CHƯƠNG 2
VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 6
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

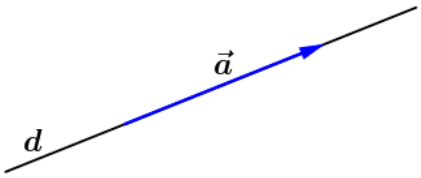
1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},...$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

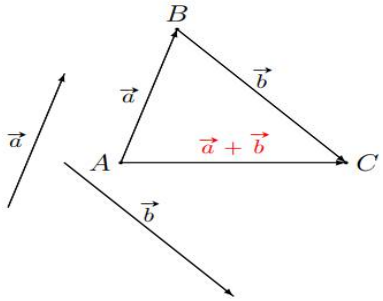
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA},\overrightarrow{BB},...$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý và các điểm B,C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$,** kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ.**

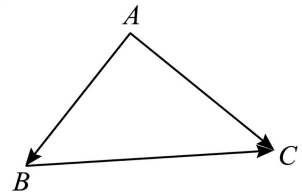


Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

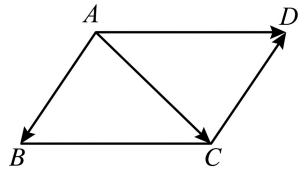
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Nhận xét: Đối với vectơ trong không gian, ta có các quy tắc sau:

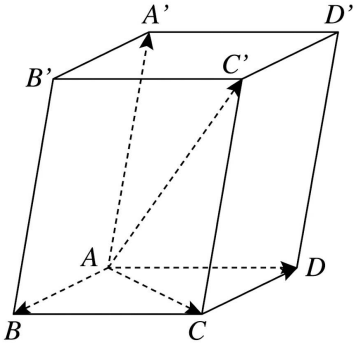
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A,B,C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



b. Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$.

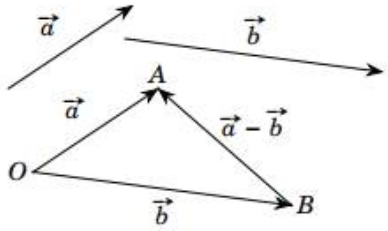
Chú ý:

- Hai vectơ đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

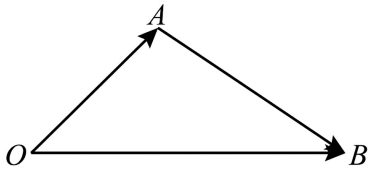
Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ.**



Nhận xét: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vectơ trong không gian

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$
- Có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với vectơ.**

Chú ý:

- Quy ước: $k.\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Nếu $k.\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Tương tự như phép nhân một số với vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là vectơ bất kỳ thì $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kỳ thì $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là vectơ bất kỳ thì $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Chú ý:

- Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

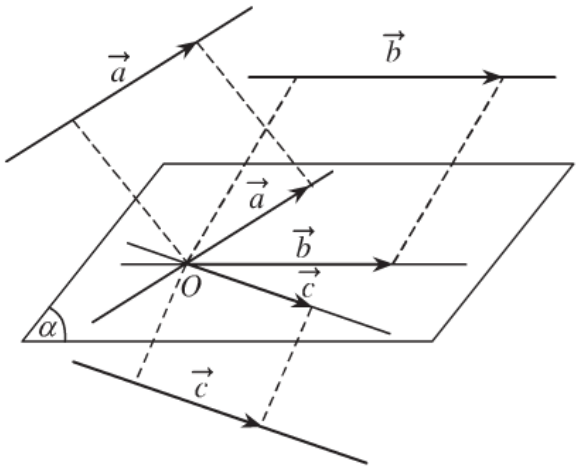
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

Sự đồng phẳng của ba vectơ (tham khảo thêm)

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$
- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

