PHẠM TRỌNG THƯ

595 BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẠM TRỌNG THƯ

595 BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

DÙNG CHO :

- HỌC SINH LỚP 12
- ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Nhằm giúp cho các em học sinh lớp 12 có tài liệu toán GIẢI TÍCH tham khảo để tự ôn tập, tự kiểm tra kiến thức của mình, chúng tôi biên soạn cuốn sách **595 BÀI TẬP GIẢI TÍCH LỚP 12** tự luận và trắc nghiệm.

Cuốn sách được chia làm bốn chương

Chương I : ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Chương II : HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Chương III : NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chương IV : SỐ PHỨC

Nội dung của mỗi chương được biên soạn theo bố cục

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ
B. BÀI TẬP CĂN BẢN
C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM
D. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Dù đã rất nhiều cố gắng nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong quý độc giả góp ý để những lần tái bản sau được hoàn chỉnh. Tác giả chân thành cảm ơn.

PHẠM TRỌNG THƯ

KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG SÁCH	
Suy ra	$\Rightarrow$
Tương đương	$\Leftrightarrow$
Với mọi	$\forall$
Thuộc về	$\in$
Không thuộc về	$\notin$
Tập hợp số thực	$\mathbf{R}$
Tập hợp số nguyên	$\mathbf{Z}$
Tồn tại	$\exists$
Giá trị lớn nhất	GTLN
Giá trị nhỏ nhất	GTNN
Vế trái	VT
Vế phải	VP
Tập xác định của hàm số	$\mathbf{D}$

Chương I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Hàm số đơn điệu. Cho hàm số f xác định trên **I**, với **I** là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+ f đồng biến trên **I** nếu với $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

+ f nghịch biến trên **I** nếu với $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng **I**. Khi đó:

+ Nếu hàm số f đồng biến trên **I** thì $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbf{I}$

+ Nếu hàm số f nghịch biến trên **I** thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbf{I}$

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

a) Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng **I**

• Nếu $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbf{I}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của **I** thì hàm số f đồng biến trên **I**.

• Nếu $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in \mathbf{I}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của **I** thì hàm số f nghịch biến trên **I**.

• Nếu $f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{I}$ thì hàm số f không đổi trên **I**.

b) Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng [a; b) và có đạo hàm trên (a; b)

• Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$), $\forall x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng [a; b).

• Nếu $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a; b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng [a; b).

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Điểm cực trị. Cho hàm số f xác định trên tập hợp **D** ($\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$), $x_0 \subset \mathbf{D}$.

+ x_0 là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng (a; b) sao cho $x_0 \in (a; b) \subset \mathbf{D}$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

+ x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng (a; b) sao cho $x_0 \in (a; b) \subset \mathbf{D}$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

(Hàm f có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm)

Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

a) Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

+ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.
+ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì f đạt cực đại tại x_0.

b) Giả sử f có đạo hàm cấp một trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$. Khi đó:

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền **D** ($\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$). Ta nói :

a) Số M được gọi là **GTLN** của hàm số $y = f(x)$ trên **D** nếu hai điều sau

thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathbf{D} \\ \exists x_1 \in \mathbf{D} : f(x_1) = M. \end{cases}$

Kí hiệu : $M = \max\limits_{x \in \mathbf{D}} f(x)$ hay $M = \max y$.

b) Số m được gọi là **GTNN** của hàm số $y = f(x)$ trên **D** nếu hai điều sau

thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathbf{D} \\ \exists x_2 \in \mathbf{D} : f(x_2) = m. \end{cases}$

Kí hiệu : $m = \min\limits_{x \in \mathbf{D}} f(x)$ hay $m = \min y$.

4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C)

Dấu hiệu	*Kết luận*
$\cdot \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ $\quad \cdot \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\cdot \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \cdot \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$	$x = x_0$ là tiệm cận đứng của (C).
$\cdot \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$	$y = y_0$ là tiệm cận ngang của (C).
$\cdot$Nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \ (a \neq 0)$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \ (a \neq 0)$	$y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (C)

Cách tìm tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b \ (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của (C) khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

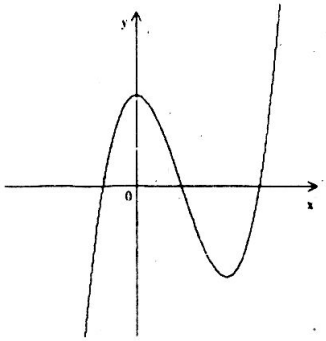
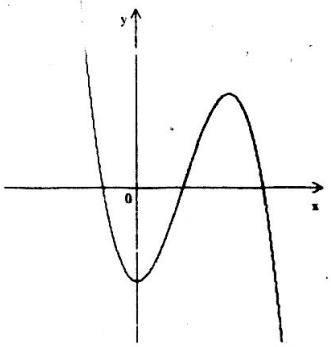
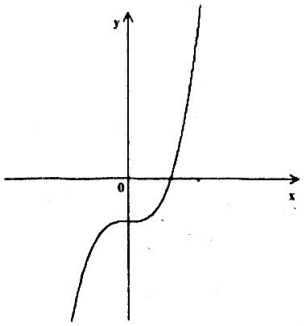
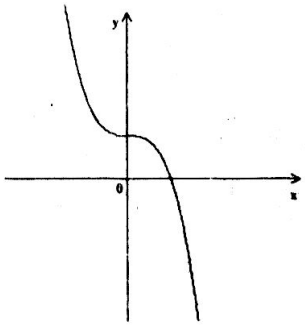
hoặc $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ và $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$.

5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ

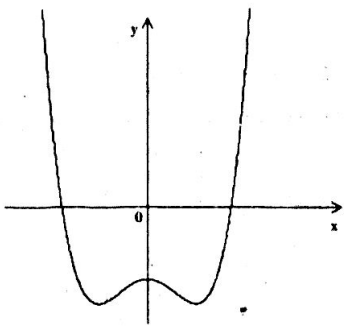
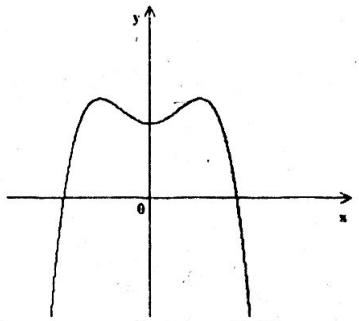
Cho hàm f có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $I(x_0 ; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị $y = f(x)$.

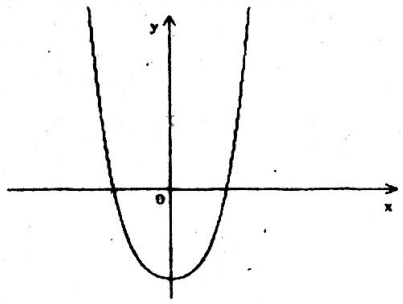
6. DẠNG ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THÔNG DỤNG

+ Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

$a > 0$	$a < 0$
	
. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt . Hàm số có một cực đại và một cực tiểu	. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt . Hàm số có một cực tiểu và một cực đại.
	
. $y' > 0, \forall x \in \mathbf{D}$ hoặc $y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{D}$. Hàm số luôn đồng biến	. $y' < 0, \forall x \in \mathbf{D}$ hoặc $y' \leq 0, \forall x \in \mathbf{D}$. Hàm số luôn nghịch biến

+ Đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$

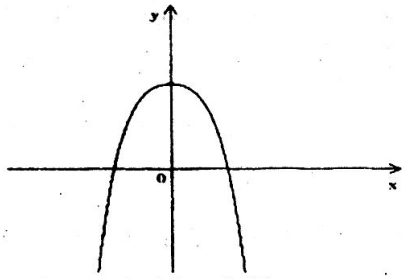
$a > 0$	$a < 0$
	
Nhận xét: $a > 0$ và $b < 0$ thì . Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại . Đồ thị hàm số có hai điểm uốn	Nhận xét: $a < 0$ và $b > 0$ thì . Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu . Đồ thị hàm số có hai điểm uốn



Nhận xét: a > 0 và b ≥ 0 thì

. Hàm số có một cực tiểu

. Đồ thị hàm số không có điểm uốn

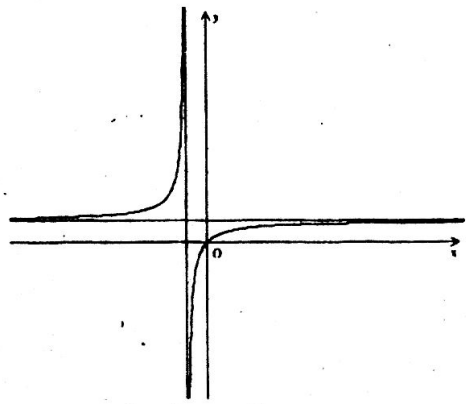


Nhận xét: a < 0 và b ≤ 0 thì

. Hàm số có một cực đại

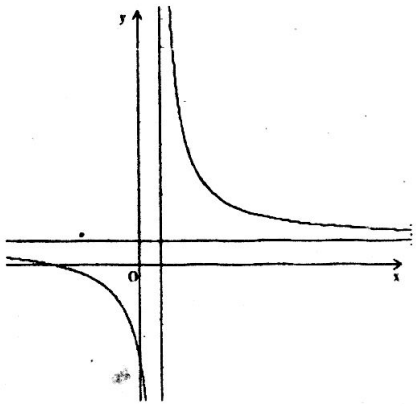
. Đồ thị hàm số không có điểm uốn

+ Đồ thị hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$



. $y' > 0, \forall x \in D$

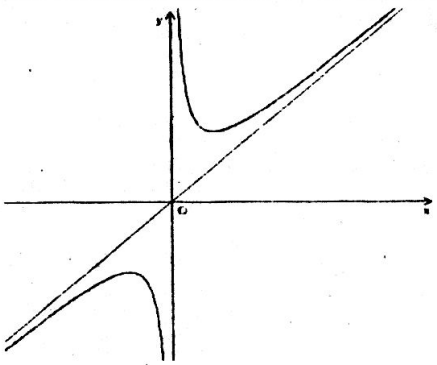
. Có thể nhìn ad – bc > 0



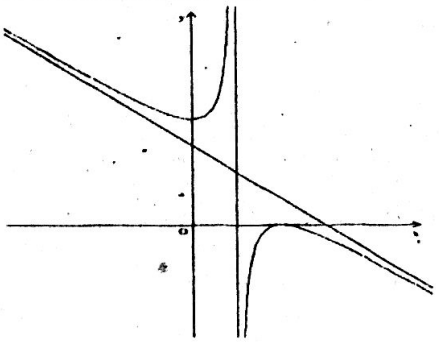
. $y' < 0, \forall x \in D$

. Có thể nhìn ad – bc < 0

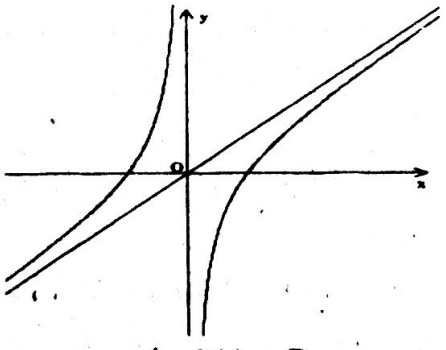
+ Đồ thị hàm số hữu tỷ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f} = px + q + \dfrac{r}{ex+f} (ae \neq 0, r \neq 0)$



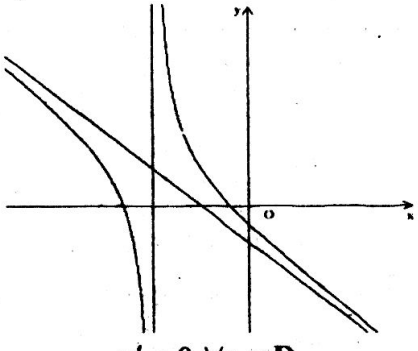
a. e > 0 và y' = 0 có hai nghiệm phân biệt



a. e < 0 và y' = 0 có hai nghiệm phân biệt



$y' > 0, \forall x \in D$



$y' < 0, \forall x \in D$

7. SỰ GIAO NHAU VÀ SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Cho hai đường cong $(C_1): y = f(x), (C_2): y = g(x)$

- Hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của $f(x) = g(x)$ (*)

  Số nghiệm phân biệt của (*) bằng số giao điểm của hai đường cong.
- $(C_1), (C_2)$ gọi là tiếp xúc nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu chúng có tiếp tuyến chung tại điểm M. Khi đó, M gọi là tiếp điểm.
- (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

  Nghiệm của hệ phương trình trên gọi là hoành độ tiếp điểm.
- Đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

  $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = px + q \Leftrightarrow ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$ có nghiệm kép.

B. BÀI TẬP CĂN BẢN

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2008$.

Giải

. Tập xác định: $D = R$

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + 5$

Vì $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = (-3)^2 - 3.5 = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 5 > 0, \forall x$

. Vậy: Hàm số luôn luôn đồng biến trên R.

Bài 2. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 2008$.

Giải

. Tập xác định: $D = R$

. Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$

$y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{5}{4}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↘		↗	

• Vậy: Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)$.

Bài 3. Xét chiều biến thiên của hàm số $y=\frac{2(x-1)^2}{x+1}$.

Giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

• Đạo hàm: $y'=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-3$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

• Vậy: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;\ -1)\cup(-1;\ 1)$.

Bài 4. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{mx^2}{2}+2x+2008$ luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=x^2-mx+2$

Để hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta=m^2-8\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow |m|\leq 2\sqrt{2}$$

• Vậy: $|m|\leq 2\sqrt{2}$.

Bài 5. Xét chiều biến thiên của hàm số $y=\sin^2 x+\cos x\ (0<x<\pi)$.

Giải

• Đạo hàm: $y'=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$

$y'=0\Leftrightarrow 2\cos x-1=0$ (do $\sin x>0$) $\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

• Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y′		+	0	−	
y		↗		↘	

• Vậy: Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$.

Bài 6. **a)** Chứng minh: $\tan x > x$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) Chứng minh: $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Thấy f(x) liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

và $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó: f(x) đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra : $f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hay $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) Xét hàm số $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Thấy g(x) liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

và $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(áp dụng kết quả câu a))

Do đó: g(x) đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra: $g(x) > g(0) = 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

hay $\tan x > x + \frac{x^3}{3} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 7. Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x$.

Giải

. Tập xác định: $\mathbf{D = R}$

. Đạo hàm: $y' = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-7 CT	↗	20 CĐ	↘	$-\infty$

. Vậy: $y_{CĐ} = y(2) = 20$; $y_{CT}(-1) = -7$.

Bài 8. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$.

Giải

• Tập xác định: $\mathbf{D = R \setminus \{1\}}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - \sqrt{5}$ hoặc $x_2 = 1 + \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$4-2\sqrt{5}$ CĐ	↘	$+\infty$ ‖	↘	$4+2\sqrt{5}$ CT	↗	$+\infty$

. Vậy: $y_{CĐ} = y(1-\sqrt{5}) = 4 - 2\sqrt{5}$; $y_{CT}(1+\sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5}$.

Chú ý: Để tìm giá trị cực trị ta tính $\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \dfrac{2x+2}{1}$

+ Với $x_1 = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow f(x_1) = 2(1-\sqrt{5}) + 2 = 4 - 2\sqrt{5}$
+ Với $x_2 = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow f(x_2) = 2(1+\sqrt{5}) + 2 = 4 + 2\sqrt{5}$

Bài 9. Tìm m để hàm số

a) $y = x^3 - 2x^2 + mx + 2008$ có cực trị.

b) $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x - m + 1}{x + 1}$ có cực đại và cực tiểu.

Giải

a) . Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + m$

Để hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$$

b) Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m + 1}{(x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

Hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2m > 0 \\ g(-1) = 1 - 2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Bài 10. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x + 2$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Giải

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $f'(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 4$

$f''(x) = 2x + 2m$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow m = -3$ hoặc $m = 1$

. *Thử lại :*

+ Với $m = -3$: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) = -4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ (loại)

+ Với $m = 1$: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ (nhận)

. Vậy: $m = 1$.

Bài 11. Tìm cực trị của hàm số $y = x - e^x$.

Giải

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 1 - e^x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

Nếu $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 = 1 \Rightarrow y' < 0$

Nếu $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 = 1 \Rightarrow y' > 0$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y′		+	0	−	
y		↗	-1 CĐ	↘	

• Vậy: $y_{CĐ} = y(0) = -1$.

Bài 12. Tìm cực trị của hàm số $y = \sqrt{x}\ln x$.

Giải

• Tập xác định: $\mathbf{D} = (0;\ +\infty)$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \dfrac{1}{x}.\sqrt{x} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Nếu $x > e^{-2} \Leftrightarrow \ln x > -2 \Rightarrow y' > 0$

$0 < x < e^{-2} \Leftrightarrow \ln x < -2 \Rightarrow y' < 0$

• Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
y′	‖	−	0	+	
y	‖ ↘		$-\frac{2}{e}$ CT	↗	

• Vậy : $y_{CT} = y\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{2}{e}$.

Bài 13. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$. Tìm cực trị của hàm số và viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị.

Giải

• Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

• Đạo hàm: $y' = 6(x^2 - 3x + 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ hoặc $x_2 = 2$

Cách 1.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	0 CT	↗	$+\infty$

. Điểm cực đại $M_1(1; 1)$, điểm cực tiểu $M_2(2; 0)$

. Phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu là:

$$\frac{x - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_1}}{y_{M_2} - y_{M_1}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Cách 2.

Chia f(x) cho f'(x) ta được: $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)f'(x) - x + 2$

Với $x_1 = 1$ thì $f(x_1) = \left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}\right)f'(x_1) - x_1 + 2 = -x_1 + 2 = 1$

$x_2 = 2$ thì $f(x_2) = \left(\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}\right)f'(x_2) - x_2 + 2 = -x_2 + 2 = 0$

Gọi $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, ta có: $\begin{cases} y_1 = -x_1 + 2 \\ y_2 = -x_2 + 2 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm M_1, M_2 là $y = -x + 2$.

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Tìm cực trị của hàm số và viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị.

Giải

. Tập xác định: $D = R\backslash\{2\}$

. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ hoặc $x_2 = 5$

Cách 1.

. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	‖	↘	13 CT	↗	$+\infty$

• Điểm cực đại $M_1(-1; 1)$, điểm cực tiểu $M_2(5; 13)$

• Phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu là:

$$\frac{x - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_1}}{y_{M_2} - y_{M_1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{13-1} \Leftrightarrow y = 2x + 3.$$

Cách 2.

Gọi $M_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2$ là các điểm cực đại và cực tiểu

Ta có: $y_i = \frac{u'(x_i)}{v'(x_i)} = \frac{2x_i + 3}{1}$ hay tọa độ của M_i thỏa mãn $y = 2x + 3$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm M_1, M_2 là $y = 2x + 3$.

Bài 15. Tìm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

Giải

. Tập xác định: $D = [-1;\ 1]$

. Đạo hàm: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$

. Giải $\sqrt{1-x^2} < x \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 \geq 0,\ 1-x^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 \geq 0,\ 1-2x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$$

. Với $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ thì $y' < 0$

với $-1 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y' > 0$

. Bảng biến thiên :

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y		↗	$\sqrt{2}$ CĐ	↘	

. Vậy : $y_{CĐ} = \sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài 16. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên $[-1; 3]$.

Giải

• Tập xác định: $D = [-1; 3]$

• Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6x - 12$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \notin D \end{array}\right.$

• Bảng biến thiên :

x	-1		1		3
y'		$-$	0	$+$	
y	14	↘	-6	↗	46

• Dựa vào bảng biến thiên : $\max y = 46$ khi $x = 3$, $\min y = -6$ khi $x = 1$.

Bài 17. Tìm GTNN của hàm số $y = \dfrac{(x+2)^2}{x}$ (với $x > 0$).

Giải

- Tập xác định: $\mathbf{D} = (0; +\infty)$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \notin D \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên thấy: $\min y = 8$ khi $x = 2$.

Bài 18. Tìm GTLN của hàm số $f(x) = \left|x^3 + 3x^2 - 72x + 90\right|$ **trên** $[-5; 5]$.

Giải

- Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên $\mathbf{D} = [-5; 5]$
- Ta có: $g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \in \mathbf{D} \\ x = -6 \notin \mathbf{D} \end{array}\right.$
- Bảng biến thiên:

x	-5		4		5
y'		$-$	0	$+$	
y	400	$\searrow$	-86	$\nearrow$	-70

- Dựa vào bảng biến thiên thấy:

$$\max f(x) = \max\left\{\left|g(-5)\right|, \left|g(4)\right|, \left|g(5)\right|\right\} = 400 \text{ khi } x = -5.$$

Bài 19. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x$.

Giải

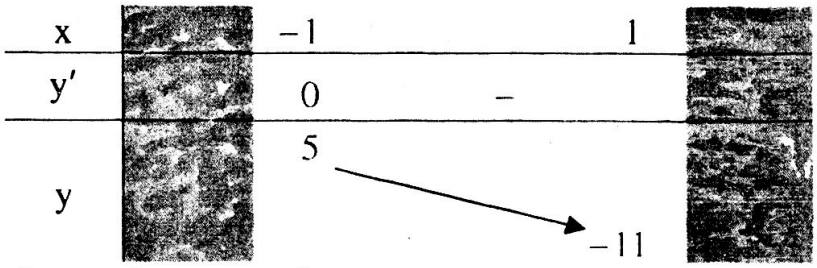
- $y = -2\sin^3 x + 3(1 - 2\sin^2 x) - 6\sin x = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 3$ (1)

  Đặt $u = \sin x$, $-1 \le u \le 1$

  (1) viết lại: $y = -2u^3 - 6u^2 - 6u + 3$

  $y' = -6u^2 - 12u - 6 = -6(u^2 + 2u + 1) = -6(u+1)^2 \le 0$, $y' = 0 \Leftrightarrow u = -1$
- Bảng biến thiên:

TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 2198



• Dựa vào bảng biến thiên thấy:

$$\max y = 5 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\min y = -11 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Bài 20. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 3}$ (*)

Giải

• **Tập xác định: D = R** $\left(\text{do } \sin x + \cos x + 3 = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3 \neq 0,\ \forall x\right)$

$(*) \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1 - 3y$ (**)

Để phương trình (**) có nghiệm $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-3y)^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + y^2 - 4y + 4 \geq 1 - 6y + 9y^2 \Leftrightarrow 4 - 7y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2}{\sqrt{7}} \leq y \leq \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

• Vậy: $\max y = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $\min y = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

§4. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG

Bài 21. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số :

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$

Giải

a). Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

. Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang

b) . Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.

. Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{2}{x}}}{1 - \dfrac{2}{x}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

. Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.

Bài 22. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số : $y = \dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$.

Giải

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^-} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

Hàm số đã cho có thể viết lại : $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow y = -x+2$ là tiệm cận xiên

Bài 23. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số : $y = \sqrt{x^2+x+5}$.

Giải

Tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

. Khi $x \to +\infty$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+x+5}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = x + \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của nhánh phải

. Khi $x \to -\infty$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+5}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = -x - \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của nhánh trái

Bài 24. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x^2 + x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

Giải

Để đồ thị không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $3m^2 + m + m = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -\dfrac{2}{3}$.

Bài 25. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x + m + 1 - \dfrac{m^2}{x+1}$ $(m \neq 0)$ có tiệm cận xiên đi qua điểm A(2; 0).

Giải

- Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(-\dfrac{m^2}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow y = -x + m + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị
- Tiệm cận xiên đi qua A(2; 0) khi và chỉ khi $0 = -2 + m + 1 \Leftrightarrow m = 1$

§5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ- PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Bài 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ có đồ thị (C)

a) Tìm điểm uốn I của đồ thị (C)

b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra điểm I là tâm đối xứng của (C).

Giải

a). Tập xác định : **D = R**

. $y' = 3x^2 - 6x + 2; y'' = 6x - 6, y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

. y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = 1$.

.Vậy I(1; – 4) là điểm uốn của đồ thị (C)

b). Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 4 \end{cases}$; phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là

$$Y - 4 = (X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 2(X+1) - 4$$

$$Y = (X+1)[(X+1)^2 - 3(X+1) + 2] = (X+1)(X^2 - X) = X^3 - X$$

. Hàm số $Y = X^3 - X$ là hàm số lẻ. Do đó đồ thị (C) nhận gốc tọa độ I làm tâm đối xứng.

Bài 27. Cho hàm số $y = x - \dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C)

a) Tìm tọa độ giao điểm I của hai tiệm cận của đồ thị (C)

b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của (C) đối với hệ trục tọa độ IXY. Từ đó suy ra điểm I là tâm đối xứng của (C).

Giải

a) . Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận xiên $y = x$ (tương tự Bài 22)
. Tọa độ giao điểm của hai tiệm cận là $I(-1; -1)$

b) . Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

. Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là

$$Y - 1 = X - 1 - \frac{1}{X - 1 + 1} \text{ hay } Y = X - \frac{1}{X}$$

. Hàm số $Y = X - \dfrac{1}{X}$ là hàm số lẻ

. Do đó : Đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

Bài 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+3)x - 1$ có đồ thị (C). Tìm m để điểm uốn của (C) nằm trên parabol (P): $y = x^2$.

Giải

• Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

• Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + m + 3$, $y'' = 6x - 6m$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = m$

Suy ra: $I(m; -2m^3 + m^2 + 3m - 1)$ là điểm uốn của đồ thị (C)

$I \in (P) \Leftrightarrow -2m^3 + m^2 + 3m - 1 = m^2 \Leftrightarrow 2m^3 - 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Bài 29. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+2)x + 1$ có đồ thị (C). Tìm m để điểm uốn của (C) nằm trên trục hoành.

Giải

• Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

• Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 2$

$y'' = 6x + 6m$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -m$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = -m$

Suy ra: $I(-m; 2m^3 - m^2 - 2m + 1)$ là điểm uốn của đồ thị (C)

$I \in Ox \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Bài 30. Chứng minh đồ thị (C): $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

Giải

. Tập xác định: **D = R**

. $y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$

. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2 - \sqrt{3}$ hoặc $x = -2 + \sqrt{3}$

. y'' đổi dấu khi x qua điểm 1 , $-2 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow A(1;\ 1), B\left(-2-\sqrt{3};\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right), C\left(-2+\sqrt{3};\ \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ là các điểm uốn của đồ thị (C) và $\overrightarrow{AB} = \left(-(3+\sqrt{3});\ -\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(2\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

. Vì $\frac{-(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{-\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng

§6. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

Bài 31. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$.

Giải

• Tập xác định: **D = R**

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$

$y'' = -6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm 0, nên $I(0; 2)$ là điểm uốn của đồ thị

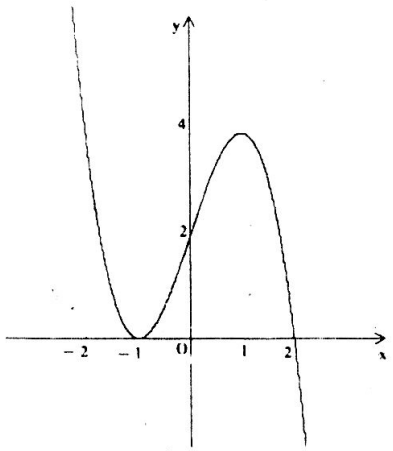
Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Điểm đặc biệt: A(– 2; 4), B(2; 0)

• Đồ thị



Bài 32. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 1$.

Giải

• Tập xác định: **D = R**

• Đạo hàm: $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm 0, nên $I(0; -1)$ là điểm uốn của đồ thị

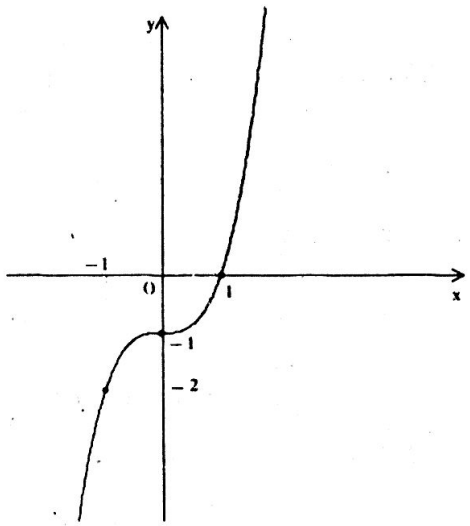
Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$

Điểm đặc biệt: A(1; 0), B(– 1; – 2)

• Đồ thị



Bài 33. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

Giải

• Tập xác định: **D = R**

• Đạo hàm: $y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$

$y'' = 6x^2 - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

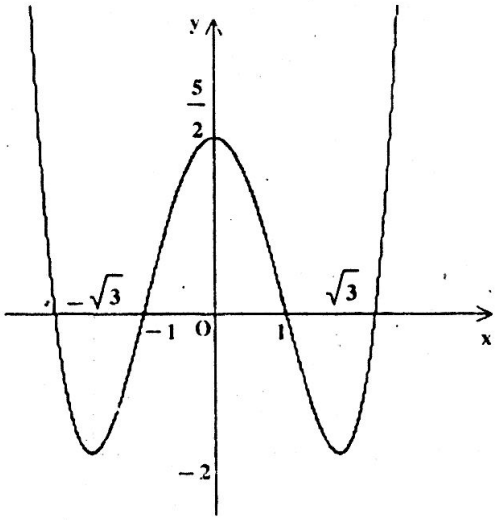
Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm ± 1, nên $I(-1;0)$ và $J(1;0)$ là điểm uốn của đồ thị

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$

• **Bảng biến thiên**

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-2	↗	$+\infty$

• **Đồ thị**



Bài 34. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

Giải

• **Tập xác định: D = R**

• **Đạo hàm:** $y' = -4x^3 - 4x = -4x(\underbrace{x^2+1}_{>0,\,\forall x})$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có: $y'' = -12x^2 - 4 < 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho không có điểm uốn

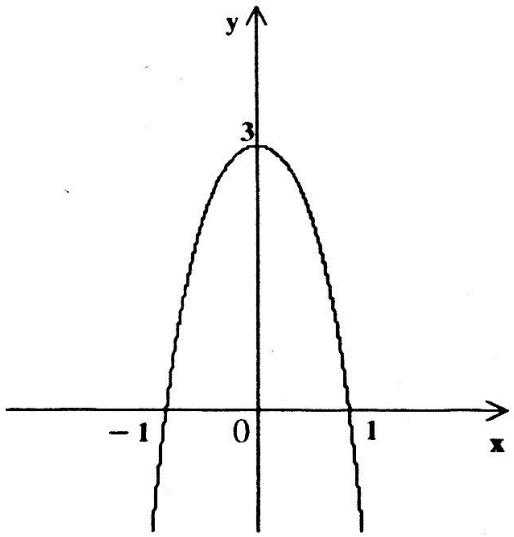
Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty$

• **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Điểm đặc biệt: A(−1; 0), B(1; 0)

• **Đồ thị**



§7. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

Bài 35. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

Giải

• Tập xác định : $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

• Đạo hàm : $y' = \dfrac{-5}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in D \Rightarrow$ **Hàm số đã cho y giảm trên D**

• Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

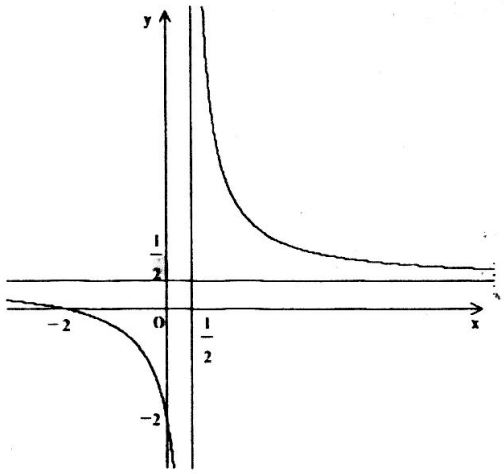
Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

• Điểm đặc biệt: A(0; −2), B(−2; 0), C(3; 1)

. Đồ thị



Bài 36. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Giải

Hàm số đã cho viết lại: $y = x + \dfrac{1}{x}$

• Tập xác định: $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng

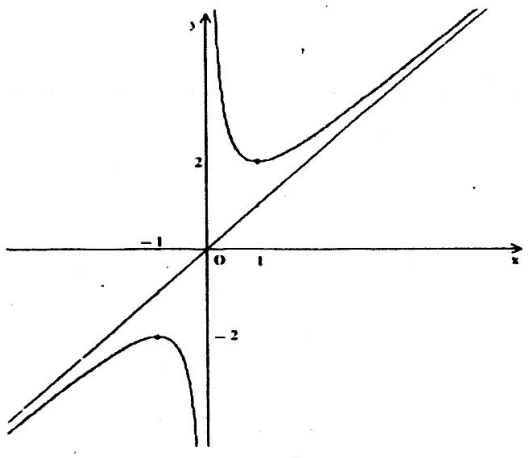
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

. Đồ thị



Bài 37. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

Giải

- Hàm số đã cho viết lại: $y = x - \dfrac{1}{x}$
- Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

Vì $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbf{D}$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\dfrac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên

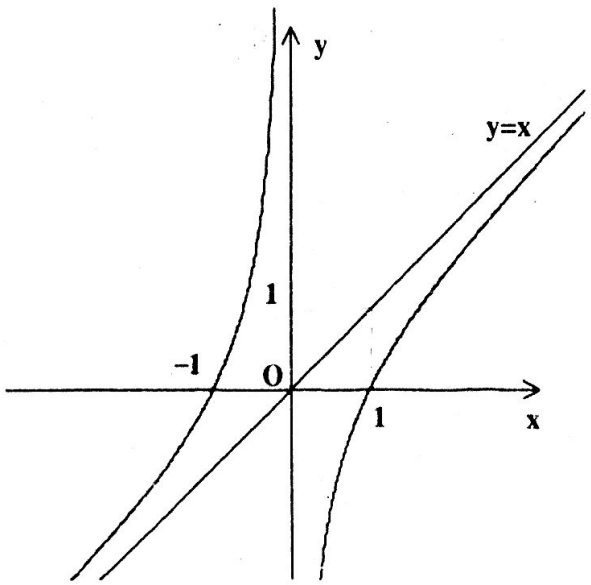
Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm đặc biệt: A(1; 0), B(−1; 0)

- Đồ thị



§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

VẤN ĐỀ 1. TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐỒ THỊ

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x, m)$, m là tham số

- *Tìm điểm cố định mà mọi đồ thị (C_m) đều đi qua*

Phương pháp giải

- Biến đổi phương trình $y = f(x, m)$ ra dạng

$Am + B = 0$ (1) hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$ (2)

- Giải hệ $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ nếu gặp dạng (1) hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ nếu gặp dạng (2)

- Suy ra: Điểm cố định cần tìm.

- *Tìm các điểm mà mọi đồ thị (C_m) đều không đi qua*

Phương pháp giải

- Giải hệ $\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ nếu gặp dạng (1) hoặc $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = B = 0 \\ C \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \neq 0 \\ B^2 - 4AC < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ nếu gặp dạng (2)

- Suy ra: Các điểm mà đồ thị không đi qua.

Bài 38. Cho hàm số $y = mx^3 + (1-3m)x^2 + 2(m-1)x + 1$ có đồ thị (C_m)
Chứng minh: Với mỗi giá trị của m, (C_m) của hàm số đã cho đi qua ba điểm cố định.

Giải

Hàm số y đã cho có thể viết lại thành $x(x^2 - 3x + 2)m = y - (x-1)^2$

Tọa độ điểm cố định phải thỏa $\begin{cases} x(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ y - (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = (x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy: Đồ thị đã cho đi qua ba điểm cố định (0; 1), (1; 0), (2; 1).

Bài 39. Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ $(m \neq 0)$ (*) có đồ thị (C_m)
Tìm những điểm cố định trên đường thẳng $\Delta: x = 1$ mà (C_m) của hàm số đã cho không bao giờ đi qua $\forall m \neq 0$.

Giải

Các điểm cố định $M(1;y) \in \Delta$ mà đồ thị (C_m) không bao giờ đi qua $\forall m \neq 0$ là những cặp $(1;y)$ sao cho phương trình sau vô nghiệm theo $m \neq 0$

$$\begin{cases}(3m+1)1-m^2+m=y(1+m) \\ 1+m\neq 0\end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2+(y-4)m+y-1=0 \\ m\neq -1\end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-y+4+y-1\neq 0 \\ \Delta=(y-4)^2-4(y-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow y^2-12y+20<0$$

$$\Leftrightarrow 2<y<10$$

Vậy: $\forall m \neq 0$, đồ thị (C_m) của hàm số (*) không bao giờ đi qua các điểm $M(1;y)$ (với $y \in (2;10)$) trên đường thẳng $\Delta: x=1$.

VẤN ĐỀ 2. BIỆN LUẬN SỐ GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Cho hai họ đường cong (C_m): $y=f(x,m)$ và (L_m): $y=g(x,m)$. Gọi $M(x;y)$

+ $M \in (C_m) \cap (L_m) \Leftrightarrow$ tọa độ $(x;y)$ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=f(x,m) \\ y=g(x,m)\end{cases}$
+ Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (L_m) : $f(x,m)=g(x,m)$ (*)
  Số nghiệm của (*) chính là số giao điểm của (C_m) và (L_m)
+ (C_m) tiếp xúc với $(L_m) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x,m)=g(x,m) \\ f'(x,m)=g'(x,m)\end{cases}$ có nghiệm

Bài 40. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y=-x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với (d) là $\dfrac{x^2+x-1}{x-1}=-x+m$

$$\Leftrightarrow 2x^2-mx+m-1=0 \ (*) \ (x\neq 1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-8(m-1)>0 \\ 2-m+m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-8m+8>0 \\ 2-m+m-1\neq 0 \ (\text{thỏa})\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<4-2\sqrt{2} \\ m>4+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy: $m<4-2\sqrt{2}$ hoặc $m>4+2\sqrt{2}$ thì (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 41. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C)

a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc k

b) Tìm k để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Giải

a) $(d): y-y_A=k(x-x_A) \Leftrightarrow y-1=k(x+3) \Leftrightarrow y=kx+3k+1$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với (d):

$$x^3 + 3x^2 + 1 = kx + 3k + 1 \Leftrightarrow x^2(x+3) - k(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - k) = 0$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 = k$ có hai nghiệm phân biệt khác -3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$$

Vậy: $0 < k \neq 9$ thì (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 42. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (H), đường thẳng (d): $y = -x + m$.

Tìm m để (d) cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài ngắn nhất.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với (d) là $\dfrac{2x+1}{x+2} = -x + m$

$$\Leftrightarrow x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \ (*) \quad (x \neq -2)$$

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4-m)^2 - 4(1-2m) > 0 \\ 4 + (4-m)(-2) + 1 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 12 > 0, \ \forall m \\ 4 - 8 + 2m + 1 - 2m \neq 0 \ \text{(thỏa)} \end{cases}$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + (-x_B + m + x_A - m)^2$$

$$= 2(x_B - x_A)^2 = 2[(x_B + x_A)^2 - 4x_B . x_A] = 2\left[(m-4)^2 - 4(1-2m)\right]$$

$$= 2(m^2 + 12) \geq 24$$

Vậy: $\min AB = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 43. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1} \left(m \neq -\dfrac{1}{2}\right)$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = -x - 4$. Tìm m để (d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A và B đối xứng nhau qua đường phân giác Δ thứ I.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với (d) là

$$\frac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1} = -x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + (m+7)x + 4 - m = 0 \ (*)$$

(d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+7)^2 - 8(4-m) > 0 \\ 2 - m - 7 + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 22m + 17 > 0 \\ m \neq -\dfrac{1}{2} \ \text{(thỏa)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -11 - 2\sqrt{26} \text{ hoặc } m > -11 + 2\sqrt{26}$$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{m+7}{4} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-x_A - 4 + (-x_B - 4)}{2} = -\dfrac{x_A + x_B}{2} - 4 = \dfrac{m+7}{4} - 4 \end{cases}$$

A, B đối xứng qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow I \in \Delta \Leftrightarrow x_I = y_I \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa)

Bài 44. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và parabol (P) : $y = x^2 + a$.

Tìm a để (P) tiếp xúc với (C).

Giải

(P) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x^2 + a \\ \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right)' = (x^2 + a)' \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x^2 + a \quad (1) \\ \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 2x \qquad (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = 2x(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow x(\underbrace{2x^2 - 5x + 4}_{>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (3)$$

Thế (3) vào (1) ta được $a = -1$. Vậy: $a = -1$ thì (P) tiếp xúc với (C).

Bài 45. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ có đồ thị (C_m)

Chứng minh : $\forall m \neq -1, (C_m)$ tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải

. Tìm điểm cố định của (C_m): A(– 1; – 2) (xem lại Vấn đề 1)

. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$

. $f'(-1) = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{(-1 - m)^2} = 1, \ \forall m \neq -1$

. Vậy: (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y = k(x - x_A) + y_A = x - 1$ tại A.

Chú ý : Phương pháp này áp dụng đối với bài toán " chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định"

VẤN ĐỀ 3. TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), điểm $M(x_0; y_0)$

Dạng 1 : Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Dạng 2 : Viết **phương trình** tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc **k cho trước**

Phương pháp

- Phương **trình tiếp** tuyến có dạng (d): $y = kx + b$
- (d) tiếp **xúc (C)** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm
- Giải hệ $\Rightarrow$ **b** $\Rightarrow$ **phương** trình tiếp tuyến cần tìm

Dạng 3 : Viết **phương trình** tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với **đường thẳng** $y = ax + b'$ ($a \neq 0$) cho trước

Phương pháp

- Phương **trình tiếp** tuyến có dạng (d): $y = ax + b$ ($b \neq b'$)
- (d) tiếp **xúc (C)** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases}$ có nghiệm
- Giải hệ $\Rightarrow$ **b** $\Rightarrow$ **phương** trình tiếp tuyến cần tìm

Dạng 4 : Viết **phương trình** tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với **đường thẳng** $y = ax + b'$ ($a \neq 0$) cho trước

Phương pháp

- Phương **trình tiếp** tuyến có dạng (d): $y = -\frac{1}{a}x + b$
- (d) tiếp **xúc (C)** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{1}{a}x + b \\ f'(x) = -\frac{1}{a} \end{cases}$ có nghiệm
- Giải hệ $\Rightarrow$ **b** $\Rightarrow$ **phương** trình tiếp tuyến cần tìm

Dạng 5 : Viết **phương trình** tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua M

Phương pháp

- Phương **trình tiếp** tuyến (d) đi qua $M(x_0; y_0)$ là $y = k(x - x_0) + y_0$
- (d) tiếp **xúc (C)** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm
- Giải hệ $\Rightarrow$ **k** $\Rightarrow$ **phương** trình tiếp tuyến cần tìm

Bài 46. Cho **hàm số** $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 5x + 5$ có đồ thị (C). Viết phương trình **tiếp tuyến của** (C) tại điểm uốn.

Giải

.(C) có điểm **uốn** I(2; −21) (Xem lại §5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ- PHÉP TỊNH **TIẾN HỆ** TỌA ĐỘ)

. Phương trình **tiếp tuyến** với (C) tại điểm I là $y - (-21) = f'(2)(x - 2)$

$\Leftrightarrow y = -17x + 13$ (**với** $f'(x) = 3x^2 - 12x - 5$)

Bài 47. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là -1.

Giải

Phương trình tiếp tuyến có dạng (d): $y = -x + b$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = -x + b \\ \left(\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}\right)' = (-x + b)' \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = -x + b \quad (1) \\ \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = -1 \qquad (2) \end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Thế $x = 0$ vào (1) ta được: $b = -4$, thế $x = 2$ vào (1) ta được: $b = 4$

Vậy: Có hai tiếp tuyến $y = -x - 4$, $y = -x + 4$.

Bài 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến, của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): $y = -3x$.

Giải

Phương trình tiếp tuyến có dạng (d): $y = -3x + b$ ($b \neq 0$)

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} = -3x + b \\ \left(\dfrac{x^2 + 3}{x + 1}\right)' = (-3x + b)' \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} = -3x + b \quad (1) \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = -3 \qquad (2) \end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) $\Leftrightarrow 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

Thế $x = 0$ vào (1) ta được: $b = 3$

Thế $x = -2$ vào (1) ta được: $b = -13$

Vậy: Có hai tiếp tuyến $y = -3x + 3$, $y = -3x - 13$.

Bài 49. Cho hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên.

Giải

(C) có tiệm cận xiên $y = x$ (Xem lại §4. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG)

Phương trình tiếp tuyến có dạng (d): $y = -x + b$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = -x + b \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = (-x + b)' \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = -x + b \quad (1) \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} = -1 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) $\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thế $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vào (1) ta được: $b = 2\sqrt{2}$

Thế $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vào (1) ta được: $b = -2\sqrt{2}$

Vậy: Có hai tiếp tuyến $y = -x + 2\sqrt{2}$, $y = -x - 2\sqrt{2}$.

Bài 50. Cho hàm số $y = 3x - 4x^3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến này đi qua điểm M(1; 3).

Giải

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M(1; 3) có hệ số góc k là $y = k(x - 1) + 3$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4x^3 = k(x - 1) + 3 \quad (1) \\ 3 - 12x^2 = k \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thế (2) vào (1) ta được $3x - 4x^3 = (3 - 12x^2)(x - 1) + 3$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \dfrac{3}{2}$

Với $x = 0$ thì $k = 3$, với $x = \dfrac{3}{2}$ thì $k = -24$

Vậy: Có hai tiếp tuyến $y = 3x$, $y = -24x + 27$.

VẤN ĐỀ 4. BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Bài toán

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của (C): $y = f(x)$

2) Dùng (C) biện luận theo tham số m số nghiệm của $g(x, m) = 0$ (*)

Phương pháp

+ Chuyển $g(x, m) = 0$ về

Dạng 1: $f(x) = m$ hay $f(x) = h(m)$

Dạng 2: $f(x) = kx + m$ (m là tham số, k là hằng số)

Dạng 3: $f(x) = m(x - a) + b$, đường thẳng $y = m(x - a) + b$ quay quanh điểm cố định M(a; b)

+ Dựa vào đồ thị ta biện luận theo tham số m số nghiệm của (*)

Bài 51.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$.

