



MATH

MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

CHUYÊN ĐỀ:
ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM VÀ
KHẢO SÁT ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Quảng Nam, tháng 11 năm 2016

Mở đầu

Hàm số là một trong những khái niệm cơ bản của toán học, đóng vai trò quan trọng trong chương trình toán phổ thông và là nền tảng của nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học nói riêng và khoa học tự nhiên nói chung. Để bạn đọc có được cái nhìn tổng quát hơn về hàm số, trong bài viết tháng 11/2016 của hội toán bắc trung nam tôi xin trình bày một số vấn đề cơ bản về hàm số.

Bài viết được chia làm ba phần chính:

Phần 1: Giới thiệu một số khái niệm cơ bản như tính đơn điệu, cực trị, tiệm cận...

Phần 2: Trình bày sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số quen thuộc.

Phần 3: Khái quát một số dạng toán quen thuộc về hàm số và các ứng dụng.

Lưu ý bạn đọc: Trước khi đọc hiểu bài viết này, bạn đọc cần nắm vững định nghĩa, các tính chất cơ bản của đạo hàm cùng với bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp được trình bày chi tiết trong chương trình toán THPT hiện hành.

Với hệ thống bài tập tự luận và trắc nghiệm phong phú, hi vọng bài viết này sẽ giúp ích cho bạn đọc, đặc biệt là các bạn thí sinh trong kỳ thi THPT quốc gia sắp tới khi tìm hiểu về hàm số. Tuy vậy do nhiều nguyên nhân khác nhau, bài viết không tránh khỏi những khiếm khuyết, tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý độc giả đề chuyên đề ngày một hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp, quý độc giả vui lòng gửi về địa chỉ email: thongqna@gmail.com hoặc trang cá nhân facebook: <https://www.facebook.com/thong.tranvan.5203>.

Quảng Nam, ngày 15 tháng 11 năm 2016

TRẦN THÔNG

PHẦN 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Tính đơn điệu của hàm số.

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D , với D là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

b. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$

2. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

c. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

1. Định lý 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

2. Định lý 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số đồng biến trên D

2. Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số nghịch biến trên D

3. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in D$ thì hàm số không đổi trên D

2. Cực trị

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$

1. x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a, b) chứa điểm x_0 sao cho $(a, b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

2. x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a, b) chứa điểm x_0 sao cho $(a, b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

3. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị của hàm số

b. Điều kiện cần để hàm số có cực trị: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có cực trị tại x_0 . Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

c. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:

1. Định lý 1. (Dấu hiệu 1 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b) . Khi đó:

- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0
- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0

2. Định lý 2. (Dấu hiệu 2 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 . Khi đó:

- + Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0
- + Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

3. Tiệm cận

a. Đường tiệm cận đứng.

Đường thẳng $(d): x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

b. Đường tiệm cận ngang.

Đường thẳng $(d): y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

4. Sự tương giao

a. Giao điểm của hai đồ thị. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2)

+ Hai đồ thị (C_1) và (C_2) cắt nhau tại điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow (x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

+Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+Phương trình (1) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2)

+Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2)

b. Sự tiếp xúc của hai đường cong. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) và có đạo hàm tại điểm x_0 .

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại một điểm chung $M(x_0, y_0)$ nếu tại điểm đó chúng có chung cùng một tiếp tuyến. Khi đó điểm M được gọi là tiếp điểm.

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.

PHẦN 2: SƠ ĐỒ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên

2.1. Xét sự biến thiên của hàm số

+ Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

+ Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ (lưu ý phải tính nghiệm chính xác không được tìm nghiệm gần đúng)

+ Xét dấu đạo hàm và suy ra chiều biến thiên của hàm số (hàm số đồng biến, nghịch biến trên những khoảng nào?)

2.2. Tìm cực trị

2.3. Tính giới hạn tại vô cùng ($x \rightarrow \pm\infty$)

Chú ý:

* Nếu $a > 0 \Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty$
* Nếu $a < 0 \Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty$

2.4.

bảng biến thiên

Lập

Thể hiện đầy đủ, chính xác các giá trị trên bảng biến thiên

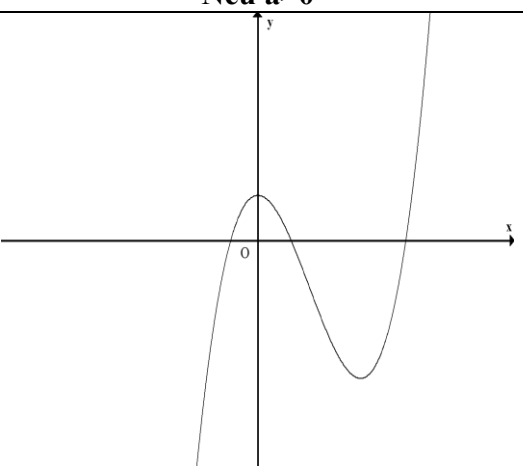
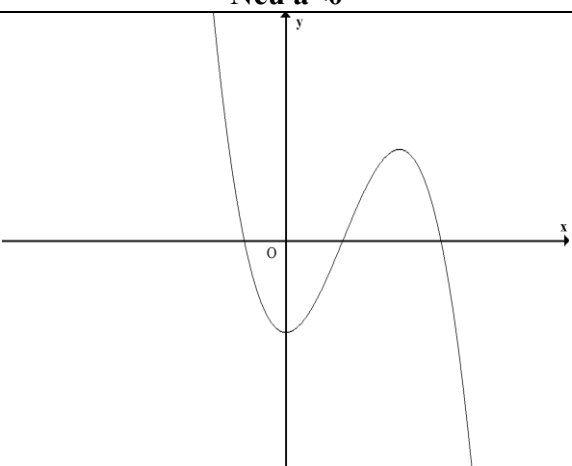
3. Đồ thị

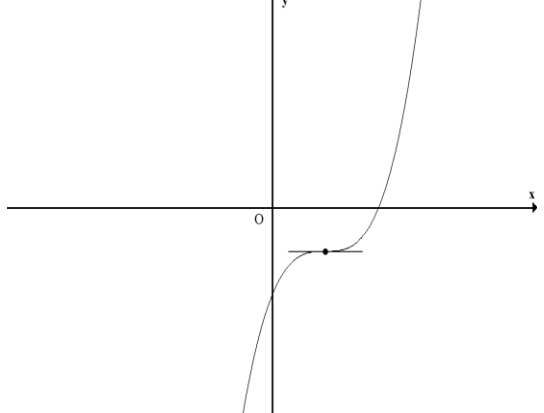
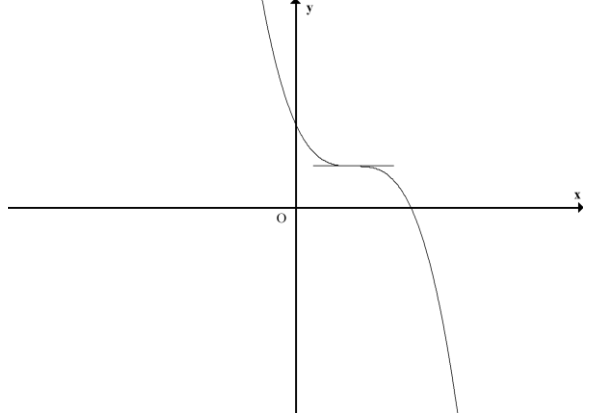
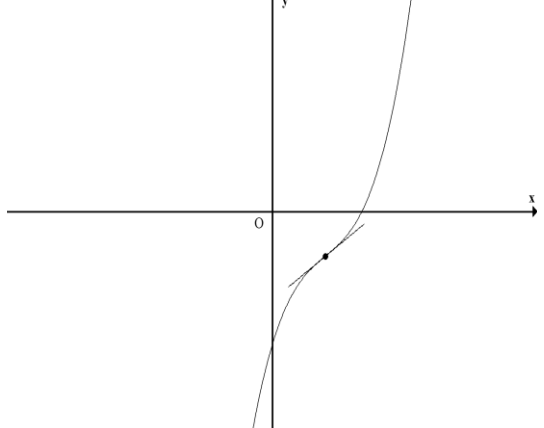
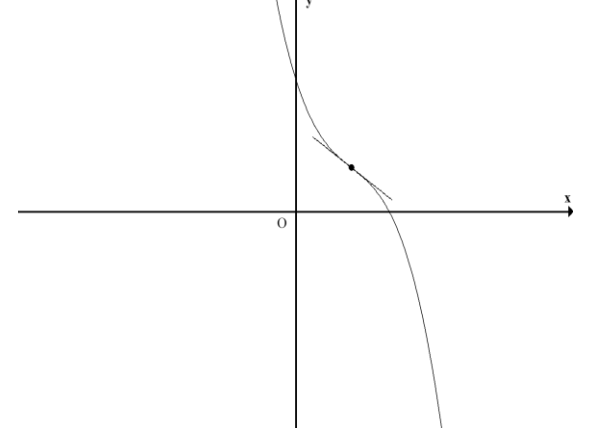
- Giao với trục Oy: $x = 0 \Rightarrow y = d \Rightarrow (0, d)$

- Giao với trục Ox: $y = 0 \Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow (x = ?)$ (trong trường hợp nghiệm lẻ có thể bỏ qua bước này)

- Các điểm cực trị

- Một số hình dạng đồ thị hàm bậc 3

	Nếu $a > 0$	Nếu $a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

* Tập xác định: $D = R$

* Sự biến thiên:

Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x$

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Dấu của y'

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$

Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

- Cực trị:

- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

* Đồ thị:

- Giao điểm với Oy:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -4$

- Giao với Ox:

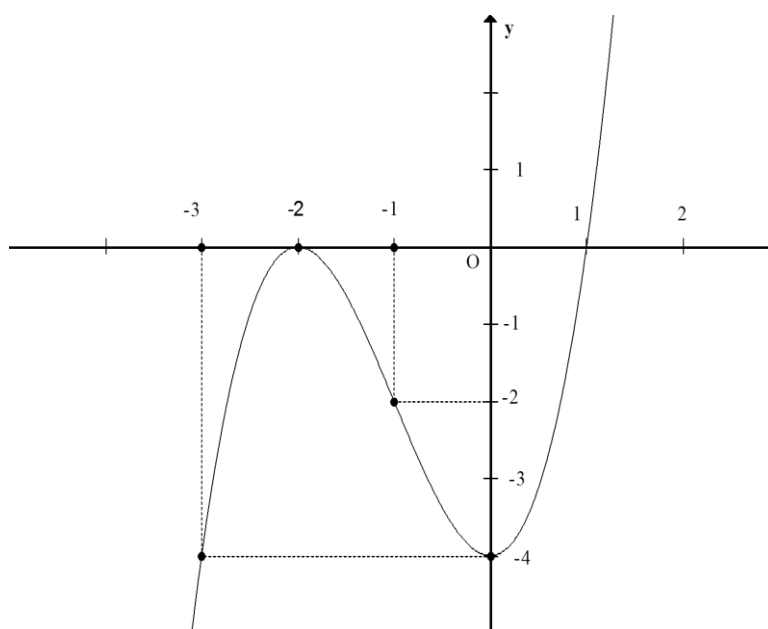
Cho $y = 0$ giải phương trình:

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng giá trị:

x	-3	1
y	-4	0



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

* Tập xác định: $D = R$

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x + 3$

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -1$$

$y' > 0$ với mọi giá trị của x và $y'(-1) = 0 \Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên D

- Hàm số không có cực trị.

- Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$

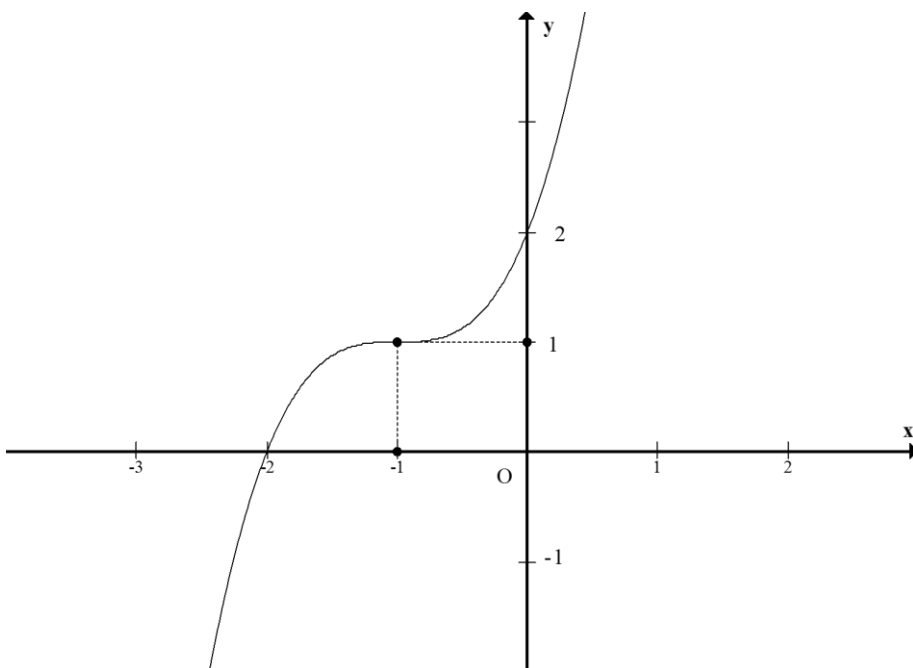
* Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$

- Bảng giá trị

x	-2	-3
y	0	-7

-Vẽ đồ thị



Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

* Tập xác định: $D = R$

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x - 4$

Giải phương trình : $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

$\Rightarrow y' < 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên D

- Hàm số không có cực trị

-Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = -\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	-	
y	$+\infty$	$-\infty$

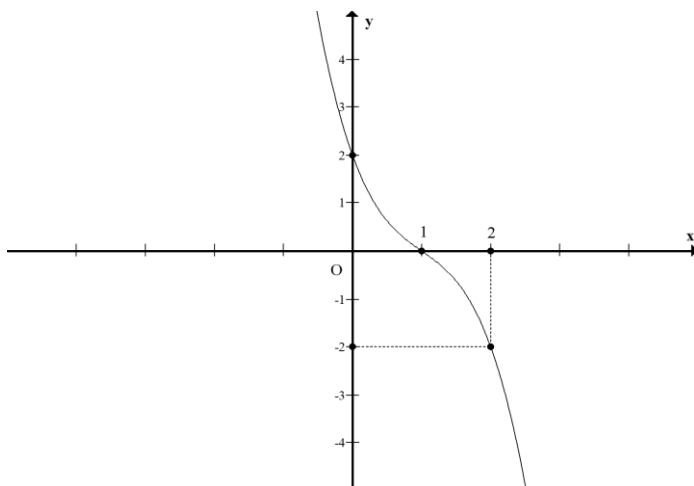
* Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$

- Bảng giá trị:

x	2
y	-2

- Vẽ đồ thị:



Bài tập luyện thi

Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. $y = x^3 - 3x + 2$
2. $y = x^3 - 3x^2 + 1$
3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
4. $y = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$
5. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$
6. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

II. Hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

2. Sự biến thiên

2.1. Xét sự biến thiên của hàm số

+ Tính đạo hàm $y' = 4a.x^3 + 2b.x$

+ Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \dots\dots$ (lưu ý phải

tính nghiệm chính xác không được tìm nghiệm gần đúng)

+ Xét dấu đạo hàm và suy ra chiều biến thiên của hàm số (hàm số đồng biến, nghịch biến trên những khoảng nào?)

2.2. Tìm cực trị

2.3. Tính giới hạn tại vô cùng ($x \rightarrow \pm\infty$)

Chú ý

* Nếu $a > 0 \Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^4 + bx^2 + c) = +\infty$
* Nếu $a < 0 \Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^4 + bx^2 + c) = -\infty$

2.4. Lập bảng biến thiên

Thể hiện đầy đủ, chính xác các giá trị trên bảng biến thiên

3. Đồ thị

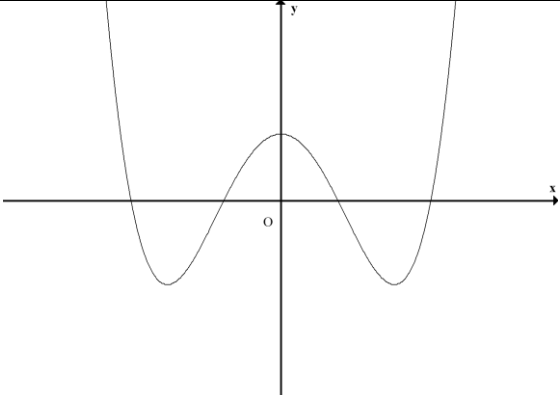
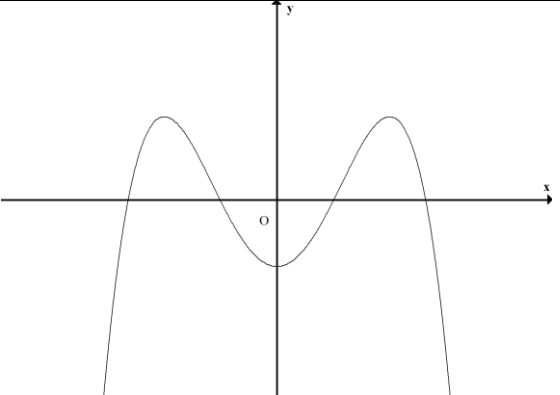
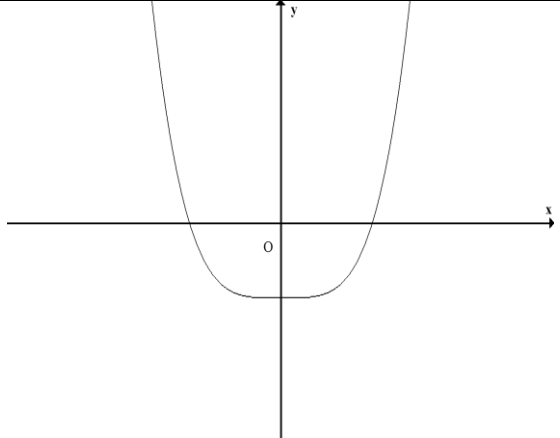
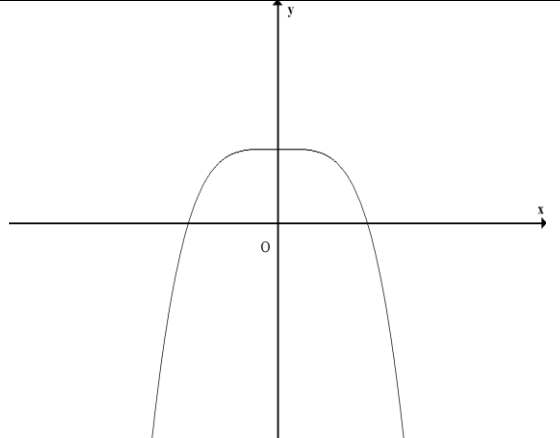
-Giao với trục Oy: $x = 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow (0, c)$

-Giao với trục Ox: $y = 0 \Rightarrow ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow (x = ?)$ (trong trường hợp nghiệm lẻ có thể bỏ qua bước này)

-Các điểm cực trị

-Tìm thêm một số điểm(nếu cần)

- Một số hình dạng đồ thị hàm trùng phương

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 2$

* Tập xác định: $D = R$

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x$ giải phương trình:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Bảng dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-

Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng: $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$

Hàm số đạt cực đại tại: $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại: $x = \pm 1 \Rightarrow y_{CT} = 1$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2 + 2) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 2) = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

