

TUYỂN TẬP 100 HỆ PHƯƠNG TRÌNH LTĐH NĂM HỌC 2014-2015



NHÓM GIÁO VIÊN THỰC HIỆN

1) PHẠM VĂN QUÝ

2) NGUYỄN VIỆT THANH

3) ĐOÀN TIỀN DŨNG

ĐƠN VỊ CÔNG TÁC: TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG, TX ĐỒNG XOÀI, TỈNH BÌNH PHƯỚC

Bài 1 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (\text{ĐH khối A - 2014})$$

Giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ 12 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Cách 1:

Đặt $a = \sqrt{12-y}, a \geq 0 \Rightarrow y = 12 - a^2$

PT (1) $\Leftrightarrow xa + \sqrt{(12-a^2)(12-x^2)} = 12$

$\Leftrightarrow \sqrt{12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2} = 12 - xa$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ 12^2 - 12x^2 - 12a^2 + x^2a^2 = 12^2 - 2.12.xa + x^2a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ 12x^2 - 2.12.xa + 12a^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa \leq 12 \\ (x-a)^2 = 0 \end{cases}$

Ta có $(x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y} \quad (*)$

Thế (*) vào (2) được : $(12-y)\sqrt{12-y} - 8\sqrt{12-y} - 1 = 2\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow (4-y)\sqrt{12-y} = 2\sqrt{y-2} + 1$

$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y} + \sqrt{12-y} - 3 + 2 - 2\sqrt{y-2} = 0$

$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y} + \frac{3-y}{\sqrt{12-y}+3} + \frac{2(3-y)}{1+\sqrt{y-2}} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{12-y} + \frac{1}{\sqrt{12-y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{y-2}} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } x\sqrt{12-y} + \sqrt{(12-x^2)y} \leq \sqrt{(x^2+12-x^2)(12-y+y)} = 12$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-y^2}} = \frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x\sqrt{y} = \sqrt{(12-y)(12-x^2)} \quad (3)$$

Khi đó (1) tương đương với (3)

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2y = 144 - 12x^2 - 12y + x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12y = 144 - 12x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases} \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2\left(1 - \sqrt{10-x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right) + 2 \cdot \frac{1-(10-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right) + 2 \cdot \frac{9-x^2}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2+3x+1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm vì } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Cách 3:

$$\text{Đặt } \vec{a} = (x; \sqrt{12-x^2}); \vec{b} = (\sqrt{12-y}; \sqrt{y})$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{12}$$

$$(1) \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 = 2\sqrt{10-x^2} - 2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) = 2 \frac{(3-x)(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 3$$

$$(x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x) = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = (x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x)$$

$$f'(x) < 0 \forall x > 0 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của hpt trên: (3;3)

Bài 2 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases} \quad (\text{ĐH khối B - 2014})$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 4x - 5y \geq 3 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất viết lại thành

$$\begin{aligned} (1-y)\sqrt{x-y} - (1-y) + (x-y-1) &= (x-y-1)\sqrt{y} \\ \Leftrightarrow \frac{(1-y)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} &= (x-y-1) \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

TH1 : $y = 1$ thay xuống (2) ta có

$$9 - 3x = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} \Leftrightarrow x = 3(TM)$$

TH2 : $x = y + 1$ thay xuống (2) ta có

$$\begin{aligned} 2y^2 + 3y - 2 &= 2\sqrt{1-y} - \sqrt{1-y} \\ \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 - \sqrt{1-y} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(y^2 + y - 1) + (y - \sqrt{1-y}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (y^2 + y - 1) \left(2 + \frac{1}{y + \sqrt{1-y}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (TM) \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (3; 1), \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$

Bài 3 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(x^2 + 2x + 2) = x(y^2 + 6) \\ (y - 1)(x^2 + 2x + 7) = (x + 1)(y^2 + 1) \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x, y \in \mathbb{R}$

Đặt $\begin{cases} a = x + 1 \\ b = y \end{cases}$, ta có hệ trở thành:
$$\begin{cases} b(a^2 + 1) = (a - 1)(b^2 + 6) \\ (b - 1)(a^2 + 6) = a(b^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(b^2 + 6) = b(a^2 + 1) (*) \\ (b - 1)(a^2 + 6) = a(b^2 + 1) (**) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình rồi thu gọn ta có:

$$(a - b)(a + b - 2ab + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b - 2ab + 7 = 0 \end{cases}$$

❖ Trường hợp 1: $a = b$ thay vào phương trình (*) ta có:

$$(a - 1)(a^2 + 6) = a(a^2 + 1) \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ có 2 nghiệm (x; y) là:}$$

❖ Trường hợp 2: $a + b - 2ab + 7 = 0$

Trừ vế theo vế hai phương trình (*) và (**) rồi rút gọn ta có:
$$\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b - 2ab + 7 = 0 \\ \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta có các nghiệm:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta có các nghiệm (x; y) là: (1;2), (2;3), (1;3), (2;2).

Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm là: (1;2), (2;3), (1;3), (2;2).

Bài 4 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4 - x^2} - 5\sqrt{4y - y^2} + 6 = 0 \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x \in [-2; 2], y \in [0; 4]$

Ta có $PT(1) \Leftrightarrow (x + 2)^3 - 6(x + 2) = y^3 - 6y^2$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t, t \in [0; 4]$ ta có $f'(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t - 4) \leq 0, \forall t \in [0; 4] \Rightarrow f(t)$ nghịch

biến trên $[0; 4]$. Mà phương trình (1) có dạng: $f(x + 2) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 2$ thay vào phương trình (2) ta

có: $4x^2 + 6 = 3\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = 0$ từ đó ta có $y = 2$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm (0; 2).

Bài 5 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$$

Giải

ĐK: $y \geq -1$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} + 4xy + 4x - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x(x - 2\sqrt{y+1})^2 - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ -x - 2y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1} = 5 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \leq 5 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \leq 5 \\ y = 3 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài 6 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{y - 2x + \sqrt{y} - x}{\sqrt{xy}} + 1 = 0 \\ \sqrt{1 - xy} + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

ĐK: $x > 0; y > 0; xy \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow y - 2x + \sqrt{y} - \sqrt{x} + \sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + 2\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x \text{ thay vào}$$

$$(2), \text{ ta được: } \sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

KL: hệ pt có tập nghiệm: $S = \{(1;1)\}$

Bài 7 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2(x^3 + y^3)}{xy} - \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{xy}} + 5(x + y) = 8\sqrt{xy} \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2-y} = \frac{5x+y}{2} \end{cases}$$

ĐK: $x \geq \frac{1}{5}; 0 < y \leq 2$

Đặt $u = x + y, u > 0; v = \sqrt{xy}, v > 0$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2v - uv^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v} - 2\right) \left(2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 2 \Leftrightarrow u = 2v$$

$$\Rightarrow x + y = 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ thay vào (2), ta được:}$$

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2-x} = 3x \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} = 3x-3 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3 = 0 \text{ VN vì } \frac{1}{5} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

KL: tập nghiệm của hệ pt là: $S = \{(1;1)\}$

Bài 8 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^3 + x + 1}{y^2} + (2x + 1) \left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2} (3y - 1) - \frac{(x - y)^2}{x - y} \\ \frac{x^3 - x^2 - 1}{y^2} + \frac{4}{y} - 1 = 0 \end{cases}$$

ĐK: $y \neq 0$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3 + (x-y)^2 + (x-y) + 1 = 0 \\ x^3 - x^2 - 1 + 4y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+1)((x-y)^2 + 1) = 0 \\ x^3 - x^2 - 1 + 4y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

KL: $S = \{(1;2)\}$

Bài 9 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + 3xy - 7y^2} + 4(x^2 + 5xy - 6y^2) = \sqrt{3x^2 - 2xy - y^2} \\ 3x^2 + 10xy + 34y^2 = 47 \end{cases}$$

ĐK:
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 \geq 0 \\ 4x^2 + 3xy - 7y^2 \geq 0 \end{cases}$$

Chuyển về nhân liên hợp ở phương trình (1), ta được:

$$(x^2 + 5xy - 6y^2) \left(\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 3xy - 7y^2} + \sqrt{3x^2 - 2xy - y^2}} + 4 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -6y \end{cases} \quad (n)$$

Với $x = y$ thay vào (2), ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

Với $x = -6y$ thay vào (2), ta được: $82y^2 = 47 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{\frac{47}{82}} \Rightarrow x = -6\sqrt{\frac{47}{82}} \\ y = -\sqrt{\frac{47}{82}} \Rightarrow x = 6\sqrt{\frac{47}{82}} \end{cases}$

KL: $S = \left\{ (1;1), (-1;-1), \left(\sqrt{\frac{47}{82}}; -6\sqrt{\frac{47}{82}} \right); \left(-\sqrt{\frac{47}{82}}; 6\sqrt{\frac{47}{82}} \right) \right\}$