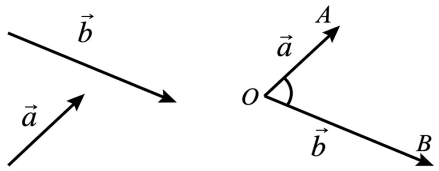
  Khi đó: $\exists m,n,p\in\mathbb{R}:\ \vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

a. Góc giữa hai vectơ trong không gian

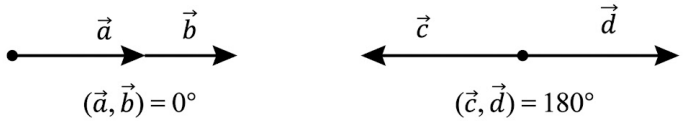
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ $\left(0^\circ\le\widehat{AOB}\le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$

và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



Chú ý:

- $0^o \le \left(\vec{a},\vec{b}\right) \le 180^o$
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



b. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Chú ý:

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.
- Mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

Nhận xét: Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có tính chất như tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

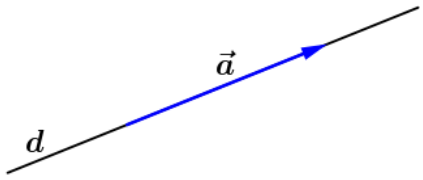
Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH VECTƠ

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ được gọi là bằng nhau, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Hai vectơ được gọi là đối nhau, nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.

b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AD}$.

c) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OA}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O.

d) Có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

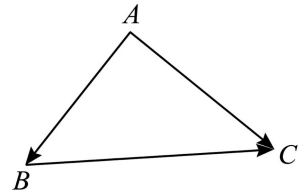
b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

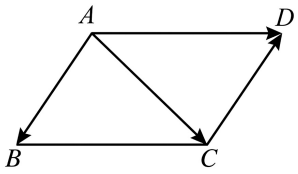
d) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

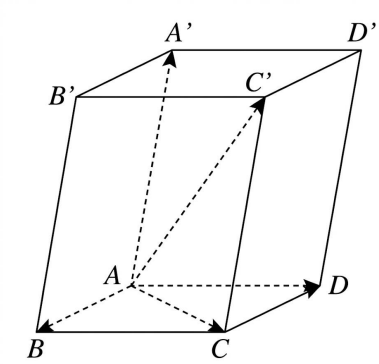
• ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



• ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



• ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



• **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

• **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

• **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

Bài 1. Trong không gian, cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

Bài 2. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$

c) $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CA'}$

Bài 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}$.

b) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}$.

c) Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

DẠNG 3
TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ

Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'}$

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$, chứng minh $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{A'G}$.

DẠNG 4
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ
PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ

Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, trong đó O và $\vec{a}$ đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:

- Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k.
- Trung điểm của đoạn thẳng.
- Hình bình hành.
- Hình hộp.
- Trọng tâm tam giác.
- Trọng tâm của tứ diện, …

Bài 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

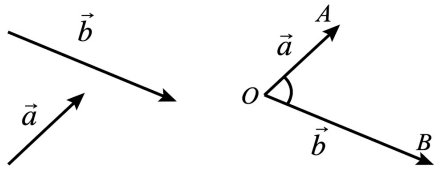
Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

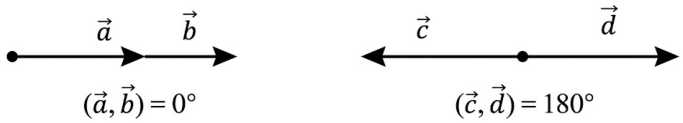
b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

DẠNG 5
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$



- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



2. Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$
- $\vec{a}^2\ge 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$
- $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

Bài 1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc $120°$ và $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$.

a) Tính $\vec{a}.\vec{b}$

b) Tính $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

c) Tính $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$.

Bài 2. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$.

a) Tính $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

b) Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$. Xác định x sao cho thỏa mãn $\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

Bài 4. Trong không gian, cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 5. Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{15}$.

Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=2k\vec{a}-\vec{b}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°$

Bài 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$.