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo tham số m, số nghiệm của phương trình

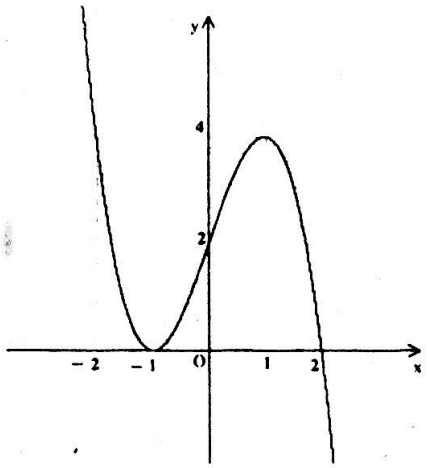
$$-x^3 + 3x + 2 - m = 0$$

c) Dùng đồ thị (C) biện luận theo tham số n, số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + n = 0$$

Giải

a) Xem lại bài giải Bài 31



b) Phương trình trên viết lại: $-x^3 + 3x + 2 = m$ (*)

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d: y= m cùng phương trục Ox, nên số giao điểm của (C) và đường thẳng d là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhìn đồ thị

+ Nếu $m > 4$ hay $m < 0$: 1 nghiệm
+ Nếu $m = 4$ hay $m = 0$: 1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép
+ Nếu $0 < m < 4$: 3 nghiệm

c) Phương trình trên viết lại: $-x^3 + 3x + 2 = n + 2$ (**)

Phương trình (**) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d: y= n+2 cùng phương trục Ox, nên số giao điểm của (C) và đường thẳng d là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhìn đồ thị

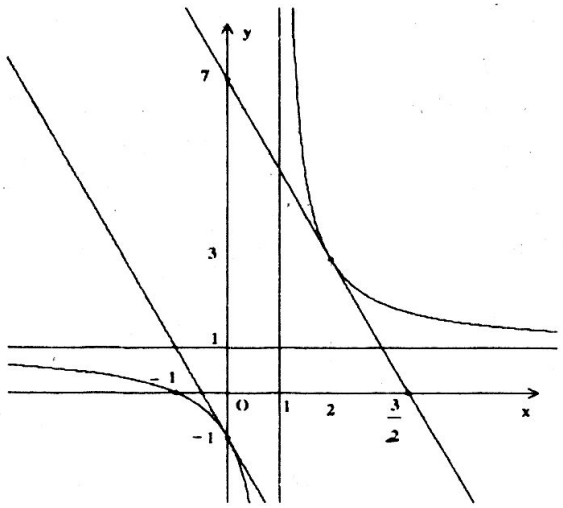
+ Nếu $\left[\begin{array}{l} n+2>4 \\ n+2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n>2 \\ n<-2 \end{array}\right.$: 1 nghiệm
+ Nếu $\left[\begin{array}{l} n+2=4 \\ n+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=-2 \end{array}\right.$: 1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép
+ Nếu $0 < n+2 < 4$ hay $-2 < n < 2$: 3 nghiệm

Bài 52. **a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo tham số m, số nghiệm của phương trình: $2x^2 - (m+1)x + 1 + m = 0$ (*)

Giải

a) Bạn đọc tự giải



b) + $(*) \Leftrightarrow 2x(x-1)+x+1=m(x-1) \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=-2x+m$

+ Bạn đọc tìm phương trình tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng (d): $y=-2x+m$, đáp số là $y=-2x+7$ và $y=-2x-1$.

+ Nhìn đồ thị

- Nếu $m<-1$ hay $m>7$: 2 nghiệm đơn
- Nếu $m=-1$: có 1 nghiệm kép $x=0$
- Nếu $m=7$: có 1 nghiệm kép $x=2$
- Nếu $-1<m<7$: vô nghiệm.

Bài 53. Biện luận theo m số nghiệm của $\sqrt{4-x^2}=mx+2-m \quad (*)$

Giải

Nghiệm của (*) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$(C): y=\sqrt{4-x^2}, (d): y=mx+2-m=m(x-1)+2$$

$$\text{Thấy } y=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

(C) có đồ thị là nửa đường tròn phía trên trục Ox có tâm 0(0; 0) bán kính là $R=2, d_m: y=m(x-1)+2$ là đường thẳng luôn đi qua điểm cố định M(1; 2).

(d) tiếp xúc nửa đường tròn trên khi hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2}=m(x-1)+2 \quad (1) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=m \quad (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thế (2) vào (1) ta tìm được $x=0, x=\dfrac{8}{5}$

• Với $x=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow d_0: y=2$

Với $x=\dfrac{8}{5} \Rightarrow m=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow d_{-\frac{4}{3}}: y=-\dfrac{4}{3}(x-1)+2.$

Nhìn đồ thị

. Nếu $m > \frac{2}{3}$: 1 nghiệm

. Nếu $0 < m \le \frac{2}{3}$: 2 nghiệm

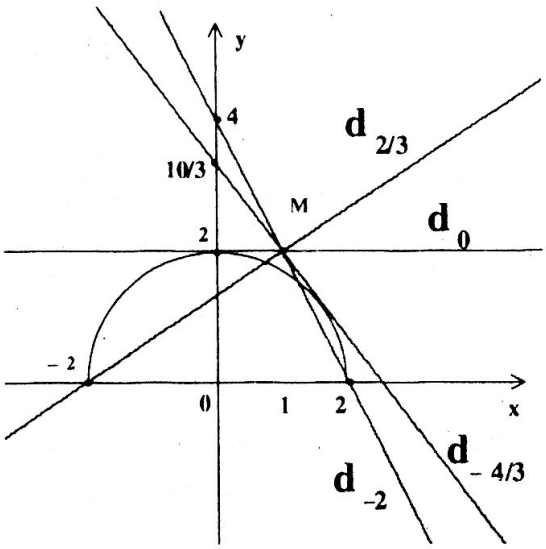
. Nếu $m = 0$: 1 nghiệm kép

. Nếu $-\frac{4}{3} < m < 0$: vô nghiệm

. Nếu $m = -\frac{4}{3}$: 1 nghiệm kép

. Nếu $-2 < m \le -\frac{4}{3}$: 2 nghiệm

. Nếu $m < -2$: 1 nghiệm



VẤN ĐỀ 5. TẬP HỢP CỦA MỘT ĐIỂM

Muốn tìm tập hợp của điểm M di động ta thực hiện như sau:

• Ta tính tọa độ của điểm M phụ thuộc theo tham số m: $\begin{cases} x = g(m) & (1) \\ y = h(m) & (2) \end{cases}$

• Khử m giữa (1) và (2) được phương trình $F(x, y) = 0$ có đồ thị (C), suy ra $M \in (C)$

• Giới hạn tập hợp (nếu có) từ các điều kiện của tham số m để có M

• Kết luận: Tập hợp của M là tất cả hoặc một phần của (C): $F(x, y) = 0$ thỏa điều kiện giới hạn.

Trường hợp đặc biệt :

+ Nếu M $\begin{cases} x = a \text{ (hằng số)} \\ y = h(m) \end{cases}$ thì M thuộc đường thẳng (d): $x = a$ (giới hạn $y = h(m)$).

+ Nếu M $\begin{cases} x = g(m) \\ y = b \text{ (hằng số)} \end{cases}$ thì M thuộc đường thẳng (d): $y = b$ (giới hạn $x = g(m)$).

Bài 54. Cho hàm số $y = x - 3 + \frac{1}{x}$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = m$.

Trong trường hợp (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N. Hãy tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

Giải

. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là $x - 3 + \frac{1}{x} = m$

$\Leftrightarrow x^2 - (3 + m)x + 1 = 0$ (*)

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (3 + m)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$ hoặc $m > -1$

. x_M, x_N là nghiệm của (*). Tọa độ trung điểm I của đoạn MN là

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{3+m}{2} & (1) \\ y_I = m & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) $\Rightarrow y_I = 2x_I - 3$

Suy ra I nằm trên đường thẳng $y = 2x - 3$

.Giới hạn: + $m < -5 \Rightarrow 2x_I - 3 < -5 \Rightarrow x_I < -1$

+ $m > -1 \Rightarrow 2x_I - 3 > -1 \Rightarrow x_I > 1$

. Vậy: Tập hợp các điểm I khi m thay đổi là đường $y = 2x - 3$ với $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Bài 55. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm tập hợp điểm uốn I của (C_m).

Giải

(C_m) có điểm uốn I $\begin{cases} x = m & (1) \\ y = -2m^3 + m^2 + m + 1 & (2) \end{cases}$

(Xem lại §5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ- PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ)

Khử m giữa (1) và (2) ta có: $y = -2x^3 + x^2 + x + 1$

Vậy : Tập hợp điểm uốn I của (C_m) là đường $y = -2x^3 + x^2 + x + 1$

Bài 56. Cho (C_m): $y = x^3 - 6x^2 - 2m(m+2)x + 28$. Tìm tập hợp điểm uốn I của (C_m).

Giải

(C_m) có điểm uốn I $\begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = -4m^2 - 8m + 12 \end{cases} \Rightarrow$ I nằm trên đường $x = 2$

(Xem lại §5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ- PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ)

Ta có: $y_I = 16 - 4(m+1)^2 \leq 16$

Vậy: Tập hợp điểm uốn I của (C_m) là phần của đường thẳng (d): $x = 2$ ứng với các điểm có tung độ $y \leq 16$.

Bài 57. Cho hàm $y = 3x + m + \dfrac{m}{x-1}$ có đồ thị (C_m). Tìm tập hợp tâm đối xứng của hypebol (C_m).

Giải

Để (C_m) là hypebol thì $m \neq 0$

Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = 3x + m$ (Xem lại §4. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG)

Tâm đối xứng I của (C_m) là giao điểm của hai tiệm cận , tọa độ của điểm I là $I(1; 3+m)$

Giới hạn: Vì $m \neq 0 \Rightarrow y \neq 3$

Vậy: Tập hợp tâm đối xứng của (C_m) là đường (d): $x = 1$ trừ điểm $(1; 3)$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1) Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ là

A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(-1; 3)$ **C.** $(3; +\infty)$ **D.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

2) Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - \frac{3}{2}$ là

A. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ **B.** $(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$

C. $(\sqrt{3}; +\infty)$. **D.** $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

3) Khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ là

A. $(-\infty; 1)$ **B.** $(0; 1)$ **C.** $(1; 2)$ **D.** $(1; +\infty)$

4) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ luôn đồng biến trên **R** khi

A. $m > 3$ **B.** $m < 3$ **C.** $m \le 3$ **D.** $m \ge 3$

5) Trong các hàm số sau, hàm nào đồng biến trên **R** ?

A. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2008$ **B.** $y = x^4 + x^2 + 2008$

C. $y = \cot x$ **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}$

6) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, f(x) đồng biến trong các khoảng nào sau đây?

A. $(0; 1)$ **B.** $(1; e)$ **C.** $(0; e)$ **D.** $(e; +\infty)$

7) Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng

A. f(x) nghịch biến trên **R**

B. f(x) nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

C. f(x) nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

D. f(x) đồng biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

8) Trong các hàm số sau, hàm nào đồng biến trên (1; 3)?

A. $y = \frac{x-3}{x-1}$ **B.** $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x-2}$

C. $y = 2x^2 - x^4$ **D.** $y = x^2 - 4x + 5$

9) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**

A. f(x) giảm trên khoảng $(-1; 1)$ **B.** f(x) giảm trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

C. f(x) tăng trên khoảng $(1; 3)$ **D.** f(x) giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

10) Hàm số $y = x\ln x$ luôn đồng biến trên khoảng

A. $(10^{-1}; +\infty)$ **B.** $(e^{-1}; +\infty)$ **C.** $(e; +\infty)$ **D.** $(1; +\infty)$

11) Giá trị nào của m thì hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

A. $m < -2$ **B.** $m \le -2$ **C.** $m > -2$ **D.** $m \ge -2$

12) Hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ có số điểm cực trị bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

13) Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có số điểm cực trị bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

14) Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$ có số điểm cực trị bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

15) Hàm số $y = x^2 - 2|x| + 2$ có số điểm cực trị bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

16) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2. Tích $x_1.x_2$?

A. -4 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2

17) Giá trị m để hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 5$ có cực trị là

A. $m < \dfrac{1}{3}$ **B.** $m \le \dfrac{1}{3}$ **C.** $m > \dfrac{1}{3}$ **D.** $m \ge \dfrac{1}{3}$

18) Giá trị m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2m - 1}{x}$ có cực trị là

A. $m < \dfrac{1}{2}$ **B.** $m \le \dfrac{1}{2}$ **C.** $m > \dfrac{1}{2}$ **D.** $m \ge \dfrac{1}{2}$

19) Giá trị m để hàm số $y = -x^3 - 2x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ là

A. $m = -1$ **B.** $m \ne -1$ **C.** $m > -1$ **D.** $m < -1$

20) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?

Một học sinh giải như sau

Bước 1 : $D = \mathbf{R} \setminus \{-m\}, y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$

Bước 2 : Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Leftrightarrow y'(2) = 0$ (*)

Bước 3 : (*) $\Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -3$.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu **sai** thì sai từ bước nào?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Giải đúng

21) Cho hàm số $f(x) = 5x + \frac{5}{x} - 2$, mệnh đề **sai** là

A. f(x) đạt cực đại tại $x = -1$ **B.** f(x) đạt cực tiểu tại $x = 1$

C. f(x) có giá trị cực đại là 8 **D.** M(1;8) là điểm cực tiểu

22) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C), phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của (C) là

A. $y = 2x + 6$ **B.** $y = 2x - 6$ **C.** $y = -2x + 6$ **D.** $y = 3x$

23) Với điều kiện nào của a và b để hàm số $y = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3$ đạt cực đại vàcực tiểu

A. $ab > 0$ **B.** $ab < 0$ **C.** $ab \geq 0$ **D.** $ab \leq 0$

24) Giá trị m đểhàm số $y = (x - m)(x^2 - 2x - m - 1)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 . x_2| = 1$ là

A. $m = 4$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = -4$ **D.** Một kết quả khác

25) Giá trị m để hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox là

A. $0 < m < 4$ **B.** $m < 0$ **C.** $m > 4$ **D.** $m < 0$ hoặc $m > 4$

26) Giá trị m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - 1$ luôn có cực đại và cực tiểu là

A. $m > 0$ **B.** $m < 0$ **C.** $m > 4$ **D.** Một kết quả khác

27) Giá trị m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 10$ có ba điểm cực trị là

A. $m > 0$ **B.** $m \neq 0$ **C.** $m < 0$ **D.** $m \leq 0$

28) Giá trị m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông là

A. $m > 0.$ **B.** $m \neq 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 0$ hoặc $m = 1$

29) Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có hai điểm cực trị trên đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ với $a + b$ bằng

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

30) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. Giá trị m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên bằng 10 là

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

31) GTNN của $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \frac{3}{4}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $-\frac{2}{3}$

32) GTLN của $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 3]$ bằng

A. 3 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** 0

33) GTLN của $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ bằng

A. 40 **B.** 8 **C.** -41 **D.** 15

34) GTLN của $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

35) GTLN của $y = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng $(-2; 4]$ bằng

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{4}{3}$

36) Cho hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$. GTNN của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{23}{27}$ **B.** $\frac{1}{27}$ **C.** 5 **D.** 1

37) Cho hàm số $y = -x + 2008 - \frac{1}{x}$. GTLN của hàm số trên khoảng $(0; 4)$ đạt tại x bằng

A. 1 **B.** 2006 **C.** 2007 **D.** 2008

38) GTLN M, GTNN m của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là

A. $M = \frac{9}{e^3}, m = 0$ **B.** $M = \frac{4}{e^2}, m = \frac{9}{e^3}$

C. $M = \frac{4}{e^2}, m = 0$ **D.** Một kết quả khác

39) Đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = -1$ **D.** $x = -2$

40) Đồ thị của hàm số $y = \frac{3x+4}{2x-5}$ có tiệm cận ngang là

A. $y = \frac{3}{2}$ **B.** $y = -\frac{3}{5}$ **C.** $y = -\frac{1}{5}$ **D.** $y = -\frac{4}{5}$

41) Cho hàm số $y = \frac{3x+5}{2x-7}$ có đồ thị (C) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận đứng $x = \frac{7}{2}$ **B.** (C) có tiệm cận ngang $y = -\frac{5}{7}$

C. (C) có tiệm cận xiên $y = \frac{3}{2}x$ **D.** (C) không có tiệm cận

42) Cho hàm số $y = 2x + 1 - \frac{1}{x}$. Số tiệm cận của đồ thị bằng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Không có

43) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có

A. Tiệm cận đứng $x = 2$ **B.** Tiệm cận ngang $y = 1$

C. Tâm đối xứng là điểm $I(2;1)$ **D.** Cả câu A, B, C đều đúng

44) Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Đồ thị của hàm số trên có tiệm cận đứng $x = -1$.

B. Đồ thị của hàm số trên có tiệm cận ngang $y = 0$.

C. Đạo hàm của y là $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

D. Bảng biến thiên của hàm số trên là

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$ / $+\infty$	↘	$-\infty$

45) Cho hàm số $y = -x - \frac{1}{x-1}$. Xét các mệnh đề

(I) Đồ thị của hàm số trên có tiệm cận đứng $x = 1$ và $y = -x$.

(II) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

(III) $y_{CĐ} = y(2) = -3, y_{CT} = y(0) = 1$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I) **B.** Chỉ (II)

C. Chỉ (III) **D.** Cả câu A, B, C đều đúng

46) Để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng thì

A. $m \neq 0$ **B.** $m \neq 1$ và $m \neq 2$

C. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$ **D.** Một kết quả khác

47) Đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m + 1}{x - 1}$ không có đường tiệm cận xiên khi giá trị của m là

A. $m = 0$ **B.** $m \neq 0$ **C.** $m = -1$ **D.** $m \neq -1$

48) Đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ có tiệm cận xiên là

A. $y = \pm x$ **B.** $y = x$ **C.** $y = -x$ **D.** Không có

49) Giá trị m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 2}{x - 1}$ $(m \neq 3)$ có tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ là

A. $m = -2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m \neq 0$ **D.** $m = 1$

50) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B có diện tích tam giác OAB bằng 8 thì

A. $m = 3$ **B.** $m = 5$ **C.** $m \neq 0$ **D.** $m = 3$ hoặc $m = -5$

51) Giá trị m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận xiên

A. $m = 0$ hoặc $m = 1$ **B.** $m \neq 0$ **C.** $m \neq 1$ **D.** $m \neq 0$ và $m \neq 1$

52) Điểm nào sau đây là điểm uốn của đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$

A. $(-1; 4)$ **B.** $(0; 2)$ **C.** $(1; 0)$ **D.** $(2; 0)$

53) Đồ thị của hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm uốn?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

54) Giá trị m để đồ thị của $y = x^4 - (m-1)x^2 + 2007$ có hai điểm uốn là

A. $m < 1$ **B.** $m \leq 1$ **C.** $m > 1$ **D.** $m \geq 1$

55) Giá trị m để đồ thị của $y = x^3 - mx + 2$ nhận $I(0; 2)$ làm điểm uốn là

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m \in \mathbf{R}$

56) Tìm m để đồ thị của $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2008$ không có điểm uốn là

A. $m \geq -1$ **B.** $m > -1$ **C.** $m \leq -1$ **D.** $m < -1$

57) Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + x - 4$ nhận điểm $I(2; -6)$ làm điểm uốn thế thì tích số a. b bằng

A. $-\dfrac{3}{4}$ **B.** $-\dfrac{3}{8}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{8}$

58) Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2008$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Đồ thị của hàm số f(x) có một điểm uốn.

B. Hàm số f(x) có một cực tiểu.

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

D. Đồ thị của hàm số f(x) luôn cắt trục tung tại điểm $A(0; -2008)$.

59) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 - m^2x$ (m là tham số). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

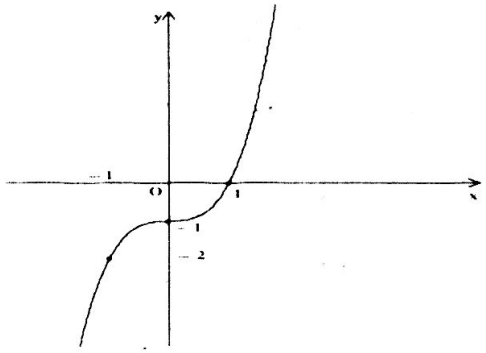
A. Hàm số f(x) luôn có một cực tiểu và một cực đại với mọi m.

B. Đồ thị của hàm số f(x) luôn cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với mọi $m \neq 0$.

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

D. Đồ thị của hàm số f(x) không cắt trục hoành.

60) Đồ thị sau đây là của hàm số



A. $y = x^3 - 1$

B. $y = x^3 - 2$

C. $y = x^3 - 3$

D. $y = x^3 - 4$

61) Cho hàm số $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào **sai**?

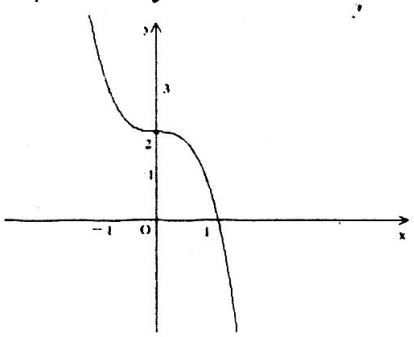
A. Đồ thị (C) của hàm số f(x) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

B. Đồ thị (C) của hàm số f(x) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

C. Đồ thị của hàm số f(x) có một điểm uốn.

D. Đồ thị hàm số trên có tâm đối xứng là giao điểm của hai tiệm cận.

62) Đồ thị sau đây là của hàm số



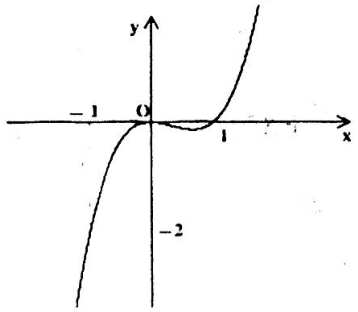
A. $y = -x^3 + 1$

B. $y = -x^3 + 2$

C. $y = -x^3 + 3$

D. $y = -x^3 + 4$

63) Đồ thị sau đây là của hàm số



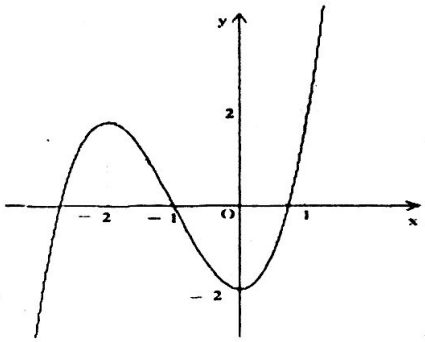
A. $y = x^3 + 3x - 2007$

B. $y = -x^3 - 3x + 2008$

C. $y = x^3 - x^2$

D. $y = x^3 + x^2$

64) Đồ thị sau đây là của hàm số



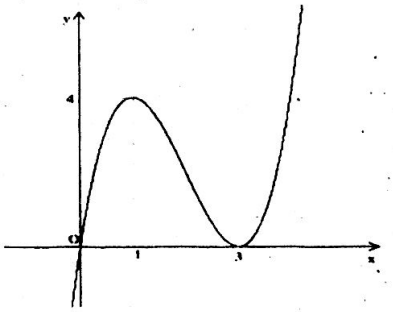
A. $y = x^3 + 3x^2 - 2$

B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$

C. $y = x^3 + 2x^2 - 2$

D. $y = x^3 - 2x^2 - 2$

65) Đồ thị sau đây là của hàm số



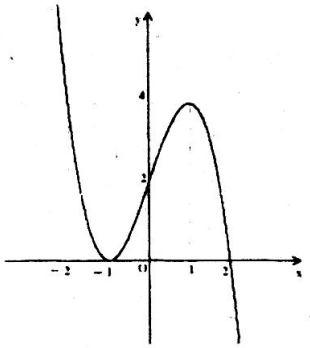
A. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

B. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

C. $y = x^3 + 6x^2 - 9x$

D. $y = x^3 - 6x^2 - 9x$

66) Đồ thị sau đây là của hàm số



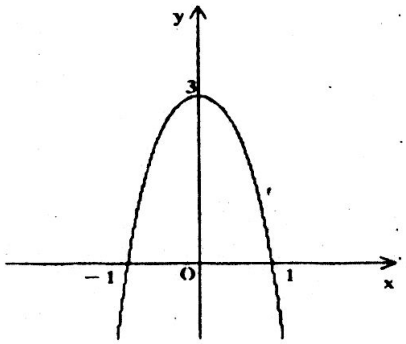
A. $y = (x+1)^2(1-x)$

B. $y = (x+1)^2(1+x)$

C. $y = (x+1)^2(2-x)$

D. $y = (x+1)^2(2+x)$

67) Đồ thị sau đây là của hàm số



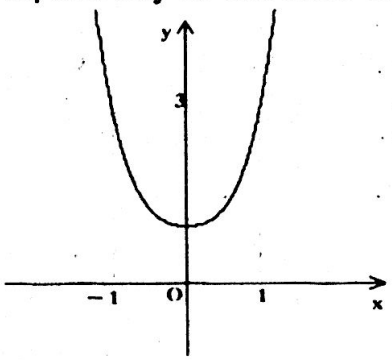
A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

B. $y = -x^4 - x^2 + 2$

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 5$

D. $y = -x^4 + 4x^2 - 6$

68) Đồ thị sau đây là của hàm số



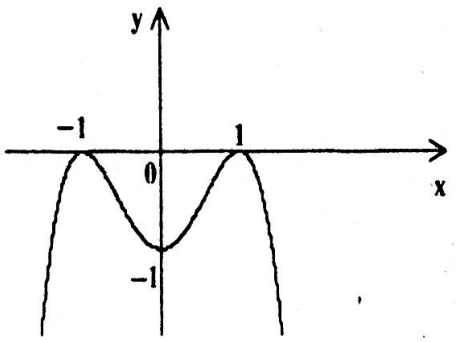
A. $y = -x^4 + x^2 + 1$

B. $y = x^4 + x^2 + 2$

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

D. $y = x^4 + x^2 + 1$

69) Đồ thị sau đây là của hàm số



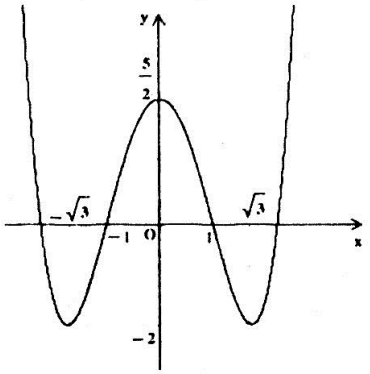
A. $y = -x^4 + x^2 - 1$

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 3$

70) Đồ thị sau đây là của hàm số



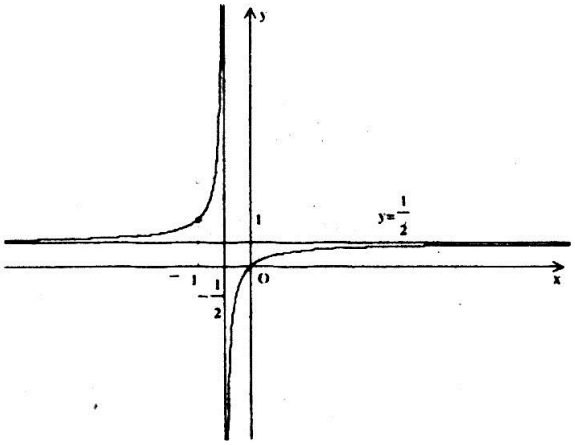
A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

C. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$

D. $y = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}$

71) Đồ thị sau đây là của hàm số



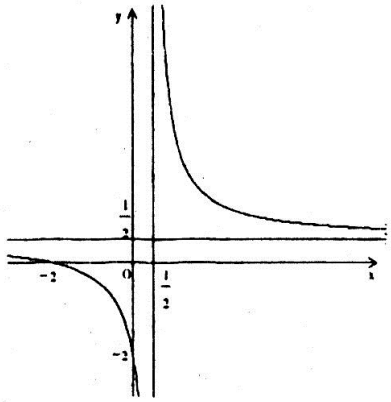
A. $y = \frac{x}{2x+1}$

B. $y = \frac{x+1}{2x+1}$

C. $y = \frac{2x+2}{2x+1}$

D. $y = \frac{x+3}{2x+1}$

72) Đồ thị sau đây là của hàm số



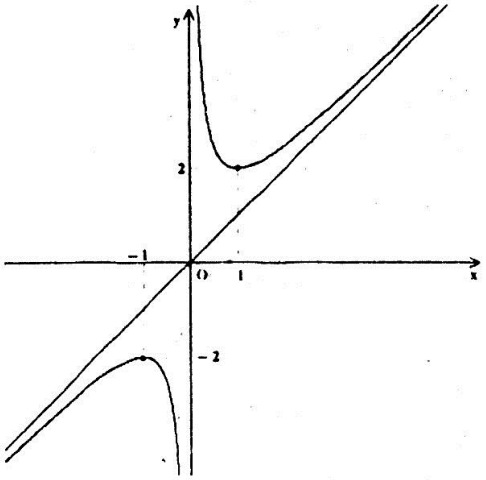
A. $y = \frac{x+3}{2x-1}$

B. $y = \frac{2x+1}{4x-2}$

C. $y = \frac{x+3}{2x-1}$

D. $y = \frac{x+2}{2x-1}$

73) Đồ thị sau đây là của hàm số



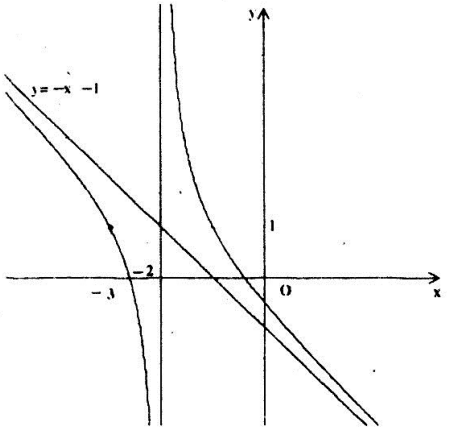
A. $y = \frac{x^2+1}{x}$

B. $y = \frac{x^2+2}{x}$

C. $y = \frac{x^2+3}{x}$

D. $y = \frac{x^2+4}{x}$

74) Đồ thị sau đây là của hàm số



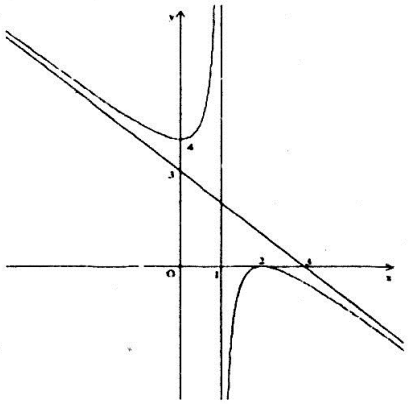
A. $y = \dfrac{-x^2+1}{x+2}$

B. $y = \dfrac{-x^2-3x-1}{x+2}$

C. $y = \dfrac{-x^2+8}{x+2}$

D. $y = \dfrac{-x^2+x-2}{x+2}$

75) Đồ thị sau đây là của hàm số



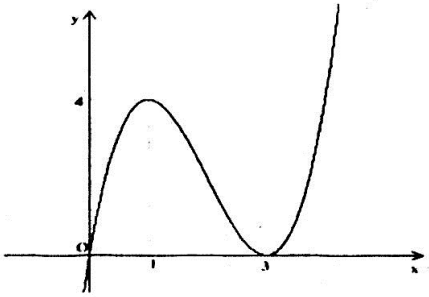
A. $y = -x+3+\dfrac{1}{x-1}$

B. $y = -x+3+\dfrac{2}{x-1}$

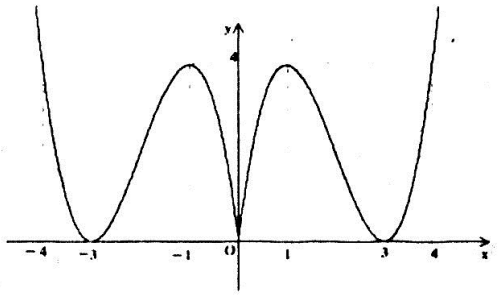
C. $y = -x+3-\dfrac{1}{x-1}$

D. $y = -x+3+\dfrac{3}{x-1}$

76) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có hình vẽ hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây ?



Hình 1



Hình 2

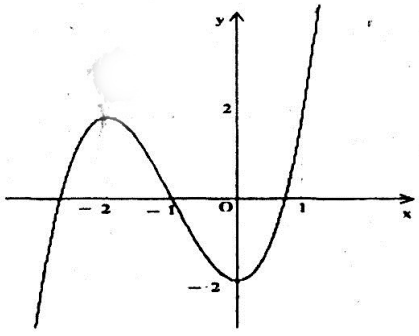
A. $y = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x|$

B. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$

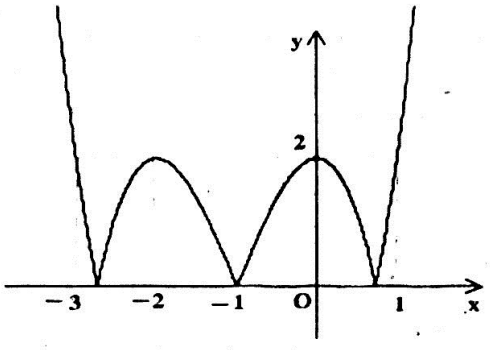
C. $y = |x|^3 - 6|x|^2 - 9|x|$

D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 - 9|x|$

77) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có hình vẽ hình 1



Hình 1



Hình 2

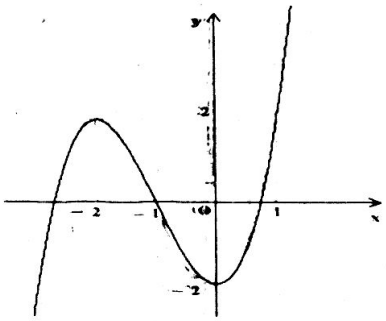
Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x|^3 + 3|x|^2 - 2$ **B.** $y = |x|^3 + 3x^2 - 2$

C. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$ **D.** $y = |x^3 + 3x^2| - 2$

78) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có hình vẽ (hình 1)

Với giá trị nào của m thì phương trình $|x^3 + 3x^2 - 2| = m$ có 6 nghiệm phân biệt



Hình 1

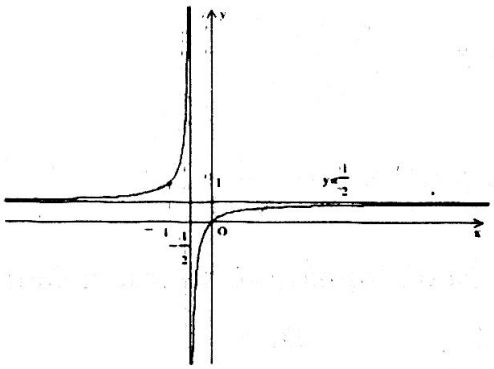
A. $-2 < m < 2$

B. $0 < m < 2$

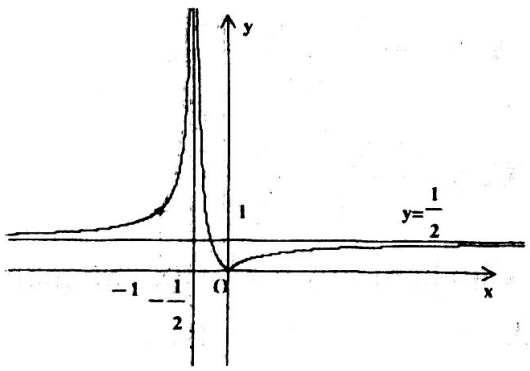
C. $-2 < m < 0$

D. $-2 \le m \le 2$

79) Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{2x+1}$ có hình vẽ hình 1



Hình 1



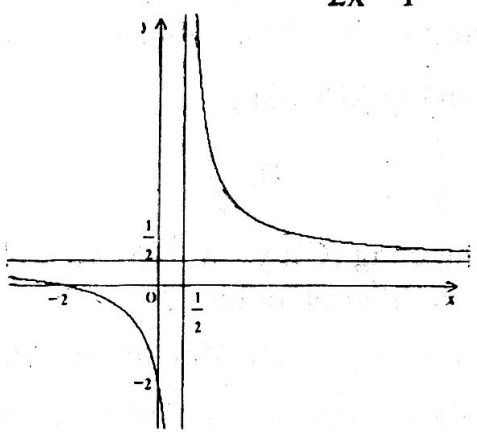
Hình 2

Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

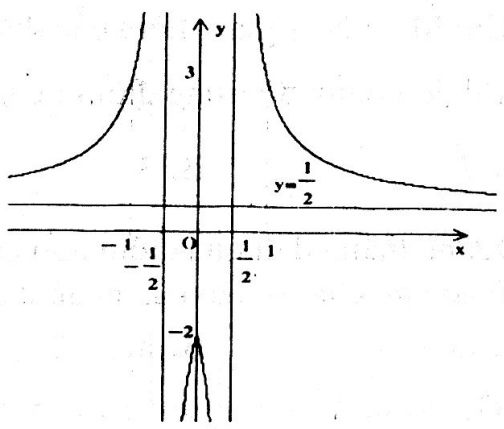
A. $y = \left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$ **B.** $y = \dfrac{|x|}{2|x|+1}$ **C.** $y = \dfrac{x}{2|x|+1}$ **D.** $y = \left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$

---

80) Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ có hình vẽ hình 1



Hình 1

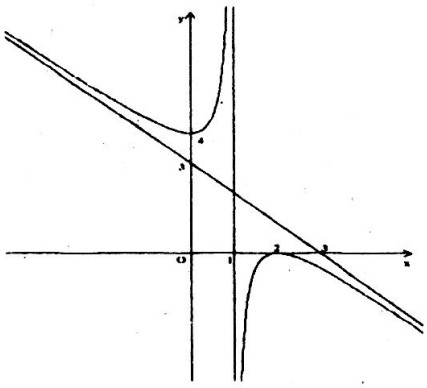


Hình 2

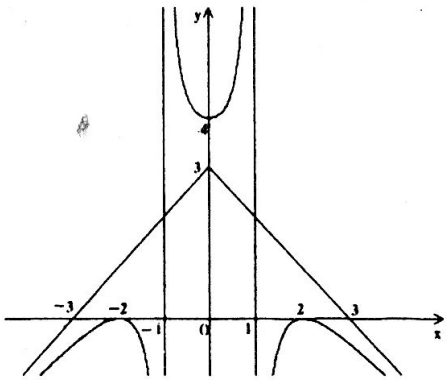
Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y=\left|\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}\right|$ **B.** $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$ **C.** $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$ **D.** $y=\dfrac{x+2}{2|x|-1}$

81) Cho đồ thị hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x-1}$ có hình vẽ hình 1



Hình 1



Hình 2

Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y=\dfrac{-|x|^2+4|x|+4}{|x|-1}$ **B.** $y=\dfrac{-|x|^2+4|x|-4}{|x|-1}$

C. $y=\dfrac{-|x|^2+4|x|-4}{||x|-1|}$ **D.** $y=\left|-x+3-\dfrac{1}{x-1}\right|$

82) Cho hàm số $y=x^3-8x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

83) Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=1-2x$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

84) Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng d: $y=m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi

A. $0<m<4$ **B.** $0\le m\le 4$ **C.** $m<0$ **D.** $m>4$

85) Gọi M và N là giao điểm của đường thẳng $y=x+2$ và đường cong $y=\dfrac{7x+6}{x-2}$.

Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

A. 7 **B.** 3 **C.** $-\dfrac{7}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

86) Đường thẳng d đi qua điểm uốn của đường cong (C): $y=x^3-3x$ và có hệ số góc m. Giá trị nào của m để d cắt (C) ba điểm phân biệt ?

A. $m>-1$ **B.** $m>-2$ **C.** $m>-3$ **D.** Một kết quả khác

87) Giá trị m để đường cong $y=(x-1)(x^2+x+m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $m < \frac{1}{4}$ và $m \neq -2$ **B.** $m < \frac{1}{4}$

C. $m > \frac{1}{4}$ và $m \neq 2$ **D.** Một kết quả khác

88) Giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $m \leq 3$ hoặc $m \geq 7$ **B.** $m < 3$

C. $m > 7$ **D.** $m < 3$ hoặc $m > 7$

89) Giá trị m để đường thẳng $y = m - 2x$ cắt đường cong $y = \frac{2x + 4}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $|m| > 4$ **B.** $|m| \geq 4$ **C.** $|m| < 4$ **D.** $|m| \leq 4$

90) Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [0; +\infty)$

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$ **D.** $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$

91) Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có điểm chung với đường thẳng $d: y = kx + 2$ khi

A. $k \in (-\infty; -3]$ **B.** $k \in (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$

C. $k \in (-3; 1]$ **D.** $k \in (-3; 1)$

92) Giá trị m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đường cong $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất là

A. $m \neq -1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m < -1$ **D.** $\forall m \in \mathbf{R}$

93) Giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc OB là

A. $m \neq 0$ **B.** $m < 1$ và $m \neq 0$

C. $m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **D.** Một kết quả khác

94) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M(x_0; y_0)$ (với $y_0 = f(x_0)$) là

A. $y - y_0 = x - x_0$ **B.** $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$

C. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ **D.** $x - x_0 = f'(x_0)(y - y_0)$

95) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$. Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có phương trình là

A. $y = -x - \frac{7}{3}$ **B.** $y = x - \frac{7}{3}$ **C.** $y = -x + \frac{7}{3}$ **D.** $y = \frac{7}{3}x$

96) Cho đường cong $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = 8x + 1$ **B.** $y = 3x + 1$ **C.** $y = -8x + 1$ **D.** $y = 3x - 1$

97) Cho đường cong $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = -7x + 4$ **B.** $y = -x + 4$

C. $y = 7x + 4$ **D.** Một kết quả khác

98) Cho hàm số (C): $y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

A. $y = -2(x - 1)$ **B.** $y = -2(x - 3)$

C. $y = 2(x - 1)$ **D.** Một kết quả khác

99) Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực đại là

A. $y = 1$ **B.** $y = 2$ **C.** $y = x + 1$ **D.** Một kết quả khác

100) Số đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

101) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - 4x + 4m$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành khi

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = \pm 3$. **C.** $m = \pm 4$. **D.** Một kết quả khác.

102) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(3; 2) là

A. $y = 9x - 25$ và $y = 3$. **B.** $y = x + 1$ và $y = 2$.

C. $y = x - 1$ và $y = -x + 6$. **D.** $y = 9x - 25$ và $y = 2$.

103) Tiếp tuyến kẻ từ điểm A(0; 6) đến đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}$ là

A. $y = -2x + 6$ và $y = -5x + 6$ **B.** $y = -2x + 6$ và $y = 6$

C. $y = -5x + 6$ và $y = 6$ **D.** $y = -2x + 6$ và $y = -3x + 6$

104) Tìm trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ các điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng d: $y = \frac{1}{3}x$

A. $(0;6),(2;-4)$ **B.** $(0;-6),(2;-4)$

C. $(0;6),(-2;-4)$ **D.** $(0;-6),(-2;-4)$

105) Hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d: $y=\frac{1}{9}x+2$ là

A. $y=-9x-8$ và $y=-9x+24$ **B.** $y=9x-8$ và $y=-9x+3$

C. $y=9x+24$ và $y=-9x+3$ **D.** $y=9x+7$ và $y=-9x+5$

106) Cho hàm số (C): $y=\frac{x^2-3x+2}{x}$ và đường thẳng d: $x=1$. Các điểm nào trên d để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc nhau ?

A. $(1;3+\sqrt{7}),(1;3-\sqrt{7})$ **B.** $(1;-3+\sqrt{7}),(1;-3-\sqrt{7})$

C. $(-1;3+\sqrt{7}),(-1;3-\sqrt{7})$ **D.** $(-1;-3+\sqrt{7}),(-1;-3-\sqrt{7})$

107) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{4}{3}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng d: $y=4x+2$ là

A. $y=4x+\frac{73}{6}$ và $y=-4x+\frac{7}{6}$ **B.** $y=-4x-\frac{26}{3}$ và $y=4x+\frac{7}{6}$

C. $y=4x+\frac{26}{3}$ và $y=-4x-\frac{73}{6}$ **D.** $y=4x-\frac{26}{3}$ và $y=4x+\frac{73}{6}$

108) Giá trị m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+mx^2-m-1$ tại điểm A(1; 0) song song với đường thẳng $y=2x$ là

A. $m=-3$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-1$ **D.** m tùy ý

109) Cho hàm số (C): $y=\frac{ax^2-bx}{x-2}$. Để (C) qua điểm $A\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3 thì giá trị a và b là

A. $a=-\frac{3}{2},b=-6$ **B.** $a=\frac{3}{2},b=-6$ **C.** $a=-\frac{3}{2},b=6$ **D.** $a=\frac{3}{2},b=6$

110) Tìm những điểm trên trục hoành để từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{1+2x}{1-x}$. Một học sinh giải như sau

Bước 1 : Gọi M(m; 0). Phương trình đường thẳng d đi qua M có hệ số góc k là $y=k(x-m)$

Bước 2

+ Điều kiện d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\frac{1+2x}{1-x}=k(x-m) & (1)\\ \frac{3}{(1-x)^2}=k & (2)\end{cases}$$

+ Thay (2) vào (1) ta được $\frac{1+2x}{1-x}=\frac{3}{(1-x)^2}(x-m)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\(1+2x)(1-x)=3(x-m)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\g(x)=2x^2+2x-(3m+1)=0\ (*)\end{cases}$

Bước 3 : Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến đến (C)

$\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=6m+3>0\\g(1)=3-3m\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\neq 1$.

Vậy: M(m; 0) với $-\frac{1}{2}<m\neq 1$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Bài giải đúng

111) Giá trị m để hai đồ thị (C): $y=x^3+m(x+1)$ và d: $y=x$ tiếp xúc với nhau là

A. $m=\frac{1}{4}$ hoặc $m=1$ **B.** $m=-\frac{1}{4}$ hoặc $m=2$

C. $m=\frac{1}{4}$ hoặc $m=2$ **D.** $m=\frac{1}{4}$ hoặc $m=-2$

112) Giá trị m để hai đồ thị (C): $y=\frac{2x^2-x-1}{x+1}$ và (P): $y=-x^2+m$ tiếp xúc với nhau là

A. $m=-3$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-1$ **D.** m tùy ý

113) Giá trị m để hai đồ thị (C): $y=x^4-2x^2+1$ và (P): $y=2x^2+m$ tiếp xúc với nhau là

A. $m=0$ hoặc $m=1$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-3$

C. $m=\pm 1$ **D.** $m=\pm 3$

114) Khi m thay đổi, đồ thị hàm số $y=mx^3-2mx^2-(m+1)x+2m$ qua mấy điểm cố định?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

115) Khi m thay đổi, đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+mx+2$ qua hai điểm cố định có tọa độ là

A. (0; 2), (1; 3) **B.** (0; 2), (−1; 1)

C. (2; 0), (3; 1) **D.** (2; 0), (1; −1)

116) Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+m^2x-m}{x-m}$ $(m\neq 0)$ luôn qua điểm cố định khi m thay đổi có tọa độ là

A. (1; 0), (2; 3) **B.** (0; 1) **C.** (1; 0), (0; 0) **D.** Một kết quả khác

117) Đồ thị hàm số $y=mx^2+(m^2-3m+3)x-m^2+2m-5$ (1) qua điểm cố định khi m thay đổi có tọa độ là

A. (1; −2) **B.** (1; −2), (2; 3) **C.** (2; 3) **D.** Một kết quả khác

118) Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{2x+m}$ (1). Xác định m để đồ thị hàm số (1) luôn đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

A. $m \neq \pm 1$ **B.** $m \neq 0$ **C.** $m \neq \pm 2$ **D.** $m \neq \pm 3$

119) Tìm các điểm M trên đường thẳng $x = 3$ sao cho mọi đồ thị của hàm $y = -3mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 - 5m + 2$ đều không đi qua điểm M

A. M(3; y) với $y < -257$ **B.** M(3; y) với $y > -\dfrac{63}{7}$

C. M(3; y) với $y > -\dfrac{263}{7}$ **D.** M(3; y) với $y < -\dfrac{263}{7}$

120) Tập hợp điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + x - 1$ khi m thay đổi là đường cong có phương trình

A. $y = x^3 + x - 1$ **B.** $y = -x^3 - x - 1$

C. $y = \dfrac{2}{3}x^3 + x + 1$ **D.** $y = -\dfrac{2}{3}x^3 + x - 1$

121) Cho hàm số $y = \dfrac{mx+3}{x+m-2}$ có đồ thị (C), (C) có tâm đối xứng là I. Tập hợp các điểm I khi m thay đổi là

A. Đường thẳng $y = x - 2$.

B. Đường thẳng $y = -x + 2$.

C. Đường thẳng $y = x - 2$ ngoại trừ hai điểm $(1; -1)$ và $(3; 1)$.

D. Đường thẳng $y = -x + 2$ ngoại trừ hai điểm $(-1; 3)$ và $(3; -1)$.

122) Cho hàm số (C): $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x}$,đường thẳng d: $y = x + m$. Trong trường hợp d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N . Hãy tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi. Một học sinh giải như sau

Bước 1 : Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x} = x + m \Leftrightarrow x^2 - (2 + m)x + 1 = 0$ (*)

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow m < -4$ hoặc $m > 0$

Bước 2 :

+ x_M, x_N là nghiệm của (*).