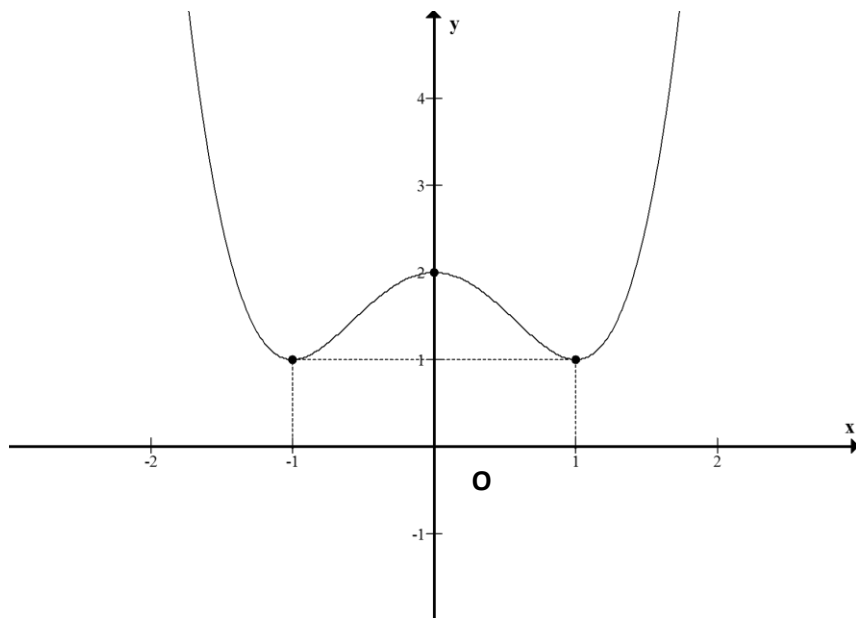
* Đồ thị:

Giao với trục tung:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Bảng giá trị:

x	-2	2
y	10	10



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$

* **Tập xác định:** $D = R$

* **Sự biến thiên:**

- Chiều biến thiên: $y' = -2x^3 - 2x = -2x(x^2 + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng dấu của y' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = \frac{3}{2}$; hàm số không có cực tiểu

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}\right) = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$

* **Đồ thị:**

- Giao với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

- Giao với trục hoành: cho $y = 0$ giải phương trình: $-\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2} = 0$

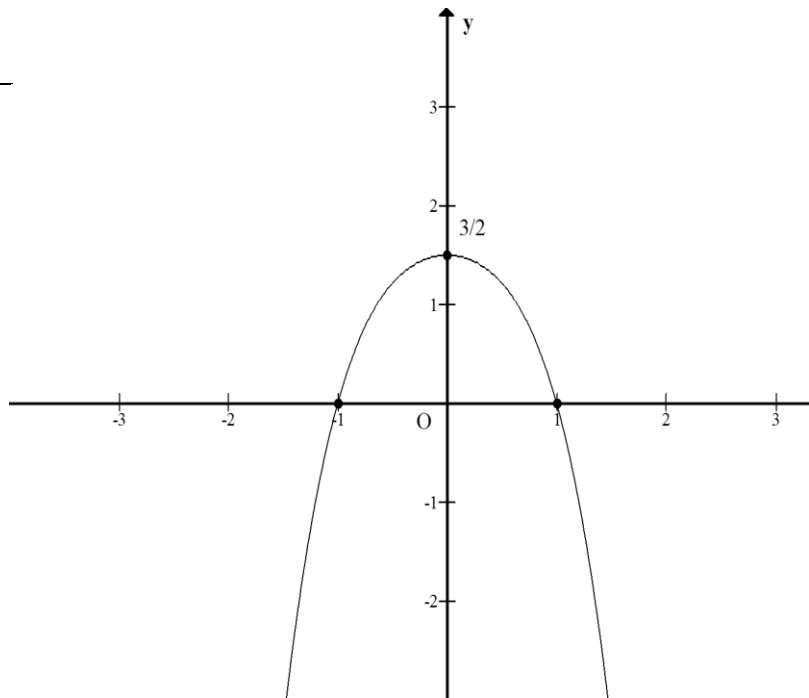
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x - 3 = 0 \quad \text{đặt } t = x^2 \quad (t \geq 0) \text{ Ta có phương trình:}$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

- Bảng giá trị:

x	-2	2
y	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{21}{2}$

- Vẽ đồ thị



Bài tập luyện thi

Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. $y = x^4 - 2x^2$
2. $y = -x^4 + 4x^2 - 1$
3. $y = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$
4. $y = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$
5. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$
6. $y = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{5}{2}$

III. Hàm số nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

2. Sự biến thiên

2.1. Xét sự biến thiên của hàm số

+ Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

+ y' không xác định tại $\frac{-d}{c}$ và luôn dương hoặc luôn âm với mọi $x \neq \frac{-d}{c}$

+ Hàm số đồng biến (nghịch biến) trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{-d}{c}\right)$ và $\left(\frac{-d}{c}; +\infty\right)$.

2.2. *Tìm cực trị*: Hàm số không có cực trị

2.3. *Tìm tiệm cận* (Tính giới hạn tại vô cùng) ($x \rightarrow \pm\infty$)

+Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$ nên là tiệm cận đứng của đồ thị.

+Lại có $\lim_{x \rightarrow \frac{-d}{c}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{-d}{c}^+} \frac{ax + b}{cx + d} = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \frac{-d}{c}^-} y = \lim_{x \rightarrow \frac{-d}{c}^-} \frac{ax + b}{cx + d} = \pm\infty$ nên là tiệm cận ngang của đồ thị

2.4. *Lập bảng biến thiên*: Thể hiện đầy đủ, chính xác các giá trị trên bảng biến thiên

3. *Đồ thị*

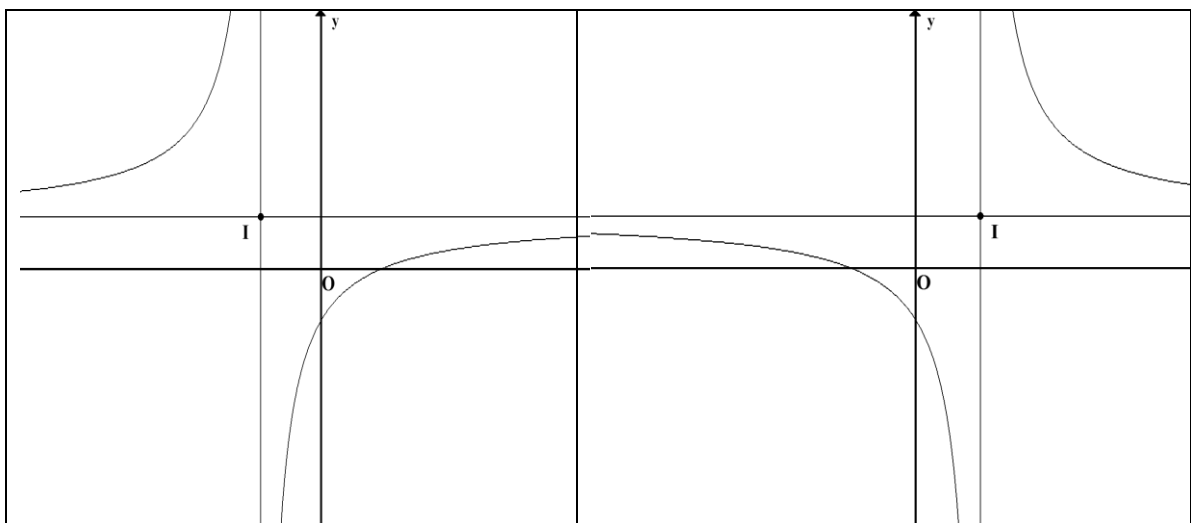
-Giao với trục Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d} \Rightarrow \left(0, \frac{b}{d}\right)$

-Giao với trục Ox: $y = 0 \Rightarrow \frac{ax + b}{cx + d} = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \Rightarrow \left(\frac{-b}{a}, 0\right)$

-Tìm thêm một số điểm(nếu cần)

-Hình dạng đồ thị

$E = ad - bc > 0$	$E = ad - bc < 0$
-------------------	-------------------



Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{-2x - 4}{x + 1}$

* **Tập xác định:** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

* **Sự biến thiên:**

- Chiều biến thiên: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D

- cực trị : Không có

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ -2

* **Đồ thị:**

- Vẽ tiệm cận đứng: $x = -1$ và tiệm cận ngang: $y = -2$

- Giao với trục tung:

Cho $x=0 \Rightarrow y=-4$

- Giao với trục hoành:

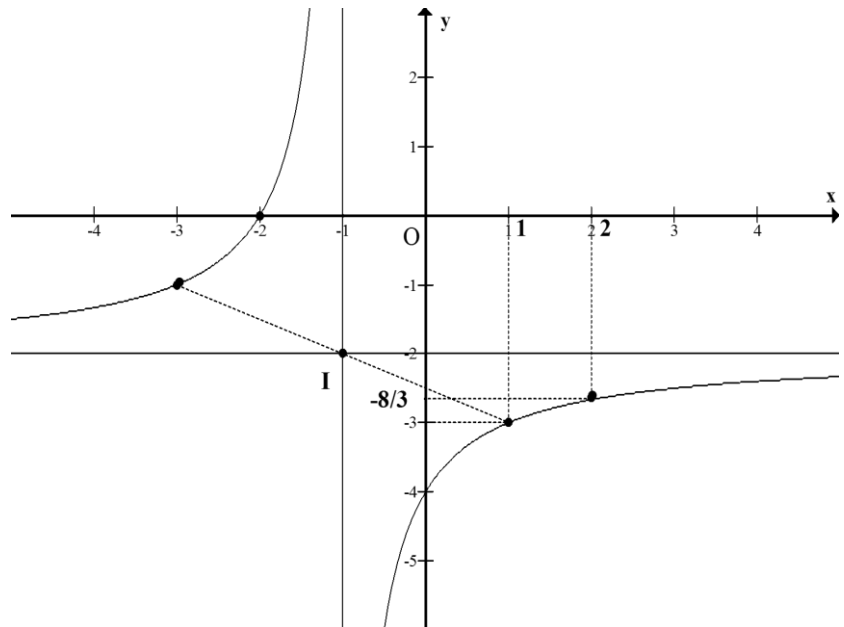
Cho $y = 0$ giải phương trình:

$$\frac{-2x-4}{x+1} = 0 \Rightarrow x = -2$$

- bảng giá trị:

x	1	2
y	-3	-8/3

Vẽ nhánh bên phải đường tiệm cận đứng, nhánh còn lại lấy đối xứng qua tâm $I(-1; -2)$



Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{3-x}{x-2}$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D

- cực trị : Không có

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	-1	$+\infty$	-1

*** Đồ thị:**

- Vẽ tiệm cận đứng $x = 2$; tiệm cận ngang: $y = -1$

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

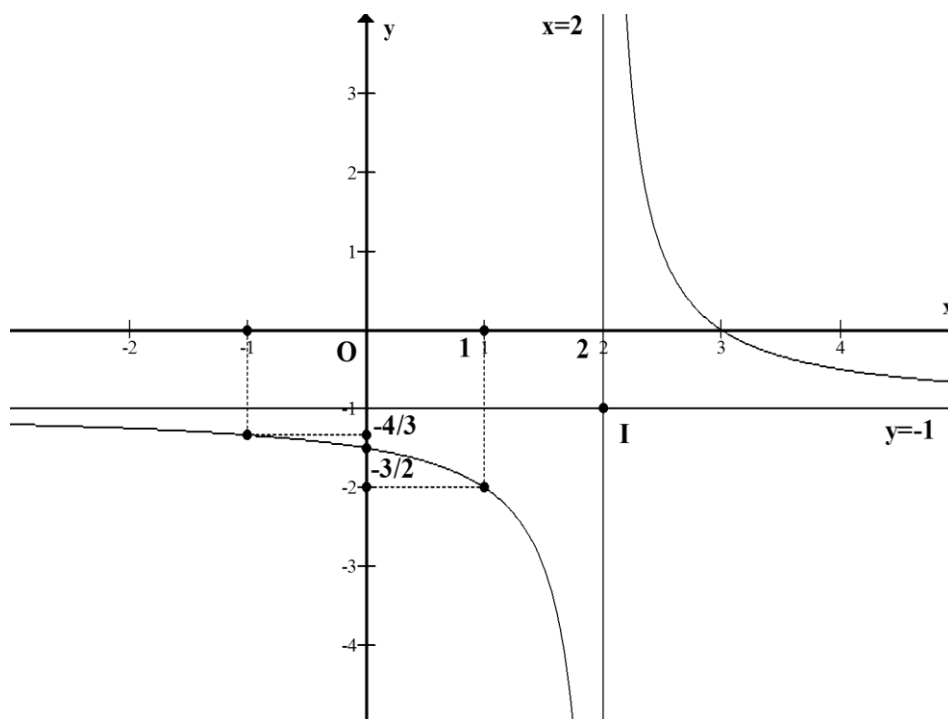
- Vẽ nhánh bên phải đường tiệm cận đứng, nhánh còn lại lấy đối xứng qua tâm $I(-1; -2)$

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: cho $y = 0$
giải phương trình:

$$\frac{3-x}{x-2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

x	-1	1
y	-4/3	-2



Bài tập luyện thi

Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. $y = \frac{2x-1}{x+2}$

2. $y = \frac{2x-1}{x}$

3. $y = \frac{x+1}{x-1}$

$$4. \quad y = \frac{2-2x}{x+2}$$

$$5. \quad y = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$6. \quad y = \frac{-x+2}{x-1}$$

PHẦN 3: MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

Dạng 1: Sự đơn điệu của hàm số.

Bài toán 1: Xét chiều biến thiên của hàm số.

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên và kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$\swarrow$ -1 CT			$\nearrow$ 3 CD $\searrow$ $-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$; hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	$\frac{13}{4}$ CĐ		1 CT		$\frac{13}{4}$ CĐ	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ và $\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; nghịch biến trên $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.

GIẢI

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	1		$-\infty$		1

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị

Bài toán 2: Tìm điều kiện của tham số để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Tính đạo hàm

Bước 2: Hàm số đồng biến (nghịch biến) khi và chỉ khi y' luôn dương (luôn âm). Từ đó tìm ra điều kiện của tham số.

Chú ý: Quy tắc xét dấu tam thức bậc 2:

1. Tam thức $ax^2 + bx + c$ luôn âm khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
2. Tam thức $ax^2 + bx + c$ luôn dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(2m-1) \geq 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + (m-2)x - 2$. Tìm m để hàm số luôn nghịch biến.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3mx^2 - 2(2m-1)x + m - 2$

Trường hợp 1:

$$m = 0 \Rightarrow y' = 2x - 2 \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến khi } 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Suy ra $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán

Trường hợp 2: $m \neq 0$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3m < 0 \\ \Delta' = (2m-1)^2 - 3m(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 2m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 5$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3$

Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

* $m = 1 \Rightarrow y' = 4x + 3 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến khi $4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$

Suy ra $m = 1$ không thỏa yêu cầu bài toán

* $m = -1 \Rightarrow y' = 3 > 0 \Rightarrow m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán

Trường hợp 2: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \Delta = -2m^2 + 2m + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2$$

Vậy: Với $m \leq -1 \vee m > 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để hàm số đồng biến và nghịch biến trên khoảng đoạn.

Phương pháp giải:

Bước 1: Tính đạo hàm

Bước 2: Hàm số đồng biến (nghịch biến) khi và chỉ khi y' luôn dương (luôn âm). Từ đó tìm ra điều kiện của tham số.

Chú ý: So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0

$$\bullet x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \bullet x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \bullet x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0 \text{ (hay } ac < 0)$$

Chú ý:

1. $f(x) \geq m, \forall x \in I \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in I} f(x)$
2. $f(x) > m, \forall x \in I \Leftrightarrow m < \min_{x \in I} f(x)$
3. $f(x) \leq m, \forall x \in I \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in I} f(x)$
4. $f(x) < m, \forall x \in I \Leftrightarrow m > \max_{x \in I} f(x)$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y' = 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ nên không thỏa yêu cầu bài toán

Trường hợp 2: $m \neq 0$

Điều kiện bài toán được thỏa khi $y' \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall x > 2$

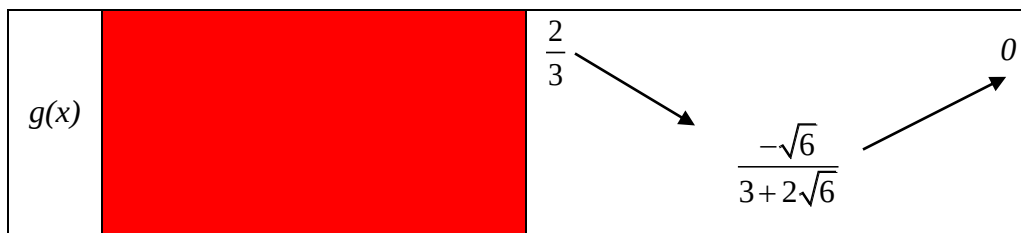
$$\Leftrightarrow m \geq \frac{-2x+6}{x^2-2x+3}, \forall x > 2$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{-2x+6}{x^2-2x+3} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} \\ x = 3 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$3 - \sqrt{6}$	2	$3 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
			-	0	+



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điều kiện bài toán được thỏa khi $m \geq \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (1-3m)x^2 + (2m+1)x + \frac{1}{3}$ nghịch biến trên $[1; 5]$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = mx^2 + 2(1-3m)x + 2m+1$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y' = 2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ nên không thỏa yêu cầu bài toán

Trường hợp 2: $m \neq 0$

Hàm số nghịch biến trên $[1; 5]$ khi $y' = mx^2 + 2(1-3m)x + 2m+1 \leq 0, \forall x \in [1; 5]$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{2x+1}{x^2-6x+2} = g(x), \forall x \in [1; 5]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{[1;5]} g(x)$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{2(x^2+x-5)}{(x^2-6x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ (n)} \\ x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } g(1) = 1; g\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) = a < \frac{11}{3}; g(5) = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[1;5]} g(x) = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Vậy } m \geq \max_{[1;5]} g(x) = \frac{11}{3} \text{ thỏa yêu cầu bài toán.}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ (1), (m là tham số). Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$.

+ Nếu $m \geq 3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m \geq 3$ không thỏa mãn.

+ Nếu $m < 3$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1; x_2]$ với độ dài $l = |x_1 - x_2|$.

Áp dụng định lý vi-ét đảo: $x_1 + x_2 = -2; x_1 x_2 = \frac{m}{3}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 $\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + 3x + 5$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 5 + m^2$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(1, 3)$.

Dạng 2: Bài toán cực trị

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số

Phương pháp giải bài toán:

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tính đạo hàm y' . Giải phương trình $y' = 0$ (tìm điểm dừng). Giả sử có n nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Bước 3. Lập bảng biến thiên và kết luận cực trị của hàm số.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm các cực trị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-1 CT	3 CD	$-\infty$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2, y_{CD} = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\frac{13}{4}$	1	$\frac{13}{4}$			
	$-\infty$	CD	CT	CD	$-\infty$		

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, y_{CD} = \frac{13}{4}$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 1$

Bài toán 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

Phương pháp giải bài toán:

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tính đạo hàm y' .

Bước 3. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm. Từ đó suy ra điều kiện của tham số.

Chú ý: Đối với cực trị hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. ta thường sử dụng định lý Viète và các định lý về dấu của tam thức bậc 2 để tìm ra điều kiện của tham số m .

Chú ý: Một số tính chất đặc biệt của cực trị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) trên R .

Tính đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx$

$$\text{Giải phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \dots \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị phân biệt khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba điểm phân biệt hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0$ (*)

Với điều kiện (*), đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0, c)$, $B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$,

$$C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

$$\text{Khi đó } AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}} \text{ và } BC = \sqrt{\frac{-2b}{a}}.$$

Sau đây là một số tính chất thường gặp của các điểm cực trị này.

