

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

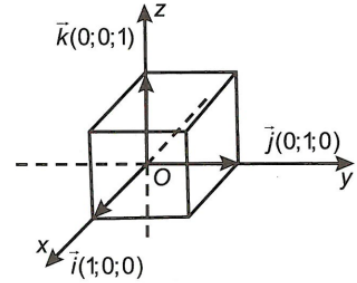
1. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz . Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian gắn với hệ tọa độ Oxyz được gọi là không gian Oxyz.



2. Tọa độ của vectơ

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$. Khi đó

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Chú ý:

1) $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

2) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

3) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và k là số thực tùy ý.

Khi đó ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
- $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$.

Ứng dụng của tích vô hướng:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

- $|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$
- $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$

3. Tọa độ của một điểm

Trong không gian Oxyz, cho điểm M tùy ý.

Khi đó $M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

Tính chất

- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Khi đó $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$

- Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vector

Định nghĩa

Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$ Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một

vector vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Tính chất

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

Chú ý: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M $(x; y; z)$ ta có các khẳng định sau:

- $M \equiv O \Leftrightarrow M(0; 0; 0).$
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M(x; y; 0).$
- $M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M(0; y; z).$
- $M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M(x; 0; z).$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$, tức là $M(x; 0; 0).$
- $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$, tức là $M(0; y; 0).$
- $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$, tức là $M(0; 0; z).$

-
- $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.
 - $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.

5. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ngược lại phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \quad (1).$$

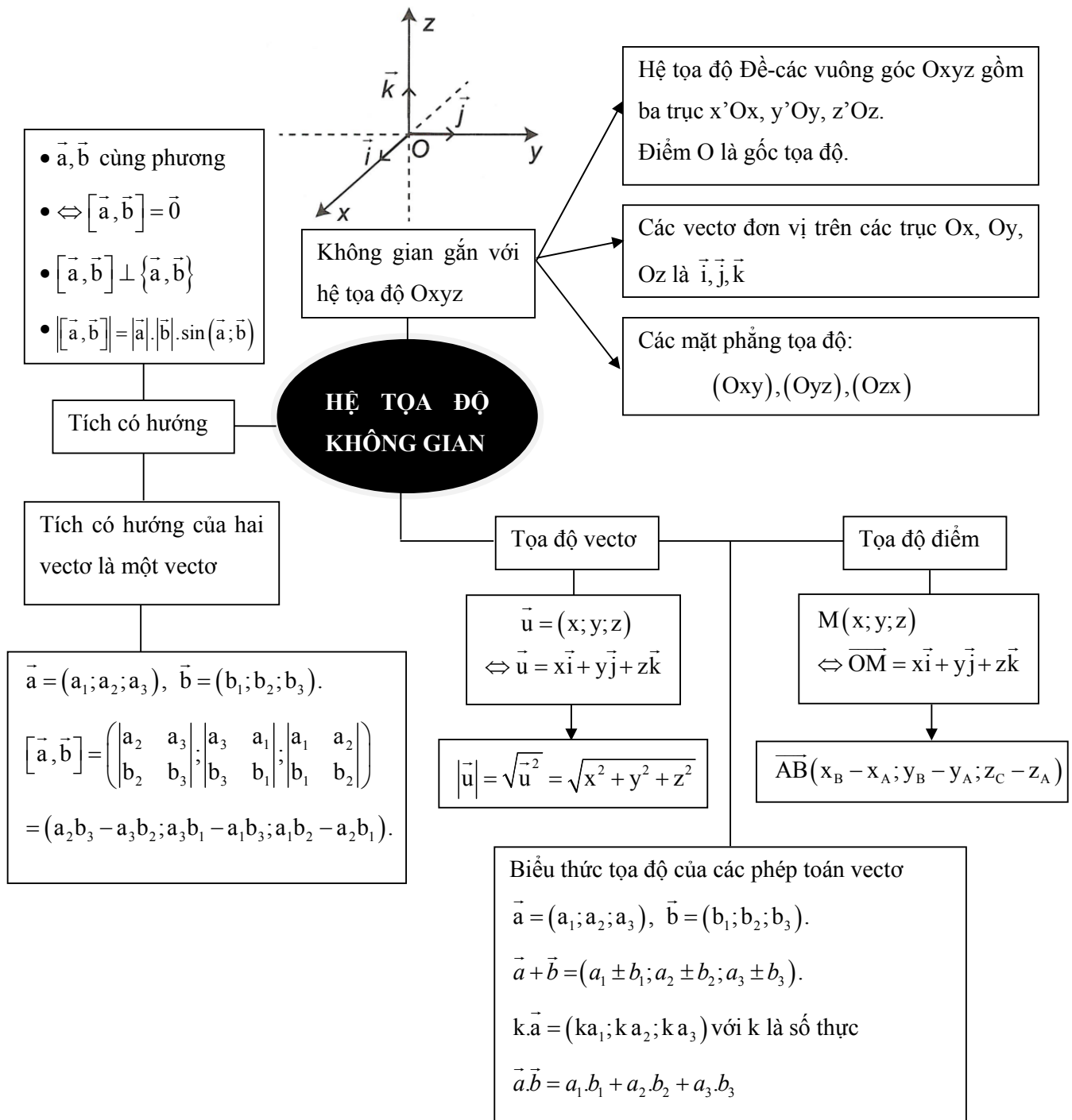
Với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A; -B; -C)$

có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

Chú ý: Điều kiện để phương trình (1) là phương trình mặt cầu là:

$$A^2 + B^2 + C^2 - D > 0.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, vector trong hệ trục Oxyz

