

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

(Đề thi có 02 trang, gồm 05 câu)

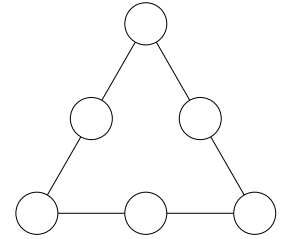
Thời gian làm bài: **150** phút

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $(1 + \tan x \tan 2x) \sin 4x + \cos 4x - 1 = 0$.

b) Cho một tam giác có ba ô tròn ở các đỉnh và ba ô tròn ở trung điểm của các cạnh (xem hình vẽ bên).

Viết ngẫu nhiên sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào sáu ô tròn đó sao cho mỗi ô chỉ viết đúng một chữ số và chữ số ở các ô là đôi một khác nhau. Tính xác suất để tổng ba số trong các ô ở đỉnh và tổng ba số trong các ô còn lại là hai số tự nhiên liên tiếp.



Câu 2. (4,0 điểm)

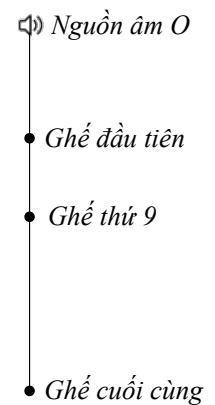
a) Cho ba số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $\log_a^2 b^2 + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = \log_{\sqrt{a}} b^2$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2} b + \log_b c$.

b) Trong hội trường, xét một dãy gồm 25 chiếc ghế được xếp thành hàng dọc và cách đều nhau, tức là khoảng cách giữa hai ghế liên tiếp bất kì bằng nhau. Một nguồn phát âm thanh được đặt tại điểm O thẳng hàng với dãy ghế và nằm ngoài dãy ghế (xem hình vẽ bên).

Biết rằng mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R (mét) được kí hiệu là L_M và tính theo công thức $L_M = \log \frac{c}{R^2}$ (đơn vị: Ben),

với c là một hằng số dương. Xem mỗi ghế như một điểm, người ta đo được mức cường độ âm tại ghế đầu tiên là 4 (Ben) và tại ghế cuối cùng là 2 (Ben). Hỏi mức cường độ âm tại ghế thứ 9 bằng bao nhiêu?

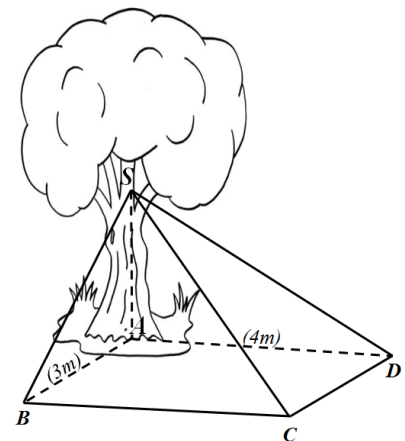


Câu 3. (6,0 điểm)

a) Trên bãi cỏ bằng phẳng có một cây xanh thân thẳng đứng. Để có bóng mát và thuận tiện cho việc cắm trại, một nhóm bạn đã đóng ba cái móc trên mặt đất vào các vị trí B, C, D sao cho $ABCD$ là một hình chữ nhật trong đó điểm A được coi là trùng với gốc cây và $AB = 3$ (mét), $AD = 4$ (mét). Trên thân cây cố định một điểm gọi là S , căng ba sợi dây không giãn thành các đoạn thẳng SB, SC, SD làm khung trại, phủ vải bạt xung quanh tạo thành lều trại là hình chóp tứ giác $S.ABCD$ (xem hình vẽ bên).

Biết rằng đường thẳng AC tạo với mặt phẳng (SBC) một góc bằng α thỏa mãn

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{52}{61}}$. Hỏi nhóm bạn đó phải sử dụng tất cả bao nhiêu mét dây để làm khung của chiếc lều trại nói trên? (không tính phần dây dùng để buộc vào thân cây và móc).



b) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm BB' . Các điểm E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng AB', CA' sao cho $EF \parallel C'M$. Tính các tỉ số $\frac{AE}{AB'}$ và $\frac{CF}{CA'}$.

