \in (SAC)$
 - ♦ Mà $H \in MN$ nên: $H = MN \cap (SAC)$



2. Tìm giao điểm của SC và (AMN) .

♦ Trong mp(SAC) gọi $K = AH \cap SC$

♦ Ta có: $K \in SC$

$K \in AH; AH \in (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$

♦ Vậy $K = SC \cap (AMN)$.

3. Tìm thiết diện của hình chóp với (AMN)

♦ Trong (SBC) gọi $I = MK \cap SB$.

♦ Trong (SDC) gọi $J = KN \cap SD$.

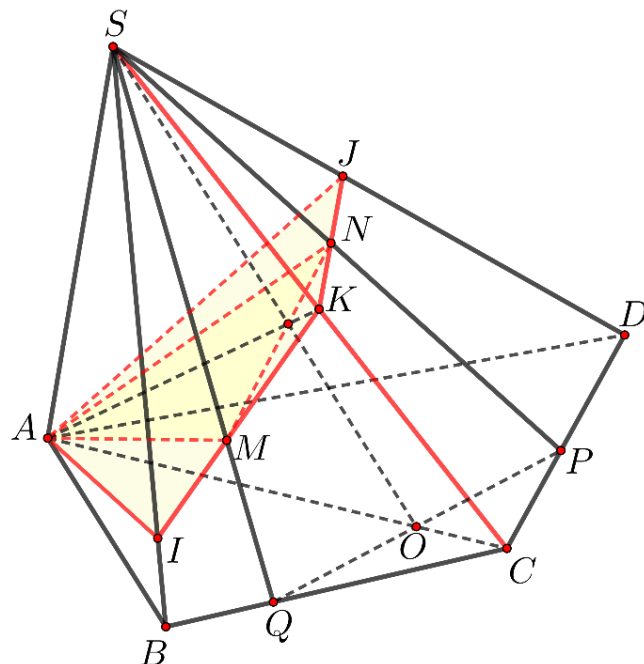
♦ Ta có: $(SAB) \cap (AMN) = AI$

$(SBC) \cap (AMN) = IK$

$(SCD) \cap (AMN) = KJ$

$(SAD) \cap (AMN) = JA$

♦ Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $AIKJ$.



Bài 20.

Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC , M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

1. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (KMN) và tứ diện $S.ABC$.

2. Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.

Lời giải

1. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (KMN) và tứ diện $S.ABC$.

♦ Trong (SAC) nối KM cắt AC tại D .

♦ Trong (ABC) nối DN cắt AB tại I .

Vậy tứ giác $KMNI$ là thiết diện cần tìm.

2. Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.

BỔ ĐỀ:

Định lý Menelaus:

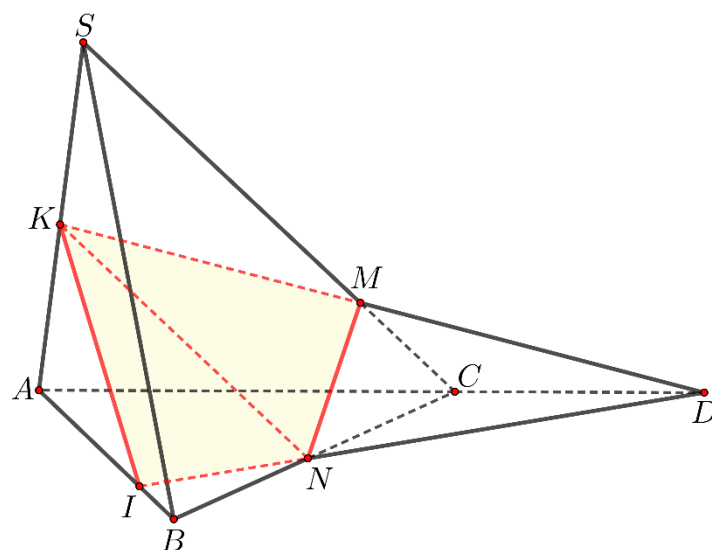
Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB .

Khi đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1.$$

Phân thuận:

♦ Giả sử D, E, F thẳng hàng với nhau.



- ♦ Vẽ đường thẳng qua C và song song với AB cắt đường thẳng DE tại G .

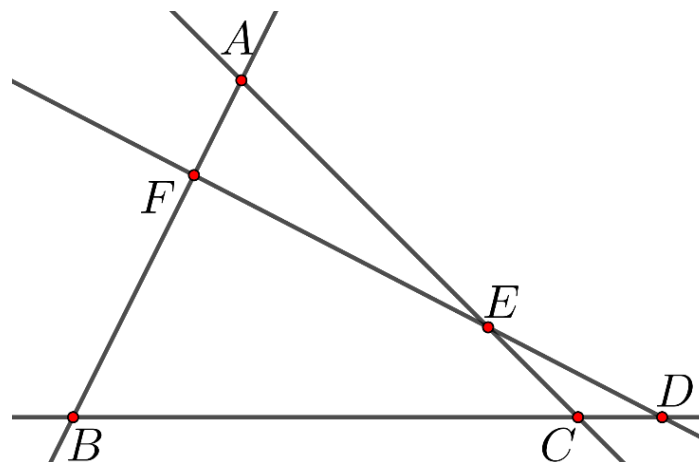
- ♦ Vì $CG \parallel AB$ (cách dựng) nên theo định lý

Ta-lét, ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{CG} \quad (1) \text{ và } \frac{EC}{EA} = \frac{CG}{FA} \quad (2).$$

- ♦ Nhân (1) và (2) vế theo vế $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{FB}{FA}$.

- ♦ Từ đó suy ra $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$.



◎ Phần đảo:

- ♦ Giả sử $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$.

- ♦ Khi đó gọi F' là giao của đường thẳng ED với đường thẳng AB .

- ♦ Theo chứng minh ở trên, ta có $\frac{F'A}{F'B} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$

- ♦ Kết hợp giả thuyết suy ra $\frac{FA}{FB} = \frac{F'A}{F'B}$.

- ♦ Hay $\frac{FA}{F'A} = \frac{FB}{F'B} = \frac{FA+FB}{F'A+F'B} = 1$.

- ♦ Nên $F'A = FA$ và $F'B = FB$. Do đó F' trùng với F .

- ♦ Vậy định lý đã được chứng minh.

◎ Áp dụng:

- ♦ Vì K, M, D thẳng hàng nên $\frac{CM}{MS} \cdot \frac{SK}{KA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$.

- ♦ Vì D, N, I thẳng hàng nên $\frac{AI}{IB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AD}{CD} = \frac{2}{3}$.

🔗 Bài 21.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}; \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$.

1. Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.

2. Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

Lời giải

❶. Tìm giao điểm I của SC và mặt (AMN) .

Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp.

♦ Trong (SBD) gọi $H = SO \cap MN$.

♦ Ta có:

$$A \in (SAC); A \in (AMN) \Rightarrow A \in (SAC) \cap (AMN) \quad (1).$$

$$H \in (SAC); H \in (AMN) \Rightarrow H \in (SAC) \cap (AMN) \quad (2).$$

$$\xrightarrow{(1) \& (2)} AH = (SAC) \cap (AMN).$$

♦ Trong (SAC) gọi $I = AH \cap SC$

Thì $I = SC \cap (AMN)$.

♦ Khi đó thiết diện là tứ giác $AMIN$.

❷. Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

♦ Trong $mp(SBD)$ gọi $J = BD \cap MN$.

♦ Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác $\triangle SBD$; $\triangle SBO$; $\triangle SCO$; $\triangle SCD$ ta có:

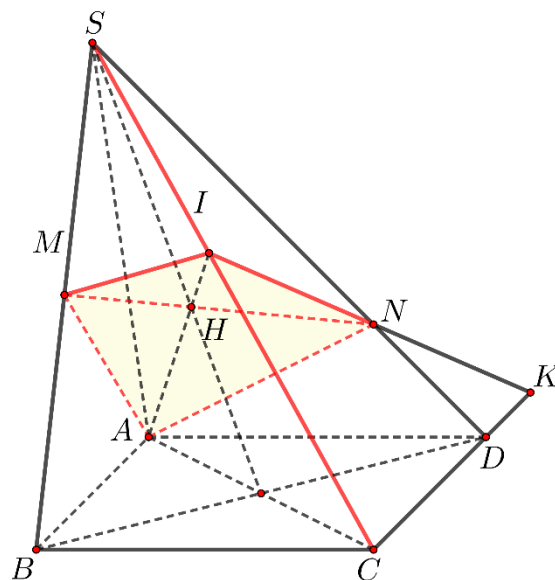
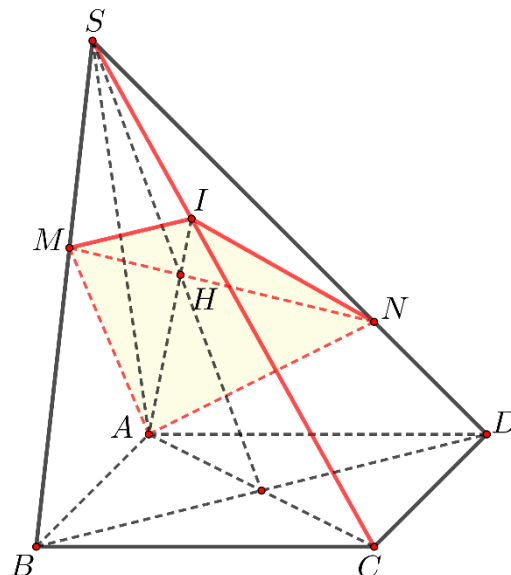
$$\odot \frac{MB}{MS} \cdot \frac{NS}{ND} \cdot \frac{JD}{JB} = 1 \Leftrightarrow 2.2. \frac{JD}{JB} = 1 \Rightarrow JB = 4JD.$$

$$\odot \frac{MB}{MS} \cdot \frac{HS}{HO} \cdot \frac{JO}{JB} = 1 \Leftrightarrow 2. \frac{HS}{HO} \cdot \frac{5}{8} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{HO} = \frac{4}{5}.$$

$$\odot \frac{IC}{IS} \cdot \frac{HS}{HO} \cdot \frac{AO}{AC} = 1 \Leftrightarrow \frac{IC}{IS} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{IS} = \frac{5}{2}.$$

$$\odot \frac{IC}{IS} \cdot \frac{NS}{ND} \cdot \frac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \frac{KD}{KC} = 1 \Rightarrow \frac{KC}{KD} = 5.$$

♦ Vậy $\frac{KC}{KD} = 5$.



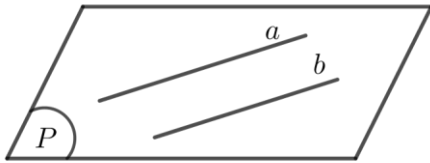
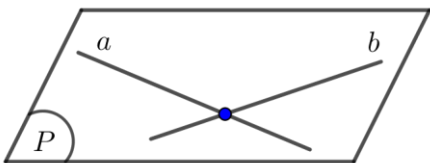
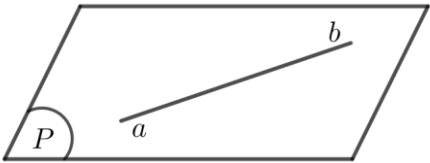
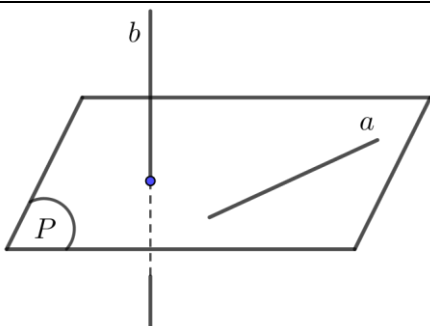
----- HẾT -----

BÀI 02

HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU - SONG SONG

Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

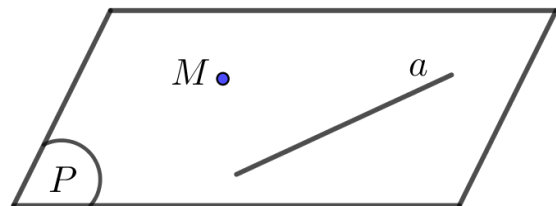
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN:

	$a // b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
	a cắt b hay $a \cap b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất.
	$a \equiv b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có từ hai điểm chung trở lên.
	a chéo $b \Leftrightarrow a$ và b không cùng nằm trong một mặt phẳng.

II. TÍNH CHẤT:

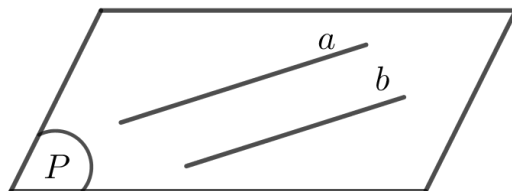
Định lý 1

♦ Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song đường thẳng đã cho.



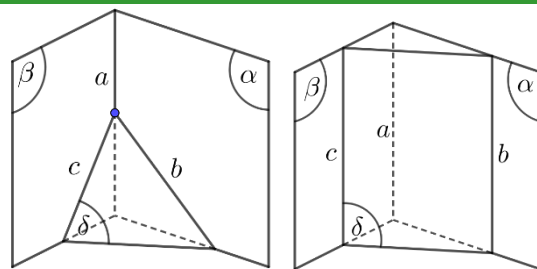
□ Nhận xét:

Ta có thêm một cách để xác định mặt phẳng như sau:
Hai đường thẳng song song a và b xác định nên một mặt phẳng ký hiệu (a, b) .



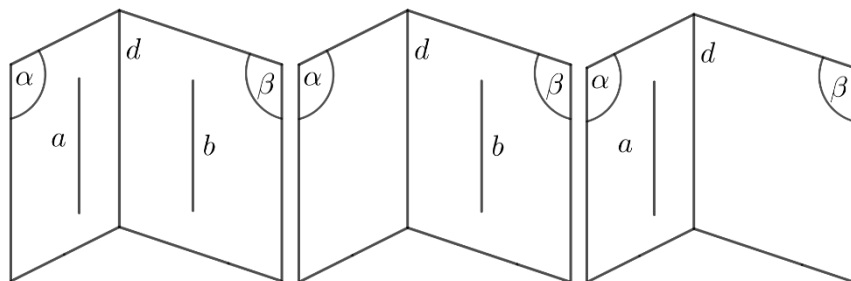
Định lý 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

- ♦ Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Hệ quả:

- ♦ Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Ví dụ 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) , (SAB) và (SCD) .
2. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của SA, SB và BC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNH) và $(ABCD)$, (MDH) và (NAC) .

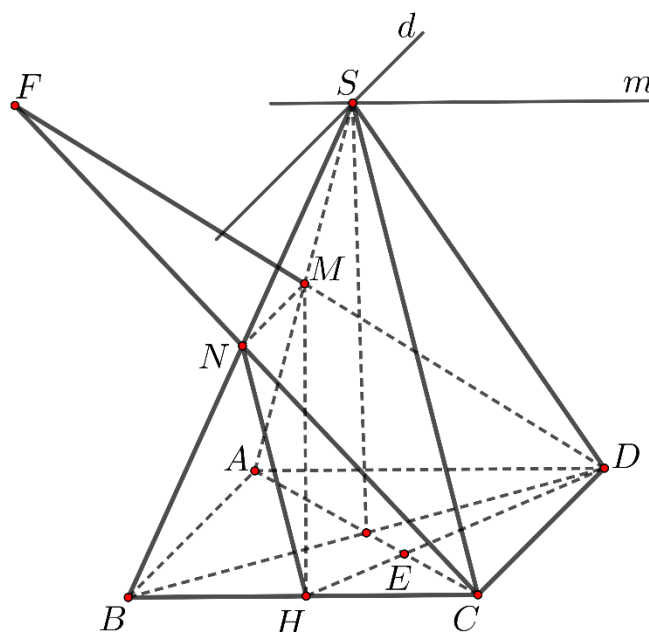
Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) , (SAB) và (SCD) .

- ♦ Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$ và $AD // CB$
- ♦ Nên $(SAD) \cap (SBC) = m // AD // CB$.
- ♦ Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$ và $AB // CD$
- ♦ Nên $(SAB) \cap (SCD) = d // AB // CD$

2. Tìm giao tuyến của (MNH) và $(ABCD)$, (MDH) và (NAC)

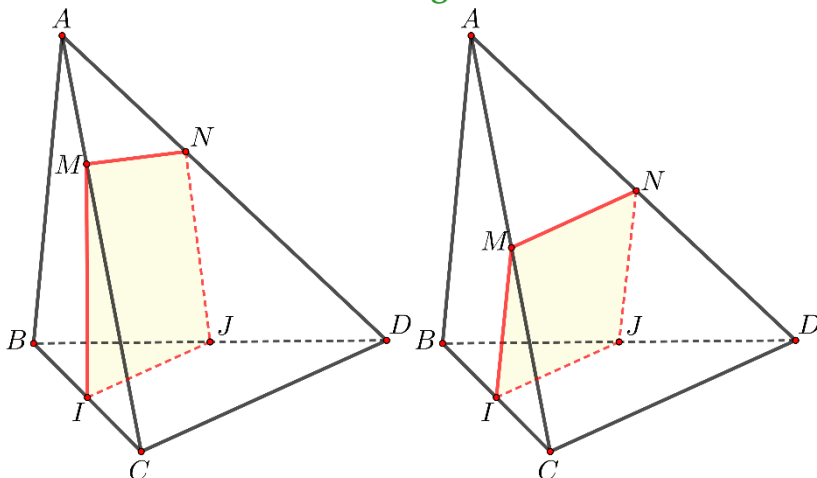
- ♦ Ta có $H \in (MNH) \cap (ABCD)$ và $MN // AB$
- $(MNH) \cap (ABCD) = HK // AB // NM, K \in AD$
- ♦ Gọi $E = AC \cap HD, F = NC \cap MD$
- Suy ra $(MDH) \cap (NAC) = EF$.



Ví dụ 02.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là trung điểm BC, BD . Mặt phẳng (P) qua IJ cắt AC, AD lần lượt tại M, N . Chứng minh: $IJNM$ là hình thang. Nếu M là trung điểm AC thì $IJNM$ là hình gì?

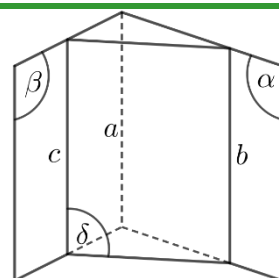
Lời giải



- ♦ Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $IJ \parallel CD$.
- ♦ $(P) \cap (ACD) = MN$; $IJ \subset (P)$; $CD \subset (ACD) \Rightarrow MN \parallel IJ$.
- ♦ Do đó tứ giác $IJNM$ là hình thang.
- Nếu M là trung điểm AC thì N là trung điểm AD .
- ♦ Khi đó $\begin{cases} IM \parallel NJ \parallel AB \\ MN \parallel IJ \parallel CD \end{cases}$ nên tứ giác $IJNM$ là hình bình hành.

Định lý 3

- ♦ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



Ví dụ 03.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AC, BD, AB, CD, AD, BC . Chứng minh tứ giác $PMQN, MRNS$ là các hình bình hành. Từ đó suy ra MN, PQ, RS đồng quy tại 1 điểm.

Lời giải

♦ Ta có MP là đường trung bình của tam giác ABC

$$\text{nên } \begin{cases} MP // BC \\ MP = \frac{1}{2} BC \end{cases}$$

♦ Tương tự NQ là đường trung bình của tam giác

$$DBC \text{ nên } \begin{cases} NQ // BC \\ NQ = \frac{1}{2} BC \end{cases}$$

♦ Suy ra tứ giác $PMQN$ là hình bình hành.

♦ Ta có MR là đường trung bình của tam giác ACD

$$\text{nên } \begin{cases} MR // CD \\ MR = \frac{1}{2} CD \end{cases}$$

♦ Tương tự NS là đường trung bình của tam giác BCD nên

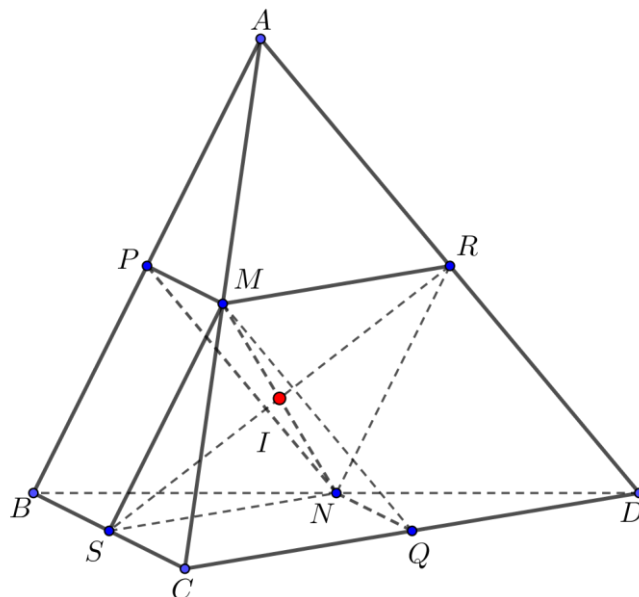
$$\begin{cases} NS // CD \\ NS = \frac{1}{2} CD \end{cases}$$

♦ Suy ra tứ giác $MRNS$ là hình bình hành.

♦ Do tứ giác $PMQN, MRNS$ là các hình bình hành

Nên các đường chéo MN, PQ, RS cắt nhau tại chung điểm I của mỗi đường.

♦ Suy ra MN, PQ, RS đồng quy tại 1 điểm.



III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 01. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Phương pháp giải

○ Ta có thể dùng một trong các cách sau

01

Xét mặt phẳng chứa a, b .

Dùng các định lý đường trung bình, Định lý Thales đảo,.... để chứng minh $a // b$.

02

Dùng định lý bắc cầu $\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$.

03

Dùng định lý 4 $\begin{cases} a // b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a // b // c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$

➤ Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC .

1. Chứng minh $IJ // AC$.

2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa IJ và cắt SC, SA lần lượt tại E, F . Chứng minh rằng $IJEF$ là hình thang.
3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SC, SD . Gọi $K = AN \cap BM$. Chứng minh $SK // AD // BC$. Tứ giác $SADK$ là hình gì?

Lời giải

1. Chứng minh $IJ // AC$.

- ♦ Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC .
- ♦ Trong $\triangle SPQ$ có $\frac{SI}{SP} = \frac{SJ}{SQ} = \frac{2}{3}$ nên $IJ // PQ$.
- ♦ Mà trong BAC có PQ là đường trung bình nên $PQ // AC$.
- ♦ Do đó $IJ // AC // PQ$.

2. Chứng minh rằng $IJEF$ là hình thang.

- ♦ Ta có:

$$\begin{cases} S \in (SPQ) \cap (SAC) \\ PQ \subset (SPQ) \\ AC \subset (SAC) \\ PQ // AC \end{cases} \Rightarrow (SPQ) \cap (SAC) = d$$

với $d // PQ // AC$

$$\text{♦ Xét } (SPQ), (SAC), (\alpha) \text{ có: } \begin{cases} (\alpha) \cap (SPQ) = IJ \\ (\alpha) \cap (SAC) = EF \\ (SAC) \cap (SPQ) = d \\ d // IJ \end{cases} \Rightarrow IJ // EF // d.$$

Do đó $IJEF$ là hình thang.

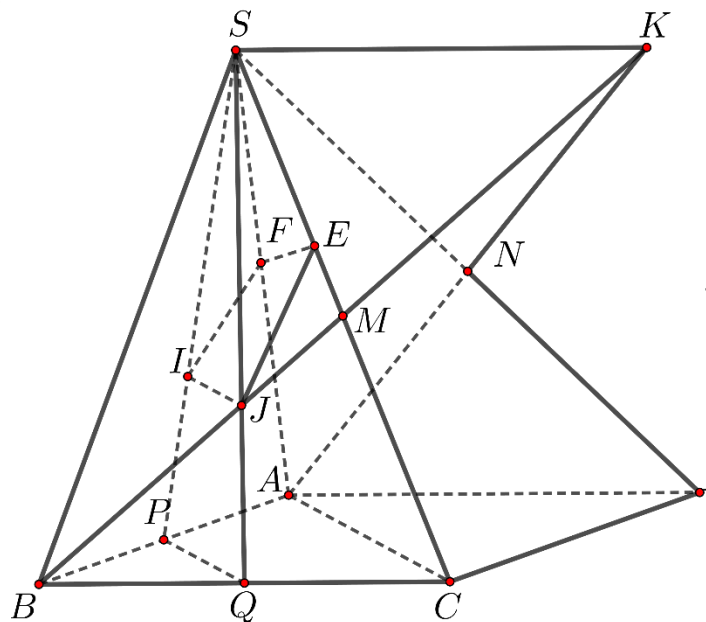
3. Chứng minh $SK // AD // BC$. Tứ giác $SADK$ là hình gì?

$$\text{♦ Ta có } S \in (SBC) \cap (SAD) \text{ và } \begin{cases} AN \subset (SAD) \\ BM \subset (SBC) \\ K = AN \cap BM \end{cases} \Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC).$$

♦ Do đó $SK = (SBC) \cap (SAD)$.

$$\text{♦ Mặt khác } \begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \\ SK = (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow SK // AD // BC.$$

♦ Tứ giác $SADK$ có $SK // AD$ và hai đường chéo giao nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình bình hành.



Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

Bài 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .

1. Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.
2. Tìm giao điểm I của SC và (ADF) .
3. Gọi J là giao điểm của AF và DI . Chứng minh rằng $SI \parallel AB \parallel CD$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.

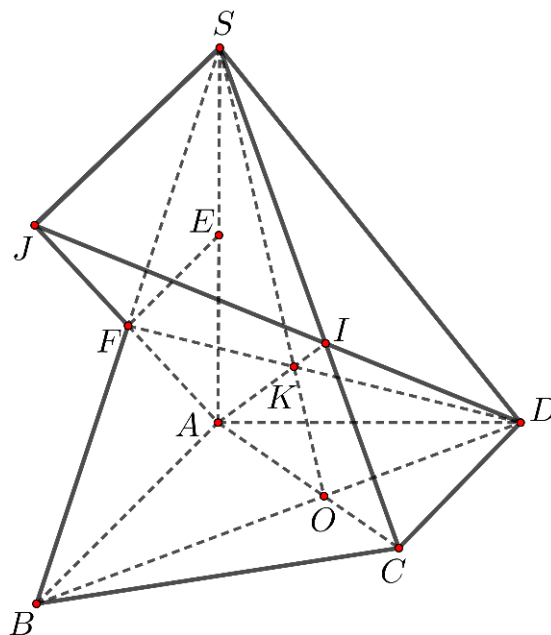
- ♦ Xét $\triangle SAB$ có E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB (gt)
- ♦ Nên EF là đường trung bình của tam giác
- ♦ Do đó $EF \parallel AB$ mà lại có $AB \parallel CD$ (gt)
- ♦ Suy ra $EF \parallel CD$.

2. Tìm giao điểm I của SC và (ADF) .

- ♦ Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$
- Khi đó có $SO, FD \subset (SBD)$
- ♦ Trong (SBD) gọi $K = SO \cap FD$.
- Khi đó có $AK, SC \subset (SAC)$; gọi $I = SC \cap AK$.
- ♦ Khi đó có $I = SC \cap (ADF)$.