1) Điều kiện để ba cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A. suy ra ABC là tam giác vuông khi và chỉ khi $\angle A = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông cân tại A. Khi đó

$$\begin{aligned} BC = AB\sqrt{2} &\Leftrightarrow BC^2 = 2AB^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} &= 2 \cdot \frac{b^2 - 8ab}{16a^2} \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0 \end{aligned}$$

Tính chất 1. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông khi và chỉ khi $ab < 0$ và $b^3 + 8a = 0$.

2) Điều kiện để ba cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều

Ta có ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $AB = AC = BC \Leftrightarrow AC^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$$

Tính chất 2. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi $ab < 0$ và $b^3 + 24a = 0$.

3) Điều kiện để ba cực trị A,B,C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc α cho trước

Trường hợp 1. $\alpha > 90^\circ$

Khi đó ABC là tam giác tù. Vì tam giác ABC cân tại A nên $ABC = \alpha$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \alpha \\ \Leftrightarrow BC^2 &= 2AB^2 - 2AB.AC.\cos \alpha \\ \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} &= 2 \cdot \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} (1 - \cos \alpha) \\ \Leftrightarrow -16a &= (b^3 - 8a)(1 - \cos \alpha) \\ \Leftrightarrow b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\alpha = 90^\circ$ (trường hợp này đã trình bày ở tính chất 1)

Trường hợp 3. $\alpha < 90^\circ$

+)Ta có $B = C = \alpha$ thì $A = 180^\circ - 2\alpha$, suy ra $\cos A = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

Áp dụng định lý côsin cho tam giác ABC có

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow BC^2 &= 2AB^2 - 2AB.AC.\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} &= 2 \cdot \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} (1 + \cos 2\alpha) \\ \Leftrightarrow -16a &= (b^3 - 8a)(1 + \cos 2\alpha) \\ \Leftrightarrow b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

+ Nếu $A = \alpha$ thì tương tự trường hợp 1, ta có $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos 2\alpha = 0$.

Tính chất 3. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A,B,C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc α cho trước khi và chỉ khi $ab < 0$ và

Hoặc $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha = 0$ nếu $\alpha > 90^\circ$

Hoặc $b^3 + 8a = 0$ nếu $\alpha = 90^\circ$

Hoặc $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos 2\alpha = 0$ nếu $\alpha < 90^\circ$.

4) Điều kiện để ba cực trị A,B,C thỏa mãn $BC=OA$ (với O là gốc tọa độ)

$$\text{Ta có } BC = OA \Leftrightarrow BC^2 = OA^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = c^2 \Leftrightarrow 2b + ac^2 = 0.$$

Tính chất 4. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A,B,C thỏa mãn điều kiện $BC=OA$ (với O là gốc tọa độ) khi và chỉ khi $ab < 0$ và $2b + ac^2 = 0$.

5) Điều kiện để ba cực trị A,B,C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính diện tích tam giác đó

Gọi H là giao điểm của BC với trục Oy thì AH là đường cao của tam giác ABC. Khi đó

$$H\left(0, c - \frac{b^2}{4a}\right). \text{ Suy ra } AH = \left|\frac{-b^2}{4a}\right| = \frac{b^2}{4|a|}.$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{2b}{a}} \cdot \frac{b^2}{4|a|} = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}.$$

Tính chất 5. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị A,B,C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có diện tích là S cho trước khi và chỉ khi $ab < 0$ và $S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$.

6) Điều kiện để ba cực trị A,B,C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và H là giao điểm của BC với trục Oy.

$$\text{Khi đó } H\left(0, c - \frac{b^2}{4a}\right). \text{ Suy ra } AH = \left|\frac{-b^2}{4a}\right| = \frac{b^2}{4|a|}.$$

Từ tam giác vuông AHC, ta có :

$$\sin ACH = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB}.$$

Áp dụng định lý Sin vào tam giác ABC được

$$2R = \frac{AB}{\sin ACH} = \frac{AB^2}{AH} = \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} \cdot \frac{4|a|}{b^2} \text{ suy ra } R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}.$$

Tính chất 6. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R khi và chỉ khi $ab < 0$ và $R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$.

Lưu ý: Các tính chất trên không được thừa nhận trong quá trình giải bài tập.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có cực trị

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx + 7$. Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{21} \quad (*)$$

vậy khi $|m| > \sqrt{21}$ hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có cực trị

Ví dụ 2: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$;

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \Rightarrow y = m-3 \\ x = m-1 \Rightarrow y = m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(m+1; m-3), B(m-1; m+1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (m+1; m-3), \overrightarrow{OB} = (m-1; m+1).$$

$$\text{Mà } \Delta OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 2(3m+1)x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = -\frac{3m+1}{2}.$$

$$\text{Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3} \quad (*).$$

Ba điểm cực trị là:

$$A(0; -3); B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right); C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$$

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A; BC = \frac{2}{3} AB \Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}, \text{ thỏa } (*).$$

Ví dụ 4: Với những giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác có diện tích $S = 4$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 - m = 0 \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_g = m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ (*)

Với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = -\sqrt{m}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{m}$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3 . Gọi $A(0; 2m + m^4)$; $B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$; $C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$ là 3 điểm cực trị của (C_m) .

Ta có: $AB^2 = AC^2 = m^4 + m$; $BC^2 = 4m \Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow M(0; m^4 - m^2 + 2m) \Rightarrow AM = |m^2| = m^2$

Vì ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường cao, do đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}.$$

Vậy $m = \sqrt[5]{16}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) . Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$$
 (*)

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \left(2 + \frac{m}{3}\right)$

$$\Rightarrow y_1 = y(x_1) = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_1 + 2 + \frac{m}{3}; y_2 = y(x_2) = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x_2 + 2 + \frac{m}{3}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + 2 + \frac{m}{3}$

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow$ xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3} - 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (không thỏa (*))}$$

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = x - 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_I = x_I - 1 &\Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 + \frac{m}{3}\right) = (x_1 + x_2) - 2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} - 2\right) \cdot 2 + 2\left(2 + \frac{m}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m = 0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị (C) có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}.$$

$$\text{Khoảng cách giữa các điểm cực tiểu: } d = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \min d = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 3: Tìm điều kiện để hàm số đạt cực trị tại x_0

Phương pháp giải bài toán:

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tính đạo hàm y', y'' .

Bước 3. Từ điều kiện cần $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0)$ để tìm tham số.

Bước 4. Thử lại và kết luận

Chú ý: Trong trường hợp bài toán yêu cầu tìm điều kiện để hàm số đạt cực tiểu (cực đại) tại x_0 khi $y'(x_0) = 0; y''(x_0) > 0$ (tương ứng $y'(x_0) = 0; y''(x_0) < 0$). Sau khi tìm được tham số cần kiểm tra lại trước khi kết luận.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + m^2 - m + 1$ $x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$ và $y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' \big|_{x=1} = 0 \\ y'' \big|_{x=1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Thử lại với $m = 2$ ta thấy hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Vậy khi $m = 2$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = x - m^3 - 3x$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x - m^2 - 3$ và $y'' = 6x - 6m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y' \big|_{x=0} = 0 \\ y'' \big|_{x=0} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 = 0 \\ -6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Thử lại với $m = -1$ ta thấy hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Vậy khi $m = -1$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Bài tập tương tự

Bài 1: Tìm m để hàm số $y = x^3 - (m^2 + 2)x + 2m$ có cực trị

Bài 2: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 3mx + 2m$ có 1 cực trị

Bài 3: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5$ có 3 cực trị

Bài 4: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x + 2m + 5$ đạt cực đại tại $x = 2$

Bài 5: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 3(m^2 + 1)x^2 + 2m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m) .

1. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.
2. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác đều.
3. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác vuông cân.
4. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích là 1.
5. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120° .
6. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời hoành độ ba điểm cực trị đó lập thành một cấp số cộng.

Bài 7: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$, với m là tham số thực.

1. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.
2. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.
3. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.
4. Tìm các giá trị của m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.
5. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.
6. Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O .
7. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 x_2$.

Bài 8: Tìm cực trị của hàm số: $y = x - \sin 2x + 2$.

Bài 9: Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số. Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Bài 10: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Bài 11: Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 1$ (1) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

Bài 12: Tìm tham số để hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2 - 1$ $x + m$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Bài 13: Tìm cực trị của các hàm số: $y = |x| \cdot x + 2$

Bài 14: Cho các hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ (C_m) Tìm các giá trị của m để (C_m) có hai điểm cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường thẳng (d): $y = -x + 2$ bằng $\sqrt{2}$.

Bài 15: Tìm cực trị của các hàm số: $y = x - 3\sqrt{|x|}$

Bài 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục Ox chia tam giác đó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 17: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ (C). Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x + my + 3 = 0$ một góc α biết $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Bài 18: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 5$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị, đồng thời 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành Ox.

Bài 19: Cho hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m^2 + 7m - 1$. Tìm m để hàm số có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Bài 20: Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 4$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị là A và B thỏa: $AB^2 = \frac{900m^2}{729}$

Bài 21: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1 + m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm ấy là ngắn nhất.

Bài 22: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABO vuông cân với O là gốc tọa độ.

Bài 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

Bài 24: Cho hàm số $y = (x-m)x^2 - 3x - m - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa: $|x_{CD} \cdot x_{CT}| = 1$.

Bài 25: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + m^2 - 1$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $x_1^2 = x_1 \cdot x_2 - 5 + 12$.

Bài 26: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1 + m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm ấy là ngắn nhất.

Bài 27: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị C nằm về hai phía khác nhau của một đường tròn (phía trong đường tròn và phía ngoài đường tròn): $C_m: x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

Bài 28: Cho hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (m^2 - 2m - 1)x - m^2 + 1$ (m là tham số). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C (với A là điểm cố định) sao cho $2(k_1 + k_2) = x_1 x_2$, trong đó k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại B, C và x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của (C).

Bài 29: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 6mx + \frac{1}{2}$. Tìm các số thực m để hàm số có 2 điểm cực đại, cực tiểu trên $[-1; 1]$.

Bài 30: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị sao cho trong mp tọa độ 0xy đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này cũng đi qua gốc tọa độ O.

Bài 31: Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 4 + m$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị là A, B, C và tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm

Bài 32: Cho hàm số $y = -x^3 + \frac{3m^2}{2}x^2$. Tìm m để hàm số có cực đại A, cực tiểu B và tạo với C(-2; 3) thành tam giác ABC đều.

Bài 33: Tìm giá trị của tham số $a; b$ để hàm số $y = -x^4 + a - 3b x^2 - 3a + b$ đạt giá trị cực tiểu bằng 1 tại $x = 0$.

Bài 34: Tìm giá trị của tham số $a; b$ để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - 3a - 2b x^2 - a + 2b$ có giá trị cực trị bằng 0 khi $x = 0$. Khi đó hàm số đạt cực tiểu hay cực đại.

Bài 35: Chứng minh rằng hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với mọi giá trị m và biểu thức $x_2 - x_1$ không phụ thuộc vào m .

Bài 36: Cho $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - (2m^2 + 1)x - 7m + \frac{2}{3}$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} < 0$

Bài 37: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + m$ (C_m). Định giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $AOB = 120^\circ$

Bài 38: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + m$ (C_m). Định giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực tiểu sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu là 1.

Bài 39: Cho $y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin a)x^2 - (1 + \cos 2a)x + 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Bài 40: Tìm cực trị của các hàm số: $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x} - 2 \cot g.x$

Bài 41: Tìm cực trị của các hàm số: $y = 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

Bài 42: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Chứng minh rằng hàm số (1) luôn có cực đại, cực tiểu với mọi m . Tìm m để các điểm cực trị của hàm số (1) cùng với điểm $I(1;1)$, tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{5}$.

Bài 43: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1$ (1), m là tham số. Tìm $m > 0$ để đồ thị hàm số (1) có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $2y_{CD} + y_{CT} = 4$.

Bài 44: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

Bài 45: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Bài 46: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m). Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120° .

Bài 47: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Bài 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Chứng minh rằng hàm số (1) luôn có cực đại, cực tiểu với mọi m . Tìm m để các điểm cực trị của hàm số (1) cùng với điểm $I(1;1)$, tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{5}$.

Bài 49: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

Bài 50: Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 51: Cho hàm số $y = 2x^4 - m^2x^2 + m^2 - 1$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

Bài 52: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo

thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

Bài 53: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)(C_m)$.

Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

Bài 54: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4$ (C_m). (m là tham số thực)

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có góc ở đỉnh của tam giác đó bằng α với $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bài 55: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ (1). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác sao cho trục Ox chia tam giác đó thành hai phần có diện tích bằng nhau

Bài 56: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)(C_m)$. Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

Bài 57: Tìm m để đồ thị (C_m) $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

Bài 58: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ (C_m). Tìm các giá trị của m để (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Bài 59: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ (C_m). Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

Bài 60: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + \frac{4}{3}(m+1)^3$ (1) (m là tham số thực). Tìm m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (1) nằm về 2 phía (phía trong và phía ngoài) của đường tròn có phương trình (C): $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

Dạng 3: Bài toán giá trị lớn nhất nhỏ nhất trên $[a, b]$

Phương pháp giải toán

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Để tìm giá trị lớn nhất (max) và giá trị nhỏ nhất (min) của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nhận xét : Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ (tìm điểm dừng). Giả sử có n nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc đoạn $[a, b]$ (ta loại các nghiệm nằm ngoài đoạn $[a, b]$).

Bước 3. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.

Từ đó có: $\text{Max} y = 1$ đạt được khi và chỉ khi: $x = k\pi$, $\text{Min} y = 0$ khi và chỉ khi: $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Chú ý: Nếu biểu thức xác định của hàm số có thể phân chia thành các nhóm số hạng và giữa chúng có một mối liên hệ cho bởi các hệ thức toán học cho phép biểu diễn chúng qua nhau thì ta có thể đưa bài toán đó về bài toán đơn giản hơn bằng phương pháp đổi biến số. Mối liên hệ giữa các nhóm số hạng trong biểu thức xác định hàm số ở ví dụ trên là rõ ràng dễ thấy, điều này giúp ta phát hiện cách đổi biến số không mấy khó khăn, tuy nhiên có những trường hợp mối liên hệ giữa các nhóm số hạng được ẩn kín bên trong, đòi hỏi nhiều phép biến đổi và có cách nhìn tinh mới phát hiện ra được. Trong phép đổi biến số cần chú ý cần phải tìm điều kiện cho biến để tránh khỏi sai lầm khi giải toán. Chẳng hạn xét lại ví dụ 2 ta thấy:

Đặt $t = \sin x$, ta có hàm số theo t : $f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	0		1		0
		$-\frac{1}{3}$			

Từ BBT suy ra: $\min f(t) = f(-2) = -\frac{1}{3}$; $\max f(t) = f(0) = 1$.

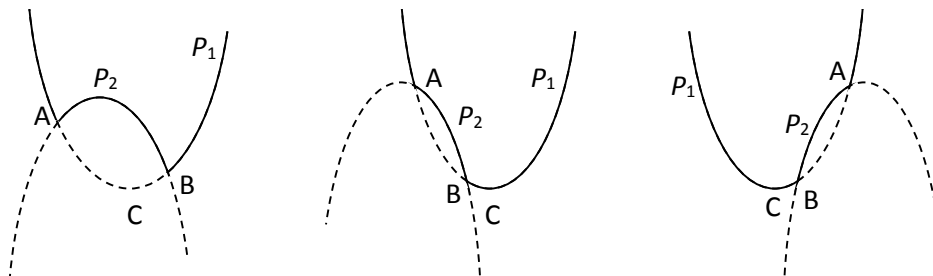
Từ đó có GTNN, GTLN của hàm số ban đầu lần lượt là $-\frac{1}{3}$ và 1.

Theo lời giải trên thì hàm số $f(x)$ nhận GTNN là $-\frac{1}{3}$ khi: $\sin x = -2$, điều này không xảy ra. Mặc dù đã lựa chọn biến mới: $t = \sin x$ hợp lý nhưng chưa tìm điều kiện cho nó dẫn đến bài toán tìm GTNN, GTLN của hàm số theo biến số mới $f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ không tương thích với bài toán ban đầu (ngoài ví dụ đang xét thì trong các ví dụ sau đều phải lưu ý điều này).

Ví dụ 3: Cho $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Tìm các giá trị của m sao cho $\min y > 1$.

Ta có $f(x) = \begin{cases} x^2 + (m-5)x + 4 & ; x \leq 1 \vee x \geq 4 : (P_1) \\ -x^2 + (m+5)x - 4 & ; 1 \leq x \leq 4 : (P_2) \end{cases}$

Gọi (P) là đồ thị của $y = f(x) \Rightarrow (P) = (P_1) \cup (P_2)$ khi đó (P) có 1 trong các hình dạng đồ thị sau đây



Hoành độ giao điểm $(P_1), (P_2)$ $x_A = 1; x_B = 4$; Hoành độ đỉnh (P_1) : $x_C = \frac{5-m}{2}$.

Nhìn vào đồ thị ta xét các khả năng sau:

• Nếu $x_C \in [x_A, x_B] \Leftrightarrow m \in [-3, 3]$ thì $\text{Min}f(x) = \text{Min}\{f(1), f(4)\}$.

$$\text{Khi đó } \text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 3 \\ f(1) = m > 1 \\ f(4) = 4m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 3 \quad (1)$$

• Nếu $x_C \notin [x_A, x_B] \Leftrightarrow m \notin [-3, 3]$ thì $\text{Min}f(x) = f_1(x_C) = f_1\left(\frac{5-m}{2}\right) = \frac{-m^2 + 10m - 9}{4}$

$$\text{Khi đó } \text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [-3, 3] \\ m^2 - 10m + 13 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 + 2\sqrt{3} \quad (2)$$

• **Kết luận:** Từ (1) và (2) suy ra $\text{Min}f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$

Bài tập tương tự

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên đoạn $[-2; 3]$.

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = x^6 + 4 - x^2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5; -3]$.

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10; 10]$.

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$ trên $[-1; 3]$.

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^x - x$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2).e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2; 5]$

Bài 17: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\ln x$ trên $[1; e]$.

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-1; 0]$.

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Bài 20: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 8}{x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$

Bài 21: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} - \ln(x^2 - x + 2)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

Bài 22: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2} + x$.

Bài 23: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$

Bài 24: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$

Bài 25: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x - x^2}$

Bài 26: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + \frac{x^2}{4}$

Bài 27: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 7)e^x$ trên đoạn $[0, 3]$

Bài 28: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - \ln(1 + 2x)$ trên đoạn $[0, 1]$

Bài 29: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\ln(3 - x)$ trên đoạn $[-2, 1]$

Bài 30: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}, 4\right]$.

Bài 31: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 4^{\sqrt{3x^2-3x+4}} + 4^{-\sqrt{3x^2-3x+4}}$ trên đoạn $[-1, 2]$.

Bài 32: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x} - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

Bài 33: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = x + 1 + 2\sqrt{-2x^2 + 2x + 4}$ trên $[-1; 2]$.

Bài 34: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Bài 35: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$

Bài 36: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

Bài 37: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - 1}$.

Bài 38: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 2\cos \frac{x}{2}}{\cos x + 2\sin \frac{x}{2}}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 39: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$

Bài 40: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Bài 41: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x(1 + \cos x)$

Bài 42: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{4 + \sin x} + \frac{1}{4 - \cos x}$

Bài 43: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x \log_x 2$, $x \in [2; e^2]$.

Bài 44: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Bài 45: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$, $x \in [-1; 1]$

Bài 46: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$

Bài 47: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} + 3}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} + 1}$$

Bài 48: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

Bài 49: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x (2 \cos x - \sin x)}$, với $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$.

Bài 50: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Dạng 4: Bài toán tiếp tuyến

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Phương pháp giải toán

Bước 1: Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$. Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x_0) = y_0$.