Câu 4. (4,0 điểm)

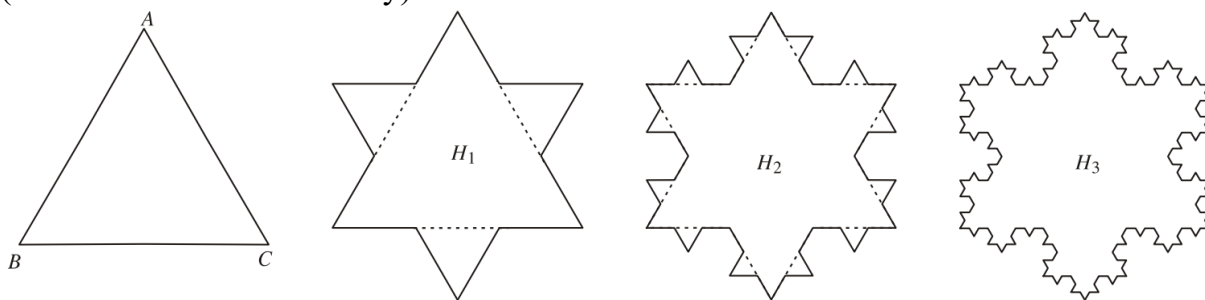
a) Tìm tất cả các số thực a, b để tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{6x + 1} + x}{x^2}$ và giới hạn này là hữu hạn.

b) Xét một tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Ta xây dựng quá trình tạo hình có dạng bông tuyết như sau:

Đầu tiên, chia mỗi cạnh của tam giác ABC thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác ABC rồi xóa đáy của nó, ta được hình (H_1) .

Sau đó, chia mỗi cạnh của (H_1) thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài (H_1) rồi xóa đáy của nó, ta được hình (H_2) .

Cứ tiếp tục quá trình như trên ta được dãy các hình $(H_1), (H_2), (H_3), \dots, (H_n), \dots$ (tham khảo hình vẽ dưới đây).



Tính chu vi và diện tích của hình (H_4) .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} \right)$.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1.

a) Giải phương trình $(1 + \tan x \tan 2x) \sin 4x + \cos 4x - 1 = 0$.

Hướng dẫn

Điều kiện xác định $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \left(\frac{\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} \right) \sin 4x + \cos 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\cos x \cos 2x} \cdot \sin 4x + \cos 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Cho một tam giác có ba ô tròn ở các đỉnh và ba ô tròn ở trung điểm của các cạnh (xem hình vẽ). Viết ngẫu nhiên sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào sáu ô tròn đó sao cho mỗi ô chỉ viết đúng một chữ số và chữ số ở các ô là đôi một khác nhau. Tính xác suất để tổng ba số trong các ô ở đỉnh và tổng ba số trong các ô còn lại là hai số tự nhiên liên tiếp.

Hướng dẫn

$$n(\Omega) = 720.$$

Gọi a, b, c và x, y, z lần lượt là các số điền vào ba ô tròn ở đỉnh và ba ô tròn ở trung điểm của ba cạnh.

Ta có $a + b + c + x + y + z = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Trường hợp 1: $a + b + c = x + y + z + 1 \Leftrightarrow a + b + c = 11$

Có tất cả 3 bộ $\{a; b; c\}$ thỏa mãn là $\{1; 4; 6\}; \{2; 3; 6\}; \{2; 4; 5\}$.

Mỗi bộ $\{1; 4; 6\}; \{2; 3; 6\}; \{2; 4; 5\}$ có $3!$ cách điền các số a, b, c .

Tương ứng có $3!$ cách điền các số x, y, z .

Suy ra trường hợp này có $3.3!.3! = 108$ (cách).

Trường hợp 2: $x + y + z = 11$.

Tương tự trường hợp 1, có 108 cách.

$$\text{Vậy xác suất là } P = \frac{108 + 108}{720} = \frac{3}{10}.$$

Câu 2.

a) Cho ba số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $\log_a^2 b^2 + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = \log_{\sqrt{a}} b^2$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2} b + \log_b c$.

Hướng dẫn

Đặt $x = \log_a b$ và $y = \log_b c$. Vì $a, b, c > 1$ nên $x, y > 0$.

$$\text{Ta được } 4x^2 + y(2y - 1) + 9xy = 4x \Leftrightarrow 4x^2 + 9xy + 2y^2 - 4x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \ (L) \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 1.$$

$$\text{Vậy } P = \log_{a^2} b + \log_b c = \frac{1}{2} \log_a b + \log_b c = \frac{1}{2}(x + 2y) = \frac{1}{2}.$$

b) Trong hội trường, xét một dãy gồm 25 chiếc ghế được xếp thành hàng dọc và cách đều nhau, tức là khoảng cách giữa hai ghế liên tiếp bất kì bằng nhau. Một nguồn phát ra âm thanh đặt tại điểm O thẳng hàng với dãy ghế và nằm ngoài dãy ghế

NHÓM CHINH PHỤC ĐỀ HỌC SINH GIỎI

Biết rằng mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R (mét) được kí hiệu là L_M và tính theo công thức $L_M = \log \frac{c}{R^2}$ (đơn vị: Ben), với c là một hằng số dương. Xem mỗi ghế như một điểm, người ta đo được mức cường độ âm tại ghế đầu tiên và ghế cuối cùng lần lượt là 4 (Ben) và 2 (Ben). Hỏi mức cường độ âm tại ghế thứ 9 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi A, B, C lần lượt là ghế đầu tiên, ghế thứ 9 và ghế cuối cùng $\Rightarrow AC = 3AB$.