3. Chứng minh rằng $SI \parallel AB \parallel CD$.

- ♦ Có J là giao điểm của AF và DI (gt) suy ra $\begin{cases} J \in DI, DI \subset (SCD) \\ J \in AF, AF \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAB) \cap (SCD) \quad (1).$
- ♦ Lại có $S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (2).$
- ♦ Từ (1) và (2) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SJ$.
- ♦ Lại có $AB \parallel CD$; $AB \subset (SAB), CD \subset (SCD)$;
- ♦ Suy ra $SI \parallel AB \parallel CD$ (theo hệ quả).

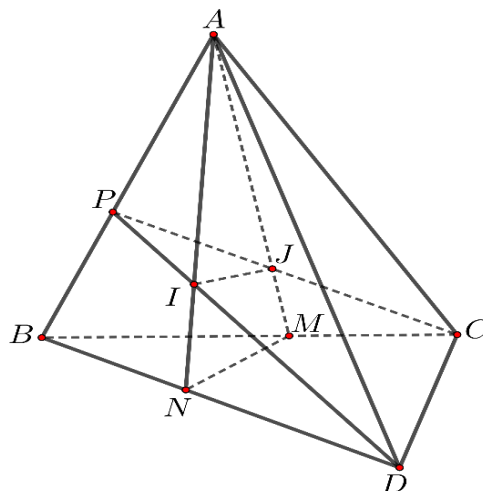


Bài 03.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD . Lấy P trên AB . Gọi các điểm $I = PD \cap AN$; $J = PC \cap AM$. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

Lời giải

- Có M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD (gt)
- Nên MN là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1).
- Xét $(AMN), (BCD), (PCD)$ có
 $(AMN) \cap (BCD) = MN$; $(AMN) \cap (PCD) = IJ$;
 $(PCD) \cap (BCD) = CD$ (2).
- Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel CD \parallel IJ$ (Theo định lý về giao tuyến của 3 mặt phẳng).
 Hay $IJ \parallel CD$ (đpcm).

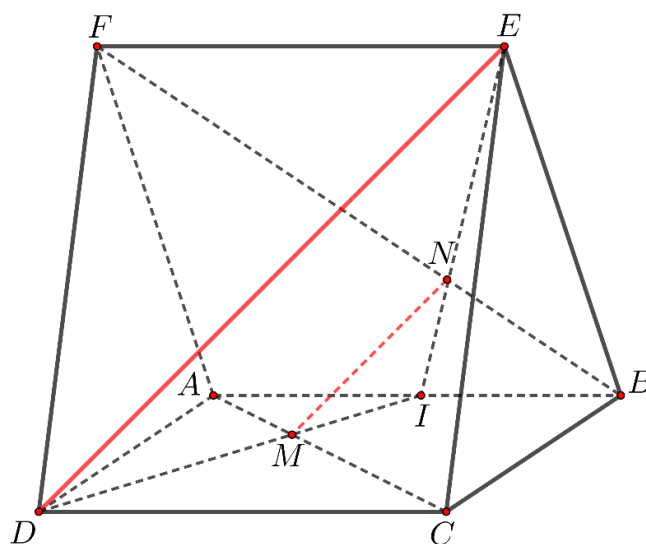


Bài 03.

Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng $MN \parallel DE$.

Lời giải

- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- Gọi $M' = DI \cap AC$.
- Ta có $\frac{AM'}{M'C} = \frac{AI}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM'}{AC} = \frac{1}{3}$
- Lại có $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$ suy ra $M' \equiv M$.
- Hay D, M, I thẳng hàng và $\frac{IM}{ID} = \frac{1}{3}$.
- Tương tự, ta có I, N, E thẳng hàng và $\frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$
- Xét tam giác IDE có $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} \Rightarrow MN \parallel DE$
 (Định lý Ta-let đảo) (đpcm).

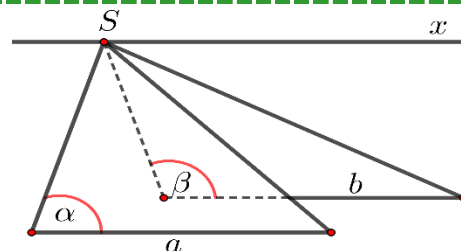


Dạng 02. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG CHỨA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Phương pháp giải

- Sử dụng định lý phương pháp giao tuyến thứ nhất.

$$\begin{cases} S \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Sx, Sx \parallel a \parallel b \\ a \parallel b \end{cases}$$



Bài 01.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SC} = \frac{1}{3}.$$

- ### Lời giải

- ♦ Ta có: $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow MN // AB$

- $$\diamond \text{ Nên } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SMN) \\ AB \subset (SAB), MN \subset (SMN) \\ AB // MN \end{cases}$$

♦ Vì $\frac{AE}{AB} = \frac{SF}{SB} \Rightarrow SA \parallel EF$ (Định lí Ta-let)

- $$\begin{cases} C \in (SAC) \cap (CEF) \\ SA \subset (SAC), EF \subset (CEF) \\ SA // EF \end{cases}$$

2. Trovare $(EFG) \cap (SAC)$, trovare $H = AC \cap (EFG)$.

- $$\diamond \left\{ \begin{array}{l} G \in (SAC) \cap (EFG) \\ SA \subset (SAC), EF \subset (EFG) \Rightarrow (SAC) \cap (EFG) = Gy, Gy // SA // EF. \\ SA // EF \end{array} \right.$$

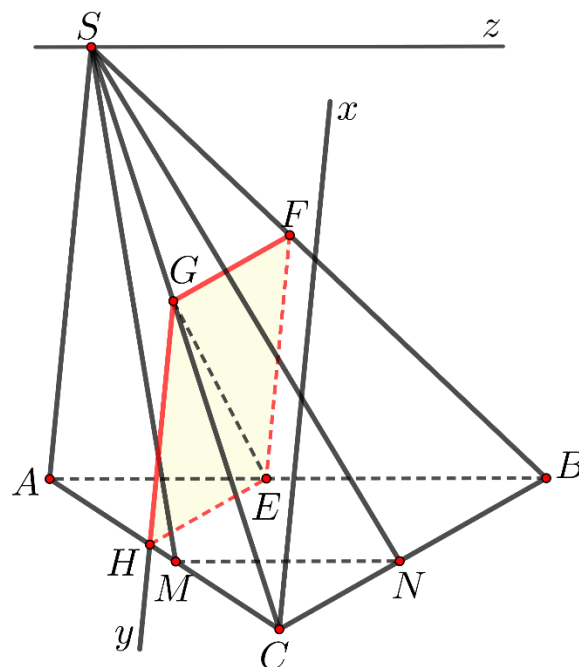
$$\spadesuit \forall i \ (SAC) \cap (EFG) = Gy \Rightarrow AC \cap (EFG) = AC \cap Gy$$

$$\blacklozenge \Rightarrow \{H\} = AC \cap Gy.$$

- ♦ Ta có: $\frac{EB}{AB} = \frac{EF}{SA} = \frac{BF}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}SA$ (1)

$$\blacklozenge \text{ Do } GH \parallel SA \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{GH}{SA} = \frac{CG}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH = \frac{2}{3}SA \quad (2)$$

Bài 02.



Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là trọng tâm ABC và ABD ; E, F lần lượt là trung điểm BC, AC .

1. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$
2. Tìm giao tuyến (DEF) và (ABD) .

Lời giải

1. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$

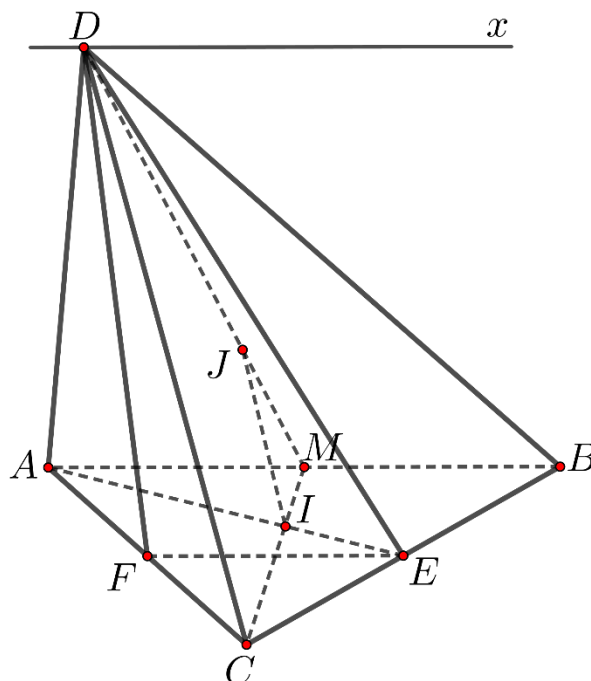
- ♦ Gọi M là trung điểm AB ,
- ♦ I là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow C, I, M$ thẳng hàng.
- ♦ J là trọng tâm $\triangle ABD \Rightarrow D, J, M$ thẳng hàng.
- ♦ Xét $\triangle DMC$ có:
 $\frac{MI}{MC} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$ (do I là trọng tâm $\triangle ABC$, J là trọng tâm $\triangle ADB$).
- ♦ $\Rightarrow IJ \parallel DC$ (Định lí Ta-lét).

2. Tìm giao tuyến (DEF) và (ABD) .

- ♦ Chứng minh được EF là đường trung bình của $\triangle ABC$
 $\Rightarrow EF \parallel AB$.

$$\left\{ \begin{array}{l} D \in (DEF) \cap (ABD) \\ SA \subset (DEF), EF \subset (ABD) \\ EF \parallel AB \end{array} \right.$$

- ♦ $\Rightarrow (DEF) \cap (ABD) = Dx, Dx \parallel EF \parallel AB$.



Biên Soạn: **LÊ MINH TÂM**

Bài 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi không có cặp cạnh nào song song. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD . Gọi E trung điểm của cạnh CB .

1. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.
2. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE) .
3. Gọi O, J lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (MNE) với các cạnh SB, SD . Chứng minh rằng $OJ \parallel BD$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

- ♦ Gọi F là trung điểm của SA .

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có $\frac{FM}{FB} = \frac{FN}{FD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel BD$.

2. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE) .

- ♦ Xét hai mặt phẳng (MNE) và $(ABCD)$ có

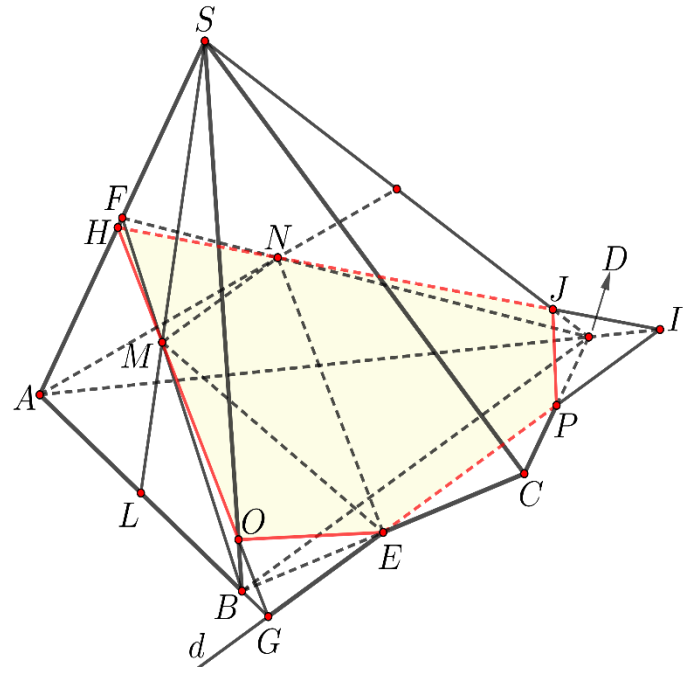
$$\begin{cases} E \in (MNE) \cap (ABCD) \\ MN \parallel BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in d \\ d = (MNE) \cap (ABCD) \\ d \parallel MN \parallel BD \end{cases}$$

- ♦ Gọi $\begin{cases} P = d \cap CD \\ G = d \cap AB \end{cases}$. Gọi $\begin{cases} O = MG \cap SB \\ H = MG \cap SA \\ I = d \cap AD \\ J = HI \cap SD \end{cases}$

- ♦ Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $OHJPE$.

3. Chứng minh rằng $OJ \parallel BD$.

$$\begin{aligned} \text{♦ Ta có } & \begin{cases} BD \parallel MN \\ BD \subset (SBD) \\ MN \subset (MNE) \\ OJ = (MNE) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow OJ \parallel BD \parallel MN. \end{aligned}$$



Bài 04.

Cho tứ diện $ABCD$ có I, J, K là ba điểm lần lượt nằm trên các cạnh AD, AC, BC sao cho $\frac{AI}{AD} = \frac{AJ}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt phẳng $(BCD), (ABD)$ và xác định hình tính của thiết cắt bởi mặt (IJK)

Lời giải

- ♦ Vì $\frac{AI}{AD} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{3}$ nên $IJ \parallel CD$.

- ♦ Ta có

$$\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ \subset (IJK) \\ CD \subset (BCD) \\ K \in (IJK) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = (IJK) \cap (BCD) \\ K \in d \\ d \parallel IJ \parallel CD \end{cases}$$

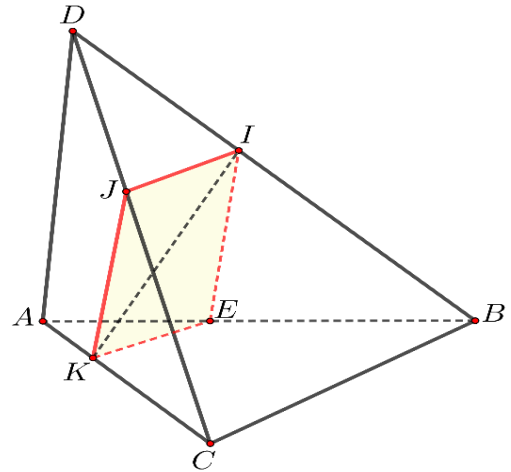
- ♦ Gọi $E = d \cap BD \Rightarrow EK \parallel CD \parallel IJ$.

- ♦ Theo chứng minh trên: $EK = (BCD) \cap (IJK)$.

$$\text{♦ Vì } \frac{AJ}{AC} = \frac{BK}{BC} \Leftrightarrow \frac{CA - CJ}{AC} = \frac{CB - CK}{BC} \Leftrightarrow 1 - \frac{CJ}{AC} = 1 - \frac{CK}{BC} \Leftrightarrow \frac{CJ}{AC} = \frac{CK}{BC}$$

$$\text{♦ Nên } JK \parallel AB. \text{ Ta có } \begin{cases} IE = (ABD) \cap (IJK) \\ JK \subset (IJK) \\ AB \subset (ABD) \\ JK \parallel AB \end{cases} \Rightarrow IE \parallel JK \parallel AB.$$

- ♦ Thiết diện cần tìm là tứ giác $IJKE$. Ta có $\begin{cases} IJ \parallel EK \\ JK \parallel IE \end{cases}$ nên $IJKE$ là hình bình hành.



🔗 Dạng 03. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp giải

○ (Chứng minh phản chứng) Giả sử hai đường thẳng đồng phẳng rồi suy ra điều vô lí.

🔗 Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng sau đây chéo nhau: (SA, BC) ; (SA, CD) ; (SB, CD) ; (SB, DA) ; (SC, AD) ; (SC, AB) ; (SD, AB) và (SD, BC) .

Lời giải

* (SA, BC)

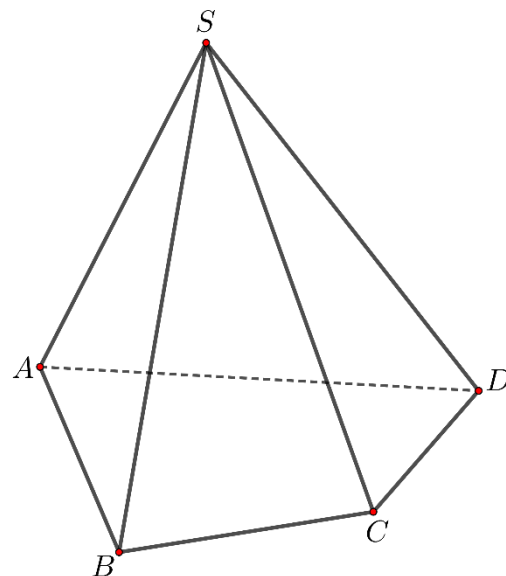
- ♦ Giả sử (SA, BC) đồng phẳng, thì S, A, B, C đồng phẳng.
- ♦ Nhưng rõ ràng $C \notin (SAB)$, nên điều giả sử là sai.
- ♦ Vậy (SA, BC) chéo nhau.

* (SA, CD)

- ♦ Giả sử (SA, CD) đồng phẳng, thì S, A, C, D đồng phẳng.
- ♦ Nhưng rõ ràng $C \notin (SAD)$, nên điều giả sử là sai.
- ♦ Vậy (SA, CD) chéo nhau.

* (SB, CD)

- ♦ Giả sử (SB, CD) đồng phẳng, thì S, B, C, D đồng phẳng.
- ♦ Nhưng rõ ràng $B \notin (SCD)$, nên điều giả sử là sai.
- ♦ Vậy (SB, CD) chéo nhau.
- ♦ Các ý còn lại làm tương tự.



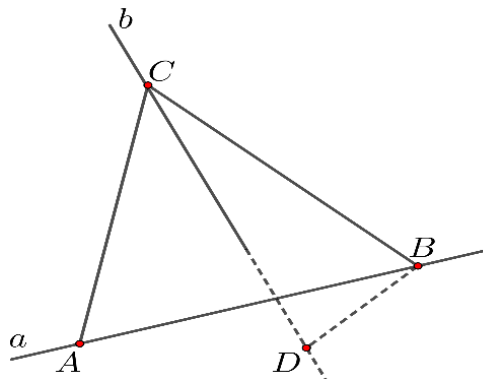
Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

🔗 Bài 02.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Trên đường thẳng a lấy hai điểm phân biệt A, B tùy ý. Trên đường thẳng b lấy hai điểm phân biệt C, D tùy ý. Chứng minh hai đường thẳng AC và BD chéo nhau.

Lời giải

- ♦ Giả sử AC, BD đồng phẳng. Nghĩa là A, B, C, D đồng phẳng.
- ♦ Rõ ràng, $D \notin (ABC)$ nên điều giả sử là sai.
- ♦ Vậy AC, BD chéo nhau.

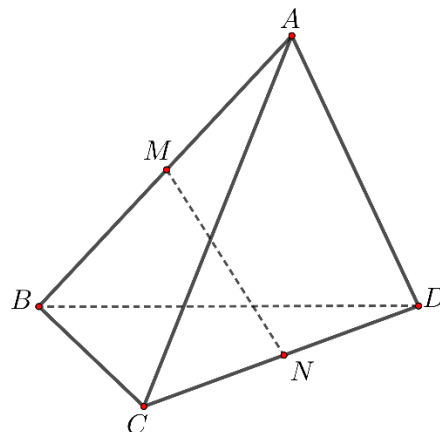


📖 Bài 03.

Cho tam giác BCD và điểm $A \notin (BCD)$. M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh AB và CD chéo nhau, AD và MN chéo nhau.

Lời giải

- ♦ Giả sử AB và CD đồng phẳng, thì $(BCD) \equiv (ABCD)$
- ♦ Tức là $A \in (BCD)$ (Vô lý).
- ♦ Do đó AB và CD chéo nhau.
- ♦ Giả sử AD và MN đồng phẳng,
- ♦ Mà M, N lần lượt thuộc AB, CD
- ♦ Nên $AB \subset (ADMN); CD \subset (ADMN)$,
- ♦ Suy ra AB và CD đồng phẳng (vô lý theo ý trên).
- ♦ Vậy AD và MN chéo nhau.

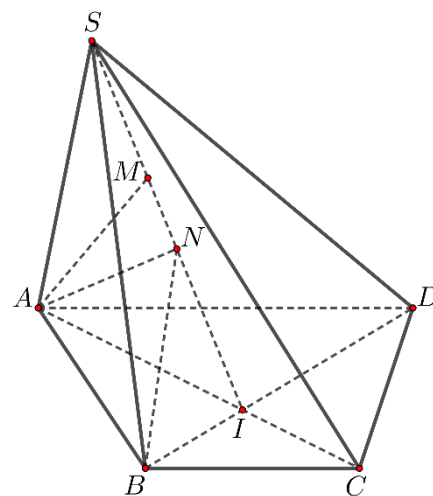


📖 Bài 04.

Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AD , đáy nhỏ BC và điểm $S \notin (ABCD)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . M, N là hai điểm phân biệt trên đường thẳng SI . Chứng minh AM và BN chéo nhau, BM và AN chéo nhau.

Lời giải

- ♦ Ta có $SI = (SAC) \cap (SBD)$, $M, N \in SI$
- ♦ Nên $A, M, N \in (SAC)$.
- ♦ Giả sử AM và BN đồng phẳng,
- ♦ Suy ra $B \in (SAC)$ nên $S \in (ABC)$ (mâu thuẫn giả thiết $S \notin (ABC)$).
- ♦ Vậy AM và BN chéo nhau.
- ♦ Chứng minh tương tự AN và BM chéo nhau.



Dạng 04. CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG DI ĐỘNG LUÔN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Phương pháp giải

- Sử dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng (ĐL3)

Bài tập.

Cho tứ giác $ABCD$ với AB không song song với CD và điểm $S \notin (ABCD)$. Mặt phẳng di động (α) qua AB cắt SC, SD tại M, N . Mặt phẳng di động (β) qua CD cắt SA, SB tại P, Q .

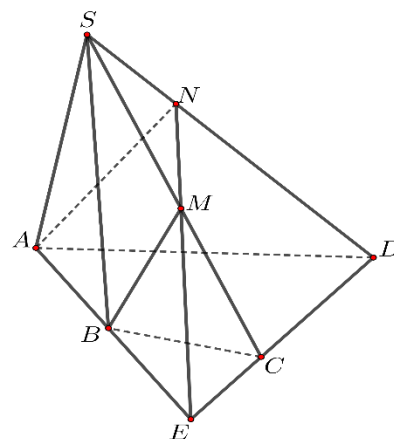
1. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
2. Chứng minh nếu AN và BM cắt nhau tại I , CQ và DP cắt nhau tại J thì đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.
3. Gọi K là giao điểm của AM và BN , L là giao điểm của CP và DQ . Chứng minh đường thẳng KL qua một điểm cố định trong $(ABCD)$

Lời giải

1. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (SCD) = MN \\ (\alpha) \cap (ABCD) = AB \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \end{cases}$$

- ♦ Suy ra MN, AB, CD đồng quy tại $E = AB \cap CD$
- ♦ Vậy MN đi qua E cố định.



2. Chứng minh nếu AN và BM cắt nhau tại I , CQ và DP cắt nhau tại J thì đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

$$\begin{cases} I \in AN \subset (SAD) \\ I \in BM \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$$

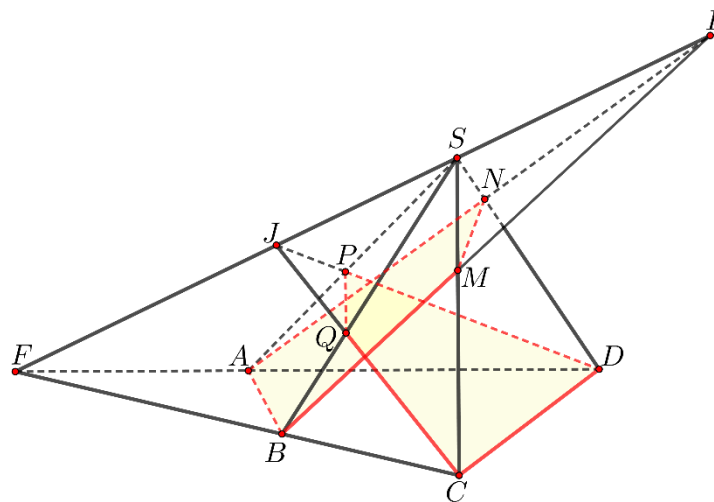
♦ Lại có

$$\begin{cases} J \in DP \subset (SAD) \\ J \in CQ \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC)$$

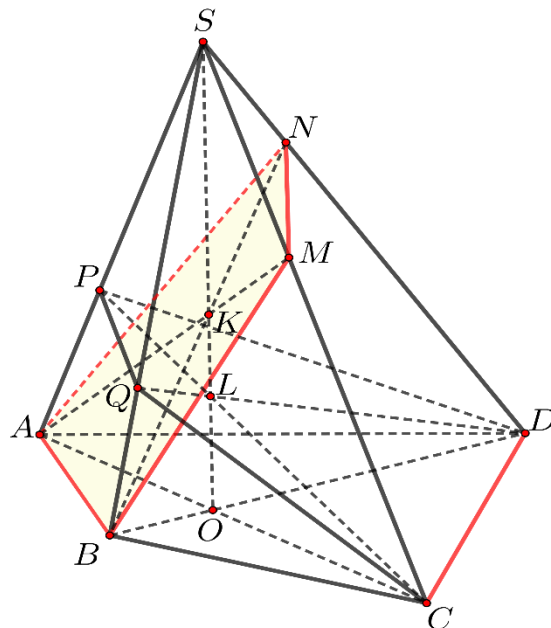
$$\text{♦ Mà } S \in (SAD) \cap (SBC)$$

♦ Nên đường thẳng IJ luôn đi qua điểm S cố định.



3. Chứng minh đường thẳng KL qua một điểm cố định trong $(ABCD)$

- ♦ Ta có $AM \cap BN = K \Rightarrow \begin{cases} K \in AM \subset (SAC) \\ K \in BN \subset (SBD) \end{cases}$
 $\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$
- ♦ Lại có $CP \cap DQ = L \Rightarrow \begin{cases} L \in DQ \subset (SBD) \\ L \in CP \subset (SAC) \end{cases}$
 $\Rightarrow L \in (SAC) \cap (SBD)$
- ♦ Gọi $O = AC \cap BD$ $O \in (SAC) \cap (SBD)$
- ♦ Nên đường thẳng KL luôn đi qua điểm O cố định.



----- HẾT -----

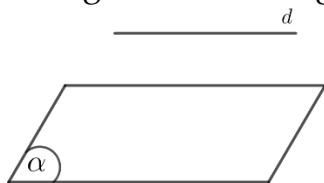
BÀI 03

HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU - SONG SONG

Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

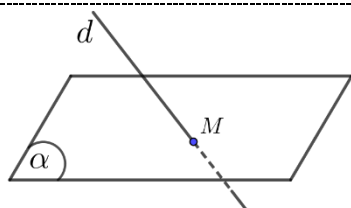
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng được xét theo số điểm chung của chúng



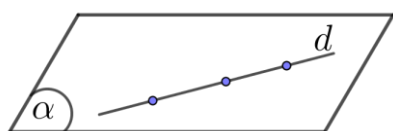
d và (α) không có điểm chung.

Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.



d và (α) có một điểm chung duy nhất M .

Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.



d và (α) có từ hai điểm chung trở lên.

Khi đó ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$

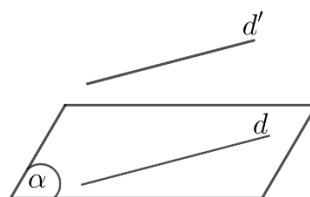
II. TÍNH CHẤT:

Định lý 1

- Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α) thì d song song với (α) .