Bài 10 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 3(x - y) = 0 \\ x^4 + 9y(x^2 + y) - 5x^2 = 0 \end{cases}$$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = 3x - 3xy \\ (x^2 + 3y)^2 + 3x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases}$

Thay (1) vào (2), ta được: $x^2(9y^2 - 15y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \quad VN$

KL: $S = \left\{ (0;0); \left(1; \frac{1}{3} \right) \right\}$

Bài 11 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 4xy + 13 \\ \sqrt{\frac{x^2 - xy - 2y^2}{x-y}} + \sqrt{x+y} = \frac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{cases}$$

ĐK: $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \\ (x+y)\sqrt{x-2y} + (x+y)\sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có PT (1)} \Leftrightarrow (x-2y)^2 + 4(x-2y) - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 1 \\ x-2y = -5 \end{cases} \quad (l)$$

Với $x = 2y + 1$ thay vào (2), ta được:

$$(3y+1)\sqrt{y+1} = 1-3y \Rightarrow 9y^3 + 6y^2 + 13y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ thỏa mãn}$$

$$\text{KL: } S = \{(1;0)\}$$

Bài 12 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 - 5)\sqrt{x^2 - 2y} + x^2 + 3 = 2y(\sqrt{x^2 - 2y} + 1) \\ x^2 + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } x \geq 2y$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2 = 6 - 3y$ thay vào (1) ta được: $(1 - 5y)\sqrt{6 - 5y} = 5y - 9 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ thỏa mãn

$$\text{KL: } S = \{(\sqrt{3};1);(-\sqrt{3};1)\}$$

Bài 13 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (y-1)\frac{x^2-y}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y-1}} = 2 \\ (x^2+4y)\sqrt{x^2-1}+6 = 5\sqrt{x^2-1}\left(1+\sqrt{(x^2-1)(y-1)}\right) \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y-1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x^2-1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b \geq 0 \end{cases}, \text{ ta được: } \begin{cases} b^2(a-b) = 2 \\ a^3 + 4ab^2 - 5a^2b = 6 \end{cases}$$

Nhân chéo hai phương trình giải hệ đẳng cấp ta được tập nghiệm: $S = \{(\sqrt{10};2);(-\sqrt{10};2)\}$

Bài 14 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -20y^3 - 3y^2 + 3xy + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -20y^3 - y(3y-1) + x(3y+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3y + 1 \end{cases}.$$

Thế (2) vào (1), ta được phương trình thuần nhất bậc 3

$$\text{KL: } S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{-3}{5}; \frac{-1}{5} \right) \right\}$$

Bài 15 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y + \sqrt{x^2 + 3y^2} = 0 \\ \sqrt{2y - 1} + 2x^2 - y^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } y \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có PT (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3y^2} = 3y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ 6y^2 - 6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ y = 0 \\ x = y \end{cases} \quad (l)$$

Với $x = y$ thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{2y - 1} = -y^2 + 3y - 1 \Rightarrow y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 8y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (l)$$

$$\text{KL: } S = \left\{ (1; 1); (2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \right\}$$

Bài 16 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{3(x^4 + y^4) + 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ xy^2 + 3y^2 + 4x = 8 \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } x, y \neq 0$$

$$\text{Ta có PT (1)} \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \left(\frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2y^2(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

- Với $x = y$ thay vào (2), ta được: $x = 1 \Rightarrow y = 1$
- Với $x = -y$ thay vào (2), ta được: $y = -1 \Rightarrow x = 1$

$$\text{KL: } S = \left\{ (1; 1); (1; -1) \right\}$$

Bài 17 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ \sqrt{x^3 + xy + 6y} - \sqrt{y^3 + x^2 - 1} = 2 \end{cases}$$

ĐK:
$$\begin{cases} x^3 + xy + 6y \geq 0 \\ y^3 + x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 10x^2 - 2x(y + 19) + 5y^2 - 6y + 41 = 0$.

Tính $\Delta'_x = -49(y - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào (1) được $x = 2$ thỏa hệ phương trình

KL: $S = \{(2; 1)\}$

Bài 18 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 - 2xy - x + y = 0 \\ \sqrt{x - y} = x^3 - 2x^2 + y + 2 \end{cases}$$

ĐK: $x \geq y$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (x - y - 1)(x^2 + y^2 + x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 + x - y = 0 \end{cases}$

- $y = x - 1$ thay vào (2), ta được: $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$
- $x^2 + y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (vì $x - y \geq 0$) thay vào hệ không thỏa

KL: $S = \{(1; 0); (0; -1)\}$

Bài 19 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 8x^2 = 3 - \left(1 + 3\sqrt[3]{y^2 - 1}\right)\sqrt[3]{y^2 - 1} \\ 4 - 3\sqrt[3]{(y^2 - 1)^2} - 2\sqrt[3]{y^2 - 1} = 12x^2 + y^2 - \sqrt{1 - 4x^2} \end{cases}$$

ĐK: $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{y^2 - 1} \\ b = \sqrt{1 - 4x^2}, b \geq 0 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} a^3 + 3a^2 + 2a - 3b^2 - b = 0 \\ a^3 + 3a^2 + a - 2b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b^2 + b$ thay vào (1), ta được:

$(b^2 + b)^3 + 3(b^2 + b)^2 + 2(b^2 + b) - 3b^2 - b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$.

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} \sqrt{1 - 4x^2} = 0 \\ \sqrt[3]{y^2 - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{KL: } S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 1 \right); \left(\frac{1}{2}; -1 \right); \left(-\frac{1}{2}; 1 \right); \left(-\frac{1}{2}; -1 \right) \right\}$$

Bài 20 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^6 - 24y^3 + (2y - x^2)(9x^2 + 18y - 11) = 0 \\ 1 + \sqrt[3]{2\sqrt{2y+1}} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x+6y-1} \end{cases}$$

ĐK: $y \geq 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 2y)(3x^4 + 6x^2y - 9x^2 + 12y^2 - 18y + 1) = 0$

Với $x^2 = 2y$ thay vào (2), ta được:

$$1 + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{4x-1} \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(4x-1)^2} + \sqrt[3]{4x-1}\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{KL: } S = \left\{ \left(1; \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Bài 21 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + xy = \frac{2(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{xy}} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x + y = 4 \end{cases}$$

ĐK: $x > 0; y > 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x} + xy)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = xy \Rightarrow x + y = x^2y^2 + 2\sqrt{xy}$ thay vào (2) ta được:

$$(\sqrt{xy} - 1)(xy\sqrt{xy} + xy + \sqrt{xy} + 4) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

KL: thay vào hệ ta có tập nghiệm:
$$S = \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

Bài 22 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2\sqrt{\frac{x-1}{y-1}} + \frac{4}{y-1} - \frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{x-1} = 0 \\ (y-1)(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-1} - \frac{y-1}{2} = 2 \end{cases}$$

ĐK: $x \geq 1; y > 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x-1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b > 0 \end{cases}$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (b-2)^2 + a^2b^2 + 2ab + ab^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ thỏa hệ phương trình

KL: $S = \{(1; 5)\}$

Bài 23 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x + 3\sqrt{y}}{4y + \sqrt{2x + y}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{3x - 4y - 8}} - \frac{1}{\sqrt{y - 1}} = \frac{-1}{2} \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} y > 1 \\ 2x + y \geq 0 \\ 3x - 4y \neq 8 \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 4y) \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x + y}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 4y$ thay vào (2) , ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{y-1}} - \frac{1}{\sqrt{y-1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 - a^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (a-1)(2a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \quad \left(a = \frac{1}{\sqrt[6]{y-1}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{y-1}} = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 8$$

KL: $S = \{(8; 2)\}$

Bài 24 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x-1}(1-2y) - y + 2 = 0 \\ y(y + \sqrt{x-1}) + x - 4 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$. Khi đó $x = t^2 + 1$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} t(1-2y) - y + 2 = 0 \\ y(y+t) + t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - y - 2ty + 2 = 0 \\ y^2 + ty + t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-y) - 2ty + 2 = 0 \\ (t-y)^2 + 3ty - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2(t-y)^2 + 3(t-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-y = 0 \\ t-y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ y = t + \frac{3}{2} \end{cases}.$$

❖ Với $y = t$, ta có $-2t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra $x = 2$, $y = 1$.

❖ Với $y = t + \frac{3}{2}$, ta có $-\frac{3}{2} - 2t\left(t + \frac{3}{2}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$.

Suy ra $x = \frac{19 - 3\sqrt{13}}{8}$, $y = \frac{3 + \sqrt{13}}{4}$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là

Bài 25 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+3} + x + y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x^2 + y + 1 \geq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+2)^2+3} + x + 2 = -y\sqrt{(-y)^2+3} - y$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+3} + t$ Có $f'(t) = \sqrt{t^2+3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} + 1 > 0 \forall t$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow x + 2 = -y$

Thay vào (2) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x - 1} = 2x + 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \\ \therefore & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2 + 13x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1 \quad (\text{tmdk}) \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; -1)$.