Bước 2: Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$

Bước 3: Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 4)$.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$.

c. Viết phương trình của (C) tại các điểm có tung độ là 0.

Hướng dẫn

a. Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(2; 4)$ là $y'(2) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = 9x - 14$.

b. Điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$, có tung độ $y_0 = \frac{1}{2}$

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là $y = -\frac{9}{4}x + \frac{13}{8}$.

c. Điểm thuộc (C) có tung độ $y_0 = 0$, có hoành độ $x_{01} = -2$ hoặc $x_{02} = 1$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(-2; 0)$ là $y'(-2) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-2; 0)$ là $y = 9x + 18$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(1; 0)$ là $y'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(1; 0)$ là $y = 0$.

Phương trình của hai tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 0 là $y = 9x + 18$ và $y = 0$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ $y = 8$.

Điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ $y_0 = 8$, có hoành độ $x_0 = \pm 2$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $(2; 8)$ và $(-2; 8)$ lần lượt là $y'(2) = 24$, $y'(-2) = -24$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(2; 8)$ là $y = 24x - 56$ và tại điểm $(-2; 8)$ là $y = -24x - 40$.

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp giải 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.

Bước 2: Δ có hệ số góc k nên $f'(x_0) = k$

Bước 3: Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ .

Phương pháp giải 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Bước 1: Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.

Bước 2: Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$$

Bước 3: Giải hệ (*), tìm được m . Từ đó viết phương trình của Δ .

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với trục hoành một góc α thì $|k| = \tan \alpha$.

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$.

+ Δ vuông góc với đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ thì $k = -\frac{1}{a}$.

+ Δ tạo với đường thẳng $y = ax + b$ một góc α thì $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến $k = 4$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C), có hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $y'(x_0) = 4$.

Khi đó, ta có: $\frac{1}{(x_0+1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_0+1 = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{01} = -\frac{1}{2}$ hoặc $x_{02} = -\frac{3}{2}$.

Tung độ của điểm M là $y_{01}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ hoặc $y_{01}\left(-\frac{3}{2}\right) = 4$.

Vậy có hai tiếp tuyến có phương trình là $y = 4x + 2$ và $y = 4x + 10$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 24x + 2017$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 24x + 2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 24.

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) có hệ số góc tiếp tuyến tại M là $y'(x_0) = 24$.

Khi đó, ta có: $4x_0^3 - 4x_0 - 24 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(4x_0^2 + 8x_0 + 12) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Lúc này tung độ của M là $y_0 = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = 24x - 56$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ (C). Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là a và b. Tìm điều kiện đối với a và b để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A và B là $k_A = f'(a) = 4a^3 - 4a, k_B = f'(b) = 4b^3 - 4b$

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có phương trình là:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) \Leftrightarrow y = f'(b)x + f(b) - bf'(b)$$

Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi:

$$k_A = k_B \Leftrightarrow 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0 \quad (1)$$

Vì A và B phân biệt nên $a \neq b$, do đó (1) $\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \quad (2)$

Mặt khác hai tiếp tuyến của (C) tại A và B trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b) \end{cases} \quad (a \neq b) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ -3a^4 + 2a^2 = -3b^4 + 2b^2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $(a; b) = (-1; 1)$ hoặc $(a; b) = (1; -1)$, hai nghiệm này tương ứng với cùng một cặp điểm trên đồ thị là $(-1; -1)$ và $(1; -1)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau là:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ a \neq \pm 1; a \neq b \end{cases}$$

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Phương pháp giải 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó $y_0 = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Bước 2: Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Bước 3: Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) (**)$.

Bước 4: Giải phương trình (**), tìm được x_0 . Từ đó viết phương trình của Δ .

Phương pháp giải 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Bước 1: Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k: $y - y_A = k(x - x_A)$.

Bước 2: Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \quad (***) \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Bước 3: Giải hệ (***), tìm được x, k. Từ đó viết phương trình của Δ .

Ví dụ minh họa

Bài toán 4: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước.

Phương pháp giải:

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Bước 2: Xử lý giả thuyết

+ ΔOAB vuông cân $\Leftrightarrow \Delta$ tạo với Ox một góc 45° và $O \notin \Delta$. (a)

+ $S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA \cdot OB = 2S$. (b)

Bước 3: Giải (a) hoặc (b) tìm được x_0 . Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$. (1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} < 0$

ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y = -x$ (vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là: $y'(x_0) = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$

+ Với $x_0 = -1; y_0 = 1 \Rightarrow \Delta: y - 1 = -(x + 1) \Leftrightarrow y = -x$ (loại)

+ Với $x_0 = -2; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y - 0 = -(x + 2) \Leftrightarrow y = -x - 2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x - 2$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giao điểm của 2 tiệm cận là $I(1; 2)$. Gọi $M\left(x_0; 2 + \frac{3}{x_0 - 1}\right) \in (C)$.

PTTT tại M có dạng: $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{3}{x_0-1}$

Toạ độ các giao điểm của tiếp tuyến với 2 tiệm cận: $A\left(1; 2 + \frac{6}{x_0-1}\right), B(2x_0-1; 2)$

Ta có: $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{|x_0-1|} \cdot 2|x_0-1| = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (đvdt)}$

ΔIAB vuông có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi $IA = IB$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{|x_0-1|} = 2|x_0-1| \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện $M_1(1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), M_2(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$. Khi đó chu vi $\Delta AIB = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

Chú ý: Với 2 số dương a, b thỏa $ab = S$ (không đổi) thì biểu thức $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a = b$. Thật vậy: $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{ab} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{S}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}(C)$. Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right), x_0 \neq 2, y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right); B(2x_0-2; 2)$

Ta thấy $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 2x_0 - 2}{2} = x_0 = x_M, \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2} = y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2; 2)$ và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi \left[(x_0 - 2)^2 + \left(\frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2} - 2 \right)^2 \right] = \pi \left[(x_0 - 2)^2 + \frac{1}{(x_0 - 2)^2} \right] \geq 2\pi$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } (x_0 - 2)^2 = \frac{1}{(x_0 - 2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Do đó điểm M cần tìm là $M(1; 1)$ hoặc $M(3; 3)$.

Bài toán 5: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, ... tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Giả sử $d: ax + by + c = 0, M(x_M; y_M) \in d$.

Bước 2: Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y = k(x - x_M) + y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M) \cdot f'(x_M) + y_M$ (3)

Bước 3: Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm x của (3)

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 3x - x^3$ (C). Tìm trên đường thẳng (d): $y = -x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Gọi $M(m; -m) \in d$. PT đường thẳng Δ qua M có dạng: $y = k(x - m) - m$.

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \text{hệ PT sau có nghiệm: } \begin{cases} 3x - x^3 = k(x - m) - m & (1) \\ 3 - 3x^2 = k & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 2x^3 - 3mx^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2x^3}{3x^2 - 4} \quad (**)$$

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow (**)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 4}. \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 24x^2}{(3x^2 - 4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Dựa vào BBT, (**) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$. Vậy: $M(-2; 2)$ hoặc $M(2; -2)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (Cm). Tìm m để từ điểm $M(1; 2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (Cm).

PT đường thẳng Δ qua M có dạng: $y = k(x-1) + 2$. Δ là tiếp tuyến của (Cm) $\Leftrightarrow$ hệ PT sau có

$$\text{nghiệm: } \begin{cases} x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m = k(x-1) + 2 \\ 3x^2 - 4x + m - 1 = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m-1) = 0 (*)$$

Để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (Cm) thì (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Các điểm cực trị của (Cm) là: } A(1; 4-3m), B\left(\frac{2}{3}; \frac{109}{27} - 3m\right).$$

$$\text{Do đó } (*) \text{ có đúng 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} A \in Ox \\ B \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}.$$

Bài toán 6: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, ... tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Gọi $M(x_M; y_M)$. Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k : $y = k(x - x_M) + y_M$

Bước 2: Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế } k \text{ từ (2) vào (1) ta được: } f(x) = (x - x_M) \cdot f'(x_M) + y_M \quad (3)$$

Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Bước 3: Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$. Từ đó tìm được M .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $x + 2y - 3 = 0$.

(d) có hệ số góc $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 \quad (1)$$

YCBT $\Leftrightarrow (1)$ có đúng một nghiệm âm.

+ Nếu $m = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

+ Nếu $m \neq 0$ thì dễ thấy phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = 1$ hay $x = \frac{2-3m}{m}$

Do đó để (1) có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$

Vậy $m < 0$ hay $m > \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm M có hoành độ $x = -1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Ta có: $y' = 3x^2 - m \Rightarrow y'(-1) = 3 - m$; $y(-1) = 2m - 2$. (C) có tâm $I(2; 3)$, $R = 2$.

PTTT d tại $M(-1; 2m-2)$: $y = (3-m)x + m + 1 \Leftrightarrow (3-m)x - y + m + 1 = 0$

$$d(I, d) = \frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2 + 1}} = \frac{|1+(3-m)|}{\sqrt{(3-m)^2 + 1}} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(3-m)^2 + 1}}{\sqrt{(3-m)^2 + 1}} = \sqrt{2} < R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 2$. Do đó $d(I, d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m = 2$

Tiếp tuyến d cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho AB ngắn nhất $\Leftrightarrow d(I, d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m = 2$

Khi đó: PTTT d: $y = x + 3$.

Bài tập luyện thi

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là C.

- Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có hoành độ bằng 0.
- Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có tung độ bằng 1.
- Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó có hệ số góc bằng -3.

- d. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó song song với đường thẳng $y = -9x + 1$.
- e. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 1$.
- f. Viết phương trình tiếp tuyến của C nó biết hợp với trục Ox góc 45° .
- g. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại những điểm giao với đường thẳng $y=1$.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị là C.

- a. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có hoành độ bằng 2.
- b. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có tung độ bằng 2.
- c. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó có hệ số góc bằng -24.
- d. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó song song với đường thẳng $y = -24x + 12$
- e. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{24}x + 1$.
- f. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó hợp với trục Ox góc 45° .
- g. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại những điểm giao với đường thẳng $y=-1$.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$ có đồ thị là C.

- a. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có hoành độ bằng 1.
- b. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại điểm có tung độ bằng 2.
- c. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó có hệ số góc bằng 2.
- d. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó song song với đường thẳng $y = 8x - 2016$
- e. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{18}x$.
- f. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó hợp với trục Ox góc 45° .
- g. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân.
- h. Viết phương trình tiếp tuyến của C biết nó cắt hai đường tiệm cận tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân.
- i. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x}{2x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\frac{2}{3}$.

Bài 5: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc.

Bài 6: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(1;5)$. Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ($B \neq A$). Tính diện tích tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

Bài 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ (C) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 1.

Bài 9: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn phương trình $y''(x_0) = 12$.

Bài 10: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A là giao điểm của (C) với trục hoành.

Bài 11: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$. (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó có hệ số góc bằng 9.

Bài 12: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \sqrt{3-2x}$ tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.

Bài 13: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (C). Cho điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_M = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

Bài 15: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ (C). Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Bài 16: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Biết tiếp tuyến có hệ số góc là $-\frac{1}{4}$.

Bài 17: Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ biết d có hệ số góc bằng -1 .

Bài 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình: $x - 2016 = 0$.

Bài 19: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = x + 7$ và viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm ấy.

Bài 20: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 3$ tại giao điểm của nó với trục tung.

Bài 21: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^3 - 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d : y = 2x - 7$.

Bài 22: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết hình chiếu vuông góc của hai điểm $A(1;1)$, $B(0;-3)$ lên tiếp tuyến trùng nhau

Bài 23: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (C) . Viết pttt với (C) , biết tiếp tuyến song song với $y = 9x - 4$.

Bài 24: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ (C) .Viết pttt với (C) , biết hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của pt $f''(x) = 18$

Bài 25: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ Viết pttt của (C) tại giao điểm của (C) và $d: y = -x - 2$, biết tiếp điểm có hoành độ dương.

Bài 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d : y = -x - 3$.

Bài 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ (1). Viết pttt của (C) biết tiếp tuyến đi qua $M(0;-1)$.

Bài 28: Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{2x+1}$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = 5x - 2$.

Bài 29: Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ Tìm tọa độ của điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng (d): $9x - y - 18 = 0$

Bài 30: Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (H). Viết phương trình tiếp tuyến của (H), biết nó cắt đồ thị tại hai điểm A, B sao cho tam giác ABC đều trong đó C $(-2, 5)$.

Bài 31: Cho hàm số $y = \frac{2x+m-1}{x-2} (C_m)$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại giao điểm của (C_m) với trục tung, biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiếp tuyến đó bằng $\frac{2}{5}$.

Bài 32: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $C : x^3 + 1 - m x + 1$ tại điểm C có $x_C = 0$ và chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích $S = 8$.

Bài 33: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ C Xác định tọa độ các giao điểm của C và đường thẳng $y = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của C tại các giao điểm đó.

Bài 34: Tính diện tích tam giác chắn hai trục tọa độ bởi tiếp tuyến của đồ thị $C : y = \sqrt{x^2 - 27x + 26}$ tại điểm B có $x_B = 2$.

Bài 35: Cho $(C_m) : y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$. Gọi A là giao điểm của (C_m) và trục Oy. Tìm m để tiếp tuyến tại A tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Bài 36: Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng nằm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Tiếp tuyến của (C) tại A, B, C cắt đồ thị (C) tại A', B', C' . Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Bài 37: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ biết nó tạo với các trục tọa độ tam giác cân.

Bài 38: Cho $y = \frac{2x-1}{x-1} (C)$ có I là giao điểm hai đường tiệm cận. M là điểm bất kỳ trên (C).

Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại các điểm A, B. Chứng minh M là trung điểm AB và diện tích tam giác IAB không đổi. Tìm M thuộc (C) sao cho chu vi của tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 39: Cho $y = \frac{2x-1}{x-1} (C)$ có I là giao điểm hai đường tiệm cận. M là điểm bất kỳ trên (C). Tìm tọa độ điểm M để tiếp tuyến tại M vuông góc với IM.

Bài 40: Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết rằng nó cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB nhỏ nhất

Bài 41: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ (C) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến cắt hai đường tiệm cận của (C) lần lượt tại A và B sao cho tam giác ABI có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2 - \sqrt{2}$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Bài 42: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) hàm số: $y = \frac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}OA$.

Bài 43: Tìm tọa độ điểm A, B thuộc đồ thị (C) hàm số: $y = \frac{-x-1}{x+2}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A song song tiếp tuyến của (C) tại B và $AB = 2\sqrt{2}$.

Bài 44: Chứng minh đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị (C) hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A, B. Tìm m để $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 45: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 + m - 1x^2 + 4 - 3mx + 1$ (C_m). Định giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) tồn tại duy nhất một điểm có hoành độ âm sao cho tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$.

Dạng 6: Sự tương giao giữa đồ thị

Bài toán 1: Biện luận số nghiệm phương trình

Phương pháp giải bài toán: Dựa vào các điểm đặc biệt của đồ thị (thường là các điểm cực trị, các đường tiệm cận) và sự tương giao của đồ thị và đường thẳng nằm ngang để tìm ra điều kiện của tham số.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Dựa vào đồ thị hàm số: $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $x^4 - 4x^2 + 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = 2m$ (*)

Suy ra số nghiệm pt (*) bằng số giao điểm của (C): $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ và

d: $y = 2m$.

Dựa vào đồ thị tìm được : $2m = 1$ hoặc $2m < -3$ hay $m = \frac{1}{2}; m < -\frac{3}{2}$.

Vậy khi $m < -\frac{3}{2}$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Dựa vào đồ thị hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x(x-3)^2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $x(x-3)^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = m - 1$. (*)

Suy ra số nghiệm pt (*) bằng số giao điểm của $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ và d: $y = m-1$.

Dựa vào đồ thị tìm được : $-1 < m - 1 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Vậy khi $0 < m < 4$ phương trình $x(x-3)^2 = m$ có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3: Tìm k để phương trình (*) $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình (*) tương đương với

$$x^3 - 3x^2 = k^3 - 3k^2.$$

Nếu đặt $f(x) = x^3 - 3x^2$ thì phương trình trở thành

$$f(x) = f(k).$$

(*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = f(k)$ có ba điểm chung với đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow -4 < f(k) < 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(k)$, ta thấy điều kiện $-4 < f(k) < 0$ tương đương với $k \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Bài toán 2: Sự tương giao giữa 2 đồ thị

Cho $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2). Để tìm giao điểm của (C_1) và (C_2), ta làm như sau:

Bước 1: Tìm hoành độ giao điểm. Hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (*). Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2).

Bước 2: Tìm giao điểm. Nếu x_0 là một hoành độ giao điểm thì $(x_0; f(x_0)) (\equiv (x_0; g(x_0)))$ là một giao điểm của (C_1) và (C_2) .

Chú ý. Để giải các bài toán loại này, ta rất hay sử dụng định lý Vi-ét đảo:

Nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

(C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0 \quad (*) \text{ có 3 nghiệm phân biệt thỏa } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15.$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + (1-3m)x - 2-3m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ g(x) = x^2 + (1-3m)x - 2-3m = 0 \end{cases}$$

Do đó: YCBT $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1 và thỏa $x_1^2 + x_2^2 > 14$.

$$\Leftrightarrow |m| > 1$$

Vậy thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$, trong đó m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng}$$

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } x^3 - 3x^2 - 9x = -m \text{ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng}$$

$$\Leftrightarrow \text{Đường thẳng } y = -m \text{ đi qua điểm uốn của đồ thị } (C)$$

$$\Leftrightarrow -m = -11 \Leftrightarrow m = 11$$

Vậy thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $I(-1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của đoạn MN .

Phương trình đường thẳng $d: y = k(x+1)+1$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $M, N \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = kx+k+1$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 .

$\Leftrightarrow f(x) = kx^2 + 2kx + k + 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = -4k > 0 \Leftrightarrow k < 0 \\ f(-1) = 4 \neq 0 \end{cases}$$

Mặt khác: $x_M + x_N = -2 = 2x_I \Leftrightarrow I$ là trung điểm MN với $\forall k < 0$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $y = kx + k + 1$ với $k < 0$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C). Định m để đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

PT hoành độ giao điểm của (C) và (d): $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow m > -3$

Bài toán 3: Bài toán điểm trên đồ thị.

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Đặc biệt: + Nếu $\Delta: x = a$ thì $d(M, \Delta) = |x_0 - a|$

+ Nếu $\Delta: y = b$ thì $d(M, \Delta) = |y_0 - b|$

+ Tổng các khoảng cách từ M đến các trục tọa độ là: $|x_0| + |y_0|$.

3) Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

4) Các điểm A, B đối xứng nhau qua điểm I $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$

5) Các điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$ (I là trung điểm AB).

Đặc biệt: + A, B đối xứng nhau qua trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A \\ y_B = -y_A \end{cases}$

+ A, B đối xứng nhau qua trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_A \\ y_B = y_A \end{cases}$

6) Khoảng cách giữa đường thẳng Δ với đường cong (C) bằng khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm $M \in \Delta$ và một điểm $N \in (C)$.

7) Điểm $M(x; y)$ được gọi là có tọa độ nguyên nếu x, y đều là số nguyên.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm $M(-1; 3)$.