Tóm tắt định lý:

$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d // d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$



Ví dụ 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD , các điểm M, I, K lần lượt là trung điểm của SC, AB, AD .

1. Chứng minh $AD // (SBC), IK // (MBD)$.
2. Chứng minh $CD // (ABM), SA // (MBD)$.

Lời giải

❶. Chứng minh $AD \parallel (SBC)$, $IK \parallel (MBD)$

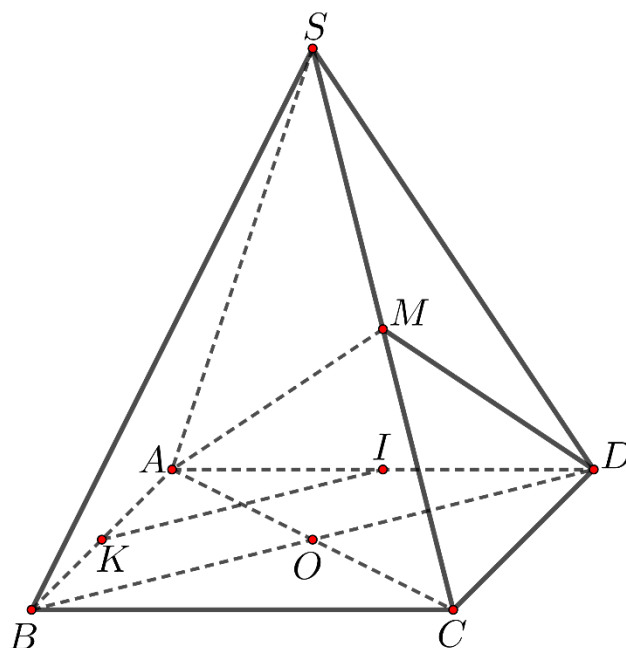
$$\begin{cases} AD \not\subset (SBC) \\ AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\begin{cases} IK \not\subset (MBD) \\ IK \parallel BD \Rightarrow IK \parallel (MBD) \\ BD \subset (MBD) \end{cases}$$

❷. Chứng minh $CD \parallel (ABM)$, $SA \parallel (MBD)$.

$$\begin{cases} CD \not\subset (ABM) \\ CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (ABM) \\ AB \subset (ABM) \end{cases}$$

$$\begin{cases} SA \not\subset (MBD) \\ SA \parallel OM \Rightarrow SA \parallel (MBD) \\ OM \subset (MBD) \end{cases}$$



Ví dụ 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, M là một điểm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$, Chứng minh $MG \parallel (SCD)$.

❶. Chứng minh $AD \parallel (SBC)$, $IK \parallel (MBD)$.

❷. Chứng minh $CD \parallel (ABM)$, $SA \parallel (MBD)$.

Lời giải

- Gọi H là trung điểm của AB .
- Do G là trọng tâm tam giác SAB , nên

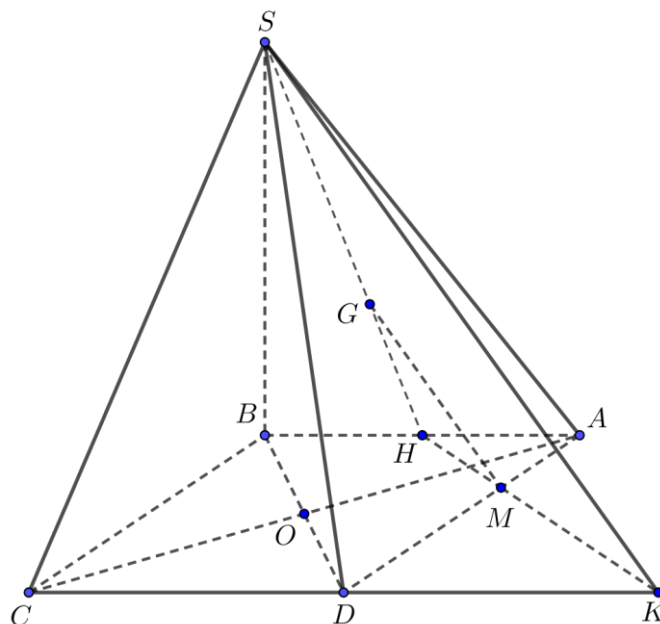
$$\frac{HG}{HS} = \frac{2}{3} \quad (1).$$

- Trong $(ABCD)$, gọi $K = HM \cap CD$
 $\Rightarrow SK \subset (SCD)$.

$$\text{Vì } AH \parallel DK \Rightarrow \frac{HM}{HK} = \frac{AM}{AD} = \frac{2}{3} \quad (2).$$

$$\xrightarrow{(1) \& (2)} \frac{HG}{HS} = \frac{HM}{HK} \Rightarrow GM \parallel SK.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} GM \not\subset (SCD) \\ SGM \parallel SK \Rightarrow MG \parallel (SCD) \\ SK \subset (SCD) \end{cases}$$

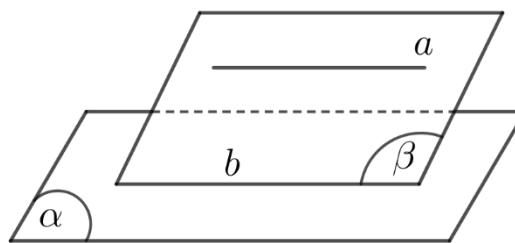


Định lý 2

- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

□ **Tóm tắt định lý:**

$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$



Ví dụ 03.

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB, CD .

1. Tìm giao tuyến của (P) lần lượt với các mặt phẳng $(ABC), (BCD), (ACD), (ABD)$.
2. Mặt phẳng (P) cắt tứ diện theo thiết diện là hình gì?

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(ABC), (BCD), (ACD), (ABD)$.

♦ (P) và (ABC) có

Điểm M chung, $AB \subset (ABC), AB // (P)$

$$\rightarrow (P) \cap (ABC) = IJ \text{ với } \begin{cases} IJ \text{ qua } M \\ IJ // AB, I \in BC, J \in AC \end{cases}$$

♦ (P) và (BCD) có

Điểm I chung, $CD \subset (BCD), CD // (P)$

$$\rightarrow (P) \cap (BCD) = IH, \text{ với } IH // CD, H \in BD$$

♦ (P) và (ACD) có

Điểm J chung, $CD \subset (ACD), CD // (P)$

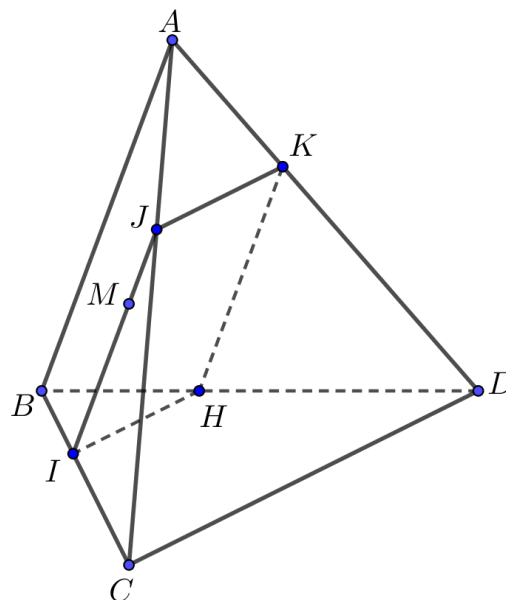
$$\rightarrow (P) \cap (ACD) = JK, \text{ với } JK // CD, K \in AD$$

♦ (P) và (ABD) có điểm K, H chung, $AB \subset (ABD), AB // (P)$

$$\rightarrow (P) \cap (ABD) = KH, \text{ với } KH // AB.$$

2. Mặt phẳng (P) cắt tứ diện theo thiết diện là hình gì?

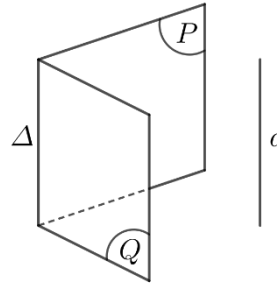
♦ Mặt phẳng (P) cắt tứ diện theo thiết diện là hình bình hành $IJKH$ (vì $KH // IJ // AB$ và $IH // JK // CD$).



Hệ quả

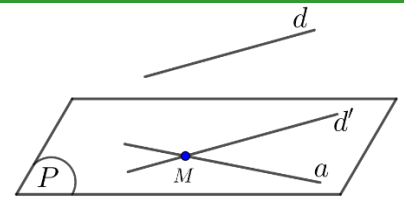
- Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng nếu có cũng song song với đường thẳng đó.
- **Tóm tắt định lý:**

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) // d, (Q) // d \end{cases} \Rightarrow \Delta // d$$



Định lý 3

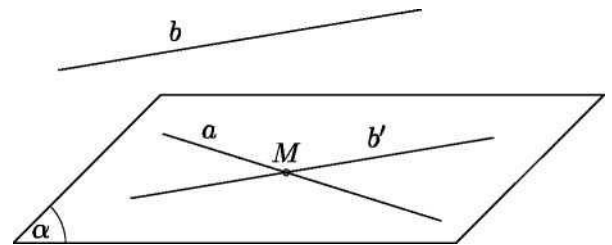
- Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại.



Chú ý

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau.
 Cách dựng mặt (α) chứa đường a và song song với đường b :

- Lấy M thuộc a .
- Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b .
- Mặt phẳng (α) chứa a và b' .



III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 01. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG.

Phương pháp giải

- Ta có thể dùng một trong các cách sau

01

$$\text{Dùng ĐL1} \begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a // (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$

02

- Xét mặt phẳng (β) chứa a .
- Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Chứng minh $a // b \Rightarrow a // (\alpha)$

Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

- ❶. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$
- ❷. Gọi P là trung điểm SA . Chứng minh $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$.
- ❸. Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$, I thuộc cạnh BD sao cho $BI = \frac{1}{3}BD$, Chứng minh $GI \parallel (SAB)$.

Lời giải

- ❶. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$

♦ Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD của $ABCD$

♦ Nên $AD \parallel BC \parallel MN$

♦ Ta có: $\begin{cases} AD \parallel MN \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \parallel (SAD) \\ MN \not\subset (SAD) \end{cases}$

♦ Tương tự $\begin{cases} BC \parallel MN \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC) \\ MN \not\subset (SBC) \end{cases}$

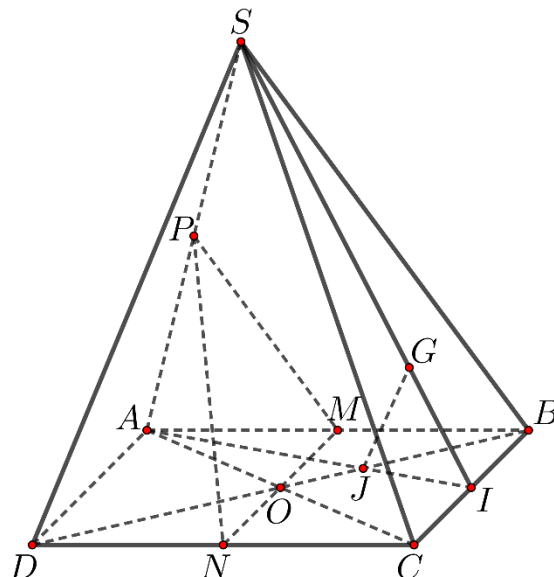
- ❷. Gọi P là trung điểm SA .

Chứng minh $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$.

♦ Ta có $MN \parallel (SAD) \Rightarrow MN \parallel SP$

♦ $\begin{cases} SP \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \Rightarrow SP \parallel (MNP) \\ SP \not\subset (MNP) \end{cases}$

♦ Tương tự $SC \parallel (MNP)$.



- ❸. Chứng minh $GI \parallel (SAB)$.

♦ Gọi J là trung điểm BC

♦ Ta có I là trọng tâm tam giác ABC suy ra $IJ = \frac{1}{3}AJ$.

♦ G là trọng tâm $\triangle SBC$ suy ra $JG = \frac{1}{3}JS$

♦ $\triangle SAJ$ có $IJ = \frac{1}{3}AJ$, $JG = \frac{1}{3}JS$ nên $GI \parallel SA$.

♦ Mà $SA \subset (SAB)$ suy ra $GI \parallel (SAB)$.

Bài 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , đáy nhỏ CD với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $2SE = 3SD$. Chứng minh

- ❶. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$
- ❷. Gọi P là trung điểm SA . Chứng minh $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$.
- ❸. Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$, I thuộc cạnh BD sao cho $BI = \frac{1}{3}BD$, Chứng minh $GI \parallel (SAB)$.

Lời giải

❶. $DI // (SBC)$.

- ♦ Gọi N là trung điểm SB .
- ♦ Có I là trung điểm của SA
- ♦ $\Rightarrow NI$ là đường trung bình $\triangle SAB$

$$\rightarrow \begin{cases} NI // AB \\ NI = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

$$\text{♦ Mà } \begin{cases} CD = \frac{1}{2} AB \\ AB // CD \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} IN = DC \\ IN // DC \end{cases}$$

$$\text{♦ Tứ giác } NIDC \text{ có } \begin{cases} IN = DC \\ IN // DC \end{cases}$$

♦ Nên $NIDC$ là hình bình hành suy ra $DI // NC$

$$\text{♦ Ta có } \begin{cases} DI // NC \\ NC \subset (SBC) \Rightarrow DI // (SBC). \\ DI \not\subset (SBC) \end{cases}$$

❷. $GO // (SCD)$.

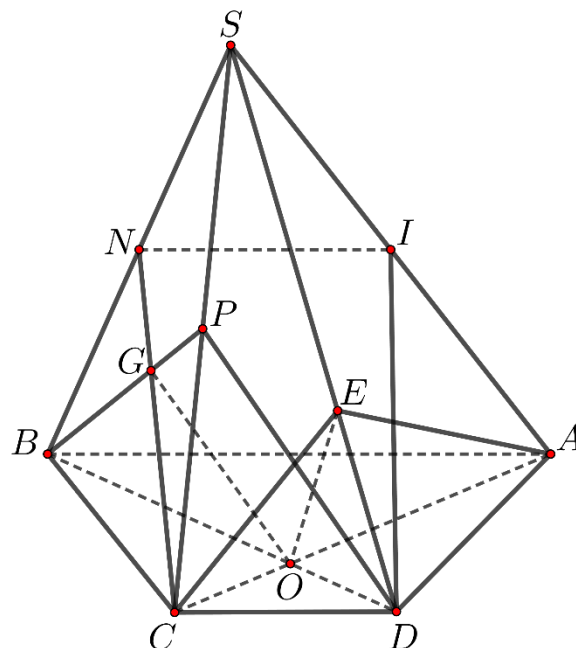
- ♦ Gọi P là trung điểm của SC .
- ♦ Có G là trọng tâm $\triangle SBC \rightarrow \frac{BG}{BP} = \frac{2}{3}$ (1)

♦ Ta có $AB // CD$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{2}{3} \text{ (2)}$$

$$\text{♦ } \xrightarrow{(1) \& (2)} OG // BH.$$

♦ Mà $BH \subset (SCD) \Rightarrow OG // (SCD)$.



❸. $SB // (ACE)$.

$$\text{♦ Ta có } \frac{OB}{OD} = 2 \text{ nên } \frac{OD}{BD} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{♦ Mặt khác vì } 2SE = 3SD \Leftrightarrow SE = \frac{3}{2}SD \text{ nên}$$

$$\frac{DE}{DS} = \frac{1}{3}$$

$$\text{♦ } \frac{OD}{BD} = \frac{DE}{DS} = \frac{1}{3} \Rightarrow OE // BS$$

♦ Mà $OE \subset (ACE)$ suy ra $SB // (ACE)$.

📌 Bài 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao

cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$. Chứng minh rằng:

❶. $AD // (SBC); DC // (SAB)$.

❷. $MN // (ABCD); AB // (MNCD); MN // (SCD)$

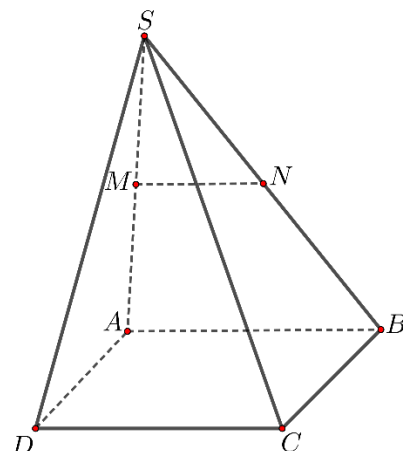
Lời giải

1. $AD \parallel (SBC); DC \parallel (SAB)$.

- ♦ Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
- ♦ Suy ra $AD \parallel BC; DC \parallel AB$
- ♦ Mà $AD \not\subset (SBC), BC \subset (SBC) \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.
- ♦ Chứng minh tương tự ta có $DC \parallel (SAB)$

2. $MN \parallel (ABCD); AB \parallel (MNCD); MN \parallel (SCD)$

- ♦ Tam giác SAB có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN \parallel AB$.
- Mà $MN \not\subset (ABCD), AB \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.
- ♦ Theo trên có $MN \parallel AB$
- Mà $AB \not\subset (MNCD), MN \subset (MNCD) \Rightarrow AB \parallel (MNCD)$.
- ♦ Lại có $CD \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$
- Mà $MN \not\subset (SCD), CD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.



Bài 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD . Điểm E thuộc DC sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$ và I là trung điểm của AD .

1. Tìm giao điểm của IE và (SBC) .
2. Chứng minh rằng: $GE \parallel (SBC)$

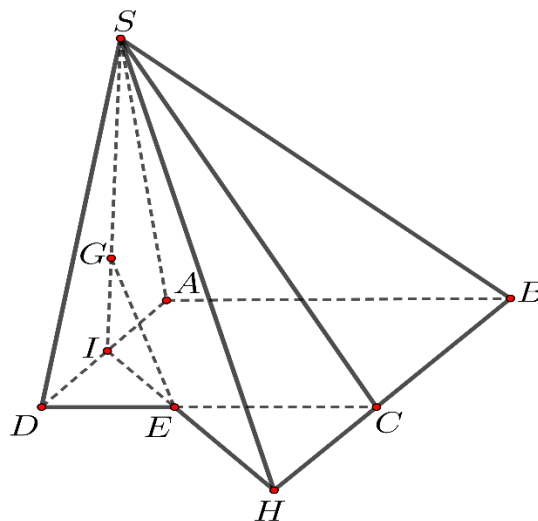
Lời giải

1. Tìm giao điểm của IE và (SBC) .

- ♦ Trong $(ABCD)$ ta có $IE \cap BC = H \Rightarrow IE \cap (SBC)$

2. Chứng minh rằng: $GE \parallel (SBC)$

- ♦ Trong $(ABCD)$ ta có
- $$\Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{IE}{EH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IG}{SG} = \frac{IE}{EH} = \frac{1}{2} \Rightarrow EG \parallel SH \quad ID \parallel CH$$
- ♦ Mà $EG \not\subset (SBC), SH \subset (SBC) \Rightarrow EG \parallel (SBC)$.

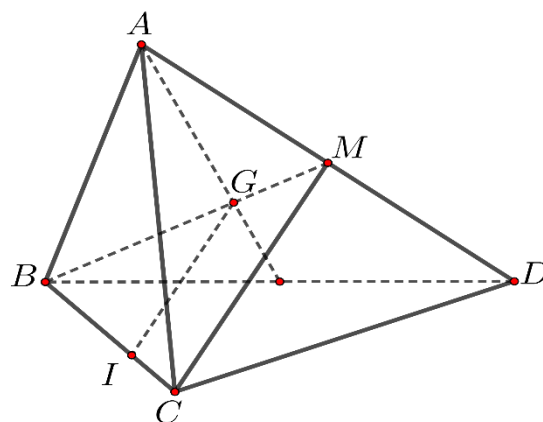


Bài 05.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Điểm I thuộc BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng: $GI \parallel (ACD)$.

Lời giải

- ♦ Gọi M là trung điểm của AD ,
- ♦ Trong $\triangle BCM$ có $\frac{BG}{GM} = 2 = \frac{BI}{IC} \Rightarrow IG \parallel CM$
- ♦ Mà $IG \not\subset (ACD), CM \subset (ACD) \Rightarrow IG \parallel (ACD)$.



Bài 06.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD . Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng $MN \parallel (SBD)$; $IJ \parallel (SBD)$; $SC \parallel (IJO)$.

Lời giải

□ $MN \parallel (SBD)$

- ♦ Trong $(ABCD)$: $MN \parallel BD$ mà $BD \subset (SBD)$
- ♦ Nên $MN \parallel (SBD)$

□ $IJ \parallel (SBD)$

- ♦ Ta có $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN}$ nên $IJ \parallel MN$ (theo định lý ta-lét)
- ♦ Suy ra $IJ \parallel MN \parallel BD$ mà $BD \subset (SBD)$.
- ♦ Nên $IJ \parallel (SBD)$

□ $SC \parallel (IJO)$

- ♦ Gọi $H = MN \cap AC$; $K = IJ \cap SH$

- ♦ Từ $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$

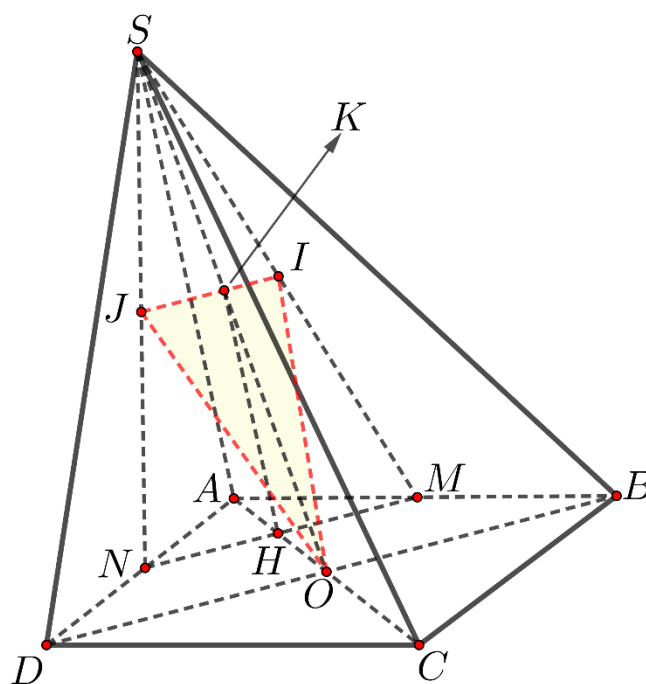
$$\Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{SI}{SM} = \frac{2}{3}$$

- ♦ Mà MN là đường trung bình tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AH}{HO} = \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow AH = HO = \frac{1}{2}OC$

- ♦ Xét $\triangle SHC$: $\frac{SK}{SH} = \frac{CO}{CH} = \frac{2}{3} \Rightarrow OK \parallel SC$

Mà $OK \subset (OIJ)$

- ♦ Suy ra $SC \parallel (OIJ)$.



Bài 07.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng.

- ❶. Gọi P, Q là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABE$. Chứng minh rằng $PQ // (CEF)$
- ❷. Gọi M, N là trọng tâm $\triangle BCD$ và $\triangle AEF$. Chứng minh rằng $MN // (CEF)$

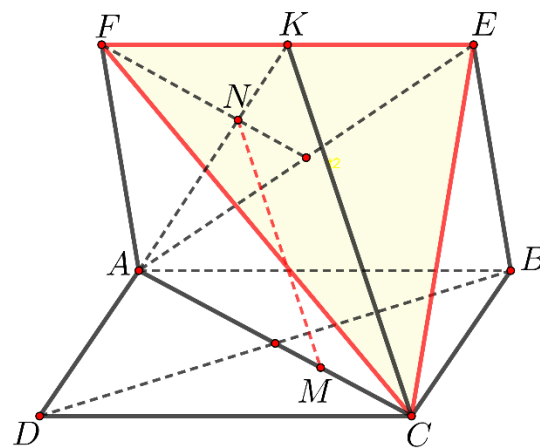
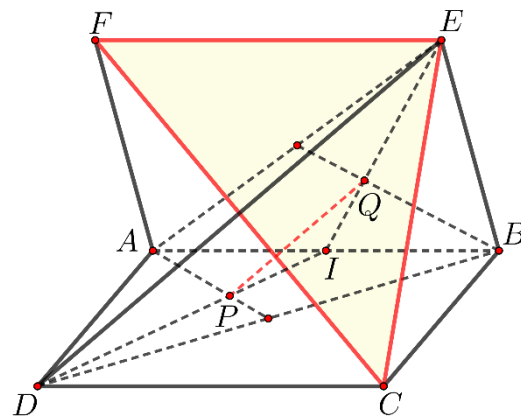
Lời giải

❶. Chứng minh rằng $PQ // (CEF)$

- ♦ Gọi I là trung điểm của AB .
- ♦ Xét tam giác DEI : $\frac{IQ}{IE} = \frac{IP}{ID} = \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow PQ // DE$ (theo định lý ta lét)
- ♦ Mà $DE \subset (DCEF) \equiv (CEF)$
- ♦ Nên $PQ // (CEF)$

❷. Chứng minh rằng $MN // (CEF)$

- ♦ Gọi K là trung điểm EF .
- N là trọng tâm $\triangle AEF$: $\frac{AN}{AK} = \frac{2}{3}$
- M là trọng tâm $\triangle BCD$: $\frac{MC}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$
- ♦ Xét $\triangle AKC$: $\frac{AN}{AK} = \frac{AM}{AC}$
- ♦ Nên $MN // KC$ (theo định lý ta lét)
- ♦ Mà $KC \subset (CEF)$.
- ♦ Suy ra $MN // (CEF)$.



Đạng 02. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG. .

Phương pháp giải

○ Ta có thể dùng:

$$\left. \begin{array}{l} M = (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx // a$$

Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với SA, BC .

1. Tìm giao tuyến của (α) và $(ABCD)$. Xác định M, N lần lượt là giao điểm của AB, CD với (α) .
2. Xác định giao điểm Q của SB và (α) . Tìm giao tuyến của (α) và (SAB) .
3. Tìm thiết diện cắt bởi (α) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

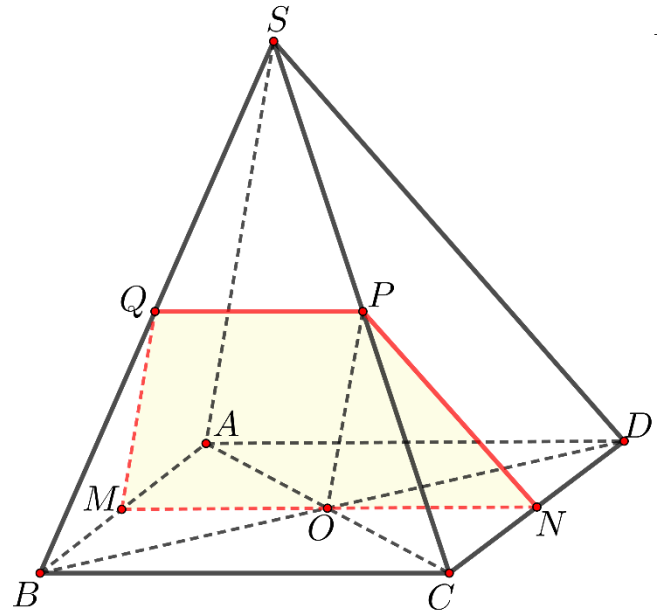
1. Tìm giao tuyến của (α) và $(ABCD)$.