Tọa độ trung điểm I của đoạn MN: $\begin{cases} x = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{2+m}{2} & (1) \\ y = x + m & (2) \end{cases}$

+ $(2) \Rightarrow m = y - x$ (3)

Thay (3) vào $(1) \Rightarrow y = 3x - 2$

Bước 3 : Tập hợp các điểm I là các điểm nằm trên đường $y = 3x - 2$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Bài giải đúng

123) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 + 1}{x - m}$ (1). Chứng minh hàm số (1) có hai điểm cực trị. Tìm tập hợp các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) khi m thay đổi. Một học sinh giải như sau

Bước 1 : + Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{m\}$

$$+\ y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$$

+ Thấy: $\Delta'_{g(x)} = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0,\ \forall m$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = m \pm 1$

$\Rightarrow$ Hàm số (1) có hai điểm cực trị với mọi m

Bước 2 : Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m+1$		$m-1$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số (1) là $S\begin{cases} x = m - 1 & (2) \\ y = -2 & (3) \end{cases}$

Bước 3 : Khử m giữa (2) và (3) ta có $y = -2$

Vậy : Tập hợp các điểm cực tiểu của đồ thị (1) là những điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Giải đúng

124) Cho hàm số (C): $y = x + \dfrac{1}{x-1}$. Số điểm trên (C) có tọa độ nguyên là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

125) Cho hàm số (C): $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Số điểm trên (C) có tọa độ nguyên là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

126) Giá trị m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + m}{x - 1}$ nhận điểm I(1 ; 3) làm tâm đối xứng

A. $m = -1$ **B.** $m = -2$ **C.** $m < 0$ **D.** $m \neq 0$

127) Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ có đồ thị (C). Hàm số nào dưới đây đối xứng (C) qua điểm M(1; 1)

A. $g(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ **B.** $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

C. $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **D.** $g(x)=\dfrac{2(x^2+1)}{x}$

128) Giá trị m để đồ thị của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^3}{3}+3x^2+2mx+m^2-4$ có ít nhất một cặp điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-2<m<2$ **B.** $m=\pm 2$ **C.** $-3<m<3$ **D.** $m=\pm 3$

129) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ nhận đường nào sau đây làm trục đối xứng

A. $y=x-3$ **B.** $y=x+2$ **C.** $y=-x+3$ **D.** $y=-x$

130) Hoành độ cặp điểm M và N ở trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ đối xứng nhau qua điểm I(0; 18) là

A. $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **B.** $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **D.** $x=\pm\dfrac{1}{2}$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

1) Chọn B

. Tập xác định: **D = R**

. Đạo hàm: $y'=x^2-2x-3$

$y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$

. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

2) Chọn A

. Tập xác định : **D = R**

. Đạo hàm : $y'=2x(x^2-3)$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm\sqrt{3}$

. Bảng biến thiên :

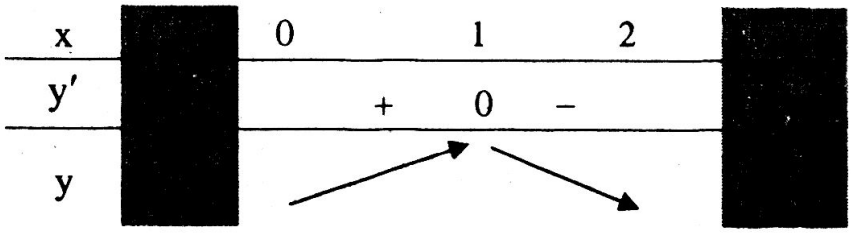
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y′		−	0	+	0	−	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

3) Chọn B

. Tập xác định : $\mathbf{D} = [0; 2]$

. Đạo hàm : $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, x \in (0; 2), \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

. Bảng biến thiên :



4) Chọn D

* *Nhắc lại :* Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

$$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} ; \qquad f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + m$

. Hàm số y luôn đồng biến trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$

5) Chọn A

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$

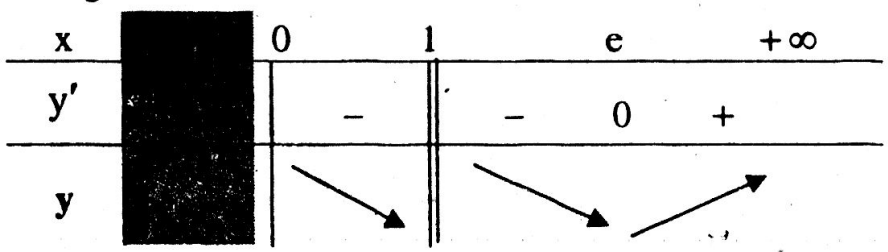
Suy ra: Hàm số y luôn đồng biến trên $\mathbf{R}$

6) Chọn D

. Tập xác định: $\mathbf{D} = (0; 1) \cup (1; +\infty)$

. Đạo hàm: $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

. Bảng biến thiên:



7) Chọn C

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R} \backslash \{2\}$

. Đạo hàm: $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbf{D}$

Suy ra: Hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

8) Chọn A

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R} \backslash \{1\}$

. Đạo hàm: $y' = \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in \mathbf{D}$

Suy ra: Hàm số y đồng biến trên $\mathbf{D} \Rightarrow$ y đồng biến trên (1; 3).

9) Chọn D

10) Chọn B

. Tập xác định: $\mathbf{D} = (0; +\infty)$

. Đạo hàm: $y' = \ln x + 1$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

. Lập bảng biến thiên. Suy ra: Hàm số y đồng biến trên $(e^{-1}; +\infty)$.

11) Chọn C

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

. Đạo hàm: $y' = \dfrac{-2-m}{(x-2)^2}$

. Yêu cầu bài toán ta có $-2-m<0 \Leftrightarrow m>-2$

12) Chọn B

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 18x + 12$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

. Bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, cực tiểu tại $x = 2$.

13) Chọn B

Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 6 về hàm $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có một cực trị khi $a > 0$ và $b \geq 0$

14) Chọn B

. Tập xác định : $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

. Đạo hàm : $y' = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

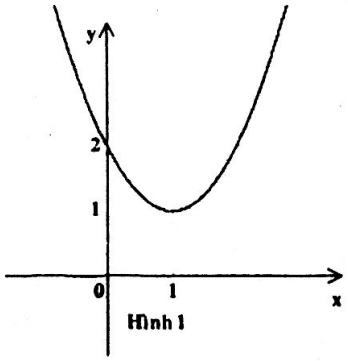
. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi đi qua hai điểm đó.

Nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

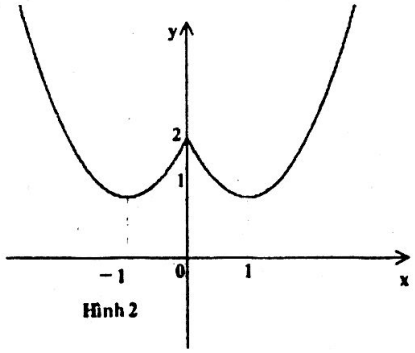
15) Chọn C

. Đặt : $\begin{cases} y = f(x) = x^2 - 2x + 2 \\ y = g(x) = x^2 - 2|x| + 2 \end{cases}$

. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hình 1)



Hình 1



Hình 2

. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ (hình 2) gồm hai phần

+ Phần 1: Nếu $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$. Đồ thị hàm $y = g(x)$ trùng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.

+ Phần 2: $g(-x) = |-x|^2 - 2|-x| + 2 = |x|^2 - 2|x| + 2 = g(x), \forall x \in \mathbf{R}$

Suy ra: Hàm số $y = g(x)$ là hàm số chẵn trên **R**, nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng (nghĩa là đồ thị $y = g(x)$ đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phần 1 qua trục tung)

. Nhìn đồ thị hàm số $y = g(x)$ ta thấy có hai điểm cực trị $(1; 1), (-1; 1)$.

16) Chọn C

17) Chọn A

. Tập xác định: $D = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2x + m$

. Hàm số có cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$

18) Chọn C

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 1 - 2m}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

19) Chọn A

. Tập xác định : $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm : $f'(x) = -3x^2 - 4x + m$, $f''(x) = -6x - 4$

. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

20) Chọn B

Bước 2 : *Điều kiện cần :*

Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0$ (*)

Bước 3 : $(*) \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -3$

Điều kiện đủ :

+ Thay $m = -1$, $m = -3$ vào (1)
+ Lập bảng biến thiên, dựa vào bảng chọn giá trị m thích hợp.

21) Chọn C

. Tập xác định: $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$

. Đạo hàm: $y' = 5 - \frac{5}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
y		↗	CĐ	↘	$\|\|$	↘	8 CT	↗

22) Chọn C

. Tập xác định: **R**

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$

. Lập bảng biến thiên và dựa bảng thấy hàm số có điểm cực trị A(1; 4) , B(3; 0).

. Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 6$

23) Chọn A

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3[x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2]$

. Hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - (a^2 + b^2) > 0 \Leftrightarrow ab > 0.$

24) Chọn D

. Tập xác định: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 1.(x^2 - 2x - m - 1) + (2x - 2)(x - m) = 3x^2 - 2(m+2)x + m - 1$

. Ta thấy $\Delta' = m^2 + m + 7 > 0, \forall m \Rightarrow$ hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2

. Theo giả thiết: $|x_1 . x_2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{m-1}{3}\right| = 1 \Leftrightarrow m - 1 = \pm 3$

$\Leftrightarrow m = 4$ hay $m = -2$ (thỏa điều kiện).

25) Chọn A

. Tập xác định : $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

. $y = mx + 4m + \frac{6m+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm hai phía đối với trục Ox

khi $\begin{cases} m \neq 0 \text{ và } m \neq -\frac{1}{6} \\ mx^2 + 3mx + 2m + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

26) Chọn D

. Tập xác định : $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

. Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

. Hàm số đã cho có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$

27) Chọn C

. Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 6, hàm $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có

ba điểm cực trị khi $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

. Yêu cầu bài toán thì $m < 0$.

28) Chọn C

. Điều kiện hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị là $m > 0$

(Xem Kiến thức cần nhớ nội dung 6 về hàm $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$)

. Tọa độ ba điểm cực trị là $O(0; 0)$, $A(-\sqrt{m}; -m^2)$, $B(\sqrt{m}; -m^2)$

(A và B đối xứng nhau qua trục tung).

Tính $\overrightarrow{OA} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overrightarrow{OB} = (\sqrt{m}; -m^2)$

. Yêu cầu bài toán ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

29) Chọn B

. Tương tự cách giải câu 20 ta tìm được điểm cực trị $A(0; -2)$, $B(4; 6)$.

. Phương trình đường thẳng AB: $(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$

$\Leftrightarrow (x - 0)(6 + 2) = (y + 2)(4 - 0) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

. $y = 2x - 2$ có dạng $y = ax + b$ với $a = 2, b = -2 \Rightarrow a + b = 0$.

30) Chọn D

. Gọi $A(x_1; -2x_1 - m)$, $B(x_2; -2x_2 - m)$ là điểm cực đại và cực tiểu (ngược lại)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 5(x_2 - x_1)^2$

$= 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 5(4 + 4m)$ (với $x_1 + x_2 = 2,\ x_1x_2 = -m$)

. $AB = 10 \Leftrightarrow AB^2 = 100 \Leftrightarrow 5(4 + 4m) = 100 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn $m > -1$).

31) Chọn A

. Tập xác định :**D = R**

. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x = x(4x^2 - 12x + 8)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 2$

. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y′		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{7}{4}$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

32) Chọn B

. Tập xác định: **D** = (0; 3] ;

. Đạo hàm : $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbf{D}$

. Bảng biến thiên

x	0		3
y′	‖	+	
y	‖	↗	$\frac{8}{3}$

. Dựa vào bảng biến thiên thấy : $\max y = \frac{8}{3}$ khi $x = 3$.

33) Chọn A

. Tập xác định : $\mathbf{D} = [-4; 4]$

. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x - 9, y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$

. Bảng biến thiên

x	-4		-1		3		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-41	↗	40	↘	8	↗	15

· Dựa vào bảng biến thiên thấy : Maxy = 40 khi $x = -1$.

34) Chọn B

. Tập xác định: $\mathbf{D} = [-1; 1]$

. Đạo hàm: $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow$ y nghịch biến trên $[-1; 1]$

. Vậy: $\text{Maxy} = y(-1) = 3$.

35) Chọn C

. Tập xác định: $\mathbf{D} = (-2; 4]$

. Đạo hàm: $y' = \dfrac{2}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in \mathbf{D} \Rightarrow$ y đồng biến trên $(-2; 4]$

. Vậy: $\text{Maxy} = y(4) = \dfrac{2}{3}$.

36) Chọn A

Hàm số y viết lại $y = \sin^3 x - (1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 2$

hay $y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1$

. Đặt: $t = \sin x, t \in (-1; 1)$. Ta có: $y = t^3 + 2t^2 + t + 1, y' = 3t^2 + 4t + 1$

. Tương tự cách giải câu 33, ta tìm được $\min\limits_{t \in (-1; 1)} y = \dfrac{23}{27}$.

37) Chọn A

. Tập xác định: $\mathbf{D} = (0; 4)$

. Đạo hàm: $y' = -1 + \dfrac{1}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbf{D}$

. Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng ta được: Maxy = 2006 tại $x = 1$.

38) Chọn C

. Hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ liên tục trên $[1; e^3]$

. Đạo hàm: $y' = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = e^2 \end{array}\right.$

. Tính giá trị $y(1) = 0, y(e^2) = \dfrac{4}{e^2}, y(e^3) = \dfrac{9}{e^3}$

. Vậy: GTLN, GTNN của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ lần lượt là $\dfrac{4}{e^2}$, 0.

39) Chọn A. Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ tiệm cận đứng.

40) Chọn A. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\dfrac{4}{x}}{2-\dfrac{5}{x}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = \dfrac{3}{2}$.

41) Chọn A (tương tự cách giải câu 39)

42) Chọn B . Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ tiệm cận đứng.

. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên.

43) Chọn D

44) Chọn D. Bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{1}{x+1}$ là :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

45) Chọn C

46) Chọn C

. Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

. Thế $x = 1$ và $x = 2$ vào $mx^3 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2;\ m = \dfrac{1}{4}$

. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng khi $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

47) Chọn A . . $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m + 1}{x - 1} = 2x - 1 + \dfrac{m}{x-1}$

. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận xiên khi $m = 0$.

48) Chọn B

Tiệm cận xiên của hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ có dạng $y = ax + b$

. Với $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1$

. Với $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt[3]{x^3 - x} - x]$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x} + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^2}} + 1\right]} = 0$$

Vậy: Tiệm cận xiên là $y = x$.

49) Chọn D

. $y = \dfrac{x^2 - mx + 2}{x - 1} = x + 1 - m + \dfrac{3 - m}{x - 1}$ $(m \neq 3)$

. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên d: $y = x + 1 - m$ $\left(\text{vì } \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{3 - m}{x - 1}\right) = 0\right)$

. $O(0; 0) \in d \Rightarrow m = 1$.

50) Chọn D

. Tiệm cận xiên d: $y = x + m + 1$

. d cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(-m - 1; 0)$, $B(0; m + 1)$

. $S_{\Delta OAB} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(m + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow m + 1 = \pm 4 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -5$

51) Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m} = 2x + 2m - 3 + \dfrac{2m^2 - 2m}{x - m}$ không có tiệm cận xiên khi $2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

52) Chọn B . Tập xác định: **D = R**

. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$; $y'' = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

. Ta thấy y'' đổi dấu khi điểm $0 \Rightarrow I(0; 2)$ là điểm uốn.

53) Chọn A

Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung **6, hàm** $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$

không có điểm uốn khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

54) Chọn C

. Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 6, $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$ có hai điểm uốn khi $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

. Yêu cầu bài toán ta có: $-(m - 1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$

55) Chọn D

56) Chọn A (tương tự cách giải câu 53)

57) Chọn B

. Tập xác định: $D = \mathbf{R}$

. Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + 1$, $y'' = 6ax + 2b$

. $I(2; -6)$ là điểm uốn khi $\begin{cases} y''(2) = 0 \\ y(2) = -6 \\ y'' \text{ đổi dấu khi x qua điểm } x_0 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 8a + 4b - 2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa đề)} \Rightarrow ab = -\frac{3}{8}$$

58) Chọn câu A (tương tự cách giải câu 53)

59) Chọn D . Nhận thấy $f(x) = x(x^2 + 6x - m^2) \Rightarrow$ đồ thị $y = f(x)$ luôn cắt trục hoành

60) Chọn A

Trong bốn hàm số đã cho, chỉ có đồ thị $y = x^3 - 1$ đi qua điểm $(1;0)$ và $(-1;-2)$.

61) Chọn C

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{ex + f} = px + q + \dfrac{r}{ex + f} (ae \neq 0, r \neq 0)$ không có điểm uốn (Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 6).

62) Chọn B **63) Chọn C** **64) Chọn A** **65) Chọn B**

66) Chọn C **67) Chọn A** **68) Chọn D** **69) Chọn B**

70) Chọn C. Chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$ đi qua điểm $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$

71) Chọn A

Trong bốn hàm số đã cho đều có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$, tiệm cận ngang $y = \dfrac{1}{2}$. Nhưng chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{2x + 1}$ đi qua điểm $(0;0)$.

72) Chọn D

Trong bốn hàm số đã cho đều có tiệm cận đứng $x = \dfrac{1}{2}$, tiệm cận ngang $y = \dfrac{1}{2}$. Chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x + 2}{2x - 1}$ là đi qua điểm $(0;-2), (-2;0)$.

73) Chọn A

Trong bốn hàm số đã cho đều có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận xiên $y = x$. Chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ đi qua điểm $(1;2), (-1;-2)$.

74) Chọn B

Trong bốn hàm số đã cho đều có tiệm cận đứng $x = -2$. Nhưng chỉ có hàm $y = \dfrac{-x^2 - 3x - 1}{x + 2} = -x - 1 + \dfrac{1}{x + 2}$ là có tiệm cận xiên $y = -x - 1$.

75) Chọn C

Bốn hàm số đã cho đều có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = -x + 3$.

Chỉ có đồ thị hàm số $y = -x + 3 - \dfrac{1}{x - 1}$ đi qua điểm $(0;4)$.

76) Chọn A

Cách 1 : Chỉ có đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x|$ qua điểm $(1;4), (-1;4)$.

Cách 2 : Xem lại cách giải câu 15.

77) Chọn C

Cách 1: Đặt: $\begin{cases} y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \\ y = g(x) = \left|x^3 + 3x^2 - 2\right| \end{cases}$

. Ta có: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ (hình 2) gồm hai phần :

+ Phần 1 : Trùng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $f(x) \geq 0$ (xem lại hình 1)

+ Phần 2 : Đối xứng qua trục hoành với đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $f(x) < 0$.

Cách 2: Chỉ có đồ thị hàm số $y = \left|x^3 + 3x^2 - 2\right|$ đi qua điểm (0; 2).

78) Chọn B

. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = \left|x^3 + 3x^2 - 2\right|$ (hình 2 câu 77)

. Đường thẳng d : $y = m$ cùng phương với trục hoành và cắt đồ thị hàm số $y = \left|x^3 + 3x^2 - 2\right|$ tại 6 điểm phân biệt khi $0 < m < 2$.

79) Chọn A (tương tự cách giải câu 77)

80) Chọn C

. Đặt $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$, $y = g(x) = \dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$

. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hình 1)

. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ (hình 2) gồm hai phần:

+ Phần 1: Nếu $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$, $\forall x \neq \dfrac{1}{2}$. Đồthị hàm số $y = g(x)$ trùng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ với x thuộc tập xác định của hàm số

+ Phần 2 : T a có: $g(-x) = \dfrac{|-x|+2}{2|-x|-1} = \dfrac{|x|+2}{2|x|-1} = g(x), \forall |x| \neq \dfrac{1}{2}$

Do đó: Hàm số $y = g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$ và đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng (tức là đồ thị $y = g(x)$ đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phần 1 qua trục tung).

81) Chọn B. Chỉ có đồ thị câu B là qua điểm $(\pm 2; 0)$

82) Chọn D (tương tự cách giải câu 59)

83) Chọn B

. Gọi (C): $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và d: $y = 1 - 2x$

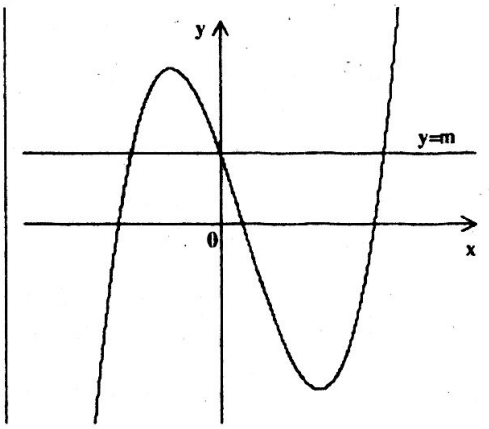
. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$1 - 2x = x^3 - 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$\Rightarrow$ d cắt (C) tại một điểm có hoành độ $x = 1$.

84) Chọn A

Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 6, hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có $a > 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì dạng đồ thị hàm số trên là:



Yêu cầu bài toán $y(x_1) = 0 < m < y(x_2) = 4$. ($x_1, x_2$ lần lượt là hoành độ cực tiểu và cực đại)

85) Chọn D

. Gọi (H): $y = \dfrac{7x+6}{x-2}$ và d: $y = x + 2$

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) là $\dfrac{7x+6}{x-2} = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 10 = 0$ (*)

. Hoành độ giao điểm M, N của d và (H) là nghiệm của (*)

. Hoành độ trung điểm của đoạn MN là $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = -\dfrac{-7}{2} = \dfrac{7}{2}$.

86) Chọn C

. Điểm uốn của đường cong $y = x^3 - 3x$ là O(0; 0)

. Phương trình đường thẳng d qua điểm uốn và có hệ số góc m: $y = mx$

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và đường cong (C) đã cho là

$x^3 - 3x = mx$ hay $x(x^2 - 3 - m) = 0$

. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 3 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 3 + m > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

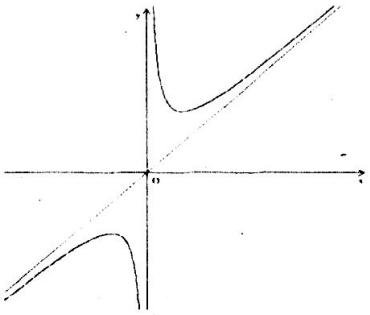
87) Chọn A

. Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong (C) đã cho với trục hoành là $(x-1)(\underbrace{x^2 + x + m}_{g(x)}) = 0$

. Để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0 \\ 1^2 + 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m \neq -2 \end{cases}$

88) Chọn D

Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{ex + f} = px + q + \dfrac{r}{ex + f}\ (ae \neq 0, r \neq 0)$ có $a.e > 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì dạng của hàm số trên là



Yêu cầu bài toán $m < y(x_1) = 3$ hoặc $m > y(x_2) = 7$. (x_1, x_2 lần lượt là hoành độ cực đại và cực tiểu)

89) Chọn A

Cách 1: Tương tự cách giải câu 88

Cách 2:

. Gọi (H): $y = \dfrac{2x+4}{x+1}$ và d: $y = m - 2x$

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) là $\dfrac{2x+4}{x+1} = m - 2x$

$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + (4-m)x + 4 - m = 0 \ (x \neq -1)$ (*)

. d cắt (H) hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 16 > 0 \\ g(-1) = 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| > 4.$

90) Chọn A

. Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong (C) cho với trục hoành là $g(x) = mx^2 + x + m = 0$ (*) (với $m \neq 0$)

. Để (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi (*) có hai nghiệm phân biệt dương khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \\ S = -\dfrac{1}{m} > 0 \\ P = 1 > 0 \\ g(1) = 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$

91) Chọn B

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} = kx + 2$

$\Leftrightarrow (1-k)x^2 + (1-k)x + 1 = 0 \ (x \neq -1)$ (*)

. Nếu $k = 1$: (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ d và (C) không có điểm chung.

. Nếu $k \neq 1$: d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow \Delta = k^2 + 2k - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \leq -3 \\ k \geq 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $k \in (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$.

92) Chọn B

Cách 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền **D** ($\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$) .

Ta nói: Số k được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên **D** nếu hai điều sau được thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \geq k, \ \forall x \in \mathbf{D} \\ \exists x_0 \in \mathbf{D}: f(x_0) = k \end{cases}$. Theo đề bài đã cho ta chọn câu B..

Cách 2 :

. Gọi d: $y = 2x + m$ và (H): $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) là $\dfrac{x+1}{x-1} = 2x + m$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - (1+m) = 0 \ (x \neq 1)$ (*)

. Ta thấy $\Delta = (m+1)^2 + 16 > 0, \ \forall m \Rightarrow$ d cắt (H) hai điểm phân biệt A, B

. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + [2x_B + m - (2x_A + m)]^2$

$= 5(x_B - x_A)^2 = 5[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B] = 5\left[\left(\dfrac{m-3}{2}\right)^2 + 4\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right]$

$= \dfrac{5}{4}[(m+1)^2 + 16] \geq \dfrac{5}{4} \cdot 16 = 20$

Đẳng thức xảy ra khi $m = -1$. Vậy: $\text{MinAB} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m = -1$

93) Chọn C

. Gọi d: $y = m$ và (C): $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$

. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = m$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - m \ (x \neq 1)$ (*)

. d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 khi (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ (**)

(*) $\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1-m}$

. $OA \perp OB \Leftrightarrow \dfrac{m}{x_1} \cdot \dfrac{m}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{-(1-m)} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thỏa điều kiện (**))

94) Chọn C

95) Chọn A

Chú ý : Nếu đề cho nhiều đường thẳng đi qua điểm uốn thì ta phải sử dụng công thức $y - y_I = f'(x_I)(x - x_I)$.

96) Chọn B

. Tọa độ giao điểm của (C) với Oy là M(0; 1)

. $y' = f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$

$\Leftrightarrow y - 1 = 3x \Leftrightarrow y = 3x + 1$

Chú ý : Giải tương tự câu 95 khi đề cho nhiều đường đi qua điểm M.

97) Chọn C (tương tự cách giải câu 96)

98) Chọn D

. Tọa độ giao điểm của (C) với trục hoành là A(1; 0), B(3; 0)

. $y' = f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 5}{(x-2)^2}$

. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại A là $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - 0 = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2(x-1)$

. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại B là $y - y_B = f'(x_B)(x - x_B)$

$\Leftrightarrow y - 0 = -2(x-3) \Leftrightarrow y = -2(x-3)$.

99) Chọn A

. Điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ là M(0;1)

. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$

$\Leftrightarrow y - 1 = 0.x \Leftrightarrow y = 1$

100) Chọn D

. Phương trình đường d đi qua A(2; 0) và có hệ số góc k: $y = k(x-2)$

. d tiếp xúc với (C): $y = -x^4 + 4x^2$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} -x^4 + 4x^2 = k(x-2) & (1) \\ -4x^3 + 8x = k & (2) \end{cases}$$

. Thế (2) vào (1) ta được: $3x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 16x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)^2(3x+4) = 0$ (3)

. Phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có ba đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) và tiếp xúc đồ thị (C).

101) Chọn A

. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 - 4x + 4m$ tiếp xúc với trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0 \\ 3x^2 - 2mx - 4 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-4)(x-m) = 0 & (1) \\ 3x^2 - 2mx - 4 = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

(1) $\Leftrightarrow x = m$ hoặc $x = \pm 2$

. Thế $x = m$ vào (2) ta được: $m = \pm 2$

. Thế $x = 2$ vào (2) ta được: $m = 2$

. Thế $x = -2$ vào (2) ta được: $m = -2$

. Vậy: $m = \pm 2$.

102) Chọn D

+ Trong 4 kết quả đã cho chỉ có kết quả câu D là có các đường thẳng đi qua điểm A(3; 2)

+ Nếu đề cho nhiều kết quả có các đường thẳng đi qua điểm A(3; 2) thì ta giải tương tự như câu 100.

103) Chọn A (tương tự cách giải câu 100)

104) Chọn C

. Vì tiếp tuyến vuông góc với d : $y = \frac{1}{3}x$ nên hệ số góc $k = -3$

. Hoành độ tiếp điểm x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x_0) = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 - 3}{(x_0+1)^2} = -3 \Leftrightarrow 4x_0^2 + 8x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 6 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -4 \end{bmatrix}$$

. Vậy : Các điểm cần tìm là $(0;6), (-2;-4)$.

105) Chọn A

. *Nhắc lại :* Cho d_1: $y = ax + b$, d_2: $y = a'x + b'$.

Ta có: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a.a' = -1$

Các kết quả A, B, C, D chỉ có kết quả $y = -9x - 8$, $y = -9x + 24$ là đúng vì $(-9).\frac{1}{9} = -1$ (*). Nếu đề cho nhiều kết quả mà thỏa (*) thì ta phải giải

Cách 1 :

. Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d$: $y = \frac{1}{9}x + 2 \Rightarrow \Delta$: $y = -9x + m$

. Giải tương tự câu 100 ta tìm được $m = -8$, $m = 24$

. Vậy: Có hai tiếp tuyến là $y = -9x + 24$, $y = -9x - 8$.

Cách 2 :

. Giải tương tự câu 104 ta tìm được hai tiếp điểm $A(-1; 1)$, $B(3; -3)$

. Sử dụng công thức $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$, $y - y_B = f'(x_B)(x - x_B)$.

106) Chọn B

. Gọi $M(1; m)$ thuộc d: $x = 1$

. Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x-1) + m$

. Xem lại Kiến thức cần nhớ nội dung 7: Sự tương giao và sự tiếp xúc hai đường cong ta tìm được phương trình:

$$k^2 + 2(1-m)k + m^2 + 6m + 1 = 0$$

. Từ M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1.k_2 = m^2 + 6m + 1 = -1 \\ \Delta' = -8m > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m = -3 \pm \sqrt{7}$$

. Vậy: Các điểm cần tìm là $(1; -3-\sqrt{7})$; $(1; -3+\sqrt{7})$.

107) Chọn D

. *Nhắc lại :* Cho d_1: $y = ax + b$, d_2: $y = a'x + b'$.

Ta có: $d_1 // d_2 \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$ (*)

Kết quả A, B, C, D chỉ có kết quả $y = 4x - \frac{26}{3}$, $y = 4x + \frac{73}{6}$ thỏa mãn (*).

Nếu đề cho nhiều kết quả mà thỏa (*) thì ta phải giải

Cách 1 :

. Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d$: $y = 4x + 2 \Rightarrow \Delta$: $y = 4x + b$ $(b \neq 2)$

. Giải tương tự câu 100 ta tìm được $b = -\frac{26}{3}$, $b = \frac{73}{6}$

. Vậy: Có hai tiếp tuyến là $y = 4x - \frac{26}{3}$ vày $= 4x + \frac{73}{6}$.

Cách 2 :

. Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d$: $y = 4x + 2 \Rightarrow f'(x_0) = 4$ (x_0 là tiếp điểm)

. Giải tương tự câu 104 ta tìm được hai tiếp điểm $A\left(2; -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-3; \frac{1}{6}\right)$

. Sử dụng công thức $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$, $y - y_B = f'(x_B)(x - x_B)$.

108) Chọn C (tương tự cách giải câu 107)

109) Chọn A

. Đạo hàm: $y' = \frac{ax^2 - 4ax + 2b}{(x-2)^2}$ $(x \neq 2)$

. Theo giả thiết:

$$\begin{cases} y'(0) = -3 \\ A\left(-1; \frac{5}{2}\right) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{2} = -3 \\ \frac{a+b}{-3} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

110) Chọn D **111) Chọn D** **112) Chọn C**

113) Chọn B

. Xem lại kiến thức cần nhớ nội dung 7

. Tương tự cách giải câu 101.

114) Chọn C

+ Hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 2m$ có thể viết lại thành

$(x^3 - 2x^2 - x + 2)m - (y + x) = 0.$

+ Tọa độ điểm cố định (nếu có) phải thỏa $\begin{cases} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ hoặc } x = \pm 1 \\ y = -x \end{cases}$$

+ Vậy : Đồ thị đã cho đi qua ba điểm cố định $(2; -2), (1; -1), (-1; 1)$

115) Chọn A (tương tự cách giải câu 114)

116) Chọn B **117) Chọn A** **118) Chọn C**

119) Chọn D

. Đặt M(3; y)

. Vì M không ở trên mọi đồ thị nên $7m^2 - 32m - 1 - y = 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 256 + 7(1 + y) < 0 \Leftrightarrow y < -\frac{263}{7}$ (m ẩn số)

. Vậy: $M(3; y), y < -\frac{263}{7}$.

120) Chọn D

. Tập xác định: $\mathbf{D = R}$

. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + 1$, $y'' = 2x - 2m$. Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$

. Tọa độ điểm uốn I $\begin{cases} x = m & (1) \\ y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + x - 1 & (2) \end{cases}$

. Khử m giữa (1) và (2) $\Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x^3 + x - 1$ là phương trình cần tìm.

121) Chọn D . Để (C) có tâm đối xứng khi và chỉ khi $m \neq -1$ và $m \neq 3$

. Tọa độ tâm đối xứng $I(2 - m; m)$

. Tập hợp các điểm của I khi m thay đổi là một phần đường thẳng $y = -x + 2$ trừ hai điểm $(-1; 3)$ và $(3; -1)$.

122) Chọn C

Thiếu bước giới hạn tập hợp điểm I

. Giới hạn: + $m < -4 \Rightarrow 2x - 2 < -4 \Rightarrow x < -1$

+ $m > 0 \Rightarrow 2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$

. Vậy: Tập hợp các điểm I khi m thay đổi là một phần đường thẳng $y = 3x - 2$ ($x < -1$ hoặc $x > 1$).

123) Chọn B

Bước 2 : Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖	↘	2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số (1) là S $\begin{cases} x = m + 1 & (2) \\ y = 2 & (3) \end{cases}$

Bước 3 : Khử m giữa (2) và (3) ta có $y = 2$

Vậy : Tập hợp các điểm cực tiểu của đồ thị (1) là những điểm nằm trên đường thẳng $y = 2$.

124) Chọn B . $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{x-1}$

. $x, y \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$.

. **Vậy** : Số điểm trên (C) có tọa độ nguyên là 2

125) Chọn câu D

. $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

. $x, y \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \pm 1 \\ x - 1 = \pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$

. Vậy : Số điểm trên (C) có tọa độ nguyên là 4.

126) Chọn A

127) Chọn C . Lấy $A(x; y) \in (C)$, gọi $A'(x_1; y_1)$ là điểm đối xứng A qua M(1; 1)

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x = 2 \\ y_1 + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x_1 \quad (1) \\ y = 2 - y_1 \quad (2) \end{cases}$

. Thế (1) và (2) vào $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ ta được: $2 - y_1 = -\dfrac{1}{x_1} + 2 - x_1$

$\Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1 + x_1^2}{x_1}$. Vậy : $g(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.

128) Chọn A . Giả sử trên đồ thị đã cho có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ là: $M(x_0; y_0)$, $N(-x_0; -y_0)$. Ta có: $f(x_0) = f(-x_0)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^3}{3} + 3x_0^2 + 2mx_0 + m^2 - 4 + \left(-\frac{x_0^3}{3} + 3x_0^2 - 2mx_0 + m^2 - 4 \right) = 0$$

$\Leftrightarrow 6x_0^2 = 8 - 2m^2$. Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow 8 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < 2$.

129) Chọn C

+ Giao điểm I của hai tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm I(1; 2)
+ Kết quả câu A, B, C, D chỉ có kết quả câu C thì đường thẳng là đi qua điểm I(1; 2)

• Nếu có nhiều kết quả đi qua điểm I(1; 2) ta có thể vẽ hình

• Nếu đề cho dạng tự luận : chứng minh (D) : $y = -x + 3$ là trục đối xứng của (H): $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$. Ta giải như sau

- $(D) \perp d \Rightarrow d: y = x + m$
- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H): $\dfrac{2x + 1}{x - 1} = x + m$

$\Leftrightarrow x^2 - (3 - m)x - (1 + m) = 0$ (*)

Vì $\Delta = (m - 1)^2 + 12 > 0, \forall m \Rightarrow$ d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt M và N

- Tọa độ trung điểm I của MN: $\begin{cases} x_I = \dfrac{1}{2}(x_M + x_N) = \dfrac{3 - m}{2} & (1) \\ y_1 = x_1 + m & (2) \end{cases}$
- Từ $(1) \Rightarrow m = 3 - 2x_1$ (3)
- Thế (3) vào $(2) \Rightarrow y_1 = -x_1 + 3 \Rightarrow I \in (D) \Rightarrow$ đpcm.

130) Chọn A . Ta có: (C): $y = x + 2 + \dfrac{4}{x - 1}$

. Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm nằm trên (C)

. Theo giả thiết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 = 0 \quad (1) \\ y_1 + y_2 = 2y_1 = 36 \quad (2) \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow 4 + 4\frac{x_1 + x_2 - 2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = 36 \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{(x_1 - 1)(-x_1 - 1)} = 36$$

$\Leftrightarrow \dfrac{8}{x_1^2 - 1} = 32 \Leftrightarrow x_1^2 = \dfrac{5}{4}$. Vậy: Hoành độ cặp điểm cần tìm $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chương II

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. LŨY THỪA VÀ CĂN

a) Lũy thừa

Số mũ α	Lũy thừa a^α (với a là cơ số)
$\alpha = n \in \mathbf{N}^*$	$a^\alpha = a^n = \underbrace{a.a.a....a.a}_{\text{n thừa số a}}$ $(a \in \mathbf{R})$
$\alpha = 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
$\alpha = -n \in \mathbf{N}^*$	$a^\alpha = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$
$\alpha = \dfrac{m}{n} (n \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{Z})$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0)$
$\alpha = \lim r_n$ $(r_n \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}^*)$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$ $(a > 0)$

b) Căn bậc n

Định nghĩa :

Với n nguyên dương, **căn bậc n** của số thực a là số b (nếu có) sao cho $b^n = a$.

Chú ý :

- Mọi số a đều có một và chỉ một căn bậc lẻ n
- Số âm không có căn bậc chẵn.
- Với n nguyên dương chẵn và $a > 0$ đều có đúng hai căn bậc n của a là hai số đối nhau (căn dương, căn âm lần lượt kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$)

c) Tính chất của lũy thừa

+ Cho $a > 0, b > 0$. Ta có:

- $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
- $(a.b)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

+ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

2. LÔGARIT

a) Định nghĩa

- Với $0 < a \neq 1$ và $b > 0$. Ta định nghĩa : $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$
- $\lg b = \alpha \Leftrightarrow 10^\alpha = b$; $\ln b = \alpha \Leftrightarrow e^\alpha = b$

b) Tính chất của lôgarit

Giả sử các công thức dưới đây đều có nghĩa

+ $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $a^{\log_a b} = b$
+ $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$; $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
+ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\log_a a^\alpha = \alpha$
+ *Công thức đổi cơ số :*

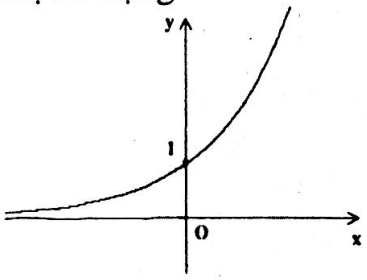
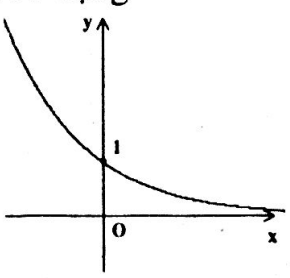
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{hay} \quad \log_c a . \log_a b = \log_c b$$

Đặc biệt : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$; $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha}\log_a b$.

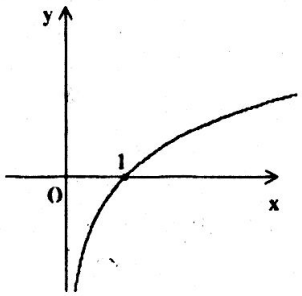
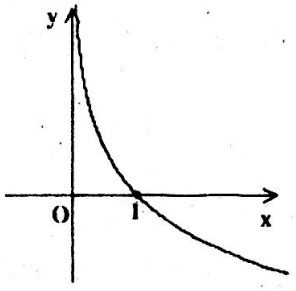
+ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$

Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$

3. HÀM SỐ MŨ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$

Trường hợp $a > 1$	**Trường hợp** $0 < a < 1$
+ $y' = a^x \ln a > 0, \forall x \in \mathbf{R}$	+ $y' = a^x \ln a < 0, \forall x \in \mathbf{R}$
+ Hàm số đồng biến trên **R**	+ Hàm số nghịch biến trên **R**
+ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	+ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
+ Bảng biến thiên	+ Bảng biến thiên
x | $-\infty$ $+\infty$ y | 0 ↗ $+\infty$	x | $-\infty$ $+\infty$ y | $+\infty$ ↘ 0
+ Đồ thị có dạng	+ Đồ thị có dạng
	

4. HÀM SỐ LÔGARIT $y = \log_a x\ (0 < a \neq 1, x > 0)$

Trường hợp $a > 1$	Trường hợp $0 < a < 1$
+ $y' = \dfrac{1}{x\ln a} > 0,\ \forall x \in (0;\ +\infty)$ + Hàm số đồng biến trên $(0;\ +\infty)$ + $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty$ + Bảng biến thiên x | 0 | $+\infty$ y | $-\infty$ → $+\infty$ + Đồ thị có dạng 	+ $y' = \dfrac{1}{x\ln a} < 0,\ \forall x \in (0;\ +\infty)$ + Hàm số nghịch biến trên $(0;\ +\infty)$ + $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ + Bảng biến thiên x | 0 | $+\infty$ y | $+\infty$ → $-\infty$ + Đồ thị có dạng 

5. HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

+ Tập xác định: $\mathbf{D} = (0;\ +\infty)$
  - Hàm số có tập xác định là $\mathbf{R}$ khi α nguyên dương.
  - Hàm số có tập xác định là $\mathbf{R}^*$ khi α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$.
+ Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(0;\ +\infty)$ khi $\alpha > 0$
+ Hàm số $y = x^\alpha$ nghịch biến trên $(0;\ +\infty)$ khi $\alpha < 0$
+ Đồ thị của hàm số $y = x^\alpha$ luôn luôn đi qua điểm $(1;\ 1)$.

6. GIỚI HẠN CẦN NHỚ

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

7. CÁC CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CẦN NHỚ

Giả sử các công thức sau đây đều có nghĩa và u=u(x) có đạo hàm

• $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}\ (\alpha \neq 0, x > 0)$	• $(u^\alpha)' = \alpha.u'u^{\alpha-1}$
• $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	• $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
• $(e^x)' = e^x$	• $(e^u)' = u'e^u$
• $(a^x)' = a^x \ln a$	• $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x}$	• $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $\left(\ln\lvert u\rvert\right)' = \dfrac{u'}{u}$
• $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $\left(\log_a\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	• $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; $\left(\log_a\lvert u\rvert\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

8. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Trường hợp	Ta có
$0 < a \neq 1$	$+ a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $+ \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$a > 1$	$+ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ $+ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$
$0 < a < 1$	$+ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ $+ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

B. BÀI TẬP CĂN BẢN

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

Bài 1. Đơn giản biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{8a^3} - \sqrt{a^2}$ (với $a < 0$) **b)** $B = \sqrt[4]{a^4} - \sqrt{a^2} - 3\sqrt[8]{a^8}$ (với $a < 0$)

c) $C = \sqrt[3]{\sqrt{x^{12}y^6}} - \left(\sqrt[5]{x^2y}\right)^5$

Giải

a) $A = \sqrt[3]{(2a)^3} - \sqrt{a^2} = 2a - |a| = 2a + a = 3a$

b) $B = |a| - |a| - 3|a| = -a + a + 3a = 3a$

c) $C = \sqrt[6]{(x^2y)^6} - x^2y = |x^2y| - x^2y$

+ Nếu $y \geq 0$ thì $C = x^2y - x^2y = 0$
+ Nếu $y < 0$ thì $C = -x^2y - x^2y = -2x^2y$

Bài 2. Đơn giản biểu thức $A = \left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}} - \dfrac{a^2+4}{a^3+\sqrt{8}}\right)\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{a}\right)$

Giải

$$A = \left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+\sqrt{2^3}}\right)\left(\frac{a^2-a\sqrt{2}+2}{2a}\right)$$

$$= \frac{a^2-a\sqrt{2}+2-a^2-4}{(a+\sqrt{2})(a^2-a\sqrt{2}+2)} \cdot \frac{a^2-a\sqrt{2}+2}{2a} = \frac{-\sqrt{2}(a+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{\sqrt{2}}{2a}$$

Bài 3. Cho $x \neq 1$ và $x > 0$. Chứng minh :

$$A = \left[\frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+1}{1-x^2}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ không phụ thuộc vào } x.$$

Giải

$$A=\left[\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2(1-x)}-\frac{x^2+1}{1-x^2}\right]\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=\frac{1+x-x^2-1}{1-x^2}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{x+1}{x}=1.$$ Suy ra : đpcm.