$$\text{Có } L_A = \log \frac{c}{OA^2} = 4 \Rightarrow \frac{c}{OA^2} = 10^4. \text{ Tương tự } L_C = \log \frac{c}{OC^2} = 2 \Rightarrow \frac{c}{OC^2} = 10^2.$$

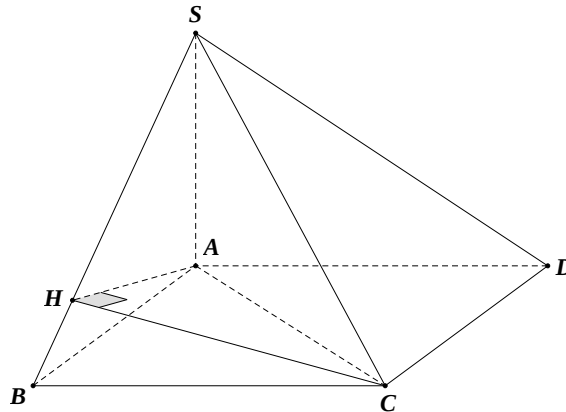
$$\Rightarrow \frac{OA^2}{OC^2} = 100 \Leftrightarrow OC = 10.OA \Rightarrow OB = 4.OA.$$

$$\text{Do đó } L_B = \log \frac{c}{OB^2} = \log \frac{10^4.OA^2}{16.OA^2} = 4(1 - \log 2) \text{ (Ben).}$$

Câu 3.

a) Trên một bãi cỏ bằng phẳng có cây xanh thân thẳng đứng, để có bóng mát và thuận tiện cho việc cắm trại một nhóm bạn đã đóng ba cái móc trên mặt đất vào các vị trí B, C, D sao cho $ABCD$ là một hình chữ nhật trong đó điểm A được coi là trùng với gốc cây và $AB = 3$ (mét), $AD = 4$ (mét). Trên thân cây cố định một điểm gọi là S , căng ba sợi dây không giãn thành các đoạn thẳng SB, SC, SD làm khung trại, phủ vải bạt xung quanh tạo thành lều trại là hình chóp tứ giác $S.ABCD$ (xem hình vẽ). Biết rằng đường thẳng AC tạo với mặt phẳng (SBC) một góc bằng α thỏa mãn $\cos \alpha = \sqrt{\frac{52}{61}}$. Hỏi nhóm bạn đó phải sử dụng tổng bao nhiêu mét dây để dựng chiếc lều trên? (không tính phần dây dùng để buộc vào thân cây và móc)

Hướng dẫn



Gọi H là hình chiếu của A trên SB thì $AH \perp (SBC) \Rightarrow \alpha = \angle ACH$

$$\text{Có } CH = AC \cdot \cos \angle ACH = 5 \sqrt{\frac{52}{61}} \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{15}{\sqrt{61}}$$

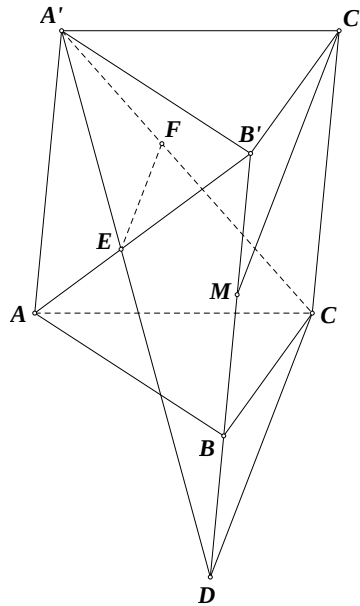
$$\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{25} \Rightarrow SA = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Suy ra } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}, SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{\sqrt{89}}{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tổng số mét dây mà nhóm bạn sử dụng là $\frac{\sqrt{61} + \sqrt{89} + 5\sqrt{5}}{2}$.

b) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm BB' . Các điểm E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng AB', CA' sao cho $EF \parallel C'M$. Tính các tỉ số $\frac{AE}{AB'}$ và $\frac{CF}{CA'}$.

Hướng dẫn



Gọi D là điểm đối xứng với M qua B thì $C'M \parallel CD$.

Gọi $E = A'D \cap AB'$. Kẻ $EF \parallel CD$ ($F \in A'C$) thì $EF \parallel C'M$.

Ta có $\frac{A'F}{FC} = \frac{A'E}{ED} = \frac{AE}{EB'} = \frac{AA'}{B'D} = \frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AE}{AB'} = \frac{2}{5}$ và $\frac{CF}{CA'} = \frac{3}{5}$.