Bài 26 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (53 - 5x)\sqrt{10 - x} + (5y - 48)\sqrt{9 - y} = 0 \\ \sqrt{2x - y + 6} + x^2 = \sqrt{-2x + y + 11} + 2x + 66 \end{cases} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Giải

ĐK:
$$\begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ 9 - y \geq 0 \\ 2x - y + 6 \geq 0 \\ -2x + y + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ y \leq 9 \\ 2x - y + 6 \geq 0 \\ -2x + y + 11 \geq 0 \end{cases}$$

Từ PT(1) ta có $[5(10 - x) + 3]\sqrt{10 - x} = [5(9 - y) + 3]\sqrt{9 - y}, (3)$

Xét hàm số $f(t) = (5t^2 + 3)t$ trên khoảng $t \in [0; +\infty)$ có $f'(t) = 15t^2 + 3 > 0, \forall t \geq 0$ hàm số đồng biến. Từ (3) ta có $f(\sqrt{10-x}) = f(\sqrt{9-y}) \Leftrightarrow \sqrt{10-x} = \sqrt{9-y} \Leftrightarrow y = x-1, (4)$ Thay (4) vào (2) ta được $\sqrt{x+7} - \sqrt{10-x} + x^2 - 2x - 66 = 0 (5)$ ĐK: $x \in [-7; 10]$

Giải (5) ta được

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+7} - 4) + (1 - \sqrt{10-x}) + x^2 - 2x - 63 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x-9}{\sqrt{x+7}+4} + \frac{x-9}{1+\sqrt{10-x}} + (x-9)(x+7) = 0 \\ (x-9) \left[\frac{1}{\sqrt{x+7}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{10-x}} + (x+7) \right] &= 0 \Leftrightarrow x = 9, y = 8 \end{aligned}$$

Vậy Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (9; 8)$

Bài 27 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}} + x + y = 1 \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{4+y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải

ĐK: $0 \leq x; y \leq 1$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}} + x = \frac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-(1-y)}} + 1-y \quad (*)$$

$$\text{xét h/s } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}} + t; \text{ có } f'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{1-t}) + \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \cdot \sqrt{t}}{(1+\sqrt{1-t})^2} + 1 > 0, \forall t \in (1; +\infty)$$

vì $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(1-y) \Leftrightarrow x = 1-y$, thế vào pt(2) ta được :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 6-2x + 2\sqrt{5-6x+x^2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-6x+x^2} = x+1 \Leftrightarrow 5-6x+x^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{vậy hệ pt có nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 28 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 7y^3 = 8 \\ 9x^2y + y^2 = 6x \end{cases}$$

Giải

Nhận xét $y \neq 0$, nhân hai vế phương trình thứ hai với $7y$, trừ đi phương trình thứ nhất, được

$$(3xy)^3 - 7(3xy)^2 + 14(3xy) - 8 = 0$$

Từ đó tìm được hoặc $3xy = 1$ hoặc $3xy = 2$ hoặc $3xy = 4$

Với $3xy = 1$, thay vào phương trình thứ nhất, được $y=1$ do đó $\frac{1}{3}$

Với $3xy = 2$, thay vào phương trình thứ nhất, được $y=0$ (loại)

Với $3xy = 4$, thay vào phương trình thứ nhất, được $y=-2$ do đó $x = -\frac{2}{3}$

Bài 29 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$$

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) = 4(2x + y)$

Từ phương trình (2) thay $4 = x^2 + 3y^2$ vào phương trình trên và rút gọn ta được:

$$x^2y + 6xy^2 + 5y^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{cases}$$

TH1 : $y = 0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^3 = 4x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ nghiệm $(x; y) = (\pm 2; 0)$

TH2 : $x = -y \Leftrightarrow y = -x$ thay vào hệ ta được : $\begin{cases} 2x^3 = 2x \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; -1); (-1; 1)$

TH3 : $x = -5y$ thay vào hệ ta có nghiệm $(x; y) = (\frac{5}{\sqrt{7}}; \frac{-1}{\sqrt{7}}); (\frac{-5}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}})$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm.

Bài 30 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (y-2).\sqrt{x+2} - x.\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x+1}.(\sqrt{y}+1) = (y-3).(1+\sqrt{x^2+y-3x}) \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -1; y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}.y - x.\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} = 0$$

$$\text{có } \Delta_y = x^2 + 8(x+2) = (x+4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \\ \sqrt{y} = \frac{-2}{4\sqrt{x+2}} (< 0) \Rightarrow \text{loại} \end{cases}$$

$$\text{với } \sqrt{y} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2, \text{ thế vào (1) ta được}$$

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) = (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}.(\sqrt{x+2}+1) = (x-1).\left(\sqrt{(x-1)^2+1}\right) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2 + 1} + 1) = t\sqrt{t^2 + 1} + t$, có $f'(t) = \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến.

$$\text{Vì PT (*)} \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$ (thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 5)$.

Bài 31 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2y \\ (2x - y)y = 1 + 2y \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) + (2) về theo về ta được:

$$x^2 + 2xy + 1 = 1 + 2x + 4y \Leftrightarrow x(x + 2y) = 2(x + 2y) \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Trường hợp $x=2$ thay vào (2) ta có $y = 1$

Trường hợp $x+2y = 0$ thay vào (2) ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $x = 2; y = 1$.

Bài 32 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} xy(y+1) + y^2 + 1 = 4y \\ xy^2(x+2) + \frac{1}{y^2} + y^2 = 5 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \neq 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x(y+1) + y + \frac{1}{y} = 4 \\ y^2(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{y^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+1) + \frac{1}{y} + x = 4 \\ y^2(x+1)^2 + \frac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = y(x+1) + \frac{1}{y}; v = x+1$ ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 - 2v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - u \\ u^2 + 2u - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -5 \\ v = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} y(x+1) + \frac{1}{y} = -5 \\ x+1 = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} y(x+1) + \frac{1}{y} = 3 \\ x+1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 5y + 1 = 0 \\ x = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \wedge y = 1 \\ x = 1 \wedge y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm $(1;1)$ và $(1; 1/2)$.

Bài 33 Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$. và $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$.

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1$ và $v = \frac{x}{y}$ Hệ phương trình (I) trở thành
$$\begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 \\ u = 21 - 4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v^2 - 13v + 21 = 0 \\ u = 21 - 4v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 7 \\ v = \frac{7}{2} \end{cases} + \text{Với } \begin{cases} u = 9 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ Với } \begin{cases} u = 7 \\ v = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14\sqrt{\frac{2}{53}} \\ y = 4\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = -14\sqrt{\frac{2}{53}} \\ y = -4\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(3;1)$, $(-3;-1)$, $\left(14\sqrt{\frac{2}{53}}; 4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$ và $\left(-14\sqrt{\frac{2}{53}}; -4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$.

Bài 34 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 1 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có (I)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 1 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$$

Từ phương trình : $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 1 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 2 \quad (1)$

Ta thấy hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ là hàm đồng biến trên $[1; +\infty)$

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 2$. Miền xác định: $D = [1; +\infty)$

Đạo hàm $g'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0 \quad \forall x \in D$. Suy ra hàm số nghịch biến trên D.

Từ (1) ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình và đó là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $(1;0)$.

Bài 35 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases} \quad (\text{II}).$$
 Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ 3 + \sqrt{x} = \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y} \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có: $\sqrt{3+x^2} + 3\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3+y^2} + 3\sqrt{y} + 3 \quad (2)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3+t^2} + 3\sqrt{t} + 3$. Miền xác định: $D = [1; +\infty)$

Đạo hàm: $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{3+t^2}} + \frac{3}{2\sqrt{t}} + 1 > 0 \quad \forall x \in D$. Suy ra hàm số đồng biến trên D.

Từ (*) ta có $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Lúc đó: $\sqrt{3+x^2} + \sqrt{x} = 3 \quad (3)$

+ VT (3) là hàm số đồng biến trên D.

+ VP (3) là hàm hằng trên D.

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình (3) (thỏa điều kiện)

Suy ra phương trình có nghiệm $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $(1;1)$

Bài 36 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y & (1) \\ y + 1 = 2x^2 + 2xy\sqrt{1+x} & (2) \end{cases}$

ĐK: $1 \geq x \geq -1$

Từ (1) ta có: $2y^3 + 2(x-1)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y$ (thêm vào vế trái $2\sqrt{1-x}$)

$\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ suy ra hàm số đồng biến

Suy ra $y = \sqrt{1-x}$ thế vào (2), ta có $\sqrt{1-x} + 1 = 2x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} \quad (3)$

Vì $1 \geq x \geq -1$ nên đặt $x = \cos(t)$ với $t \in [0; \pi]$ sau đó thế vào phương trình (3) là ra kết quả.