Xác định M, N lần lượt là giao điểm của AB, CD với (α) .

- ♦ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} BC // (\alpha) \\ (ABCD) \supset BC \\ O \text{ là điểm chung của } (ABCD) \text{ và } (\alpha) \end{array} \right.$
- ♦ $(ABCD) \cap (\alpha) = \Delta // BC$ và Δ đi qua O .
- ♦ Trong $(ABCD)$ gọi $M = \Delta \cap AB$
- ♦ Mà $\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow M = AB \cap (\alpha)$.
- ♦ Trong $(ABCD)$ gọi $N = \Delta \cap CD$
- ♦ Mà $\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow N = CD \cap (\alpha)$.

2. Xác định giao điểm Q của SB và (α) . Tìm giao tuyến của (α) và (SAB)

- ♦ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} P \in (\alpha) \cap (SBC) \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ MN // BC \end{array} \right. \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = d // BC \text{ và } d \text{ đi qua } P.$
- ♦ Trong (SAB) gọi $Q = d \cap SB \Rightarrow SB \cap (\alpha) = Q$



♦ Dễ thấy $(\alpha) \cap (SAB) = MQ$

3. Tìm thiết diện cắt bởi (α) . Thiết diện là hình gì?

♦ Ta có:
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (\alpha) \cap (SAB) = MQ \\ (\alpha) \cap (SBC) = PQ \\ (\alpha) \cap (SCD) = NP \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Thiết diện cần tìm là } MNPQ,$$

♦ Có $PQ \parallel MN$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang

Bài 02.

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm AC . Mặt phẳng (α) qua M và song song với $SA; BC$, (α) cắt AB, SB, SC lần lượt tại $N; H; K$. Chứng minh rằng $MNHK$ là hình bình hành.

Lời giải

♦ $\left\{ \begin{array}{l} SA \parallel (\alpha) \\ (SAC) \supset SA \\ M \text{ là điểm chung của } (\alpha) \text{ và } (SAC) \end{array} \right.$
 $\rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = MK \parallel SA \quad (K \in SC).$

♦ $\left\{ \begin{array}{l} BC \parallel (\alpha) \\ (SBC) \supset BC \\ K \text{ là điểm chung của } (SBC) \text{ và } (\alpha) \end{array} \right.$
 $\rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = KH \parallel BC \quad (H \in SB).$

♦ $\left\{ \begin{array}{l} (SAB) \supset SA \\ (\alpha) \supset MK \\ SA \parallel MK \\ H \text{ là điểm chung của } (SAB) \text{ và } (\alpha) \end{array} \right.$
 $\rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = HN \parallel SA \quad (N \in AB)$

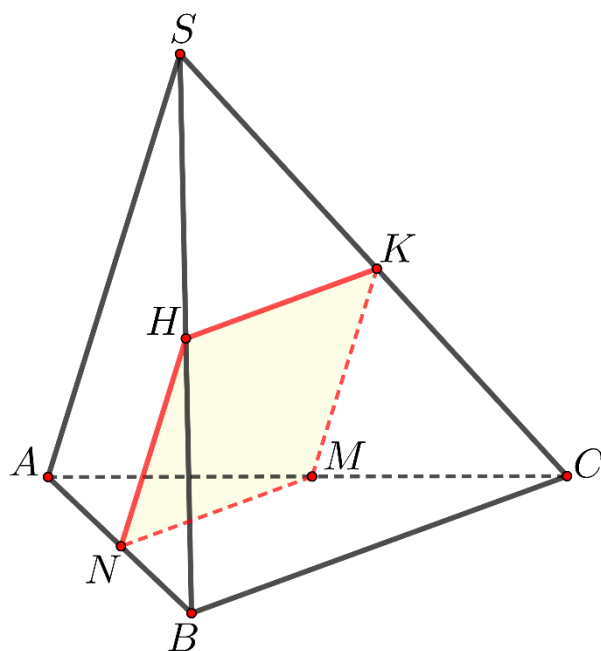
♦ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \cap (SBC) = KH \\ (\alpha) \cap (SAB) = HN \\ (\alpha) \cap (ABC) = NM \\ (\alpha) \cap (SAC) = MK \end{array} \right. \rightarrow \text{Thiết diện của hình chóp cắt bởi } (\alpha) \text{ là tứ giác } MNHK.$

♦ Ta có: M là trung điểm AC , $MK \parallel SA \rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle SAC$,

♦ Nên $MK \parallel SA$ và $MK = \frac{1}{2} SA$ (1)

♦ Chứng minh tương tự $HN \parallel SA$, $HN = \frac{1}{2} SA$ (2)

♦ Từ (1) (2) suy ra $MNHK$ là hình bình hành.



Bài 03.

Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N là trung điểm AB, SB .

1. Chứng minh $SA // (CMN)$
2. Tìm giao tuyến (CMN) và (SAC)

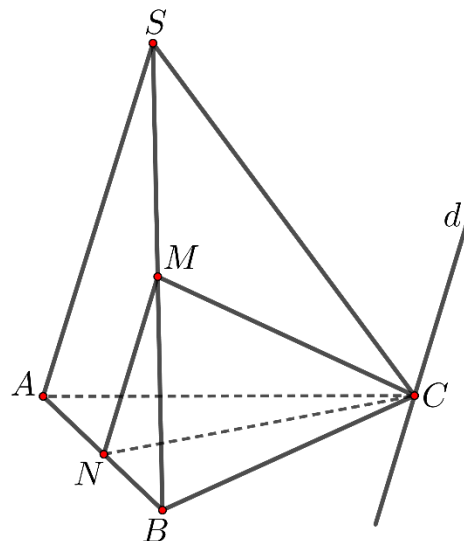
Lời giải

1. Chứng minh $SA // (CMN)$

- ♦ Xét $\triangle SAB$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN // SA$
- ♦ Mà $MN \subset (CMN) \Rightarrow SA // (CMN)$

2. Tìm giao tuyến (CMN) và (SAC)

- ♦ Ta có : $\begin{cases} C \in (SAC) \\ C \in (CMN) \end{cases} \Rightarrow C$ là điểm chung của hai mặt phẳng
- ♦ Mặt khác $MN // SA, MN \subset (CMN), SA \subset (SAC)$
- ♦ Nên $(CMN) \cap (SAC) = d // MN // SA$ và d qua C .



Bài 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm CD , (α) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm hình tính thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$

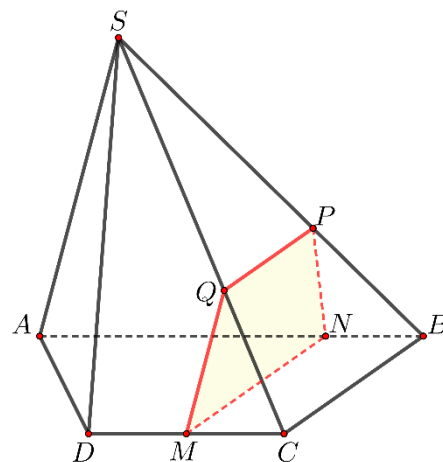
Lời giải

- ♦ $\begin{cases} BC // (\alpha) \\ (ABCD) \supset BC \\ M \in (ABCD) \cap (\alpha) \end{cases}$
- $\rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = d // BC$ với d qua M và cắt AB tại N .

- ♦ $\begin{cases} SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ N \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases}$
- $\rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = d' // SA$ với d' qua N và cắt SB tại P .

- ♦ $\begin{cases} BC \subset (SBC) \\ MN \subset (\alpha) \\ BC // MN \\ P \in (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = d'' // SA$ với d'' qua P và cắt SC tại Q

- ♦ Vậy khi đó (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$ vì có $MN // PQ // BC$



Bài 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA

1. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (α)
2. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang

Lời giải

1. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (α)

$$\begin{cases} SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ M \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases}$$

$\rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = d // SA$ với d qua M và cắt SB tại Q

$$\begin{cases} \text{Trong } (ABCD), \text{ gọi } O = MN \cap AC \Rightarrow \\ O \in MN \subset (\alpha) \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\begin{cases} SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ O \in (SAC) \cap (\alpha) \end{cases}$$

$\rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = d' // SA$ với d' qua O và cắt SC tại P .

Vậy khi đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$

2. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang

• Nếu $MQ // PN$ thì $SA // NP$

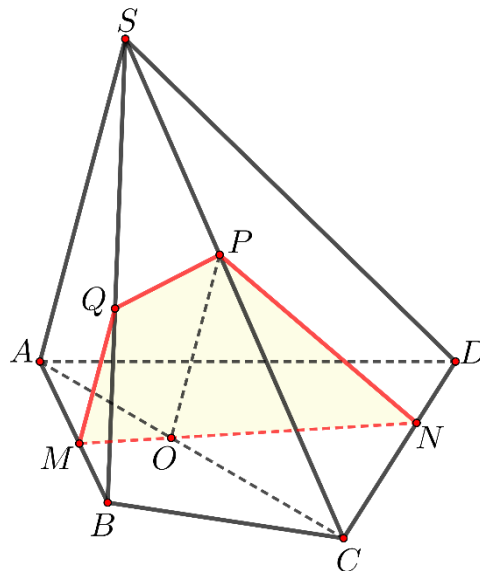
• Mà $NP \subset (SCD)$ nên $SA // (SCD)$ (vô lý).

• Do đó để $MNPQ$ là hình thang thì $QP // MN$.

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (SBC) = PQ \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$$

• Mà $PQ // MN$ nên $MN // BC$.

• Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN // BC$.



Bài 06.

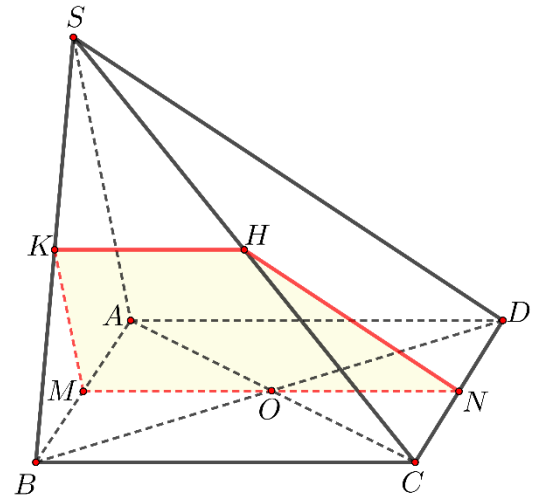
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm AB . Mặt phẳng (α) qua M , song song với SA và BC cắt DC, SC, SB lần lượt tại N, H, K . Chứng minh tứ giác $MNHK$ là hình thang.

Lời giải

♦ Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow HK // BC \text{ (1)}.$
 $(\alpha) \cap (SBC) = HK$

♦ Lại có: $\begin{cases} (\alpha) // BC \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN // BC \text{ (2)}.$
 $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$

♦ Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK // MN$
 $\Rightarrow$ tứ giác $MN HK$ là hình thang.



Bài 07.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AB = 2CD$. Gọi M là trung điểm SB . Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$ biết mặt phẳng (α) qua M , song song với SD và AB . Chứng minh thiết diện là một hình thang.

Lời giải

♦ Có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) // AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases}$
 $\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx, (Mx // AB).$

♦ Trong (SAB) gọi $N = Mx \cap SA$.

♦ Có: $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) // SD \\ SD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = Ny, (Ny // SD).$

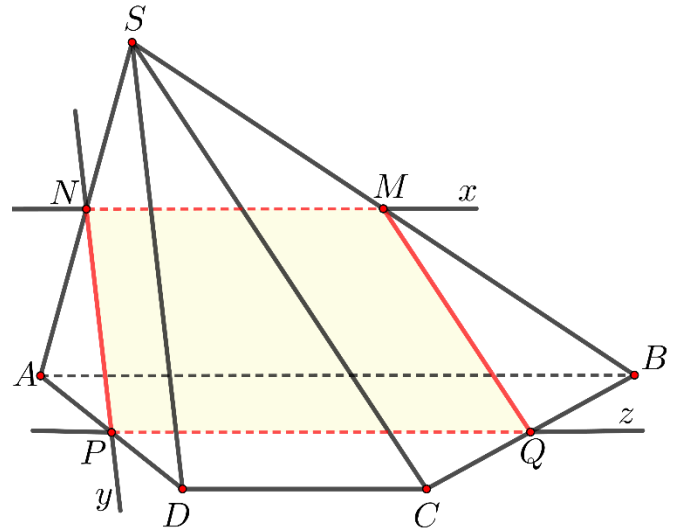
♦ Trong (SAD) gọi $P = Ny \cap AD$.

♦ Có: $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Pz, (Pz // AB).$

♦ Trong $(ABCD)$ gọi $Q = Pz \cap BC$.

♦ $\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = MN \\ (\alpha) \cap (SAD) = NP \\ (\alpha) \cap (ABCD) = PQ \\ (\alpha) \cap (SBC) = QM \end{cases} \longrightarrow$ Thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$, mà $MN // PQ (// AB)$.

♦ Do đó tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.



Bài 08.

Cho tứ diện $ABCD$. Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi bị cắt bởi mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

- Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của tứ diện, qua E thuộc cạnh BC và $(P) \parallel AD$.
- Đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với BC và AD .

Lời giải

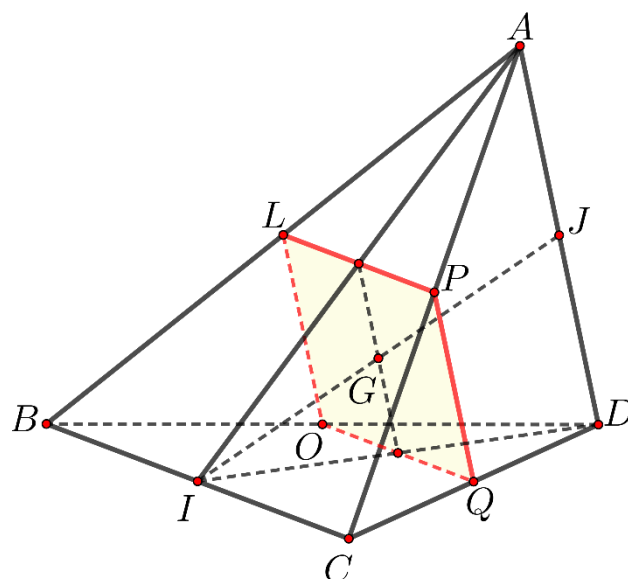
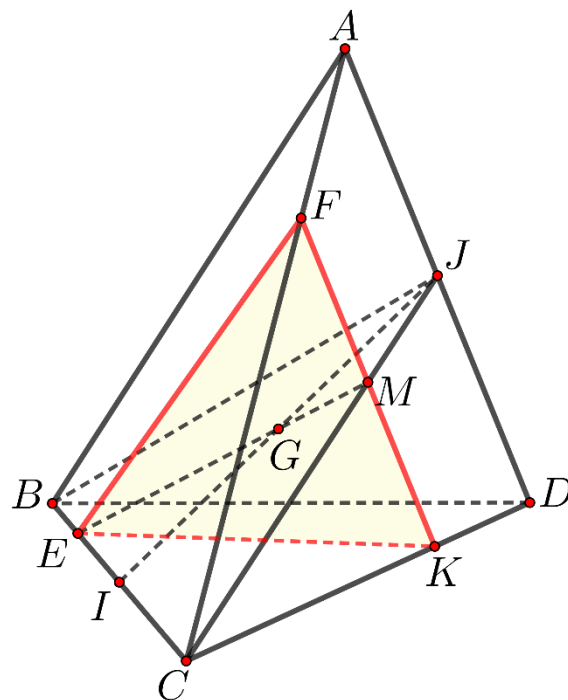
- Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của tứ diện, qua E thuộc cạnh BC và $(P) \parallel AD$.

- Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC, AD
 $\Rightarrow G$ là trung điểm IJ (vì G là trọng tâm của tứ diện).
- Trong (BCJ) gọi $M = EG \cap CJ$.
 $\Rightarrow \begin{cases} M \in EG, EG \subset (P) \\ M \in CJ, CJ \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow M \in (P) \cap (ACD)$.
- Mà $(P) \parallel AD, AD \subset (ACD)$.
- Do đó $(P) \cap (ACD) = Mx, (Mx \parallel AD)$.
- Trong (ACD) gọi $F = Mx \cap AC; K = Mx \cap CD$.
- Ta có: $\begin{cases} (P) \cap (ABC) = FE \\ (P) \cap (BCD) = EK \\ (P) \cap (ACD) = KF \end{cases}$

- Vậy thiết diện cần tìm là $\triangle EFK$.

- Đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với BC và AD .

- Gọi L, P, Q, O lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, CD, BD
- Theo tính chất trọng tâm của tứ diện và có mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của tứ diện và song song với BC .
- Suy ra thiết diện cần tìm là hình bình hành $LPQO$



Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

Bài 08.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC , (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD .

1. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
2. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD . Tính tỉ số diện tích của $\triangle SME$ và $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SFM$ và $\triangle SCD$.
3. Gọi K là giao điểm của ME và CB ; J là giao điểm của MF và CD . Hãy chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

Lời giải

1. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

- Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$
- Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap AM$
- Khi đó $\begin{cases} I \in SO \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (P) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (P)$.

- Ta có $\begin{cases} BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \\ I \in (SBD) \cap (P) \end{cases}$

$\Rightarrow (SBD) \cap (P) = d \parallel BD$ và d qua I .

- Trong (SBD) có $E = d \cap SB$ và $F = SD \cap d$.

- Ta có: $E = d \cap SB$

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in d \subset (P) \\ E \in SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow E \in (P) \cap (SBC) \quad (1).$$

- Và $\begin{cases} M \in AM \subset (P) \\ M \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (P) \cap (SBC) \quad (2).$

- Từ $ME = (P) \cap (SBC) \quad (I)$.

- Tương tự, ta cũng có $MF = (P) \cap (SCD) \quad (II)$.

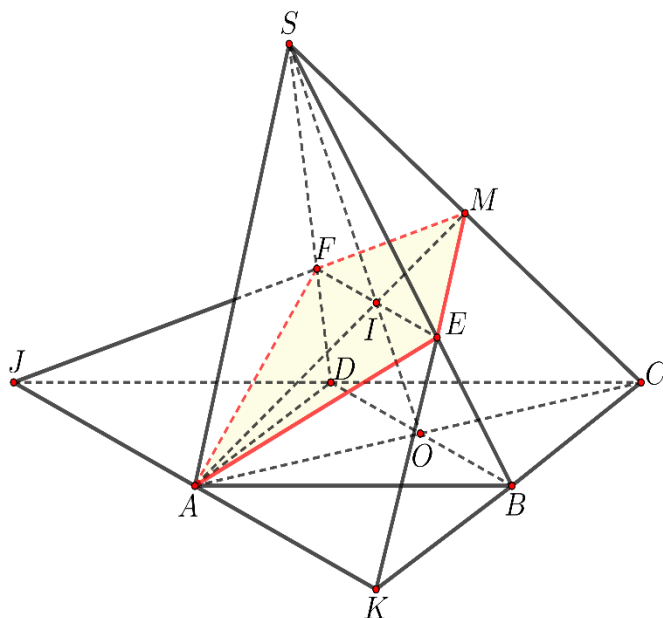
- Ta có $E \in d \cap SB \Rightarrow \begin{cases} E \in d \subset (P) \\ E \in SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow E \in (P) \cap (SAB) \quad (3).$

- Và $\begin{cases} A \in AM \subset (P) \\ A \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow A \in (P) \cap (SAB) \quad (4).$

- Từ (3), (4) ta có $AE = (P) \cap (SAB) \quad (III)$.

- Tương tự, ta có $AF = (P) \cap (SAD) \quad (IV)$.

- Từ (I), (II), (III), (IV) ta có tứ giác $AFME$ là thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) .



2. Tính tỉ số diện tích của $\triangle SME$ và $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SFM$ và $\triangle SCD$.

• $\triangle SAC$ có SO, AM là hai đường trung tuyến cắt nhau tại I

• Nên I là trọng tâm của tam giác $SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

• Xét tam giác SOB có $IE \parallel OB$ nên $\frac{SE}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

• Tương tự ta cũng có $\frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

• Ta có
$$\begin{cases} \frac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot SM \cdot SE \cdot \sin ESM}{\frac{1}{2} \cdot SC \cdot SB \cdot \sin CSB} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{S_{\triangle SFM}}{S_{\triangle SCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot SM \cdot SF \cdot \sin MSF}{\frac{1}{2} \cdot SC \cdot SD \cdot \sin DSC} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. Hãy chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

• Ta có $K = ME \cap CB \Rightarrow \begin{cases} K \in ME \subset (P) \\ K \in CB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (P) \cap (ABCD) \quad (5).$

• Ta có $J = MF \cap CD \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (P) \\ J \in CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (P) \cap (ABCD) \quad (6)$

• Và $\begin{cases} A \in AM \subset (P) \\ A \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow A \in (P) \cap (ABCD) \quad (7).$

• Từ (5), (6), (7) ta được A, K, J cùng thuộc giao tuyến của (P) và $(ABCD)$ nên A, J, K thẳng hàng.

• Gọi $\Delta = (P) \cap (ABCD)$ nên A, J, K thuộc Δ .

• Ta có $\begin{cases} BD \parallel (P) \\ BD \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta \end{cases} \Rightarrow BD \parallel \Delta.$

• Mà $EF \parallel BD$ nên $\Delta \parallel EF$.

• Vậy ba điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF .

• Ta có $EF \parallel BD \parallel JK$.

• Xét tam giác AMK có $IE \parallel AK$ nên $\frac{MI}{MA} = \frac{ME}{MK} = \frac{1}{3}$.

• Xét tam giác JKM có $EF \parallel JK$ nên $\frac{EF}{JK} = \frac{ME}{MK} = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{EF}{JK} = \frac{1}{3}$.

----- HẾT -----

BÀI 04

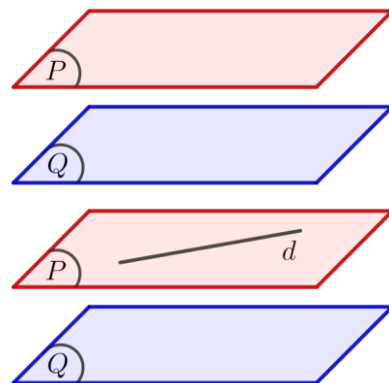
HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

I. ĐỊNH NGHĨA:

- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
- Ký hiệu:** $(P) \parallel (Q)$ hoặc $(Q) \parallel (P)$.

□ Nhận xét:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng song song với mặt phẳng kia.



II. TÍNH CHẤT:

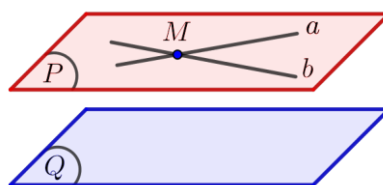
📖 Định lý 1:

🔗 Định lý 1

- Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

□ Tóm tắt định lý:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \\ a \parallel (Q) \\ b \parallel (Q) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$



📖 Ví dụ 01.

Cho tứ diện $SABC$. Hãy dựng mặt phẳng (α) qua trung điểm I của đoạn SA và song song với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

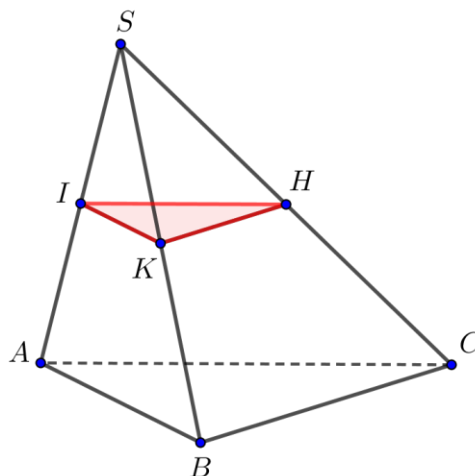
🔗 Cách dựng:

- Xét (SAB) , qua I dựng $IK \parallel AB$.
- Xét (SAC) , qua I dựng $IH \parallel AC$.

Vậy mặt phẳng (α) qua trung điểm I của đoạn SA và song song với mặt phẳng (ABC) là (IHK)

Chứng minh:

- ♦ Ta có: $\begin{cases} IK // AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow IK // (ABC).$
- ♦ $\begin{cases} IH // AC \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow IH // (ABC).$
- ♦ Ta lại có: $\begin{cases} IK, IH \subset (IHK) \\ IK \cap IH = \{I\} \\ IK // (ABC) \\ IH // (ABC) \end{cases} \Rightarrow (IHK) // (ABC).$



Ví dụ 02.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$. Chứng minh: $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

Lời giải

- ♦ Ta có: G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$

$$\Rightarrow \frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AP} = \frac{AG_3}{AN} = \frac{2}{3}$$

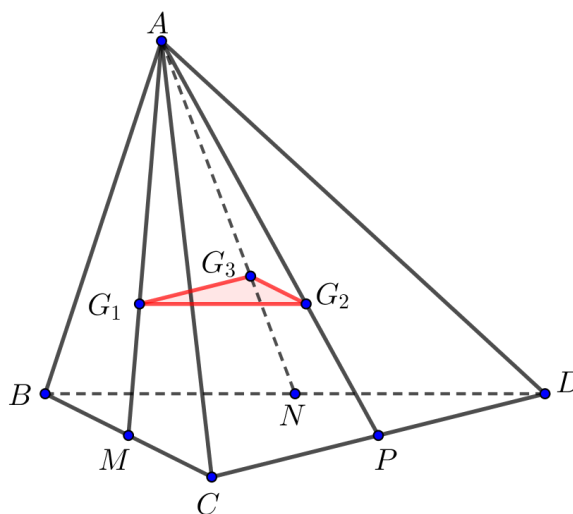
- ♦ Nên $G_1G_2 // MP, G_1G_3 // MN, G_2G_3 // PN$

$$+) \begin{cases} G_1G_2 // MP \\ MP \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 // (BCD) \quad (1).$$

$$+) \begin{cases} G_2G_3 // PN \\ PN \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow G_2G_3 // (BCD) \quad (2).$$

- ♦ Mà $G_1G_2 \cap G_2G_3 = \{G_2\} \quad (3).$

- ♦ Từ (1), (2), (3) suy ra $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.



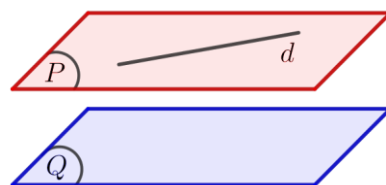
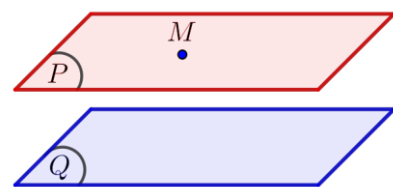
Định lý 2

- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

- Ta có các hệ quả sau:

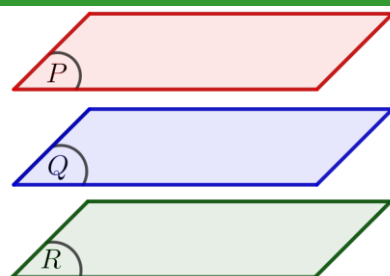
01

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (Q) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (Q) .