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a.

a) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$

b) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$

Bài 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$; $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

b) Tính $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BB'}$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính $\left(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{AC'}\right).\overrightarrow{BD'}$.

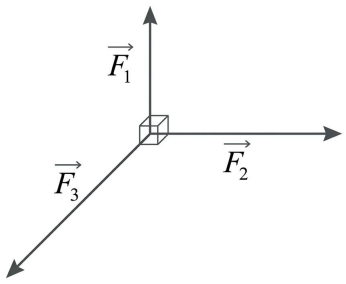
Bài 9. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ sau : $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$; $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

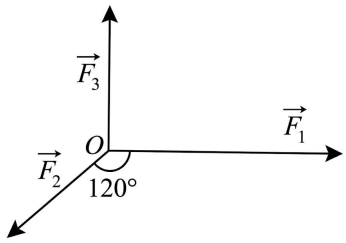
b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm BB' và BC . Tính $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AO}$.

DẠNG 6
BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

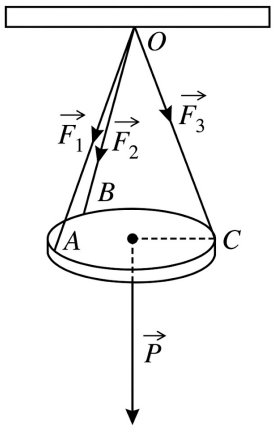
Bài 1. Ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $6N;9N;12N$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



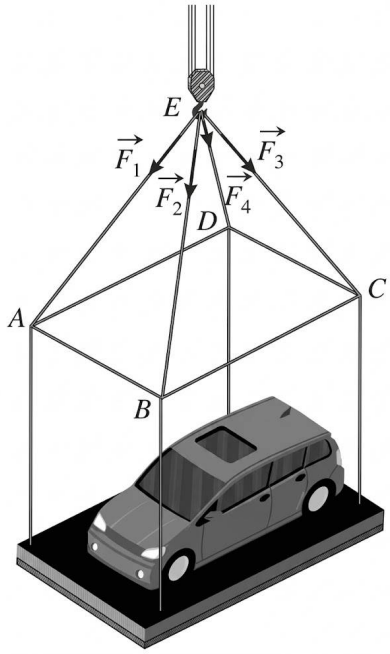
Bài 2. Có ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật O. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ hợp với nhau một góc $120°$ và có độ lớn lần lượt là $20N$ và $16N$. Lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $12N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của N).



Bài 3. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}\left(N\right)$ (xem hình vẽ). Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

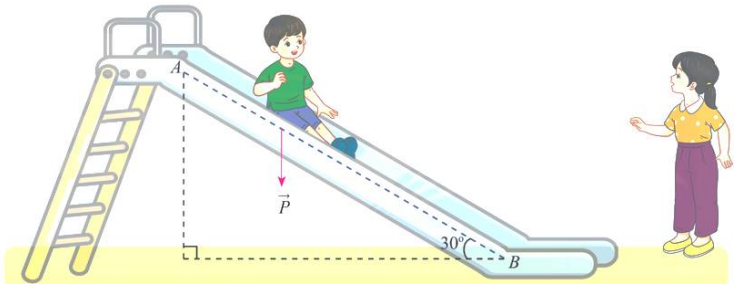


Bài 4. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$



Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Trọng lượng của chiếc xe ô tô bằng bao nhiêu Niutơn? Biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ đều có cường độ là $3500N$ và trọng lượng của khung sắt là $2500N$.

Bài 5. Một em nhỏ cân nặng $m = 25\,kg$ trượt trên cầu trượt dài $3,5\,m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (như hình vẽ).