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A=\dfrac{3^{-2}+3^0}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-3(-3)^{-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$ **b)** $B=64^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-81^{0,5}$

Giải

a) $A=\dfrac{\frac{1}{9}+1}{9-3.\frac{1}{(-3)}+\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{10}{9}}{9+1+\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{10}{9}}{\frac{94}{9}}=\dfrac{5}{47}$

b) $B=(4^3)^{\frac{1}{3}}+(4^{-2})^{-0,75}-(9^2)^{0,5}=4+4^{\frac{3}{2}}-9=4+8-9=3.$

Bài 5. Khử căn ở mẫu thức

a) $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}$ **b)** $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

Giải

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt{2})(\sqrt[3]{4}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{16}-2}=\dfrac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{16^2}+2\sqrt[3]{16}+2^2)}{\sqrt[3]{16^3}-2^3}$

$$=\frac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{16^2}+2\sqrt[3]{16}+2^2)}{16-8}=\frac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{256}+2\sqrt[3]{16}+4)}{8}$$

b) $B=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-\sqrt{7^2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2+5+2\sqrt{10}-7}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{20}$$

Bài 6. Biến đổi thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) $\sqrt[3]{a^7\sqrt[4]{a}}$ (với $a>0$) **b)** $\sqrt[8]{b^5}.\sqrt[6]{b}$ (với $b>0$)

Giải

a) $\sqrt[3]{a^7\sqrt[4]{a}}=\sqrt[3]{a^7.a^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{a^{7+\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{29}{4}}}=\left(a^{\frac{29}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{29}{12}}.$

b) $\sqrt[8]{b^5}.\sqrt[6]{b}=b^{\frac{5}{8}}.b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{5}{8}+\frac{1}{6}}=b^{\frac{15+4}{24}}=b^{\frac{19}{24}}.$

§2. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Bài 7. Hãy so sánh a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$ và 1 b) $3^{-\sqrt{11}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,5}$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1989}$ và 2^{-1965}

Giải

a) Vì $0 > -\frac{\sqrt{6}}{2}$ và $0 < \frac{5}{7} < 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{6}}{2}} > \left(\frac{5}{7}\right)^{0} = 1$

b) Vì $\sqrt{11} > 2,5$ và $0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow 3^{-\sqrt{11}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{11}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2,5}$

c) Vì $\frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{3}$ và $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

d) Vì $1989 > 1965$ và $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1989} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1965} = 2^{-1965}$

Bài 8. Hãy tính a) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ b) $9^{1-2\sqrt{3}} \cdot 81^{1+\sqrt{3}}$

c) $64^{\sqrt{2}} : 4^{3\sqrt{2}}$ d) $\left(3^{\sqrt[3]{8}}\right)^{\sqrt[3]{4}}$

Giải

a) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2^2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

b) $9^{1-2\sqrt{3}} \cdot 81^{1+\sqrt{3}} = 9^{1-2\sqrt{3}} \cdot (9^2)^{1+\sqrt{3}} = 9^{1-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}} = 9^3 = 729$

c) $64^{\sqrt{2}} : 4^{3\sqrt{2}} = (4^3)^{\sqrt{2}} : 4^{3\sqrt{2}} = 4^{3\sqrt{2}} : 4^{3\sqrt{2}} = 1$

d) $\left(3^{\sqrt[3]{8}}\right)^{\sqrt[3]{4}} = 3^{\sqrt[3]{32}} = 3^{\sqrt[3]{2^5}} = 3^2 = 9$

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $y = 2^{-x+\sqrt{x}}$ b) $y = (0,5)^{\cos^2 x}$

Giải

a) Vì $-x + \sqrt{x} = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}, \forall x \ge 0 \Rightarrow 2^{-x+\sqrt{x}} \le 2^{\frac{1}{4}}$ hay $y \le \sqrt[4]{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy: $\max y = \sqrt[4]{2}$ tại $x = \frac{1}{4}$

b) Ta có: $\cos^2 x \geq 0, \forall x \Rightarrow (0,5)^{\cos^2 x} \leq (0,5)^0$ hay $y \leq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Vậy: $\max y = 1$ tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $y = 3^x + 3^{-x}$ **b)** $y = 3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x}$

Giải

Nhắc lại BĐT Cauchy

Với mọi $a \geq 0, b \geq 0$ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

a) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương 3^x và 3^{-x}

Ta có: $3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x . 3^{-x}} = 2\sqrt{3^{x-x}}$ hay $y \geq 2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3^x = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 9^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy: $\min y = 2$ tại $x = 0$

b) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $3^{\sin^2 x}$ và $3^{\cos^2 x}$

Ta có: $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{3^{\sin^2 x} . 3^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{3^{\sin^2 x + \cos^2 x}}$ hay $y \geq 2\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3^{\sin^2 x} = 3^{\cos^2 x} = \frac{3}{3^{\sin^2 x}} \Leftrightarrow 3^{2\sin^2 x} = 3$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

Vậy: $\min y = 2\sqrt{3}$ tại $x = x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

Bài 11. Đơn giản các biểu thức

a) $A = \frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}} : \frac{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$

b) $B = \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(\sqrt{ab} . \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b} \right)^{-1}$

Giải

a) $A = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{-\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)} = -1$$

Vậy: $A = -1$.

b) $$B = \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} - (a-b)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{a-b}\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{2}} + ba^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}} = 1$$

Vậy: $B = 1$.

§3. LÔGARIT

Bài 12. Hãy tính

a) $\log_{\sqrt{2}} 16$ **b)** $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 81$ **c)** $\log_{2\sqrt{2}} 16$ **d)** $\log_{\sqrt{2}} 0,25$

Giải

a) $\log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^4 = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 8$

b) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 81 = \log_{(\sqrt{3})^{-1}} (\sqrt{3})^8 = -8$

c) $\log_{2\sqrt{2}} 16 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^4 = \dfrac{4}{\frac{3}{2}} \log_2 2 = \dfrac{8}{3}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 0,25 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = -4$

Bài 13. Với giá trị nào của x thì biểu thức sau đây xác định

a) $\log_{0,3}(5-x)$ **b)** $\log_{2008}\left(\frac{1}{1-3x}\right)$ **c)** $\log_{\frac{1}{16}}(-x^2)$

d) $\log_{0,9}(-3x^3)$ **e)** $\log_{x-1}2x$ **f)** $\log_{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}(x^2-4)$

Giải

a) $\log_{0,3}(5-x)$ xác định khi $5-x>0 \Leftrightarrow x<5$

b) $\log_{2008}\left(\frac{1}{1-3x}\right)$ xác định khi $\frac{1}{1-3x}>0 \Leftrightarrow 1-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{16}}(-x^2)$ xác định khi $x^2<0 \Rightarrow$ không tồn tại giá trị nào của x

d) $\log_{0,9}(-3x^3)$ xác định khi $-3x^3>0 \Leftrightarrow x<0$

e) $\log_{x-1}2x$ xác định khi $\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq 1\\2x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\x\neq 2\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$

f) $\log_{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}(x^2-4)$ xác định khi $x^2-4>0$ và $x\neq 0 \Leftrightarrow |x|>2$

Bài 14. Tìm x, biết : **a)** $\log_2 x=-1$ **b)** $\log_{0,25}x=-2$

Giải

a) Điều kiện : $x>0$

Ta có: $\log_2 x=-1 \Leftrightarrow x=2^{-1}$

b) Điều kiện : $x>0$

Ta có: $\log_{0,25}x=-2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}x=-2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

Bài 15. Tìm x, biết : $\log_2 x=\log_2 16+2\log_4 32-2\log_8 64$ (*)

Giải

Điều kiện : $x>0$

$(*) \Leftrightarrow \log_2 x=\log_2 2^4+2\log_{2^2}2^5-2\log_8 8^2=4+5-4=5 \Leftrightarrow x=2^5=32$

Bài 16. Tính giá trị các biểu thức : **a)** $A=\left(81^{\frac{1}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\log_9 4}+25^{3\log_{125}2}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$

b) $B=2008.\left(49^{\cos\frac{\pi}{3}\log_7 9-\log_7 6}+\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}4}\right)$

Giải

a) . $81^{\frac{1}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\log_9 4} = 3^{4\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4\right)} = 3^{1-2\log_9 4} = \dfrac{3}{3^{2\log_9 4}} = \dfrac{3}{9^{\log_9 4}} = \dfrac{3}{4}$

. $25^{3\log_{125}2} = 25^{\log_{5^3}2^3} = 5^{2\log_5 2} = 5^{\log_5 4} = 4$

. $49^{\log_7 2} = 7^{2\log_7 2} = 7^{\log_7 4} = 4$

. $A = \left(\dfrac{3}{4}+4\right)\cdot 4 = 19$

b) . $49^{\cos\frac{\pi}{3}\log_7 9-\log_7 6} = 7^{2.\left(\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6\right)} = 7^{\log_7 9-\log_7 36} = 7^{\log_7\left(\frac{9}{36}\right)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}4} = 5^{-\log_{\sqrt{5}}4} = 5^{\log_5 4^{-2}} = 4^{-2} = \dfrac{1}{16}$

. $B = 2008\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\right) = 2008\cdot\dfrac{5}{16} = \dfrac{1255}{2}$

Bài 17. Cho $\log_2 5 = a, \log_3 5 = b$. Tính : $A = \dfrac{\log_5 120}{2^{\log_4\sqrt{2}}}$ theo a và b.

Giải

. $\log_5 120 = \log_5 2^3.5.3 = 3\log_5 2 + \log_5 5 + \log_5 3 = \dfrac{3}{\log_2 5} + 1 + \dfrac{1}{\log_3 5}$

. $2^{\log_4\sqrt{2}} = 4^{\log_4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2}$

. $A = \left(\dfrac{3}{a}+1+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{3b+ab+a}{\sqrt[4]{2}ab}$

§4. LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

Bài 18. Hãy tính

a) $\left(\lg\sqrt{10}+\ln\sqrt{e}-\ln\dfrac{1}{e}\right)\cdot\dfrac{2\log_2 3}{\log_4 9}$ **b)** $e^{\ln 3-\ln 2}+e^{2\ln\sqrt{5}-3\ln\sqrt[3]{2}}-5\ln e^{-1}$

Giải

a) . $\lg\sqrt{10}+\ln\sqrt{e}-\ln\dfrac{1}{e} = \lg 10^{\frac{1}{2}}+\ln e^{\frac{1}{2}}-\ln e^{-1} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1 = 2$

. $\dfrac{2\log_2 3}{\log_4 9} = \dfrac{2\log_2 3}{\log_{2^2}3^2} = \dfrac{2\log_2 3}{\log_2 3} = 2$

. $A = 4$

b) $e^{\ln 3-\ln 2}+e^{2\ln\sqrt{5}-3\ln\sqrt[3]{2}}-5\ln e^{-1} = e^{\ln\frac{3}{2}}+e^{\ln\frac{\sqrt{5^2}\cdot}{\sqrt[3]{2^3}}}+5\ln e = \dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}+5 = 9$

Bài 19. Tìm x, biết : $\lg x = \frac{1}{2}\lg 25 - 2\lg 3 + 4\ln\sqrt{e}$ (*)

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$(*) \Leftrightarrow \lg x = \lg\sqrt{25} - \lg 3^2 + \ln\sqrt{e^4} = \lg 5 - \lg 9 + \lg 10^2 \Leftrightarrow \lg x = \lg\frac{500}{9}$

$\Leftrightarrow x = \frac{500}{9}$

§5. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

Bài 20. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2008x}-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{7x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}}-x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\sqrt[4]{e^{x^2}}}{x^2}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2008x}-1}{x} = 2008\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2008x}-1}{2008x} = 2008.1 = 2008$

(xem lại Kiến thức cần nhớ nội dung 6)

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{7x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{7x}-\frac{e^{2x}-1}{7x}\right) = \frac{3}{7}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} - \frac{2}{7}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}$

$= \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

c) . Đặt $y = \frac{1}{x}$

. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\sqrt[4]{e^{x^2}}}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} - \frac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{4}}-1}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Bài 21. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2008x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5x+1)}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)-\ln(3x+1)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2008x+1)}{x}=2008.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2008x+1)}{2008x}=2008.1=2008$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+1)}{\sin 2x}=\dfrac{5}{2}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(5x+1)}{5x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+1)}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{5}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)-\ln(3x+1)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{2x}-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x+1)}{3x}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=1.2=2$

Bài 22. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau trên khoảng xác định của nó:

a) $y=(x^2-x+1)e^x$ b) $y=(\sin x+\cos x)e^{3x}$

c) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ d) $y=\sqrt{e^x}-2008^x$

Giải

a) $y'=(x^2-x+1)'e^x+(x^2-x+1)(e^x)'=(2x-1)e^x+(x^2-x+1)e^x=e^x(x^2+x)$

b) $y'=(\sin x+\cos x)'e^{3x}+(\sin x+\cos x)(e^{3x})'$

$=(\cos x-\sin x)e^{3x}+(\sin x+\cos x)(3x)'(e^{3x})$

$=e^{3x}(\cos x-\sin x+3\sin x+3\cos x)=e^{3x}(4\cos x+2\sin x)$

c) $y'=\dfrac{(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})-(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$

$=\dfrac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$

$=\dfrac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=\dfrac{-4e^x.e^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}=\dfrac{-4e^{x-x}}{(e^x-e^{-x})^2}=\dfrac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$

d) $y'=\left(\sqrt{e^x}\right)'-(2008^x)'=\dfrac{(e^x)'}{2\sqrt{e^x}}-2008^x\ln 2008=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}-2008^x\ln 2008$

Bài 23. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau trên khoảng xác định của nó:

a) $y=x\ln x$ b) $y=\ln(x^2+x+1)$

c) $y=\log_2(x^2+e^x)$ d) $y=\ln\sqrt{x^2+2008}$

Giải

a) $y'=x'\ln x+(\ln x)'x=\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot x=\ln x+1$

b) $y=\dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

c) $y' = \dfrac{(x^2+e^x)'}{(x^2+e^x)\ln 2} = \dfrac{2x+e^x}{(x^2+e^x)\ln 2}$

d) $y' = \dfrac{(\sqrt{x^2+2008})'}{\sqrt{x^2+2008}} = \dfrac{(x^2+2008)'}{2\sqrt{x^2+2008}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2008}} = \dfrac{x}{x^2+2008}$

Bài 24. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 3^{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}$

Giải

. Đặt: $u = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ với $-2 \le u \le 2$

. Hàm số đã cho viết lại $y = 3^u$, hàm số này đồng biến trên tập xác định
Do đó: $-2 \le u \le 2 \Rightarrow 3^{-2} \le 3^u \le 3^2$

. Vậy: Tập giá trị của hàm số đã cho là $\left[\dfrac{1}{9}; 9\right]$.

Bài 25. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (3x+5)^e$ **b)** $y = \sqrt[3]{3x}$

Giải

a) $y' = e(3x+5)'(3x+5)^{e-1} = 3e(3x+5)^{e-1}$

b) $y' = \left[(3x)^{\frac{1}{3}}\right]' = \dfrac{1}{3}\cdot(3x)'(3x)^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{(3x)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$

§6. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Bài 26. Giải các phương trình sau :

a) $2^{2x-3} = 16$ **b)** $\sqrt{7^x} = \sqrt[3]{49}$

Giải

Phương pháp đưa các lũy thừa về cùng cơ số :

a) $2^{2x-3} = 16 \Leftrightarrow 2^{2x-3} = 2^4 \Leftrightarrow 2x-3 = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

b) $\sqrt{7^x} = \sqrt[3]{49} \Leftrightarrow (7^x)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 7^{\frac{x}{2}} = 7^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

Bài 27. Giải các phương trình sau :

a) $4^{x^2+2} - 9.2^{x^2+2} + 8 = 0$ **b)** $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$

c) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$ **d)** $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

Giải

Phương pháp đặt ẩn phụ

a) Ta có: $4^{x^2+2}-9.2^{x^2+2}+8=0 \Leftrightarrow 2^{2(x^2+2)}-9.2^{x^2+2}+8=0$

Đặt: $t=2^{x^2+2}$, $t \geq 4$. Ta có: $t^2-9t+8=0 \Leftrightarrow t=8$ hoặc $t=1$ (loại)

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2}=2^3 \Leftrightarrow x^2+2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm 1$.

b) Ta có: $6.9^x-13.6^x+6.4^x=0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0$

Đặt: $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t>0$. Ta có: $6t^2-13t+6=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2} \vee t=\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2} \vee \left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm 1$.

c) Nhận thấy: $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right).\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)=1$

Đặt: $t=\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành $t+\frac{1}{t}=14$

$\Leftrightarrow t^2-14t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=7+\sqrt{48} \\ t=7-\sqrt{48} \end{array}\right.$

. Với $t=7+\sqrt{48}$, ta có: $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^2 \Leftrightarrow x=2$

. Với $t=7-\sqrt{48}$, ta có: $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{-2} \Leftrightarrow x=-2$

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm 2$.

d) Điều kiện: $x^2-5 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{5}$

Ta có: $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0 \Leftrightarrow 2^{2(x-\sqrt{x^2-5})}-6.2^{x-\sqrt{x^2-5}}+8=0$

Đặt: $t=2^{x-\sqrt{x^2-5}}$, $t>0$. Ta có: $t^2-6t+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=4 \end{array}\right.$

• Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{x^2-5}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-5=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn đk)

• Với $t=4 \Rightarrow \sqrt{x^2-5}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$, $x=\frac{9}{4}$.

Bài 28. Giải phương trình

a) $2^x+5^x=7^x$ **b)** $3.9^{x-1}+(3x-7)3^{x-1}+2-x=0$

Giải

Phương pháp nhẩm nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

a) $2^x + 5^x = 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ (*)

Nhẩm thấy x = 1 là nghiệm của (*)

Mặt khác: $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ là hàm số giảm trên **R** vì là tổng 2 hàm số giảm và $y = 1$ là hàm hằng

Do đó: $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*)

b) Đặt $t = 3^{x-1}, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $3t^2 + (3x-7)t + 2 - x = 0$ (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn t, ta tìm được $t = \frac{1}{3}$ và $t = -x + 2$

. Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{x-1} = 3^{-1} \Rightarrow x = 0$

. Với $t = -x + 2 \Rightarrow 3^{x-1} = -x + 2$ (2)

Hàm số $f(x) = 3^{x-1}$ đồng biến và $f(1) = 1$

Hàm số $g(x) = -x + 2$ nghịch biến và $g(1) = 1$

Do đó: $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0, x = 1$.

Bài 29. Giải phương trình : $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ (*)

Giải

Phương pháp biến đổi phương trình thành tích số

$$(*) \Leftrightarrow 2^{x^2-x}(2^{2x} - 4) - (2^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Bài 30. Giải phương trình : $5^x . 8^{x-1} = 500$ (*)

Giải

Phương pháp lôgarit hóa

$$(*) \Leftrightarrow 5^x . 2^{3(x-1)} = 5^3 . 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{2+3-3x} \Leftrightarrow (x-3)\log_5 5 = (5-3x)\log_5 2$$

$$\Leftrightarrow (1 + 3\log_5 2)x = 5\log_5 2 + 3 \Leftrightarrow x = \frac{5\log_5 2 + 3}{1 + 3\log_5 2}$$

Bài 31. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2(x-1) = 3$

b) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

c) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg(3x-6) = \lg 2$

e) $\frac{\log_2(x+2)^2 - \log_2(x+10)^2}{4\log_2 3} = 1$

f) $\log_{x+3}\left(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{1}{2}$

Giải

Phương pháp dựa vào định nghĩa hoặc biến đổi hai vế về cùng cơ số

a) Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Ta có: $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=2^3 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=9$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x+65>0,\ \forall x \\ 5-x>0 \\ 5-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \end{cases}$

Ta có: $\log_{5-x}(x^2-2x+65)=2 \Leftrightarrow x^2-2x+65=(5-x)^2 \Leftrightarrow x=-5$ (thỏa mãn

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-5$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1$

Ta có: $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1 \Leftrightarrow \log_3(x+1)(x+3)=\log_3 3$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)=3 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-4$ (loại)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$.

d) Điều kiện: $x>2$

Ta có: $\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2 \Leftrightarrow 2[\lg(x-2)-\lg 2]=\lg(3x-6)$

$\Leftrightarrow 2\lg\frac{x-2}{2}=\lg(3x-6) \Leftrightarrow \lg\left(\frac{x-2}{2}\right)^2=\lg(3x-6)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2=3x-6 \Leftrightarrow x^2-16x+28=0 \Leftrightarrow x=14$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=14$.

e) Điều kiện : $x\neq -2$ và $x\neq -10$

Ta có: $\frac{\log_2(x+2)^2-\log_2(x+10)^2}{4\log_2 3}=1$

$\Leftrightarrow 2\log_2|x+2|-2\log_2|x+10|=4\log_2 3 \Leftrightarrow \log_2|x+2|=\log_2 9|x+10|$

$\Leftrightarrow |x+2|=9|x+10| \Leftrightarrow 9(x+10)=\pm(x+2) \Leftrightarrow x=-11$ hoặc $x=-\frac{46}{5}$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-11$, $x=-\frac{46}{5}$.

f) $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{x+3}\left(3-|x-1|\right)=\frac{1}{2}$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases} 0<x+3\neq 1 \\ 3-|x-1|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x\neq -2 \\ -3<x-1<3 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<4$

$(1) \Leftrightarrow 3-|x-1|=\sqrt{x+3}$ (2)

. Với $-2<x<1$: $(2) \Leftrightarrow 3+x-1=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow (x+2)^2=x+3$

$\Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

. Với $1\le x<4$: $(2)\Leftrightarrow 3-(x-1)=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow (4-x)^2=x+3$

$\Leftrightarrow x^2-9x+13=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$ (loại)

Vậy : Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, x=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$.

Bài 32. Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{2}\log_2 x+\dfrac{7}{6}=0$ **b)** $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

c) $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$ **d)** $\log_{\frac{2}{x}}2+\log_2 4x=3$

Giải

Phương pháp đặt ẩn phụ

a) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ \log_2 x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x$. Phương trình đã cho trở thành $3t^2-7t-6=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\ \log_2 x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^3=8\\ x=2^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{array}\right.\quad(\text{thỏa mãn đk})$$

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=8, x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

b) Điều kiện: $2^{x+1}-3>0\Leftrightarrow x>\log_2 3-1$

Ta có: $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)\Leftrightarrow\log_2\dfrac{4^x+4}{2^{x+1}-3}=x$

$\Leftrightarrow\dfrac{4^x+4}{2^{x+1}-3}=2^x$ (1). Đặt $t=2^x, t>0$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow t^2+4=2t^2-3t\Leftrightarrow t^2-3t-4=0\Rightarrow t=4$

$\Leftrightarrow 2^x=2^2\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

c) Điều kiện : $\begin{cases}x^2>0\\ x^2\neq 1\\ 2x>0\\ 2x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có: $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3\Leftrightarrow\log_{x^2}16+\dfrac{\log_4 64}{\log_4 2x}=3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_4 x}+\frac{3}{\frac{1}{2}+\log_4 x}=3 \quad (1)$$

Đặt: $t=\log_4 x$. Phương trình (1) trở thành $\frac{1}{t}+\frac{6}{1+2t}=3$

hay $6t^2-5t-1=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=1 \\ t=-\frac{1}{6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_4 x=1 \\ \log_4 x=-\frac{1}{6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=4 \\ x=2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{bmatrix}$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=4$, $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

d) Điều kiện : $\begin{cases} 0<\frac{2}{x}\neq 1 \\ 4x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Ta có: $\log_{\frac{2}{x}} 2+\log_2 4x=3 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}+\log_2 4+\log_2 x=3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\log_2 x}+2+\log_2 x=3 \ (1)$$

Đặt: $t=\log_2 x$.

Phương trình (1) trở thành $\frac{1}{1-t}+t-1=0$ hay $-t^2+2t=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=0 \\ t=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_2 x=0 \\ \log_2 x=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=4 \end{bmatrix} \quad (\text{thỏa mãn đk})$$

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$, $x=4$.

Bài 33. Giải phương trình: $\log_3 x=\log_5(x+2)$ (*)

Giải

Phương pháp nhẩm nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

Điều kiện: $x>0$. Đặt: $u=\log_3 x \Rightarrow x=3^u$

(*) trở thành: $u=\log_5(3^u+2) \Leftrightarrow 5^u=3^u+2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u=1$ (**)

Nhẩm thấy $u=1$ là nghiệm của (**)

Mà: $y=\left(\frac{3}{5}\right)^u+2\left(\frac{1}{5}\right)^u$ là hàm số giảm trên **R** và $y=1$ là hàm hằng

Do đó: $u=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**)

$\Leftrightarrow$ $x=3$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình (*) là $x=3$.

§7. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Bài 34. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 4^{x+2y-4} = 64 \\ 2008^{3x-2y-5} = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12.2^x + 8.3^y = 11 \\ 4.(2^x - 3^y) = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3^{x-1} = y \\ x + y = 2 \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} 4^{x+2y-4} = 64 \\ 2008^{3x-2y-5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+2y-4} = 4^3 \\ 2008^{3x-2y-5} = 2008^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 4 = 3 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy: Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (3; 2)$.

b) Ta có: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^{x+y} = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2^x.2^y = 32 \end{cases}$

Do đó: 2^x và 2^y là nghiệm của : $X^2 - 12X + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 4 \\ X = 8 \end{array}\right.$

Suy ra: $\begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^y = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2^x = 8 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy: Nghiệm của hệ phương trình đã cho là (2; 3), (3; 2).

c) Ta có: $\begin{cases} 12.2^x + 8.3^y = 11 \\ 4.(2^x - 3^y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12.2^x + 8.3^y = 11 \\ 8.2^x - 8.3^y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{4} = 2^{-2} \\ 3^y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy: Nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (-2; 0)$.

d) Ta có: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3^{x-1} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 3^{x-1} = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

(xem lại cách giải Ví dụ 28b))

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Bài 35. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3^x.2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4^{x-2y} - 7.2^{x-2y} = 8 \\ \log_2(\log_3 x) - \log_2(\log_3 y) = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3^{2x-y} - 26.3^{\frac{2x-y}{2}} = 27 \\ 9^{\log_3(x-y)} = 2 \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện : $x > y$

Ta có: $\begin{cases} 3^x . 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x . 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{y+3} . 2^y = 972 \\ x = y + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6^y = 6^2 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của phương trình đã cho là $(x; y) = (5; 2)$.

b) Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq -y$

Ta có: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ \lg(4-x)^2 = \lg x + \lg 9 = \lg 9x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x^2 - 17x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16 \\ y = -28 \end{cases} \end{array}\right.$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1; 2)$, $(16; -28)$.

c) Điều kiện: $x > 1$ và $y > 1$

Ta có: $\begin{cases} 4^{x-2y} - 7.2^{x-2y} = 8 \\ \log_2(\log_3 x) - \log_2(\log_3 y) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^{x-2y})^2 - 7.2^{x-2y} - 8 = 0 \\ \log_2(\log_3 x) = \log_2 2 + \log_2(\log_3 y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^{x-2y} = 8 \\ 2^{x-2y} = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ \log_2(\log_3 x) = \log_2(2\log_3 y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ \log_3 x = \log_3 y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y \\ 3 + 2y = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (loại)

Vậy: Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (9; 3)$.

d) Điều kiện: $x > y$. Ta có:

$\begin{cases} 3^{2x-y} - 26.3^{\frac{2x-y}{2}} = 27 \\ 9^{\log_3(x-y)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2.\frac{2x-y}{2}} - 26.3^{\frac{2x-y}{2}} - 27 = 0 \\ 3^{\log_3(x-y)^2} = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{2x-y}{2}} = 27 = 3^3 \\ (x-y)^2 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 3^{\frac{2x-y}{2}} = -1 \\ (x-y)^2 = 2 \end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 6 \\ (x-y)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 - \sqrt{2} \\ y = 6 - 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 + \sqrt{2} \\ y = 6 + 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy: Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (6 - \sqrt{2}; 6 - 2\sqrt{2})$

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Bài 36. Giải các bất phương trình sau :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > 0{,}25$ **b)** $(\sqrt{10}+3)^{x^2-1} > (\sqrt{10}-3)^{2x+2}$

c) $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} > 12$ **d)** $\left(\sqrt{2}\right)^x.\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-1} < 8$

Giải

Phương pháp đưa các lũy thừa về cùng cơ số :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > 0{,}25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x-1<2 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 3/2$

b) $(\sqrt{10}+3)^{x^2-1} > (\sqrt{10}-3)^{2x+2} \Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{x^2-1} > (\sqrt{10}+3)^{-(2x+2)}$

$\Leftrightarrow x^2-1 > -(2x+2) \Leftrightarrow x^2+2x+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2>0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \neq -1$

c) $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} > 12 \Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{3^x}{3} \cdot \frac{5^x}{25} > 12 \Leftrightarrow 30^x > 30^2 \Leftrightarrow x > 2$

Vậy : Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$.

d) $(\sqrt{2})^x.\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-1} < 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x-1}{3}} < 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}} < 2^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{x-1}{3} < 3$

$\Leftrightarrow \frac{3x+2x-2}{6} < 3 \Leftrightarrow x < 4$

Vậy : Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 4$

Bài 37. Giải các bất phương trình sau :

a) $3.5^{2x-1} - 2.5^{x-1} > 0{,}2$ **b)** $3.16^x + 2.81^x > 5.36^x$

c) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x < 14$ **d)** $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1} \geq 0$

Giải

Phương pháp đặt ẩn phụ

a) Ta có: $3.5^{2x-1} - 2.5^{x-1} > 0{,}2 \Leftrightarrow 3.5^{2x} - 2.5^x - 1 > 0$

Đặt: $t = 5^x$, $t > 0$. Ta có:

$3t^2 - 2t - 1 > 0 \Leftrightarrow t < -\frac{1}{3}$ (loại) hoặc $t > 1 \Leftrightarrow 5^x > 5^0 \Leftrightarrow x > 0$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 0$.

b) Ta có: $3.16^x + 2.81^x > 5.36^x \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2.\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 > 0$

Đặt: $t=\left(\frac{4}{9}\right)^x$, $t>0$. Ta có: $3t+\frac{2}{t}-5>0\Leftrightarrow 3t^2-5t+2>0\Leftrightarrow t<\frac{2}{3}$ hoặc $t>1$

- Với $t<\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}<\frac{2}{3}\Rightarrow 2x>1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$
- Với $t>1\Rightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^x>\left(\frac{4}{9}\right)^0\Rightarrow x<0$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>\frac{1}{2}$ hoặc $x<0$.

c) Nhận thấy: $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right).\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)=1$

Đặt: $t=\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành $t+\frac{1}{t}<14$

$\Leftrightarrow t^2-14t+1<0\Leftrightarrow 7-\sqrt{48}<t<7+\sqrt{48}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{-2}<\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x<\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^2\Leftrightarrow -2<x<2$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $-2<x<2$.

d) Đặt: $t=2^x>0$

Bất phương trình viết lại là $\frac{\frac{2}{t}-t+1}{t-1}\geq 0$ hay $\frac{-t^2+t+2}{t(t-1)}\geq 0$

$\Leftrightarrow -1\leq t<0$ (loại) hoặc $1<t\leq 2\Leftrightarrow 0<x\leq 1$.

Bài 37. Giải bất phương trình:

$$4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}<x^2.2^{x^2}+8x+12\ (*)$$

Giải

Phương pháp phân tích thành nhân tử

$(*)\Leftrightarrow 4(x^2-2x-3)-2^{x^2}(x^2-2x-3)<0\Leftrightarrow (x^2-2x-3)(4-2^{x^2})<0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x-3<0\\4-2^{x^2}>0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-2x-3>0\\4-2^{x^2}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<3\\x^2<2\end{cases}\\\begin{cases}x<-1\vee x>3\\x^2>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<3\\-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}\\\begin{cases}x<-1\vee x>3\\x>\sqrt{2}\vee x<-\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<\sqrt{2}\\x<-\sqrt{2}\ \vee x>3\end{array}\right.$$

Bài 39. Giải bất phương trình: $1+2^{x+1}+3^{x+1}<6^x$ (*)

Giải

Phương pháp sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1\ (**)$

Thấy $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số giảm trên **R** và $f(2) = 1$

Do đó: $(**) \Leftrightarrow x > 2$

Bài 40. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_2 \frac{x+1}{2x-1} \geq 1$ **b)** $\log_{0,5}(\log_2(2x-1)) > 0$

c) $\log_4(2x^2+3x+1) > \log_2(2x+1)$ **d)** $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$

Giải

Phương pháp đưa hai vế của bất phương trình về cùng cơ số

Điều kiện: $\frac{x+1}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x+1<0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x < -1 \end{array}\right.$

a) $\log_2 \frac{x+1}{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$ (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x \leq 1$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} (2x-1)>01 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1>1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Ta có: $\log_{0,5}(\log_2(2x-1)) > 0 \Leftrightarrow \log_{0,5}(\log_2(2x-1)) > \log_{0,5} 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x-1) < 1 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$. (thỏa mãn đk)

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x < \frac{3}{2}$.

c) Điều kiện : $\begin{cases} 2x^2+3x+1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\log_4(2x^2+3x+1) > \log_2(2x+1) \Leftrightarrow \log_4(2x^2+3x+1) > \log_4(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1 > 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{2} < x < 0$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ 0<2x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \text{ hoặc } x>3 \\ 0<x\neq\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \text{ hoặc } x>3 \\ x\neq\frac{1}{2} \end{cases}$

• Nếu $2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Ta có: $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1 \Leftrightarrow \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x} 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ 3 < x < 6 \end{array}\right.$

• Nếu $0 < 2x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$

Ta có: $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1 \Leftrightarrow \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x} 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 2x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 6$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 < x < \frac{1}{2}$

Vậy: Nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x < 2$ hoặc $3 < x < 6$ hoặc $0 < x < \frac{1}{2}$.

Bài 41. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_2^2 x + \log_2 4x - 4 < 0$

b) $\log_x(125x).\log_{25} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$

c) $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$

Giải

Phương pháp đặt ẩn phụ

Điều kiện: $x > 0$

a) Điều kiện: $x > 0$ (*) . Đặt $t = \log_2 x$. Bất phương trình đã cho thành $t^2 + (2 + t) - 4 < 0$ hay $t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1$

Với $-2 < t < 1 \Leftrightarrow -2 < \log_2 x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 2$

Kết hợp (*), ta được nghiệm của bất phương trình là: $\frac{1}{4} < x < 2$

b) Điều kiện: $0 < x \neq 1$ (*) . Ta có: $\log_x(125x).\log_{25} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$

$\Leftrightarrow (\log_x 5^3 + \log_x x).\log_{5^2} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$

$\Leftrightarrow (3\log_x 5 + 1).\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right) > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_5 x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x \Leftrightarrow 2\log_5^2 x - \log_5 x < 0$

$\Leftrightarrow 0 < \log_5 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5^0 < x < 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{5}$

Kết hợp (*), ta được nghiệm của bất phương trình là : $1 < x < \sqrt{5}$.

c) Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt: $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

Bất phương trình đã cho thành: $2^{u^2} - 10(2^u)^{-u} + 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2^{u^2} - \dfrac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0$ (1)

Đặt: $t = 2^{u^2}$, $t \geq 1$

(1) thành $t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -5 \text{ (loại)} \\ t > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1$

$\Leftrightarrow u > 1$ hoặc $u < -1$

- Với $u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$
- Với $u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Kết hợp (*) ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$ hoặc $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Bài 42. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \lg(x^2 + 2x - 8)$ **b)** $y = \sqrt{\log_{0,8}(x-2) + 1}$

Giải

a) Hàm số đã cho xác định khi $x^2 + 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x < -4$ hoặc $x > 2$

Vậy : Tập xác định của hàm số là $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $\log_{0,8}(x-2) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,8} 0{,}8(x-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}8(x-2) \leq 1 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{13}{4} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq \frac{13}{4}$$

Vậy : Tập xác định của hàm số là $\left(2; \dfrac{13}{4}\right]$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1) Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ **B.** $(\sqrt{2}-1)^{2007} > (\sqrt{2}-1)^{2008}$

C. $(\sqrt{3}-1)^{2008} > (\sqrt{3}-1)^{2007}$ **D.** $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2009} < \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}$

2) Giá trị của $2^{3-\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$ bằng

A. $2^{3+\sqrt{2}}$ **B.** $4^{6\sqrt{2}-4}$ **C.** 32 **D.** 8^3

3) Giá trị của $5^{2+3\sqrt{3}} : 125^{\sqrt{3}}$ bằng

A. 10 **B.** $5^{2+6\sqrt{3}}$ **C.** 25 **D.** 5

4) Tính $\dfrac{2^{-2}+2^{0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{20}$ **C.** 7 **D.** 4

5) Giá trị của $M=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ bằng

A. $4\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{8\sqrt{3}}$ **D.** $2\sqrt{4\sqrt{3}}$

6) Biến đổi $\sqrt[3]{x^{5}\sqrt[4]{x}}$ $(x>0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $x^{\frac{23}{12}}$ **B.** $x^{\frac{20}{3}}$ **C.** $x^{\frac{21}{12}}$ **D.** $x^{\frac{12}{5}}$

7) Cho $(\sqrt{5}+2)^{x}<(\sqrt{5}-2)^{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x<-2$ **B.** $x<2^{\sqrt{2}}$ **C.** $x>-2$ **D.** $x>2^{\frac{1}{3}}$

8) Rút gọn biểu thức $M=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$ ta được

(Giả sử biểu thức M đã cho có nghĩa)

A. $3\sqrt{a}$ **B.** $\frac{a-1}{2}$ **C.** $\frac{2}{a-1}$ **D.** $3(\sqrt{a}-1)$

9) Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ là

A. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$ **B.** $\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$ **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

10) Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{9x^{2}-6x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(3x-1)^{2}}}$ **B.** $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3x-1)^{2}}}$ **C.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3x-1}}$ **D.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3x-1)^{2}}}$

11) Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[7]{\cos x}$ là

A. $-\dfrac{\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^{8}x}}$ **B.** $\dfrac{\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^{6}x}}$ **C.** $\dfrac{1}{7\sqrt[7]{\cos^{6}x}}$ **D.** $-\dfrac{\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^{6}x}}$

12) Hàm số nào dưới đây là hàm số lũy thừa?

A. $y=x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ **B.** $y=x^{3}$ $(x>0)$

C. $y=x^{-1}$ $(x>0)$ **D.** Cả ba câu A, B, C đúng

13) Tập xác định của hàm số $y=\log_{2}x(1-x)$ là

A. $D=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ **B.** $D=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

C. $D=[0;1]$ **D.** $D=(0;1)$

14) Tập xác định của hàm số $y = \ln\dfrac{5x}{3x-6}$ là

A. $\mathbf{D} = (0;2)$ **B.** $\mathbf{D} = (-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

C. $\mathbf{D} = (-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ **D.** $\mathbf{D} = [0;2]$

15) Cho hàm số $f(x) = \lg 100(x-3)$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathbf{D} = [3;+\infty)$

B. $f(x) = 2 + \lg(x-3)$ với $x > 3$

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(4;2)$

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$

16) Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}}3}$ $(0 < a \neq 1)$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 12 **D.** 6

17) Giá trị của $a^{8\log_{a^2}7}$ $(0 < a \neq 1)$ bằng

A. 7^2 **B.** 7^4 **C.** 7^8 **D.** 7^{16}

18) Xác định x để $\log_{2x^2+3}(5x) > 0$

A. $x > 0$ **B.** $0 < x < 1$ **C.** $x > \dfrac{1}{5}$ **D.** $x < \dfrac{1}{5}$

19) Giá trị của $\log_{16}(\log_2 4)$ bằng

A. 22 **B.** 4 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

20) Giá trị của $\log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\right)$ $(0 < a \neq 1)$ bằng

A. $\dfrac{10}{13}$ **B.** $\dfrac{13}{10}$ **C.** $\dfrac{7}{10}$ **D.** $\dfrac{10}{7}$

21) Giá trị của $M = 9^{2\log_3 2 + 4\log_{81}2}$ bằng

A. 32 **B.** 62 **C.** 64 **D.** 74

22) Nếu $\lg 4 = a$ thì $\lg 4000$ bằng

A. $3+a$ **B.** $4+a$ **C.** $3+2a$ **D.** $4+2a$

23) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $a > 1$ thì $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M > N > 0$

B. Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow 0 < M < N$

C. Nếu $M, N > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a(M.N) = \log_a M.\log_a N$

D. Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a 2007 > \log_a 2008$

24) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5 > 0$ **B.** $\log_{0,3} 0{,}8 < 0$

C. $\log_3 4 > \log_4\left(\dfrac{1}{3}\right)$ **D.** $\log_{x^2+2} 2007 < \log_{x^2+2} 2008$

25) Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_{12} 35$ bằng

A. $\frac{3b+3ac}{c+2}$ **B.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$ **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$ **D.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$

26) Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến ?

A. $y=(2007)^{2x}$ **B.** $y=(0,1)^{2x}$ **C.** $y=\left(\frac{2007}{2008}\right)^x$ **D.** $y=\left(\frac{3}{\sqrt{2007}-\sqrt{2}}\right)^x$

27) Với điều kiện nào của a để $y=(2a-1)^x$ là hàm số mũ

A. $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$ **B.** $a\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

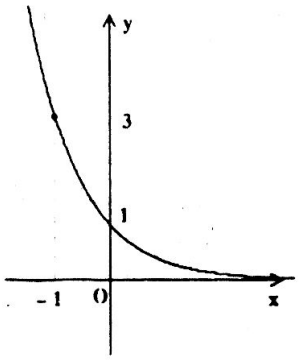
C. $a>1$ **D.** $a\neq 0$

28) Với điều kiện nào của a để $y=(a^2-a+1)^x$ đồng biến trên **R**

A. $a\in(0;1)$ **B.** $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

C. $a\neq 0$ và $a\neq 1$ **D.** a tùy ý

29) Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ dưới đây ?



A. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

B. $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

C. $y=3^x$

D. $y=(\sqrt{2})^x$

30) Với điều kiện nào của a để $y=\frac{1}{(1+a)^x}$ nghịch biến trên **R**

A. $a\in(0;1)$. **B.** $a\in(-1;+\infty)$ **C.** $a\in(0;+\infty)$ **D.** $a\neq -1$

31) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ ta được

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** $+\infty$

32) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{x}$ ta được

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

33) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sqrt{x+4}-2}$ ta được

A. -1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** 4

34) Đạo hàm của $y=2^x.\pi^x$ là

A. $2^x.\pi^x.\ln 2.\ln\pi$ **B.** $x.(2\pi)^{x-1}$

C. $(2\pi)^x.\ln 2\pi$ **D.** Một kết quả khác

35) Đạo hàm của $y = 3^{\sin 2x}$ là

A. $(\sin 2x).3^{\sin 2x-1}$ **B.** $3^{\sin 2x}$

C. $(\cos 2x).3^{\sin 2x}.\ln 3$ **D.** $(2\cos 2x).3^{\sin 2x}.\ln 3$

36) Đạo hàm của $y = 2^{\sin x}.2^{\cos x+1}$ là

A. $-\sin x.\cos x.2^{\sin x}2^{\cos x+1}$ **B.** $(\cos x - \sin x)2^{\sin x+\cos x+1}.\ln 2$

C. $-\sin 2x.2^{\sin x}2^{\cos x+1}$ **D.** Một kết quả khác

37) Đạo hàm của $y = e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin 2x.e^{\sin^2 x}$ **B.** $e^{\sin^2 x}$ **C.** $\sin^2 x.e^{\sin^2 x-1}$ **D.** $2\sin x.e^{\sin^2 x}$

38) Cho hàm số $y = f(x) = x.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có tập xác định **R**. **B.** Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $\left(1;\frac{1}{e}\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

39) Xác định a để hàm số $y = \log_{2a+3} x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $a > 0$ **B.** $a > -1$ **C.** $0 < a < 1$ **D.** $0 < a \neq 1$

40) Xác định a để hàm số $y = \log_{\frac{2}{a}} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $a > 0$ **B.** $0 < a < 2$ **C.** $a > 2$ **D.** $0 < a \neq 1$

41) Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

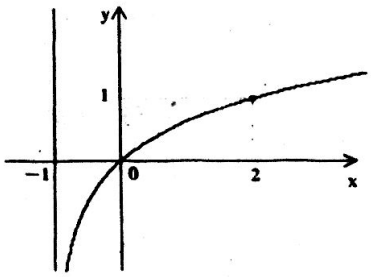
A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$ **B.** $y = \log_a x$ với $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

C. $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$ **D.** $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

42) Tìm x để đồ thị $y = \log_3 x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y = 2$

A. $x > 0$ **B.** $x > 9$ **C.** $x > 2$ **D.** $x < 2$

43) Đồ thị dưới đây là của hàm số nào ?



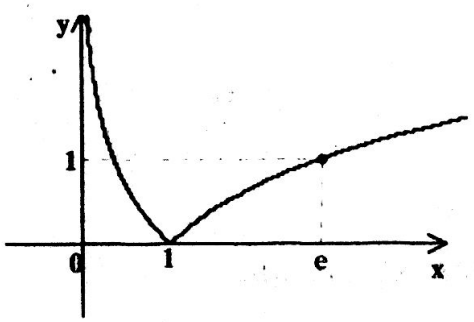
A. $y = \log_2 x + 1$

B. $y = \log_2 (x+1)$

C. $y = \log_3 x$

D. $y = \log_3 (x+1)$

44) Đồ thị dưới đây là của hàm số nào ?



A. $y = |\ln x|$

B. $y = \ln|x|$

C. $y = |\ln(x+1)|$

D. $y = \ln|x+1|$

45) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$ ta được

A. 0 **B.** 5 **C.** 1 **D.** $+\infty$

46) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$ ta được

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** $+\infty$

47) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\tan x}$ ta được

A. 1 **B.** $1/3$ **C.** 0 **D.** 3

48) Đạo hàm của hàm số $y=\log_5(x^2+x+1)$ là

A. $\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 5}$ **B.** $\dfrac{1}{(x^2+x+1)\ln 5}$

C. $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **D.** Một kết quả khác

49) Cho hàm số $f(x)=\ln(x^2+5)$. Khi đó

A. $f'(1)=\dfrac{1}{6}$ **B.** $f'(1)=\dfrac{1}{3}$ **C.** $f'(1)=\ln 6$ **D.** $f'(1)=0$

50) Đạo hàm của hàm số $y=(3+\ln x)\ln x$ là

A. 1 **B.** $\left(3+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}$ **C.** $\dfrac{3+2\ln x}{x}$ **D.** $\dfrac{-2-\ln x}{x}$

51) Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x+e^x)$ là

A. $\dfrac{1+e^x}{\ln 2}$ **B.** $\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$ **C.** $\dfrac{1}{(x+e^x)\ln 2}$ **D.** $\dfrac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$

52) Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ bằng

A. $\{1\}$ **B.** $\{4\}$. **C.** $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$ **D.** $\left\{-\dfrac{1}{8}\right\}$

53) Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+3x-10}=1$ bằng

A. $\{1;2\}$ **B.** $\{-5;2\}$ **C.** $\{-5;-2\}$ **D.** $\{2;5\}$

54) Tập nghiệm của phương trình $(3-2\sqrt{2})^{2x}=3+2\sqrt{2}$ bằng

A. $\{-1\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ **D.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

55) Tập nghiệm của phương trình $3^x.2^{x+1}=72$ bằng

A. $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **B.** $\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ **C.** $\{-2\}$ **D.** $\{2\}$.

56) Tập nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=9.5^x+5^{x+1}+5^{x+2}$ bằng

A. $\{0\}$ **B.** $\{1\}$. **C.** $\{-2\}$ **D.** $\{-3\}$

57) Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}$ bằng

A. $\left\{\frac{8}{5}\right\}$ **B.** $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ **C.** $\{4\}$ **D.** $\{2\}$.