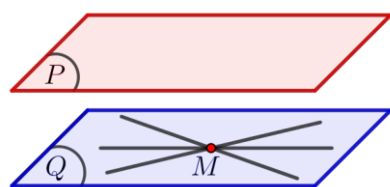
02

⊙ Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.



03

⊙ Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (P) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) thì đều nằm trong mặt phẳng đi qua A song song với (P) là (Q) .



Ví dụ 03.

Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=SB=SC$. Gọi Sx, Sy, Sz lần lượt là phân giác ngoài của các góc S trong tam giác $\triangle SBC, \triangle SAC, \triangle SAB$. Chứng minh:

1. $(Sx; Sy) \parallel (ABC)$
2. $Sx; Sy; Sz$ cùng nằm trên mặt phẳng

Lời giải

1. $(Sx; Sy) \parallel (ABC)$

- ♦ Gọi SM là đường phân giác trong của tam giác $\triangle SBC$ (với $M \in BC$)
- ♦ Mà $\triangle SBC$ cân tại S (do $SC = SB$)
 $\Rightarrow SM \perp BC$ mà $Sx \perp SM$
 $\Rightarrow Sx \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} Sx \parallel BC \\ \text{Ta có } BC \subset (ABC) \\ Sx \not\subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow Sx \parallel (ABC)$$

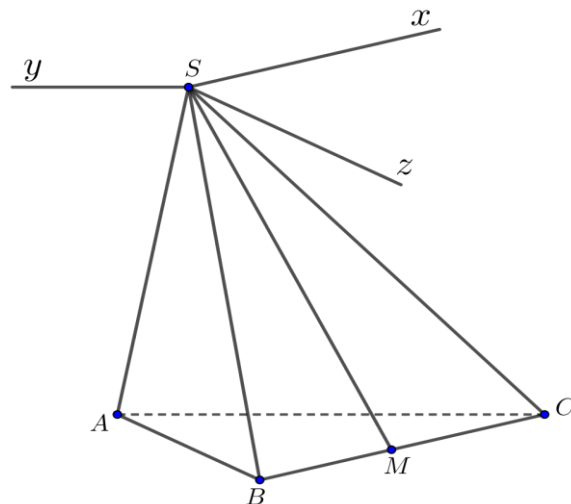
- ♦ Chứng minh tương tự $\Rightarrow Sy \parallel (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} Sx \parallel (ABC) \\ Sy \parallel (ABC) \\ Sx \cap Sy = \{S\} \end{array} \right\} \Rightarrow (Sx; Sy) \parallel (ABC)$$

2. $Sx; Sy; Sz$ cùng nằm trên mặt phẳng

- ♦ Chứng minh tương tự $\Rightarrow (Sy; Sz) \parallel (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} (Sx; Sy) \parallel (ABC) \\ (Sy; Sz) \parallel (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (Sx; Sy) \equiv (Sy; Sz) \Rightarrow Sx; Sy; Sz \text{ đồng phẳng}$$

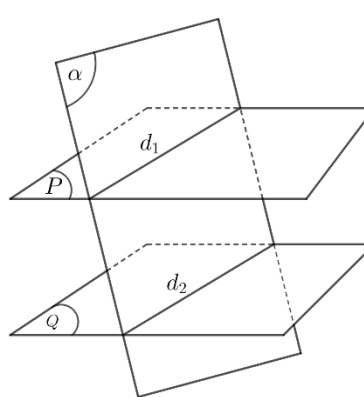


Định lý 3

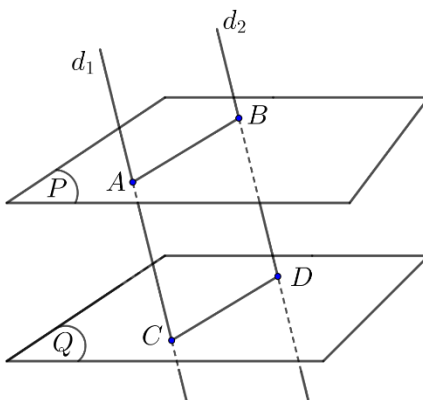
- Nếu một mặt phẳng thứ 3 cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại và hai giao tuyến của chúng song song với nhau

- **Tóm tắt định lý:**

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (P) = d_1 \\ (\alpha) \cap (Q) = d_2 \\ (P) \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



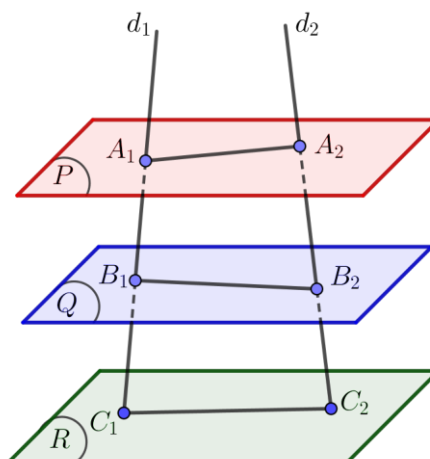
- **Hệ quả:** Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



III. ĐỊNH LÝ THALES TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN:

- Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

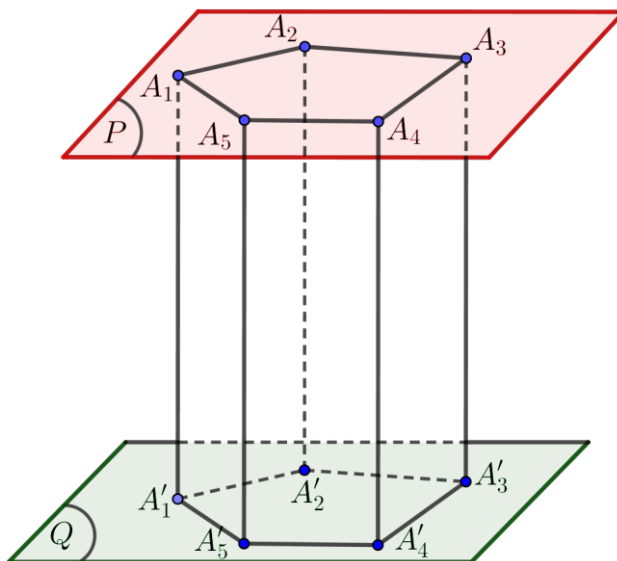
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2}.$$



IV. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP:

□ Cho $(P) \parallel (Q)$.

Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (Q) lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.



Hình lăng trụ gồm

- Hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$

□ Hình lăng trụ có:

- Mặt đáy: $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các cạnh bên: $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$
- Mặt bên: $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$
- Các đỉnh: là các đỉnh của đáy.

□ Gọi tên lăng trụ: hình lăng trụ + tên đa giác

* Hình lăng trụ có đáy là tam giác gọi là hình lăng trụ tam giác.

* Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

📖 Ví dụ 04.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$.

1. Chứng minh $AM \parallel A'M'$.
2. Tìm giao điểm của $(AB'C')$ với $A'M$.
3. Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ với $(BA'C')$.
4. Tìm giao điểm G của d với $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác $AB'C'$.

Lời giải

❶. Chứng minh $AM \parallel A'M'$.

♦ Do M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$

♦ Nên $\begin{cases} MM' \parallel CC' \\ MM' = CC' \end{cases}$.

♦ Mà $\begin{cases} AA' \parallel CC' \\ AA' = CC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' \parallel MM' \\ AA' = MM' \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AA'M'M$ là hình bình hành

$\Rightarrow AM \parallel A'M'$.

❷. Tìm giao điểm của $(AB'C')$ với $A'M$.

♦ Ta có M' là trung điểm của cạnh $B'C'$

$\Rightarrow \begin{cases} M' \in B'C' \\ M' \in AM' \end{cases} \text{ mà } \begin{cases} B'C' \subset (AB'C') \\ M' \in (AA'M'M) \end{cases}$

$\Rightarrow (AB'C') \cap (AA'M'M) = \{M'\}$.

♦ Mặt khác $(AB'C') \cap (AA'M'M) = \{A\}$.

♦ Nên ta có $(AB'C') \cap (AA'M'M) = AM'$.

♦ Trong $(AA'M'M)$ gọi I là giao điểm của AM' và $A'M \Rightarrow A'M \cap (AB'C') = \{I\}$.

❸. Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ với $(BA'C')$.

♦ Trong $(ABA'B')$ gọi D là giao điểm AB' và $A'B$

$\Rightarrow \begin{cases} D \in A'B \\ D \in AB' \end{cases} \text{ mà } \begin{cases} A'B \subset (BA'C') \\ AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow (AB'C') \cap (BA'C') = \{D\}$.

♦ Ta lại có $(AB'C') \cap (BA'C') = \{C'\} \Rightarrow (AB'C') \cap (BA'C') = C'D$.

♦ Vậy giao tuyến d của $(AB'C')$ với $(BA'C')$ là $C'D$.

❹. Tìm giao điểm G của d với $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác $AB'C'$.

♦ Ta có $(AM'M) \cap (AB'C') = AM'$.

♦ Mà $C'D \subset (AB'C')$.

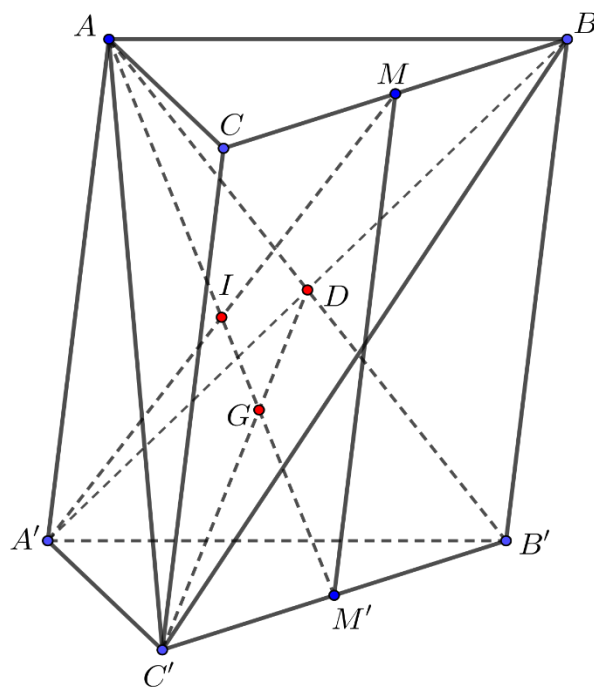
♦ Trong $(AB'C')$ gọi G là giao điểm $C'D$ và AM' . Suy ra $C'D \cap (AM'M) = \{G\}$.

♦ Ta có D là trung điểm $AB' \Rightarrow C'D$ là đường trung tuyến của tam giác $C'AB'$.

♦ Tương tự ta có AM' là đường trung tuyến của tam giác $AB'C'$.

♦ Mà G là giao điểm $C'D$ và AM' .

♦ Vậy G là trọng tâm tam giác $AB'C'$.

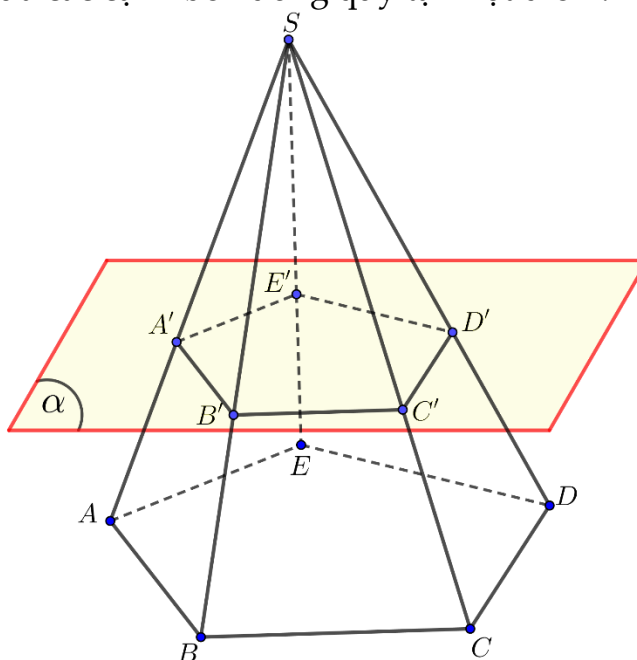


V. HÌNH CHÓP CỤT:

□ Cắt hình chóp bởi mặt phẳng song song với đáy và không đi qua đỉnh ta được hình chóp cắt.

Tính chất :

- 1 Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song, các tỷ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- 2 Các mặt bên là những hình thang.
- 3 Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.



III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 01. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.

Phương pháp giải

- Chứng minh 2 mặt phẳng song song:
$$\begin{cases} a//a' \\ b//b' \\ (\alpha): a \cap b = I \\ (\beta): a' \cap b' = I' \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$
- Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng:
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\beta).$$

➤ Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD .

1. Chứng minh $(PMN) // (ABCD)$, $(OMN) // (SCD)$.
2. Gọi K, J lần lượt là trung điểm BC, OM . Chứng minh $KI // (SCD)$.

Lời giải

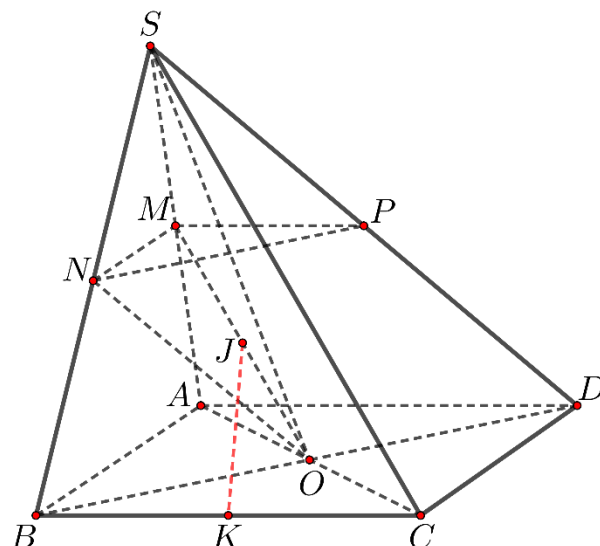
1. Chứng minh $(PMN) // (ABCD)$

- ♦ Ta có: $\begin{cases} MN \subset (MNP), MP \subset (MNP) \\ AB \subset (ABCD), AD \subset (ABCD) \\ MN \cap MP = M \\ AB \cap AD = A \\ MN // AB, MP // AD \end{cases}$

$$\Rightarrow (MNP) // (ABCD)$$

○ Chứng minh $(OMN) // (SCD)$

- ♦ Ta có: MN là đường trung bình của $\triangle SAB$
 ♦ Nên $MN // AB$ mà $AB // CD$ hay $MN // CD$.
- $\begin{cases} MN // CD \\ MN \not\subset (SCD) \Rightarrow MN // (SCD) \text{ (1)} \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$
- ♦ Tương tự OM là đường trung bình của $\triangle SAC$
 ♦ Nên $OM // SC$.
- $\begin{cases} OM // SC \\ OM \not\subset (SBC) \Rightarrow OM // (SBC) \text{ (2)} \\ SC \subset (SBC) \end{cases}$
- ♦ $MN \cap OM = M$ trong (OMN) (3)
 ♦ Từ (1), (2), (3) suy ra $(SCD) // (OMN)$.



2. Chứng minh $KI // (SCD)$

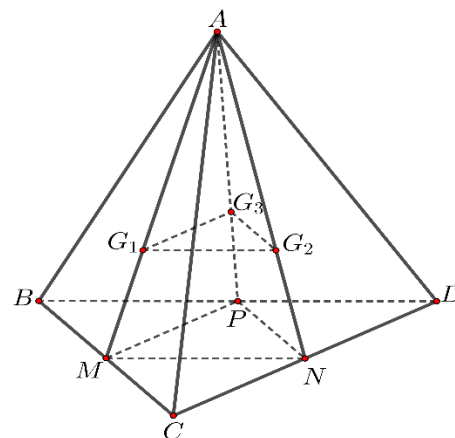
- $\begin{cases} O \in (OMN) \cap (ABCD) \\ MN \subset (OMN) \\ AB \subset (ABCD) \\ MN // AB \end{cases}$
- $\Rightarrow (OMN) \cap (ABCD) = Ox // AB$
- ♦ Mặt khác $OK // AB$
 $\Rightarrow (OMN) \cap (ABCD) = OK // AB \Rightarrow KI \subset (OMN)$
- ♦ Ta có $\begin{cases} (OMN) // (SCD) \\ KI \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow KI // (SCD)$

Bài 02.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC; \triangle ACD; \triangle ABD$. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

Lời giải

- ♦ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .
 ♦ Theo tính chất của trọng tâm và định lý ta-lét:
- $$\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{AG_3}{AP} = \frac{2}{3}$$
- $\Rightarrow \begin{cases} G_1G_2 // MN \\ G_2G_3 // NP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1G_2 // (MNP) \\ G_2G_3 // (MNP) \end{cases} \text{ (1)}$
- ♦ Mà G_1G_2 và G_2G_3 cắt nhau tại G_2 và cùng nằm trong $(G_1G_2G_3)$ (2)
- $\xrightarrow{(1) \& (2)} (G_1G_2G_3) // (MNP), \text{ hay } (G_1G_2G_3) // (BCD).$



Bài 03.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng.

1. Chứng minh $AB \parallel (CDEF)$.
2. Chứng minh $(ADF) \parallel (BCE)$.
3. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AD, BC, BE, AF . Chứng minh $(MNPQ) \parallel (DCEF)$

Lời giải

1. Chứng minh $AB \parallel (CDEF)$.

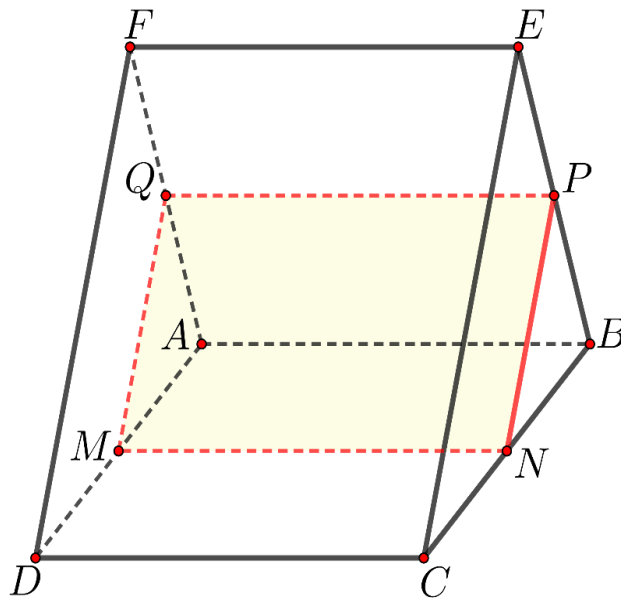
- ♦ Ta có $AB \parallel CD$ (do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)
- ♦ $AB \parallel FE$ (do tứ giác $ABEF$ là hình bình hành)
- $\Rightarrow AB \parallel FE \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (CDEF)$.

2. Chứng minh $(ADF) \parallel (BCE)$.

- ♦ Ta có $AD \parallel BC$ (do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành),
- ♦ Mà $BC \subset (BCE) \rightarrow AD \parallel (BCE)$.
- ♦ Chứng minh tương tự ta có $AF \parallel (BCE)$
- ♦ Mà AD và AF cắt nhau tại A , và cùng nằm trong mặt phẳng (ADF) .
- ♦ Suy ra $(ADF) \parallel (BCE)$.

3. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AD, BC, BE, AF . Chứng minh $(MNPQ) \parallel (DCEF)$

- ♦ Xét hình bình hành $ABEF$ có P, Q là trung điểm BE, AF
- ♦ Nên PQ là đường trung bình của hình bình hành $ABEF$
- $\Rightarrow PQ \parallel AB \parallel EF, PQ = AB = EF$ (3) (tính chất đường trung bình).
- ♦ Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD, MN = AB = CD$ (4)
- ♦ Từ (3) và (4) suy ra $\Rightarrow MN \parallel PQ, EF \parallel CD$.
- ♦ Suy ra tồn tại mặt phẳng $(MNPQ)$ và mặt phẳng $(DCEF)$.
- ♦ Ta có $MN \parallel CD, CD \subset (DCEF) \Rightarrow MN \parallel (DCEF)$ (5)
- ♦ Xét $\triangle BCE$ có P, N là trung điểm của BE và BC (gt),
- ♦ Suy ra PN là đường trung bình của $\triangle BCE \Rightarrow PN \parallel EC$
- ♦ Mà $EC \subset (DCEF)$, suy ra $PN \parallel (DCEF)$ (6)
- ♦ Ta có MN, PN cùng nằm trong mặt phẳng $(MNPQ)$ và cắt nhau tại N (7)
- ♦ Từ (5), (6) và (7) suy ra $(MNPQ) \parallel (DCEF)$.



Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

Bài 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABS$ và điểm E trên cạnh AD sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB .

1. Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) .
2. Đường thẳng qua E song song với AB cắt MC tại F . Chứng minh rằng $GF \parallel (SCD)$.
3. Chứng minh rằng $EG \parallel (SCD)$.

Lời giải

1. Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) .

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD; \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD.$$

2. Đường thẳng qua E song song với AB cắt MC tại F . Chứng minh rằng $GF \parallel (SCD)$.

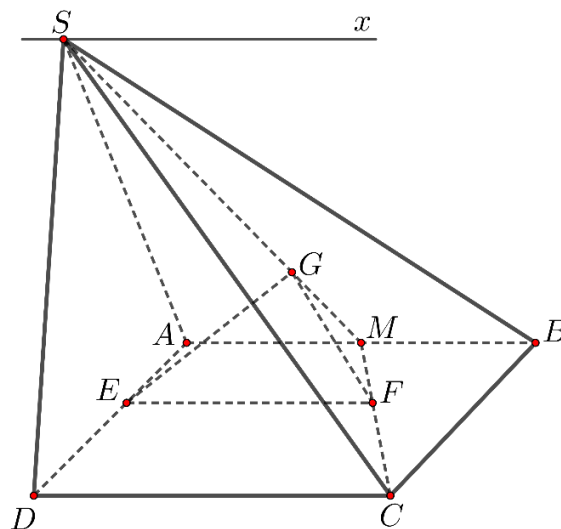
♦ Xét hình thang $AMCD$ có $EF \parallel AM$,

$$\text{Suy ra: } \frac{AE}{AD} = \frac{MF}{MC} = \frac{1}{3}.$$

♦ Xét $\triangle SAB$: M là trung điểm AB , G là trọng tâm $\triangle ABC$ suy ra: $\frac{MG}{MS} = \frac{1}{3}$.

♦ Xét $\triangle SCM$ có $\frac{MG}{MS} = \frac{MF}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GF \parallel SC$.

♦ Ta có: $\begin{cases} GF \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow GF \parallel (SCD)$



3. Chứng minh rằng $EG \parallel (SCD)$.

$$\begin{cases} GF \parallel SC \text{ (cmt)} \\ EF \parallel CD (\parallel AB) \end{cases} \Rightarrow (SCD) \parallel (EFG) \Rightarrow EG \parallel (SCD).$$

Bài 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của AB , G là trọng tâm SAB và điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M song song với AB cắt IC tại N . Chứng minh rằng $GN \parallel (SCD)$ và $GM \parallel (SCD)$.

Lời giải

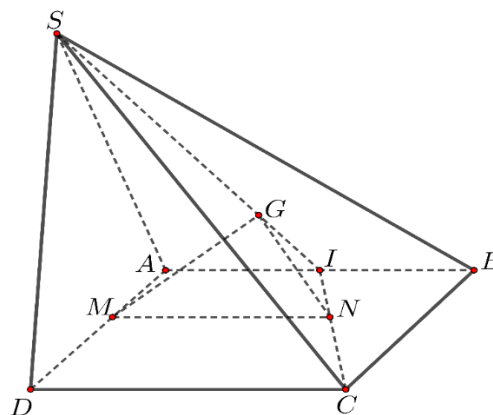
♦ Xét hình thang $AICD$ có $MN \parallel AI$, suy ra:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}.$$

♦ Xét $\triangle SAB$ có I là trung điểm AB , G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\text{Suy ra: } \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}.$$

♦ Xét $\triangle SCM$ có $\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN \parallel SC$.



- $$\Rightarrow (SCD) // (GNM) \Rightarrow GM // (SCD).$$

Phương pháp giải

01

02

Như vậy thay vì tìm thiết diện song song với mặt phẳng (β) thì ta tìm thiết diện song song với các đường thẳng a, b nằm trong (β)

②. Tìm thiết diện cắt bởi (α) . Thiết diện là hình gì ?

□ $(\alpha) \cap (SBC)$.

- ♦ Ta có $(\alpha) \parallel (ABCD), (SBC) \cap (ABCD) = BC$.
- ♦ Mà $(SCB) \cap (\alpha) = N \Rightarrow (SCB) \cap (\alpha) = \Delta$ (với Δ là đường thẳng đi qua N và song song BC).
- ♦ Do N là trung điểm của $SB \Rightarrow \Delta$ cắt SC tại trung điểm $P \Rightarrow SC \cap (\alpha) = P$.

2. Tìm thiết diện cắt bởi (α) . Thiết diện là hình gì?

- ♦ Ta có $(\alpha) \parallel (ABCD), (SAD) \cap (ABCD) = AD$.
- ♦ Mà $(SAD) \cap (\alpha) = M \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = a$ (với a là đường thẳng đi qua M và song song AD).
- ♦ Do M là trung điểm của $SA \Rightarrow a$ cắt SD tại trung điểm Q .
- ♦ Nối M, N, P, Q ta được thiết diện là tứ giác $MNPQ$.
- ♦ Ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ & (MN \parallel AB; PQ \parallel AB) \\ NP \parallel MQ & (NP \parallel AD; MQ \parallel AD) \end{cases}$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang $(AB \parallel CD)$, M là một điểm thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$)

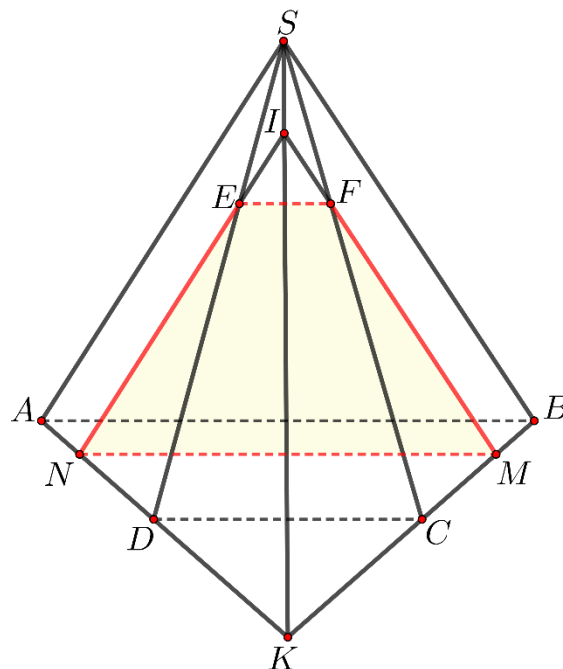
1. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt (P) qua M và song song với (SAB) .
2. Gọi N, E, F lần lượt là giao điểm của (P) và AD, SD, SC . Gọi I là giao điểm của NE và MF . Chứng minh rằng I chạy trên một đường thẳng cố định.