Bài 37 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $x, y \in \mathbb{R}$

Nhân 2 vế phương trình (1) với 25 và nhân 2 vế phương trình (2) với 50 ta có:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + 25y^2 = 5 \\ 200x^2 + 150x - 114 = -50y(3x+1) \end{cases}$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta có:

$225x^2 + 25y^2 + 25 + 150xy + 150x + 50y = 144$

$\Leftrightarrow (15x + 5y + 5)^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 5y + 5 = 12 \\ 15x + 5y + 5 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 5y = 7 \\ 15x + 5y = -17 \end{cases}$

❖ Với $15x + 5y = 7$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 15x + 5y = 7 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ 25x^2 + 25y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ 25x^2 + (7 - 15x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 7 - 15x \\ x = \frac{11}{25} \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{25} \\ y = \frac{2}{25} \\ x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

❖ Với $15x + 5y = -17$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 15x + 5y = -17 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -17 - 15x \\ 25x^2 + 25y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -17 - 15x \\ 25x^2 + (-17 - 15x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -17 - 15x \\ x \in \phi \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm là:
$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{11}{25} \\ y = \frac{2}{25} \end{cases}.$$

Bài 38 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{3x+2y} = -1 & (1) \\ \sqrt{x+y} + x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

Hệ Phương trình tương đương

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + 1 = \sqrt{3x+2y} \\ \sqrt{x+y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{x+y} + 1 = 3x + 2y \\ \sqrt{x+y} = y - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+y} = 2x - y \\ \sqrt{x+y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y - x) = 2x - y \\ \sqrt{x+y} = y - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{5x - 1} = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \frac{1}{3} \\ 5x - 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 11x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Bài 39 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - y^2} = y^2 - 2x^2 + 3 & (1) \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x & (2) \end{cases}$

Giải

$$\text{ĐK: } 2x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{2x^2 - y^2} \quad (t \geq 0)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - y^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó hệ phương trình tương đương } \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = (y - 2x)(2x^2 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - y^3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Th 1: $y = 0$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^3 = \end{cases}$ (vô lí)

Vậy cặp $(x, 0)$ không là nghiệm của hệ

TH2 : Chia hai vế (3) cho y^3 ta có hệ phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $S = \{(1;1), (-1;-1)\}$

Bài 40 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x - y \neq 0$

Hệ phương trình biến đổi tương đương

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ (x+y) - (x-y) - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y + \frac{1}{x-y} \end{cases}$

Ta có hệ tương đương $\begin{cases} 2a^2 - b^2 + 2 + \frac{9}{8} = 0 \\ a - b + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b^2 = -\frac{25}{8} \\ a - b = \frac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(b - \frac{5}{4}\right)^2 - b^2 = \frac{-25}{8} \\ a = b - \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(\quad) \quad \underline{7} \quad \underline{3} \quad \underline{13} \quad \underline{3}$

Bài 41 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + y^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 - 10(y + 1) = 0 \end{cases}$$

Nhận xét $y + 1 = 0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một và hai cho $y + 1$ ta có
$$\begin{cases} \frac{(x^2 + y^2)(x + y + 1)}{y + 1} = 25 \\ \frac{x^2 + y^2}{y + 1} + (x + y + 1) = 10 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \frac{x^2 + y^2}{y + 1} \\ b = x + y + 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} a \cdot b = 25 \\ a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5(y + 1) \\ x + y + 1 = 10 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = (3; 1), \left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Bài 42 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + x)y^2 - 4y^2 + y + 1 = 0 \\ x^3y^3 + x^2y^2 - 4y^3 + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải

Nhận xét $y = 0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một cho y^2 và hai y^3

$$\begin{cases} (x^2 + x) - 4 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ x^3 + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^3} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$$

Hệ phương trình biến đổi tương đương ta có :

$$\begin{cases} a^2 + a - 2b = 4 \\ a^3 - ab = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b = 4 - a \\ a(4 - a) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài 43 Giải hệ phương trình:

Giải

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \frac{x}{y} - 5\frac{y}{x} = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5\frac{x^2 - y}{x} + \frac{y^2 + x}{y} = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ \frac{x^2 - y}{x} + \frac{y^2 + x}{5y} = 1 \end{array} \right.$$

Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Giải

Điều kiện ta có $\frac{2}{-}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} = 2y-1 (vn) \end{cases} \quad \text{Vi} \quad \frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}; 2y+1 \geq \frac{7}{3}$$

Vậy hệ có nghiệm (3 ;2)

Bài 45 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2y^2 - 7y + 10 - x(y+3)} + \sqrt{y+1} = x+1 \\ \sqrt{y+1} + \frac{3}{x+1} = x+2y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) \geq 0; y+1 \geq 0; x+1 > 0$

Ta có
$$\begin{cases} \sqrt{2y^2 - 7y + 10 - x(y+3)} = x+1 - \sqrt{y+1} \\ (x+1)\sqrt{y+1} + 3 = (x+2y)(x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{y+1} + y+1 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1) - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2(x+1)(x+2y) + 7 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+1)(x+2y) - 3 \end{cases}$$

Phương trình (*) tương đương $2y^2 - 4y + 2 + 3xy + x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$

Với $y = 1 - x$ thay vào phương trình (2) ta được

$$(x+1)\sqrt{2-x} = -1+x-x^2 \quad (\text{VN})$$

Với $x = 2 - 2y$ thay vào phương trình (2) ta được phương trình đơn giản ẩn y.

Từ đó có nghiệm của hệ.

Bài 46 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \quad (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) - (2)

Ta có $x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$$

Xét hàm số : $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{\quad}}$$

$$x = \left\{ -\frac{10}{3}, -\frac{35}{3} \right\} \left\{ -\frac{10}{3}, -\frac{35}{3} \right\}$$

$$2(t+1) + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} - 1 \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Suy ra $f'(t) > 0$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến

Suy ra $x + 1 = 2y$

Thay $x = 2y - 1$ vào phương trình (2) ta có $(2y - 1)^2 + 2y^2 - 2(2y - 1) + y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $S = \left\{ (1; 2), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6} \right) \right\}$

Bài 47 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \leq 2; y \geq \frac{1}{2}$

Phương trình (1) tương đương : $(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1}$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ suy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3-2y$ thay vào phương trình (2)

Ta có $\sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5$ (*)

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[3]{5-2y} \\ v = \sqrt{y+2} \end{cases} (v \geq 0)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v = 5 \\ u^3 + 2v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1; v = 2 \\ u = \frac{-3 - \sqrt{65}}{4}; v = \frac{23 + \sqrt{65}}{8} \\ u = \frac{\sqrt{65} - 3}{4}; v = \frac{23 - \sqrt{65}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{233 + 23\sqrt{65}}{32} \\ y = \frac{233 - 23\sqrt{65}}{32} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm

$$\left(\begin{array}{l} \end{array} \right) \frac{23\sqrt{65}}{32} \quad \frac{185}{32} \quad \frac{233}{32} \quad \frac{23\sqrt{65}}{32} \quad \frac{23\sqrt{65}}{32} \quad \frac{185}{32} \quad \frac{233}{32} \quad \frac{23\sqrt{65}}{32}$$

Bài 48 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Giải

Với $x = 0$ thay vào hệ phương trình ta có
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{-3}{4} \text{ (mâu thuẫn)} \end{cases}$$

Chia hai vế phương trình (1) cho x^3 ta có $2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ suy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng.

Từ đó suy ra $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = y (y > 0)$ Thay vào phương trình (2) ta có

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2. (*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases} (v \geq 0)$$

$$(*) \Leftrightarrow (u+2)v = v^2 + 2u \Leftrightarrow v^2 - uv - 2v + 2u = 0 \Leftrightarrow (v-u)(v-2) = 0 \Leftrightarrow v = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Vậy hệ có nghiệm $S = \left\{(-\sqrt{3}; 3), (\sqrt{3}; 3)\right\}$.