58) Tập nghiệm của phương trình $3^{\frac{x-5}{2}} = 3\sqrt{3}$ bằng

A. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **B.** $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ **C.** $\{8\}$ **D.** $\left\{\sqrt{2}\right\}$

59) Xác định m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - m = 0$ có nghiệm

A. $m < 0$ **B.** $0 < m < 1$ **C.** $m < 0 \vee m > 1$ **D.** $m > 1$

60) Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$ bằng

A. $\left\{3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13}\right\}$ **B.** $\left\{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\right\}$

C. $\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$ **D.** $\left\{\frac{3-\sqrt{10}}{2}; \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right\}$

61) Tập nghiệm của phương trình $4^{x+1} - 6.2^{x+1} + 8 = 0$ bằng

A. $\{0; 1\}$ **B.** $\{1; 2\}$ **C.** $\{-2; 3\}$ **D.** $\{0; 3\}$

62) Tổng các nghiệm của phương trình $2^{2x-3} - 3.2^{x-2} + 1 = 0$ bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** -4

63) Tích số các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x = 12$?

A. 4 **B.** 1 **C.** -4 **D.** 5

64) Phương trình $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$

A. Có hai nghiệm âm.

B. Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

C. Có hai nghiệm dương.

D. Vô nghiệm.

65) Tập nghiệm của phương trình $-9.4^{\frac{1}{x}} - 5.6^{\frac{1}{x}} + 4.9^{\frac{1}{x}} = 0$ bằng

A. $\{1; 3\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **D.** $\left\{-1; \frac{9}{4}\right\}$

66) Tọa độ giao điểm của hai đồ thị của hai hàm $y = 2^x$ và $y = 3 - x$ là cặp số nào ?

A. $(1; 2)$ **B.** $(2; 3)$ **C.** $(-1; 4)$ **D.** Một kết quả khác.

67) Tập nghiệm của phương trình $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$ bằng

A. $\{1\}$ **B.** $\{3\}$

C. $\{-1; 3\}$ **D.** Một kết quả khác

68) Số nghiệm của phương trình $5^{3x} + 9.5^x + 27(125^{-x} + 5^{-x}) = 64$ bằng

A. 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 2 **D.** 3

69) Giải phương trình : $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-1}$ (*)

Một học sinh giải như sau

Bước 1 : Ta có VT(*) $> 0, \forall x$ và VP(*) $> 0, \forall x$

Bước 2 : Lôgarit hóa hai vế theo cơ số 2. Ta có:

$$\log_2(3^{x-1}.2^{x^2}) = \log_2(8 \cdot 4^{x-2})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\log_2 3 + x^2 = \log_2 8 + (x-2)\log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2 - \log_2 3)x + 1 - \log_2 3 = 0 \quad (1)$$

Bước 3 : Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm là

$x = 1; x = 1 - \log_2 3$ (thỏa mãn)

Hai nghiệm này cũng là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Đúng

70) Phương trình $2^x = -2x^2 + 6x - 9$

A. Vô nghiệm. **B.** Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

C. Có hai nghiệm dương. **D.** Có hai nghiệm âm.

71) Giải phương trình: $3.4^x + (3x-10)2^x + 3 - x = 0$ (*)

Một học sinh giải như sau

Bước 1 : Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình (*) viết lại là

$3t^2 + (3x-10)t + 3 - x = 0$ (1)

Biệt số $\Delta = (3x-10)^2 - 12(3-x) = 9x^2 - 48x + 64 = (3x-8)^2$

Suy ra: Phương trình (1) có hai nghiệm $t = \frac{1}{3}$ và $t = 3 - x$.

Bước 2 :

+ Với $t = \frac{1}{3}$ ta có: $5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 2 = \log_5\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2 + \log_5\left(\frac{1}{3}\right)$

+ Với $t = 3 - x$ ta có: $5^{x-2} = 3 - x \Rightarrow x = 2$

Bước 3 : Vậy: (*) có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 2 + \log_5\left(\frac{1}{3}\right)$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Đúng

72) Số nghiệm của phương trình $(x-3)^{2x^2-5x} = 1$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

73) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(3x-7) = 3$ bằng

A. $\{1\}$ **B.** $\{-2\}$ **C.** $\{5\}$ **D.** $\{-3\}$

74) Phương trình $\log_3(x^2+4x+12)=2$

A. Có hai nghiệm dương. **B.** Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

C. Có hai nghiệm âm. **D.** Vô nghiệm.

75) Nếu $\ln(\ln 2x)=-1$ thì x bằng

A. $\frac{e^{\frac{1}{e}}}{2}$ **B.** $\frac{e^{-2}}{2}$ **C.** $\frac{e^{\frac{e}{2}}}{2}$ **D.** $\frac{e^{\frac{1}{e^2}}}{2}$

76) Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ bằng

A. $\{\sqrt{2}\}$ **B.** $\{16\}$ **C.** $\{2\sqrt{2}\}$ **D.** $\{4\}$

77) Tập nghiệm của phương trình $\log_{x^2-1}(2\sqrt{2})=\frac{1}{2}$ bằng

A. $\{-4;4\}$ **B.** $\{3\}$ **C.** $\{4\}$ **D.** $\{-3;3\}$

78) Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16} x=\frac{81}{24}$ bằng

A. $\left\{-\frac{1}{8};8\right\}$ **B.** $\left\{\frac{1}{8};8\right\}$ **C.** $\left\{-\frac{1}{4};4\right\}$ **D.** $\left\{\frac{1}{4};2\right\}$

79) Tập nghiệm của phương trình $\log_4 x+\log_4(x+3)=1$ bằng

A. $\{3\}$ **B.** $\{2;5\}$ **C.** $\{1\}$ **D.** $\{1;3\}$

80) Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2$ bằng

A. $\{-4;2\}$ **B.** $\{-3;2\}$ **C.** $\{3\}$ **D.** $\{-10;2\}$

81) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(2^x-1)=-2$ bằng

A. $\{2-\log_2 5\}$ **B.** $\{\log_2 5\}$ **C.** $\{-1+\log_2 5\}$ **D.** $\{-2+\log_2 5\}$

82) Tập nghiệm của phương trình $x^2\log_3 x.\log_x 9=10-x$ bằng

A. $\{-5;2\}$ **B.** $\{2\}$ **C.** $\{3\}$ **D.** $\{2;3\}$

83) Tập nghiệm của phương trình $(\log_2 x-2).\log_2 x=\frac{3}{2}(\log_2 x-1)$ bằng

A. $\{\sqrt{2}\}$ **B.** $\{\sqrt{2};4\}$ **C.** $\{8\}$. **D.** $\{\sqrt{2};8\}$

84) Tập nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$ bằng

A. $\{16\}$ **B.** $\{4\}$ **C.** $\{4;16\}$ **D.** $\{2\}$

85) Phương trình $\log_x 2+\log_2 x=2{,}5$

A. Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

B. Có hai nghiệm dương.

C. Có hai nghiệm âm.

D. Vô nghiệm.

86) Số nghiệm của phương trình $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

87) Tập nghiệm của phương trình $\log_3(3x^2).\log_x^2 3 = 1$ bằng

A. $\left\{3^{1\pm\sqrt{2}}\right\}$ **B.** $\left\{3^{\sqrt{2}\pm1}\right\}$ **C.** $\left\{3^{2\pm\sqrt{2}}\right\}$ **D.** $\varnothing$

88) Tập nghiệm của phương trình $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{26}{\lg x - 1}$ bằng

A. $\{10\}$ **B.** $\{100\}$ **C.** $\{1000\}$ **D.** $\left\{e^{1000}\right\}$

89) Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ bằng

A. $\dfrac{7}{125}$ **B.** $\dfrac{1}{125}$ **C.** $\dfrac{630}{625}$ **D.** 630

90) Cho ba phương trình, phương trình nào có tập nghiệm $\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$?

$|x-2|\log_2 x = x-2$ (I)

$(x^2-4)(\log_2 x - 1) = 0$ (II)

$\log_{0,5}^2(4x) + \log_2\left(\dfrac{x^2}{8}\right) = 8$ (III)

A. Chỉ (I) **B.** Chỉ (II)

C. Chỉ (III) **D.** Cả (I), (II) và (III)

91) Phương trình $\log_2(4.3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$ có một nghiệm duy nhất x_0 thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(2;3)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ **D.** $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

92) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là

A. $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$ **C.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$ **D.** $(-\infty;0)$

93) Tập nghiệm của bất phương trình $6^{2x+3} < 2^{4x-5}.3^{4x-5}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **B.** $(-\infty;4)\setminus\{0\}$ **C.** $(4;+\infty)$ **D.** $(-\infty;4)$

94) Tập nghiệm của bất phương trình $5^{|2x-1|} \geq 25$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

C. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

95) Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;3)$

96) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x} < \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-1}$ là

A. $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$ **C.** $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

97) Tập nghiệm của bất phương trình $(2+\sqrt{3})^x < (2-\sqrt{3})^4$ là

A. $\varnothing$ **B.** $(-\infty;-4)$ **C.** $\mathbf{R}\setminus\{-4\}$ **D.** $\mathbf{R}$

98) Tập nghiệm của bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{\frac{x-3}{x-1}} < (2-\sqrt{3})^{\frac{x-1}{x-3}}$ là

A. $\varnothing$ **B.** $\mathbf{R}$ **C.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(1;3)$

99) Tập nghiệm của bất phương trình $(2^x-4).(x^2-2x-3)<0$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(2;3)$ **B.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$

C. $(2;3)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup(2;3)$

100) Cho bất phương trình $3.5^{2x-1}-2.5^{x-1}<\frac{1}{5}$ (*). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $x=0$ là nghiệm của (*) **B.** Tập nghiệm của (*) là $(-\infty;0)$

C. Tập nghiệm của (*) là $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ **D.** Tập nghiệm của (*) là $(0;+\infty)$

101) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x+9.3^{-x}<10$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

102) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 9 **D.** 11

103) Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$ (*). Khẳng định nào **sai**?

A. $x=1$ không là nghiệm của (*) **B.** Tập nghiệm của (*) là $(-1;0)$

C. Tập nghiệm của (*) là $(-1;+\infty)$ **D.** (*) không có nghiệm nguyên

104) Tập nghiệm của bất phương trình $25^{x+1}+9^{x+1}\geq 34.15^x$ là

A. $[-2;0]$ **B.** $[0;+\infty)$

C. $(-\infty;-2]$ **D.** $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$

105) Tập nghiệm của bất phương trình $1+2^{x+1}+3^{x+1}<6^x$ là

A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;2)$ **C.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $\mathbf{R}\setminus\{2\}$

106) Với giá trị nào của m để bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng mọi $x\in\mathbf{R}$.

A. $m\neq -2$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m\leq -\frac{3}{2}$. **D.** $m\in(-5-2\sqrt{3};-5+2\sqrt{3})$.

107) Tìm giá trị m để bất phương trình $9^x-m.3^{x+1}-4-3m\leq 0$ có nghiệm.

A. $m\neq -\frac{4}{3}$ **B.** $m>-\frac{4}{3}$ **C.** $m\in\varnothing$ **D.** m tùy ý

108) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 4x<3$ là

A. $(0;2)$ **B.** $(-\infty;2)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(0;+\infty)$

109) Tập nghiệm của bất phương trình $3 < \log_2 x < 4$ là

A. $(0;16)$ **B.** $(8;16)$ **C.** $(8;+\infty)$ **D. R**

110) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}(x^2+x) < \log_{0,8}(-2x+4)$ là

A. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ **B.** $(-4;1)$

C. $(-\infty;-4)\cup(1;2)$ **D.** Một kết quả khác

111) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}\left[\log_3(x-2)\right] > 0$ là

A. $(5;+\infty)$ **B.** $(-4;1)$ **C.** $(-\infty;5)$ **D.** $(3;5)$

112) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(x-3)(\lg x+1) < 0$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

113) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{1+2x}{x} < 0$ là

A. $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(-1;0)$

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$

114) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5\sin\frac{\pi}{4}}(4x^2-16x+15) \le -2$ là

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$

C. R **D.** $(-\infty;3)\cup[5;+\infty)$

115) Cho bất phương trình $\log_3|2x-3| < \log_3 5$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $x = 5$ không là nghiệm của (*).

B. Tập nghiệm của (*) là $(-1;4)$.

C. Tập nghiệm của (*) là $(-1;4)\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

D. Số nghiệm nguyên của bất phương trình (*) là 4.

116) Tập nghiệm của bất phương trình $\log^2_{0,5} x + 6 < 5\log_{\frac{1}{2}} x$ là

A. $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$ **B.** $(\sqrt{2};\sqrt{3})$ **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$

117) Cho hàm số $f(x) = \ln(2008x - x^2)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

A. $(-\infty;1004)$ **B.** $(0;1004)$ **C. R** **D.** $(0;2008)$

118) Tập nghiệm của bất phương trình $7^{\lg x} + x^{\lg 7} > 98$ là

A. $(-\infty;100)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(100;+\infty)$ **D.** $(1;+\infty)$

119) Giải bất phương trình : $\log_3 \frac{1+2x}{1+x} < 1$ (*).

Một học sinh giải như sau

Bước 1 : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2x}{1+x} > 0 \\ \frac{1+2x}{1+x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x > 0 \ (1) \\ x+2 > 0 \quad (2) \end{cases}$

Bước 2 : $(1) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ (3)

$(2) \Leftrightarrow x > 2$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow x > 2$

Bước 3 : Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(2; +\infty)$.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Đúng

120) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1. \end{cases}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

121) Hệ phương trình $\begin{cases} 3^x . 3^{2y} = 81 \\ e^{x+y} . e^{-2y} = e^{-5} \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(-2; 3)$ **B.** $(3; -2)$

C. $(-2; 3)$ và $(3; -2)$ **D.** Một kết quả khác

122) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^{2x} - 8^y = 77 \\ 3^x - 8^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

123) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^{-x} + 3^{-y} = \frac{4}{9} \\ x + y = 3, x > y \end{cases}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

124) Hệ phương trình $\begin{cases} 3^x . 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(3; 2)$ **B.** $(2; 5)$

C. $(6; 2)$ và $(3; 2)$ **D.** Một kết quả khác

125) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^x = 4 - x \\ e^{y^2 - x + y - 2} = \frac{1}{e}. \end{cases}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

126) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 + 4 = 5y^2. \end{cases}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

127) Hệ phương trình $\begin{cases} 3^x . 2^y = 324 \\ \log_{\sqrt{2}}(x-y) = 2 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(4;2)$ **B.** $(4;-3)$ **C.** $(3;-1)$ **D.** $(2;-3)$

128) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ x^y = 64. \end{cases}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

129) Hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(4;2)$ **B.** $(4;4)$

C. $(4;2)$ và $(16;4)$ **D.** Vô nghiệm

130) Cho hệ $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 7 = 0 \\ 3^{\log_9(x-y)} = 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Điều kiện $x > y > 0$.

B. Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt.

C. Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là $(-1;-2)$.

D. Số nghiệm của hệ đã cho là 3.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

1) Chọn C

Sử dụng
- Nếu $a > 1$ thì $\alpha > \beta \Leftrightarrow a^\alpha > a^\beta$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\alpha > \beta \Leftrightarrow a^\alpha < a^\beta$

Ta có: $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ và $2007 < 2008 \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^{2007} > (\sqrt{3}-1)^{2008}$.

2) Chọn A. Ta có: $2^{3-\sqrt{2}} . 4^{\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}} . 2^{2\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 2^{3+\sqrt{2}}$.

3) Chọn C. Ta có: $5^{2+3\sqrt{3}} : 125^{\sqrt{3}} = 5^{2+3\sqrt{3}} : 5^{3\sqrt{3}} = 5^{2+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = 5^2 = 25$.

4) Chọn A

$$\frac{2^{-2}+2^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^2}+1}{(2^{-1})^{-2} - \frac{5}{(-2)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{5}{4}}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

5) Chọn B

Ta có : $M = \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} = |2\sqrt{3}+1| - |2\sqrt{3}-1|$

$= (2\sqrt{3}+1) - (2\sqrt{3}-1) = 2.$

6) Chọn C. Ta có: $\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x^5.x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{21}{4}}} = (x^{\frac{21}{4}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{21}{12}}.$

7) Chọn A

Nhận xét : $\cdot (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = \sqrt{5^2} - 2^2 = 1$

$\cdot (\sqrt{5}-2)^2 = (\sqrt{5}+2)^{-2}$

Ta có: $(\sqrt{5}+2)^x < (\sqrt{5}-2)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^x < (\sqrt{5}+2)^{-2} \Leftrightarrow x < -2.$

8) Chọn C . Đặt: $x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = a$. Ta có:

$$M = \left(\frac{x+2}{x^2+2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}\right).\frac{x+1}{x} = \frac{(x+2)(x-1)-(x-2)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}.\frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{2x}{(x+1)^2(x-1)}.\frac{x+1}{x} = \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{a-1}.$$

9) Chọn A. Ta có: $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

10) Chọn C . $y = \sqrt[3]{(3x-1)^2} = (3x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}(3x-1)^{\frac{2}{3}-1}(3x-1)' = \frac{2}{\sqrt[3]{3x-1}}.$

11) Chọn D . Ta có: $y = \sqrt[7]{\cos x} = (\cos x)^{\frac{1}{7}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{7}(\cos x)^{\frac{1}{7}-1}(\cos x)' = -\frac{1}{7}(\sin x)(\cos x)^{-\frac{6}{7}} = -\frac{\sin x}{7\sqrt[7]{\cos^6 x}}.$$

12) Chọn D

13) Chọn D . $y = \log_2 x(1-x)$ xác định khi $x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

. Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = (0; 1)$.

14) Chọn B . $y = \ln\frac{5x}{3x-6}$ xác định khi $\frac{5x}{3x-6} > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$

. Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

15) Chọn A

. $y = \lg 100(x-3)$ xác định khi $100(x-3) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbf{D} = (3; +\infty)$. Câu A sai.

. $\lg 100(x-3) = \lg 100 + \lg(x-3) = 2 + \lg(x-3)$ $(x > 3)$. Câu B đúng.

. Khi $x = 4 \Rightarrow \lg 100(x-3) = 2 \Rightarrow$ đồ thị qua điểm $(4; 2)$. Câu C đúng.

. $y = \lg 100(x-3)$ có cơ số $10 > 1 \Rightarrow$ y đã cho đồng biến trên $(3; +\infty)$

Câu D đúng.

16) Chọn A. Ta có: $a^{\log_{\sqrt{a}} 3} = (\sqrt{a})^{2\log_{\sqrt{a}} 3} = (\sqrt{a})^{\log_{\sqrt{a}} 9} = 9.$

17) Chọn B. Ta có: $a^{8\log_{a^2} 7} = a^{8\cdot\frac{1}{2}\log_a 7} = a^{4\log_a 7} = a^{\log_a 7^4} = 7^4.$

18) Chọn C . Ta có : $x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 \geq 3 > 1$

Nên $\log_{2x^2+3} 5x > 0 \Leftrightarrow 5x > (2x^2+3)^0 = 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}.$

19) Chọn D . Ta có : $\log_{16}(\log_2 4) = \log_{16}(\log_2 2^2) = \log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{1}{4}.$

20) Chọn B . Ta có: $a\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = a\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}} = a\sqrt[5]{a.a^{\frac{1}{2}}} = a\sqrt[5]{a^{\frac{3}{2}}} = a.a^{\frac{3}{10}} = a^{\frac{13}{10}}$

. Do đó: $\log_a(a\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}) = \log_a(a^{\frac{13}{10}}) = \frac{13}{10}.$

21) Chọn C. $M = 9^{2\log_3 2 + 4\log_{3^4} 2} = 9^{\log_3 4 + \log_3 2} = 9^{\log_3 8} = 3^{2\log_3 8} = 3^{\log_3 64} = 64.$

22) Chọn A. Ta có: $\lg 4000 = \lg 4.1000 = \lg 4 + \lg 10^3 = \lg 4 + 3 = a + 3.$

23) Chọn C

24) Chọn B. Vì $0 < 0,3 < 1$ và $0,8 < 1 \Rightarrow \log_{0,3} 0,8 > \log_{0,3} 1 = 0$

25) Chọn A . $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = 3a \Rightarrow \log_2 5 = 3ac$

. $\log_8 7 = b \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b$

. $\log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{3b + 3ac}{c+2} = \frac{3(b+ac)}{c+2}.$

26) Chọn A. *Nhắc lại:* Nếu $a > 1$ thì $y = a^x$ đồng biến trên **R**.

27) Chọn A . $y = (2a-1)^x$ là hàm số mũ khi $0 < 2a - 1 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a \neq 1$

. Với $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ thì $y = (2a-1)^x$ là hàm số mũ

28) Chọn B

. $y = (a^2 - a + 1)^x$ đồng biến trên **R** khi $a^2 - a + 1 > 1 \Leftrightarrow a^2 - a > 0$

$\Leftrightarrow a < 0$ hoặc $a > 1$

. Với $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ thì $y = (a^2 - a + 1)^x$ đồng biến trên **R**.

29) Chọn A

Bốn hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ là nghịch biến trên **R**. Hai hàm số đó chỉ có đồ thị của $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là qua $(-1; 3)$.

30) Chọn C

. Hàm số $y=\frac{1}{(1+a)^x}=\left(\frac{1}{1+a}\right)^x$ (*) nghịch biến trên **R** khi $0<\frac{1}{1+a}<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+a>0\\ \frac{a}{1+a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a>0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a>0$$

. Vậy : Với $a\in(0;+\infty)$ thì hàm số (*) nghịch biến trên **R**.

31) Chọn C. Ta có: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2.1=2.$

32) Chọn C . $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{4x}-1)-(e^{2x}-1)}{x}=4\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}-2\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2.$

33) Chọn D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot(\sqrt{x+4}+2)=1(2+2)=4.$

34) Chọn C. Ta có: $y=2^x.\pi^x=(2\pi)^x\Rightarrow y'=(2\pi)^x.\ln2\pi.$

35) Chọn D. Ta có: $y=3^{\sin2x}\Rightarrow y'=(\sin2x)'.3^{\sin2x}.\ln3=2\cos2x.3^{\sin2x}.\ln3.$

36) Chọn B . $y=2^{\sin x}.2^{\cos x+1}=2^{\sin x+\cos x+1}$

$$\Rightarrow y'=(\sin x+\cos x+1)'2^{\sin x+\cos x+1}.\ln2=(\cos x-\sin x).2^{\sin x+\cos x+1}.\ln2$$

37) Chọn A . $y=e^{\sin^2x}\Rightarrow y'=(\sin^2x)'e^{\sin^2x}=2\sin x(\sin x)'e^{\sin^2x}=\sin2x.e^{\sin^2x}$

38) Chọn D

. Tập xác định: **D = R**

. Đạo hàm: $y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x),\ y'=0\Leftrightarrow x=1$

. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

39) Chọn B. $y=\log_{2a+1}x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $2a+3>1\Leftrightarrow a>-1$

40) Chọn C . Hàm số $y=\log_{\frac{2}{a}}x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)\Leftrightarrow0<\frac{2}{a}<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \frac{2-a}{a}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ 2-a<0\end{cases}\Leftrightarrow a>2.$$

41) Chọn A (Xem lại Kiến thức cần nhớ nội dung 4. LÔ GARIT)

42) Chọn B.

Đồ thị $y=\log_3x$ nằm phía trên đường $d: y=2$ khi $\log_3x>2\Leftrightarrow x>9.$

43) Chọn D

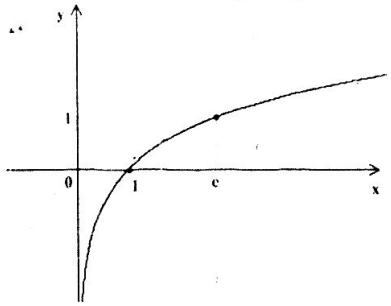
Bốn hàm số đã cho đều là hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

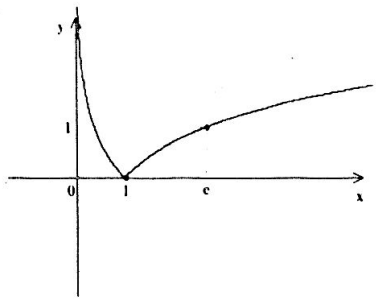
Trong đó chỉ có hàm số $y = \log_3(x+1)$ là có đồ thị đi qua điểm $(2;1)$.

44) Chọn A

+ Bốn hàm số đã cho chỉ có hai hàm số $y = \ln|x|$ và $y = |\ln x|$ có đồ thị đi qua điểm $(e;1)$ và $(1;0)$.

+ Ta chọn $y = |\ln x|$ là đúng (tương tự *cách 2* câu 77 Chương I).





45) Chọn B. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x} = 5$

46) Chọn C. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x} = 2\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}} = 2\cdot\dfrac{1}{1} = 2\cdot$

47) Chọn D. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\tan x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}}{\dfrac{\tan x}{x}} = 3\cdot\dfrac{1}{1} = 3.$

48) Chọn A. $y = \log_5(x^2+x+1) \Rightarrow y' = \dfrac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)\ln 5} = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 5}\cdot$

49) Chọn B. $f(x) = \ln(x^2+5) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x^2+5)'}{x^2+5} = \dfrac{2x}{x^2+5}, f'(1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}\cdot$

50) Chọn C. $y' = (3+\ln x)'\ln x + (\ln x)'(3+\ln x) = \dfrac{1}{x}\cdot\ln x + \dfrac{1}{x}\cdot(3+\ln x) = \dfrac{3+2\ln x}{x}$

51) Chọn D. Ta có: $y = \log_2(x+e^x) \Rightarrow y' = \dfrac{(x+e^x)'}{(x+e^x)\ln 2} = \dfrac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}\cdot$

52) Chọn C. $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = (5^3)^{2x} = 5^{6x} \Leftrightarrow -(2x+2) = 6x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}\cdot$

53) Chọn B. $2^{x^2+3x-10} = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-10} = 2^0 \Leftrightarrow x^2+3x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -5$.

54) Chọn C·

Nhận xét: . $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1$

. $3+2\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^{-1}$

$(3-2\sqrt{2})^{2x} = 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})^{2x} = (3-2\sqrt{2})^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

55) Chọn D. Ta có: $3^x.2^{x+1}=72\Leftrightarrow 3^x.2^x.2=72\Leftrightarrow 6^x=36\Leftrightarrow x=2.$

56) Chọn A . $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=9.5^x+5^{x+1}+5^{x+2}\Leftrightarrow 3^x(3+3^2+3^3)=5^x(9+5+5^2)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

57) Chọn C . $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3(x-2)}\Leftrightarrow 2-2x=-3(x-2)\Leftrightarrow x=4.$

58) Chọn C. Ta có: $3^{\frac{x-5}{2}}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{\frac{x-5}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\frac{x-5}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=8.$

59) Chọn B. $2^{2x-1}+m^2-m=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow -m^2+m>0\Leftrightarrow m\in(0;1).$

60) Chọn C

Với $x\neq 0$. Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}.\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\Leftrightarrow x-1-\frac{1}{x}=2$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

61) Chọn A

$4^{x+1}-6.2^{x+1}+8=0\Leftrightarrow(2^{x+1})^2-6.2^{x+1}+8=0\Leftrightarrow 2^{x+1}=2$ hoặc $2^{x+1}=4$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1.$

62) Chọn B

$.2^{2x-3}-3.2^{x-2}+1=0\Leftrightarrow\frac{2^{2x}}{2^3}-\frac{3}{4}.2^x+1=0\,(*)$

. Đặt $t=2^x>0.$

Ta có: (*) viết lại là $t^2-6t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

. Suy ra: Tổng hai nghiệm của phương trình bằng 3.

63) Chọn C

Nhận xét: $.(\sqrt{6-\sqrt{35}}).(\sqrt{6+\sqrt{35}})=1$

$$.\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x}$$

. Đặt $t=(\sqrt{6-\sqrt{35}})^x>0.$

. Phương trình đã cho viết lại $t^2-12t+1=0\,(*)$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6+\sqrt{35}\\t=6-\sqrt{35}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(\sqrt{6-\sqrt{35}})^x=(6-\sqrt{35})^{-1}\\(\sqrt{6-\sqrt{35}})^x=(6-\sqrt{35})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 2$$

. Suy ra: Tích hai nghiệm của phương trình bằng -4.

64) Chọn B . $3^{1+x}+3^{1-x}=10 \Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}=10$

. Đặt $t=3^x>0$. Ta có: $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm 1$.

65) Chọn C

Ta có: $-9.4^{\frac{1}{x}}-5.6^{\frac{1}{x}}+4.9^{\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-5\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}-9=0$ (*) (với $x\neq 0$)

Đặt: $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>0$

$(*) \Leftrightarrow 4t^2-5t-9=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{4}$ hoặc $t=-1$ (loại) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

66) Chọn A

. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=2^x$ và $y=3-x$ là $2^x=3-x$ (*

- Nhận thấy (*) có một nghiệm $x=1$
- Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên **R**, $y=3-x$ là hàm số nghịch biến trên **R**, nên hai đồ thị trên cắt nhau duy nhất tại một điểm có hoành độ $x=1$

$\Rightarrow x=1$ là nghiệm của (*). Tọa độ giao điểm cần tìm (1;2).

67) Chọn D

Ta có: $8.3^x+3.2^x=24+6^x \Leftrightarrow 8(3^x-3)-2^x(3^x-3)=0$

$\Leftrightarrow (3^x-3)(8-2^x)=0 \Leftrightarrow 3^x=3$ hoặc $2^x=8 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

68) Chọn C

Đặt $t=5^x>0$. Phương trình đã cho viết lại là $t^3+9t+\frac{27}{t^3}+\frac{27}{t}=64$

$\Leftrightarrow \left(t+\frac{3}{t}\right)^3=64 \Leftrightarrow t+\frac{3}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_5 3 \end{array}\right.$

69) Chọn D

70) Chọn A

+ $f(x)=2^x>0, \forall x \Rightarrow f(x)$ có tập giá trị $Y_{f(x)}=(0;+\infty)$

$g(x)=-2x^2+6x-9<0, \forall x \Rightarrow g(x)$ có tập giá trị $Y_{g(x)}=(-\infty;0)$

+ Mà $Y_{f(x)} \cap Y_{g(x)}=\varnothing \Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

71) Chọn B (Xem lại bài giải câu 66)

Sai bước 2, do chưa chứng minh phương trình $5^{x-2}=3-x$ có nghiệm duy nhất.

72) Chọn D. Tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{0;\frac{5}{2};3\right\}$.

73) Chọn C. $\log_2(3x-7)=3 \Leftrightarrow 3x-7=8 \Leftrightarrow x=5 \left(\text{thỏa mãn } x>\frac{7}{3}\right)$

74) Chọn C

+ Thấy $x^2+4x+12>0, \forall x$

+ Ta có: $\log_3(x^2+4x+12)=2 \Leftrightarrow x^2+4x+12=3^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=-3$.

75) Chọn A

+ Điều kiện : $\ln 2x>0 \Leftrightarrow 2x>e^0=1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

+ $\ln(\ln 2x)=-1 \Leftrightarrow \ln 2x=e^{-1} \Leftrightarrow 2x=e^{e^{-1}} \Leftrightarrow x=\frac{e^{e^{-1}}}{2}$.

76) Chọn B

. Điều kiện : $x>0$

. $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\log_2 x=7 \Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=16$.

77) Chọn D

+ Điều kiện : $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|>1 \\ x\neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$

+ $\log_{x^2-1}(2\sqrt{2})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

78) Chọn B

+ Điều kiện : $x>0$. Ta có: $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16} x=\frac{81}{24}$

$\Leftrightarrow (\log_2 x)\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{4}\log_2 x\right)=\frac{81}{24}$

$\Leftrightarrow \log_2^4 x=81 \Leftrightarrow \log_2 x=\pm 3 \Leftrightarrow x=8$ hoặc $x=\frac{1}{8}$.

79) Chọn C

+ Điều kiện: $x>0$

+ $\log_4 x+\log_4(x+3)=1 \Leftrightarrow \log_4 x(x+3)=1 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1$.

80) Chọn A

+ Điều kiện : $x\neq -1$

+ $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow x+1=\pm 3 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-4$.

81) Chọn D

+ Điều kiện : $2^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

+ $\log_2(2^x-1)=-2 \Leftrightarrow 2^x-1=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x=\frac{5}{4} \Leftrightarrow x=\log_2\frac{5}{4}=\log_2 5-2$.

82) Chọn B + Điều kiện : $0 < x \neq 1$

+ $x^2 \log_3 x . \log_x 9 = 10 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

83) Chọn D + Điều kiện: $x > 0$

+ $(\log_2 x - 2).\log_2 x = \frac{3}{2}(\log_2 x - 1) \Leftrightarrow 2(\log_2 x)^2 - 7\log_2 x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 3$ hoặc $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 8$ hoặc $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

84) Chọn A + Điều kiện: $\begin{cases} \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

+ Đặt: $t = \log_4 x \Rightarrow 2t = \log_2 x$

+ Phương trình đã cho viết lại là $\log_4 2t + \log_2 t = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2 2t}{\log_2 4} + \log_2 t = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log_2 t) + \log_2 t = 2 \Leftrightarrow \log_2 t = 1 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 16.$

85) Chọn B + Điều kiện: $0 < x \neq 1$

+ $\log_x 2 + \log_2 x = 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 2$ hoặc $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

86) Chọn D + Điều kiện: $0 < x \neq \frac{1}{3}$

+ $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1$

$\Leftrightarrow (1 - \log_3 x)\left[1 - (1 + \log_3 x)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 1$ hoặc $1 + \log_3 x = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{9}$.

87) Chọn A + Điều kiện: $0 < x \neq 1$

+ $\log_3(3x^2).\log_x^2 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + 2\log_3 x}{\log_3^2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3^{1 \pm \sqrt{2}}$.

88) Chọn C + Điều kiện : $0 < x \neq 10$

+ $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{26}{\lg x - 1} \Leftrightarrow \lg^3 x = 27 \Leftrightarrow \lg x = 3 \Leftrightarrow x = 1000.$

89) Chọn B + Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Ta có: $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$

$\Leftrightarrow (3\log_x 5 + 1)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \log_5^2 x + 3\log_5 x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x = 1$ hoặc $\log_5 x = -4 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$

+ Vậy: Tích hai nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{1}{125}$.

90) Chọn A

Giải : $|x-2|\log_2 x = x-2$ **(I)**

Điều kiện : $x > 0$

Trường hợp 1 : $x \geq 2$

Ta có: $(I) \Leftrightarrow (x-2)\log_2 x = x-2 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Trường hợp 2 : $0 < x < 2$

Ta có: $(I) \Leftrightarrow -(x-2)\log_2 x = x-2 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Giải : $(x^2-4)(\log_2 x - 1) = 0$ **(II)**

. Điều kiện $x > 0$

. $(II) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ hoặc $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (do $x > 0$)

Giải : $\log_{0,5}^2(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$ **(III)**

. Điều kiện $x > 0$

. $(III) \Leftrightarrow (\log_{0,5} 4 + \log_{0,5} x)^2 + \frac{\log_2 x^2}{\log_2 8} = 8 \Leftrightarrow (-2 - \log_2 x)^2 + \frac{2\log_2 x}{3} = 8$

$\Leftrightarrow 3(\log_2 x)^2 + 14\log_2 x - 24 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -6$ hoặc $\log_2 x = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$ hoặc $x = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

91) Chọn C . + Điều kiện : $3^x > \frac{3}{2}$ và $9^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_9 6$

+ $\log_2(4.3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1 \Leftrightarrow \log_2(4.3^x - 6) = \log_2 2(9^x - 6)$

$\Leftrightarrow 4.3^x - 6 = 2(9^x - 6) \Leftrightarrow 3^{2x} - 2.3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

92) Chọn B . $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+2} < 2^{-2x} \Leftrightarrow x + 2 < -2x \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$ hay $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

93) Chọn C. $6^{2x+3} < 2^{4x-5}.3^{4x-5} \Leftrightarrow 6^{2x+3} < 6^{4x-5} \Leftrightarrow 2x + 3 < 4x - 5 \Leftrightarrow x > 4$.

94) Chọn D . $5^{|2x-1|} \geq 25 \Leftrightarrow |2x-1| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 \geq 2 \\ 2x-1 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ hoặc $x \leq -\frac{1}{2}$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

95) Chọn B

. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52 \Leftrightarrow 4^x\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) > 52 \Leftrightarrow 4^x > 64 \Leftrightarrow x > 3$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3; +\infty)$.

96) Chọn A . $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-1)} \Leftrightarrow 3x > 2(x-1) \Leftrightarrow x > -2.$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-2; +\infty)$.

97) Chọn B

. $(2+\sqrt{3})^x < (2-\sqrt{3})^4 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x < (2+\sqrt{3})^{-4} \Leftrightarrow x < -4$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -4)$.

98) Chọn D . $(2+\sqrt{3})^{\frac{x-3}{x-1}} < (2-\sqrt{3})^{\frac{x-1}{x-3}} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{\frac{x-3}{x-1}} < (2+\sqrt{3})^{-\frac{x-1}{x-3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-8x+10}{(x-1)(x-3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; 3)$.

99) Chọn A . $(2^x - 4).(x^2 - 2x - 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 4 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2^x - 4 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 2 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } 2 < x < 3.$$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -1) \cup (2; 3)$.

100) Chọn B . $3.5^{2x-1} - 2.5^{x-1} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3.5^{2x} - 2.5^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 5^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; 0)$.

101) Chọn B . Đặt $t = 3^x > 0$

. Ta có: $3^x + 9.3^{-x} < 10 \Leftrightarrow t + \frac{9}{t} < 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 9$

$$\Leftrightarrow 3^0 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

Mà $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 1$.

102) Chọn C . $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 14$$

. $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$

. Số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 9.

103) Chọn B . Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$

. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 > 0 \Rightarrow t > 3 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

. Tập nghiệ m của bất phương trình đã cho là $(-1; 0)$.

104) Chọn D

$$. 25^{x+1}+9^{x+1} \geq 34.15^{x} \Leftrightarrow 25\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-34\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+9\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x\geq 0\end{array}\right.$$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$.

105) Chọn A . $1+2^{x+1}+3^{x+1} < 6^{x} \Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{1}{6}\right)^{x}+2\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}<1$ (*)

. Thấy f(x) là hàm số nghịch biến trên **R** và f(2) = 1. Nên: (*) $\Leftrightarrow x > 2$

. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(2;\ +\infty)$.

106) Chọn C . Đặt : $t = 3^{x} > 0$

. $9^{x}-2(m+1).3^{x}-3-2m>0 \Leftrightarrow t^{2}-2(m+1)t-3-2m>0$

$\Leftrightarrow (t+1)(t-2m-3)>0 \Leftrightarrow t>2m+3$ (do $t+1>0$)

. $9^{x}-2(m+1)3^{x}-3-2m>0, \forall x\in \mathbf{R} \Leftrightarrow 2m+3\leq 0 \Leftrightarrow m\leq -\frac{3}{2}$

107) Chọn B . Đặt: $t = 3^{x} > 0$

. Bất phương trình đã cho thành $t^{2}-3mt-4-3m\leq 0$ hay $f(t)=\frac{t^{2}-4}{3t+3}\leq m$

. $9^{x}-m.3^{x+1}-4-3m\leq 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{t>0} f(t) < m$ (*)

+ $f'(t)=\frac{3t^{2}+6t+12}{(3t+3)^{2}}>0,\ \forall t>0$

+ Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
f'(t)	+	
f(t)	$-\frac{4}{3}$ ↗	

. Vậy : $m > -\frac{4}{3}$.

108) Chọn A. Ta có: $\log_{2} 4x < 3 \Leftrightarrow 0 < 4x < 8 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

109) Chọn B. Điều kiện: x>0. Ta có: $3 < \log_{2} x < 4 \Leftrightarrow 2^{3} < x < 2^{4} \Leftrightarrow 8 < x < 16$

110) Chọn C . Điều kiện : $\begin{cases}x^{2}+x>0\\ -2x+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0 \vee x<-1\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ 0<x<2\end{array}\right.$

· $\log_{0,8}(x^{2}+x) < \log_{0,8}(-2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases}x^{2}+x>-2x+4\\ -2x+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{2}+3x-4>0\\ x<2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<-4 \text{ hoặc } x>1\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow x<-4 \text{ hoặc } 1<x<2$

· Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;-4)\cup(1;2)$.

111) Chọn D . Điều kiện: $x > 2$

$\cdot \log_{\frac{\pi}{6}}\left[\log_3(x-2)\right] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-2) > 0 \\ \log_3(x-2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5$

112) Chọn C . Điều kiện: $x > 0$

$\cdot (x-3)(\lg x + 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ \lg x + 1 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-3 > 0 \\ \lg x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x < 3.$

$\cdot x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

. Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

113) Chọn A $\cdot \log_3 \frac{1+2x}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2x}{x} > 0 \\ \frac{1+2x}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2x}{x} > 0 \\ \frac{1+x}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x > 0 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{2}$

$\cdot$ Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)$

114) Chọn B . Điều kiện: $4x^2 - 16x + 15 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \vee x > \frac{5}{2}$

$\cdot \log_{0,5\sin\frac{\pi}{4}}(4x^2 - 16x + 15) \le -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}(4x^2 - 16x + 15) \le -2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 15 \ge 8 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$ hoặc $x \ge \frac{7}{2}$

$\cdot$ Tập nghiệm của bất phương trình đã cho $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

115) Chọn B . Điều kiện : $x \ne \frac{3}{2}$

$\cdot \log_3|2x-3| < \log_3 5 \Leftrightarrow 0 < |2x-3| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{3}{2} \\ -5 < 2x-3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{3}{2} \\ -1 < x < 4. \end{cases}$

$\cdot$ Tập nghiệm của bất phương trình đã cho $(-1; 4) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow$ câu B là sai.

116) Chọn A . Điều kiện: $x > 0$

$\cdot \log^2_{0,5} x + 6 < 5\log_{\frac{1}{2}} x \Leftrightarrow \log^2_{0,5} x - 5\log_{0,5} x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < \log_{0,5} x < 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > x > \frac{1}{8}$

$\cdot$ Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$.

117) Chọn B

· Điều kiện : $2008x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2008$ (1)

· $f'(x) = \dfrac{2008 - 2x}{2008x - x^2} > 0 \Leftrightarrow 2008 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1004$ (2)

· (1) và (2) $\Rightarrow 0 < x < 1004$

· Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ đã cho là $(0; 1004)$.

118) Chọn C . Điều kiện: $x > 0$

· *Chú ý :* $x^{\lg 7} = 7^{\lg x}$

· $7^{\lg x} + x^{\lg 7} > 98 \Leftrightarrow 7^{\lg x} > 49 \Leftrightarrow \lg x > 2 \Leftrightarrow x > 10^2 = 100$

· Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(100; +\infty)$.

119) Chọn A . Sai từ bước 1, bài giải đúng là

Bước 1 : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+2x}{1+x} > 0 \\ \dfrac{1+2x}{1+x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+2x}{1+x} > 0 & (1) \\ \dfrac{2+x}{1+x} > 0 & (2) \end{cases}$

Bước 2 : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (3)

$(2) \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > -1$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow x < -2$ hoặc $x > -\dfrac{1}{2}$

Bước 3 :

Vậy : Tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(-\infty; -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

120) Chọn C

Cách 1: · $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ 3^x . 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

· Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ là 2.

Cách 2: · Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

· Thế $y = 1 - x$ vào $3^x + 3^y = 4$ ta được $3^x + 3^{1-x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 . 3^x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

· Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ là 2.

121) Chọn A · $\begin{cases} 3^x . 3^{2y} = 81 \\ e^{x+y} . e^{-2y} = e^{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2y} = 3^4 \\ e^{x-y} = e^{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

· Hệ phương trình $\begin{cases} 3^x . 3^{2y} = 81 \\ e^{x+y} . e^{-2y} = e^{-5} \end{cases}$ có nghiệm là $(-2; 3)$.

122) Chọn B · Đặt $\begin{cases} u = 3^x > 0 \\ v = 8^{\frac{y}{2}} > 0 \end{cases}$

· $\begin{cases} 3^{2x} - 8^y = 77 \\ 3^x - 8^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 77 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$

· Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^{2x} - 8^y = 77 \\ 3^x - 8^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}$ là 1.

123) Chọn A (tương tự cách giải câu 120)

124) Chọn D · $\begin{cases} 3^x . 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3^{y+3} . 2^y = 972 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 6^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$

· Hệ phương trình $\begin{cases} 3^x . 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là $(5; 2)$

125) Chọn C

· *Giải* $3^x = 4 - x$ ta được nghiệm duy nhất $x = 1$ (tương tự cách câu 66)

· Thế $x = 1$ vào $e^{y^2 - x + y - 2} = e^{-1}$ ta được $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -2$

· Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^x = 4 - x \\ e^{y^2 - x + y - 2} = \frac{1}{e} \end{cases}$ là 2

126) Chọn B

· Điều kiện : $x > 0$ và $y > 0$

· Ta có : $\begin{cases} 2\log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 + 4 = 5y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 y \\ x^2 + 4 = 5y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

· Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 + 4 = 5y^2 \end{cases}$ là 1

127) Chọn A

· Thế $(x; y) = (4; 2)$ vào hệ thấy thỏa mãn, nên chọn A.

· Ta cũng có thể giải cách khác

+ Điều kiện : $x > y$

+ $\begin{cases} 3^x . 2^y = 324 \\ \log_{\sqrt{2}}(x - y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x . 2^y = 324 \\ x - y = 2 \end{cases}$

(tương tự cách giải câu 124).

128) Chọn C · Điều kiện : $x > 0$.

· Ta có: $\begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ x^y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ \log_2 x^y = \log_2 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = y - 1 \quad (1) \\ y\log_2 x = 6 \quad (2) \end{cases}$

· Thế (1) vào (2) ta được: $y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ hoặc $y = 3$

· Hệ phương trình $\begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ x^y = 64 \end{cases}$ có nghiệm (4; 3) và $\left(\frac{1}{8}; -2\right)$

129) Chọn B

· Thế $(x; y) = (4; 4)$ vào hệ thấy thỏa mãn, nên chọn B.

· Ta cũng có thể giải cách khác

· Với $x, y > 0$:

$$\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (xy) = 4 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 16 \\ (x + y)^2 - 2xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = -8 \end{cases}$$

+ *Giải* $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$; x, y là nghiệm của $X^2 - 8X + 16 = 0 \Leftrightarrow X = 4$

+ *Giải* $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = -8 \end{cases}$; x, y là nghiệm của $X^2 + 8X + 16 = 0 \Leftrightarrow X = -4$ (loại)

· Hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$ có một nghiệm (4; 4).

130) Chọn C

+ Thế $(x; y) = (-1; -2)$ vào hệ phương trình đã cho thấy thỏa mãn. Chọn C.

+ Bài giải cụ thể

· Điều kiện : $x - y > 0 \Leftrightarrow x > y$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 7 = 0 \\ 3^{\log_9 (x-y)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = 1 \text{ hoặc} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = -7 \\ \log_9 (x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Chương III

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm

Định nghĩa

Cho hàm số f(x) liên tục trên khoảng **I**. Hàm số F(x) được gọi là **nguyên hàm** của f(x) trên **I** nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc **I**.

Định lí

Giả sử hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng **I**. Khi đó

a) Với mỗi hằng số C, hàm số G(x) = F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x).

b) Ngược lại, nếu G(x) là một nguyên hàm bất kì của f(x) thì tồn tại hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C với mọi x thuộc **I**.

- Họ tất cả các nguyên hàm của f(x) là $\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x), C là hằng số bất kì.