Gọi $A(x_0; y_0)$, B là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1; 3) \Rightarrow B(-2 - x_0; 6 - y_0)$

$$A, B \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 \\ 6 - y_0 = -(-2 - x_0)^3 + 3(-2 - x_0) + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 - (-2 - x_0)^3 + 3(-2 - x_0) + 2 \Leftrightarrow 6x_0^2 + 12x_0 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $(-1; 0)$ và $(-1; 6)$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3; 0)$ và $N(-1; -1)$.

$$\overrightarrow{MN} = (2; -1) \Rightarrow \text{Phương trình MN: } x + 2y + 3 = 0.$$

Phương trình đường thẳng (d) $\perp$ MN có dạng: $y = 2x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x-4}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 4 = 0 \quad (x \neq -1) \quad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m - 32 > 0 \quad (2)$

Khi đó $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của AB là $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; x_1+x_2+m\right) \equiv I\left(-\frac{m}{4}; \frac{m}{2}\right)$ (theo định lý Vi-et)

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow I \in MN \Leftrightarrow m = -4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow A(0; -4), B(2; 0)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với $A(2; 0)$.

Ta có (C): $y = 2 + \frac{2}{x-1}$. Gọi $B\left(b; 2 + \frac{2}{b-1}\right)$, $C\left(c; 2 + \frac{2}{c-1}\right)$ với $b < 1 < c$.

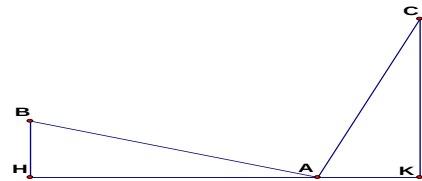
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ox.

Ta có: $AB = AC$; $BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle CAK + \angle BAH = 90^\circ = \angle CAK + \angle ACK \Rightarrow \angle BAH = \angle ACK$

và: $BHA = CKA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAK \Rightarrow \begin{cases} AH = CK \\ HB = AK \end{cases}$

$$\text{Hay: } \begin{cases} 2-b = 2 + \frac{2}{c-1} \\ \left|2 + \frac{2}{b-1}\right| = |c-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $B(-1; 1)$, $C(3; 3)$



Ví dụ 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C). Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng d: $2x - y + 2 = 0$.

Gọi $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d

I là trung điểm của AB nên $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, ta có $I \in d$

$$\text{Có: } \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{(-x_1^3+3x_1+2)+(-x_2^3+3x_2+2)}{2} = 2 \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + 2$$

$$\Rightarrow -(x_1+x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1+x_2) + 3(x_1+x_2) = 2(x_1+x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } MN \perp d \Rightarrow (x_2-x_1).1 + (y_2-y_1).2 = 0$$

$$\Rightarrow 7(x_2-x_1) - 2(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2 = \frac{7}{2}$$

$$\text{- Xét } x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}; x_2 = \mp\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\text{- Xét } \begin{cases} x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1 \\ x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{9}{4} \\ x_1x_2=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{Vậy 2 điểm cần tìm là } \left(\sqrt{\frac{7}{2}}; 2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; 2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$.

Gọi A, B là các giao điểm của (C) với trục Ox . Chứng minh rằng trên đồ thị (C) tồn tại hai điểm cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

$$\bullet \text{ PT hoành độ giao điểm của } (C) \text{ với trục hoành: } \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\square A(-5;0), B(1;0). \text{ Gọi } M\left(a; \frac{1}{3}a^3 + a^2 - 3a + \frac{5}{3}\right) \in (C), M \neq A, B$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \left(a+5; \frac{1}{3}a^3 + a^2 - 3a + \frac{5}{3}\right), \overline{BM} = \left(a-1; \frac{1}{3}a^3 + a^2 - 3a + \frac{5}{3}\right)$$

$$AM \perp BM \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow (a+5)(a-1) + \frac{1}{9}(a+5)^2(a-1)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9}(a-1)^3(a+5) = 0 \Leftrightarrow a^4 + 2a^3 - 12a^2 + 14a + 4 = 0 \quad (*)$$

Đặt $y = a^4 + 2a^3 - 12a^2 + 14a + 4 = 0$, có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4a^3 + 6a^2 - 12a + 14; y' = 0 \text{ có 1 nghiệm thực } a_0 \approx -\frac{7}{2} \Rightarrow y_0 \approx -\frac{2043}{16}$$

Dựa vào BBT ta suy ra (*) luôn có 2 nghiệm khác 1 và -5 .

Vậy luôn tồn tại 2 điểm thuộc (C) cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm tọa độ hai điểm P, Q thuộc (C) sao cho đường thẳng PQ song song với trục hoành và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8. Điểm cực đại của (C) là $A(0;1)$. PT đường thẳng PQ có dạng: $y = m (m \geq 0)$.

Vì $d(A, PQ) = 8$ nên $m = 9$. Khi đó hoành độ các điểm P, Q là nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy: $P(-2;9), Q(2;9)$ hoặc $P(2;9), Q(-2;9)$.

Bài tập luyện thi

Bài 1: Biện luận theo tham số m số nghiệm phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 = m$

Bài 2: Biện luận theo tham số m số nghiệm phương trình $x^4 - 2x^2 = m$

Bài 3: Biện luận theo tham số m số nghiệm phương trình $\frac{x+2}{x-1} = m$

Bài 4: Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m + 2$ có 3 nghiệm phân biệt

Bài 5: Tìm m để phương trình $(2x-2) = m(x+1)$ vô nghiệm

Bài 6: Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m^2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$. Tìm m để phương trình $x^4 - 8x^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 8: Dựa vào đồ thị, hãy tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 9: Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị là (C) Dựa vào đồ thị (C), hãy tìm điều kiện của tham số k để phương trình sau đây có 3 nghiệm phân biệt: $x^3 - 3x^2 + k = 0$.

Bài 10: Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m-5$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = x - m + 1$. Tìm m để d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tại x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$.

Bài 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ (C). Tìm m để đường thẳng $d : y = mx - 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 12: Cho hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + (m+1)x + 1$ (1). Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục Ox tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Bài 13: Cho hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (m^2 - 2m - 1)x - m^2 + 1$ (m là tham số). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C (với A là điểm cố định) sao cho $2(k_1 + k_2) = x_1 x_2$, trong đó k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại B, C và x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của (C).

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $\Delta : 2y + 3x - m = 0$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài $4AB^2 = 13$.

Bài 15: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với $d' : x + y + 2 = 0$ sao cho d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B và diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{3}$ (I là giao điểm hai đường tiệm cận).

Bài 16: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$. Tìm m để phương trình $y = x + 2m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 17: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x - 1$, có đồ thị là (C). Gọi (d_k) là đường thẳng đi qua $A(0; -1)$ và có hệ số góc bằng k. Tìm k để đường thẳng d_k cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, trong đó hai điểm có hoành độ dương.

Bài 18: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Bài 19: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ (C). Lập phương trình đường thẳng qua $M(0, -1)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OMB}$.

Bài 20: Tìm mọi giá trị của m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt. Khi nào có ít nhất một trong hai giao điểm có tọa độ nguyên?

Bài 21: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi (d) là đường thẳng qua $H(3; 3)$ và có hệ số góc k . Tìm k để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho tam giác MAN vuông tại $A(2; 1)$.

Bài 22: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Bài 23: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C) Tìm m để đường thẳng $d: y = m(2-x) + 2$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2; 2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại B, C đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 24: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + (m-2)x + 1$ (1). Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B đồng thời hai điểm cực trị đó cùng với điểm $D\left(3; \frac{7}{2}\right)$ và gốc tọa độ O tạo thành hình bình hành OADB.

Bài 25: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ (C). Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $I(0; 2)$ có hệ số góc m . Tìm m để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt I, A, B. Chứng minh rằng I là trung điểm của AB.

Bài 26: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho trọng tâm G của tam giác OAB cách d một khoảng bằng $\sqrt{2}$ (O là gốc tọa độ).

Bài 27: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = mx + 2$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

Bài 28: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị C. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $I(2, 0)$ và có hệ số góc m . Tìm tham số m để Δ cắt C tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 29: Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). Định giá trị của m để hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn 1.

Bài 30: Cho $C_m: y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$. Tìm m để C_m cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 và thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.

Bài 31: Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-2}$ C và đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt C tại 2 điểm P và Q thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị. Tìm m để $\triangle OPQ$ vuông tại O.

Bài 32: Cho hàm số: $y = \frac{x}{x-1}$ C và đường thẳng $d: y = m - x$. Tìm m để d cắt C tại hai điểm phân biệt A, B sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $2\sqrt{2}$.

Bài 33: Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x+3}$ C và đường thẳng $d: y = m - x$. Tìm m để d cắt C tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB^2 = 3IA^2$ với I là giao điểm hai đường tiệm cận của C

Bài 34: Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{x+1}$ C . Viết phương trình tiếp tuyến của C biết rằng nó cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB nhỏ nhất.

Bài 35: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Gọi (d) là đường thẳng qua $M(2;0)$ có hệ số góc k. Tìm k để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M nằm giữa A, B và $MA = 2MB$.

Bài 36: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ (C) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến cắt hai đường tiệm cận của (C) lần lượt tại A và B sao cho tam giác ABI có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2 - \sqrt{2}$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Bài 37: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $I(0;1)$ và cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).

Bài 38: Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x+3}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Bài 39: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 đều lớn hơn $\frac{1}{2}$.

Bài 40: Chứng minh mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1;2)$ với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn AB.

Bài 41: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1 - m x + m - 1$ Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Bài 42: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4 - C$ Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1, 2)$ với hệ số góc $k, k > -3$ đều cắt đồ thị hàm số C tại ba điểm phân biệt I, A, B, đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 43: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị là C_m , điểm $M(3, 1)$, đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng d cắt C_m tại 3 điểm A, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích

h bằng $2\sqrt{6}$

Bài 44: Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). Định giá trị của m để hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn 1.

Bài 45: Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + 3x - C$ và đường thẳng Tìm m để C và $d: y = m(x-3)$ có giao điểm là A, B, C với A cố định và $OA \perp OC$, $BC = \sqrt{42}$.

Bài 46: Cho hàm số $y = mx^3 - 6x^2 + 9mx - 3$ (1) Xác định m để đường thẳng $d: y = \frac{9}{4}x - 3$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt A(0, -3), B, C thỏa điều kiện B nằm giữa A và C đồng thời $AC = 3AB$.

Bài 47: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = mx^3 + x^2 - 2x - 8m$ Cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa $x > 1$.

Bài 48: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+1)x^2 + m^2$. Tìm m để (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 49: Tìm tham số thực m để

(d) đi qua A(1;0) và có hệ số góc là m cắt (C) : $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) (M thuộc nhánh trái, N thuộc nhánh phải) sao cho $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$.

Bài 50: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị tham số $m \in \mathbb{R}$ để đường thẳng (d): $y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 = \frac{37}{2}$.

Dạng 7: Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Để vẽ đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta sử dụng ba nguyên tắc sau đây:

Nguyên tắc 1. (về sự phân chia đồ thị hàm số) Đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in D_1 \\ f_2(x), x \in D_2 \\ \dots \\ f_n(x), x \in D_n \end{cases}$$

là hợp của n đồ thị hàm số $y = f_k(x)$ với $x \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Nguyên tắc 2. (về sự đổi dấu hàm số) Đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ và đồ thị hàm số $y = -f(x)$, $x \in D$ đối xứng nhau qua Ox .

Nguyên tắc 3. (về đồ thị hàm chẵn) Đồ thị của hàm chẵn nhận Oy làm trục đối xứng.

Hai trường hợp hay gặp:

-Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Vì $\begin{cases} y = f(|x|) \\ f(|x|) = f(x) \forall x \geq 0 \end{cases}$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm hai phần:

+) Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm bên phải Oy ;

+) Phần 2 đối xứng với phần 1 qua Oy .

-Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Vì $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$ nên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần:

+) Phần 1 là phần Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành;

+) Phần 2 đối xứng với phần Đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Vẽ các đồ thị hàm số

$$1) f_1(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| (C_1); \quad 2) f_2(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1} (C_2); \quad 3) f_3(x) = \left| \frac{|x|-1}{|x|+1} \right| (C_3);$$

$$4) f_4(x) = \frac{|x-1|}{x+1} (C_4); \quad 5) f_5(x) = \frac{x-1}{|x+1|} (C_5).$$

Giải. Trước hết, ta vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (hình 0);

1) Ta có $f_1(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$. Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần (hình 1):

- Phần 1: là phần đồ thị (C) nằm trên Ox;
- Phần 2: đối xứng với phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox.

2) Ta có $f_2(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn, đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Lại có $f_2(x) = f(x)$ với mọi $x \geq 0$. Do đó đồ thị (C_2) gồm hai phần (hình 2):

- Phần 1: là phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy;
- Phần 2: đối xứng với phần 1 qua Oy.

3) Ta có $f_3(x) = |f_2(x)| = \begin{cases} f_2(x) & \text{khi } f_2(x) \geq 0 \\ -f_2(x) & \text{khi } f_2(x) < 0 \end{cases}$. Do đó đồ thị (C_3) gồm hai phần (hình 3):

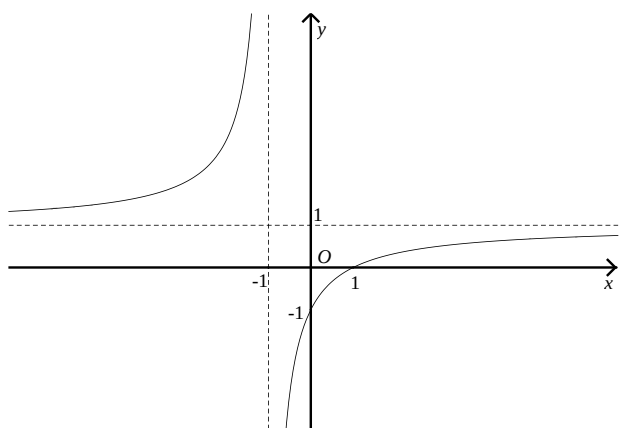
- Phần 1: là phần đồ thị (C_2) nằm trên Ox;
- Phần 2: đối xứng với phần đồ thị (C_2) nằm dưới Ox qua Ox.

4) Ta có $f_4(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Do đó đồ thị (C_4) gồm hai phần (hình 4):

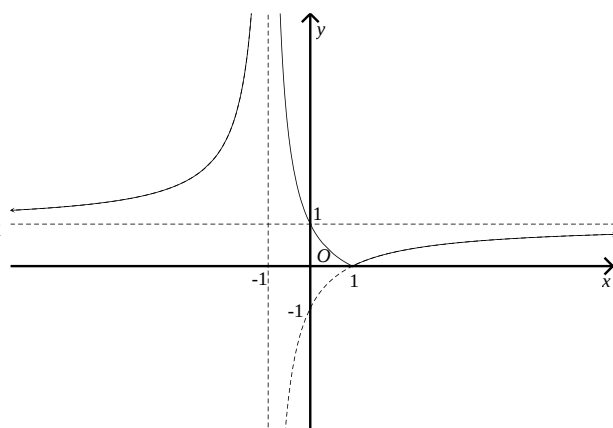
- Phần 1: là phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 1$;
- Phần 2: đối xứng với phần đồ thị (C) ứng với $x < 1$ qua Ox.

5) Ta có $f_5(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > -1 \\ -f(x) & \text{khi } x < -1 \end{cases}$. Do đó đồ thị (C_5) gồm hai phần (hình 5):

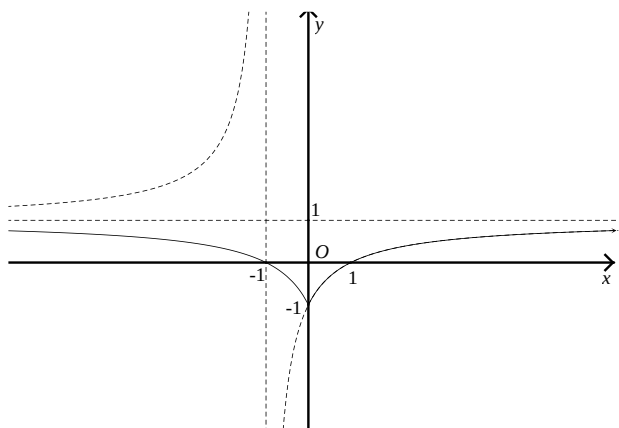
- Phần 1: là phần đồ thị (C) ứng với $x > -1$;
- Phần 2: đối xứng với phần đồ thị (C) ứng với $x < -1$ qua Ox .



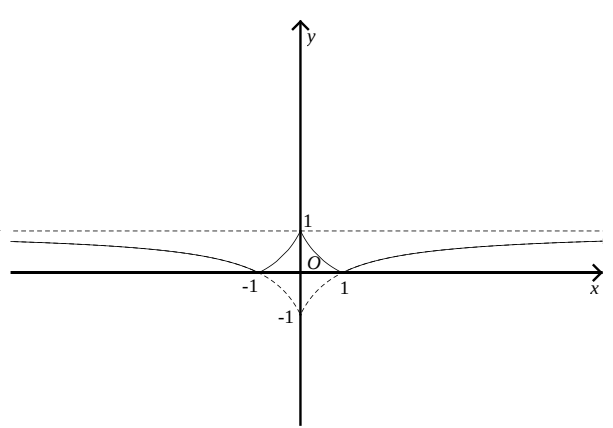
Hình 0



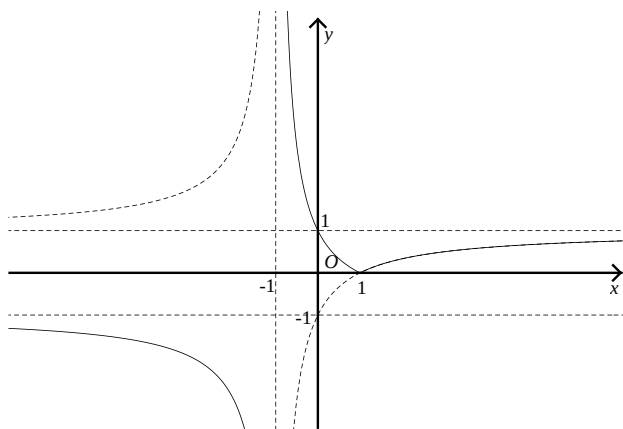
Hình 1



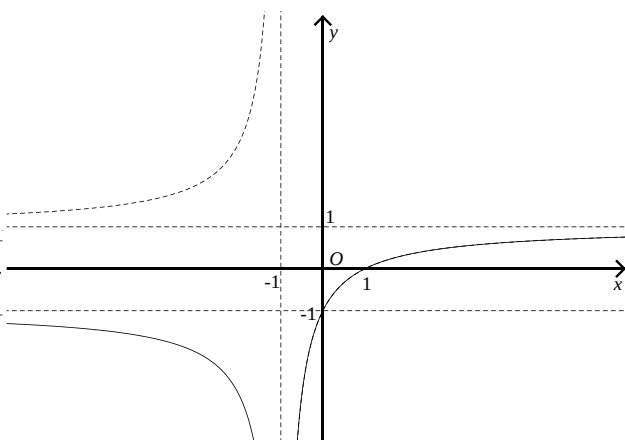
Hình 2



Hình 3



Hình 4



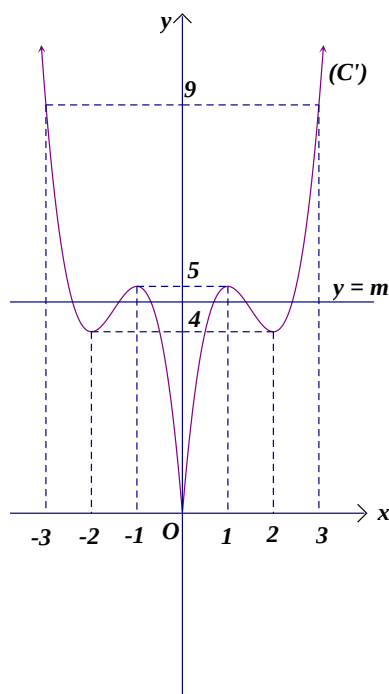
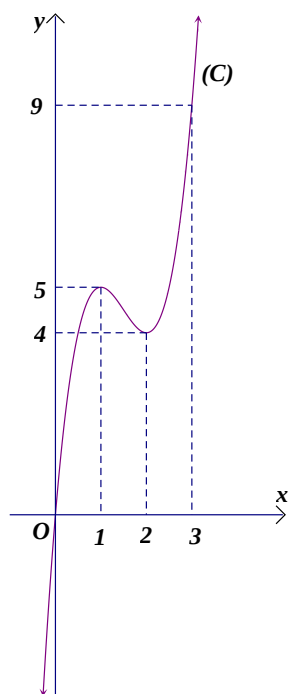
Hình 5

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Giải. Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Phương trình đã cho tương đương với $f(|x|) = m$.