Bài 49 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1) biến đổi ta có } 8x^3 + 2x = (6-2y)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{5-2y})^3 + \sqrt{5-2y}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ suy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng.

$$\text{Từ đó suy ra } \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \frac{5-4x^2}{2} (x \geq 0)$$

Thay vào Phương trình (2) ta có

$$4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0. \text{ Với } 0; \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Xét hàm số } \lambda(x) = 1 + \sqrt{4x-2} \quad (x \geq 0) \text{ khi đó } \lambda'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}} > 0 \\
 & \Rightarrow \lambda(x) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty) \\
 & \lambda_1 = 3^2 + 1 = 10, \lambda_2 = 2^2 + 1 = 5, \lambda_3 = 1^2 + 1 = 2 \\
 & \text{Cộng hai bất đẳng thức lại ta có} \\
 & \text{Đến đây ta có } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 10 + 5 + 2 = 17 > 0
 \end{aligned}$$

$$g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 \text{ Khi đó } g'(x) = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0 \text{ với } x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Ta có } g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = 2 \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

$$\textbf{Bài 50} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = x + \frac{3}{2} \\ x + \sqrt{x^2-2x+5} = 1 + 2\sqrt{2x-4y+2} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } 2x-4y+2 \geq 0$$

$$\text{Phương trình (1) tương đương}$$

$$2x-4y+2 = (y^2+1) + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2 \Leftrightarrow 2x-4y+2 = \left(\sqrt{y^2+1} + y\right)^2 (*)$$

$$\text{Thay vào phương trình (2) ta có}$$

$$x-1 + \sqrt{(x-1)^2+1} = 2\sqrt{(\sqrt{y^2+1} + y)^2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \sqrt{t^2+1}. \text{ Khi đó } f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} > 0 \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đơn điệu tăng.}$$

$$\text{Từ đó suy ra } f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = y \Leftrightarrow x = 2y+1 \text{ thay vào phương trình}$$

$$(*) \text{ta được}$$

$$\left(\sqrt{y^2+1} + y\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+1} = 2-y \\ \sqrt{y^2+1} = -2-y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$A, B, C \in \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $f\left((x-1)^2\right) = f\left(y^2\right) \Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y = 1-x \end{cases}$

Với $y = x-1$ thay vào phương trình hai ta có

$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) - 3x + 3(x-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

Với $y = 1-x$ thay vào phương trình hai ta có

$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) - 3x + 3(1-x) + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Bài 52 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2(4x+1) + 2y^2(2y+1) = y+32 \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải

Xét phương trình thứ hai của hệ : $x^2 - x + y^2 + y - \frac{1}{2} = 0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta = 1 - 4y^2 - 4y + 2 = 3 - 4y - 4y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

Phương trình thứ hai của hệ biến đổi theo biến y

$$y^2 + y + x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta = 1 - 4x^2 + 4x + 2 = 3 + 4x - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Phương trình thứ nhất ta có

$$8x^3 + 2x^2 = -4y^3 - 2y^2 + y + 32$$

Xét hàm số

$$f(x) = 8x^3 + 2x^2 \quad \text{Khi đó } f'(x) = 24x^2 + 4x \quad \text{với } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0; f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}; f\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{1}{54}; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{63}{2}$$

Xét hàm số

$$g(y) = -4y^3 - 2y^2 + y + 32 \quad \text{khi đó } g'(y) = -12y^2 - 4y + 1 \quad \text{với } \left(\right)$$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$

Bài 53 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

ĐK: $y \geq -1$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} + 4xy + 4x - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x(x - 2\sqrt{y+1})^2 - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ -x - 2y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1} = 5 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \leq 5 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \leq 5 \\ y = 3 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là (7,3).

Bài 54 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ ta có

$$xy(x+y)^2 - 2x^2y^2 + 2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1) - 2(xy-1)(xy+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$$

+) $xy = 1$, thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$$3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 = 0 \Leftrightarrow y(x - y)^2 = 0.$$

Vì $xy = 1$ nên $y \neq 0$, do đó $x = y$. Do đó $x = y = 1$ hoặc $x = y = -1$.

+) $x^2 + y^2 = 0$. thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$$x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = y \end{cases}$$

Từ đó giải được các nghiệm

$$(1; 1), (-1, -1), (2\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}), (-2\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}})$$

Bài 55 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} & (1) \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ (1): $\frac{x^2 - y^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 4}} = 3y - x$, thay (2) vào ta được

$$(x - 3y)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 4}} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y$$

Với $x = 3y$ thay vào (2) giải được: $(x, y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$

Bài 56 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 1 = 25y^2 - 2x^2 & (1) \\ x^2 + y^2 + 1 = y(18 - x^2) & (2) \end{cases}$$

Giải

Để thấy với $y = 0$ hệ pt vô nghiệm

Xét $y \neq 0$. Chia (1) cho y^2 , chia (2) cho y ta được hệ

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2\frac{x^2}{y^2} = 25 \\ \frac{x^2}{y} + y + \frac{1}{y} + x^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2 + 1}{y} + y\right)^2 - 2(x^2 + 1) = 25 \\ \frac{x^2 + 1}{y} + y + x^2 = 18 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \frac{x^2 + 1}{y} + y \\ b = x^2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a^2 - 2b = 27 \\ a + b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 11 \\ a = -9 \\ b = 27 \end{cases}$

$$+ \text{Với } \begin{cases} a = 7 \\ b = 11 \end{cases} \text{ ta giải ra được } \begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } \begin{cases} a = -9 \\ b = 27 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 4 \end{cases}$

Bài 57 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 65 \\ 2(2 + 3y)x^2 + (1 - 3x)y^2 - 4xy = -5. \end{cases}$

Giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 65 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x^2y - 3xy^2 = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)[(2x - y)^2 + 6xy] = 65 \\ (2x - y)[3xy + (2x - y)] = -5. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)^3 + 6xy(2x - y) = 65 \\ 2 \cdot (2x - y)^2 + 6xy(2x - y) = -10 \end{cases} \Rightarrow (2x - y)^3 - 2(2x - y)^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ (2x - y)^2 + 3(2x - y) + 15 = 0(VN) \end{cases}$$

$$\text{Thay } y = 2x - 5 \text{ vào (1) ta có } 8x^3 - (2x - 5)^3 = 65 \Leftrightarrow 6x^2 - 15x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = \frac{1}{2}; y = -4 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(2; -1); (\frac{1}{2}; -4)$.

Bài 58 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2(x - 1)^2 + 2} \\ 2(y - x) + 1 = \frac{1}{x - 1} \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \neq 1$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2(x - 1)^2 + 2} \\ 2y - x - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} a = 2y - x \\ b = x - 1 \end{cases} \text{ . Khi đó hệ đã cho trở thành}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2b^2 + 2} \\ a - b = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 1 = b\sqrt{2b^2 + 2} \\ a - b = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1(L) \\ b = 1 \\ a - b = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = y = 2$.

Bài 59 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy + 1)^3 = 2y^3(9 - 5xy) \\ xy(5y - 1) = 1 + 3y \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ

Xét $y \neq 0$ hệ đã cho được biến đổi thành

$$\begin{cases} \left(\frac{xy + 1}{y}\right)^3 = 2(9 - 5xy) \\ x(5y - 1) = \frac{1 + 3y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 = 2(9 - 5xy) \\ x + \frac{1}{y} + 3 - 5xy = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x + \frac{1}{y}$, $b = 9 - 5xy$ ta được hệ $\begin{cases} a^3 = 2b \\ a + b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ ta có hệ $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ 9 - 5xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = 1$

Bài 60 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y + 1} + 1 = 4(x + y)^2 + \sqrt{3}\sqrt{x + y} \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x + y \geq 0$.

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{x + y + 1} - \sqrt{3(x + y)} = 4(x + y)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 2y - 1}{\sqrt{x + y + 1} + \sqrt{3(x + y)}} + (2x + 2y - 1)(2x + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x + y + 1} + \sqrt{3(x + y)}} + 2(x + y) + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 1 = 0$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Bài 61 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3 + (9 - y)x^2 - 3xy = 1 \\ x^2 + 9x - 2y = 3. \end{cases}$

Giải

$$hpt \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 3x)(3x - y) = 1 \\ x^2 + 3x + 2(3x - y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 + 3x = 2 \\ 3x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} x^2 + 3x = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{-11 + 3\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{-11 - 3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} x^2 + 3x = 2 \\ 3x - y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-10 + 3\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-10 - 3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Bài 62 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 & (1) \\ 4\sqrt{x + 2} + \sqrt{16 - 3y} = x^2 + 8 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

$$\text{ĐK: } x \geq -2, y \leq \frac{16}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^3 = (y + 1)^3 \Leftrightarrow y = x - 2 \text{ Thay } y = x - 2 \text{ vào (2) được}$$

$$4\sqrt{x + 2} + \sqrt{22 - 3x} = x^2 + 8 \Leftrightarrow \frac{4(x - 2)}{\sqrt{x + 2} + 2} = (x - 2)(x + 2) + \frac{3(x - 2)}{\sqrt{22 - 3x} + 4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{-4}{\sqrt{x + 2} + 2} + (x + 2) + \frac{3}{\sqrt{22 - 3x} + 4} = 0(*) \end{cases}$$

Xét $f(x) = VT(*)$ trên $\left[-2; \frac{21}{3}\right]$, có $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến. suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (*)
 Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(2; 0), (-1; -3)$.

Bài 63 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $|x| \geq |y|$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2}; u \geq 0 \\ v = x + y \end{cases}$; $x = -y$ không thỏa hệ nên xét $x \neq -y$ ta có $y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 12 \\ \frac{u}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right) = 12 \end{cases}$$

Đến đây sử dụng phương pháp rút thế ta dễ dàng tìm ra kết quả bài toán.