- **Bảng các nguyên hàm**

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int kdx = kx + C (k \in \mathbf{R})$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C (x \neq 0)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Ngoài ra còn một số công thức cũng thường gặp là

$$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (a \neq 0, \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln\lvert ax+b\rvert + C$$

. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \quad (a \neq 0)$

. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$

. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$

2. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

Định lí

Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) và G(x) là một nguyên hàm của g(x) thì

a) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+G(x)+C;$

b) Với mọi số thực $a \neq 0$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx = aF(x)+C.$$

3. Một số phương pháp tìm nguyên hàm

• Phương pháp đổi biến số

Định lí

Giả sử u = u(x) là một hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng **I** sao cho hàm hợp f[u(x)] xác định trên **I**. Khi đó ta có

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)]+C \quad (*)$$

ở đó F(u) là một nguyên hàm của f(u).

Chú ý : Từ u = u(x), ta có du = u'(x)dx và f[u(x)].u'(x)dx = f(u)du

Vì vậy, công thức (*) có thể viết gọn như sau: $\int f(u)du = F(u)+C.$

• Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Định lí

Nếu u(x), v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng **I** thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Hay $\int udv = uv - \int vdu.$

Một số dạng thường gặp

Với P(x) chỉ một đa thức và $a \neq 0$

Dạng 1: $\int P(x)e^{ax+b}dx$, $\int P(x)\sin(ax+b)\,dx$, $\int P(x)\cos(ax+b)\,dx$

Đặt $u = P(x)$, $dv = e^{ax+b}dx$

(hoặc $dv = \sin(ax+b)dx$, $dv = \cos(ax+b)dx$)

Dạng 2: $\int P(x)\ln(ax+b)dx$ (Đặt $u = \ln(ax+b)$, $dv = P(x)dx$)

II. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho hàm f(x) liên tục trên khoảng **I** và a, b là hai số bất kì thuộc **I**. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì hiệu số F(b) – F(a) **được gọi là tích phân của f(x) từ a đến b** và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$

Chú ý: + Ta có thể dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu F(b) – F(a). Nên

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ (a là cận dưới, b là cận trên)

$$+ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots = F(b) - F(a).$$

2. Tính chất của tích phân

Cho các hàm số f(x), g(x) liên tục trên **I** và a, b, c là ba số bất kì thuộc **I**

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ với $k \in \mathbf{R}$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

3. Một số phương pháp tính tích phân

- **Phương pháp đổi biến số**

Công thức đổi biến số $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du$ (**) trong đó hàm số f(x) liên tục và hàm số u= u(x) có đạo hàm liên tục trên khoảng **J** sao cho hàm hợp f [u(x)] xác định trên **J** ; a, b là hai số thuộc **J** và $\alpha = u(a), \beta = u(b)$.

Phương pháp đổi biến số thường áp dụng hai cách

Cách1: Giả sử tính $\int_a^b g(x)dx$

+ Nếu phân tích g(x)dx thành dạng f[u(x)]u'(x)dx = f[u(x)]d[u(x)] thì theo (**) ta có $\int_a^b g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du$ với $\alpha = u(a), \beta = u(b)$.

+ Bài toán quy về tính $\int_\alpha^\beta f(u)du$ (tính tích phân mới này đơn giản hơn).

Cách 2 : Giả sử tính $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

+ Nếu $x = x(t)$ và a, b thỏa mãn $\alpha = x(a), \beta = x(b)$ thì theo (**)

ta có $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{b} f[x(t)]x'(t)dt = \int_{a}^{b} g(t)dt$

(tính tích phân mới này đơn giản hơn).

- **Phương pháp tích phân từng phần**

Định lí : Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng **I** và a, b là hai số thuộc **I** thì $\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x).v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx.$

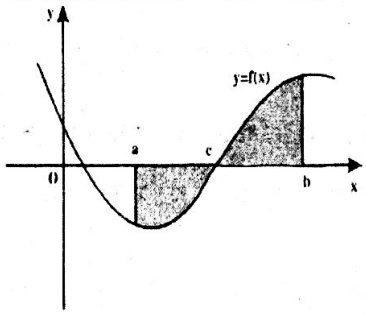
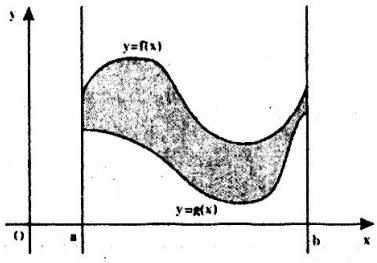
III. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂNVÀ ỨNG DỤNG

1. Ý nghĩa hình học

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên khoảng **I** và a, b là hai số thuộc **I** ($a < b$). Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

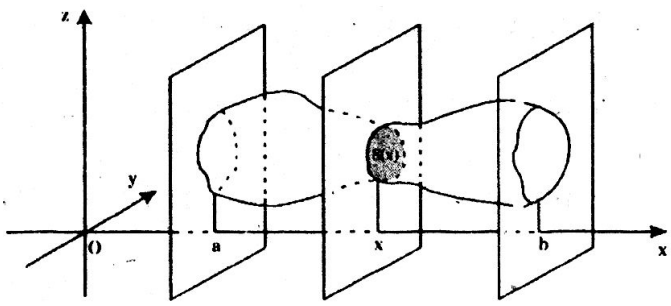
2. Ứng dụng của tích phân

- **Tính diện tích hình phẳng**

. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b] thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_{a}^{b} \|f(x)\|dx.$	
. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ ($a <b$) là $S = \int_{a}^{b} \|f(x) - g(x)\|dx$.	

- **Tính thể tích vật thể**

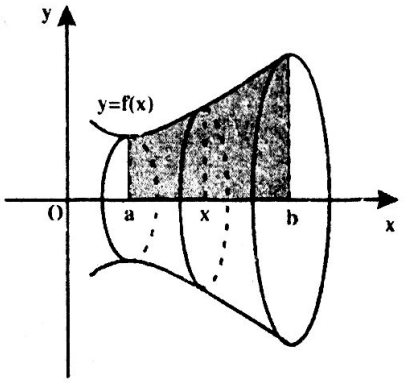
Thể tích của phần vật thể *B* giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b là $V = \int_{a}^{b} S(x)dx$.



Trong đó S(x) là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \in [a; b]$ và S(x) là một hàm liên tục.

- **Tính thể tích khối tròn xoay**

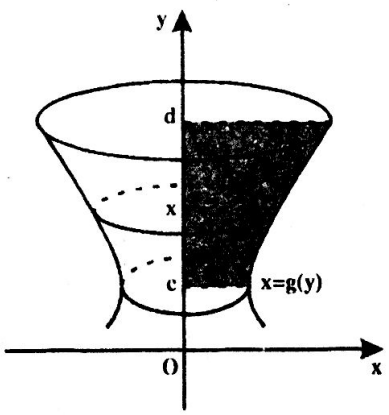
. Cho hàm số y = f(x) liên tục, không âm trên [a ; b]. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay (hình vẽ).



• Thể tích V được tính bởi công thức :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số x=g(y), trục tung và hai đường thẳng y= c, y=d quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay .Thể tích V được tính bởi công thức :



$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy .$$

B. BÀI TẬP CĂN BẢN

§1. NGUYÊN HÀM

Bài 1. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^3}$ **d)** $f(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

Giải

a) $f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 8$

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 8)dx = \int x^3 dx - 8\int dx = \frac{x^4}{4} - 8x + C.$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} \quad (x>0)$

$$\int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x} + C.$$

c) $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^3}=\dfrac{x^2+4x+4}{x^3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\quad (x\neq 0)$

$$\int f(x)dx=\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{x^2}+4\int\frac{dx}{x^3}=\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+C.$$

d) $f(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x\Rightarrow\int f(x)dx=\int dx-\int\cos x dx=x-\sin x+C.$

Bài 2. Tìm

a) $\int\dfrac{2008}{x^2-1}dx$ **b)** $\int\dfrac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}$ **c)** $\int\tan^2x\,dx$ **d)** $\int(1+e^{-x}).e^x dx$

Giải

a) $\int\dfrac{2008}{x^2-1}dx=1004\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=1004\int\dfrac{1}{x-1}dx-1004\int\dfrac{1}{x+1}dx\ (x\neq\pm1)$

$$=1004\ln|x-1|-1004\ln|x+1|+C=1004\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

b) $\int\dfrac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=\int\dfrac{(\sin^2x+\cos^2x)}{\sin^2x.\cos^2x}dx=\int\dfrac{1}{\cos^2x}dx+\int\dfrac{1}{\sin^2x}dx=\tan x-\cot x+C$

$$\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$$

c) $\int\tan^2x\,dx=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2x}-1\right)=\int\dfrac{1}{\cos^2x}dx-\int dx=\tan x-x+C.$

d) $\int(1+e^{-x}).e^x dx=\int(e^x+e^{-x+x})dx=\int e^x dx+\int dx=e^x+x+C$

Bài 3. Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=x^3+x$ thỏa $F(1)=0$

Giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int(x^3+x)dx=\int x^3dx+\int xdx=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{3}{4}$

Vậy: Nguyên hàm của hàm số cần tìm là $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{4}$.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

Bài 4. Tính các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=(2x+3)^5$ **b)** $f(x)=\sin^5x.\cos x$

Giải

Phương pháp đổi biến số

a) Đặt $u=2x+3\Rightarrow du=2dx$

Ta có: $\int f(x)dx=\int(2x+3)^5dx=\dfrac{1}{2}\int u^5du=\dfrac{u^6}{12}+C=\dfrac{(2x+3)^6}{12}+C$

b) Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

Ta có: $\int f(x)dx = \int \sin^5 x.\cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

Bài 5. Tìm

a) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **b)** $\int 2xe^{x^2+1}dx$

c) $\int \frac{2008 + \ln^2 x}{x}dx$ **d)** $\int \frac{\cos x - 3\sin x}{\sin x + 3\cos x + 1}dx$

Giải

Phương pháp đổi biến số

a) Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$. Ta có:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{\sqrt{u^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C$$

b) Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$

Ta có: $\int 2xe^{x^2+1}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+1} + C$

c) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

Ta có: $\int \frac{2008 + \ln^2 x}{x}dx = \int (2008 + u^2)du = 2008\int du + \int u^2 du$

$$= 2008u + \frac{u^3}{3} + C = 2008\ln x + \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

d) Đặt $u = \sin x + 3\cos x + 1 \Rightarrow du = (\cos x - 3\sin x)dx$

Ta có: $\int \frac{\cos x - 3\sin x}{\sin x + 3\cos x + 1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x + 3\cos x + 1| + C.$

Bài 6. Tìm

a) $\int xe^x dx$ **b)** $\int x\cos x dx$ **c)** $\int x\ln x dx$ **d)** $\int x^2 \sin x dx$

Giải

Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần $\int udv = uv - \int vdu$

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Ta có: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Ta có: $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

c) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Ta có: $\int x\ln x dx = \dfrac{x^2\ln x}{2} - \dfrac{1}{2}\int x dx = \dfrac{x^2\ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$

d) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Ta có:

$\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$

(áp dụng kết quả câu b))

Chú ý : Với các tích phân có dạng (với P(x) là một đa thức theo x)

- $\int P(x)e^{ax+b}dx$; $\int P(x)\sin(ax+b)dx$; $\int P(x)\cos(ax+b)dx$ ta lấy $u = P(x)$ và phần còn lại là dv
- $\int P(x)\ln(ax+b)dx$, ta lấy $u = \ln(ax+b)$ và phần còn lại là dv

§3. TÍCH PHÂN

Bài 7. Tính các tích phân sau :

a) $\int_{-1}^{2}(x^3 + 3x + 1)dx$ b) $\int_{1}^{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 dx$ c) $\int_{0}^{2}\left(x\sqrt{x} - 1\right)dx$

d) $\int_{1}^{2}\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}dx$ e) $\int_{-3}^{3}|x - 2|dx$ f) $\int_{0}^{16}\dfrac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$

Giải

a) $\int_{-1}^{2}(x^3 + 3x + 1)dx = \int_{-1}^{2}x^3 dx + 3\int_{-1}^{2}x dx + \int_{-1}^{2}dx = \left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{2}$

$= \left(\dfrac{2^4}{4} + \dfrac{3.2^2}{2} + 2\right) - \left(\dfrac{(-1)^4}{4} + \dfrac{3(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \dfrac{45}{4}$

b) $\int_{1}^{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 dx = \int_{1}^{2}\left(x^2 + \dfrac{4}{x^2} + 4\right)dx = \int_{1}^{2}x^2 dx + 4\int_{1}^{2}\dfrac{dx}{x^2} + 4\int_{1}^{2}dx$

$= \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{4}{x} + 4x\right)\Big|_{1}^{2} = \left(\dfrac{2^3}{3} - \dfrac{4}{2} + 4.2\right) - \left(\dfrac{1^3}{3} - \dfrac{4}{1} + 4.1\right) = \dfrac{25}{3}$

c) $\int_{0}^{2}\left(x\sqrt{x} - 1\right)dx = \int_{0}^{2}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)dx = \int_{0}^{2}x^{\frac{3}{2}}dx - \int_{0}^{2}dx = \left(\dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - x\right)\Big|_{0}^{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{5} - 2.$

d) $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int_1^2 xdx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx = \left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$$= 2+\ln 3-\frac{1}{2}-\ln 2 = \frac{3}{2}+\ln\frac{3}{2}.$$

e) $\int_{-3}^{3}|x-2|dx$

Xét dấu $x-2$

x	$-\infty$	-3		2		3	$+\infty$
$x-2$			$-$	0	$+$		

$$\int_{-3}^{3}|x-2|\,dx = \int_{-3}^{2}|x-2|\,dx + \int_{2}^{3}|x-2|\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-3}^{2} + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= -2+4+\frac{(-3)^2}{2}-2(-3)+\frac{9}{2}-6-2+4 = 13$$

f) $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int_0^{16}\frac{(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}{x+9-x}dx = \frac{1}{9}\int_0^{16}\sqrt{x+9}\,dx + \frac{1}{9}\int_0^{16}\sqrt{x}\,dx$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2(x+9)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_0^{16} = \frac{2}{27}(5^3+4^3-3^3) = 12.$$

Bài 8. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx$

Giải

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1-1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$

$$= (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx = (4\tan x+3\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$$= 4\tan\frac{\pi}{4}+3\cos\frac{\pi}{4}-4\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4+\frac{3\sqrt{2}}{2}+4-\frac{3\sqrt{2}}{2} = 8.$$

Bài 9. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) dx$

Giải

a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x| = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\, dx - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx$

$$= -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + \sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right)\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Bài 10. Tính : $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3} dx$

Giải

Ta có: $\frac{2x+3}{x^2+4x+3} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

Từ đó $2x+3 \equiv (A+B)x + 3A + B$ ($x \neq -1$ và $x \neq -3$)

Cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta thu được

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2}$$

Suy ra:

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| + 3\ln|x+3|\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{125}{9}.$$

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 11. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 (x^2-1)^5 x dx$ b) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$

c) $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+10} dx$ d) $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx$

Giải

Phương pháp đổi biến số

a) Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx$

Đổi cận

x	1	2
u	0	3

Ta có: $\int_1^2 (x^2-1)^5 x dx = \frac{1}{2}\int_0^3 u^5 du = \frac{u^6}{12}\Big|_0^3 = \frac{729}{12} = \frac{243}{4}$.

b) Đặt $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx$

Đổi cận

x	0	1
u	1	2

Ta có: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{10}^{17} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

c) Đặt $u = x^2+6x+10 \Rightarrow du = 2(x+3)dx \Rightarrow (x+3)dx = \frac{du}{2}$

Đổi cận

x	0	1
u	10	17

Ta có: $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx = \frac{1}{2}\int_{10}^{17}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{10}^{17} = \frac{1}{2}\ln\frac{17}{10}$.

d) Đặt $u = x^2+x+3 \Rightarrow du = (2x+1)dx$

Đổi cận

x	0	2
u	3	9

Ta có: $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}dx = \int_3^9 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_3^9 u^{-\frac{1}{2}}du = 2\sqrt{u}\Big|_3^9 = 6-2\sqrt{3}$.

Bài 12. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 e^{2x+1}dx$ **b)** $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx$

Giải

a) Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$

Đổi cận

x	0	1
u	1	3

Ta có: $\int_0^1 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^u du = \frac{e^u}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^3-e)$

Lưu ý: Học nhớ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C\ (a\neq 0)$

b) Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$

Đổi cận

x	0	1
u	1	2

Ta có: $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx = \int_1^2 e^u du = e^u\Big|_1^2 = e^2 - e.$

Bài 13. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx$

Giải

a) Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_1^0 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$

b) Ta có: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) \cos x dx$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du = \left(-\frac{1}{u} - u\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6}.$

c) Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = -\int_1^0 (1-u^2)^2 du = \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$.

d) Đặt $u = \sqrt[6]{1-\cos^3 x} \Rightarrow u^6 = 1 - \cos^3 x \Rightarrow 6u^5 du = 3\sin x \cos^2 x dx$

$\Rightarrow \sin x \cos^2 x dx = 2u^5 du$ và $\cos^3 x = 1 - u^6$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx = \int_0^1 u.(1-u^6).2u^5 du = 2\int_0^1 u^6 du - 2\int_0^1 u^{12} du$$

$$= 2\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^{13}}{13}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{2}{13} = \frac{12}{91}.$$

Bài 14. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^e \frac{1+\ln^4 x}{x} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x + e^{\sin x}\right)\cos x dx$

c) $\int_0^{\ln 2} (2+e^x)^3 e^x dx$

d) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Giải

a) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận

x	1	e
u	0	1

Ta có: $\int_1^e \frac{1+\ln^4 x}{x} dx = \int_0^1 (1+u^4) du = \left(u + \frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

b) Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x + e^{\sin x}\right)\cos x dx = \int_0^1 \left(u^3 + e^u\right)du = \int_0^1 u^3 du + \int_0^1 e^u du$

$$= \left(\frac{u^4}{4} + e^u\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + e - e^0 = e - \frac{3}{4}.$$

c) Đặt $u = 2 + e^x \Rightarrow du = e^x dx$

Đổi cận

x	0	ln 2
u	3	4

Ta có: $\int_0^{\ln 2} (2 + e^x)^3 e^x dx = \int_3^4 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_3^4 = \frac{1}{4}(256 - 81) = \frac{175}{4}.$

d) Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Đổi cận

x	1	4
u	1	2

Ta có: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^2 e^u du = 2e^u\Big|_1^2 = 2(e^2 - e).$

Bài 15. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ **b)** $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ **c)** $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ **d)** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Giải

a) Đặt $x = \tan t \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Ta có: $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t}(1 + \tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$

b) Đặt $x = \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow dx = \cos t dt$

Đổi cận

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Ta có: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

c) Đặt $x = \frac{1}{\cos t}\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

Đổi cận

x	$\sqrt{2}$	2
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Ta có: $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{1-\cos^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t dx}{|\sin t|} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t dt}{\sin t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

d) Đặt $x = \sin t\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow dx = \cos t dt$

Đổi cận

x	0	$\frac{1}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

Ta có: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{|\cos t|}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$

Lưu ý: Làm mất căn nhờ

- Đặt $x = a\sin t \to \sqrt{a^2-x^2} = |a|.|\cos t|$ (có thể đặt $x = a\cos t$)
- Đặt $x = a\tan t \to \sqrt{a^2+x^2} = \frac{|a|}{|\cos t|}$ (có thể đặt $x = a.\cot t$).
- Đặt $x = \frac{a}{\cos t} \to \sqrt{x^2-a^2} = |a|.|\tan t|\left(\text{có thể đặt } x = \frac{a}{\sin t}\right)$

Bài 16. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 xe^{2x}dx$ **b)** $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-x)\sin 3x\,dx$

d) $\int_2^5 x^2\ln(x-1)\,dx$ **e)** $\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$ **f)** $\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx$

Giải

Phương pháp tích ***phân từng phần*** $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Tacó: $\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$

b) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Tacó: $\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2+1) = \frac{1}{4}(e^2-1).$

(sử dụng kết quả **câu a)**

c) Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = \sin 3xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-x)\sin 3xdx = \left(\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3xdx$

$= \left(\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$

d) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{(x-1)'}{x-1}dx = \frac{1}{x-1}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Ta có: $\int_2^5 x^2\ln(x-1)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x-1)\Big|_2^5 - \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{(x^3-1)+1}{x-1}\,dx$

$= \frac{125}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\int_2^5 \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \frac{125}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)\Big|_2^5 = \frac{124}{3}\ln 4 - \frac{35}{2}.$

e) Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin xdx \\ v = e^x \end{cases}$

Tacó: $\int_0^{\pi} e^x\cos xdx = e^x\cos x\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx}_{I}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u_1 = \sin x \\ dv_1 = e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \cos xdx \\ v_1 = e^x \end{cases}$

$I = e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1).$

f) Đặt $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$

Tacó: $\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}} + \underbrace{\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\,dx}_{I} \quad (1)$

Đặt $\begin{cases} u_1 = \sin(\ln x) \\ dv_1 = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v_1 = x \end{cases}$

$I = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}} - \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\right)\Big|_1^{e^{\pi}} = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1).$

Bài 17. Cho n là số tự nhiên. Lập công thức quy nạp cho :

a) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ **b)** $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx$

c) $I_n = \int_1^{e} \ln^n x dx$ **d)** $I_n = \int_0^{1} x^n \sqrt{1-x}\,dx$

a) *Phương pháp tích phân từng phần*

Đặt $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\sin^{n-2} x.\cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Tacó: $I_n = -\sin^{n-1} x.\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.\cos^2 x dx$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.(1-\sin^2 x)dx$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

Hay $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

b) *Phương pháp đổi biến số*

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{2n} x(\tan^2 x + 1 - 1)}{\tan^2 x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x(\tan^2 x + 1)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n-1)} x dx$$

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = (\tan^2 x + 1)dx$

Với $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

Do đó: $I_n = \int_0^1 u^{2n-2} du - I_{n-1} = \frac{u^{2n-1}}{2n-1}\Big|_0^1 - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$

c) *Phương pháp tích phân từng phần*

Đặt $\begin{cases} u = \ln^n x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln^{n-1} x dx \\ v = x \end{cases}$

Ta có: $I_n = x\ln^n x\Big|_1^e - n\int_1^e \ln^{n-1} x dx = e - nI_{n-1}$

d) *Phương pháp tích phân từng phần*

Đặt $\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

Tacó: $I_n = -\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\ \Big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$

$$= \frac{2n}{3}\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\right] = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$$

hay $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Bài 18. Tính : $I = \int_0^1 x\left(e^{2x} + \sqrt{x^2+1}\right)dx$

Giải

Ta có: $\int_0^1 x\left(e^{2x} + \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 xe^{2x}dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$

- Theo kết quả Bài 16a) (phương pháp tích phân từng phần) ta được :

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

- Theo kết quả Bài 10b) (phương pháp đổi biến số) ta được :

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dxdx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Do đó: $I = \frac{1}{4}(e^2+1) + \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \frac{3e^2+3+8\sqrt{2}-4}{12} = \frac{3e^2+8\sqrt{2}-1}{12}$.

§5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Bài 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành :

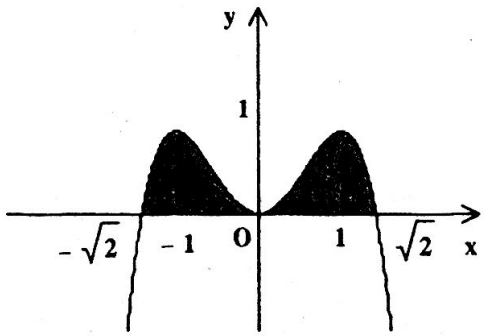
$2x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4)dx$$

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4)dx$$

$$= 2\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{15} \text{ (đvdt)}$$



Bài 20. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số :

$$(P_1) : y = -\frac{1}{4}x^2 \text{ và } (P_2) : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$-\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0$$

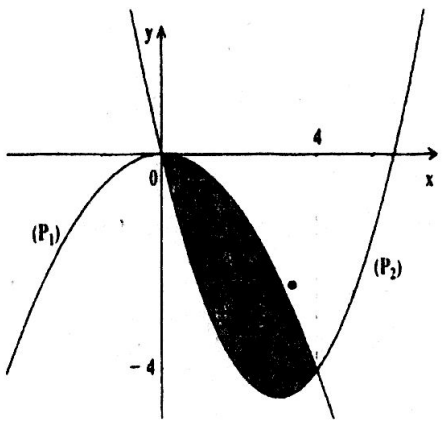
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3x\right)dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^4 x^2dx + 3\int_0^4 xdx = \left(-\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 8 \text{ (đvdt)}$$

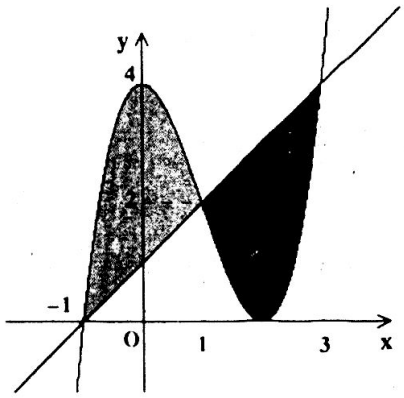


Bài 21. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và $x - y + 1 = 0$ là :

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x + 1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = x + 1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x-2)^2 - 1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$



Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-1}^{1}[x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1)]dx + \int_{1}^{3}[(x+1) - (x^3 - 3x^2 + 4)]dx$$
$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx + \int_{1}^{3}(-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{1}^{3}$$
$$= 4 + 4 = 8 \text{ (đvdt)}$$

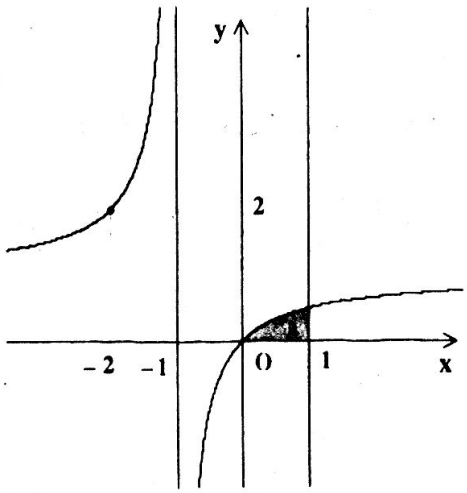
Bài 22. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x+1}$, trục hoành Ox và đường thẳng $x = 1$.

Giải

Hoành độ giao điểm của $y = \frac{x}{x+1}$ và trục hoành Ox là $x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{0}^{1}\frac{x}{x+1}dx = \int_{0}^{1}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= 1 - \ln 2 \text{ (đvdt).}$$



Bài 23. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1}$, đường tiệm cận xiên, trục tung Oy và đường thẳng $x = 2$.

Giải

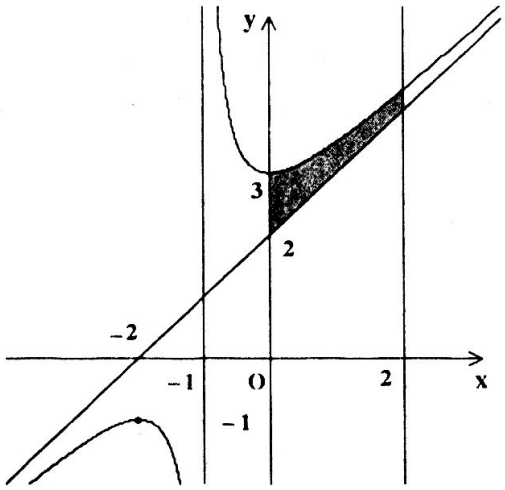
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^2\left[\frac{x^2+3x+3}{x+1}-(x+2)\right]dx$$

$$=\int_0^2\left[x+2+\frac{1}{x+1}-(x+2)\right]dx$$

$$=\int_0^2\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\ln|x+1|\Big|_0^2=\ln 3 \ \text{(đvdt)}$$



Bài 24. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y=2-x$.

Giải

Hoành độ giao điểm của $y=2-x$ và trục hoành là: $x=2$

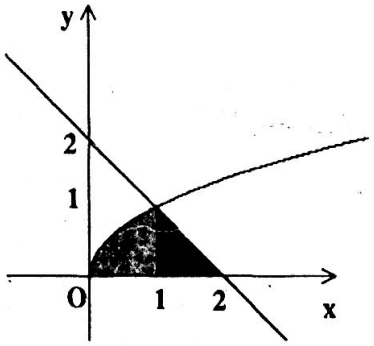
Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\sqrt{x}$ và $y=2-x$ là:

$$\sqrt{x}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\ge 0\\ x=(2-x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x=4-4x+x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:



$$S=\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{7}{6}\ \text{(đvdt)}.$$

Bài 25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=e^{-x}$ và đường thẳng $x=1$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=e^x$ và $y=e^{-x}$ là :

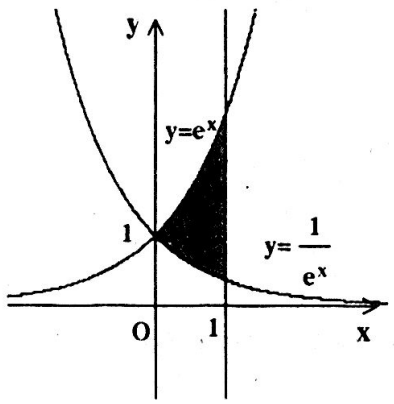
$$e^x=e^{-x}=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow\ e^{2x}=1\Leftrightarrow x=0$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^1\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^1=e+e^{-1}-(e^0+e^0)$$

$$=e+\frac{1}{e}-2\ \text{(đvdt)}$$



Bài 26. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi :

a) $y = x^2 - x$ và trục hoành;

b) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

Giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - x$ và trục hoành là :

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left[f^2(x)\right] dx$. Ta có:

$$V = \pi\int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^4 dx - \pi\int_0^1 2x^3 dx + \pi\int_0^1 x^2 dx \; \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{30} \text{ (đvtt)}$$

b). $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$ (đvtt)

Bài 27. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi :

a) $y = \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$;

b) $y = \sqrt{x}.e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1 (0 \le x \le 1)$.

Giải

a) Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left[f^2(x)\right]dx$. Ta có: $V = \pi\int_1^2 \ln^2 x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Tacó: $\int_1^2 \ln^2 x dx = x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\underbrace{\int_1^2 \ln x dx}_{I}$

Đặt $\begin{cases} u_1 = \ln x \\ dv_1 = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \dfrac{dx}{x} \\ v_1 = x \end{cases}$

Ta được $I = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2$

Suy ra $V = \pi\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^2 = 2\pi\left(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1\right)$ (đvtt)

b) Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left[f^2(x)\right] dx$

Ta có: $\pi\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$ đvtt. (kết quả Bài 16a)

Bài 28. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi ta quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{\cos^2 x + x\sin x}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left[f^2(x)\right] dx$

Ta có: $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Do đó $V = \pi\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ (đvtt)

Bài 29. Tìm thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và trục Ox.

Giải

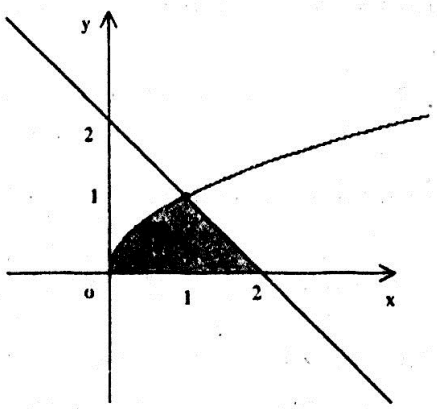
Ta có: $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ $(y \geq 0)$

$y = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - y$

Phương trình tung độ giao điểm của $x = y^2$ và $x = 2 - y$ là :

$y^2 = 2 - y \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành cần tìm là :



$$V = \pi\int_0^1 (2 - y)^2 dy - \pi\int_0^1 (y^2)^2 dy = \pi\int_0^1 (4 - 4y + y^2 - y^4) dy$$

$$= \pi\left(4y - 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{3}\right) = \frac{32\pi}{15} \text{ (đvtt).}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - x + x^2$ là

A. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$ **B.** $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$ **C.** $-1 + 2x + C$ **D.** $x - x^2 + x^3 + C$

2) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ là

A. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$ **B.** $\sqrt{x} + C$ **C.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ **D.** $\frac{3}{2}x\sqrt{x} + C$

3) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\cos x$ là

A. $-\frac{x^2 \sin x}{2} + C$ **B.** $\cos x + x\sin x + C$

C. $\cos x - x\sin x + C$ **D.** $x\sin x - \cos x + C$

4) Hàm số $F(x) = e^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào ?

A. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}$ **B.** $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$

C. $f(x) = e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ **D.** Một hàm số khác.

5) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x.\cos x$ là

A. $\frac{1}{4}\cos 2x$ **B.** $-\frac{1}{4}\cos 2x$ **C.** $-\cos x.\sin x$ **D.** $-\frac{1}{4}\sin 2x$

6) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ trên **R** thỏa mãn điều kiện $F(-1) = 3$ là

A. $x^4 - x^3 + 2x + 3$ **B.** $x^4 - x^3 + 2x$ **C.** $x^4 - x^3 + 2x + 4$ **D.** $x^4 - x^3 + 2x - 3$

7) Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3x^2 + 2$ và $f(1) = 8$ là

A. $6x$ **B.** $3x^2 + 2$ **C.** $x^3 + 2x + 5$ **D.** $x^3 + 5$

8) Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} + 3$ và $f(1) = 3$ là

A. $2 + \frac{1}{x}$ **B.** $x^2 + \frac{1}{x} + 1$ **C.** $2 + \frac{2}{x^3}$ **D.** $x^2 + \frac{1}{x} + 3x - 2$

9) Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 6$, $f'(1) = 0$ là

A. $x^2 + \frac{2}{x} + 3$ **B.** $2x^2 - \frac{1}{x^2} + 3$ **C.** $x^2 - \frac{1}{x} + 3$ **D.** $2x^2 + \frac{1}{x} - 3$

10) Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C$

B. Với mọi $k \neq 0$, ta có $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$

C. $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx = F(x).G(x) + C$

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

11) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ khi đó

A. $\int f(x)dx = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + C$ **B.** $\int f(x)dx = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = 1 - \dfrac{2}{x^3} + C$ **D.** $\int f(x)dx = x^2 - \dfrac{1}{x} + C$

12) Nếu $\int f(x)dx = \dfrac{2008}{x} + 2007\ln x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $\dfrac{2007x + 2008}{x^2}$ **B.** $\dfrac{2007x - 2008}{x^2}$

C. $2008\sqrt{x} + 2007\ln x$ **D.** $\dfrac{2007}{\ln x} - \dfrac{2008}{x^2}$

13) Nếu $\int f(x)dx = e^x + \sin^2 x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $e^x + 2\sin x$ **B.** $e^x - \sin 2x$ **C.** $e^x + \sin 2x$ **D.** $e^x + \cos^2 x$

14) Tìm $\int \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$ ta được

A. $x - \dfrac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$ **B.** $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{7}{6}} + C$ **C.** $x - 2\sqrt[6]{x^5} + C$ **D.** $-\dfrac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$

15) Tìm $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ta được

A. $-1 + C$ **B.** $\tan x - \cot x + C$

C. $-\tan x + \cot x + C$ **D.** $-\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} + C$

16) Tìm $\int (\sin^4 x - \cos^4 x)dx$ ta được

A. $\dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{\cos^5 x}{5} + C$ **B.** $4\sin^3 x - 4\cos^3 x + C$

C. $-\dfrac{\sin 2x}{2} + C$ **D.** $\dfrac{\sin 2x}{2} + C$

17) Tìm $\int (\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2})dx$ ta được

A. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C$ **B.** $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$

C. $\dfrac{3}{4}x - \dfrac{\sin 2x}{8} + C$ **D.** $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sin 2x}{8} + C$

18) Tìm $\int (\sin^6 x + \cos^6 x)dx$ ta được

A. $\dfrac{5}{8}x + \dfrac{3\sin 4x}{32} + C$ **B.** $\dfrac{5}{8} + \dfrac{3\cos 4x}{8} + C$

C. $\dfrac{5}{8}x - \dfrac{3\sin 4x}{32} + C$ **D.** $\dfrac{5}{8} - \dfrac{3\cos 4x}{8} + C$

19) Tìm $\int \sin x.\cos 2x dx$ ta được

A. $-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C$ **B.** $-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C$

C. $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C$ **D.** $\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C$

20) Tìm $\int \tan x\cos^2 x dx$ ta được

A. $\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **B.** $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **C.** $\frac{1}{2}\cos 2x+C$ **D.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

21) Tìm $\int(\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x)dx$ ta được

A. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$ **B.** $-\frac{1}{3}\sin 3x+C$ **C.** $\sin x+C$ **D.** $-\sin x+C$

22) Tìm $\int \tan^2 x dx$ ta được

A. $\frac{\tan^3 x}{3}+C$ **B.** $\tan x-x+C$ **C.** $2\tan x-x+C$ **D.** $\frac{2\tan x}{\cos x}+C$

23) Tìm $\int(2\tan x+\cot x)^2 dx$ ta được

A. $\frac{4\tan^3 x}{3}+\frac{\cot^3 x}{3}+4x+C$ **B.** $-4\tan x+\cot x-x+C$

C. $4\tan x+\cot x+4x+C$ **D.** $4\tan x-\cot x-x+C$

24) Tìm $\int\frac{\sin^2 x-8\cot^2 x}{\cos^2 x}dx$ ta được

A. $-\frac{1}{\cos x}-x+\frac{8}{\sin x}+C$ **B.** $\frac{\tan^3 x}{3}-\frac{8\sin^3 x}{3}+C$

C. $\tan x+8\cot x-x+C$ **D.** $-\tan x-8\cot x-x+C$

25) Tìm $\int \sin x.\sin 2x.\cos 5x dx$ ta được

A. $\frac{1}{10}\cos x\cos 2x\sin 5x+C$ **B.** $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 8x}{8}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$

C. $-10\cos x\cos 2x\sin 5x+C$ **D.** Một kết quả khác

26) Tìm $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$ ta được

A. $2x+\cot x+C$ **B.** $2x-\cot x+C$ **C.** $2x+\tan x+C$ **D.** $2x-\tan x+C$

27) Tìm $\int\frac{2^x+3^x}{4^x}dx$ ta được

A. $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}}+C$ **B.** $\frac{\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}}{\frac{4^x}{\ln 4}}+C$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x + C$

D. $\frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{4^x \ln 4} + C$

28) Tìm $\int (2x+1)^5 dx$ ta được

A. $\frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$

B. $\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C$

C. $(2x+1)^4 + C$

D. $5(2x+1)^4 + C$

29) Tìm $\int e^{2008x+2009} dx$ ta được

A. $e^{2008x+2009} + C$

B. $(2008x + 2009)e^{2008x+2009} + C$

C. $\frac{1}{2008} \cdot e^{2008x+2009} + C$

D. $\frac{1}{2009} \cdot e^{2008x+2009} + C$

30) Tìm $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$ ta được

A. $\ln(x^2 + 3x + 5) + C$

B. $\frac{1}{2} e^{x^2+3x+5} + C$

C. $\frac{x^2+3x}{2x+3} + C$

D. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$

31) Tìm $\int \frac{dx}{3x+1}$ ta được

A. $-\frac{3}{(3x+1)^2} + C$

B. $\frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$

C. $\ln|3x+1| + C$

D. $\ln(3x+1) + C$

32) Tìm $\int \frac{2x}{(x^2+9)^4} dx$ ta được

A. $-\frac{1}{(x^2+9)^3} + C$

B. $-\frac{1}{5(x^2+9)^5} + C$

C. $-\frac{4}{(x^2+9)^5} + C$

D. $-\frac{1}{3(x^2+9)^3} + C$

33) Tìm $\int x^2 \sqrt{x^3 + 2008}\, dx$ ta được

A. $x + 2008 + C$

B. $x^3 + 2008 + C$

C. $\frac{2\sqrt{(x^3+2008)^3}}{9} + C$

D. Một kết quả khác

34) Tìm $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2008}} dx$ ta được

A. $x^2 + 2008 + C$

B. $\sqrt{x^2 + 2008} + C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+2008}} + C.$

D. $\frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 2008} + C.$

35) Tìm $\int \frac{\ln x}{x} dx$ ta được

A. $\ln^2 x + C$ **B.** $\ln x + C$ **C.** $\frac{\ln^2 x}{2} + C$ **D.** $\frac{1}{\ln^2 x} + C$

36) Tìm $\int \frac{dx}{x \ln x}$ ta được

A. $\ln|\ln x| + C$ **B.** $-\frac{1}{\ln^2 x} + C$ **C.** $\ln|x| + C$ **D.** $-\ln|\ln x| + C$

37) Tìm $\int \frac{(\ln x + 2008)^2}{x} dx$ ta được

A. $\frac{2(\ln x + 2008)^3}{3x^2} + C$ **B.** $\frac{(\ln x + 2008)^3}{3} + C$

C. $(\ln x + 2008)^3 + C$ **D.** $\frac{\ln x + 2008}{3} + C$

38) Tìm $\int \sin x \cos^2 x \, dx$ ta được

A. $-2\cos x + C$ **B.** $-\cos x + C$ **C.** $\frac{\cos^4 x}{3} + C$ **D.** $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$

39) Tìm $\int (\tan x + e^{\sin x}) \cos x \, dx$ ta được

A. $\cos x + e^{\sin x} + C$ **B.** $-\cos x + e^{\sin x} + C$

C. $-\left(\frac{\tan^2 x}{2} + e^{\sin x}\right) \sin x + C$ **D.** $\left(\frac{\tan^2 x}{2} + e^{\sin x}\right) \sin x + C$

40) Tìm $\int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx$ ta được

A. $\ln(2 + \sin 2x) + C$ **B.** $-\ln(2 + \sin 2x) + C$

C. $\frac{-\sin 2x}{2(x - \sin x \cos x)} + C$ **D.** $\frac{\sin 2x}{2(x - \sin x \cos x)} + C$

41) Tìm $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$ ta được

A. $2\sqrt{\cos x} + C$ **B.** $-2\sqrt{\cos x} + C$ **C.** $-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} + C$ **D.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}} + C$

42) Tìm $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ta được

A. $2\sin\sqrt{x} + C$ **B.** $-2\sin\sqrt{x} + C$ **C.** $\frac{2\sin x}{3} + C$ **D.** $-\frac{2\sin x}{3} + C$

43) Tìm $\int \frac{dx}{\sin^2 x . \sqrt[4]{\cot x}}$ ta được

A. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\tan^3 x}+C$ **B.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}+C$ **C.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}+C$ **D.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\tan^3 x}+C$

44) Tìm $\int \frac{e^x}{e^x+2008}dx$ ta được

A. $\frac{1}{2008}+C$ **B.** $\ln(e^x+2008)+C$

C. $\frac{e^x}{e^x+2008x}+C$ **D.** Một kết quả khác

45) Tìm $\int e^{2008+\cos x}.\sin x\,dx$ ta được

A. $-e^{2008+\cos x}+C$ **B.** $(-\sin x).e^{2008+\cos x}+C$

C. $-\frac{e^{2008+\cos x}}{\sin x}+C$ **D.** $e^{2008+\cos x}.(-\cos x)+C$

46) Tìm $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ ta được

A. $-e^{\tan x}+C$ **B.** $e^{\tan x}+C$ **C.** $-e^{\cot x}+C$ **D.** $e^{\cot x}+C$

47) Tìm $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$ ta được

A. $-\tan(\ln x)+C$ **B.** $\tan(\ln x)+C$ **C.** $-\cot(\ln x)+C$ **D.** $\cot(\ln x)+C$

48) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

$\int \sin^2 x dx=\frac{\sin^3 x}{3}+C$ (I)

$\int \frac{4x+2}{x^2+x+3}dx=2\ln(x^2+x+3)+C$ (II)

$\int 3^x(2^x+3^{-x})dx=\frac{6^x}{\ln 6}+x+C$ (III)

A. Chỉ (I) **B.** Chỉ (II) **C.** Chỉ (III) **D.** Cả A, B vàC

49) Tìm $\int xe^x dx$ ta được

A. $(x-1)e^x+C$ **B.** $(-x+1)e^x+C$ **C.** $-(x+1)e^x+C$ **D.** $(x+1)e^x+C$

50) Tìm $\int x\cos x\,dx$ ta được

A. $\frac{x^2\sin x}{2}+C$ **B.** $-\frac{x^2\sin x}{2}+C$

C. $x\sin x-\cos x+C$ **D.** $x\sin x+\cos x+C$

51) Tìm $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ ta được

A. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$ **B.** $-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C$

C. $\frac{3\ln x}{2x^3}+C$ **D.** Một kết quả khác

52) Tìm $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ ta được

A. $\frac{\ln^2 x - 2\ln x - 2}{x} + C$ **B.** $-\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C$

C. $\frac{1}{x} + C$ **D.** $\frac{\ln x}{x} + C$

53) Cho F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn[a; b]. Phát biểu nào sau đây là **sai** ?

A. $\int_a^a f(x)dx = 0$ **B.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **D.** $\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(t)dt$

54) Cho $\int_1^2 f(x)dx = -3$. Tính $\int_1^2 [4 - 3f(x)]dx$ ta được

A. 9 **B.** 13 **C.** -5 **D.** 12

55) Giá trị nào của a để $\int_0^a (3x^2 + 2)dx = a^3 + 2$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

56) Cho $I = \int_1^{16} \sqrt{x}dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I < J$ **B.** $I > J$ **C.** $I = J$ **D.** $I > J > 1$

57) Cho $I = \int_0^1 \frac{dx}{3x+1}$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^4 x - \cos^4 x)dx$ và $K = \int_{-1}^2 (x^2 + 3x + 1)dx$.

Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{63}{6}$?

A. Chỉ I **B.** Chỉ J **C.** Chỉ K **D.** Chỉ J, K

58) Cho $I = \int_0^1 |3x - 1|dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

A. $I < 0$ **B.** $I > 1$ **C.** $0 < I < \frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{2} < I < 1$

59) Tích phân $\int_0^1 \left(|3x - 1| - 2|x|\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{11}{6}$

60) Tích phân $\int_1^3 \frac{2x-1}{x+1}dx$ bằng

A. $4 + 3\ln 2$ **B.** $4 - 3\ln 2$ **C.** 5 **D.** 2

61) Tích phân $\int_1^3 \frac{x^2-x+1}{x+3}dx$ bằng

A. $4+13\ln 2$ **B.** $-4+13\ln 3$ **C.** $-4+13\ln\frac{3}{2}$ **D.** $4+13\ln\frac{3}{2}$

62) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

63) Cho $I=\int_{-1}^{0}(2x-e^{-x})dx$, $J=\int_2^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$, $K=\int_0^{\pi}|\cos x|dx$ ta có:

A. $I<J<K$ **B.** $K<I<J$ **C.** $I<K<J$ **D.** $I=2J$

64) Cho $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$, $J=\int_0^1\sqrt{9x^2-6x+1}\,dx$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I<2J$ **B.** $I=3J$ **C.** $I+2J=5$ **D.** $5I=12J$.