Lời giải

1. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt (P) qua M và song song với (SAB) .

- ♦ Ta có: (P) đi qua M và song song với (SAB)
 $\rightarrow (P) \cap (ABCD) = d \parallel AB$ với d đi qua M và $d \cap AD = N$.
- ♦ (P) đi qua N và song song với (SAB)
 $\rightarrow (P) \cap (SAD) = d' \parallel SA$ với d' đi qua N và $d' \cap SD = E$.
- ♦ (P) đi qua M và song song với (SAB)
 $\rightarrow (P) \cap (SBC) = d'' \parallel SB$ với d'' đi qua M và $d'' \cap SC = F$.
- ♦ Suy ra thiết diện tìm được là tứ giác $MNEF$
- ♦ Vì $(P) \cap (SCD) = EF, CD \parallel AB$
 $\Rightarrow EF \parallel AB \parallel CD \parallel MN$
- ♦ Vậy thiết diện tìm được là hình thang $MNEF$

2. Chứng minh rằng I chạy trên một đường thẳng cố định.



- ♦ Ta có: $NE \subset (SAD)$
- ♦ $MF \subset (SBC)$
- ♦ $(SAD) \cap (SBC) = SK, K = AD \cap BC$ suy ra SK cố định
- ♦ I là giao điểm của NE và MF
 $\Rightarrow I \in SK$ (ĐPCM)

Bài 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O , $AC = a, BD = b$, tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (α) đi động song song với mặt (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn thẳng AC ($I \neq A, C$)

1. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) .
2. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$

Lời giải

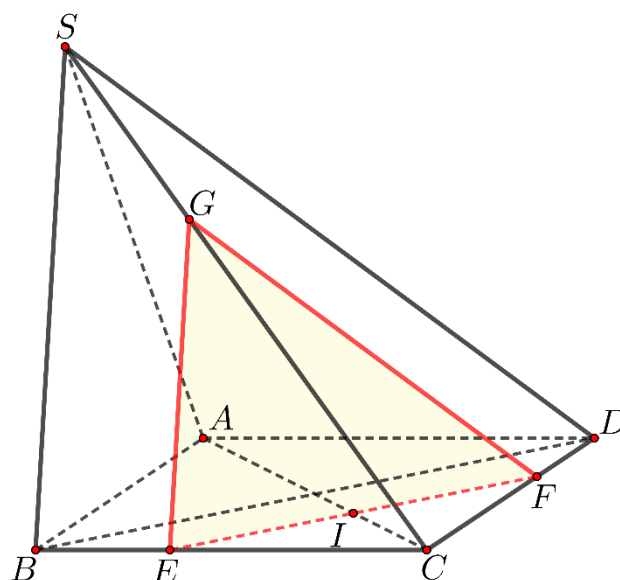
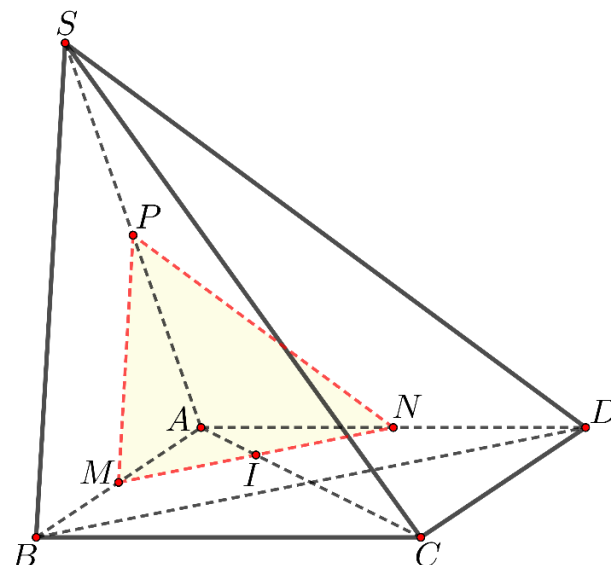
1. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) .

Trường hợp 1: $I \in AO$

- ♦ Ta có: (α) đi qua I và song song với (SBD)
 $\rightarrow (P) \cap (ABCD) = d // BD$ với d đi qua I và
 $\begin{cases} d \cap AB = M \\ d \cap AD = N \end{cases}$
- ♦ (α) đi qua N và song song với (SBD)
 $\rightarrow (P) \cap (SAD) = d' // SD$ với d' đi qua N và
 $d' \cap SA = P$.
- ♦ $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ mà $(\alpha) // (SBD) \Rightarrow MP // SB$
- ♦ Suy ra thiết diện tìm được là tam giác MNP .
- ♦ Do tam giác SBD đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2: $I \in CO$

- ♦ Ta có: (α) đi qua I và song song với (SBD)
 $\rightarrow (P) \cap (ABCD) = d // BD$ với d đi qua I và
 $\begin{cases} d \cap CB = E \\ d \cap CD = F \end{cases}$
 - ♦ (α) đi qua F và song song với (SBD)
 $\rightarrow (P) \cap (SCD) = d' // SD$ với d' đi qua F và
 $d' \cap SC = G$.
 - ♦ $(\alpha) \cap (SBC) = EG$ mà $(\alpha) // (SBD) \Rightarrow EG // SB$
- Suy ra thiết diện tìm được là tam giác EFG .
 Do tam giác SBD đều nên tam giác EFG đều.



②. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$

➤ Trường hợp 1:

$I \in AO$, thiết diện tìm được là tam giác MNP đều

$$\bullet \Delta MNP \sim \Delta SBD \text{ nên } S_{MNP} = \left(\frac{MN}{BD} \right)^2 \cdot S_{SBD}$$

$$\bullet \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{2x}{a},$$

$$S_{SBD} = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 b^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

➤ Trường hợp 2:

$I \in CO$, thiết diện tìm được là tam giác EFG đều

$$\bullet \Delta EFG \sim \Delta SBD \text{ nên } S_{EFG} = \left(\frac{EF}{BD} \right)^2 \cdot S_{SBD}$$

$$\bullet \frac{EF}{BD} = \frac{CI}{CO} = \frac{a-x}{\frac{a}{2}} = \frac{2(a-x)}{a},$$

$$S_{SBD} = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{EFG} = \left(\frac{2(a-x)}{a} \right)^2 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a-x)^2 b^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

➤ Bài 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi E là trung điểm của SB . Biết tam giác ACE đều và $AB = OD = a$. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (ACE) và qua I trên đoạn OD ; (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R .

①. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) .

②. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$

Lời giải

- Kẻ $QI \parallel OE$ với $Q \in SB$.
- Qua I kẻ $MN \parallel AC$ với $M \in AD, N \in AC$.
- Gọi $QR = (\alpha) \cap (SAB)$ mà $AE = (CAE) \cap (SAB) \Rightarrow QR \parallel AE$.
- Gọi $PQ = (\alpha) \cap (SAC)$ mà $CE = (CAE) \cap (SAC) \Rightarrow QP \parallel CE$
 $\Rightarrow (P) \equiv (MNPQR)$.

①. Có nhận xét gì về ΔPQR và tứ giác $MNPR$

$$\bullet \text{Ta có } \frac{DI}{DO} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{SQ}{SE} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{QR}{AE} = \frac{PQ}{AE} = \frac{PR}{CA} = \frac{x}{a}$$

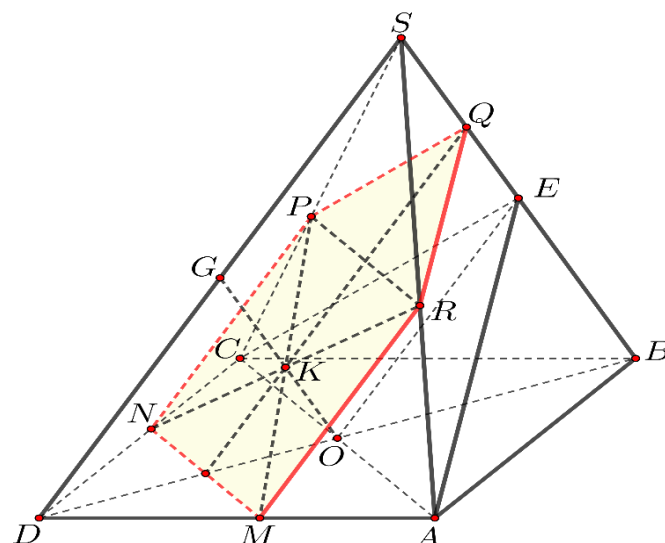
• Mà ΔCAE đều $\Rightarrow \Delta PQR$ đều.

$OE \perp AC$ (do OE là đường trung tuyến trong tam giác đều)

$$\Rightarrow QI \perp NM \Rightarrow PN \perp NM.$$

• Dễ thấy $PNMR$ là hình bình hành

Mà $PN \perp NM \Rightarrow PNMR$ là hình chữ nhật.



②. Tìm tập hợp giao điểm của MP và NR khi I di động trên đoạn OD .

- Gọi $\{K\} = PM \cap NR \Rightarrow KI = \frac{1}{2}PN$
- Mà $PN = \frac{a-x}{a}.SD \Rightarrow KI = \frac{a-x}{2a}.SD$
- Gọi G là trung điểm SD . Ta có $\frac{IK}{GD} = \frac{OI}{OD} \left(= \frac{a-x}{a} \right)$
- Mà $IK // GD \Rightarrow K \in GO$. Vậy khi I di động trên DO thì K di động trên GO .
- 3. Tính diện tích đa giác $MNPQR$ theo a và $x = DI$. Tính x để diện tích ấy lớn nhất.
- Ta có $PR = NM = \frac{x}{a}.a = x \Rightarrow S_{PQR} = \frac{1}{2}.x.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$
- Ta có $S_{PRMN} = NM.PN = x.\frac{a-x}{a}.SD = x.\frac{a-x}{a}.2OE = x.\frac{a-x}{a}.2.a = 2(a-x)x$
- Vậy $S_{MNPQR} = 2(a-x)x + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

🔗 Dạng 03. HÌNH LĂNG TRỤ - HÌNH HỘP.

Phương pháp giải

- Chú ý vào các đường thẳng và mặt phẳng song song của hình lăng trụ để áp dụng các định lý song song đã học.

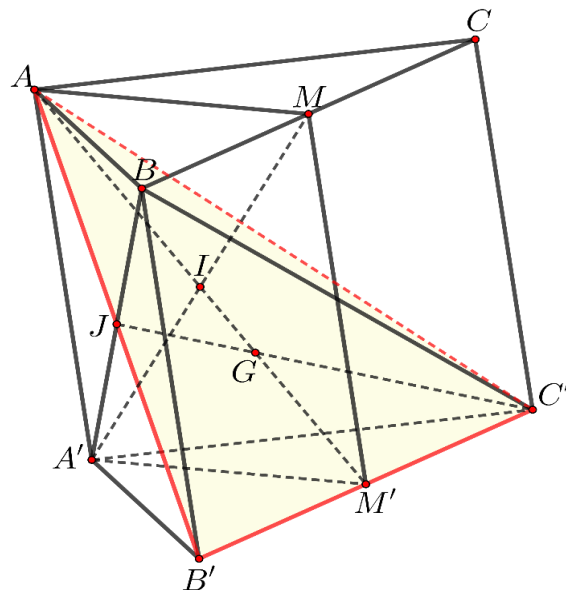
🔗 Bài 01.

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $B'C'$.

1. Chứng minh $AM // A'M'$.
2. Tìm giao điểm $(AB'C')$ và đường thẳng $A'M$.
3. Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
4. Tìm giao điểm G của d với (AMA') . Chứng minh rằng G là trọng tâm $\triangle AB'C'$

Lời giải

1. Chứng minh $AM // A'M'$.
 - Xét tứ giác $BCC'B'$ có M, M' là trung điểm của BC và $B'C'$.
 - $\Rightarrow MM'$ là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$.
 - $\Rightarrow MM' // BB' // CC'; MM' = BB' = CC'$
 - Nên tứ giác $AMA'M'$ là hình bình hành
 - $AM // A'M'$.
2. Tìm giao điểm $(AB'C')$ và đường thẳng $A'M$.
 - Gọi I là trung điểm của $A'M$
 - $\rightarrow I$ cũng là trung điểm của AM' .
 - Mà AM' thuộc $(AB'C')$



- ♦ Do vậy I là giao điểm của $A'M$ và $(AB'C')$.
- 3. Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
 - ♦ Trong $(ABB'A')$ có $AB' \cap BA' = \{J\}$
 - $\Rightarrow J, C \in (AB'C') \cap (BA'C')$
 - $\Rightarrow JC = (AB'C') \cap (BA'C')$
- 4. Tìm giao điểm G của d với (AMA') . Chứng minh rằng G là trọng tâm $\triangle AB'C'$
 - ♦ Trong $(AB'C')$ có $JC' \cap IM' = \{G\} \Rightarrow G \in JC' \cap (AMM'A')$.
 - ♦ Xét $\triangle AC'B'$ có $AM'; C'J$ lần lượt là trung tuyến.
 - ♦ Do vậy giao điểm G của chúng chính là trọng tâm $\triangle AC'B'$.

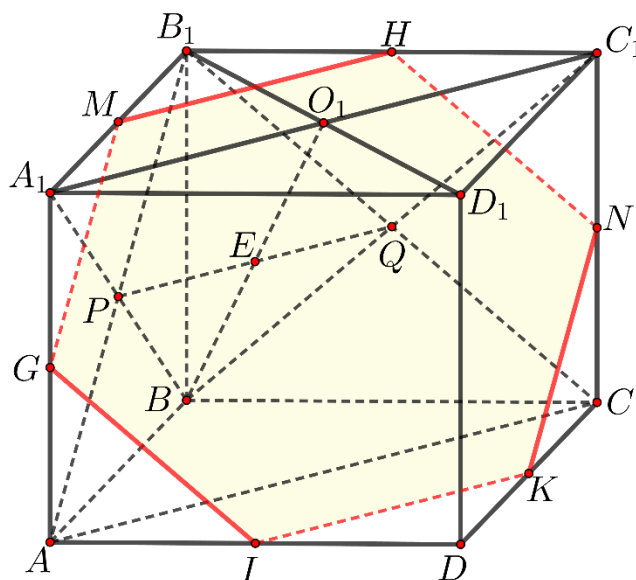
Bài 02.

Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O_1 là tâm hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$; K là trung điểm CD , E là trung điểm của BO_1 .

1. Chứng minh $E \in (ACB_1)$.
2. Xác định thiết diện của hình hộp với (P) đi qua K và song song với (EAC) .

Lời giải

1. Chứng minh $E \in (ACB_1)$.
 - ♦ Gọi giao điểm của hai hình bình hành A_1B_1BA, B_1C_1BC là P, Q
 - ♦ Ta có $PE; QE$ lần lượt đường trung bình của $\triangle BO_1A_1, \triangle BO_1C_1$
 - ♦ Nên ta có $PE \parallel A_1C_1; A_1C_1 \parallel QE$
 - ♦ Do vậy $E \in PQ \Rightarrow E \in (AB_1C)$
2. Trong $(ABCD)$ kẻ $KI \parallel AC (I \in AD)$
 - ♦ Trong (A_1ADD_1) kẻ $IG \parallel A_1D (G \in AA_1); A_1D \parallel B_1C$
 - $\Rightarrow IG \parallel B_1C \Rightarrow IG \parallel (B_1AC)$
 - ♦ Trong (ABA_1B_1) kẻ $GM \parallel AB' (M \in A_1B_1)$
 - ♦ Trong $(A_1B_1C_1D_1)$ kẻ $HM \parallel A_1C_1 (H \in B_1C_1)$
 - ♦ Trong (BB_1C_1C) kẻ $HN \parallel A_1C_1 (N \in CC_1)$
 - ♦ Do vậy giao tuyến cần tìm là ngũ giác $KIGMHN$.



Bài 03.

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên đường thẳng BA lấy điểm M sao cho A nằm giữa đoạn thẳng MB và $MA = \frac{1}{2}AB$.

1. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt (P) đi qua M, B' và trung điểm E của AC .
2. Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$ với $D = BC \cap (MB'E)$

Lời giải

• Do $D = BC \cap (MB'E)$; $BC, ME \subset (ABC) \Rightarrow D = BC \cap ME$.

1. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt (P) đi qua M, B' và trung điểm E của AC .

• Trong (ABB') , gọi $F = MB' \cap AA'$.

Như vậy, ta có:

$$\begin{cases} (P) \cap (ABB') = FB' \\ (P) \cap (BCC'B') = B'D \\ (P) \cap (ABC) = DE \\ (P) \cap (ACC'A') = EF \end{cases}$$

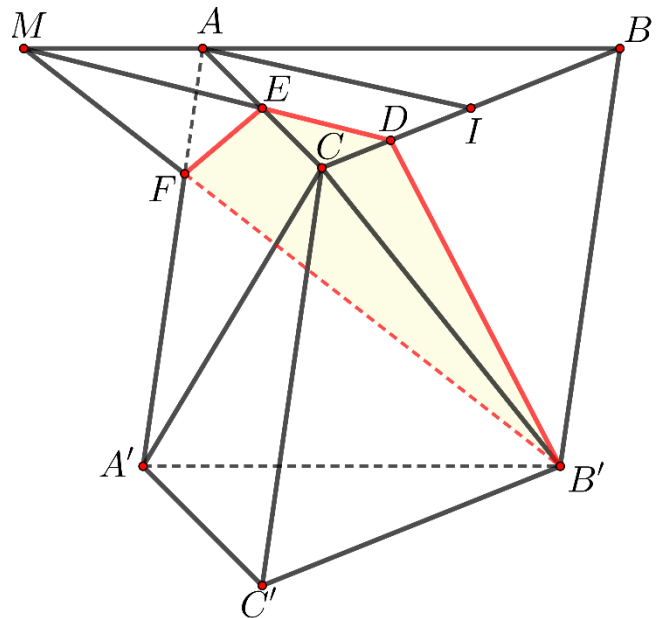
• Vậy thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $B'DEF$.

2. Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$ với $D = BC \cap (MB'E)$

Kẻ $AI \parallel DE$ với $I \in BC$.

• Mà E là trung điểm của AC ,
 $\rightarrow DE$ là đường trung bình của $\triangle ACI$.
 $\rightarrow D$ là trung điểm của CI hay $CD = DI$

• Do $AI \parallel DM$ nên $\frac{BD}{DI} = \frac{BM}{AM} = \frac{BA + AM}{AM} = \frac{2AM + AM}{AM} = 3 \Rightarrow BD = 3DI$. Vậy $\frac{BD}{CD} = 3$.



Bài 04.

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ACC'A'$, $BCC'B'$, $ABB'A'$

1. Chứng minh rằng: $IJ \parallel (ABB'A')$; $JK \parallel (ACC'A')$; $IK \parallel (BCC'B')$.
2. Chứng minh rằng: Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng quy tại điểm O .
3. Chứng minh rằng: (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.
4. Gọi G, G' là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng

Lời giải

1. Chứng minh rằng: $IJ \parallel (ABB'A')$; $JK \parallel (ACC'A')$; $IK \parallel (BCC'B')$.

• Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle C'AB$,

• Nên $IJ \parallel AB$. Mà $AB \subset (ABB'A')$

Vậy $IJ \parallel (ABB'A')$.

- ♦ Chứng minh tương tự, ta có: $JK \parallel (ACC'A')$,
 $IK \parallel (BCC'B')$.

2. Chứng minh rằng: Ba đường thẳng AJ , CK , BI đồng quy tại điểm O .

- ♦ Xét ba mặt phẳng

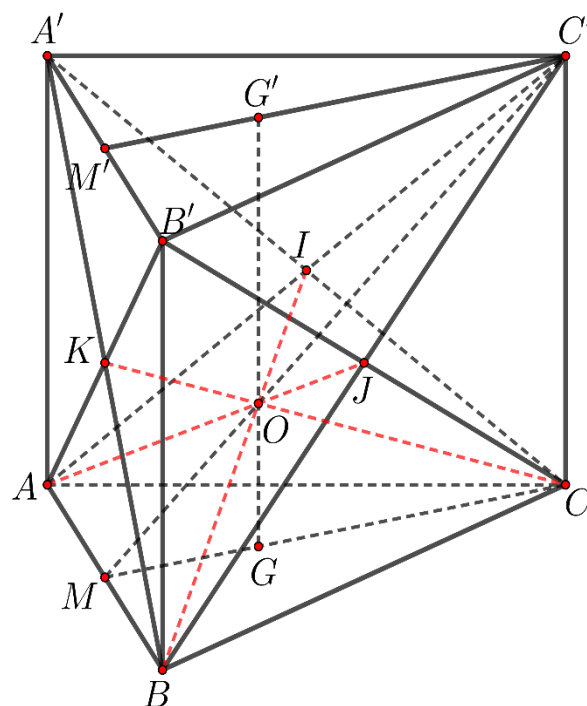
$(C'AB)$, $(A'BC)$, $(B'AC)$:

$(C'AB) \cap (A'BC) = BI$; $(C'AB) \cap (B'AC) = AJ$;

$(B'AC) \cap (A'BC) = CK$; $(C'AB) \cap (A'BC) = BI$;

$(C'AB) \cap (B'AC) = AJ$; $(B'AC) \cap (A'BC) = CK$

- ♦ Suy ra, theo định lý giao tuyến: ba đường thẳng BI , AJ , CK đồng quy tại một điểm.



3. Chứng minh rằng: (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.

- ♦ Theo ý 1, ta có: $\left. \begin{array}{l} IJ \parallel AB \\ JK \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow (IJK) \parallel (ABC)$.

4. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng

- ♦ Dễ thấy O là trọng tâm $\triangle C'AB$.
- ♦ Gọi $M = C'O \cap AB$ thì M là trung điểm của AB .
- ♦ Vậy ba điểm G, M, C thẳng hàng.
- ♦ Vì O và G lần lượt là trọng tâm của hai $\triangle C'AB$ và $\triangle CAB$

Nên ta có: $\frac{MO}{MC'} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OG \parallel CC' \quad (1)$

- ♦ Chứng minh tương tự $OG' \parallel CC' \quad (2)$
- ♦ Từ (1) và (2) suy ra ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

Bài 05.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh (BDA') song song với $(B'D'C)$.
2. Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của hai $\triangle BDA'$ và $\triangle B'D'C$.
3. Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.
4. Gọi I, K lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, BCC'B'$. Xác định thiết diện của $(A'IK)$ với hình hộp.

Lời giải

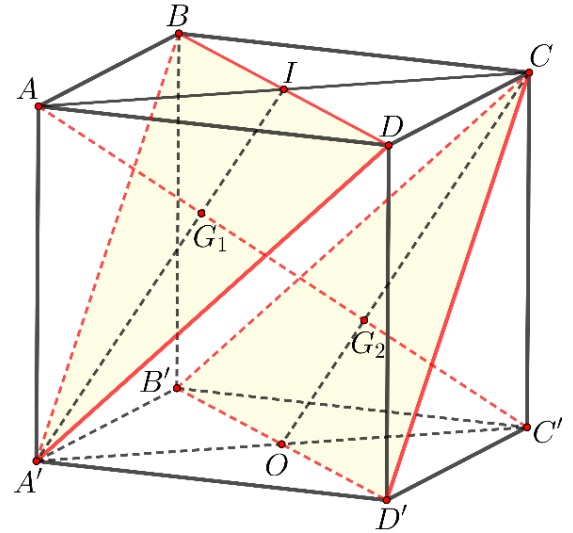
1. Chứng minh (BDA') song song với $(B'D'C)$.

♦ Gọi I, O lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D'$.

♦ Ta có:

$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'I \parallel OC \\ BD, A'I \subset (BDA') \\ OC, B'D' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow (BDA') \parallel (B'D'C).$$

$$\begin{cases} BD \cap A'I = \{I\} \\ OC \cap B'D' = \{O\} \end{cases}$$



2. Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của hai $\triangle BDA'$ và $\triangle B'D'C$.

♦ Ta có: $(ACC'A) \cap (BDA') = A'I$ và $AC' \cap A'I = G_1 \Rightarrow AC' \cap (BDA') = \{G_1\}$.

♦ Ta có: $AI \parallel A'C' \Rightarrow \frac{G_1A}{G_1C'} = \frac{AI}{A'C'} = \frac{G_1I}{G_1A'} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác BDA' .

♦ Ta có: $(ACC'A) \cap (B'D'C) = CO$ và $AC' \cap CO = G_2 \Rightarrow AC' \cap (B'D'C) = \{G_2\}$.

♦ Ta có: $OC' \parallel AC \Rightarrow \frac{G_2O}{G_2C} = \frac{G_2C'}{G_2A} = \frac{OC'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $B'D'C$.

3. Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

♦ Theo ý 2 ta có: $AG_1 = \frac{1}{3}AC' = C'G_2$

$\Rightarrow G_1, G_2$ chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

4. Xác định thiết diện của $(A'IK)$ với hình hộp.

♦ Ta có: $A'I \cap CC' = P$

$\Rightarrow (A'IK) \cap (BCC'B) = KP,$

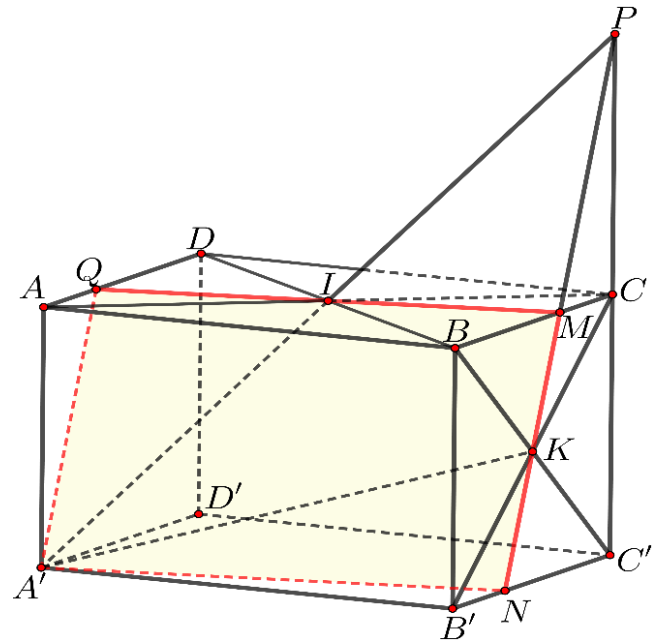
$KP \cap BC = M$ và $KP \cap B'C' = N.$

♦ Suy ra: $(A'IK) \cap (A'B'C'D') = A'N.$

$(A'IK) \cap (ABCD) = IM$ và $IM \cap AD = Q.$

♦ Suy ra: $(A'IK) \cap (ADA'D') = A'Q.$

♦ Vậy thiết diện của $(A'IK)$ với hình hộp là tứ giác $A'NMQ$.



Bài 06.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm các mặt $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$.

1. Chứng minh rằng: $RQ \parallel (ABCD)$; $(PQRS) \parallel (ABCD)$.
2. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR) .
3. Gọi M là giao điểm của cạnh CC' với (AQR) . Tính tỉ số $\frac{MC'}{MC}$.