Bài 64 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x - y)^2 + x + y = y^2 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 = -y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ tương đương
$$\begin{cases} x^2 + y + x(1 - 2y) = 0 & (1) \\ (x^2 + y)^2 + 3x^2(1 - 2y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) được $(x(1 - 2y))^2 + 3x^2(1 - 2y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(1 - 2y)(2 - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Với $x = 0$ suy ra $y = 0$

Với $1 - 2y = 0$ thay vào (1) suy ra $x^2 = -y = \frac{-1}{2}$ (Vô lí)

Với $y = 2$ suy ra $x = 1$ hoặc $x = 2$

Hệ có 3 nghiệm $(0; 0), (1; 2), (2; 2)$.

Bài 65 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0 \\ y(y - x + 2) = 3x + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Phương trình thứ (2) $\Leftrightarrow y^2 + (2 - x)y - 3x - 3 = 0$ được xem là phương trình bậc hai theo ẩn y có

$$\Delta = (x + 4)^2$$

Phương trình có hai nghiệm:
$$\begin{cases} y = \frac{x-2-x-4}{2} = -3 \\ y = \frac{x-2+x+4}{2} = x+1 \end{cases}$$
 Thay $y = -3$ vào pt thứ nhất ta được pt vô nghiệm

Thay $y = x + 1$ vào pt thứ nhất ta được: $x^2 - 5x - 2 + 6\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 0$ (3)

Giải (3): đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = t$, điều kiện $t \geq 0$ $(3) \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (tm) \\ t = -7 & (ktm) \end{cases}$

Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy, hệ phương trình có 2 nghiệm là: (1;2) và (4;5)

Bài 66 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x - y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases}$$

$(x, y \in R)$.

Giải

Từ phương trình (2) ta có đ/k : $x \geq y, y \geq 0$ $\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{y} - y^2 = \sqrt{(x - y)^2 + 1} - \sqrt{x - y} - (x - y)^2$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{t} - t^2$ liên tục $[0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t$

$= t \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2 \right) - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0 \forall t > 0$ Suy ra hàm số nghịch biến $(0; +\infty)$ nên

$f(y) = f(x - y) \Leftrightarrow x = 2y$

Thay vào (1) ta có $(y - 2)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (4; 2)$.

Bài 67 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x - 1} + 4(2x + 1) = \sqrt{y - 1} + 3y \\ (x + y)(2x - y) + 4 = -6x - 3y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\frac{1}{3}; \quad 1$

$$\begin{aligned}
 2x - y + 4 = 0 &\Leftrightarrow y = 2x + 4, \text{ thay vào (1) ta có: } \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{2x+3} + 3(2x+4) \\
 &\Leftrightarrow 2(3x-1) + \sqrt{3x-1} = 2(2x+3) + \sqrt{2x+3} \quad (*) \\
 (*) &\Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 12. \text{ Kết luận: } (x, y) = (4; 12).
 \end{aligned}$$

Bài 68 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện của phương trình $x \neq -y$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 7(x^5 + y^5) = 31(x^3 + y^3) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lấy (2) nhân 3 kết hợp với (1) ta được phương trình đồng bậc

$$21(x^5 + y^5) = 31(x^2 + xy + y^2)(x^3 + y^3) \Leftrightarrow 10x^5 + 31x^4y + 31x^3y^2 + 31xy^4 + 10y^4 = 0 \quad (3).$$

Rõ ràng $x = y = 0$ không phải là nghiệm hệ phương trình. Đặt $x = ty$ thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned}
 y^5(10t^5 + 31t^4 + 31t^3 + 31t + 10) &= 0 \Leftrightarrow 10t^5 + 31t^4 + 31t^3 + 31t + 10 = 0 \\
 \Leftrightarrow (t+1)(10t^4 + 21t^3 + 10t^2 + 21t + 10) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 = 0 \\ 10t^4 + 21t^3 + 10t^2 + 21t + 10 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hay $x = -y \Leftrightarrow x + y = 0$ (loại).

Với $10t^4 + 21t^3 + 10t^2 + 21t + 10 = 0 \quad (3)$. Vì $t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (3) chia

hai vế phương trình cho t^2 ta được: $10\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 21\left(t + \frac{1}{t}\right) + 10 = 0,$

Đặt $u = t + \frac{1}{t} \Rightarrow |u| \geq 2; u^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 - 2$. Khi đó (3) trở thành

$$10u^2 + 21u - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{5} \text{ loại} \\ u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } u = -\frac{5}{2} \text{ ta có } t + \frac{1}{t} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = -2$ ta có $x = -2y$ thế vào (1) ta có $3y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ tương ứng $x = \mp 2$.

Với $\frac{1}{2}$

Bài 69 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3y - y^4 = 7 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} y(x^3 - y^3) = 7 & (1) \\ y(x + y)^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Từ hệ suy ra $x.y \neq 0$; $x \neq \pm y$, $y > 0$.

Lấy phương trình (1) lũy thừa ba, phương trình (2) lũy thừa bốn. Lấy hai phương trình thu được

chia cho nhau ta thu được phương trình đồng bậc:
$$\frac{y^3(x^3 - y^3)^3}{y^4(x + y)^8} = \frac{7^3}{9^4}.$$

Đặt $x = ty$ ta được phương trình:
$$\frac{(t^3 - 1)^3}{(t + 1)^8} = \frac{7^3}{9^4} \quad (3).$$
 Từ phương trình này suy ra $t > 1$.

Xét $f(t) = \frac{(t^3 - 1)^3}{(t + 1)^8}$; $\forall t > 1$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{9t^2(t^3 - 1)^2(t + 1)^8 - 8(t + 1)^7(t^3 - 1)^3}{(t + 1)^8} = \frac{(t^3 - 1)^2(t + 1)^7(9t^3 + 9t^2 - 8t^3 + 8)}{(t + 1)^8} \\ &= \frac{(t^3 - 1)^2(t + 1)^7(t^3 + 9t^2 + 8)}{(t + 1)^8} > 0 \quad \forall t > 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(t)$ đồng biến với mọi $t > 1$. Nhận thấy $t = 2$ là nghiệm của (3). Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất.

Với $t = 2$ ta có $x = 2y$ thế vào (1) ta được $y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (vì $y > 0$) suy ra $x = 2$.

Vậy hệ có nghiệm là $(2; 1)$.

Bài 70 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}$.

Trừ vế hai pt ta được
$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} - \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} + \frac{2-\frac{1}{y}-\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{y-x}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} = 0$$

❖ **TH 1.** $y-x=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $t > 0$ ta được

$$\sqrt{2-t^2} = 2-t \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t \geq 0 \\ 2-t^2 = 4-4t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t^2-2t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=1 \text{ và } y=1$$

❖ **TH 2.** $\frac{1}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{1}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} = 0$. TH này vô nghiệm do ĐK.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1).

Bài 71 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2 = \frac{8}{y} \\ 3x^2 + 3y^2 + 5 = 8\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Điều kiện: $x.y \neq 0$

Quy đồng rồi thế (1) vào (2), ta được:

$$3x^3y + 3xy^3 + 5xy = 2x(x^2y + 2y^2 + 2y) + y(x^2y + 2y^2 + 2y) \\ \Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2y \text{ thay vào (1), ta được:}$$

$$4y^3 + 2y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{KL: } S = \{(2;1)\}.$$

Bài 72 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x-y)^2} \end{cases}$$

Giải

$$VP(1) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow VT(1) = y^6 + y^3 + 2x^2 \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \leq 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned}
8xy^3 + 2y^3 + 2 &\geq 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 + 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2} \\
\Leftrightarrow 8xy^3 + 2 &\geq 2y^6 + 8x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2} \\
\Leftrightarrow 4xy^3 + 1 &\geq y^6 + 4x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \\
\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} &\geq y^6 - 4xy^3 + 4x^2 = (y^3 - 2x)^2 \quad (4)
\end{aligned}$$

$VT(4) \leq 0, VP(4) \geq 0$. Do đó:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Thử lại chỉ có: $(x; y) = (-\frac{1}{2}; -1)$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-\frac{1}{2}; -1)$.