1. Phương pháp

Sử dụng các định nghĩa và khái niệm có liên quan đến điểm, vector: Tọa độ của điểm, vector; độ dài vector, ... và các phép toán vector ... để tính tổng, hiệu các vector; tìm tọa độ trọng tâm tam giác, ...

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0), \vec{b}(2;2;0), \vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{6}$. C. 11. D. $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2;6;2)$ nên $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;0;1)$. Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là:

- A. $(0;1;1)$. B. $\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. C. $(0;2;4)$. D. $(-2;-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tọa độ trọng tâm tam giác là: } \begin{cases} x_G = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{2+0+0}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{3+1+0}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Chọn B.

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho vector $\vec{a} = (1;-2;4), \vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$ cùng phương với vector $\vec{a}$. Biết vector $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. -3. B. 6. C. -6. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lại có $|\vec{b}| = \sqrt{21}$. suy ra $\sqrt{k^2 + 4k^2 + 16k^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1 \end{cases}$.

Với $k=1$ ta có $|\vec{b}| = (1;-2;4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, Oy) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = -2 < 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc tù. Suy ra $k=1$ không thỏa mãn.

Với $k=-1$ ta có $|\vec{b}| = (-1;2;-4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$$\cos(\vec{b}, Oy) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}, \text{ trong đó } \vec{b} \cdot \vec{j} = 2 > 0.$$

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc nhọn. Vậy $k=-1$ thỏa mãn.

Do đó $\vec{b} = (-1; 2; -4)$. Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = -1 + 2 - 4 = -3$.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA' = 1$ (C không trùng với O). Biết vector $\vec{u} = (a; b; 2)$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 5$.

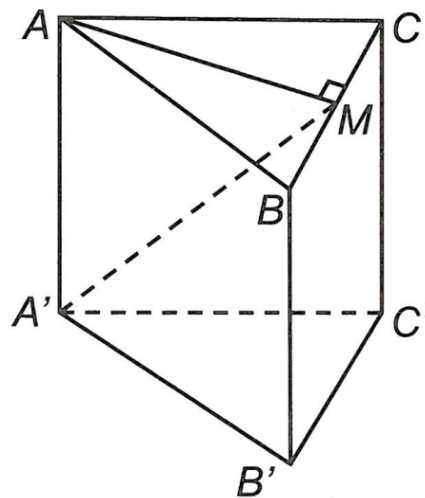
B. $T = 16$.

C. $T = 4$.

D. $T = 9$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Lấy M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp A'M$ tại M;

suy ra M là hình chiếu của A' trên trục Oz

$\Rightarrow M(0; 0; 1)$ và $A'M = 2$.

Mặt khác $AM = \sqrt{A'M^2 - AA'^2} = \sqrt{3}$.

Lại có $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow MC = 1$.

Gọi $C(0; 0; c), c \neq 0$ suy ra $MC = |c - 1|$.

$MC = 1 \Leftrightarrow |c - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ (loại $c = 0$) $\Rightarrow C(0; 0; 2)$.

$\overrightarrow{A'C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'C$

Suy ra $\vec{u} = (-2\sqrt{3}; 2; 2)$ cũng là một vector chỉ phương của $A'C$.

Vậy $a = -2\sqrt{3}; b = 2$. Suy ra $T = a^2 + b^2 = 16$.

Dạng 2. Tích có hướng

1. Phương pháp giải

Để tính tích có hướng của hai vector, ta áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Bài tập: Tính tích có hướng của hai vector

$$\vec{a} = (1; 0; 1), \vec{b} = (2; 1; -1)$$

Hướng dẫn giải

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 3; 1)$$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

B. $[\vec{2a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

C. $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

D. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $[\vec{3a}, \vec{3b}] = 3[\vec{a}, 3\vec{b}] = 9[\vec{a}, \vec{b}]$. (C sai)

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (m; 1; 0)$.

Tìm giá trị thực của tham số m để ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{1}{4}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-4; 1; 2)$.

Ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho năm điểm $A(0; 0; 3), B(2; -1; 0), C(3; 2; 4),$

$D(1; 3; 5), E(4; 2; 1)$ tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

A. Điểm C.

B. Điểm A.

C. Điểm B.

D. Điểm D.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét đáp án A, giả sử C là đỉnh của hình chóp, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -3), \overrightarrow{AD} = (1; 3; 2), \overrightarrow{AE} = (4; 2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; 2; 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AE} = 4.7 - 2.7 - 2.7 = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AC} = 3.7 - 2.7 + 1.7 = 14. \end{cases}$$

Suy ra A, B, D, E đồng phẳng.

Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$.

Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

- A. 10. B. 7. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\overline{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overline{AD} = (1; -2; 0)$, suy ra 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Từ đó chúng ta xác định được vị trí các điểm trong hệ trục độ Oxyz và đếm trực tiếp ta có 5 mặt phẳng đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là:

(OCB) , (OCA) , (OCD) , (OAB) , (ABC)

Dạng 3. Ứng dụng của tích có hướng để tính diện tích và thể tích

1. Phương pháp giải

- Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = |[\overline{AB}, \overline{AD}]|$.
- Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$.
- Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}|$.
- Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}|$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $3\sqrt{10}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\overline{AB} = (1; -1; 2)$, $\overline{AC} = (-2; 1; 1)$, $\overline{BC} = (-3; 2; -1)$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{6}$; $BC = \sqrt{14}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Gọi R_{ABC} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có

$$R_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}{4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Bài tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy .

Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là

A. $D(0; -7; 0)$.

B. $D(0; 8; 0)$.

C. $D(0; -7; 0)$ hoặc $D(0; 8; 0)$.

D. $D(0; 7; 0)$ hoặc $D(0; -8; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $D \in Oy$ nên $D(0; y; 0)$. Khi đó. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |4y - 2|$$

Theo đề ra, ta có $\frac{1}{6} |4y - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8. \end{cases}$

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh

$A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ và $A'(0; 0; 2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB' và M di động

trên cạnh AA' . Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

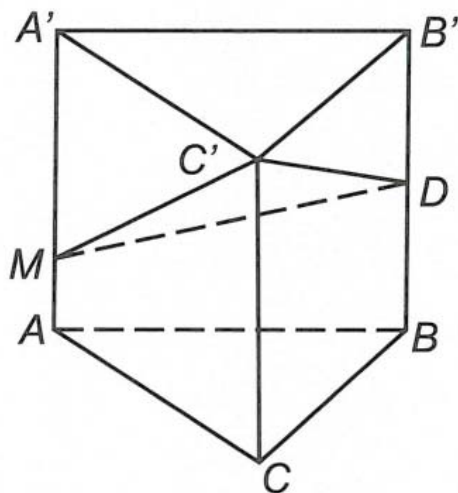
B. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C' \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a \right)$.

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow B' (0; a; 2a)$.

Điểm D là trung điểm của BB' nên $D(0; a; a)$.

$M(0; 0; t)$ với $0 < t < 2a$. Ta có $\overrightarrow{DC'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a \right)$, $\overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a)$.

Ta có:

$$S_{\triangle MDC'} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{DC'} \times \overrightarrow{DM} \right\| = \frac{a\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2t-3a)^2 + 6a^2}}{4} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Suy ra $\min S_{\triangle MDC'} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ khi $t = \frac{3}{2}a$.

Dạng 4: Phương trình mặt cầu

1. Phương pháp giải

Cách viết phương trình mặt cầu:

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Bài tập: Phương trình mặt cầu tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$ là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

- Xét phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. (*)$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (x^2 + 2ax) + (y^2 + 2by) + (z^2 + 2cz) = -d$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Điều kiện để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \end{cases}$

Đặc biệt mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ thì (S) có

$$\begin{cases} \text{tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{bán kính } R. \end{cases}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6z - 6 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S)

A. 100π .

B. 120π .

C. 9π .

D. 42π .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 3)$, bán kính $r = \sqrt{1+9+9+6} = 5$.

Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Chú ý:

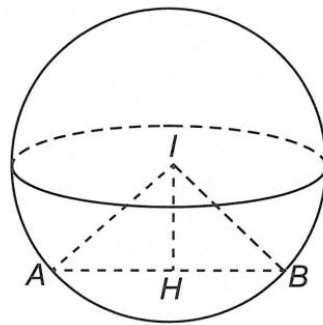
Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ :

- Xác định điểm $M \in \Delta$.

- Áp dụng công thức: $d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ tại H $\Rightarrow IH = d_{(I; (AB))} = d_{(I; Ox)}$

Lấy $M(2; 0; 0) \in Ox \Rightarrow IH = d_{(I, Ox)} = \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \vec{i}|}{|\vec{i}|} = \sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm A(4;3;1), B(3;1;3); M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Giá trị $(m-n)$ bằng

A. 64.

B. 60.

C. 68.

D. 48.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;-1) và bán kính R = 3.

Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \vec{0} \Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Ta có IE = 5.

Dễ thấy điểm E là điểm nằm ngoài mặt cầu (S).

Khi đó $P = 2MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{AE})^2 - (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{BE})^2 = ME^2 + 2AE^2 - BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$\max ME = IE + R = 8; \min ME = IE - R = 2$.

Do đó $m = \max P = 64 + 2AE^2 - BE^2; n = \min P = 4 + 2AE^2 - BE^2$.

Suy ra $m - n = 60$.

Chọn B.