65) Tích phân $\int_1^2 (x^4-1)^2 x^3 dx$ bằng

A. $\frac{3375}{4}$ **B.** $\frac{15}{2}$ **C.** $\frac{1125}{4}$ **D.** $\frac{1}{60}$

66) Tích phân $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2$ **B.** $-\frac{1}{12}$ **C.** $\ln 2$ **D.** $\frac{1}{12}$

67) Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ bằng

A. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ **D.** $-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

68) Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$ bằng

A. 3 **B.** 7 **C.** -5 **D.** -3

69) Tích phân $\int_0^1 x^7\sqrt{1+3x^4}\,dx$ bằng

A. $\frac{29}{135}$ **B.** $\frac{29}{153}$ **C.** $-\frac{29}{153}$ **D.** $-\frac{29}{135}$

70) Tích phân $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\sqrt{17}-\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{17}-\sqrt{2}}{2}$

71) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+3)^2\cos x dx$ bằng

A. 2 **B.** $\frac{37}{3}$ **C.** 37 **D.** $\frac{91}{3}$

72) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan^2 x+3)^2}{\cos^2 x}dx$ bằng

A. 16 **B.** 7 **C.** $\frac{26}{5}$ **D.** $\frac{56}{5}$

73) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1+\cos 2x}dx$ bằng

A. $-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$ **B.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

74) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$ bằng

A. $\ln\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{36}$ **C.** $-\frac{5}{36}$ **D.** $-\ln\frac{3}{2}$

75) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$ bằng

A. $1-\ln 2$ **B.** $1+\ln 2$ **C.** $\ln 2-1$ **D.** $\ln 2+3$

76) Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ bằng

A. $-\ln\sqrt{2}$ **B.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **C.** $-\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $\frac{1}{2}$

77) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)^3\sin 2x dx$ bằng

A. 15 **B.** 9 **C.** $\frac{15}{4}$ **D.** $-\frac{15}{4}$

78) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx$ bằng

A. $\ln\frac{4}{3}$ **B.** $-\ln\frac{4}{3}$ **C.** $2\ln\frac{3}{2}$ **D.** $2\ln\frac{5}{3}$

79) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$ bằng

A. $2\ln\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$ **B.** $2\ln\frac{3}{2}+\frac{10}{3}$ **C.** $2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$ **D.** $2\ln 6+\frac{10}{3}$.

80) Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2008}x}{\sin^{2008}x+\cos^{2008}x} dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2008}x}{\sin^{2008}x+\cos^{2008}x} dx$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I<J$ **B.** $I+J=\frac{\pi}{4}$ **C.** $I=J=\frac{3\pi}{4}$ **D.** $I+2J=\frac{3\pi}{4}$

81) Tích phân $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

82) Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ bằng

A. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

83) Tích phân $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}$ bằng

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

84) Tích phân $\int_1^e \frac{3+\ln^2 x}{x} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{10}{3}$ **C.** 2 **D.** 5

85) Tích phân $\int_1^e \frac{\ln x(1+\ln x)^2}{x} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $\frac{17}{12}$ **D.** $\frac{17}{3}$

86) Tích phân $\int_1^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

87) Tích phân $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $\frac{24}{9}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{161}{135}$

88) Tích phân $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$ bằng

A. $\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ **C.** $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ **D.** $2(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

89) Tích phân $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{2x} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** -1 **D.** 1

90) Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}\ln^2 3$ **B.** $\frac{1}{16}\ln^2 3$ **C.** $\frac{1}{2}\ln^2\sqrt{3}$ **D.** $\ln^2 3$

91) Tích phân $\int_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ bằng

A. sine **B.** $\sin 1$ **C.** $\frac{\text{sine}}{2}$ **D.** $\frac{\sin 1}{2}$

92) Tích phân $\int_{1}^{e^3} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ bằng

A. $\frac{38}{5}$ **B.** $\frac{76}{5}$ **C.** $\frac{38}{15}$ **D.** $\frac{8}{3}$

93) Tích phân $\int_{1}^{e} \frac{\ln^3\sqrt{x}+1}{x} dx$ bằng

A. $\frac{33}{32}$ **B.** $\frac{33}{16}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{33}{23}$

94) Tích phân $\int_{-1}^{0} \frac{x}{e^{-x^2+1}} dx$ bằng

A. $\frac{1-e}{e}$ **B.** $\frac{1-e}{2e}$ **C.** $-\frac{1}{2}\ln e^2$ **D.** -1

95) Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ bằng

A. $\ln\frac{7}{2}$ **B.** $\ln\frac{2}{3}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{2}{7}$

96) Tích phân $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx$ bằng

A. $\frac{20}{3}$ **B.** $\frac{10}{3}$ **C.** $\frac{40}{3}$ **D.** $\frac{50}{3}$

97) Tích phân $\int_0^{\ln 2}(e^x+2)^2e^x dx$ bằng

A. $\frac{73}{3}$ **B.** $\frac{37}{3}$ **C.** $\frac{91}{3}$ **D.** $\frac{64}{3}$

98) Tích phân $\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{(e^x+1)^3}}dx$ bằng

A. $\sqrt{2}-2$ **B.** $2-\sqrt{2}$ **C.** $1-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}-1$

99) Tích phân $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx$ bằng

A. $\frac{5}{36}$ **B.** $\frac{5}{72}$ **C.** $-\frac{5}{36}$ **D.** $-\frac{5}{72}$

100) Tích phân $\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ bằng

A. $\ln\frac{2(e^2+1)}{e}$ **B.** $\ln 2e(e^2+1)$ **C.** $\ln\frac{2e}{e^2+1}$ **D.** $\ln\frac{e^2+1}{2e}$

101) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$ bằng

A. $e-1+\frac{\pi}{4}$ **B.** $e-1-\frac{\pi}{4}$ **C.** $1-e+\frac{\pi}{4}$ **D.** $1-e-\frac{\pi}{4}$

102) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+e^{\sin x}.\cos x)dx$ bằng

A. $\ln\sqrt{2}-e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+1$ **B.** $\ln\sqrt{2}+e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **C.** $\ln\sqrt{2}+e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1$ **D.** $\ln\sqrt{2}-e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1$

103) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)\sin x dx$ bằng

A. 1 **B.** -1 **C.** 3 **D.** -3

104) Tích phân $\int_0^1(2x+1)e^x dx$ bằng

A. $e-1$ **B.** $e+1$ **C,** $5e-3$ **D.** $5e+1$

105) Tích phân $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ bằng

A. $\ln 2-2^{-1}$ **B.** $\ln 2-2$ **C.** $\ln 2+2^{-1}$ **D.** $2+\ln 2+3\sqrt{2}$

106) Tích phân $\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ bằng

A. $2\sqrt{e}-4$ **B.** $-(4+2\sqrt{e})$ **C.** $4+2\sqrt{e}$ **D.** $4-2\sqrt{e}$

107) Tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx$ bằng

A. $\frac{3}{16}+\frac{1}{8}\ln 2$ **B.** $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)$

C. $\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}$ **D.** $-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}+\ln 2\right)$

108) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^3 x)\sin x dx$ bằng

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

109) Cho $I_n=\int_1^e(\ln x)^n dx, n\in \mathbf{N}$. Hệ thức liên hệ giữa I_{n+1} và I_n là :

A. $I_{n+1}+(n+1)I_n=2e$ **B.** $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$

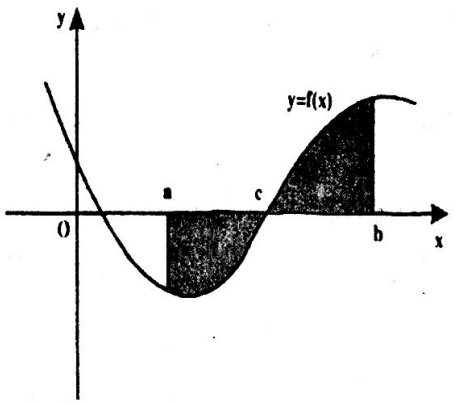
C. $I_n+(n+1)I_{n+1}=e$ **D.** $I_n+(n+1)I_{n+1}=2e$

110) Cho $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x dx, n\in \mathbf{N}^*$. Hệ thức liên hệ giữa I_{n+1} và I_n là :

A. $I_n+I_{n+1}=\frac{1}{2n}$ **B.** $I_n-I_{n+1}=\frac{1}{2n}$

C. $I_n+I_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$ **D.** $I_n-I_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$

111) Diện tích của hình phẳng tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào sau đây ?



A. $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

B. $S=\int_a^b f(x)dx$

C. $S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|-\left|\int_c^b f(x)dx\right|$

D. $S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$

112) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục hoành ?

A. $\frac{16}{15}$ (đvdt) **B.** $\frac{8}{15}$ (đvdt) **C.** $\frac{16}{5}$ (đvdt) **D.** $\frac{6}{15}$ (đvdt)

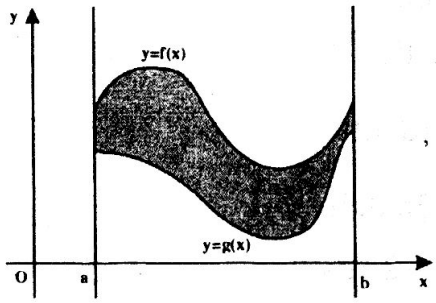
113) Diện tích của hình phẳng tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào sau đây ?

A. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

B. $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$

C. $S = \left|\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\right|$

D. Tất cả A, B và C



114) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = x^3$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1, x = 3$ bằng

A. $\frac{41}{2}$ (đvdt) **B.** $\frac{27}{2}$ (đvdt) **C.** $\frac{45}{2}$ (đvdt) **Đ.** $\frac{17}{3}$ (đvdt)

115) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$; $x = -1$; $x = 2$; $y = 0$ bằng

A. $\frac{7}{2}$ (đvdt) **B.** $\frac{8}{3}$ (đvdt) **C.** $\frac{11}{3}$ (đvdt) **D.** $\frac{9}{2}$ (đvdt)

116) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 2}$, tiệm cận xiên của (C) và các đường thẳng $x = -1$, $x = m$ $(m > -1)$. Tìm giá trị m để $S = 6$ (đvdt).

A. $e^6 - 4$ **B.** $e^6 - 3$ **C.** $e^6 - 2$ **D.** $e^6 - 1$

117) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = -x^2 + 2$ và đường thẳng $y = x$ bằng

A. $\frac{10}{3}$ (đvdt) **B.** $\frac{9}{2}$ (đvdt) **C.** $\frac{11}{2}$ (đvdt) **D.** $\frac{17}{3}$ (đvdt)

118) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 4 - x$ và trục tung bằng

A. $\frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 3}$ (đvdt) **B.** $\frac{7}{2} - \frac{1}{\ln 3}$ (đvdt) **C.** $\frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$ (đvdt) **D.** $1 - \frac{2}{\ln 3}$ (đvdt)

119) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = x^2$ và đường thẳng $y = -x + 2$ bằng

A. 7 (đvdt) **B.** 11 (đvdt)

C. $\frac{13}{2}$ (đvdt) **D.** Một kết quả khác.

120) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các đường $y = x^2 - 2$, $y = |x| + 4$ bằng

A. 27 (đvdt) **B.** 17 (đvdt) **C.** 37 (đvdt) **D.** 47 (đvdt)

121) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P): $y = x^2 - 2x + 3$ và hai tiếp tuyến của (P) tại A(0; 3) và B(3; 6) bằng

A. $\frac{7}{2}$ (đvdt) **B.** $\frac{9}{4}$ (đvdt) **C.** $\frac{9}{2}$ (đvdt) **D.** $\frac{17}{4}$ (đvdt)

122) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin|x|, y = |x| - \pi$?

A. $\pi^2 - 2$ (đvdt) **B.** $\pi^2 - 4$ (đvdt)

C. $4 + \pi^2$ (đvdt) **D.** $5 + \pi^2$ (đvdt)

123) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + \sin^2 x$ và $y = x\ (0 \le x \le \pi)$ bằng

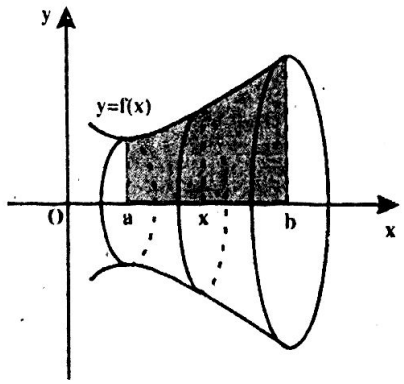
A. $\frac{11\pi}{2}$ (đvdt) **B.** $\frac{3\pi}{2}$ (đvdt) **C.** $\frac{\pi}{4}$ (đvdt) **D.** $\frac{\pi}{2}$ (đvdt)

124) Diện tích của tam giác cong giới hạn bởi các đường $x = 1; x = e; y = 0$ và $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ bằng

A. $2 - \sqrt{e}$ (đvdt) **B.** $3 - \sqrt{e}$ (đvdt)

C. $2 + \sqrt{e}$ (đvdt) **D.** $\frac{2\sqrt{e}}{3}$ (đvdt)

125) Cho hình thang cong trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành; thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào sau đây ?



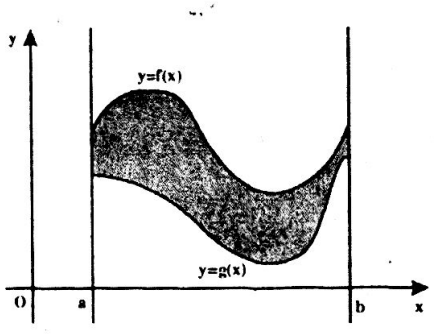
A. $V = \int_a^b f(x)dx$

B. $V = \int_a^b f^2(x)dx$

C. $V = \pi\int_a^b f(x)dx$

D. $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

126) Cho hình phẳng trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành, thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào sau đây ?



A. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

B. $V = \pi\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

C. $V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

D. $V = \pi\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx$

27) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đường $y = 3x - x^2$ và trục hoành bằng

A. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt) **B.** $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt) **C.** $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt) **D.** $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt)

128) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đường $y^2 = 4x$ và $x = 4$ bằng

A. 74π (đvtt) **B.** 64π (đvtt) **C.** $\frac{19\pi}{3}$ (đvtt) **D.** $\frac{9\pi}{2}$ (đvtt)

129) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \frac{x^3}{3}$ và $y = x^2$ bằng

A. $\frac{436\pi}{35}$ (đvtt) **B.** $\frac{468\pi}{35}$ (đvtt) **C.** $\frac{486\pi}{35}$ (đvtt) **D.** $\frac{9\pi}{2}$ (đvtt)

130) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho đường $x^2 + (y-1)^2 = 1$ quay quanh trục hoành bằng

A. $8\pi^2$ (đvtt) **B.** $6\pi^2$ (đvtt) **C.** $4\pi^2$ (đvtt) **D.** $2\pi^2$(đvtt)

D. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

1) Chọn A. Ta có: $\int(1-x+x^2)dx = \int dx - \int xdx + \int x^2dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + C.$

2) Chọn C. Ta có: $\int\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

3) Chọn B. Ta có: $(\cos x + x\sin x + C)' = -\sin x + x'\sin x + x(\sin x)' = x\cos x.$

4) Chọn C. Ta có: $(e^x + \tan x + C)' = e^x + \frac{1}{\cos^2 x} = e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right).$

5) Chọn B. Vì $f(x) = \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ nên một nguyên hàm của f(x) là $-\frac{1}{4}\cos 2x$

6) Chọn A

Thấy $y = x^4 - x^3 + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ nên $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + C$. Vì $F(-1) = 3$ nên $C = 3$

7) Chọn C. Ta có: $f(x) = x^3 + 2x + C$. Vì $f(1) = 8$ nên $C = 5$

8) Chọn D. Ta có: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3x + C$. Vì $f(1) = 3$ nên $C = -2$

9) Chọn A . Ta có: $f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c$, $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$

Giải hệ: $\begin{cases} f(-1)=2 \\ f(1)=6 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+b+c=2 \\ \frac{a}{2}-b+c=6,\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$

Vậy $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+3.$

10) Chọn C

11) Chọn A

12) Chọn B $f(x)=\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\frac{2008}{x}+2007\ln x+C\right)'=-\frac{2008}{x^2}+\frac{2007}{x}=\frac{2007x-200}{x^2}$

13) Chọn C. $f(x)=\left(\int f(x)dx\right)'=(e^x+\sin^2x+C)'=(e^x)'+(\sin^2x)'=e^x+\sin 2x.$

14) Chọn A

Ta có: $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\left(1-2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)dx=\int dx-2\int x^{-\frac{1}{6}}dx=x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+C.$

15) Chọn B. $\int\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\tan x-\cot x+C.$

16) Chọn C

. $\int(\sin^4x-\cos^4x)dx=\int(\sin^2x-\cos^2x)dx=-\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$

17) Chọn D

. $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2}\sin^2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 2x$

. $\int\left(\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}\right)dx=\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

18) Chọn A .. $\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

. $\int(\sin^6x+\cos^6x)dx=\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x+C.$

19) Chọn A . $\sin x.\cos 2x=\frac{1}{2}[\sin 3x+\sin(-x)]=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$

. $\int\sin x.\cos 3xdx=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C.$

20) Chọn B. $\int\tan x\cos^2xdx=\int\sin x.\cos xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

21) Chọn C

$\int(\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x)dx=\int\cos(2x-x)dx=\int\cos xdx=\sin x+C.$

22) Chọn B. $\int\tan^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int dx=\tan x-x+C.$

23) Chọn D . $(2\tan x+\cot x)^2=4\tan^2x+\cot^2x+4=4\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)+\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right)+4$

. $\int(2\tan x+\cot x)^2dx=4\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int dx=4\tan x-\cot x-x+C.$

24) Chọn C. $\int\frac{\sin^2x-8\cot^2x}{\cos^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1-\frac{8}{\sin^2x}\right)dx=\tan x-x+8\cot x+C.$

25) Chọn D

. $\sin x.\cos5x.\sin2x=\frac{1}{2}(\sin6x-\sin4x)\sin2x=\frac{1}{2}(\sin6x\sin2x-\sin4x\sin2x)$

$=\frac{1}{4}(\cos4x-\cos8x-\cos2x+\cos6x)$

. $\int\sin x.\sin2x.\cos5xdx=\frac{1}{8}\left(\frac{\sin4x}{2}-\frac{\sin8x}{4}-\sin2x+\frac{\sin6x}{3}\right)+C.$

26) Chọn D. $\int\frac{\cos2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{2\cos^2x-1}{\cos^2x}dx=2\int dx-\int\frac{dx}{\cos^2x}=2x-\tan x+C.$

27) Chọn A. $\int\frac{2^x+3^x}{4^x}dx=\int\left(\frac{1}{2}\right)^xdx+\int\left(\frac{3}{4}\right)^xdx=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}}+C.$

28) Chọn A

Cách 1 . Đặt $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$

. $\int(2x+1)^5dx=\frac{1}{2}\int u^5du=\frac{u^6}{12}+C=\frac{(2x+1)^6}{12}+C.$

Cách 2 . $\int(2x+1)^5dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^5d(2x+1)=\frac{(2x+1)^6}{12}+C.$

Cách 3 . $\int(2x+1)^5dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)'(2x+1)^5dx=\int\left[\frac{(2x+1)^6}{12}\right]'dx=\frac{(2x+1)^6}{12}+C$

Chú ý: Ta có thể học nhớ $\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (a\neq0,\alpha\neq-1)$

29) Chọn C . Đặt $u=2008x+2009\Rightarrow du=2008dx$

. Ta có: $\int e^{2008x+2009}dx=\frac{1}{2008}\int e^udu=\frac{1}{2008}e^u+C=\frac{1}{2008}e^{2008x+2009}+C.$

Chú ý: Ta có thể học nhớ $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C\ \ (a\neq0)$

30) Chọn A

. Đặt $u=x^2+3x+5\Rightarrow du=(2x+3)dx$

. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|x^2+3x+5|+C=\ln(x^2+3x+5)+C.$

31) Chọn B

Cách 1 . Đặt $u = 3x + 1 \Rightarrow du = 3dx$

. Ta có: $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C.$

Cách 2 $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C.$

Chú ý: Ta có thể học nhớ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0)$

32) Chọn D

. Đặt $u = x^2 + 9 \Rightarrow du = 2xdx$

. Ta có: $\int \frac{2x}{(x^2+9)^4} dx = \int \frac{du}{u^4} = \int u^{-4} du = -\frac{1}{3u^3} + C = -\frac{1}{3(x^2+9)^3} + C.$

33) Chọn C . Đặt $u = x^3 + 2008 \Rightarrow du = 3x^2 dx$

. $\int x^2\sqrt{x^3+2008}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+2008)^{\frac{3}{2}} + C.$

34) Chọn B . Đặt $u = x^2 + 2008 \Rightarrow du = 2xdx$

. Ta có: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2008}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+2008} + C.$

35) Chọn C

Cách 1 . Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

. Ta có: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Cách 2 $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

36) Chọn A

Cách 1 . Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

. Ta có: $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$

Cách 2 . $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

37) Chọn B . Đặt $u = \ln x + 2008 \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

. Ta có: $\int \frac{(\ln x + 2008)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x + 2008)^3}{3} + C.$

38) Chọn D. $\int \sin x\cos^2 x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$

39) Chọn B. $\int (\tan x + e^{\sin x})\cos x dx = \int \sin x dx + \int e^{\sin x} d(\sin x) = -\cos x + e^{\sin x} + C.$

40) Chọn A

Cách 1 . Đặt $u = 1 + \sin x\cos x = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow du = \cos 2x dx$

. Ta có: $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln|2+\sin 2x| - \ln 2 + C_1$

Cách 2. $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx = \int \frac{2\cos 2x}{2+\sin 2x}dx = \int \frac{d(2+\sin 2x)}{2+\sin 2x} = \ln(2+\sin 2x) + C$

41) Chọn B. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x} + C.$

42) Chọn A. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}\, d(\sqrt{x}) = 2\sin\sqrt{x} + C.$

43) Chọn C. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cot x}} = -\int \cot^{-\frac{1}{4}} x\, d(\cot x) = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x} + C.$

44) Chọn B. $\int \frac{e^x}{e^x+2008}dx = \int \frac{d(e^x+2008)}{e^x+2008} = \ln|e^x+2008| + C = \ln(e^x+2008) + C.$

45) Chọn A. $\int e^{2008+\cos x}.\sin x dx = -\int e^{2008+\cos x} d(2008+\cos x) = -e^{2008+\cos x} + C.$

46) Chọn B. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = e^{\tan x} + C.$

47) Chọn C. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\sin^2(\ln x)} = -\cot(\ln x) + C.$

48) Chọn A

49) Chọn A. (Xem lại bài giải bài tập căn bản Bài 6a)

50) Chọn D. (Xem lại bài giải câu 3)

51) Chọn A. Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có: $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$

52) Chọn B . Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\frac{\ln x}{x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có: $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C.$

(kết quả câu 51.)

53) Chọn D

54) Chọn B. $\int_1^2 [4 - 3f(x)]dx = 4\int_1^2 dx - 3\int_1^2 f(x)dx = 4(2-1) - 3(-3) = 13.$

55) Chọn A . $\int_0^a (3x^2+2)dx = 3\int_0^a x^2dx + 2\int_0^a dx = (x^3+2x)\Big|_0^a = a^3+2a$

. $\int_0^a (3x^2+2)dx = a^3+2 \Leftrightarrow a^3+2a = a^3+2 \Leftrightarrow a = 1.$

56) Chọn B . $I = \int_1^{16} \sqrt{x}dx = \int_1^{16} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^{16} = 42;$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

. Thấy $I > J$

57) Chọn C. $K = \int_{-1}^{2} x^2dx + 3\int_{-1}^{2} xdx + \int_{-1}^{2} dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{63}{6}.$

58) Chọn D.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{1}{3}} (-3x+1)dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} (3x-1)dx = \left(-\frac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{5}{6}.$

59) Chọn A. $I = \int_0^1 |-3x+1|dx - 2\int_0^1 |x|dx = \frac{5}{6} - x^2\Big|_0^1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}.$

60) Chọn B. $\int_1^3 \frac{2x-1}{x+1}dx = \int_1^3 \left(2 - \frac{3}{x+1}\right)dx = \left(2x - 3\ln|x+1|\right)\Big|_1^3 = 4 - 3\ln 2.$

61) Chọn C $\int_1^3 \frac{x^2-x+1}{x+3}dx = \int_1^3 \left(x - 4 + \frac{13}{x+3}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 13\ln|x+3|\right)\Big|_1^3 = 13\ln\frac{3}{2} - 4.$

62) Chọn B . $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$

. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

63) Chọn C

Ta tính các tích phân :

. $I = (x^2 + e^{-x})\Big|_{-1}^{0} = -e.$

. $J = \int_2^3 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_2^3 x^2dx + 2\int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{dx}{x^2} = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right)\Big|_2^3 = \frac{41}{6}.$

. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 2.$

. So sánh các giá trị thấy $I < K < J$

64) Chọn D . $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=2$ (kết quả câu 63)

. $J=\int_0^1\sqrt{(3x-1)^2}dx=\int_0^1|3x-1|dx=\frac{5}{6}$ (kết quả câu 58)

. Thấy $5I=12J$.

65) Chọn C . Đặt $u=x^4-1\Rightarrow du=4x^3dx$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=0$; với $x=2$ thì $u=15$

. Ta có: $\int_1^2(x^4-1)^2x^3dx=\frac{1}{4}\int_0^{15}u^2du=\frac{u^3}{12}\Big|_0^{15}=\frac{1125}{4}$.

66) Chọn A . Đặt $u=x^3+1\Rightarrow du=3x^2dx$

. Đổi cận: Với $x=0$ thì $u=1$; với $x=1$ thì $u=2$

. Ta có: $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\ln|u|\Big|_1^2=\frac{1}{3}\ln 2$.

67) Chọn B . Đặt $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$

. Đổi cận : Với $x=1$ thì $u=3$; với $x=2$ thì $u=5$

. Ta có: $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}\int_3^5\frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}\Big|_3^5=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

68) Chọn B . Đặt $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{du}{2}$

. Đổi cận: Với $x=0$ thì $u=1$; với $x=\sqrt{3}$ thì $u=4$

. Ta có: $\int_0^{\sqrt{3}}3x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\int_1^4\sqrt{u}du=u\sqrt{u}\Big|_1^4=7$.

69) Chọn A . Đặt $u=\sqrt{1+3x^4}\Rightarrow u^2=1+3x^4\Rightarrow 2udu=12x^3dx$

. Đổi cận: Với $x=0$ thì $u=1$; với $x=1$ thì $u=2$

. Ta có: $\int_0^1x^7\sqrt{1+3x^4}dx=\frac{1}{18}\int_1^2(u^4-u^2)du=\frac{1}{18}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{29}{135}$.

70) Chọn D . Đặt $u=x^4+1\Rightarrow du=4x^3dx$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=2$; với $x=2$ thì $u=17$

. Ta có: $\int_1^2\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx=\frac{1}{4}\int_2^{17}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\sqrt{u}\Big|_2^{17}=\frac{\sqrt{17}-\sqrt{2}}{2}$.

71) Chọn B

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+3)^2\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+3)^2d(\sin x+3)=\frac{(\sin x+3)^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{37}{3}$.

72) Chọn D . Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

. Đổi cận: Với $x = 0$ thì $u = 0$; với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = 1$

. Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2 x + 3)^2}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 (u^2 + 3)^2 du = \int_0^1 (u^4 + 6u^2 + 9) du$

$$= \left(\frac{u^5}{5} + 2u^3 + 9u \right) \Big|_0^1 = \frac{56}{5}$$

73) Chọn D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + \cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}.$

74) Chọn A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2 + \sin x)}{2 + \sin x} = \ln|2 + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{3}{2}.$

75) Chọn B . Đặt $u = \cos^2 x \Rightarrow du = -\sin 2x dx$

. Đổi cận: Với $x = 0$ thì $u = 1$; với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = \dfrac{1}{2}$

. Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} = (\tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln|u| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 1 + \ln 2.$

76) Chọn B

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

77) Chọn C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 x)^3 \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 x)^3 d(1 + \sin^2 x) = \frac{(1 + \sin^2 x)^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{4}.$

78) Chọn A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(4 - \cos^2 x)}{4 - \cos^2 x} = \ln|4 - \cos^2 x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{4}{3}.$

79) Chọn C . Đặt $u = 2 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

. Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int_2^3 \frac{2(u - 2)}{u^2} du = \left(2\ln|u| + \frac{4}{u} \right) \Big|_2^3 = 2\ln \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

80) Chọn D . Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$

. Đổi cận: Với $x = 0$ thì $u = \dfrac{\pi}{2}$; với $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $u = 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2008}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2008}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2008}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}(-du)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2008}u}{\cos^{2008}u+\sin^{2008}u}du=J$$

Mà $I+I=I+J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}du=u\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I+2J=\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

81) Chọn C. Xem lại bài giải bài tập căn bản Bài 15b.

82) Chọn B

. Đặt $x=\tan u\left(u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow dx=\frac{du}{\cos^2u}=(1+\tan^2u)du$

. Ta có: $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2u)du}{(\tan^2u+1)^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2udu=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2u)du$

$$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin2u\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

83) Chọn A. Cách giải tương tự câu 82.

84) Chọn B . Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=0$; với $x=e$ thì $u=1$

. Ta có: $\int_{1}^{e}\frac{3+\ln^2x}{x}dx=\int_{0}^{1}(3+u^2)du=\left(3u+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{10}{3}.$

85) Chọn C . Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=0$; với $x=e$ thì $u=1$

. Ta có: $\int_{1}^{e}\frac{\ln x(1+\ln x)^2}{x}dx=\int_{0}^{1}u(1+u)^2du=\left(\frac{u^4}{4}+\frac{2}{3}u^3+\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{17}{12}$

86) Chọn B . Đặt $u=\ln\sqrt{x}\Rightarrow du=\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2x}dx$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=0$; với $x=e^2$ thì $u=1$

. Ta có: $\int_{1}^{e^2}\frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx=2\int_{0}^{1}udu=u^2\Big|_{0}^{1}=1.$

87) Chọn A . Đặt $u=1+3\ln x\Rightarrow du=\frac{3}{x}dx$

. Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=1$; với $x=e$ thì $u=4$

. Ta có: $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx=\frac{1}{3}\int_{1}^{4}\sqrt{u}du=\frac{1}{3}\int_{1}^{4}u^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{4}=\frac{14}{9}.$

88) Chọn C . Đặt $u = 2 + \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

. Đổi cận: Với $x = 1$ thì $u = 2$; với $x = e^3$ thì $u = 5$

. Ta có: $\int\limits_1^{e^3} \dfrac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}} = \int\limits_2^5 \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\Big|_2^5 = 2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

89) Chọn A . Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

. Đổi cận: Với $x = 1$ thì $u = 0$; với $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ thì $u = \dfrac{\pi}{2}$

. Ta có: $\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \dfrac{\cos(\ln x)}{2x} dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \dfrac{1}{2}\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

90) Chọn B . Đặt $u = \ln(\tan x) \Rightarrow du = \dfrac{(\tan x)'}{\tan x} dx = \dfrac{1}{\cos^2 x.\ \tan x} dx = \dfrac{2dx}{\sin 2x}$

.. Đổi cận: Với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = 0$; với $x = \dfrac{\pi}{3}$ thì $u = \ln\sqrt{3}$

. Ta có: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}} u du = \dfrac{u^2}{4}\Big|_0^{\ln\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}\ln^2\sqrt{3} = \dfrac{1}{16}\ln^2 3$.

91) Chọn B. $\int\limits_1^e \dfrac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int\limits_1^e \cos(\ln x) d(\ln x) = \sin(\ln x)\Big|_1^e = \sin 1$.

92) Chọn D . Đặt $u = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow u^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2udu = \dfrac{dx}{x}$

. Đổi cận: Với $x = 1$ thì $u = 1$; với $x = e^3$ thì $u = 2$

. Ta có: $\int\limits_1^{e^3} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = 2\int\limits_1^2 (u^2 - 1) du = 2\left(\dfrac{u^3}{3} - u\right)\Big|_1^2 = \dfrac{8}{3}$.

93) Chọn A . Đặt $u = \ln\sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} dx = \dfrac{1}{2x} dx$

. Đổi cận: Với $x = 1$ thì $u = 0$; với $x =$ thì $u = \dfrac{1}{2}$

. Ta có: $\int\limits_1^e \dfrac{\ln^3\sqrt{x} + 1}{x} dx = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (u^3 + 1) du = 2\left(\dfrac{u^4}{4} + u\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{33}{32}$.

94) Chọn B . Đặt $u = e^{-x^2+1} \Rightarrow du = -2xe^{-x^2+1} dx$

. Đổi cận: Với $x = -1$ thì $u = 1$; với $x = 0$ thì $u = e$

. Ta có: $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{x}{e^{-x^2+1}} dx = -\dfrac{1}{2}\int\limits_1^e \dfrac{du}{u^2} = \dfrac{1}{2u}\Big|_1^e = \dfrac{1-e}{2e}$.

95) Chọn C . Ta có: $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{(e^x)^2-3e^x+2}$

. Đặt $u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$

. Đổi cận : Với $x=\ln 3$ thì $u=3$; với $x=\ln 5$ thì $u=5$

. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{(e^x)^2-3e^x+2}=\int\limits_3^5\frac{du}{u^2-3u+2}=\int\limits_3^5\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u-1}\right)du=\ln\left|\frac{u-2}{u-1}\right|\Big|_3^5=\ln\frac{3}{2}.$

96) Chọn A . Đặt $u=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow u^2=e^x-1\Rightarrow 2udu=e^x dx$

. Đổi cận: Với $x=\ln 2$ thì $u=1$; với $x=\ln 5$ thì $u=2$

. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\limits_1^2\frac{(u^2+1)2u}{u}du=2\int\limits_1^2 u^2du+2\int\limits_1^2 du=2\left(\frac{u^3}{3}+u\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}.$

97) Chọn B. $\int\limits_0^{\ln 2}(e^x+2)^2e^x dx=\int\limits_0^{\ln 2}(e^x+2)^2d(e^x+2)=\frac{(e^x+2)^3}{3}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{37}{3}.$

98) Chọn D. $\int\limits_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{(e^x+1)^3}}dx=\int\limits_0^{\ln 3}(e^x+1)^{-\frac{3}{2}}d(e^x+1)=-2(e^x+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\ln 3}=\sqrt{2}-1.$

99) Chọn B. $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx=\int\limits_0^{\ln 2}(e^x+1)^{-3}d(e^x+1)=-\frac{1}{2(e^x+1)^2}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{5}{72}.$

100) Chọn D. $\int\limits_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\limits_0^1\frac{d(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=\ln(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=\ln\frac{e^2+1}{2e}$

101) Chọn A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}d(\sin x)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$

$=e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e-1+\frac{\pi}{4}.$

102) Chọn C. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+e^{\sin x}.\cos x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\sin x}.\cos x dx$

$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos x}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\sin x}d(\sin x)=\left(-\ln|\cos x|+e^{\sin x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1$

$=-\ln 2^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1=\ln\sqrt{2}+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1.$

103) Chọn C. *Phương pháp tích phân từng phần* $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$

Đặt $\begin{cases}u=2x+1\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=-\cos x\end{cases}$

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 1 + 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3.$

104) Chọn B. Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

Ta có: $\int_0^1 (2x+1)\, e^x dx = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = \left[(2x+1)e^x - 2e^x\right]\Big|_0^1 = e+1$

105) Chọn A. Đặt $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$. Ta có: $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln t dt$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$

Do đó: $\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t dt = \frac{t\ln t}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 dt = \left(\frac{t\ln t}{2} - \frac{t}{2}\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

106) Chọn D. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$

Ta có: $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx = (2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x})\Big|_1^e = 4 - 2\sqrt{e}.$

107) Chọn B. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$

Ta có: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx = \left(-\frac{\ln x}{2x^2}\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 x^{-3} dx = \left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{16} - \frac{\ln 2}{8}.$

108) Chọn C. Xem lại bài giải bài tập căn bản Bài 13a.

109) chọn B. Xét $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$; đặt $\begin{cases} u = (\ln x)^{n+1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1).\ln^n x.\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

$I_{n+1} = x(\ln x)^{n+1}\Big|_1^e - (n+1)\int_1^e \ln^n x dx = e - (n+1)I_n$ hay $I_{n+1} + (n+1)I_n = e.$

110) Chọn C. $I_n + I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x(1+\tan^2 x)dx$

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1+\tan^2 x)dx$

Đổi cận: Với $x = 0$ thì $u = 0$; với $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = 1$

Do đó: $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 u^{2n} du = \frac{u^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$

111) Chọn D

112) Chọn A. Tương tự cách giải bài tập căn bản Bài 19.

113) Chọn D

114) Chọn A. $S = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{3} x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{3} = \frac{41}{2}$ (đvdt)

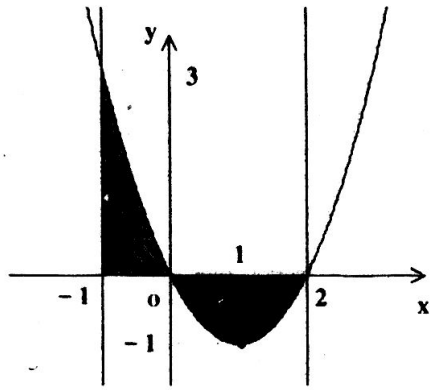
115) Chọn B

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(-x^2 + 2x)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} \text{ (đvdt)}$$



116) Chọn C. Đồ thị (C) của hàm số đã cho có tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^{m}\left[\frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} - (2x + 1)\right]dx = \int_{-1}^{m}\left[2x + 1 + \frac{1}{x + 2} - (2x + 1)\right]dx = \int_{-1}^{m}\frac{dx}{x + 2}$$

$$= \ln|x + 2|\Big|_{-1}^{m} = \ln|m + 2| \quad \text{(đvdt)}$$

Mà $S = 6$ nên $\ln|m + 2| = 6 \Leftrightarrow |m + 2| = e^6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = e^6 - 2 \\ m = -e^6 - 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

117) Chọn B. • Phương trình hoành độ giao điểm của

$$y = -x^2 + 2 \text{ và } y = x \text{ là : } -x^2 + 2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

• Diện tích hình phẳng cần tính là:

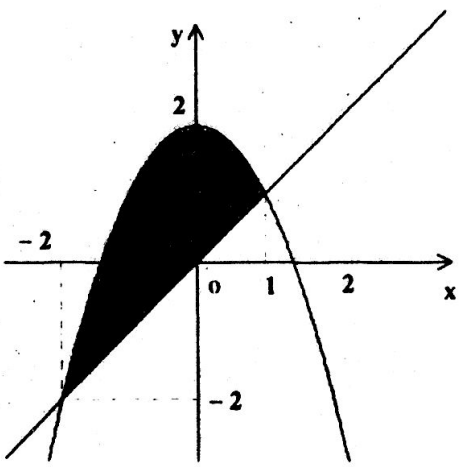
• Phương trình hoành độ giao điểm của $y = -x^2 + 2$ và $y = x$ là :

$-x^2 + 2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

• Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-2}^{1}(-x^2 + 2 - x)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{(đvdt)}$$

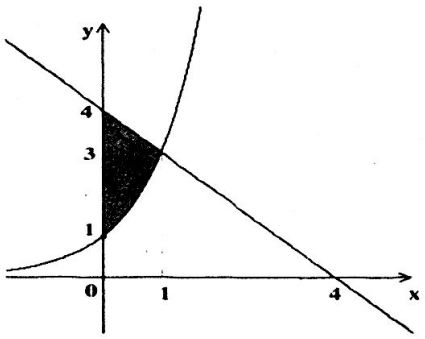


118) Chọn C

. Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 3^x$ và $y = 4 - x$ là $3^x = 4 - x$

$\Leftrightarrow x = 1$

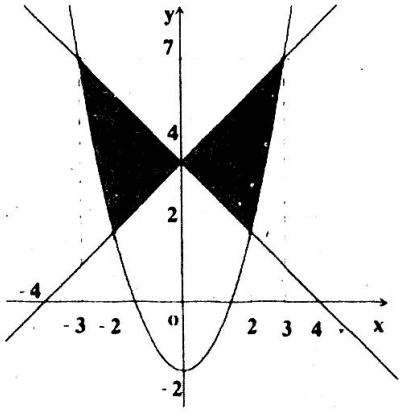
(Vì $f(x) = 3^x$ là hàm số tăng trên **R**, $g(x) = 4 - x$ là hàm số giảm)



. Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^1 (4 - x - 3^x)dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3} \text{ (đvdt)}$$

119) Chọn D. Tương tự cách giải câu 117.



120) Chọn A

. Phương trình hoành độ giao điểm $y = x^2 - 2$ và $y = x + 4$ $(x \geq 0)$ là :

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$ (loại)

. Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = 2\int_0^3 (x + 4 - x^2 + 2)dx$$

$$= 2\int_0^3 (-x^2 + x + 6)dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_0^3 = 27 \text{ (đvdt)}$$

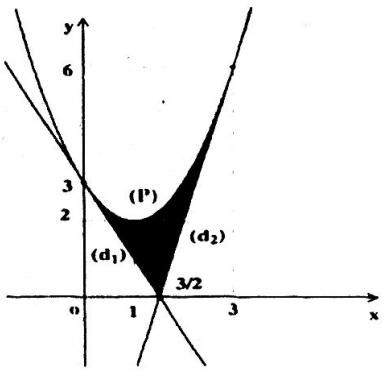
121) Chọn B . $y' = 2x - 2$

. Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A, B lần lượt là

(Nhắc lại : Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$)

$(d_1) : y = y'(0)(x - 0) + 3 = -2x + 3$

$(d_2) : y = y'(3)(x - 3) + 6 = 4x - 6$



. Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là :

$$-2x + 3 = 4x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

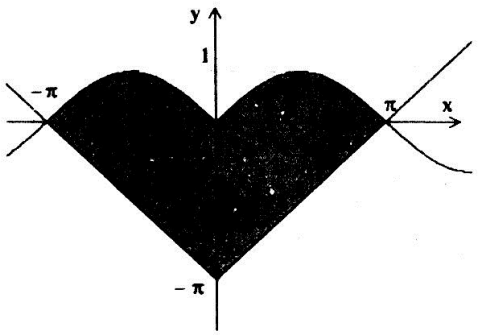
. Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x + 3)dx - \int_{\frac{3}{2}}^3 (4x - 6)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_0^3 + (x^2 - 3x)\Big|_0^{\frac{3}{2}} + (6x - 2x^2)\Big|_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{9}{4} \text{ (đvdt).}$$

122) Chọn C

Do tính đối xứng nên diện tích hình phẳng cần tính là



$$S = 2\int_0^{\pi}(\sin x - x + \pi)dx$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x dx - 2\int_0^{\pi} x dx + 2\pi\int_0^{\pi} dx$$

$$= \left(-2\cos x - x^2 + 2\pi\right)\Big|_0^{\pi} = 4 + \pi^2 \text{ (đvdt)}$$

123) Chọn D. Với $\forall x \in [0;\pi] \Rightarrow x \le x + \sin^2 x$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_0^{\pi}(x + \sin^2 x - x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ (đvdt)}$$

124) Chọn A. Với $\forall x \in [1;e] \Rightarrow y = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} \ge 0$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_1^e \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$

Ta được: $S = \sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x})\Big|_1^e = 2 - \sqrt{e}$ (đvdt)

125) Chọn D **126) Chọn C**

127) Chọn A. Tương tự cách giải Bài tập căn bản 26a.

128) Chọn B. $V = 2\pi\int_0^4 (2\sqrt{x})^2 dx = 8\pi\int_0^4 x dx = 4\pi x^2\Big|_0^4 = 64\pi$ (đvtt)

129) Chọn C. Phương trình hoành độ giao điểm của $y = \dfrac{x^3}{3}$, $y = x^2$ là:

$$\frac{x^3}{3} = x^2 \Leftrightarrow x^2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Ta có: $x^2 \ge \dfrac{x^3}{3}$, $\forall x \in [0;3]$

$$V = \pi\int_0^3 \left(x^4 - \frac{x^6}{9}\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{63}\right)\Big|_0^3 = \frac{486\pi}{35} \text{ (đvtt) (xem câu 126)}$$

130) Chọn D. $x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$

. Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2\right]dx = 4\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}dx = 2\pi^2 \text{(đvtt)}$$

$\left(\text{Xem lại Bài tập căn bản 15b) ta có kết quả } \int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}dx = \dfrac{\pi}{2}\right)$

Chương IV SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

1. Định nghĩa số phức

Xét tập hợp $\mathbf{C} = \{ a + bi / a, b \in \mathbf{R};\ i^2 = -1 \}$

Mỗi phần tử $z = a + bi \in \mathbf{C}$ được gọi là một số phức

. a được gọi là phần thực của z

. b được gọi là phần ảo của z

. i được gọi là đơn vị ảo

Chú ý :

- Mỗi số thực a được coi là một số phức có phần ảo bằng 0, tức là $z = a + 0i = a \in \mathbf{R}$
- Số phức có phần thực bằng 0 gọi là số ảo (còn gọi là số thuần ảo) : $z = 0 + bi,\ b \in \mathbf{R}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i\ (a, b, a', b' \in \mathbf{R})$

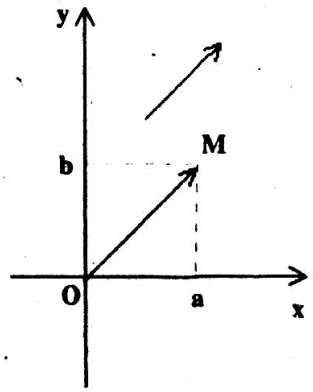
Ta có: $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học của số phức

. Số phức z = a+bi (a, b$\in$**R**) được biểu diễn điểm M(a; b) hay bởi $\vec{u}(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy (mặt phẳng phức).

. Độ dài của $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$

Ta thấy $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



4. Số phức đối nhau

Cho số phức z = a+bi (a, b$\in$**R**). Ta gọi $-a-bi$ là số phức đối của z và kí hiệu $-z = -a - bi$.

5. Số phức liên hợp

Cho số phức z = a+bi (a, b$\in$**R**). Ta gọi $a-bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu $\overline{z} = a - bi$.

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

1. Cộng, trừ số phức

Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i\ (a, b, a', b' \in \mathbf{R})$

Ta có: $z + z' = (a + a') + (b + b')i$; $z - z' = (a - a') + (b - b')i$

2. Nhân hai số phức

Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbf{R})$

Ta có: $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

3. Chia hai số phức

. Số nghịch đảo của số phức $z = a + bi \neq 0$ là số $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$

. Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số nghịch đảo của z

. Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$

Ta có: $\frac{z'}{z} = \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}i$

4. Những kiến thức cần học nhớ khi thực hành toán số phức

. $i^2 = -1$; $i^3 = i^2.i = -i$; $i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$

. z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$

z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{(\overline{z})} = z$; $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$; $\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$

. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbf{C}$

. $|zz'| = |z|.|z'|$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ $(z \neq 0)$

. $|z + z'| \leq |z| + |z'|, \forall z, z' \in \mathbf{C}$

III. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Định nghĩa

Cho số phức w. Nếu có số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ thì z được gọi là một căn bậc hai của w.

2. Cách tìm căn bậc hai của một số phức

Cho số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$. Tìm căn bậc hai của w

Phương pháp

. Gọi $x + yi$ là một căn bậc hai của z. Ta có:

$$(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 + i^2y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (*)$$

. Giải (*) tìm được x, y

. Kết luận

Lưu ý: • $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$.