Bài 73 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2} + x} + y^2 = 0 & (1) \\ \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2 + 1} + y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ PT (1) ta có: $x + y(\sqrt{x^2 + 1} - x) + y^2 = 0$ do $y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + y + \sqrt{x^2 + 1} - x = 0 \quad (3)$$

Từ (2) & (3) ta có: $\left(\frac{x}{y} + y\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + y = -1 \\ \frac{x}{y} + y = 3 \end{cases}$

Thay vào (3) giải ra ta có nghiệm $(0; -1)$

Bài 74 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y + 1} = 8x^3 - 2y - 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (2x+1) - 2(y+1) + \sqrt{(2x+1)(y+1)} = 0$$

$$\text{ĐK: } (2x+1)(y+1) \geq 0$$

$$\text{Mà } x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có PT (1)} &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1})(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{y+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào (2): } \sqrt[3]{6x+1} &= 8x^3 - 4x - 1 \\ &\Leftrightarrow (6x+1) + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \quad (3) \end{aligned}$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Nhận xét: $x > 1$ không là nghiệm của phương trình

$$\text{Xét } 0 < x \leq 1: \text{ Đặt } x = \cos \alpha \text{ với } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

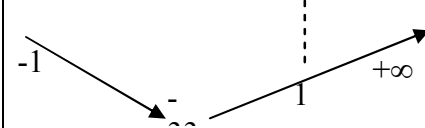
$$\text{Do } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm: } \left(\cos \frac{\pi}{9}; 2 \cos \frac{\pi}{9} \right)$$

Bài 75 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)^4 + 3 = 4(x+y) \\ \frac{x^4 - y^4}{64} + \frac{9(x^2 - y^2)}{32} + \frac{7(x-y)}{8} + 3 \ln \left(\frac{x-3}{y-3} \right) = 0 \end{cases}$$

Giải

Theo BĐT Cauchy ta có $\left(\sqrt{\left(\frac{x-3}{y-3} \right)} \right) \left| \frac{x-3}{y-3} \right| \left(\frac{x-3}{y-3} \right)$

u	-1	0	1	2
g'(u)	+	0	-	+
g(u)				

Căn cứ vào BBT phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc $(0; 2)$

Đặt $u = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó (3) trở thành: $\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}; \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}\right); \left(-\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}; -\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}\right)$

Bài 77 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + y \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 2 \\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + x + y \geq 4$$

Theo BĐT Cauchy ta có: $2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} \geq 2\sqrt{2^{x^2+y^2+x+y}} \geq 2\sqrt{2^4} = 8$

PT $\Leftrightarrow$ dấu “=” xảy ra. Từ đó ta có $x = y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

Bài 78 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 8y^3 = 2xy(1 - 2y) \\ \sqrt{x^3 + 4x} = 1 + \frac{(2y + 1)^2}{3} \end{cases}$$

Giải

ĐK: từ PT (2), suy ra $x > 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow x(x - 2y) = 4y^2(2y - x) \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ (vì $x + 4y^2 > 0$)

Thay vào phương trình (2) có $3\sqrt{x^3 + 4x} = x^2 + 2x + 4$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4}{4} &\geq x \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{x^2 + 4}{4} + \frac{3}{4}(x^2 + 4) + 2x \geq x + \frac{3}{4}(x^2 + 4x) + 2x = \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 + 4}{2} + 2x\right) \geq \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x^3 + 4x} = 3\sqrt{x^3 + 4x} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2$. Hệ phương trình có nghiệm $(2, 1)$

(Chú ý :Cách khác : Bình phương 2 vế của pt (*) $\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-x+4)=0$)

Bài 79 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x+2) \\ x + y + 3 = 3\sqrt{2y-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = y^2 + 2 \end{cases}$$

Với $x = -4$ thay vào pt (2) ta được $y = 10 + 3\sqrt{10}$

Với $x = y^2 + 2$ thế vào pt (2) ta được $y^2 + y + 5 = 3\sqrt{2y-1}$ (*)

Ta có $y^2 + y + 5 = 2y - 1 + (y^2 - y + 1) + 5 > 2y - 1 + 5 \geq 2\sqrt{5(2y-1)} \geq 3\sqrt{2y-1}$
Do đó pt (*) vô nghiệm.

KL: Nghiệm của hệ $x = -4, y = 10 + 3\sqrt{10}$.

Bài 80 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

Giải

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y)(1) \\ x^2 - 3y^2 = 6(2) \end{cases}$

$$\Rightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3y \\ x = -4y \end{cases}$$

Thay cả 3 trường hợp x vào (2) $\Rightarrow$ Hệ có các nghiệm là:

$$(3;1), (-3; -1), (-4\sqrt{\frac{6}{13}}; \sqrt{\frac{6}{13}}), (4\sqrt{\frac{6}{13}}; -\sqrt{\frac{6}{13}})$$

Bài 81 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8(x+y) - 3xy = 2y^2 + x^2 \\ 4\sqrt{2-x} + \sqrt{3-y} = 2x^2 - y^2 + 5 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$, phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=8 \end{cases}$.

Với $x+2y=8$

Ta có: $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x+2y \leq 8$

Khi đó: $x+2y=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ không thỏa hệ.

Với $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ thay vào phương trình (2)

Ta có PT (2) $\Leftrightarrow 4\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} = x^2 + 5$

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 2$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 4(\sqrt{2-x}-1) + (\sqrt{3+x}-2) = x^2 - 1 \Leftrightarrow 4\frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{3+x}+2} = (x-1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ \frac{4}{\sqrt{2-x}+1} - \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} + x+1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*), đặt $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}+1} - \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} + x+1$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3+x}(\sqrt{3+x}+2)^2} + 1 > 0; \forall x \in (-3; 2)$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-3; 2]$.

Ta có: $f(-2) = 0$, suy ra (*) có nghiệm duy nhất $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Kết hợp điều kiện, hệ có hai nghiệm $(1; -1), (-2; 2)$.

Bài 82 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3(y^2 + y)(1 + \sqrt{x-2}) = x + 2\sqrt{x-2} + 1 \\ 2y^2 + 2y + \sqrt{x-2} = 2 \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x \geq 2$. Ta có

$$\begin{cases} 3(y^2 + y)(1 + \sqrt{x-2}) = x + 2\sqrt{x-2} + 1 \\ 2y^2 + 2y + \sqrt{x-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y^2 + y)(1 + \sqrt{x-2}) = (x-2 + 2\sqrt{x-2} + 1) + 2 \\ 2(y^2 + y) + 1 + \sqrt{x-2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = y^2 + y \\ b = 1 + \sqrt{x-2} \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} 3ab = b^2 + 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ 10a^2 - 21a + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = \frac{11}{10}, b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Với $a=b=1$ suy ra hệ có hai nghiệm là:
$$\begin{cases} x=2, y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=2, y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
 Vì $b = 1 + \sqrt{x-2} \geq 1 \Rightarrow b = \frac{4}{5}$ không

Bài 83 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{(2x+1)(y+1)} = 1 \\ \sqrt[3]{3y+2} = 8x^3 - 2y - 2 \end{cases}, \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Vậy hệ có nghiệm : $(x;y)=(1;1), (-1;-1), \frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2} = y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 4(9y+1)y^2 = (y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y=\frac{1}{3} \rightarrow x=0 \end{cases}$$

Bài 86 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y + 2y + x = 4xy \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} = 3 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0$. Chia hai vế phương trình (1) cho xy , thêm 1 vào hai vế của phương trình

(2) và nhóm chuyển về dạng tích $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$

Đặt : $u = x + \frac{1}{x}; v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 4.$

Đến đây bài toán trở thành đơn giản.

Bài 87 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}.$$

Giải

Cộng hai vế phương trình của hệ vế với vế ta có :

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2. \text{ Ta có : } x = y = 0 \text{ là một nghiệm của hệ.}$$

Ta có : $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow VT \leq xy + xy = 2xy$. Khi đó : $VP = x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Cho nên dấu bằng chỉ xảy ra khi : $x = y = 1$. Vậy hệ có hai nghiệm : $(x; y) = (0; 0); (1; 1)$.

Bài 88 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}.$$

Giải

Dễ thấy : $x = y = 0$ hoặc $x = y = -1$ là nghiệm của hệ

Xét : $x > 0$

Ta có: $1 + y^7 = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 > 1 + x^7 \Rightarrow y > x$

Ta có: $1 + x^7 = (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 > 1 + y^7 \Rightarrow x > y$

Vậy hệ vô nghiệm. Tương tự khi $y > 0$ hệ cũng vô nghiệm

Xét : $x < -1 \Rightarrow 1 + x^7 < 0 \Rightarrow y < -1$

Ta có : $1 + (x + x^2) + (x^3 + x^4) + (x^5 + x^6) + x^7 > 1 + x^7 \Rightarrow y > x$. Tương tự khi $y < -1$ ta có $x > y$

Hệ cũng vô nghiệm

Xét trường hợp $-1 < x < 0$. Hệ cũng vô nghiệm.

Kết luận : Hệ có nghiệm : $(x; y) = (0; 0); (-1; -1)$.

Bài 89 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \frac{1}{x+y}) = 2 & (1) \\ \sqrt{7y}(1 - \frac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

ĐK $x \geq 0, y \geq 0$. Dễ thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn hệ. Với $x > 0, y > 0$ ta có :

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \text{ (nhân vế với vế)}$$

$$\Rightarrow 21xy = (7y - 24x)(x + y) \Rightarrow 24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0 \Rightarrow y = 6x \text{ (vì } x, y \text{ dương)}.$$

$$\text{Thay vào phương trình (1) ta được } \frac{1}{7x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 7 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} \right).$$

Từ đó dễ dàng suy ra x và y .