Lời giải

1. Chứng minh rằng: $RQ \parallel (ABCD)$; $(PQRS) \parallel (ABCD)$.

- ♦ $\begin{cases} RQ \not\subset (ABCD) \\ RQ \parallel BD (BD \parallel B'D') \end{cases} \Rightarrow RQ \parallel (ABCD) (1).$
- ♦ $\begin{cases} PQ \not\subset (ABCD) \\ PQ \parallel AC \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel (ABCD) (2).$
- ♦ Từ (1) và (2) $\Rightarrow (PQRS) \parallel (ABCD)$

2. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR) .

- ♦ Gọi O' là trung điểm $B'D'$.
- $CO' \cap RQ = E$.
- $AE \cap CC' = M$.
- $MQ \cap BB' = G$.
- $MR \cap DD' = F$.
- ♦ Vậy thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR) là tứ giác $AGMF$

3. Tính tỉ số $\frac{MC'}{MC}$.

- ♦ Theo ý 2 $\Rightarrow E$ là trung điểm RQ và CO' .

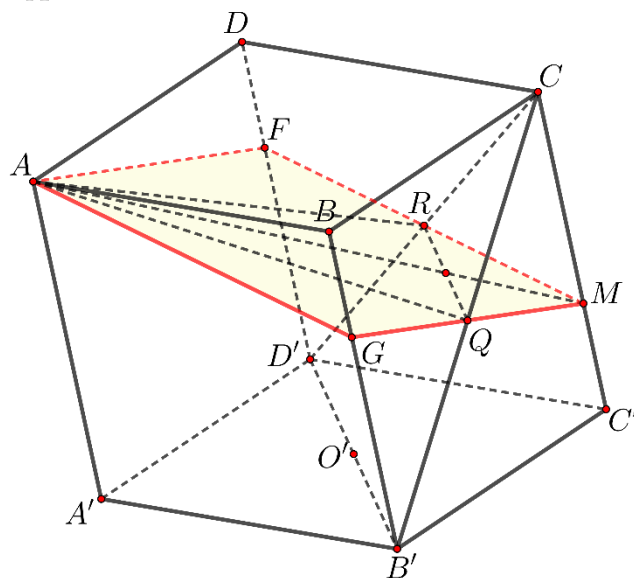
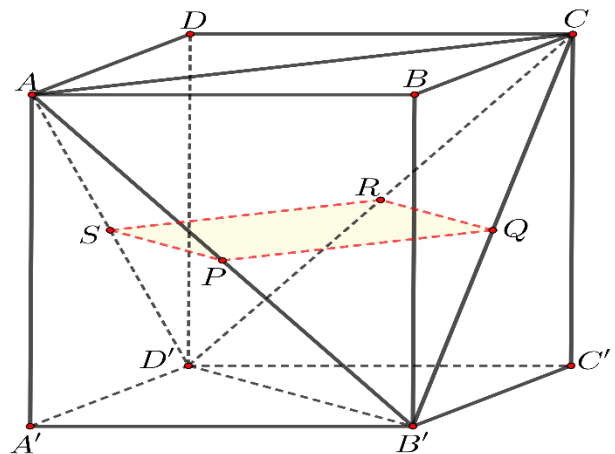
- ♦ Đặt $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CC'} (x > 0)$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + x(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) = x\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC}(1-x).$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'O'}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

- ♦ Vì A, M, E thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1-x}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = 2(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

- ♦ Vậy $\frac{MC'}{MC} = \frac{1}{2}$.



Đạng 04. ĐỊNH LÝ THALES TRONG KHÔNG GIAN .

Phương pháp giải

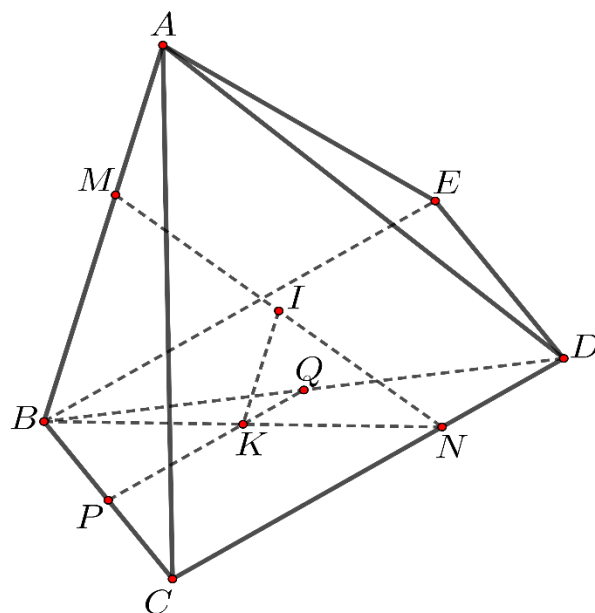
- Tìm 2 đường thẳng chéo nhau trên đó có các đoạn thẳng tỉ lệ.

Bài 01.

Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm lưu động trên cạnh AB ; N là điểm lưu động trên cạnh CD . Chứng tỏ rằng trung điểm I của đoạn MN thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải

- Kê $IK \parallel AB \Rightarrow K$ là trung điểm BN (do I là trung điểm MN).
- Qua K kẻ đường thẳng song song với CD , cắt BC tại P , cắt BD tại Q
 $\Rightarrow P$ là trung điểm BC , Q là trung điểm BD
 $\Rightarrow P, Q$ cố định.
- Kê hình bình hành $BEDC$
 $\Rightarrow BE \parallel CD \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel (ABE)$ (1)
- $IK \parallel AB \Rightarrow IK \parallel (ABE)$ (2)
- $\xrightarrow{(1) \& (2)} (PQI) \parallel (ABE)$
- Do (ABE) là mặt phẳng cố định, PQ cố định
 $\Rightarrow (PQI)$ cố định.
- Vậy I thuộc mặt phẳng cố định qua PQ và song song (ABE) .

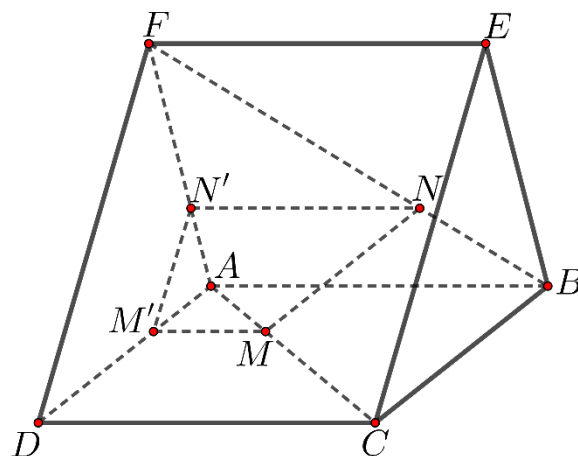


Bài 02.

Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = BN$. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải

- Vẽ $NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{CF} = \frac{A'N}{AF}$ (1)
- Vẽ $MM' \parallel AB \parallel CD$
 $\Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$
 (do $AM = BN, AC = BF$) (2)
- $\xrightarrow{(1) \& (2)} \frac{A'N}{AF} = \frac{AM'}{AD}$
 $\Rightarrow M'N' \parallel DF \Rightarrow M'N' \parallel (DFEC)$ (3)
- Mà $M'M \parallel CD \Rightarrow M'M \parallel (DFEC)$ (4)



—^{(3)&(4)}→ $(M'N'NM) \parallel (DFEC)$, mà $MN \subset (M'N'NM) \Rightarrow MN \parallel (DFEC)$.

♦ Vậy MN luôn song song mặt phẳng cố định $(DFEC)$.

Bài 03.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M là điểm thuộc cạnh AD , N là điểm thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$.

①. Chứng minh rằng $MN \parallel (C'BD)$.

②. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song $(C'BD)$.

Lời giải

①. Chứng minh rằng $MN \parallel (C'BD)$.

♦ Theo giả thiết ta có $\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{DM}{C'N} = \frac{AD}{D'C'}$.

♦ Theo định lý Talet đảo ta có MN, AD', DC' cùng song song với (Q)

♦ Khi đó $\begin{cases} (Q) \parallel AD' \\ (Q) \parallel DC' \end{cases}$

♦ Mà $AD' \parallel BC'$

♦ Nên $\begin{cases} (Q) \parallel BC' \\ (Q) \parallel DC' \end{cases} \Rightarrow (Q) \parallel (BDC') \Rightarrow MN \parallel (BDC') (\text{ĐPCM})$.

②. Xác định thiết diện cắt bởi (P) qua MN và song song $(C'BD)$.

♦ Ta có mặt phẳng (P) qua MN và song song $(C'BD)$

Nên:

♦ Từ M kẻ $MF \parallel BD$, cắt AB tại F ;

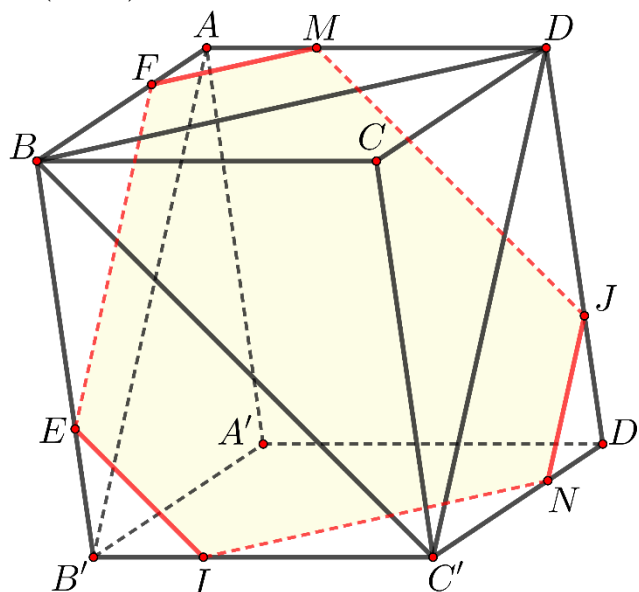
♦ Từ F kẻ đường thẳng $EF \parallel AB'$, cắt BB' tại E

♦ Từ E kẻ đường thẳng $EI \parallel BC'$, cắt BC' tại I

;

♦ Từ N kẻ đường thẳng $NJ \parallel C'D$ cắt $D'D$ tại J

♦ Dễ thấy thiết diện là lục giác $MEFINJ$ có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác $C'BD$.



Bài 04.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a , M, N lần lượt là các điểm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x \left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

- ❶. Chứng minh khi x thay đổi đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- ❷. Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

Lời giải

- ❶. Chứng minh khi x thay đổi đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

• Kẻ $ME \parallel AD \left(E \in AA'\right); NF \parallel AD \left(F \in AB\right)$

$\Rightarrow M, N, E, F$ đồng phẳng.

• Áp dụng định lý Talet ta có:

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{AE}{AA'}, \frac{DN}{DB} = \frac{AF}{AB}.$$

• Mà $AD' = BD = a\sqrt{2}$ (gt);

Theo gt: $AM = DN = x$ nên

$$\frac{AE}{AA'} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow EF \parallel A'B$$

• Ta có: $\begin{cases} EF \parallel A'B \\ ME \parallel BC \left(BC \parallel AD\right) \end{cases}$

$\Rightarrow (MNFE) \parallel (A'BC) \Rightarrow MN \parallel (A'BC)$

- ❷. Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

• Gọi O là giao điểm của AC và BD ;
 I là giao điểm của AD' và $A'D$.

$$DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Mà } DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

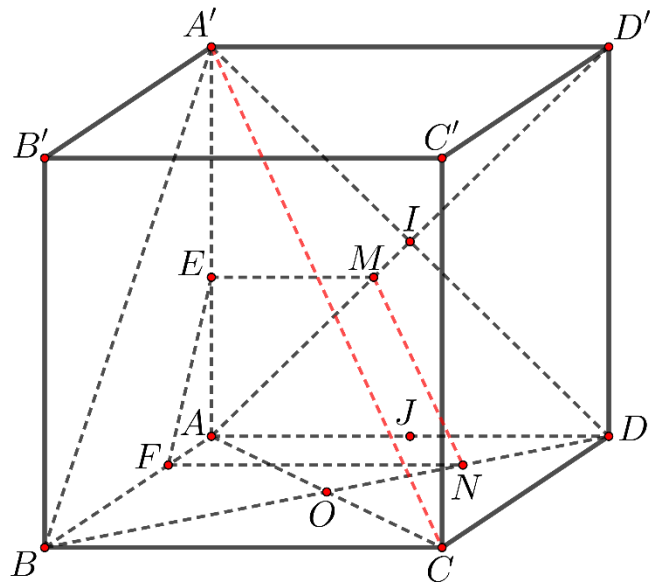
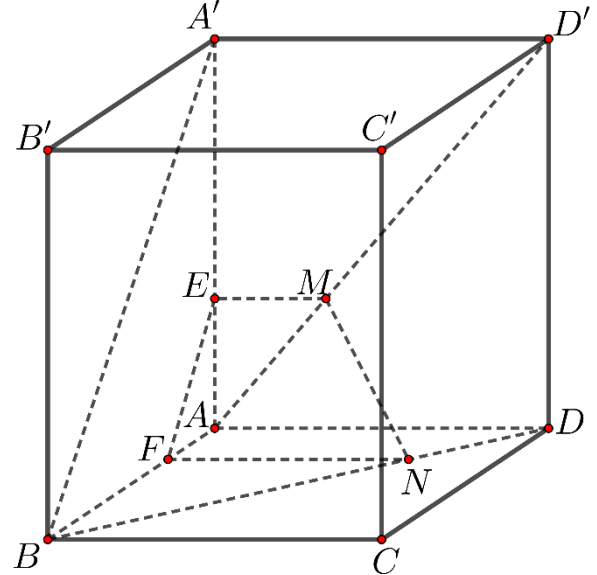
$$\Rightarrow DN = \frac{2}{3} DO \text{ hay } N \text{ là trọng tâm } \triangle ADC.$$

• Tương tự: M là trọng tâm $\triangle AA'D$.

• Gọi J là trung điểm AD ,

$$\text{• Khi đó ta có: } \frac{JM}{JA'} = \frac{JN}{JC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MN \parallel A'C \text{ (ĐPCM).}$$



Bài 05.

Cho tứ diện $ABCD$ và 4 điểm M, N, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA . Dùng định lý đảo Thalès trong không gian chứng minh rằng: Nếu 4 điểm M, N, E, F đồng phẳng thì $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$

Lời giải

♦ Gọi d là đường thẳng bất kỳ cắt $(MNEF)$ tại O .

♦ Từ các điểm A, B, C, D vẽ các mặt phẳng song song với $(MNEF)$ và cắt đường thẳng d lần lượt tại A', B', C', D' . Khi đó ta có:

♦ $(MNEF) \parallel (OA'A) \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'}$

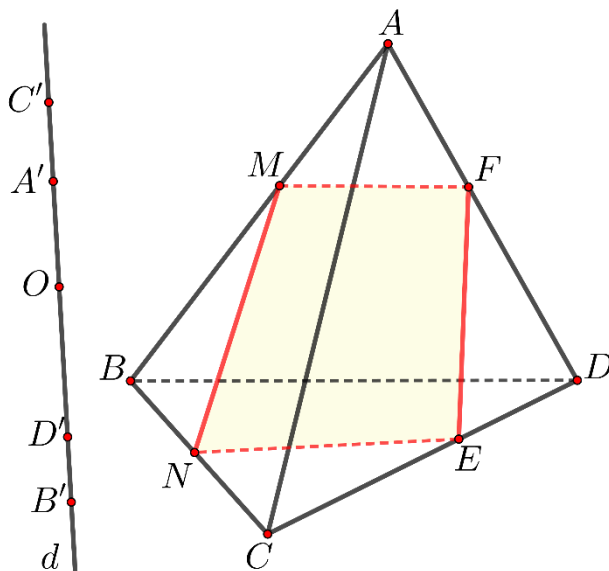
♦ $(MNEF) \parallel (OB'B) \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'}$

♦ $(MNEF) \parallel (OC'C) \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'}$

♦ $(MNEF) \parallel (OD'D) \Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}$

♦ Do đó:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$$



Biên Soạn: LÊ MINH TÂM

----- HẾT -----

BÀI 05

TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 01.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD .

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP) .
2. Chứng minh $(MOP) \parallel (SBC)$.
3. Gọi K là điểm bất kỳ trên OM . Chứng minh $KN \parallel (SCD)$.
4. Mặt phẳng (α) qua N , song song với SA và CD . Tìm thiết diện của mp (α) và hình chóp $S.ABCD$. Xác định hình tính thiết diện.

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (MOP) .

♦ Ta có $M \in SA, SA \subset (SAD) \Rightarrow M \in (SAD)$;
 $M \in (MOP)$.

♦ Mặt khác $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ OP \subset (MOP) \\ AD \parallel OP \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (MOP) = d \parallel AD \parallel OP$ với d qua M .

♦ $d \cap SD = E$

M là trung điểm SA nên E là trung điểm SD

♦ Vậy $(SAD) \cap (MOP) = ME$.

2. Chứng minh $(MOP) \parallel (SBC)$.

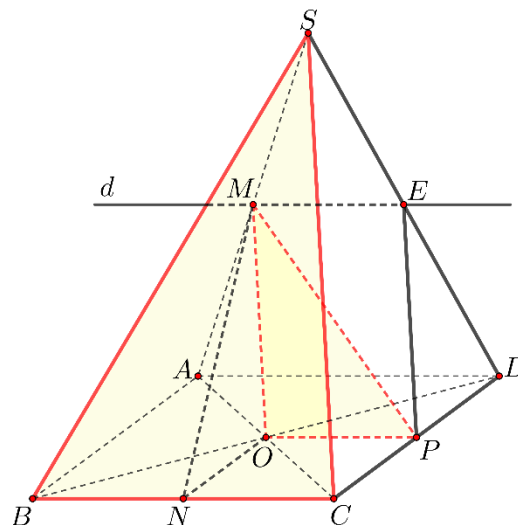
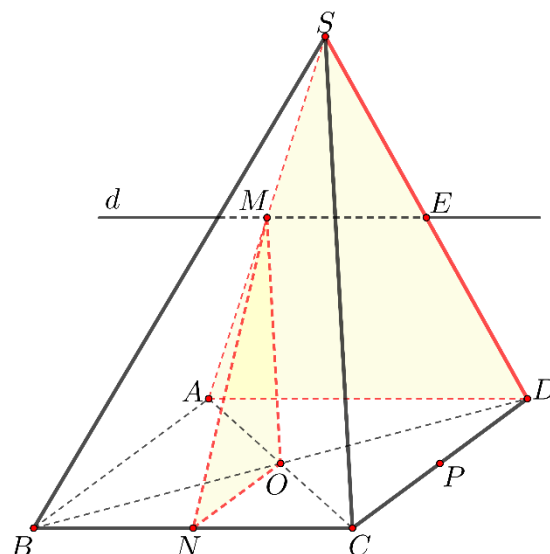
♦ Ta có: $\begin{cases} ME \parallel AD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow ME \parallel BC; BC \subset (SBC) \Rightarrow ME \parallel (SBC)$ (1).

♦ $EP \parallel SC; SC \subset (SBC) \Rightarrow EP \parallel (SBC)$ (2).

♦ ME và EP là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng (MOP) (3).

♦ Từ (1), (2) và (3) suy ra $(MOP) \parallel (SBC)$



3. Gọi K là điểm bất kỳ trên OM . Chứng minh $KN \parallel (SCD)$.

♦ Ta có

$$ON \parallel DC; DC \subset (SCD) \Rightarrow ON \parallel (SCD) \quad (4).$$

$$OM \parallel SC; SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD) \quad (5).$$

ON và OM là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng (MON) (6).

♦ Từ (4), (5) và (6) suy ra $(MON) \parallel (SCD)$.

K là điểm bất kỳ trên OM nên $KN \subset (MON)$ mà $(MON) \parallel (SCD)$ nên $KN \parallel (SCD)$.

4. Tìm thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Xác định hình tính thiết diện.

♦ Ta có

$$(ABCD) \cap (\alpha) = NO \text{ và } NO \cap AD = Q.$$

$$(SAD) \cap (\alpha) = QE.$$

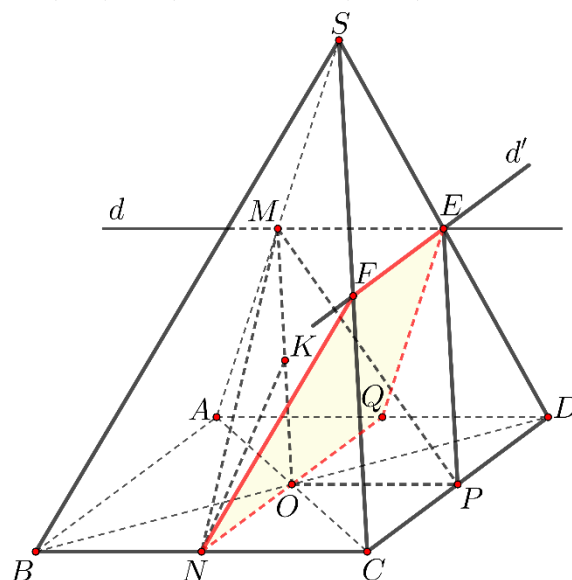
$$(SCD) \cap (\alpha) = d' \parallel CD; d' \text{ qua } E \text{ và } d' \cap SC = F.$$

$$(SBC) \cap (\alpha) = FN.$$

$$\begin{cases} NQ \parallel CD \\ EF \parallel CD \end{cases} \Rightarrow NQ \parallel EF$$

Vậy thiết diện của mp (α) và hình chóp

$S.ABCD$ là hình thang $NQEF$.



Bài 02.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

2. Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}; \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$

3. Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

♦ Ta thấy: $S \in (SBC) \cap (SAD)$

$$\text{♦ Và } \begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

♦ Nên $(SBC) \cap (SAD) = d \parallel AD \parallel BC$ và d qua S

- ②. Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN)
Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.

♦ Gọi $E = MN \cap SO, I = SC \cap AE \Rightarrow \begin{cases} I \in SC \\ I \in AE \end{cases}$

♦ Mà $AE \subset (AMN)$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in SC \\ I \in (AMN) \end{cases} \Rightarrow I = SC \cap (AMN).$

♦ Khi đó thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMIN$.

- ③. Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

♦ Gọi G là trung điểm SD , $F = OG \cap AN \Rightarrow OG \parallel SB \Rightarrow \frac{NF}{NE} = \frac{GF}{SM} = \frac{NG}{SN} = \frac{1}{4} \Rightarrow GF = \frac{1}{4}SM$

$\Rightarrow OF = OG - GF = \frac{1}{2}SB - \frac{1}{4}SM = \frac{1}{2}.3SM - \frac{1}{4}SM = \frac{5}{4}SM.$

♦ ΔSME đồng dạng với $\Delta OFE \Rightarrow \frac{OE}{SE} = \frac{OF}{SM} = \frac{5}{4}.$

♦ Gọi H là trung điểm $IC \Rightarrow OH \parallel AI \Rightarrow \frac{SI}{IH} = \frac{SE}{OE} = \frac{4}{5} \Rightarrow SI = \frac{4}{5}IH = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}IC = \frac{2}{5}IC \Rightarrow \frac{SI}{IC} = \frac{2}{5}.$

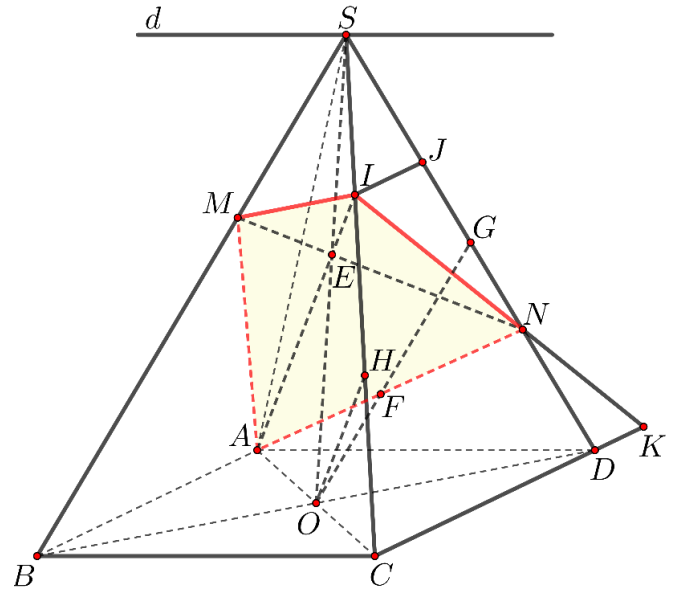
♦ $J \in SD$ sao cho $IJ \parallel CD \Rightarrow \frac{SJ}{JD} = \frac{SI}{IC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{JD}{SD} = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow JD = \frac{5}{7}SD = \frac{5}{7}.3ND = \frac{15}{7}ND \Rightarrow \frac{JD}{ND} = \frac{15}{7}$

$\Rightarrow \frac{IJ}{KD} = \frac{NJ}{ND} = \frac{JD - ND}{ND} = \frac{JD}{ND} - 1 = \frac{15}{7} - 1 = \frac{8}{7} \Rightarrow KD = \frac{7}{8}IJ$ (1)

♦ Mặt khác $\frac{IJ}{CD} = \frac{SI}{SC} = \frac{2}{7} \Rightarrow CD = \frac{7}{2}IJ \Rightarrow KC = KD + CD = \frac{7}{8}IJ + \frac{7}{2}IJ = \frac{35}{8}IJ$ (2).

♦ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KC}{KD} = \frac{\frac{35}{8}IJ}{\frac{7}{8}IJ} = 5.$



Bài 03.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của hai đường chéo, $AC = a, BD = b$, tam giác SBD đều.

①. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

②. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD, SCD . Chứng minh G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAC) .

3. Gọi M là điểm di động trên AO với $AM = x \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SBD) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.
4. Tính diện tích thiết diện tìm được ở ý 3 theo a, b, x .

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .

♦ Ta thấy: $S \in (SAB) \cap (SCD)$

♦ Và $\begin{cases} AD \subset (SAB) \\ BC \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$

♦ Nên $(SBC) \cap (SAD) = \Delta \parallel AB \parallel CD$ và Δ qua S

2. Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SAC)$.

♦ Gọi K là trung điểm CD .

♦ Ta có $\frac{KG_1}{KA} = \frac{KG_2}{KS} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$

♦ Mà $SA \subset (SAC)$ nên $G_1G_2 \parallel (SAC)$

3. Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

♦ Ta có $(\alpha) \parallel (SBD)$ nên:

$(\alpha) \cap (ABCD) = d \parallel BD$ và d qua M .