Câu 4.

a) Tìm tất cả các số thực a, b để tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{6x + 1} + x}{x^2}$ và giới hạn này là hữu hạn.

Hướng dẫn

$$\text{Đặt } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{6x + 1} + x}{x^2}.$$

Vì L hữu hạn nên $\sqrt{b} - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$.

$$\text{Khi đó } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\sqrt{x^2 + ax + 1} - (2x + 1) \right] + \left[(3x + 1) - \sqrt{6x + 1} \right]}{x^2}.$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + 1) - \sqrt{6x + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + 1)^2 - (6x + 1)}{x^2 \left[(3x + 1) + \sqrt{6x + 1} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{(3x + 1) + \sqrt{6x + 1}} = \frac{9}{2}.$$

Do đó L hữu hạn khi và chỉ khi $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - (2x + 1)}{x^2}$ hữu hạn.

$$\text{Có } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - (2x + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + 1 - (2x + 1)^2}{x^2 \left[\sqrt{x^2 + ax + 1} + (2x + 1) \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + (a - 4)}{x \left[\sqrt{x^2 + ax + 1} + (2x + 1) \right]}.$$

Vì I hữu hạn nên $a = 4$.

Vậy $a = 4, b = 1$.

b) Xét một tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Ta xây dựng quá trình tạo hình có dạng bông tuyết như sau: Chia mỗi cạnh của tam giác ABC thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác ABC rồi xóa đáy của nó, ta được hình (H_1) .

Chia mỗi cạnh của (H_1) thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài H_1 rồi xóa đáy của nó, ta được hình (H_2) .

Cứ tiếp tục như thế để tạo nên các hình $(H_3), (H_4), \dots$

Tính chu vi và diện tích của hình (H_4) .

Hướng dẫn

Với mỗi số tự nhiên n , gọi a_n, d_n, P_n, S_n lần lượt là số cạnh, độ dài mỗi cạnh, chu vi, diện tích của hình (H_n) .

Vì mỗi cạnh ở hình (H_n) tạo ra 4 cạnh cho hình (H_{n+1}) nên $a_n = 3.4^n$.

Mỗi cạnh của hình (H_{n+1}) có độ dài bằng $\frac{1}{3}$ độ dài cạnh của hình (H_n) nên $d_n = \frac{1}{3^n}$.

Do đó chu vi của hình (H_n) là $P_n = a_n \cdot d_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Suy ra $P_4 = \frac{256}{27}$.

Trên mỗi cạnh của hình (H_n) được đặt thêm một tam giác đều có cạnh bằng $\frac{1}{3}d_n$ để tạo thành hình (H_{n+1}) ,

có a_n tam giác như thế nên $S_{n+1} = S_n + a_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}d_n\right)^2 \Rightarrow S_{n+1} - S_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

$$\Rightarrow S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) = \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow S_n - S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]. \text{ Suy ra } S_4 = \frac{862\sqrt{3}}{2187}.$$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} \right)$.

Hướng dẫn

Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}}$.

Ta có $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_n} \Leftrightarrow u_{n+2} u_n = u_{n+1}^2 + 3 \Leftrightarrow \frac{u_{n+2} u_n}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{u_{n+1}^2 + 3}{u_{n+1} u_{n+2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} + \frac{3}{u_{n+1} u_{n+2}} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_{n+1} u_{n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Do đó $S_n = \frac{1}{u_1 u_2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \left(\frac{u_{k-1}}{u_k} - \frac{u_k}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{u_1}{u_2} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}}$.

Mặt khác từ (*) ta có $\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_{n+1} u_{n+2}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó dãy $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = L$, vì dãy $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$ là dãy giảm nên $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{2}, \forall n$, suy ra $L \leq \frac{1}{2}$.

Mặt khác, từ giả thiết ta có $u_{n+2} u_n - u_{n+1}^2 = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_{k+2} u_k - u_{k+1}^2 = u_{k+1} u_{k-1} - u_k^2 \Leftrightarrow u_k (u_{k+2} + u_k) = u_{k+1} (u_{k-1} + u_{k+1})$

$$\Leftrightarrow \frac{u_{k+2} + u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} + u_{k-1}}{u_k}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \dots, n$ ta được $\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \dots = \frac{u_3 + u_1}{u_2} = 4.$

Chuyển qua giới hạn ta được $\frac{1}{L} + L = 4 \Leftrightarrow L = 2 \pm \sqrt{3}.$ Mà $L \leq \frac{1}{2}$ nên $L = 2 - \sqrt{3}.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Từ đẳng thức $\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = 4$ chuyển qua giới hạn tìm được $L = 2 \pm \sqrt{3}.$

Mà $L \geq 2$ nên $L = 2 + \sqrt{3}.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{3} - 2) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 11
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-11>