Bài 90 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Giải

Với hệ này, cả hai ẩn và ở hai phương trình đều khó có thể rút ẩn này theo ẩn kia. Tuy nhiên, nếu rút y^2 từ (2) và thế vào (1) thì ta được một phương trình mà ẩn y chỉ có bậc 1:

$$x^3 + 3x(-x^2 + 8xy + 8y - 17x) = -49 \Leftrightarrow 24xy(x + 1) = 2x^3 + 2x^2 + 49x^2 - 49 \quad (3)$$

Nếu $x=0$ thì (1) vô lí.

Nếu $x=-1$ thì hệ trở thành $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

Nếu $x \neq -1$ & $x \neq 0$ thì từ (3) suy ra $y = \frac{2x^2 + 49x - 49}{24x}$. Thế trở lại phương trình (2) ta được

$$x^2 - 8x \cdot \frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} + \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \right)^2 = \frac{2x^2 + 49x - 49}{3x} - 17x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \right)^2 = \frac{-49}{3x} \Leftrightarrow 192x^4 + (2x^2 + 49x - 49)^2 = -49 \cdot 192x$$

$$\Leftrightarrow 196x^4 + 196x^3 + 2205x^2 + 4606x + 2401 = 0 \Leftrightarrow 196x^3 + 2205x + 2401 = 0$$

$$\Leftrightarrow 196x^3 + 196 + 2205x + 2205 = 0 \Leftrightarrow 196x^2 - 196x + 2401 = 0$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm, chứng tỏ hệ chỉ có hai nghiệm $(-1; 4)$ và $(-1; -4)$.

Bài 91 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x \geq -\frac{5}{4}$. Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x = 0$, thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy y khác 0.

Đặt $x = ky$ ta được (1) trở thành :

$k^5 y^5 + ky^5 = y^{10} + y^6 \Leftrightarrow k^5 + k = y^5 + y$ (3). Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$f'(t) = 5t^4 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, vậy

(3) $\Leftrightarrow f(k) = f(y) \Leftrightarrow k = y \Rightarrow x = y^2$. Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 5x+13 + 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 23-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23-5x \geq 0 \\ 16x^2+148x+160 = 25x^2-230x+529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 23 \\ 9x^2-378x+369 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 41 \end{cases}$$

Suy ra $x = 1$ và do đó $y = \pm 1$.

Bài 92 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt[4]{y^2-2y+2} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{y+3} = 3 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2-2x+2 \geq 0 \\ y^2-2y+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} x^2-2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1 \\ y^2-2y+2 = (y-1)^2+1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2} \geq 1 \\ \sqrt[4]{y^2-2y+2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt[4]{y^2-2y+2} \geq 2$$

Vậy (1) có nghiệm $x = y = 1$ thỏa (2).

Bài 93 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2-2xy+y^2+1} + \sqrt{y} \end{cases}$$

Giải

$$\text{ĐK: } x-y \geq 0; y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y \geq 0$$

$$\text{Từ (2): } \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} - y^2 = -y^2 + 2xy - x^2 + \sqrt{(x-y)^2+1} + \sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y} - y^2 = +\sqrt{(x-y)^2+1} - \sqrt{x-y} - (x-y)^2$$

Xét hàm số :

$$f(t) = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{t} - t^2 \quad (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = t \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2 \right) - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$$

$$(\text{Vì: } \sqrt{t^2+1} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2 < 0 \text{ với mọi } t > 0)$$

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y = x - y$ hay $x = 2y$.

Thay vào (1) : $(2y)^2 y - 2(2y)^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 10y^2 + 5y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 2)(4y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ vì : $4y^2 - 2y + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm : $(x; y) = (4; 2)$.

Bài 94 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{\frac{8y^2+1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x})(1) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x, y \geq 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4} + 3\sqrt{x} = 2.2^{(2\sqrt{y})^4} + 3(2\sqrt{y})$

Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + 3t (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 3 > 0$. Chứng tỏ $f(t)$ luôn đồng biến.

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y$ (*)

Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4} + \frac{3}{2}(\sqrt{5y}) = \frac{7}{2}$. Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + \frac{3}{2}t \Rightarrow f'(t) = 4t^3.2^4 + \frac{3}{2} > 0$.

Nhận xét : $f(1) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Suy ra $t = 1$ là nghiệm duy nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{5y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

Bài 95 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 & (1) \\ 27x^6 = x^3 - 8y + 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y)$

Hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) $\Leftrightarrow x = -2y$

Thế vào PT (2) ta có:

$$27x^6 = x^3 + 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 1) = x^3 + 4x + 3 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3} \quad (3)$$

Lại xét : $g(t) = t^3 + t$, đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên:

$$\begin{aligned}
 (3) &\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+4x+2} \\
 &\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \\
 &\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}
 \end{aligned}$$

Bài 96 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{x+4} \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $-4 \leq x \leq 1; y \in \mathbb{R}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$, ta có $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2=1-x \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=4+\sqrt{x+4}$ (3). Xét hàm số

$g(x)=\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{x+4}$, liên tục trên $[-4;1]$, ta có

$g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{3-2x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}<0 \forall x \in (-4;1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[-4;1]$. Lại có

$g(-3)=4$ nên $x=-3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Với $x=-3$ suy ra $y=2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x=-3 \\ y=2. \end{cases}$$

Bài 97 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1(1) \\ xy+x+1=x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Giải

Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình (2) nên ta có thể suy ra $y+1=\frac{x^2-1}{x}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được

$$x^2 \cdot \frac{x^2-1}{x} \left(x + \frac{x^2-1}{x}\right) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x^2-1) = (x-1)(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-4x)=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Loại nghiệm $x = 0$, vậy phương trình có hai nghiệm: $(1; -1), \left(-2; -\frac{5}{2}\right)$.

Bài 98 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2(y-x^2) + y^3 - (x^2)^3 = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x^2)(2x^2+y^2+yx^2+x^4) = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = x^2$, thay vào (2) :

$$\begin{aligned} (x+2)\sqrt{x^2+1} &= (x^2+1+2x) \Leftrightarrow t^2 - (x+2)t + 2x = 0 \Rightarrow t = 2; t = x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + yx^2 + (2x^2 + x^4) = 0$

$$\Rightarrow \Delta_y = x^4 - 4(2x^2 + x^4) = -3x^4 - 8x^2 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta_y < 0$$

$\Rightarrow f(x, y) = 2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 > 0 \forall x, y$. Phương trình vô nghiệm.

Do đó hệ có hai nghiệm: $(x; y) = (-\sqrt{3}; 3), (\sqrt{3}; 3)$

Chú ý: Ta còn có cách giải khác

Phương trình (1) khi $x = 0$ và $y = 0$ không là nghiệm do không thỏa mãn (2).

$$\text{Chia 2 vế phương trình (1) cho } x^3 \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3$$

Xét hàm số: $f(t) = 2t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 2 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến. Để

phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi: $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$. Đến đây ta giải như ở phần trên.

Bài 99 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2}) = \left(-y + \sqrt{1+(-y)^2}\right) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} \text{ (nhân liên hợp)}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Chứng tỏ hàm số đồng biến. Để $f(x) = f(-y)$ chỉ xảy ra $x = -y$ (*)

Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1} - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \end{cases}$$

$$\text{❖ Trường hợp : } \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2-6x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1; y = -1$$

$$\text{❖ Trường hợp : } \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2+6x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2-6x-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}; y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}. \text{ Vậy hệ có hai nghiệm : } (x; y) = (1; -1), \left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$$

Bài 100 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1} = y + 4y^3 (*)$

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x = t^2 + 1 \Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1} = [4(t^2+1)-3]t = (4t^2+1)t = 4t^3 + t$

Do đó (*) : $4t^3 + t = 4y^3 + y$

Xét hàm số : $f(u) = 4u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 12u^2 + 1 > 0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến. Do đó phương trình có nghiệm khi : $f(t) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = y \Leftrightarrow 2x = y^2 + 1 (**)$

Thay vào (2) : $(y^2+1)^2 - 4(y^2+1) + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow y(y^3 + 2y^2 - y - 2) = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+2)(y+1) = 0$

Vậy : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right), \begin{cases} y = 0 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (x; y) = (1; 1)$

$\begin{cases} y = -1 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (x; y) = (1; 0), \begin{cases} y = -2 \\ 2x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow (x; y) = \left(\frac{5}{2}; -2\right).$

Hết

Đồng Xoài, ngày 05 tháng 8 năm 2014
Chúc quý thầy cô và các em học sinh có một tài liệu bổ ích.