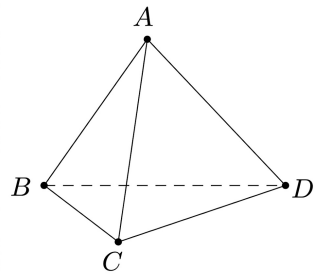
a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8\,m/s^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

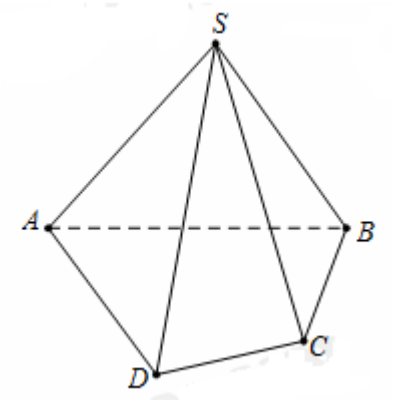
Câu 1. Cho hình tứ diện $ABCD$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

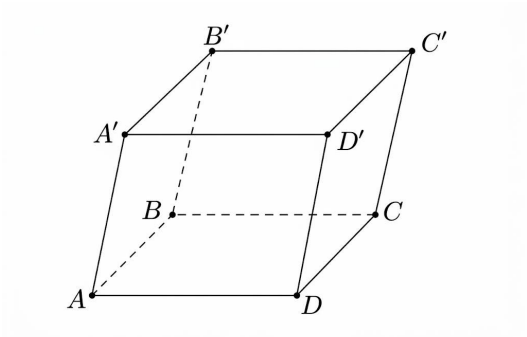
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

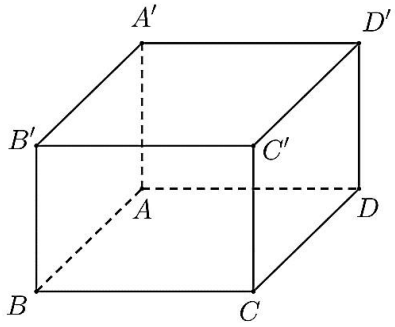
Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

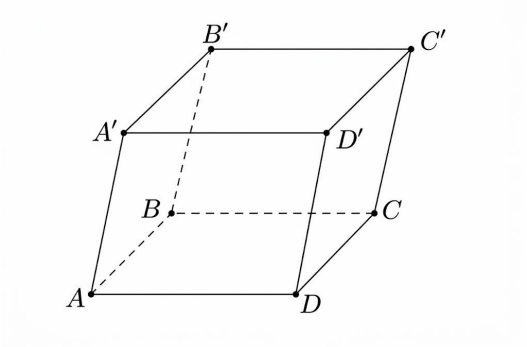
Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{B'A'}$. **B.** $\overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{D'C'}$.

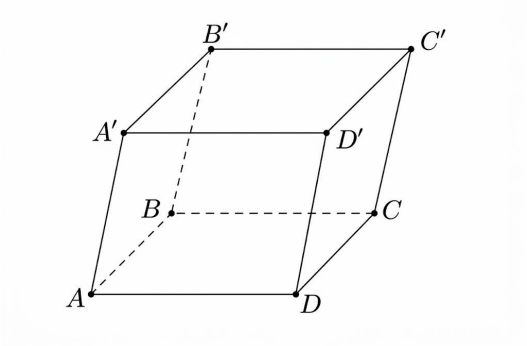
Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

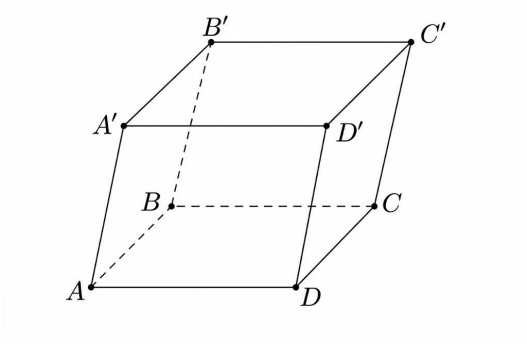
A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{BB'}$. **D.** $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó tổng của các vecto $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}$ là



A. $\overrightarrow{AB'}$. **B.** $\overrightarrow{A'C'}$. **C.** $\overrightarrow{AD'}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}$.