Trước hết ta vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Hàm $f(|x|)$ là hàm chẵn, $f(|x|) = f(x) \quad \forall x \geq 0$. Do đó, đồ thị (C') của hàm số $f(|x|)$ gồm hai phần

- Phần 1: là phần (C) nằm ở bên phải Oy ;
- Phần 2: đối xứng với phần 1 qua Oy .



Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ có 6 điểm chung với (C') $\Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Bài tập luyện thi**Bài 1:** Vẽ đồ thị các hàm số sau đây

- 1) $y = x^2 - |x|(|x-3|+3) + 5$
- 2) $y = |1 - |1-x|| + |x|$
- 3) $y = |x^2 - 3x - 5|$
- 4) $y = x^2 - 3|x| - 5$
- 5) $y = |x^2 - 3|x| - 5|$
- 6) $y = \frac{1}{3}x^2|x| - x^2 - 3|x| + 1$
- 7) $y = |\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1|$
- 8) $y = \frac{1}{3}x^2|x| - x^2 - 3|x| + 1$
- 9) $y = \frac{1}{18}|x^3 - 3x^2 - 24x + 26|$
- 10) $y = \frac{1}{18}(|x|^3 - 3x^2 - 24|x| + 26)$
- 11) $y = \frac{1}{18}|x|^3 - 3x^2 - 24|x| + 26|$
- 12) $y = \frac{1}{18}|x-1|(x^2 - 2x + 26)$
- 13) $y = |x^4 - 4x^2 + 3|$
- 14) $y = |x^2 - 1|(x^2 - 3)$
- 15) $y = |x^2 - 3|(x^2 - 1)$
- 16) $y = |x-1|(x^3 + x^2 - 3x - 3)$
- 17) $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$
- 18) $y = |x-1|(x^3 + x^2 - 4x - 4)$
- 19) $y = |x+1|(x^3 - x^2 - 4x + 4)$
- 20) $y = |x-2|(x^3 + 2x^2 - x - 2)$
- 21) $y = |x+2|(x^3 - 2x^2 - x + 2)$
- 22) $y = |x^2 - 4|(x^2 - 1)$
- 23) $y = |x^2 - 1|(x^2 - 4)$
- 24) $y = |x^2 + x - 2|(x^2 - x - 2)$
- 25) $y = |x^2 - x - 2|(x^2 + x - 2)$
- 26) $y = \frac{|x|-1}{2-|x|}$
- 27) $y = \left|\frac{x-1}{2-x}\right|$
- 28) $y = \left|\frac{|x|-1}{2-|x|}\right|$
- 29) $y = \frac{|x-1|}{x-2}$
- 30) $y = \frac{x-1}{|x-2|}$

Bài 2: Với những giá trị nào của m , phương trình $|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.**Bài 3:** Tìm k để phương trình $\frac{-x^3}{3} + 4x + \frac{4(k^2-1)}{3(2-k)} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.**Bài 4:** Từ đồ thị (C): $y = -x^3 + 3x$ suy ra đồ thị hàm số $y = |-x^3 + 3x|$.**Bài 5:** Với giá trị nào của a thì phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $|x^4 - 2x^2 - 1| = \log_2 a$.**Bài 6:** Dùng đồ thị (C) của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ để biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 = m^4 - 2m^2$.**Bài 7:** Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x-2}$ (C). Dựa vào đồ thị (C), tìm các giá trị của m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.**Bài 8:** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = -|x|^3 + 3|x|$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên $(1;2)$ thì m thuộc tập nào sau đây:

- A. $[3; +\infty)$ B. $(-\infty; 3)$ C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

2. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ thì m thuộc tập nào sau đây:

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ B. $m \in \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)$ C. $m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ D. $m \in (-\infty; -1)$

3. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ B. $y = \ln x$ C. $y = e^{x^2+2x}$ D. $y = -x^4 - \frac{4}{3}x^3$

4. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây:

- A. $(-\infty; -1); (0; 1)$ B. $(-1; 0); (0; 1)$ C. $(-1; 0); (1; +\infty)$ D. Đồng biến trên $\mathbb{R}$

5. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên:

- A. $(2; +\infty)$ B. $[1; 3]$ C. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ D. $(1; 3)$

6. Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ nghịch biến trên:

- A. $[3; 4)$ B. $(2; 3)$ C. $(\sqrt{2}; 3)$ D. $(2; 4)$

7. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{mx + 1}$ (với m là tham số). Giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $m \in [1; 2]$ B. $m \in [-5; 5]$ C. $m \in (0; 1)$ D. $m \in [0; 1]$

8. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

- A. $f(x)$ tăng trên $(-\infty; 1); (1; +\infty)$ B. $f(x)$ giảm trên $(-\infty; 1); (1; +\infty)$
C. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

9. Hàm số $y = \sqrt{x} - \ln x$ nghịch biến trên:

- A. $(e; +\infty)$ B. $(0; 4]$ C. $(4; +\infty)$ D. $(0; e)$

10. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

- A. $y = \cos x$ B. $y = -x^3 + 2x^2 - 10x$ C. $y = -x^4 - x^2 - 1$ D. $y = \frac{x+2}{x-3}$

11. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên khoảng (1; 3):

A. $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 9$

B. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

C. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

D. $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

12. Hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-\infty; 1)$ và $(1; 2)$

B. $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

C. $(0; 1)$ và $(1; 2)$

D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

13. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

B. $y = (x^2 - 1)^2 - 3x + 2$

C. $y = \frac{x}{x+1}$

D. $y = \tan x$

14. Cho hàm số $y = 4x + 1 + \frac{1}{x+1}$ và các khoảng

(I) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

(II) $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$

(III) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$

(IV) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Hàm số trên đồng biến trên các khoảng

A. (I) và (II)

B. (II) và (III)

C. (III) và (IV)

D. (IV) và (I)

15. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + x + 1$ giá trị nào của m thì hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó

A. $-1 \leq m \leq 1$

B. $m < -1$ hoặc $m > 1$

C. $-2 < m < 2$

D. $m > 2$

16. Hàm số $y = \frac{mx - 1}{x + m}$

A. luôn luôn đồng biến với mọi m .

B. luôn luôn đồng biến nếu $m \neq 0$

C. luôn luôn đồng biến nếu $|m| > 1$

D. đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

17. Cho hàm số $y = \frac{4}{5}x^5 - x^4 + \frac{x^3}{3} - 1$. Nhận định nào dưới đây là đúng.

A. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$

B. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

C. Đồng biến trên $\mathbb{R}$

D. Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

18. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m \geq 1$

B. $m \leq -\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$

D. $-\frac{3}{4} < m < 1$

19. Xác định m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m-3)x - 6$ nghịch biến trên R?

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$ B. $-1 \leq m \leq 2$ C. $-2 \leq m \leq 1$ D. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 1$

20. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+3}{x+2}$ giảm trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m \geq \frac{3}{2}$ B. $m \leq \frac{3}{2}$ C. $m > \frac{3}{2}$ D. $m < \frac{3}{2}$

21. Hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi:

A. $m \leq 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \neq 1$ D. $m \geq -1$

22. Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi :

A. $m > 0$ B. $-1 < m \leq 0$ C. $m < -1$ D. $m > 2$

23. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên R khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$
 B... $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

24. Tìm m lớn nhất để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m-3)x + 3$ đồng biến trên R.

A. $m=3$ B. $m=1$ C. $m=2$ D. $m=4$

25. Hàm số $y = \sqrt{2+x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-1; 2)$

26. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên R?

A. $y = (x^2 - 1)^2 - 3x + 2$ B. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ C. $y = \frac{x}{x+1}$ D. $y = \tan x$

27. Cho hàm số $y = x^x$ ($x > 0$). Hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

A. $x = \frac{1}{e}$ B. $x = 1$ C. $x = -e$ D. $x = \sqrt{e}$

28. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm cực đại có phương trình là:

A. $x = 0$ B. $y = 0$ C. $y = 1$ D. $y = -2$

29. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m+1$

. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ thì

- A. $2 < m < 6$ B. $\frac{3}{2} < m < 2$ C. $m < 2$ hoặc $m > 6$ D. $m < \frac{3}{2}$

30. Giả sử hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 1. Khi đó, giá trị của m là:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

31. Giả sử hàm số $y = \frac{\sin x - 1}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Khi đó, các giá trị m thỏa mãn bài toán là:

- A. $m < -3$ B. $m < -2$ C. $m > 0$ D. $m > -2$

32. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và giả sử có cực trị. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Cả 3 phương án kia đều sai B. Hàm số chỉ có một cực tiểu
C. Hàm số có hai cực đại D. Hàm số chỉ có một cực đại

33. Cho hàm số $y = x^n + (c - x)^n$, $c > 0$, $n \geq 2$. Hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

- A. $c + 1$ B. $2c$ C. $\frac{2c}{3}$ D. $\frac{c}{2}$

34. Cho đường cong $y = x^3 - 3x^2$. Gọi Δ là đường thẳng nối liền cực đại và cực tiểu của nó. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Δ đi qua điểm $M(-1; -2)$ B. Δ đi qua điểm $M(1; -2)$
C. Δ song song với trục hoành D. Δ không đi qua gốc tọa độ

35. Cho hàm số $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Hàm số luôn luôn nghịch biến $\forall x \in \mathbb{R}$ B. Đồ thị hàm số có ít nhất một điểm cực trị
C. Cả 3 phương án kia đều sai D. Hàm số luôn luôn đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$

36. Cho hàm số $y = |x|$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Cả hai phương án kia đều đúng B. Cả ba phương án kia đều sai
C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tại $x = 0$ D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

37. Tìm m để hàm số sau đây có cực trị: $f(x) = \frac{x^2 - mx}{mx - 1}$.

- A. $-1 < m < 0$ B. 0 C. $\forall m \in \mathbb{R}$ D. $-1 < m < 1$

38. Hàm số $y = -\sqrt[5]{x^4}$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

39. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 7$ là:

A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

40. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + 100$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

41. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị.

A. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$ B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$ C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ D. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$

42. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 2}{x - m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ khi :

A. Không tồn tại m B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m \neq \pm 1$

43. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi :

A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

44. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Tích $x_1.x_2$ bằng

A. -4 B. -5 C. -1 D. -2

45. Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ đạt cực đại tại $x =$

A. $\pm\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. 0

46. Khẳng định nào sau đây là đúng về đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$:

A. $x_{CD} = -1$ B. $y_{CT} = -4$ C. $y_{CD} + y_{CT} = 0$ D. $x_{CD} + x_{CT} = 3$

47. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m - 1)x - 1$ Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\forall m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị B. Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu
C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu D. $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị

48. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$. Toạ độ điểm cực đại của hàm số là

A. (-1;2) B. $(3; \frac{2}{3})$ C. (1;-2) D. (1;2)

49. Trong các mệnh đề sau, hãy tìm mệnh đề sai:

A. Hàm số $y = -2x + 1 + \frac{1}{x+2}$ không có cực trị;

B. Hàm số $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ có hai cực trị.

C. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có cực đại và cực tiểu;

D Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có cực trị;

50. Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ có giá trị cực đại là

A. 3

B. -5

C. -1

D. 3

51. Hàm số $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

52. Hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-1)x - 1$ có cực đại và cực tiểu nằm trong khoảng $(-2, 3)$. Khi đó, giá trị m là

A. $m \in (1, 3)$

B. $m \in (1, 4)$

C. $m \in (3, 4)$

D. $m \in (1, 3) \cup (3, 4)$

53. Hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}, x = \pi$. Khi đó, tổng có giá trị là:

A. 3

B. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

C. $\sqrt{3} + 1$

D. $\sqrt{3} - 1$

54. Hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ ($0 < x < 2\pi$) có hai cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất. Khi đó, giá trị m là:

A. $m = 3$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = 0$

55. Hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 9x - m$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Khi đó, giá trị m là:

A. $m \in [-3, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, 1]$

B. $m \in [-1, 3]$

C. $m \in [-1, -1 - \sqrt{3}) \cup (1, 1 + \sqrt{3}]$

D. $m \in (-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$

56. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + mx$ ($m \in \mathbb{R}$) có hai cực trị x_1, x_2 cùng lớn hơn giá trị tham số m . Khi đó, giá trị m là:

A. $m < -2$

B. $m \leq -2$

C. $m < -\frac{1}{2}$

D. $m > 0$ hoặc $m < -2$

57. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông. Khi đó, giá trị m là:

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = -1$

58. Hàm số nào dưới đây có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $y = x + \frac{1}{x}$

B. $y = 3 - \cos x - \cos 2x$

C. $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

D. $(x-3)\sqrt{|x|}$

59. Hàm số nào dưới đây có hai cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu lớn hơn giá trị cực đại.

A. $y = x^4 - 3x^2 + 2$

B. $y = -x^3 + 3x - 1$

C. $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

D. $y = \frac{x - 1}{x + 2}$

60. Hàm số nào dưới đây có cực đại mà không có cực tiểu.

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ B. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}$ C. $y = |x|\sqrt{x^2 + 1}$ D. $y = \cos x + \cos 2x$

61. Đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(1, 2)$. Giá trị biểu thức $a - 2b$ là:

A. 0 B. 4 C. 5 D. -5

62. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 4x_2 = 0$. Giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $m = 0$ B. $m = \pm \frac{9}{2}$ C. $m = \pm \frac{1}{2}$ D. $m = \pm \frac{3}{2}$

63. Giả sử hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có ba điểm cực trị B. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có năm điểm cực trị
C. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có năm điểm cực trị D. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có ba điểm cực trị

64. Giả sử đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có 2 điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy . Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có ba điểm cực trị B. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có năm điểm cực trị
C. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có năm điểm cực trị D. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

65. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D và $x_0 \in D$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại x_0 thì đạt cực đại tại x_0 .
B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thì đạt cực tiểu tại x_0 .
C. Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 thì tồn tại $h > 0$ sao cho $\min_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x) = f(x_0)$.

66. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D và $x_0 \in D$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì tồn tại $h > 0$ sao cho $\max_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x) = \min_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x)$.
B. Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì tồn tại $h > 0$ sao cho $\max_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x) = f(x_0)$.
C. Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì với mọi $h > 0$ ta có $\max_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x) = f(x_0)$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 thì với mọi $h > 0$ ta có $\min_{x \in (x_0 - h, x_0 + h)} f(x) = f(x_0)$.

67. Giả sử hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị sao cho giá trị cực tiểu $y_{CT} < 0$, giá trị cực đại $y_{CD} \leq 0$. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

68. Giả sử hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị sao cho giá trị cực tiểu $y_{CT} < 0$, và giá trị cực đại $y_{CD} > 0$. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị là:

A.7

B.3

C.4

D.5

69. Giả sử hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 3 cực trị sao cho giá trị cực tiểu $y_{CT} > 0$. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị là:

A.2

B.3

C.4

D.5

70. Giả sử hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ không có cực trị. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có ba điểm cực trị B. Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có một điểm cực trị

C. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có năm điểm cực trị D. Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập xác định $D = [a, b], (a < b)$. Hai số thực phân biệt $x_1, x_2 \in (a, b)$ thỏa mãn $f(x_1) > f(x), \forall x \in (x_1 - h, x_1 + h)$ và $f(x_2) > f(x), \forall x \in (x_2 - h, x_2 + h)$ với h đủ bé. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. Giá trị lớn nhất của hàm số là, giá trị nhỏ nhất của hàm số là

B. Điểm $(x_1, f(x_1))$ là điểm cực đại của hàm số, điểm $(x_2, f(x_2))$ là điểm cực tiểu của hàm số

C. Hàm số có tối đa hai cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 .

72. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^{2016}(x-2)^{2017}$. Đồ thị hàm số có số điểm cực trị là:

A.1

B.2

C.3

D.4

73. Đồ thị hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ có số điểm cực trị là:

A.1

B.2

C.3

D.0

74. Hàm số $f(x) = x^3 + bx + c$ đạt cực trị tại x_1, x_2 . Nhận xét nào dưới đây là đúng.

A. $x_1 \cdot x_2 = b$ B. $x_1 \cdot x_2 = c$ C. $x_1 + x_2 = -b$ D. $x_1 + x_2 = -c$

75. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Tam giác ABC có diện tích là:

A.4

B.2

C.1

D. $\frac{3}{2}$

76. Hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 1$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $m < 0$ B. $m \geq 0$ C. $m \leq 5$ D. $m \in \mathbb{R}$

77. Hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 . Khi m thay đổi, điểm cực đại di động trên đường cong nào dưới đây.

A. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ B. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ C. $y = 3x^3 + 2x^2 + 1$ D. $y = 3x^3 - 2x^2 + 1$

78. Đồ thị hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ 2x, & -1 \leq x < 0 \\ -3x - 5, & x < -1 \end{cases}$ có số điểm cực trị là:

- A.1 B.2 C.3 D.0

79. Hàm số $f(x) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 + x_2| = 2$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

80. Giả sử hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có một cực trị. Khi đó, giá trị a và b thỏa mãn yêu cầu nào dưới đây.

- A. $a < 0, b \leq 0$ B. $a < 0, 0 \leq b$ C. $a > 0, b \leq 0$ D. $a > 0, 0 \leq b$

81. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ (C_m) có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của m là :

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -\frac{1}{3}$ D. $m = -1$

82. Nhận xét nào dưới đây là đúng khi nói về tính chất của các điểm cực trị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

- A. Các điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O .
B. Các điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam đều.
C. Các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O .
D. Các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua trục Oy .

83. Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + m^2 - m + 1$ $x + 1$. Để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ thì giá trị của m là:

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = 2$

84. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = m \ln(x+2) + x^2 - x$ có 2 điểm cực trị trái dấu là:

- A.0 B.1 C.2 D.3

85. Cho hàm số $y = f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ có đồ thị (C) với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a < b < c$. Hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Khi đó khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $x_1 < x_2 < a$ B. $a < x_1 < b < x_2 < c$ C. $c < x_1 < x_2$ D. $x_1 < b < x_2$

86. Hàm số $f(x) = -x^3 + (m+3)x^2 - m(m+2)x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 = 0$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $m = 12$ hoặc $m = 2$ C. $m = 2$ D. $m = 12$

87. Hàm số $f(x) = x + 2 + \sin x$ đạt cực tiểu tại

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$C. x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$D. x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

88. Hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ đạt cực tiểu tại

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{e^2}$

D. $-\frac{2}{e}$

89. Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ là:

A. $y_{CD} = \sqrt{2}$

B. $y_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $y_{CD} = -1$

D. $y_{CD} = 1$

90. Giả sử hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + 3x - 1$ có cực đại và cực tiểu. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $0 < m < \frac{9}{4}$

B. $m \in \mathbb{R}$

C. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{9}{4} \end{cases}$

D. $m > 2$

91. Giả sử hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $m \geq 1$

B. $m \leq 0$

C. $0 \leq m \leq 1$

D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

92. Giả sử hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 3$

D. không tồn tại m

93. Số điểm cực trị có tung độ dương của đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

94. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số bằng:

A. $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

95. Để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ có cực trị tại hai điểm x_1 và x_2 sao cho $x_1 < -1 < x_2$ thì giá trị m là:

A. $m < 1$

B. $m > 1$

C. $m < -1$

D. $m > -1$

96. Giả sử hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ đạt cực trị tại $x = 1$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m > 1$

D. $m = 2$

97. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $A \in Oy, BC = 1$.

Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A.9 B.4 C.1 D. $\frac{1}{4}$

98. Đồ thị hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ có số điểm cực trị là:

- A.0 B.1 C.2 D.3

99. Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}$ là:

- A. (0,1) và (2,3) B. (0,3) và (2,1) C. (0,3) và (1,2) D. (0,0) và (2,2)

100. Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (2m^2 + 1)x - 7m + \frac{2}{3}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao

cho $x_1^3 + x_2^3 = 26$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

101. Hàm số $f(x) = -2x^3 + 3(2m+1)x^2 - 6m(m+1)x - 5m + 7$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_{CD} < 3x_{CT} - 1$. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. $m > -1$ B. $m < 0$ C. $m < -1$ D. $m \leq 2$

102. Hàm số $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao

cho biểu thức $|x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. $m = -4$ B. $m = 0$ C. $m = 4$ D. $m = -1$

103. Xét hàm số $f(x)$ xác định, liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		↘	1	↗	2	↘	1	↗

Mệnh đề nào dưới đây là sai.

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. D. Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại.

104. Đồ thị hàm số $y = e^x(x^2 - 3x - 5)$ có số điểm cực trị là:

- A.2 B.3 C.4 D.5

105. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

A. $x=1$ B. $y=1$ C. $x=2$ D. $y=2$

106. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

A. $x=1$ B. $y=1$ C. $x=2$ D. $y=2$

107. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{2x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$ B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = \frac{3}{2}$

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

108. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

109. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=a$ và $y=b$.

Khi đó, giá trị biểu thức $a+b-ab$ là:

A.2 B.1 C.3 D.0

110. Gọi a, b, c lần lượt là số tiệm cận của đồ thị các hàm số $y = x^4 - 2x^2$, $y = \frac{x-3}{2x+1}$, $y = x+1$.

Nhận xét nào dưới đây là đúng.

A. $a=b$ B. $a=c$ C. $a-c > b$ D. $a+c > b$

111. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

112. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+3}$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

113. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{5-x}}$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

114. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+2}{x^2-2x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x=2$ B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y=2$

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=1, x=3$.

115. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-7x+6}}{x+1}$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

116. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 2m - 1}{x + m}$ có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3; 1)$.

Giá trị m là:

- A.1 B.3 C.-3 D.-1

117. Đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2x}{x + 1}$ có tiệm cận đứng là $x = -1$. Giá trị m là:

- A. $m \neq 2$ B. $m \neq -2$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

118. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 2m^2 - 1}{mx + 1}$ có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1, 1)$.

Giá trị m là:

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m \neq 1$ D. $m \neq 1$

119. Cho hàm số $f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $x = 2$
 B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 2$
 C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 2$
 D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là $y = 2$

120. Cho hàm số $f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $x = 2$
 B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 2$
 C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 2$
 D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là $y = 2$

121. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Đồ thị hàm số có số tiệm cận là:

- A.2 B.3 C.4 D.5

122. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Đồ thị hàm số có số tiệm cận ngang là:

- A.2 B.3 C.1 D.5

123. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{mx + 1}{2x - 3}$ có tiệm cận đứng. Khi đó, giá trị m là:

- A. $m \neq \frac{2}{3}$ B. $m \neq -\frac{2}{3}$ C. $m \neq \frac{3}{2}$ D. $m \neq \frac{3}{2}$

124. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ không có tiệm cận. Khi đó, giá trị m là:

A. $m = \frac{7}{2}$

B. $m \neq \frac{7}{2}$

C. $m = 0$

D. $m \neq 0$

125. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. Khi đó, giá trị m là:

A. $m = 1, m = 8$

B. $m = 1, m = \frac{1}{8}$

C. $m = -1, m = 8$

D. $m = 1, m = -\frac{1}{8}$

126. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ \frac{2x}{x-1}, & x < 1 \end{cases}$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

127. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

128. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

129. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, chọn phương án đúng trong các phương án sau:

A. $\max y = 2, \min y = 0$
[-2;0] [-2;0]

B. $\max y = 4, \min y = 0$
[-2;0] [-2;0]

C. $\max y = 4, \min y = -1$
[-2;0] [-2;0]

D. $\max y = 2, \min y = -1$
[-2;0] [-2;0]

130. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A. $\max y = 0, \min y = -2$
[-1;1] [-1;1]

B. $\max y = 2, \min y = 0$
[-1;1] [-1;1]

C. $\max y = 2, \min y = -2$
[-1;1] [-1;1]

D. $\max y = 2, \min y = -1$
[-1;1] [-1;1]

131. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. 2

D. 1

132. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\pi}{4} + 1$

D. $\frac{\pi}{2}$

133. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

- A. $\frac{23}{27}$ B. $\frac{1}{27}$ C. 5 D. 1

134. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2,3]$ là:

- A. 0 B. -2 C. 1 D. -5

135. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2-3x}{x+1}$ trên đoạn $[0,3]$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

136. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2$ lần lượt là :

- A. 4 và 1 B. 3 và C. 4 và 0 D. 1 và 0

137. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (x-1)^2(4-x) - m^2 + 5m$ trên đoạn $[2;5]$ bằng 8, thì giá trị của m là:

- A. $m = 1$ hoặc $m = 4$ B. $m = 2$ hoặc $m = 4$ C. $m = 1$ hoặc $m = -4$ D. $m = -1$ hoặc $m = 2$

138. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. Khi đó,

khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $a^2 + b^2 = 5$ B. $a^2 + b^2 = 10$ C. $a^2 + b^2 = 13$ D. $a^2 + b^2 = 25$

139. Một chủ hộ kinh doanh có 50 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2,000,000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ thêm 50,000đ/tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất.

- A. 2,200,000đ B. 2,250,000đ C. 2,300,000đ D. 2,500,000đ

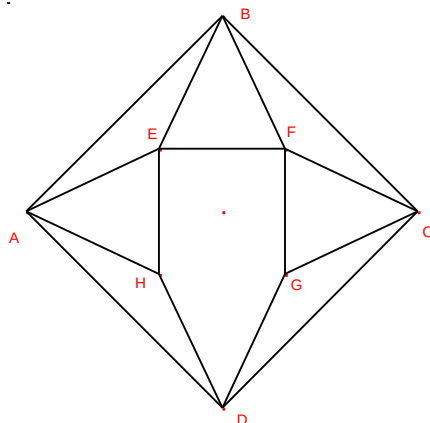
140. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất

- A. 0.6 B. 0.7 C. 0.8 D. 0.5

141. Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng $5\sqrt{2}$ để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích lớn nhất.

- A. 4 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 1

142. Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An đã nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng a, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD và DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A;B;C;D trùng nhau (Như hình).



Thể tích lớn nhất của khối tứ diện đều tạo được là:

- A. $\frac{a^3}{36}$ B. $\frac{a^3}{24}$ C. $\frac{a^3}{54}$ D. $\frac{a^3}{48}$

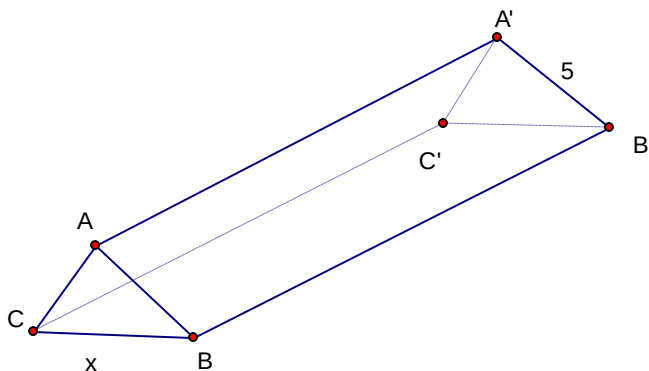
143. Gọi M và N lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x$. Lúc đó, tổng $2M + 3N$ bằng

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

144. Cho hàm số $f(x) = \sin^4 x - \cos^2 x$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

- A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. 2 D. 0

145. Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của 1 lăng trụ đứng như hình vẽ. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m, rộng 5m. Gọi x (mét) là độ dài của cạnh BC . Tìm x để lăng trụ có thể tích lớn nhất.



- A. $\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{2}$

146. Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng bên trong dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông, có thể tích là $62,5m^3$. Hỏi các cạnh hình hộp và cạnh đáy là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất.

- A. Cạnh bên 2,5m. cạnh đáy 5m B. Cạnh bên 4m. cạnh đáy $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ m

C. Cạnh bên 3m, cạnh đáy $\frac{5\sqrt{30}}{6}$

D. Cạnh bên 5m, cạnh đáy $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

147. Một giáo viên đang đau đầu về việc lương thấp và phân vân xem có nên tạm dừng niềm đam mê với con chữ để chuyển hẳn sang kinh doanh đồ uống trà sữa hay không. Ước tính nếu giá 1 ly trà sữa là 20 (ngàn đồng) thì trung bình hàng tháng có khoảng 1000 lượt khách tới uống nước tại quán, trung bình mỗi khách lại trả thêm 10 (ngàn đồng) tiền bánh tráng trộn để ăn kèm. Nay người giáo viên muốn tăng thêm mỗi ly trà sữa 5 (ngàn đồng) thì sẽ mất khoảng 100 khách trong tổng số trung bình. Hỏi giá 1 ly trà sữa

148. nên là bao nhiêu để tổng thu nhập lớn nhất (giả sử tổng thu chưa trừ vốn)

A. Giảm 15 ngàn đồng

B. Tăng 5 ngàn đồng

C. Giữ nguyên không tăng giá

D. Tăng thêm 2,5 ngàn đồng

149. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = x \ln x - x \ln 5$ trên $[1, 5]$. Giá trị M, N lần lượt là:

A. $M = 0, N = \frac{-5}{e}$

B. $M = 1, N = \frac{-5}{e}$

C. $M = 0, N = \frac{-5}{2e}$

D. $M = 1, N = \frac{-4}{e}$

150. Do nhu cầu sử dụng, người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h , có thể tích $1m^3$. Với a, h như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất.

A. $a = 1, h = 1$

B. $a = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}$

C. $a = 2, h = 2$

D. $a = \frac{1}{3}, h = \frac{1}{3}$

151. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là ?

A. 74 triệu đồng

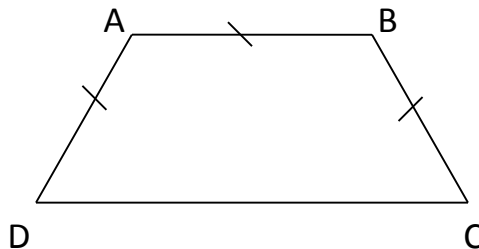
B. 75 triệu đồng

C. 76 triệu đồng

D. 77 triệu đồng

152. Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB, $AB = AD = BC = 2$. Giá trị của góc

$\alpha = \angle ADC = \angle BCD$ để hình thang có diện tích lớn nhất là ?



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

153. Số giờ có ánh sáng mặt trời của TPHCM năm không nhuận được cho bởi

$y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{178}(x - 60)\right) + 10$ với $1 \leq x \leq 365$ là số ngày trong năm. Ngày 25/5 của năm thì số giờ có

ánh sáng mặt trời của TPHCM gần với con số nào nhất ?

A. 2h

B. 12h

C. 13h30

D. 14h

154. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$. Khi đó, giá trị $\frac{M}{m}$ là:

- A. 4 B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{14}{9}$ D. 9

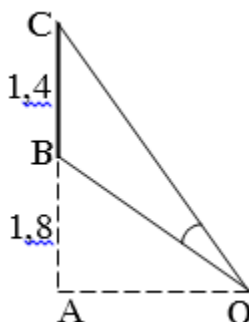
155. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x - \cos x$. Khi đó $M - m$ bằng:

- A. $2\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 0

156. Một đường dây dẫn điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo tại C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1km. Khoảng cách ngắn nhất từ A đến B là 4km. Mỗi km dây dẫn đặt trên mặt đất tốn chi phí 3000 triệu đồng, còn đặt dưới nước mất 5000 triệu đồng. S là vị trí nào đó nằm trên bờ sao cho chi phí lắp đặt đường dây dẫn điện từ A sang C là thấp nhất. Vị trí của S cách A bao nhiêu km ?

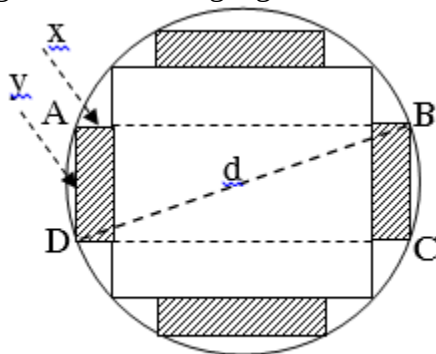
- A. 1 B. 4 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{13}{4}$

157. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính từ mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ màn hình cần phải chọn vị trí đứng sao cho góc nhìn là lớn nhất. Vị trí đó cách màn ảnh bao nhiêu m?



- A. 2,4 B. 1,4 C. 3,2 D. 0,4

158. Từ một khúc gỗ hình trụ, người ta cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ là hình chữ nhật như hình vẽ. Xác định kích thước chiều rộng của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}$

B. $\frac{\sqrt{34}+3\sqrt{2}}{16}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

D. $\frac{\sqrt{34}}{16}$

159. Chi phí nguyên liệu của một tàu chở hàng được chi làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/ giờ, phần thứ hai tỷ lệ với lập phương vận tốc, khi vận tốc là thì chi phí phần thứ hai là 30 ngàn đồng/giờ. Vận tốc để tổng chi phí nguyên liệu đi trên 1km đường là nhỏ nhất là:

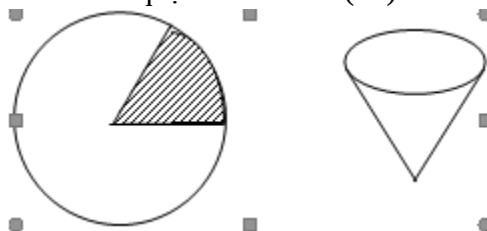
A. 15km/h

B. 30km/h

C. 50km/h

D. 10km/h

160. Với một đĩa tròn bằng thép trắng, người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa tròn và gấp phần còn lại thành một hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích hình quạt là lớn nhất. (13)



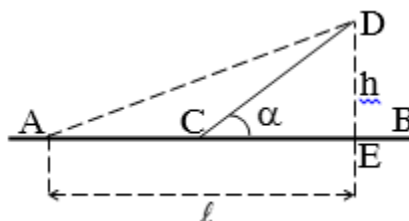
A. 65°

B. 295°

C. 125°

D. 57°

161. Từ cảng A dọc theo đường sắt AB cần phải xác định một trạm trung chuyển C và xây dựng một con đường từ C đến cảng D. Biết rằng vận tốc khi đi trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 ($v_1 > v_2$). Hãy xác định phương án chọn vị trí điểm C sao cho thời gian chuyển hàng từ cảng A đến cảng D là ngắn nhất.



A. C cách A một khoảng là $l - h \cdot \frac{v_1}{v_2}$

B. C cách A một khoảng là $l - h \cdot \frac{v_2}{v_1}$

C. C cách A một khoảng là $l + h \cdot \frac{v_1}{v_2}$

D. C cách A một khoảng là $l + h \cdot \frac{v_2}{v_1}$

162. Cần phải xây dựng một hồ ga hình hộp chữ nhật có thể tích là $V(m^3)$. Hãy xác định các kích thước của đáy để chi phí vật liệu xây dựng là thấp nhất biết k cho trước là tỷ số chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy.

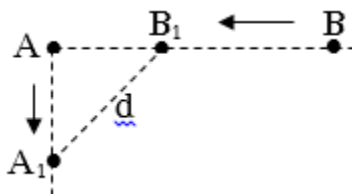
A. Chiều dài là $y = \sqrt[3]{\frac{k+1}{2k^2}V}$, chiều rộng là $x = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$

B. Chiều dài là $y = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$, chiều rộng là $x = \sqrt[3]{\frac{k+1}{2k^2}V}$

C. Chiều dài là $y = \sqrt[3]{\frac{k(k+1)V}{2}}$, chiều rộng là $x = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$

D. Chiều dài là $y = \sqrt[3]{\frac{k(k+1)V}{2}}$, chiều rộng là $x = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$

163. Hai con tàu cách nhau 5 hải lý. Cả hai con tàu khởi hành cùng lúc, một tàu chạy theo hướng nam với vận tốc 6 hải lý/giờ; tàu còn lại chạy theo hướng về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu lớn nhất là:



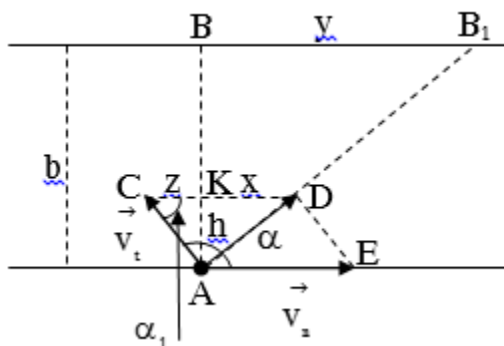
A. $\frac{16}{17}$

B. $\frac{1}{17}$

C. $\frac{6}{17}$

D. $\frac{7}{17}$

164. Cần phải dùng thuyền để vượt sang bờ đối diện của một dòng sông chảy siết với vận tốc nước chảy v_{nc} lớn hơn vận tốc của thuyền v_t . Hướng đi của thuyền phải như thế nào để độ dời do dòng chảy gây ra là thấp nhất tức là hướng đi chuyển hợp với phương ngang góc α thỏa:



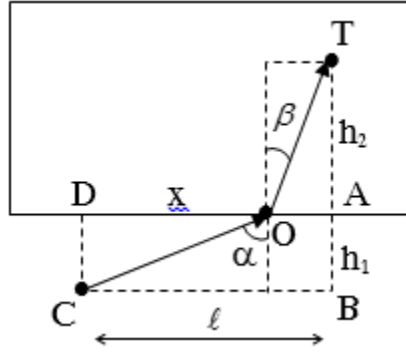
A. $\cos \alpha = \frac{v_{nc}}{v_t}$

B. $\cos \alpha = \frac{v_t}{v_{nc}}$

C. $\sin \alpha = \frac{v_{nc}}{v_t}$

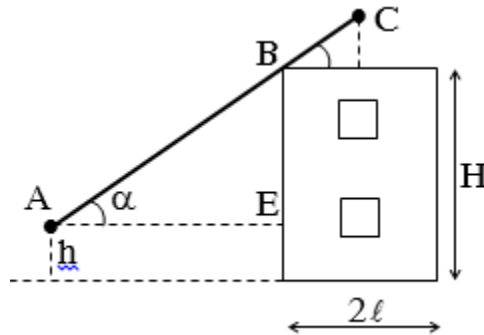
D. $\sin \alpha = \frac{v_t}{v_{nc}}$

165. Một người làm nhiệm vụ cứu hộ gần bờ, cần phải cứu một người bị đuối nước ở giữa hồ. Nếu biết rõ vận tốc của người cứu hộ là v_1 và vận tốc của người bị đuối nước là v_2 . Người cứu hộ phải chọn đường đi sao cho thời gian tới vị trí người cứu hộ là ngắn nhất. Quỹ đạo đường đi của người cứu hộ phải thỏa mãn điều kiện gì?