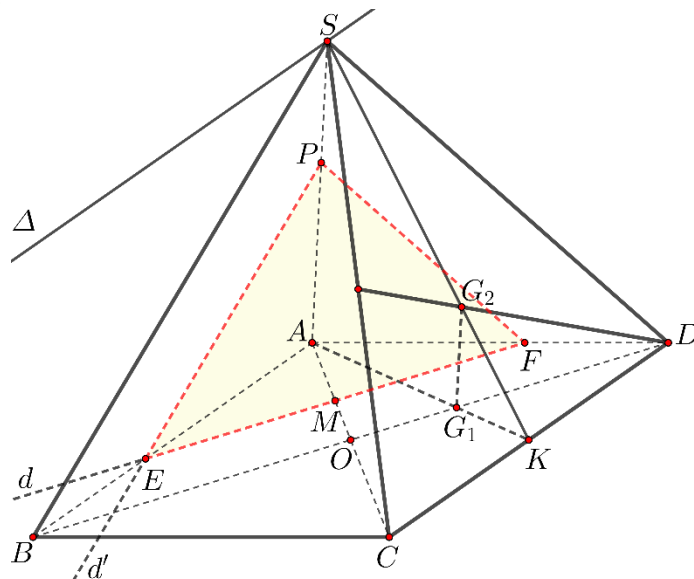
♦ Gọi $\begin{cases} E = d \cap AB \\ F = d \cap AD \end{cases}$

$(\alpha) \cap (SAB) = d' \parallel SB$ và d' qua E .

♦ Gọi P là giao của d' với SA .

$(\alpha) \cap (SAB) = PF$.

♦ Từ đó thiết diện là tam giác PEF .



4. Tính diện tích thiết diện tìm được ở ý 3 theo a, b, x .

♦ Ta có $\triangle PEF$ và $\triangle SBD$ là hai tam giác đồng dạng,

♦ $\triangle SBD$ đều nên $\triangle PEF$ đều.

$$\frac{EF}{BD} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow EF = \frac{AM \cdot BD}{AO} = \frac{2xb}{a}.$$

♦ Suy ra diện tích tam giác PEF là

$$S_{\triangle PEF} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2xb}{a} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 b^2 \sqrt{3}}{4a^2}.$$

Bài 04.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

2. Gọi G là trọng tâm tam giác SBD . Trên các cạnh CD và AB lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $MD = 2MC$ và $NB = 2NA$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SND) và (BGM) .
Tìm giao điểm I của SN và mặt phẳng (BGM) .

3. Gọi K là giao điểm của SA và mặt phẳng (BGM) . Tính tỷ số $\frac{KS}{KA}$.

Lời giải

❶. Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD) .

$$\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD.$$

❷. Tìm giao điểm I của SN và mặt phẳng (BGM) .

♦ Trong $(ABCD)$: $H = AC \cap BM$, $L = AC \cap ND$

♦ Trong (SAC) : $P = GH \cap SL$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in GH \subset (BGM) \\ P \in SL \subset (SND) \end{cases} \Rightarrow P \in (SND) \cap (BGM)$$

$BM \parallel DN$

$BM \subset (BGM)$

$DN \subset (SND)$

$$\Rightarrow (SND) \cap (BGM) = Px \parallel BM \parallel DN$$

○ Tìm $I = SN \cap (BGM)$

$$\text{♦ Trong } (SND): I = SN \cap Px \Rightarrow \begin{cases} I \in SN \\ I \in Px \in (BGM) \end{cases} \Rightarrow I = SN \cap (BGM)$$

❸. Tính tỷ số $\frac{KS}{KA}$.

♦ Trong (SAC) : $K = GH \cap SA$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in GH \subset (BGM) \\ K \in SA \end{cases} \Rightarrow K = SA \cap (BGM)$$

Áp dụng định lý Menelaus

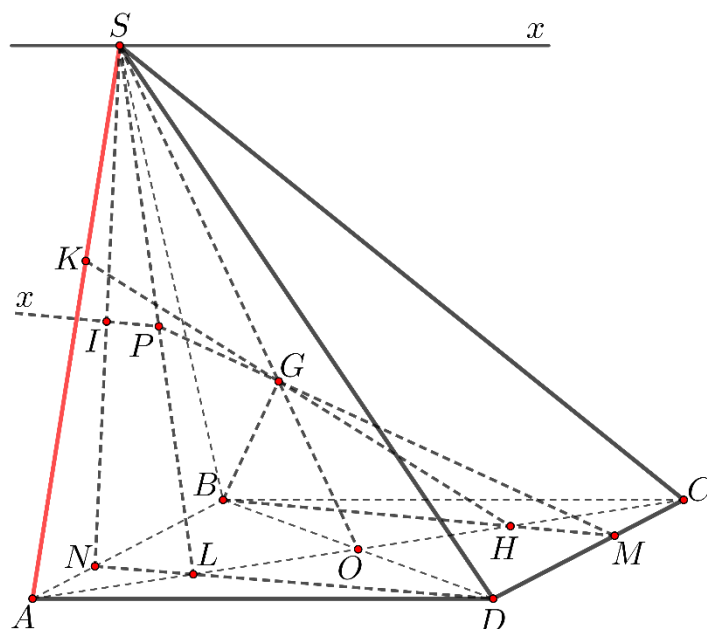
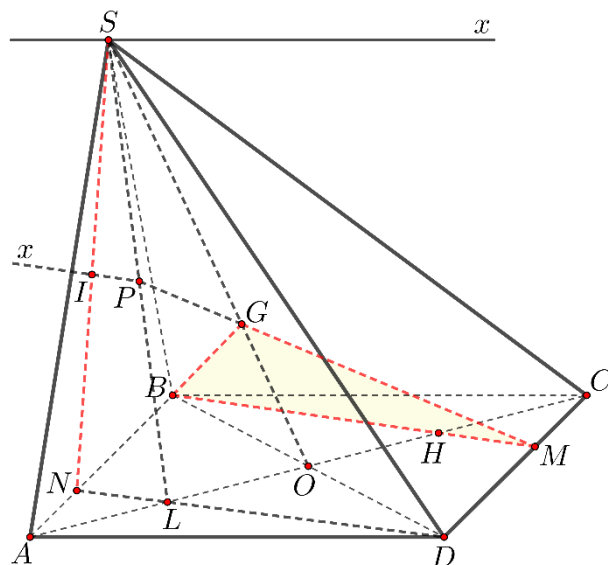
$$\text{♦ Xét } \triangle ODC, \text{ ta có: } \frac{HC}{HO} \cdot \frac{BO}{BD} \cdot \frac{MD}{MC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{HC}{HO} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow HC = HO = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} OA$$

$$\text{♦ Xét } \triangle SOA, \text{ ta có: } \frac{KS}{KA} \cdot \frac{GO}{GS} \cdot \frac{HA}{HO} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{KS}{KA} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(HO+OA)}{HO} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{KS}{KA} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KA} = \frac{2}{3}.$$



Bài 05.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a, AD = 2a$.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
2. Gọi M là điểm di động trên cạnh AB với $AM = x (0 \leq x < a)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD) . Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.
3. Cho $SA = a$, SA vuông góc với AD . Tìm x để diện tích thiết diện bằng $\frac{2a^2}{3}$.

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI \parallel AB \parallel CD.$$

2. Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$

• Vì mặt phẳng $(P) \parallel (SAD) \Rightarrow (P)$ song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (SAD) .

• Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

• Ta có $M \in (P) \cap (ABCD)$, vì $(P) \parallel AD$ nên $(ABCD) \cap (P) = d \parallel AD$ và d qua M
 Khi đó $d \cap CD = Q$ (1).

Tương tự:

• Ta có $M \in (P) \cap (SAB)$, vì $(P) \parallel SA$ nên $(SAB) \cap (P) = MN \parallel SA$; $N \in SB$.

• Ta có $N \in (P) \cap (SBC)$, vì $(P) \parallel AD \parallel BC$ nên $(SBC) \cap (P) = NP \parallel BC$ (2).

• Ta có $(P) \cap (SCD) = PQ$

Suy ra thiết diện cần tìm là $MNPQ$.

Từ (1) và (2) thì $MQ \parallel PN$. Vậy $MNPQ$ là hình thang.

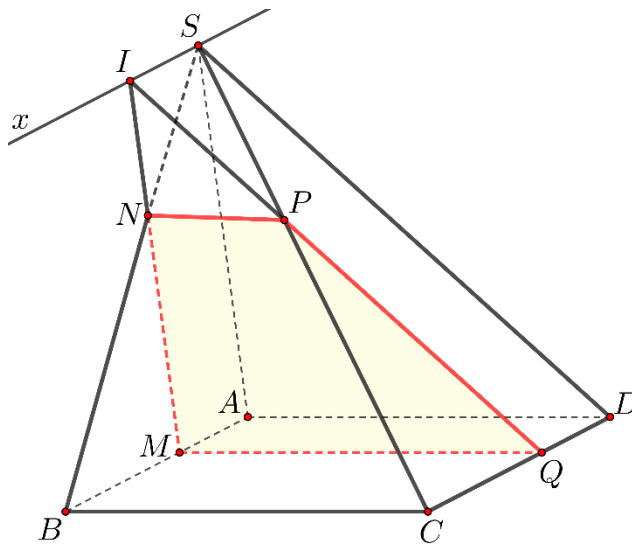
3. Tìm x để diện tích thiết diện bằng $\frac{2a^2}{3}$.

• Áp dụng Ta-lét cho $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$ ta được: $\frac{x}{a} = \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC} = \frac{NP}{2a} \Rightarrow NP = 2x$

• Áp dụng Ta-lét cho $\triangle SAB$, ta có: $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{AB} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \frac{(a-x)SA}{a} = a-x$.

• Vì $SA \perp AD \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MN \cdot (NP + MQ) = \frac{1}{2} (a-x) \cdot (2x + 2a) = a^2 - x^2.$$



$$\begin{aligned} \diamond \text{ Vì } S_{MNPQ} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow a^2 - x^2 = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} & (n) \\ x = -\frac{a}{\sqrt{3}} & (l) \end{cases} \end{aligned}$$

(do $0 < x < a$). Vậy $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Bài 06.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB , M là trung điểm cạnh SB .

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
2. Tìm giao điểm N của SC và mặt phẳng (ADM) .
3. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (CDM) .
4. Gọi I là giao điểm của AM và DN . Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

Lời giải

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) .

♦ Ta có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1)

♦ Trong $(ABCD)$: $J = AD \cap BC$

$$\Rightarrow \begin{cases} J \in AD \subset (SAD) \\ J \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC) \quad (2)$$

♦ Từ (1), (2) $\Rightarrow SJ = (SAD) \cap (SBC)$.

2. Tìm giao điểm N của SC và (ADM) .

♦ Tìm $N = SC \cap (ADM)$.

♦ Ta có: $(ADM) \equiv (AJM)$.

♦ Trong (SBJ) : $N = MJ \cap SC \Rightarrow \begin{cases} N \in SC \\ N \in MJ \in (ADM) \end{cases} \Rightarrow N = SC \cap (ADM)$.

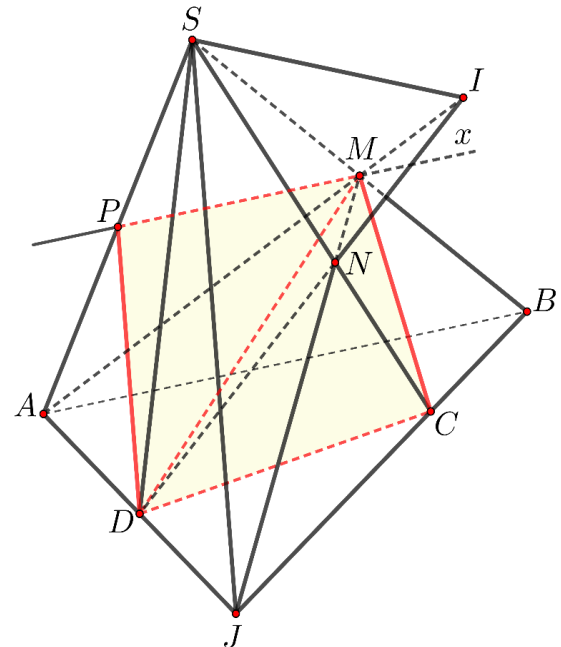
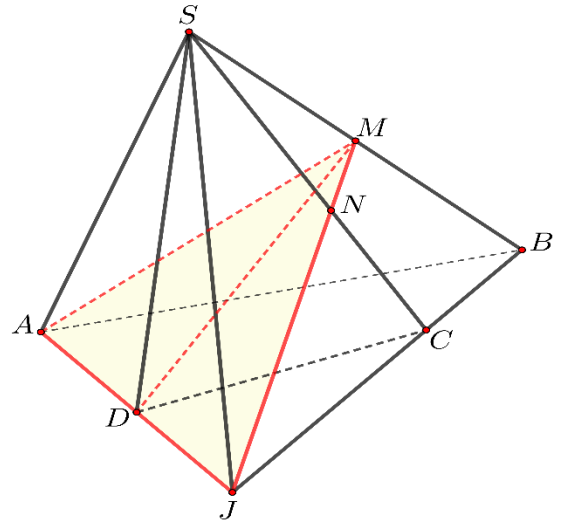
3. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (CDM) .

$$\left. \begin{aligned} &M \in (SAB) \cap (CDM) \\ &AB \parallel CD \\ &AB \subset (SAB) \\ &CD \subset (CDM) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (SAB) \cap (CDM) = Mx \parallel AB \parallel CD.$$

♦ Trong (SAB) : Kè $Mx \parallel AB \parallel CD$, $P = Mx \cap SA$.

♦ Ta có:



$$\left. \begin{aligned} (CDM) \cap (ABCD) &= CD \\ (CDM) \cap (SBC) &= CM \\ (CDM) \cap (SAB) &= PM \\ (CDM) \cap (SAD) &= PD \\ (CDM) \cap (SCD) &= CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Thiết diện cần tìm là } CDPM.$$

4. Chứng minh $SI // AB // CD$.

♦ Ta có: $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (1)

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAB) \\ I \in DN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD) \quad (2)$$

♦ Từ (1), (2) $\Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

$$\left. \begin{aligned} &(SAB) \cap (SCD) = SI \\ \text{♦ Ta có: } &\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow SI // AB // CD.$$

Bài 07.

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Chứng minh rằng :

1. $(OMN) // (SBC)$.

2. Mặt phẳng (α) qua N và song song (SAD) . Tìm thiết diện của (α) với hình chóp và xác định hình tính của thiết diện.

3. Giả sử $AS = AD$, $AB = AC$. Gọi AE, AF lần lượt là phân giác trong của tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF // (SAD)$

Lời giải

1. $(OMN) // (SBC)$.

♦ Vì MO và NO lần lượt là đường trung bình của $\triangle ASC$ và $\triangle DBC$

♦ Nên $MO // SC$ và $ON // BC$.

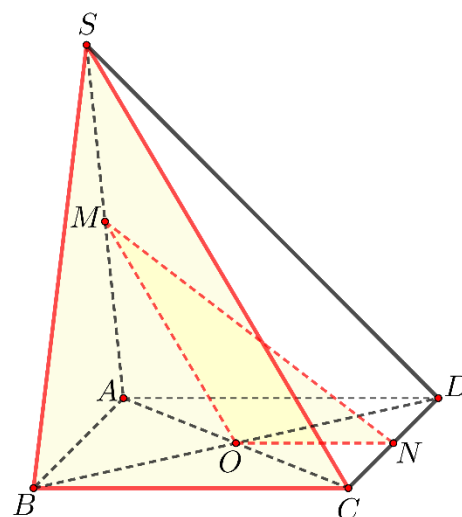
$$MO // SC \subset (SBC) \Rightarrow MO // (SBC)$$

$$ON // BC \subset (SBC) \Rightarrow ON // (SBC)$$

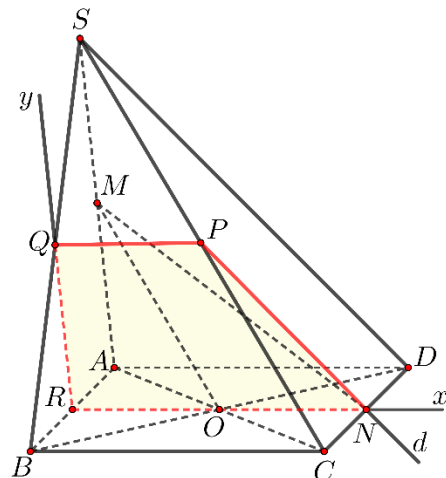
♦ Ta có:

$$\begin{cases} MO // (SBC), ON // (SBC) \\ MO \cap ON = O \\ MO \subset (OMN), ON \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC)$$

2. Tìm thiết diện của (α) với hình chóp và xác định hình tính của thiết diện.

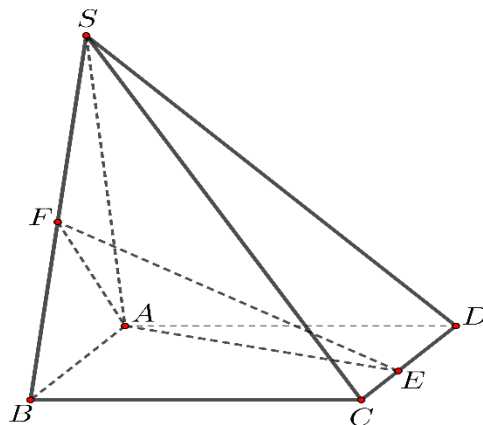


- Nối P với Q ta được thiết diện là tứ giác $NPQR$.



- ### 3. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$

- ♦ Sử dụng tính chất đường phân giác, ta có
- $$\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB} \Rightarrow \text{tồn tại duy nhất bộ ba}$$
- mặt phẳng song song lần lượt chứa SD , EF và BC .
- ♦ Một trong ba mặt phẳng đó là (SAD) . Do đó
- $$EF // (SAD).$$



Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Gọi M là trung điểm của SB và P là điểm thuộc cạnh SA thỏa $AP = 2SP$.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBA) và (SCD) .
2. Tìm giao điểm I của MA và mặt phẳng (SDC) .
3. Tìm giao điểm E của BC và mặt phẳng (PMD) . Tính $\frac{EC}{EB}$.

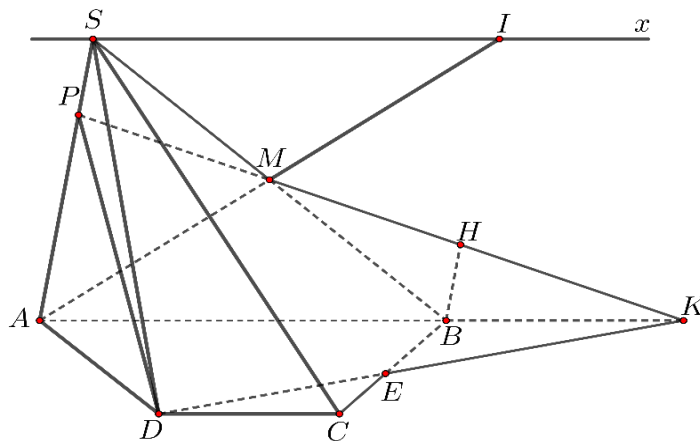
➊. Tìm giao tuyến của (SBA) và (SCD) .

- ♦ Ta có $S \in (SBA) \cap (SCD)$.

$$\begin{aligned} & \diamond \left\{ \begin{array}{l} (SBA) \cap (SCD) = S \\ AB // CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{array} \right. \\ & \Rightarrow (SBA) \cap (SCD) = Sx // AB // CD. \end{aligned}$$

- ②. Tìm giao điểm I của MA và (SDC) .

- ♦ Trong (SAB) , $AM \cap Sx = I$



♦ Khi đó $\begin{cases} I \in AM \\ I \in Sx \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap (SCD).$

3. Tìm giao điểm E của BC và mặt phẳng (PMD) . Tính $\frac{EC}{EB}$.

♦ Trong (SAB) , kéo dài PM cắt AB tại K , khi đó $K \in (PMD)$.

♦ Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng DK cắt BC tại E .

♦ Khi đó E là điểm cần tìm.

♦ Ta có $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{BK}$.

♦ Kẻ $BH \parallel AP$, ta có $BH = SP \Rightarrow \frac{BH}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KB}{AK} = \frac{BH}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AB \rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{1}{2}$.

Bài 09.

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm SB, AB và SC .

1. Chứng minh $(IJK) \parallel (SAD)$. Từ đó suy ra $JK \parallel (SAD)$.

2. M là một điểm trên AD . Mặt phẳng (P) qua M và song song (SAB) cắt BC, SC và SD lần lượt tại N, P và Q . Hỏi $MNPQ$ là hình gì?

Lời giải

1. Chứng minh $(IJK) \parallel (SAD)$. Từ đó suy ra $JK \parallel (SAD)$.

♦ Vì IJ và IK lần lượt là đường trung bình của

$\triangle ASB$ và $\triangle SBC$

♦ Nên $IJ \parallel SA$ và $IK \parallel BC \Rightarrow IK \parallel AD$.

$IJ \parallel SA \subset (SAD) \Rightarrow IJ \parallel (SAD)$.

$IK \parallel BC \parallel AD \subset (SAD) \Rightarrow IK \parallel (SAD)$.

♦ Ta có $\begin{cases} IJ \parallel (SAD) \\ IK \parallel (SAD) \\ IJ \subset (IJK), IK \subset (IJK), IJ \cap IK = I \end{cases}$

$\Rightarrow (IJK) \parallel (SAD)$. Suy ra $JK \parallel (SAD)$

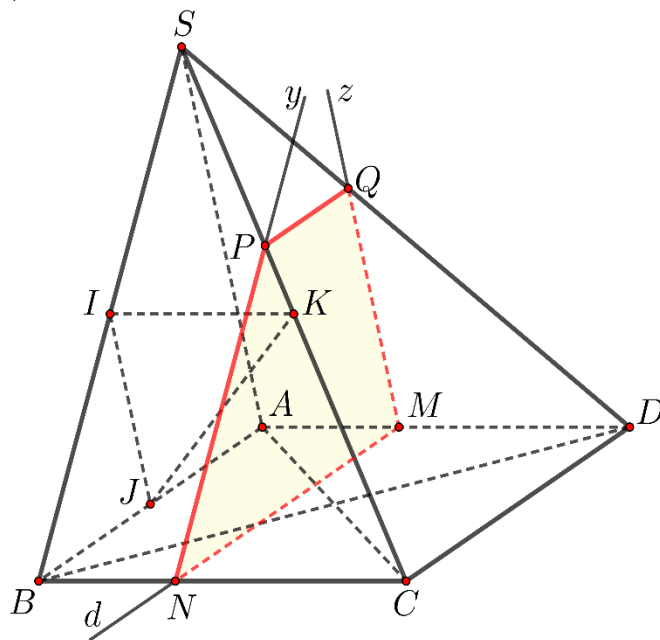
2. Hỏi $MNPQ$ là hình gì?

♦ $(P) \parallel (SAB) \rightarrow (P)$ song song với AB, SB , và SA .

♦ $(P) \parallel AB \rightarrow (P) \cap (ABCD) = d \parallel AB$ với d qua M .

♦ Trong $(ABCD)$, kẻ $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \cap BC = N \end{cases}$

♦ Trong (SBC) , kẻ $\begin{cases} Ny \parallel SB \\ Ny \cap SC = P \end{cases}$



♦ Trong (SAD) , kẻ $\begin{cases} Mz // SA \\ Mz \cap SD = Q \end{cases}$.

♦ Nối P với Q ta được thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

♦ Ba mặt phẳng phân biệt (SCD) , (P) và $(ABCD)$ cắt nhau theo ba giao tuyến MN , CD và PQ . Mà $MN // CD$ nên $MN // PQ$ hay thiết diện $MNPQ$ là hình thang.

Bài 10.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi $M; N; P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB; B'C'; DD'$

❶. Chứng minh (MNP) song song với các mặt $(AB'D')$ và (BDC')

❷. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) . Thiết diện đó là hình gì ?

Tính diện tích của nó.

Lời giải

❶. Chứng minh (MNP) song song với các mặt $(AB'D')$ và (BDC')

♦ Ta có $\frac{PD'}{PD} = \frac{MA}{MB} = -1$

$\Rightarrow MP, AD', DB$ cùng song song với (α) (theo định lý Ta-let đảo)

♦ $\begin{cases} D'B' // DB // (\alpha) \\ AD' // (\alpha) \\ AD' \subset (AB'D'), B'D' \subset (AB'D') \end{cases}$

$\Rightarrow (AB'D') // (\alpha) \Rightarrow MP // (AB'D')$

♦ Tương tự, $MN // (AB'D')$.

Suy ra $(MNP) // (AB'D')$

♦ Mặt khác $\begin{cases} BD // B'D' \\ BC' // AD' \end{cases} \Rightarrow (BDC') // (AB'D')$. Vậy $(MNP) // (AB'D') // (BDC')$

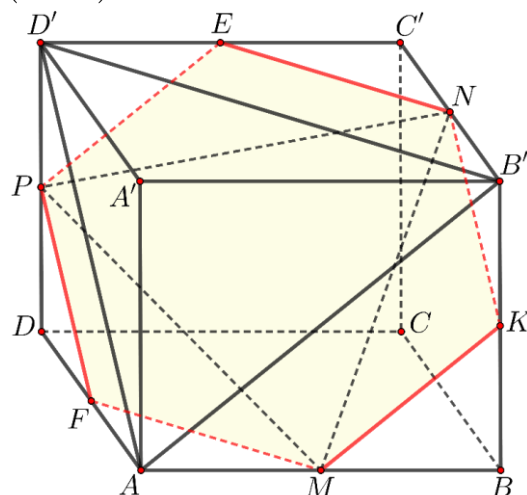
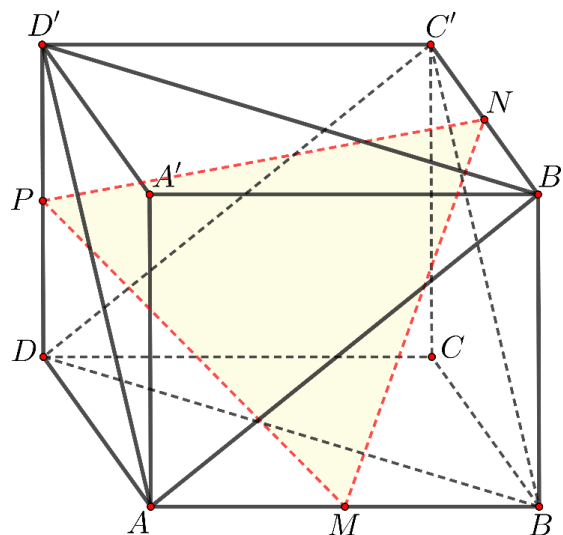
❷. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) .

♦ Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $C'D', AD, BB'$, ta có:

♦ $\begin{cases} NE // B'D' \Rightarrow NE // (AB'D') \\ N \in (MNP) \\ (MNP) // (AB'D') \end{cases} \Rightarrow NE \subset (MNP).$

Tương tự PF và MK cũng chứa trong (MNP)

♦ Suy ra thiết diện của (MNP) với hình lập phương là lục giác $MNKEPF$



⇒ **Hình tính thiết diện:**

- ♦ NE là đường trung bình $\triangle B'C'D'$ nên $NE = \frac{1}{2}B'D' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- ♦ Tương tự 6 cạnh của thiết diện đều bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
- ♦ Mặc khác $NE//MF, EP//MK, PF//KN$.
- ♦ Vậy thiết diện là lục giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

⇒ **Diện tích thiết diện:**

- ♦ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của thiết diện thì tam giác ONE là tam giác đều,
- ♦ Suy ra diện tích của thiết diện: $S = 6S_{OEN} = \frac{6NE^2\sqrt{3}}{4} = 6\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

----- HẾT -----