• $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

- Hai căn bậc hai của $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$
- Hai căn bậc hai của $a < 0$ là $\pm\sqrt{-a}i$.

3. Phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (*) trong đó A, B, C là các số phức cho trước và $A \neq 0$

. Nếu $\Delta = B^2 - 4AC \neq 0$ thì (*) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-B - \delta}{2A} \quad ; \quad z_2 = \frac{-B + \delta}{2A}$$

(trong đó δ là một căn bậc hai của biệt số Δ)

. Nếu $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ thì (*) có nghiệm kép là: $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

IV. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

1. Định nghĩa

+ Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn z. Số đo (rađian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một **acgumen** của z (xem hình vẽ I. 3).

+ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$) là dạng lượng giác của số phức $z = a + bi \neq 0$ với $a, b \in \mathbf{R}$. Trong đó r, φ = (Ox, OM) lần lượt được gọi là môđun và một acgumen của số phức z (xem hình vẽ I. 3).

2. Cách tìm dạng lượng giác của số phức dưới dạng đại số

Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$) của số phức $z = a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ thì ta phải

. Tìm r: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

. Tìm φ: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

3. Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác

Nếu $z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z' = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ $(r_1 \geq 0, r_2 \geq 0)$ thì

. $z.z' = r_1.r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

. $\frac{z}{z'} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ (khi $r_2 > 0$)

4. Công thức Moa- Vrơ (Moivre)

Nếu n là số nguyên , $n \geq 1$ thì $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

5. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Các căn bậc hai của số phức $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

và $-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right]$ với $r > 0$.

B. BÀI TẬP CĂN BẢN

§1. SỐ PHỨC

Bài 1. Tính phần thực và phần ảo của các số phức sau

a) $(2-i)+(5+3i)-(1+i)$ **b)** $(1+i)^3-($

c) $(3+2i)(3+5i)$ **d)** $\dfrac{1+3i}{2+5i}$

Giải

a) $(2-i)+(5+3i)-(1+i)=(2+5-1)+(-1+3-1)i=6+i$

Số phức có dạng $z=a+bi$ với phần thực $a=6$ và phần ảo $b=1$.

b) Ta có:

$(1+i)^3=1^3+3.1^2.i+3.1.i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$

$(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$

Do đó: $(1+i)^3-(1-i)^2=-2+2i-(-2i)=-2+4i$

Số phức có dạng $z=a+bi$ với phần thực $a=-2$ và phần ảo $b=4$.

c) $(3+2i).(3+5i)=9+15i+6i+10i^2=(9-10)+(15+6)i=-1+21i$

Số phức có dạng $z=a+bi$ với phần thực $a=-1$ và phần ảo $b=21$.

d) $\dfrac{1+3i}{2+5i}=\dfrac{(1+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\dfrac{2-5i+6i-15i^2}{2^2-5^2i^2}=\dfrac{17+i}{29}=\dfrac{17}{29}+\dfrac{1}{29}i$

Số phức có dạng $z=a+bi$ với phần thực $a=\dfrac{17}{29}$ và phần ảo $b=\dfrac{1}{29}$.

Bài 2. Cho số phức $z=(3x+10)+(3y-5)i$ và $z'=(3-2y)+(5x-6)i$. Tìm các số thực x, y sao cho $z=z'$

Giải

Ta có: $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases}3x+10=3-2y\\3y-5=5x-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=-7\\5x-3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

Vậy hai số thực cần tìm thỏa mãn $z=z'$ là $\begin{cases}x=-1\\y=-2.\end{cases}$

Bài 3. Tìm các số phức z biết $|z|=4$ và z là thuần ảo.

Giải

Số phức z có dạng $z=bi$

Ta có: $|z|=4 \Leftrightarrow \sqrt{b^2}=4 \Leftrightarrow |b|=4 \Leftrightarrow b=\pm 4$

Vậy số phức cần tìm là $z=\pm 4i$.

Bài 4. Cho số phức $z=(1-2i)(2+i)^2$

a) Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z **b)** Tính môđun của z

c) Tính $z+\overline{z}$ **d)** Tính $z.\overline{z}$.

Giải

$z=(1-2i)(2^2+4i+i^2)=(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2=11-2i$

a) Số phức liên hợp của z là $\overline{z}=11+2i$

b) Môđun của z là $r=|z|=\sqrt{11^2+(-2)^2}=\sqrt{125}$

c) $z+\overline{z}=22$

d) $z.\overline{z}=(11-2i)(11+2i)=11^2-2^2i^2=121+4=125.$

Bài 5. Cho số phức $z=5+6i$. Tìm số nghịch đảo của z.

Giải

Số phức đã cho có dạng $z=a+bi$ với $a=5, b=6$

Số nghịch đảo của z là $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}=\frac{5-6i}{61}=\frac{5}{61}-\frac{6}{61}i$

Vậy số phức nghịch đảo cần tìm của z là $z^{-1}=\frac{5}{61}-\frac{6}{61}i.$

Bài 6. Giải các phương trình sau :

a) $(3+5i)z=z-1$ **b)** $(3-i)\overline{z}-5=0$

c) $5+2\overline{z}=3-4i$ **d)** $z^2+4=0$

Giải

a) $(3+5i)z=z-1\Leftrightarrow(2+5i)z=-1\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2+5i}=-\frac{2-5i}{(2+5i)(2-5i)}$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{2-5i}{2^2-5^2i^2}=-\frac{2-5i}{29}=-\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i.$$

b) $(3-i)\overline{z}-5=0\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{5}{3-i}=\frac{5(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{15+5i}{10}=\frac{15}{10}+\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow z=\frac{15}{10}-\frac{1}{2}i.$

c) $5+2\overline{z}=3-4i\Leftrightarrow 2\overline{z}=-2-4i\Leftrightarrow\overline{z}=-1-2i\Rightarrow z=-1+2i.$

d) $z^2+4=0\Leftrightarrow z^2-4i^2=0\Leftrightarrow(z+2i)(z-2i)=0\Leftrightarrow z=\pm 2i.$

Bài 7. Viết các số phức sau dưới dạng đại số

a) $z=1209i^{2007}+1204i^{2008}$ **b)** $z=\left(\frac{2}{1-i}\right)^{2009}$

Giải

a) $z=1209i^{2007}+1204i^{2008}=1209(i^2)^{1003}.i+1204(i^2)^{1004}$

$=1209(-1)^{1003}.i+1204(-1)^{1004}=1204-1209\,i.$

Vậy số phức đã cho viết dưới dạng đại số là $z=1204-1209\,i.$

b) $z=\left(\frac{2}{1-i}\right)^{2009}=\left[\frac{2(1+i)}{1-i^2}\right]^{2009}=(1+i)^{2009}=[(1+i)^2]^{1004}.(1+i)$

$=(1+i^2+2i)^{1004}.(1+i)=(2i)^{1004}.(1+i)=2^{1004}.(i^2)^{502}.(1+i)$

$=2^{1004}.(-1)^{502}.(1+i)=2^{1004}.(1+i).$

Vậy số phức đã cho viết dưới dạng đại số là $z=2^{1004}.(1+i).$

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 8. Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau

a) 9 **b)** -9 **c)** -7 **d)** $4i$

Giải

a) Căn bậc hai của 9 là ± 3.

b) Ta có: $-9=9i^2$ nên căn bậc hai của -9 là $\pm 3i$.

c) Ta có: $-7=7i^2$ nên căn bậc hai của -7 là $\pm i\sqrt{7}$.

d) Ta có: $4i=2(2i)=2(1+2i+i^2)=2(1+i)^2$ nên căn bậc hai của $4i$ là $\pm\sqrt{2}(1+i)$.

Bài 9. Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau

a) $-3+4i$ **b)** $1+4\sqrt{3}i$

Giải

a) *Cách 1.*

Gọi $x+iy$ $(x, y\in \mathbf{R})$ là một căn bậc hai của $-3+4i$, ta có:

$$(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi=-3+4i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & (1)\\ xy=2 & (2)\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow y=\frac{2}{x}\quad (x\neq 0)\quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được: $x^2-\frac{4}{x^2}=-3\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$ (nhận) hoặc $x^2=-4$ (loại)

. Với $x=1$ thì $y=2$

. Với $x=-1$ thì $y=-2$

Vậy căn bậc hai của $-3+4i$ là $1+2i$ và $-(1+2i)$

Cách 2.

Ta có: $-3+4i=(1+2i)^2\Rightarrow$ căn bậc hai của $-3+4i$ là $\pm(1+2i)$.

b) Gọi $x+iy$ $(x, y\in \mathbf{R})$ là một căn bậc hai của $1+4\sqrt{3}i$, ta có:

$$(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi=1+4\sqrt{3}i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=1 & (1)\\ xy=2\sqrt{3} & (2)\end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x}$ $(x \neq 0)$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được: $x^2 - \dfrac{12}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ (nhận) hoặc $x^2 = -3$ (loại)

. Với $x = 2$ thì $y = \sqrt{3}$

. Với $x = -2$ thì $y = -\sqrt{3}$

Vậy căn bậc hai của $1 + 4\sqrt{3}i$ là $\pm(2 + \sqrt{3}i)$

Bài 10. Giải các phương trình :

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ **b)** $x^2 - 2(1+3i)x + 2i - 5 = 0$

c) $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$ **d)** $z^3 - 3(1+2i)z^2 + (-3+8i)z + 5 - 2i = 0$

Giải

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ có dạng $Ax^2 + Bx + C = 0$ với $A = 1, B = 6, B' = \dfrac{B}{2} = 3,$

$C = 10$

Biệt số $\Delta' = B'^2 - AC = -1 = i^2$, căn bậc hai của Δ' là $\pm i$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là :

$$x_1 = \frac{-B' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 - i \text{ và } x_2 = \frac{-B' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 + i$$

b) $x^2 - 2(1+3i)x + 2i - 5 = 0$ có dạng $Ax^2 + Bx + C = 0$ với $A = 1,$

$B = -2(1+3i), B' = -(1+3i), C = 2i - 5$

Biệt số $\Delta' = B'^2 - AC = (1+3i)^2 - (2i-5) = -3 + 4i$

Căn bậc hai của Δ' là $\pm(1+2i)$ (kết quả Bài 9a)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $x_1 = i$ và $x_2 = 2 + 5i.$

c) $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$ có dạng $Az^2 + Bz + C = 0$ với $A = 1,$

$B = -(4+i), C = 5(1+i)$

Biệt số $\Delta = B^2 - 4AC = (4+i)^2 - 20(1+i) = -5 - 12i$

Căn bậc hai của Δ là $2 - 3i$ và $-2 + 3i$ (giải tương tự Bài 9)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 1 + 2i.$

d) $z^3 - 3(1+2i)z^2 + (-3+8i)z + 5 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)[z^2 - 2(1+3i)z + 2i - 5] = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ hoặc $z = i$ hoặc $z = 2 + 5i$ (kết quả Bài 10b)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $z = 1, z = i, z = 2 + 5i.$

Bài 11. Giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn z_1, z_2 : $\begin{cases} z_1 . z_2 = 5(1+i) \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i \end{cases}$

Giải

Ta có: $(z_1+z_2)^2 = z_1^2+z_2^2+2z_1.z_2 = 5-2i+2.5(1+i) = (4+i)^2$

$\Rightarrow z_1+z_2 = 4+i$ hoặc $z_1+z_2 = -(4+i)$

Trường hợp 1 : z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$z^2-(4+i)z+5(1+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3-i \\ z=1+2i \end{array}\right.$ (kết quả Bài 10c)

Trường hợp 2 : z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$z^2+(4+i)z+5(1+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+i \\ z=-(1+2i) \end{array}\right.$ (giải tương tự Bài 10c)

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm

$(3-i;\ 1+2i);\ (1+2i;\ 3-i);\ (-3+i;\ -(1+2i));\ (-(1+2i);\ -3+i).$

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. ỨNG DỤNG

Bài 12. Viết dưới dạng lượng giác của các số phức sau

a) $z=\sqrt{3}+i$ **b)** $z=-3(\sqrt{3}-i)$

Giải

a) *Cách 1.* $z=\sqrt{3}+i$ có dạng $z=a+bi$ với $a=\sqrt{3}$, $b=1$

- Mô đun của z là $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2$
- Gọi φ là một acgumen của z, ta có: $\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$

Vậy $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Cách 2. Ta có: $z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

b) $z=-3(\sqrt{3}-i)$ có dạng $z=a+bi$ với $a=-3\sqrt{3}$, $b=3$

- Mô đun của z là $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36}=6$
- Gọi φ là một acgumen của z, ta có: $\left\{\begin{array}{l} \cos\varphi=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \varphi=\frac{5\pi}{6}$

Vậy $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Bài 13. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

a) $z=-\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ **b)** $z=6\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Giải

a) $z = -\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$

b) $z = 6\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Bài 14. Xác định môđun và một acgumen của số phức:

a) $z = \frac{8i}{-\sqrt{3}+i}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ b) $z = \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}$

Giải

a) Ta có: $\frac{8i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{8i(i+\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})} = \frac{8(1-\sqrt{3}i)}{4} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Theo quy tắc nhân hai số phức dưới dạng lượng giác, ta có:

$z = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{15}\right)\right]$

Vậy môđun và một acgumen của số phức z lần lượt là 4 và $-\frac{2\pi}{15}$.

b) Ta có: $z = \frac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i} = \frac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$

Theo quy tắc chia hai số phức dưới dạng lượng giác, ta có:

$z = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

Vậy môđun và một acgumen của số phức z lần lượt là 1 và $\frac{\pi}{4}$.

Bài 15. Tính

a) $(-\sqrt{3}+i)^{12}$ b) $(1+i)^{2008}$

c) $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}$ d) $z = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Giải

a) Ta có: $-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Theo công thức Moivre:

$$(-\sqrt{3}+i)^{12}=2^{12}\left(\cos 12\cdot\frac{5\pi}{6}+i\sin 12\cdot\frac{5\pi}{6}\right)=2^{12}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)=2^{12}$$

b) Ta có: $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Theo công thức Moivre:

$$(1+i)^{2008}=(\sqrt{2})^{2008}\left(\cos\frac{2008\pi}{4}+i\sin\frac{2008\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^{2008}\left(\cos 502\pi+i\sin 502\pi\right)=(\sqrt{2})^{2008}(1+0)=2^{1004}.$$

c) Ta có:

$$\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Công thức Moivre: $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2008}\left(\cos\frac{2008\pi}{4}+i\sin\frac{2008\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2^{1004}}(\cos 502\pi+i\sin 502\pi)=\frac{1}{2^{1004}}.$$

d) Ta có: $\frac{2}{\sqrt{3}+i}=\frac{2(\sqrt{3}-i)}{3-i^2}=\frac{2(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Theo công thức Moivre: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^5=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

Theo quy tắc nhân hai số phức dưới dạng lượng giác, ta có:

$$z=\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}.$$

Bài 16. Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbf{R})$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n$

Giải

Ta có: $1+\frac{z}{n}=\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{y}{n}i\Rightarrow\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$

$$=\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}\cdot\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)=1.x=x$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=e^x$.

Bài 17. Cho $x\neq k2\pi, k\in\mathbf{Z}$. Tính :

a) $S=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ **b)** $T=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$

Giải

a), b) Đặt : $z=\cos x+i\sin x$

Ta có: $T+iS=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\cdots+(\cos nx+i\sin nx)$

$=z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z(z^n-1)}{z-1}=\frac{(\cos x+i\sin x).(\cos nx+i\sin nx-1)}{\cos x+i\sin x-1}$

$=\frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-(\cos x+i\sin x)}{\cos x+i\sin x-1}$

$=\frac{-2\sin\frac{(n+2)x}{2}\sin\frac{nx}{2}+\left(2\cos\frac{(n+2)x}{2}\sin\frac{nx}{2}\right)i}{-2\sin^2\frac{x}{2}+i\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}$

$=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)$

Do đó: $S=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $T=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1) Phần thực của số phức $z=3+4i$ là :

A. 3 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 4i

2) Phần ảo của số phức $z=2-5i$ là

A. 2 **B.** -5 **C.** $-5i$ **D.** -1

3) Số nào trong các số phức sau là số thực?

A. $(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)$ **B.** $(3+2i)+(3-2i)$

C. $(1+2i)+(-1+2i)$ **D.** $(5+2i)-(\sqrt{5}-2i)$

4) Số nào trong các số phức sau là số thuần ảo?

A. $(\sqrt{2}+2i)+(\sqrt{2}-2i)$ **B.** $(3+i)-(2-i)$

C. $(5-i\sqrt{2})-(5+i\sqrt{2})$ **D.** $(2008+i)+(2009-i)$

5) Cho số phức $z=(m^2+m-2)+(m^2-1)i$ $(m\in\mathbf{R})$. Giá trị nào của m để z là số thuần ảo và khác 0.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=\pm1$

6) Tìm cặp số thực (x; y) thỏa hệ thức $3x+1+(1+y)i=5-x+(2y-1)i$

A. $(1;2)$ **B.** $(2;1)$ **C.** $(1;-2)$ **D.** $(-2;1)$

7) Số phức liên hợp của $z=(1-i)(3+2i)$ là :

A. $\overline{z}=1+i$ **B.** $\overline{z}=1-i$ **C.** $\overline{z}=5-i$ **D.** $\overline{z}=5+i$

8) Số phức $z=(1+2i)^2(1-i)$ có môđun là :

A. $|z|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z|=50$ **C.** $|z|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $|z|=\dfrac{10}{3}$

9) Cho số phức $z=a+(a-1)i$ ($a\in\mathbf{R}$). Giá trị nào của a để $|z|=1$?

A. $a=\dfrac{1}{2}$ **B.** $a=\dfrac{2}{3}$ **C.** $a=0\vee a=1$ **D.** $|a|=1$

10) Dạng $z=a+bi$ của số phức $\dfrac{1}{3+2i}$ là số phức nào dưới đây?

A. $\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$ **B.** $\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$ **C.** $-\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$ **D.** $-\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

11) Mệnh đề nào dưới đây là **sai** ?

A. $z+\overline{z}$ là một số thực **B.** $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

C. $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ là một số thực **D.** $(1+i)^{10}=2^{10}.i$

12) Cho số phức $z=3+4i$. z^{-1} có môđun bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{1}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

13) Cho số phức $z=-3-2i$. Xét các mệnh đề

(I) $z+\overline{z}=-6$ (II) $z+z^{-1}=-\dfrac{42}{13}-\dfrac{24}{13}i$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai **B.** (I) sai, (II) đúng

C. Cả (I) và (II) đều đúng **D.** Cả (I) và (II) đều sai

14) Phân tích $z = 27 + i$ về dạng tích của hai số phức. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(3+i)(8+3i)$ **B.** $(3-i)(8+3i)$

C. $\frac{1}{2}(3-i)(8-3i)$ **D.** $-\frac{1}{2}(3-i)(8+3i)$

15) Cho $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$. Trong các kết luận, kết luận nào đúng?

A. $z \in \mathbf{R}$. **B.** z là số thuần ảo.

C. Môđun của z bằng 1. **D.** z có phần thực và phần ảo đều khác 0.

16) Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $1+i+i^2+\cdots+i^{2008}=1$ **B.** $(i-1)^4$ là số thực

C. $z+\bar{z}$ là số thuần ảo **D.** $z.\bar{z}$ là số thực.

17) Cho số phức $z = a + ai$ ($a \in \mathbf{R}$). Trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm biểu diễn của các số phức z khi a thay đổi là :

A. Đường thẳng $y = x$ **B.** Đường thẳng $y = ax$

C. Đường thẳng $y = ax - a$ **D.** Đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$

18) Trên mặt phẳng phức, tập hợp mọi số phức z thỏa mãn $|z-i|=1$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $x^2+y^2-2x-1=0$ **B.** $x^2+y^2-2x+y-1=0$

C. $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ **D.** $x^2+y^2-2y=0$

19) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z| \le 3$ là

A. Hình tròn tâm O, bán kính $R = 3$.

B. Hình tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{3}$.

C. Hình tròn tâm I(0; 1), bán kính $R = 3$.

D. Hình tròn tâm I(1; 0), bán kính $R = 3$.

20) Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2i| \le 1$ là :

A. Hình tròn tâm I(0; 2), bán kính $R = 1$.

B. Hình tròn tâm I(0; −2), bán kính $R = 1$.

C. Hình tròn tâm I(−2; 0), bán kính $R = 1$.

D. Đường tròn tâm I(0; −2), bán kính $R = 1$.

21) Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$ là :

A. Đường tròn tâm I(0; 1), bán kính $R = 1$.

B. Đường tròn tâm I($\sqrt{3}$; 0), bán kính $R = \sqrt{3}$.

C. Parabol $y = \frac{x^2}{4}$. **D.** Parabol $x = \frac{y^2}{4}$.

22) Biểu diễn về dạng $z = a + bi$ của số phức $z = \dfrac{i^{2008}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?

A. $-\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$ **B.** $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$ **C.** $-\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$ **D.** $-\dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}i$

23) Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ có tọa độ là :

A. $(1;-4)$ **B.** $(-1;-4)$ **C.** $(-1;4)$ **D.** $(-4;-1)$

24) Tập hợp nghiệm của phương trình $iz + 2008 - i = 0$ là :

A. $\{2008+i\}$ **B.** $\{-2008+i\}$ **C.** $\{1+2008i\}$ **D.** $\{-2008\}$

25) Tập hợp nghiệm của phương trình $(3-i)\overline{z} - 5 = 0$ là :

A. $\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right\}$ **B.** $\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}$ **D.** $\left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i\right\}$

26) Tập hợp nghiệm của phương trình $z + z.\overline{z} = \dfrac{i}{2}$ là :

A. $\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}$ **B.** $\left\{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right\}$ **D.** $\left\{-\dfrac{1}{2}i\right\}$

27) Tập hợp nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008} z + (1+2i)(1-i) = 0$ là :

A. $\{-3-i\}$ **B.** $\{-3+i\}$ **C.** $\{3-i\}$ **D.** $\{3+i\}$

28) Tập hợp nghiệm của phương trình $3z - \overline{z} = 2(3-10i)$ là :

A. $\{-3-5i\}$ **B.** $\{-3+5i\}$ **C.** $\{3-5i\}$ **D.** $\{3+5i\}$

29) Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 16 = 0$ là :

A. $\{-4i;4i\}$ **B.** $\{-3i;3i\}$ **C.** $\{-2i;2i\}$ **D.** $\{-4;4\}$

30) Căn bậc hai của -5 là :

A. $\sqrt{5}i$ **B.** $-\sqrt{5}i$ **C.** $\pm 5i$ **D.** $\pm\sqrt{5}i$

31) Căn bậc hai của $2i$ là :

A. $1+i$ và $-1-i$ **B.** $-\sqrt{2}i$ và $\sqrt{2}i$ **C.** $2+i$ và $-2-i$ **D.** $1+i$ và $3-i$

32) Căn bậc hai của $9-40i$ là :

A. $\pm(3-4i)$ **B.** $\pm(5-4i)$ **C.** $\pm(5+4i)$ **D.** $\pm(3+4i)$

33) Căn bậc hai của i là :

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **D.** Một kết quả khác.

34) Căn bậc hai của $-2 + 24\sqrt{2}i$ được biểu diễn bởi các điểm nào sau đây trong mặt phẳng phức?

A. $(2;5\sqrt{2})$ và $(-3;-5\sqrt{2})$ **B.** $(3;2\sqrt{2})$ và $(3;-2\sqrt{2})$

C. $(4;3\sqrt{2})$ và $(-4;-3\sqrt{2})$ **D.** $(1;4\sqrt{2})$ và $(-1;-4\sqrt{2})$

35) Tập hợp các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ là :

A. $\{-2-2i; -2+2i\}$ **B.** $\{-2-3i; -2+3i\}$

C. $\{-2-4i; -2+4i\}$ **D.** $\{-2-i; -2+i\}$

36) Tập hợp các nghiệm của phương trình $z^2 + 2|z| - 35 = 0$ là :

A. $\{-5; 5\}$ **B.** $\{2-3i; 2+3i\}$ **C.** $\{-5i; 5i\}$ **D.** $\{2-i; 2+i\}$

37) Tập hợp các nghiệm của phương trình $z^2 = -3 + 4i$ là :

A. $\{-1-2i; 1+2i\}$ **B.** $\{-1-3i; 1+3i\}$ **C.** $\{-3-2i; 3+2i\}$ **D.** $\{-2-3i; 2+3i\}$

38) Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 10i = 0$ là :

A. $\{1+2i; 4+2i\}$ **B.** $\{1-2i; -4+2i\}$ **C.** $\{1+3i; -5+2i\}$ **D.** $\{1-3i; 5-2i\}$

39) Tập hợp các nghiệm của phương trình $2x^2 + (i+3)x + 7i + 1 = 0$ là :

A. $\{1-3i; i-2\}$ **B.** $\{1+3i; i+2\}$ **C.** $\{2-3i; i-1\}$ **D.** Kết quả khác

40) Phương trình bậc hai nhận $z_1 = -1+3i, z_2 = -4+2i$ làm các nghiệm?

A. $z^2 + 3(1-i)z - 2(1+5i) = 0$ **B.** $z^2 + 2(1+i)z + 3(1-4i) = 0$

C. $z^2 + 5(1-i)z - 2(1+7i) = 0$ **D.** $z^2 - 3(1+i)z + 2(1+7i) = 0$

41) Cho phương trình $x^2 + (1+i)x + 2i = 0$. Tổng các bình phương của các nghiệm của phương trình trên viết dưới dạng a + bi nào dưới đây?

A. $7-2i$ **B.** $3+2i$ **C.** $5-2i$ **D.** $-2i$

42) Tìm hai số phức biết tổng và tích của chúng lần lượt bằng -6 và 10

A. $-3-i$ và $-3+i$ **B.** $-2-3i$ và $-4+i$

C. $-5+2i$ và $-1+3i$ **D.** $-8+5i$ và $2+3i$

43) Phương trình $x^2 - (2-i)x + 3 - i = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $x_1 + x_2 = 2-i$ **B.** $x_1 . x_2 = 3-i$

C. $x_1^2 + x_2^2 = -3-2i$ **D.** $x_1^3 + x_2^3$ là số thực

44) Cho số phức $z = 3+4i$, $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z. Phương trình bậc hai nhận z và $\bar{z}$ làm các nghiệm là :

A. $Z^2 - 6Z + 35 = 0$ **B.** $Z^2 - 6Z + 25 = 0$

C. $Z^2 - 6Z + \frac{3i}{2} = 0$ **D.** $Z^2 + 6Z + \frac{1}{2} = 0$

45) Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^4 - 1 = 0$ là :

A. $\{-1; -i\}$ **B.** $\{\pm 1\}$ **C.** $\{\pm 1; \pm i\}$ **D.** $\left\{\pm \frac{i}{2}\right\}$

46) Dạng lượng giác của số phức $z = 1-i$ là :

A. $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **B.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **D.** $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

47) Dạng lượng giác của số phức $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}$ là :

A. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ **B.** $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

C. $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ **D.** $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]$

48) Dạng lượng giác của số phức $z=-2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ là :

A. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$ **B.** $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

C. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ **D.** $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

49) Phần thực và phần ảo của $z=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ lần lượt theo thứ tự ?

A. $1;\sqrt{3}$ **B.** $1;-\sqrt{3}$ **C.** $2;-\sqrt{3}$ **D.** $-1;-\sqrt{3}$

50) Tìm một acgumen của số phức $z=\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$ được

A. $\dfrac{4\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$ **C.** $\dfrac{5\pi}{3}$ **D.** $\dfrac{7\pi}{3}$

51) Tìm một acgumen của số phức $z=-3+3i$ được

A. $\dfrac{2\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{\pi}{3}$ **D.** $\dfrac{\pi}{6}$

52) Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $i+i^2+i^3+i^4=0.$

B. Số phức $z=3\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{7}$.

C. $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ có môđun bằng $\sqrt{2}$.

D. $z=\cos15^0+i\sin15^0\Rightarrow z^4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

53) Cho số phức $z=1+i, z'=\sqrt{3}-i$. Số phức $\dfrac{z}{z'}$ có một acgumen là góc nào dưới đây ?

A. $\dfrac{5\pi}{4}$ **B.** $\dfrac{7\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **D.** $\dfrac{5\pi}{12}$

54) Cho số phức $z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i$. Tìm một acgumen của z^2

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{3}$ **D.** $\frac{3\pi}{4}$

55) Cho hai số phức $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ và $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Dạng đại số của tích $z_1.z_2$ là :

A. $3 + 3\sqrt{3}i$ **B.** $3 - 3\sqrt{3}i$ **C.** $-1 + \sqrt{3}i$ **D.** $1 + \sqrt{3}i$

56) Dạng lượng giác của số phức $(1 - i\sqrt{3})^7$ là :

A. $2^7\left(\cos\frac{13\pi}{3} + i\sin\frac{13\pi}{3}\right)$ **B.** $2^7\left(\cos\frac{35\pi}{3} + i\sin\frac{35\pi}{3}\right)$

C. $2^7\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$ **D.** $2^7\left(\cos\frac{35\pi}{6} + i\sin\frac{35\pi}{6}\right)$

57) Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. Số phức z có phần thực bằng $-\frac{1}{2}$, phần ảo bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

C. Mô đun của z bằng 1.

D. Số phức z có một acgumen bằng 60^0.

58) Tập hợp nghiệm của phương trình $z^2 + 2\cos\alpha.\, z + 1 = 0$ là :

A. $\{-\cos\alpha + i\sin\alpha; -(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}$ **B.** $\{\cos\alpha + i\sin\alpha; -(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}$

C. $\{\cos\alpha - i\sin\alpha; -(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}$ **D.** $\{\cos\alpha - i\sin\alpha; \cos\alpha + i\sin\alpha\}$

59) Cho số phức $z_1 = 4\cos^3 40^0 - i(4\sin^3 40^0), z_2 = -3\cos 40^0 + i(3\sin 40^0)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $|z_1 + z_2| = 1$ **B.** $|z_1 + z_2| = 3$ **C.** $|z_1 + z_2| = 7$ **D.** $|z_1 + z_2| = 14$.

60) Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(1 - i)^{20} = -1024$

B. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa $z.\overline{z} = a^2$ $(a > 0)$ là đường tròn tâm O, bán kính $R = a$

C. Nghịch đảo của số phức $z = 3(\cos 19^0 + i\sin 19^0)$ là $\frac{1}{3}(\cos 19^0 - i\sin 19^0)$

D. Số phức $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ là dạng lượng giác.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

1) Chọn A **2) Chọn B**

3) Chọn B. $(3+2i)\cdot(3-2i)=6$

4) Chọn C. $(5-i\sqrt{2})\cdot(5+i\sqrt{2})=-2\sqrt{2}i$

5) Chọn C . z là số thuần ảo và khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-2=0 \\ m^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$

6) Chọn A . $3x+1+(1+y)i=5-x+(2y-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=5-x \\ 1+y=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=4 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

7) Chọn D. $z=(1-i).(3+2i)=3+2i-3i-2i^2=5-i \Rightarrow \overline{z}=5+i.$

8) Chọn A . $z=(1+2i)^2(1-i)=(1+4i+4i^2)(1-i)=(-3+4i)(1-i)=1+7i$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$

9) Chọn C . Mô đun của z là $|z|=\sqrt{a^2+(a-1)^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}$

. Ta có: $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2-2a+1}=1 \Leftrightarrow 2a^2-2a+1=1 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=1.$

10) Chọn A. $\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i.$

11) Chọn D. Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi.$ Do đó: $z+\overline{z}=2a\in\mathbf{R}$ (Câu A đúng)

. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ (câu B đúng do tính chất)

. $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{1-i^2}=\frac{2}{2}=1\in\mathbf{R}$ (câu C đúng)

. $(1+i)^{10}=[(1+i)^2]^5=(1+i^2+2i)^5=2^5.(i^2)^2.i=2^5(-1)^2i \Rightarrow$ câu D sai

12) Chọn B $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}=\frac{3-4i}{3^2+4^2}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i \Rightarrow |z^{-1}|=\sqrt{\frac{9}{625}+\frac{16}{625}}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.$

13) Chọn C $\overline{z}=-3+2i,\ z^{-1}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}=\frac{-3+2i}{3^2+2^2}=-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

. $z+\overline{z}=(-3-2i)+(-3+2i)=-6$

. $z+z^{-1}=(-3-2i)+\left(-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i\right)=-\frac{42}{13}-\frac{24}{13}i$

14) Chọn B. $27+i=3^3-i^3=(3-i)(3^2+3i+i^2)=(3-i)(8+3i).$

15) Chọn A. $z=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{1-i^2}=\frac{0}{2}=0\in\mathbf{R}.$

16) Chọn C. $1+i+\cdots+i^{2008}=\frac{1-i^{2009}}{1-i}=\frac{1-(i^2)^{1004}.i}{1-i}=\frac{1-(-1)^{1004}.i}{1-i}=1$

(Câu A đúng)

. $(i-1)^4=\left[(i-1)^2\right]^2=(1+i^2-2i)^2=4i^2=-4\in\mathbf{R}$ (câu B đúng)

. Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi.$ Do đó: $z+\overline{z}=2a\in\mathbf{R} \Rightarrow$ câu C sai

. $z.\overline{z}=a^2+b^2\in\mathbf{R}$ (câu D đúng)

17) Chọn A

Số phức đã cho có điểm biểu diễn là M(a; a). Do đó khi a thay đổi thì tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng có phương trình y=x

18) Chọn D

Đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$ và M(x; y) là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức $\Rightarrow z - i = x + (y-1)i \Rightarrow |z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

Theo giả thiết $|z-i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0.$

19) Chọn A

Đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$, M(x; y) là điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức .

Giả thiết $|z| \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 9$ (chọn câu A)

20) Chọn B

Đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$ và M(x; y) là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức $\Rightarrow z + 2i = x + (y+2)i \Rightarrow |z+2i| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$

Theo giả thiết $|z+2i| \le 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 \le 1$ (chọn câu B)

21) Chọn C

Đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$, M(x; y) là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức.

Ta có: $2|z-i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y-1)i| = 2|(y+1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y+1)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4y.$

22) Chọn A

$$z = \frac{i^{2008}}{(1+2i)^2} = \frac{(i^2)^{1004}}{1 + 4i + 4i^2} = \frac{(-1)^{1004}}{-3+4i} = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-(3+4i)}{3^2+4^2} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

23) Chọn B.

$$z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = \frac{5-14i}{3+2i} = \frac{(5-14i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{-13-52i}{13} = -1-4i.$$

24) Chọn C. $iz + 2008 - i = 0 \Leftrightarrow iz = -2008 + i \Leftrightarrow z = \frac{-2008i}{i^2} + 1 = 1 + 2008i.$

25) Chọn D. $(3-i)\bar{z} - 5 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{5}{3-i} = \frac{5(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$

26) Chọn B . Đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$

$$z + z.\bar{z} = \frac{i}{2} \Leftrightarrow x + iy + x^2 + y^2 = \frac{i}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 + y^2 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

27) Chọn A . $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$

. $(1+2i)(1-i) = 1-i+2i-2i^2 = 3+i$

Suy ra: nghiệm của phương trình đã cho là $z = -3-i$.

28) Chọn C . Đặt $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbf{R}) \Rightarrow \overline{z} = x-iy$

. $3z - \overline{z} = 2(3-10i) \Leftrightarrow 3(x+iy) - (x-iy) = 6-20i \Leftrightarrow 2x+4yi = 6-20i$

$\Leftrightarrow x = 3$ và $y = -5$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $z = 3-5i$.

29) Chọn A. $x^2+16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16i^2 = 0 \Leftrightarrow (x+4i)(x-4i) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4i$.

30) Chọn D. Vì $-5 = 5i^2$ nên căn bậc hai của -5 là $\pm\sqrt{5}i$.

31) Chọn A. Vì $2i = (i+1)^2$ nên căn bậc hai của $2i$ là $\pm(i+1)$.

32) Chọn B. Cách giải tương tự Bài 9 .

33) Chọn B. Ta có:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \text{ nên căn bậc hai của i là } \pm\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

hay $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ (xem lại kiến thức cần nhớ IV. 5)

34) Chọn C . Cách giải tương tự Bài 9

. Căn bậc hai của $-2+24\sqrt{2}i$ là $4+3\sqrt{2}i$ và $-4-3\sqrt{2}i$

. Điểm cần tìm là $(4;\ 3\sqrt{2}\ )$, $(-4;\ -3\sqrt{2}\ )$

35) Chọn D. Cách giải tương tự Bài 10a).

36) Chọn A . Đặt $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbf{R}) \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ta có: $z^2 + 2|z| - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} = 35 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $z = \pm 5$.

37) Chọn A. Xem lại bài giải Bài 9a) .

38) Chọn B. Phương trình $x^2+3x+10i = 0$ có $\Delta = 9-40i = (5-4i)^2$

Do đó: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-3+5-4i}{2} = 1-2i\ ;\ x_2 = \frac{-3-(5-4i)}{2} = -4+2i.$$

39) Chọn D. Phương trình $2x^2 + (i+3)x + 7i + 1 = 0$ có

$\Delta = (i+3)^2 - 8(7i+1) = -50i = (5-5i)^2$

Do đó: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(i+3)+5-5i}{4} = \frac{1-3i}{2}\ ;\ x_2 = \frac{-(i+3)-(5-5i)}{4} = i-2.$$

40) Chọn C

Ta có: $z_1 + z_2 = -5 + 5i = -5(1 - i)$ và $z_1 . z_2 = -2(1 + 7i)$

$\Rightarrow z_1, z_2$ là nghiệm của phương trình $z^2 + 5(1 - i)z - 2(1 + 7i) = 0$

41) Chọn D. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2 = (1 + i)^2 - 4i = 1 + i^2 - 2i = -2i.$

42) Chọn A. Theo giả thiết $z_1 + z_2 = -6$ và $z_1 . z_2 = 10$

$\Rightarrow z_1, z_2$ là nghiệm của phương trình $z^2 + 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 - i \\ z = -3 + i \end{array}\right.$

(xem bài giải Bài 10a))

43) Chọn D . Câu A, B đúng (theo hệ thức Vi-ét)

. Câu C đúng vì $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2 = (2 - i)^2 - 2(3 - i) = -3 - 2i$

. Câu D sai vì $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 . x_2(x_1 + x_2) \notin \mathbf{R}$

44) Chọn B . Theo giả thiết $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$

Ta có: $z + \overline{z} = 6$ và $z . \overline{z} = 3^2 + 4^2 = 25$

$\Rightarrow z, \overline{z}$ là nghiệm của phương trình $Z^2 - 6Z + 25 = 0.$

45) Chọn C. $x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - i^4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + i^2)(x^2 - i^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm i \end{array}\right.$

46) Chọn D. $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

47) Chọn A . $-1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

. $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

. $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right.$

48) Chọn B

$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

49) Chọn D

$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ có môđun $r = 2$ và acgumen $\varphi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$

. Phần thực $a = r\cos\varphi = 2\cos\frac{4\pi}{3} = 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

. Phần ảo $b = r\sin\varphi = 2\sin\frac{4\pi}{3} = 2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

50) Chọn C

. $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

. Số phức z có một acgumen là $\frac{5\pi}{3}$.

51) Chọn B . $z=-3+3i=3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

. Số phức z có một acgumen bằng $\frac{3\pi}{4}$.

52) Chọn C. $z=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ có mô đun bằng r = 2.

53) Chọn D . $z=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

. $z'=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Rightarrow\frac{z}{z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ có một acgumen bằng $\frac{5\pi}{12}$.

54) Chọn A

$z^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+2(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(\sqrt{6}-\sqrt{2})i=8\sqrt{3}+8i$

$=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{6}$.

55) Chọn A . $z_1.z_2=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+3\sqrt{3}i.$

56) Chọn B $1-\sqrt{3}i=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow(1-\sqrt{3}i)^7=2^7\left(\cos\frac{35\pi}{3}+i\sin\frac{35\pi}{3}\right)$ (sử dụng công thức Moivre)

57) Chọn D. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos120^0+i\sin120^0$ có một acgumen bằng 120^0.

58) Chọn A

Phương trình $z^2+2\cos\alpha.z+1=0$ có

$\Delta=\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha=(i\sin\alpha)^2$

Do đó: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$z_1 = \frac{-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1} = -\cos\alpha + i\sin\alpha$$

và $z_2 = \frac{-\cos\alpha - i\sin\alpha}{1} = -(\cos\alpha + i\sin\alpha).$

59) Chọn A . $z_1 + z_2 = (4\cos^3 40^0 - 3\cos 40^0) + i(3\sin 40^0 - 4\sin^3 40^0)$

$$= \cos 120^0 + i\sin 120^0$$

. $|z_1 + z_2| = \sqrt{\cos^2 120^0 + \sin^2 120^0} = 1.$

60) Chọn D

+ Câu A, B đúng vì

. $(1-i)^{20} = \left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^{20} = 1024(\cos 5\pi - i\sin 5\pi) = -1204$

. $z.\bar{z} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$ (đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$)

+ Câu C đúng vì nghịch đảo của số phức $z = 3(\cos 19^0 + i\sin 19^0)$ là

$$z^{-1} = \frac{1}{3(\cos 19^0 + i\sin 19^0)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos 19^0 - i\sin 19^0}{\cos^2 19^0 + \sin^2 19^0} = \frac{1}{3}(\cos 19^0 - i\sin 19^0)$$

+ Câu D sai vì dạng lượng dạng của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (r > 0)$

PHỤ LỤC ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CHƯƠNG I

1B	2A	3B	4D	5A	6D	7C	8A	9D	10B
11C	12B	13B	14B	15C	16C	17A	18C	19A	20B
21C	22C	23A	24D	25A	26D	27C	28C	29B	30D
31A	32B	33A	34B	35C	36A	37A	38C	39A	40A
41A	42B	43D	44D	45C	46C	47A	48B	49D	50D
51A	52B	53A	54C	55D	56A	57B	58A	59D	60A
61C	62B	63C	64A	65B	66C	67A	68D	69B	70C
71A	72D	73A	74B	75C	76A	77C	78B	79A	80C
81B	82D	83B	84A	85D	86C	87A	88D	89A	90A
91B	92B	93C	94C	95A	96B	97C	98D	99A	100D
101A	102D	103A	104C	105A	106B	107D	108C	109A	110D
111D	112C	113B	114C	115A	116B	117A	118C	119D	120D
121D	122C	123B	124B	125D	126A	127C	128A	129C	130A

CHƯƠNG II

1C	2A	3C	4A	5B	6C	7A	8C	9A	10C
11D	12D	13D	14B	15A	16A	17B	18C	19D	20B
21C	22A	23C	24B	25A	26A	27A	28B	29A	30C
31C	32C	33D	34C	35D	36B	37A	38D	39B	40C
41A	42B	43D	44A	45B	46C	47D	48A	49B	50C
51D	52C	53B	54C	55D	56A	57C	58C	59B	60C
61A	62B	63C	64B	65C	66A	67D	68C	69D	70A
71B	72D	73C	74C	75A	76B	77D	78B	79C	80A
81D	82B	83D	84A	85B	86D	87A	88C	89B	90A
91C	92B	93C	94D	95B	96A	97B	98D	99A	100B
101B	102C	103B	104D	105A	106C	107B	108A	109B	110C
111D	112C	113A	114B	115B	116A	117B	118C	119A	120C
121A	122B	123A	124D	125C	126B	127A	128C	129B	130C

CHƯƠNG III

1A	2C	3B	4C	5B	6A	7C	8D	9A	10C
11A	12B	13C	14A	15B	16C	17D	18A	19A	20B
21C	22B	23D	24C	25D	26D	27A	28A	29C	30A
31B	32D	33C	34B	35C	36A	37B	38D	39B	40A
41B	42A	43C	44B	45A	46B	47C	48A	49A	50D
51A	52B	53D	54B	55A	56B	57C	58D	59A	60B
61C	62B	63C	64D	65C	66A	67B	68B	69A	70D
71B	72D	73D	74A	75B	76B	77C	78A	79C	80D
81C	82B	83A	84B	85C	86B	87A	88C	89A	90B
91B	92D	93A	94B	95C	96A	97B	98D	99B	100D
101A	102C	103C	104B	105A	106D	107B	108C	109B	110C
111D	112A	113D	114A	115B	116C	117B	118C	119D	120A
121B	122C	123D	124A	125D	126C	127A	128B	129C	130D

CHƯƠNG IV

1A	2B	3B	4C	5C	6A	7D	8A	9C	10A
11D	12B	13C	14B	15A	16C	17A	18D	19A	20B
21C	22A	23B	24C	25D	26B	27A	28C	29A	30D
31A	32B	33B	34C	35D	36A	37A	38B	39D	40C
41D	42A	43D	44B	45C	46D	47A	48B	49D	50C
51B	52C	53D	54A	55A	56B	57D	58A	59A	60D

Mục lục

Lời nói đầu 3

CHƯƠNG I: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức cần nhớ 5

B. Bài tập căn bản 9

§1. Tính đơn điệu của hàm số 9

§2. Cực trị của hàm số 12

§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số 16

§4. Tiệm cận của đường cong 18

§5. Điểm uốn của đồ thị. Phép tịnh tiến hệ toạ độ 20

§6. Khảo sát một số hàm đa thức 22

§7. Khảo sát một số hàm phân thức hữu tỉ 25

§8. Một số bài toán thường gặp về đồ thị 28

C. Câu hỏi trắc nghiệm 39

D. Hướng dẫn giải và đáp án 57

CHƯƠNG II: HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGA RIT

A. Kiến thức cần nhớ 76

B. Bài tập căn bản 79

§1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ 79

§2. Lũy thừa với số mũ thực 81

§3. Lôgarit 83

§4. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên 85

§5. Hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa 86

§6. Phương trình mũ và lôgarit 88

§7. Hệ phương trình mũ và lôgarit 94

§8. Bất phương trình mũ và lôgarit 96

C. Câu hỏi trắc nghiệm 100

D. Hướng dẫn giải và đáp án 113

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. Kiến thức cần nhớ 129
B. Bài tập căn bản 133
§1. Nguyên hàm 133
§2. Một số phương pháp tìm nguyên hàm 134
§3. Tích phân 136
§4. Một số phương pháp tính tích phân 138
§5. Một số ứng dụng hình học của tích phân 147
C. Câu hỏi trắc nghiệm 152
D. Hướng dẫn giải và đáp án 167

CHƯƠNG IV: SỐ PHỨC

A. Kiến thức cần nhớ 182
B. Bài tập căn bản 185
§1. Số phức 185
§2. Căn bậc hai của số phức. Phương trình bậc hai 187
§3. Dạng lượng giác của số phức. Ứng dụng 189
C. Câu hỏi trắc nghiệm 192
D. Hướng dẫn giải và đáp án 199
PHỤ LỤC ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 204

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: THU HIÊN – TRẦN HƯNG

Sửa bài: Nhà Sách HỒNG ÂN

Chế bản: Nhà Sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

Đơn vị / Người liên kết xuất bản:
Nhà sách HỒNG ÂN

---

595 BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

Mã số: 1L-121ĐH2008.
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Giấp phép xuất bản số: 312-2008/CXB/02–57/ĐHQGHN, ngày 11/04/2008.
Quyết định xuất bản số: 121 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2008.