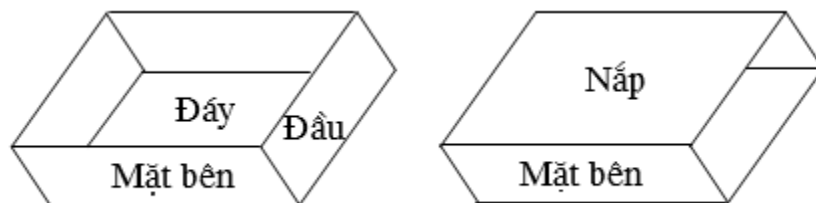
- A. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$ B. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1}$ C. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2 - v_1}{v_2}$ D. $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2 - v_1}$

166. Hãy xác định độ dài cánh tay nâng của cần cầu bánh hơi có thể dùng được để xây dựng tòa nhà có chiều cao H và chiều rộng 2ℓ (Biết rằng cần cầu thỏa mãn yêu cầu sau đây: có thể xếp xích chiếc cần cầu cũng như góc nghiêng của tay nâng để sao cho điểm cuối của tay nâng chiếu xuống theo phương thẳng đứng thì trùng với trung điểm của bề rộng. Ta giả sử ngôi nhà xây dựng trên miếng đất rộng, cần cầu có thể di chuyển thoải mái).



- A. $AC = (H + h) \sqrt[3]{\left(\frac{\ell}{H + h}\right)^2 + 1} + \ell \sqrt[3]{\left(\frac{H + h}{\ell}\right)^2 + 1}$
 B. $AC = (H + h) \sqrt[3]{\left(\frac{\ell}{H + h}\right)^2 + 1} + \ell \sqrt[3]{\left(\frac{H - h}{\ell}\right)^2 + 1}$
 C. $AC = \sqrt[3]{\left(\frac{\ell}{H - h}\right)^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{H - h}{\ell}\right)^2 + 1}$
 D. $AC = (H - h) \sqrt[3]{\left(\frac{\ell}{H - h}\right)^2 + 1} + \ell \sqrt[3]{\left(\frac{H - h}{\ell}\right)^2 + 1}$

167. Cấu tạo của một hộp diêm gồm một nắp, hai đáy, bốn mặt bên và hai đầu như hình vẽ. Gọi x, y, z lần lượt là chiều cao chiều rộng chiều dài của hộp diêm Tỷ lệ x, y, z phải như thế nào để với thể tích V cố định khi chế tạo chi phí dành cho vật liệu sản xuất là ít nhất.



A. $x : y : z = 3 : 4 : 2$

B. $x : y : z = 4 : 3 : 2$

C. $x : y : z = 2 : 3 : 4$

D. $x : y : z = 3 : 2 : 4$

168. Cần làm một cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật có chu vi là $a(m)$ (a là chu vi cửa sổ tức là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung hình bán nguyệt). Kích thước của hình chữ nhật để diện tích cửa sổ lớn nhất là:

A. Chiều cao là $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều rộng là $\frac{2a}{4 + \pi}$

B. Chiều cao là $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều rộng là $\frac{a}{4 + \pi}$

C. Chiều cao là $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều rộng là $\frac{2a}{4 + \pi}$

D. Chiều cao là $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều rộng là $\frac{a}{4 + \pi}$

169. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm $A(\frac{1}{2}; 1)$ có phương trình là:

A. $2x - 2y + 1 = 0$

B. $2x - 2y - 1 = 0$

C. $2x + 2y - 3 = 0$

D.

$2x + 2y + 3 = 0$

170. Số đường thẳng đi qua điểm $A(0;3)$ và tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ là:

A.0

B.1

C.2

D.3

171. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số, có phương trình là:

A. $y = -x + \frac{11}{3}$

B. $y = -x - \frac{1}{3}$

C. $y = x + \frac{11}{3}$

D. $y = x + \frac{1}{3}$

172. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{x+3}$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành có phương trình:

A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

B. $y = -4x + 4$

C. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

D. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}$

173. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng:

A.-3

B.3

C.4

D.0

174. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là:

A. $y = -x - \frac{7}{3}$

B. $y = x - \frac{7}{3}$

C. $y = -x + \frac{7}{3}$

D. $y = \frac{7}{3}x$

175. Cho đường cong $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y = 8x + 1$

B. $y = 3x + 1$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = 3x - 1$

176. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ với trục Oy. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M là: Chọn 1

A. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

B. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

C. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

D. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

177. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng:

A. -2

B. 2

C. 0

D. Đáp số khác

178. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình là:

A. $y = -x - 3$

B. $y = -x + 2$

C. $y = x - 1$

D. $y = x + 2$

179. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng :

A. $\frac{4}{3}$

B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. -1

180. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là:

A. $y + 16 = -9(x + 3)$

B. $y - 16 = -9(x - 3)$

C. $y - 16 = -9(x + 3)$

D. $y = -9(x + 3)$

181. Số tiếp tuyến đi qua điểm A (1 ; -6) của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là:

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

182. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. Song song với đường thẳng $x = 1$

B. Song song với trục hoành

C. Có hệ số góc dương

D. Có hệ số góc bằng -1

183. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

184.H

185. Số đường thẳng đi qua điểm $A(2; 0)$ và tiếp xúc với đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

186. Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x+1}(C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

- A. $d: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ B. $d: y = x + \frac{1}{3}$ C. $d: y = -\frac{1}{3}x + 1$ D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

187. Gọi $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Diện tích tam giác OAB là:

- A. $\frac{121}{6}$ B. $\frac{119}{6}$ C. $\frac{123}{6}$ D. $\frac{125}{6}$

188. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung bằng.

- A. -2 B. 2 C. 1 D. -1

189. Đường thẳng $y = 3x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 2$ khi m bằng

- A. 1 hoặc -1 B. 4 hoặc 0 C. 2 hoặc -2 D. 3 hoặc -3

190. M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$, biết tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M đó

tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{4}$. Tọa độ M là:

- A. $M(0;0)$ và $M(1;1)$. B. $M(1;1)$ và $M(-2;4)$.
C. $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ và $M\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ D. $M(1;1)$ và $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

191. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) và có hệ số góc nhỏ nhất?

- A. $y = -3x - 3$ B. $y = -x + 3$ C. $y = -5x + 10$ D. $y = -3x + 3$

192. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng:

- A. $k = 3$ B. $k = 2$ C. $k = 1$ D. $k = 0$

193. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm

$A(-1; 0)$ là:

- A. $y = \frac{3}{4}x$ B. $y = \frac{3}{4}(x+1)$ C. $y = 3(x+1)$ D. $y = 3x+1$

194. Qua điểm $A(0; 2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

195. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng

$\Delta: 2x + y - 1 = 0$ là:

- A. $2x + y - 7 = 0$ B. $2x + y + 7 = 0$ C. $2x + y = 0$ D. $-2x - y - 1 = 0$

196. Cho đường cong (C): $y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0; a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện:

- A. $a < \frac{10}{3}$ B. $2 < a < \frac{10}{3}$ C. $\begin{cases} a < 2 \\ a > \frac{10}{3} \end{cases}$ D. $a > 2$

197. Giả sử để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{5}$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Khi đó giá trị m là:

- A. $m=1$ hoặc $m = \frac{5}{2}$ B. $m = \frac{5}{2}$ hoặc $m=2$ C. $m = \frac{3}{2}$ hoặc $m=2$ D. $m=1$ hoặc $m=2$

198. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại hai điểm A và B. Khi đó $MA = kMB$, giá trị của k bằng:

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

199. Số đường tiếp tuyến vẽ từ $M(-1; -9)$ đến (C): $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

200. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (1). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ có dạng $y = ax + b$ (với a, b đã tối giản). Giá trị $S = a + b$ là:

- A. $-\frac{29}{3}$ B. $-\frac{20}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $-\frac{19}{3}$

201. Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$. Hệ số a, b, c là:

- A. $a = 3, b = 3, c = 2$ B. $a = 3, b = -3, c = 2$ C. $a = -3, b = 3, c = 2$ D. $a = -3, b = -3, c = 2$

202. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$ và tiếp tuyến tại A có hệ số góc bằng

-3. Giá trị a, b là:

A. $a = 4, b = 1$

B. $a = 2, b = -1$

C. $a = 4, b = -1$

D. $a = -4, b = -1$

203. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Các cặp tiếp tuyến song song của (C) sao cho khoảng cách giữa chúng lớn nhất là:

A. $y = x+3-2\sqrt{3}$ và $y = x+3+2\sqrt{3}$

B. $y = -x+3-2\sqrt{3}$ và $y = -x+3+2\sqrt{3}$

C. $y = x-3-2\sqrt{3}$ và $y = x+3+2\sqrt{3}$

D. $y = x+3-2\sqrt{3}$ và $y = x-3+2\sqrt{3}$

204. Số tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ qua $A(-2; 5)$ là :

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

205. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất là:

A. $M(\sqrt{3}; \frac{7-3\sqrt{3}}{2}); M(1+\sqrt{3}; \frac{7+3\sqrt{3}}{2})$

B. $M(1-\sqrt{2}; -\frac{2+3\sqrt{2}}{2}); M(1+\sqrt{3}; -\frac{2+3\sqrt{2}}{2})$

C. $M(1-\sqrt{3}; -4+3\sqrt{3}); M(1+\sqrt{3}; -4-3\sqrt{3})$

D. $M(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}); M(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$

206. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ đồ thị (C) . Tiếp tuyến d tại điểm M thuộc (C) cắt tiệm cận đứng và

tiệm cận ngang tại A, B sao cho $\cos BAI = \frac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận là. Tọa độ M là:

A. $M(\frac{5}{2}; 4), M(\frac{3}{2}; 0)$

B. $M(-\frac{5}{2}; 4), M(-\frac{3}{2}; 0)$

C. $M(0; \frac{3}{2}), M(4; \frac{5}{2})$

D. $M(0; -\frac{3}{2}), M(4; -\frac{5}{2})$

207. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1(C)$. Điểm $M \in Oy$ sao cho từ M vẽ được 3 tiếp tuyến với (C) .

Tọa độ M là:

A. $M(0; -2)$

B. $M(0; -1)$

C. $M(0; 2)$

D. $M(0; 1)$

208. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt trục hoành, trục tung

lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B . Tam giác OAB có cạnh huyền gấp $\sqrt{5}$ lần cạnh góc vuông thì một phương trình tuyến tuyến đó là:

(I) $y = -2x$; (II) $y = -2x + 1$; (III) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$; (IV) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

A. Chỉ có (II), (III), (IV) đúng

B. (I), (II), (III), (IV) đều đúng

C. Chỉ có (I), (II), đúng

D. Chỉ có (III), (IV), đúng

209. Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm có tọa độ lần lượt là $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Khi đó, giá trị biểu thức $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$ là:

A. 12

B. 4

C. 0

D. 8

210. Cho đồ thị (C): $y = \frac{x+1}{x-2}$ và đường thẳng $d: y = x + m$. Khi d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt và tiếp tuyến với (C) tại hai điểm này song song với nhau thì giá trị m là:

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

211. Tìm m để đường thẳng (d): $y = mx - 2m + 4$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$ tại ba điểm phân biệt

A. $m > -3$

B. $m > 0$

C. $m < 0$

D. $m < 1$

212. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt khi :

A. $0 \leq m < 4$

B. $m < -2$

C. $0 < m \leq 4$

D. $-2 < m < 4$

213. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tìm m để phương trình: $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có hai nghiệm phân biệt? Chọn 1 câu đúng.

A. $m > 3 \vee m = 2$

B. $m < 3$

C. $m > 3 \vee m < 2$

D. $m < 2$

214. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Tìm m để phương trình: $x(x - 3)^2 = m - 1$ có ba nghiệm phân biệt? Chọn 1 câu đúng.

A. $m > 1$

B. $1 < m < 5$

C. $m > 3 \vee m < 2$

D. $m < 5$

215. Cho hàm số $y = x^3 - 8x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là: Chọn 1 câu đúng

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

216. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

217. Gọi M và N là giao điểm của đường cong $y = \frac{7x+6}{x-2}$ và đường thẳng $y = x + 2$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn MN bằng: Chọn 1 câu đúng

A. 7

B. 3

C. $-\frac{7}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

218. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$ và trục hoành là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

219. Gọi $A(x_0, y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1}$ và đường thẳng $y = x - 1$.

Khi đó, giá trị $x_0 + y_0$ là:

- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

220. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ và đường thẳng $y = x - 2$ là:

- A. $(1, -1), (0, -2)$ B. $(-1, -3), (3, 1)$ C. $(-1, -3), (0, -2)$ D. $(1, -1), (3, 1)$

221. Phương trình $x^3 - 3x + 1 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi:

- A. $m = 1$ B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$ C. $m < 1$ D. $-1 < m < 1$

222. Phương trình $4x^3 - 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi:

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$

223. Phương trình $-x^4 + 4x^2 - 3 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi:

- A. $1 < m < 2$ B. $-1 < m < 2$ C. $-3 < m < 1$ D. $1 < m < 3$

224. Đồ thị hàm số $y = x^3 - (3 - m)x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi:

- A. $m < 3$ B. $3 < m$ C. $m < 1$ D. $1 < m$

225. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$. Khi đó, giá trị m là:

- A. $m \in (-\infty, 1)$ B. $m \in \left(-\frac{1}{4}, 1\right) \setminus \{0\}$ C. $m \in \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ D. $m \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$

226. Đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi:

- A. $m \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$ B. $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
C. $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

227. Đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi:

- A. $m = 0$ B. $-\frac{3\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3\sqrt{6}}{2}$ C. $-\frac{5\sqrt{6}}{2} < m < \frac{5\sqrt{6}}{2}$ D. $-\frac{7\sqrt{6}}{2} < m < \frac{7\sqrt{6}}{2}$

228. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 tạo thành cấp số cộng. Khi đó, giá trị m là:

- A. $m = 1$ B. $m = 12$ C. $m = 2$ D. $m = 11$

229. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 - 9x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 tạo thành cấp số cộng. Khi đó, khoảng chứa giá trị m là:

- A. $m \in (2, 3)$ B. $m \in (-1, 0)$ C. $m \in (1, 2)$ D. $m \in (-2, -1)$

230. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^3 + (5-m)x^2 + (6-5m)x - 6m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 tạo thành cấp số nhân. Khi đó, số giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

231. Đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 6x + 2$ cắt đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến của (C) tại A, B, C bằng -6. Giá trị m thỏa mãn đề bài là

- A. $m = -3$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

232. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ cắt đường thẳng $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt khi:

- A. $m < 2 - \sqrt{2}$ B. $m > 2 - \sqrt{2}$ C. $2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$ D. $m < 2 + \sqrt{2}$

233. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ cắt đường thẳng $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau. Giá trị m là:

- A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 2$ D. $m = 0$

234. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 6x + 2$ và đường thẳng $(d): y = mx$. Đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi:

- A. $m \in \left(-\frac{9}{4}, +\infty\right) \setminus \{1\}$ B. $m \in \left(-\frac{9}{4}, +\infty\right) \setminus \{0\}$ C. $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$ D. $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \setminus \{0\}$

235. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ cắt đường thẳng $(d): y = -2x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn biểu thức $k_1^{2018} + k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất (lần lượt là các hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B). Giá trị m là:

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -3$ D. $m = -1$

236. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + m$ tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung khi:

- A. $m > 1$ B. $m > 2$ C. $m < 3$ D. $m < 4$

237. Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 - m + 1$ cắt đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ tại ba điểm phân biệt. Giá trị m thỏa mãn đề bài là

- A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ B. $m > -\frac{1}{2}$ C. $m < \frac{3}{2}$ D. $m < \frac{3}{4}$

238. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ cắt đường thẳng $(d): y = -2x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất. Giá trị m là:

A. $m = \frac{1}{2}$ B. $m = \frac{3}{2}$ C. $m = \frac{5}{2}$ D. $m = \frac{7}{2}$

239. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ cắt đường thẳng (d): $y = 2x + m$ tại hai điểm phân biệt

A, B sao cho độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{5}$. Giá trị m là:

A. $m = -3$ B. $m = -2$ C. $\begin{cases} m = -10 \\ m = -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = -2 \\ m = -1 \end{cases}$

240. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ cắt đường thẳng (d): $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho độ dài đoạn thẳng ΔOAB vuông cân (với O là gốc tọa độ). Giá trị m là:

A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $m = \frac{2}{3}$ D. $m = -\frac{2}{3}$

241. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{1-2x}$ cắt đường thẳng (d): $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho độ dài đoạn thẳng $AB = |\overline{OA} + \overline{OB}|$ vuông cân (với O là gốc tọa độ). Giá trị m là:

A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $\begin{cases} m = -2 \\ m = -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$

242. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng (d): $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt

A, B sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A và B song song với nhau. Giá trị m là:

A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

243. Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2mx^2 + m + m^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi:

A. $-1 < m < -\frac{1}{2}$ B. $1 < m < \frac{3}{2}$ C. $-1 < m < \frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2} < m < 0$

244. Đường thẳng (d): $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$. Giá trị m là:

A. $m = 4$ B. $m = -4$ C. $m = \frac{1}{9}$ D. $m = -\frac{1}{9}$

245. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 4m$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D phân biệt có hoành độ tăng dần và $AD = 2BC$. Giá trị m là:

A. $-1 < m < -\frac{1}{2}$ B. $1 < m < \frac{3}{2}$ C. $-1 < m < \frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2} < m < 0$

246. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - (m+1)x^2 - m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm A, B, C sao cho $BC = 4$. Giá trị m là:

- A. $m = 4$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

247. Đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ tại ba điểm A, B, C trong đó A là điểm cố định và diện tích tam giác OBC gấp 2 lần diện tích tam giác OAB. Giá trị m là:

- A. $m = \frac{3}{4}$ B. $m = -\frac{3}{4}$ C. $m = \frac{1}{9}$ D. $m = -\frac{1}{9}$

248. Đường thẳng (d) đi qua $M(2, 0)$ có hệ số góc là k cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$. Giá trị k là:

- A. $k = \frac{3}{4}$ B. $k = -\frac{3}{4}$ C. $k = \frac{2}{3}$ D. $k = -\frac{2}{3}$

249. M là điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang. Tọa độ điểm M là:

- A. $\begin{bmatrix} M(2, 1) \\ M(4, 3) \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} M(0, -1) \\ M(4, 3) \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} M(0, -1) \\ M(3, 2) \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} M(2, 1) \\ M(3, 2) \end{bmatrix}$

250. M là điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

251. M, N là điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ đối xứng với nhau qua $I(2, 18)$. Số cặp điểm M, N thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

252. Đồ thị của hàm số $y = x^4 + mx^2 - 1 - m$ luôn đi qua các điểm cố định có tọa độ lần lượt là:

- A. $(-1, 0), (1, 0)$ B. $(0, 1), (1, 0)$ C. $(-2, 1), (-2, 3)$ D. $(2, 1), (0, 1)$

253. Số điểm có tọa độ nguyên trên đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+7}{x+2}$ là:

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

254. M là điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ và d là tổng khoảng cách từ M đến các trục tọa độ. Giá trị nhỏ nhất của d là:

- A.1 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

255. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (1) và các mệnh đề:

- (1) Hàm số (1) liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (2) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$
- (3) Giá trị cực đại của hàm số (1) là $y_{CD} = -1$
- (4) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x = 1$ có hệ số góc là $k = 0$
- (5) Đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

- A.2 B.3 C.4 D.5

256. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ (1) và các mệnh đề:

- (1) Hàm số (1) có 3 cực trị
- (2) Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất
- (3) Tập giá trị của hàm số (1) là $T = \mathbb{R}$.
- (4) Đồ thị hàm số (1) có một tiệm cận đứng
- (5) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 song song với đường thẳng $y = -4x + 1$

Các mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là:

- A. (1), (3), (5) B. (1), (3), (4) C. (2), (3), (5) D. (1), (2), (5)