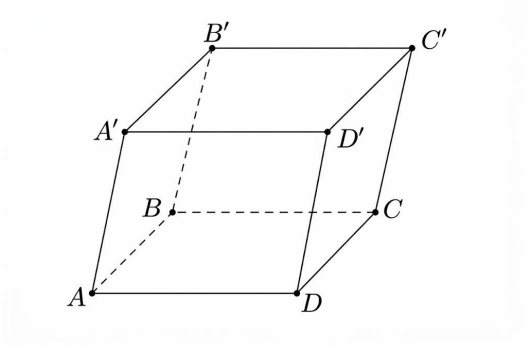
Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$ bằng

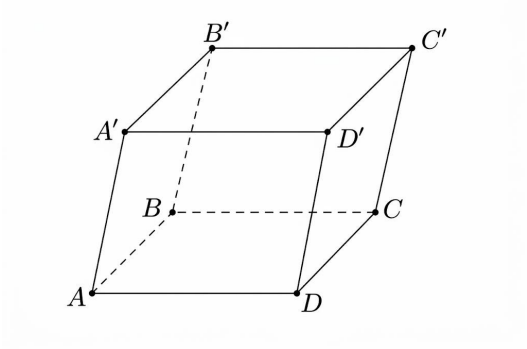
A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{A'C}$. **C.** $\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{C'A}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Khi đó $2.\overrightarrow{AO}$ bằng véc tơ nào sau đây?



A. $\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

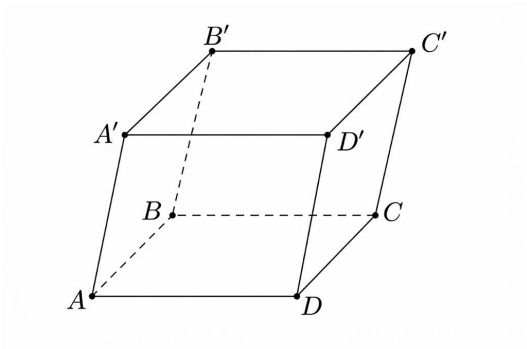


Chọn đẳng thức vectơ đúng:

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

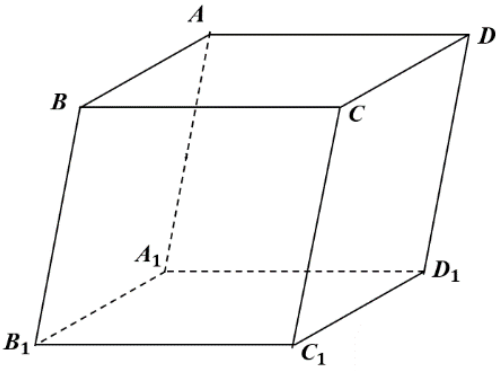


Biểu thức nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

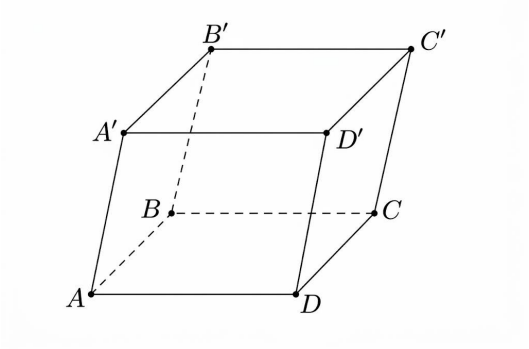
A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O.



Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

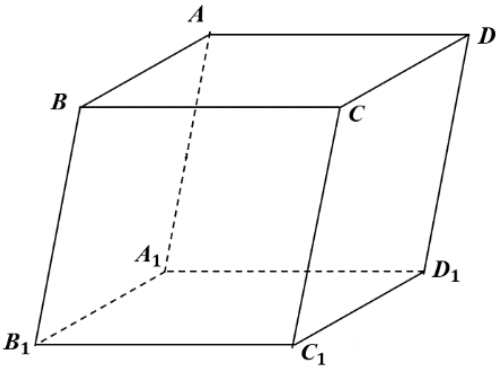
A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Chọn đẳng thức **sai?**

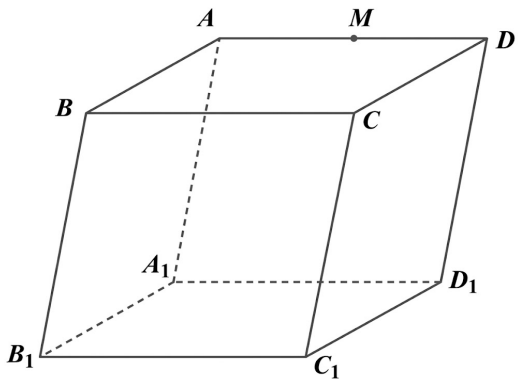
A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD.



Chọn đẳng thức đúng.

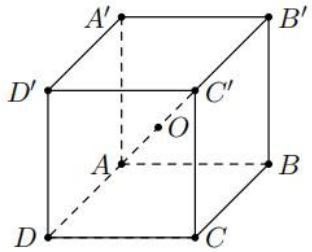
A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương.



Chọn đẳng thức đúng?

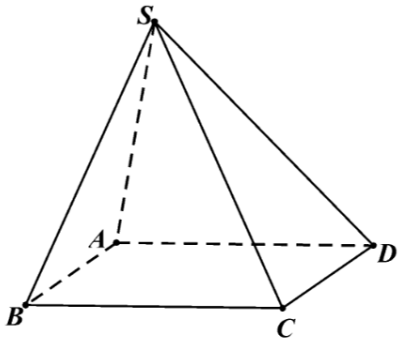
A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.



Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

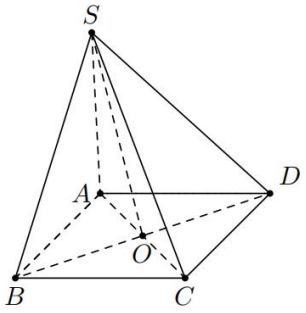
A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

C. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

D. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

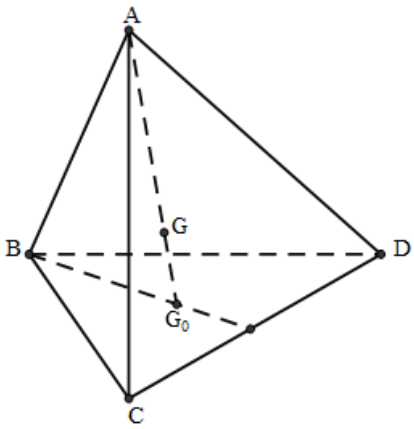
A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

D. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD).



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

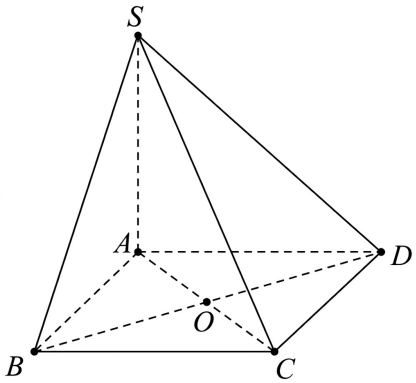
A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.

B. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.

D. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.



Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

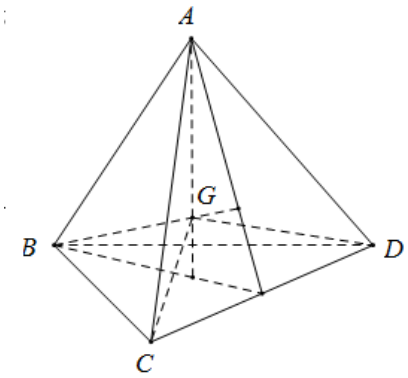
A. G, S, O không thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$

D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 20. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Mệnh đề nào sau đây **sai**.

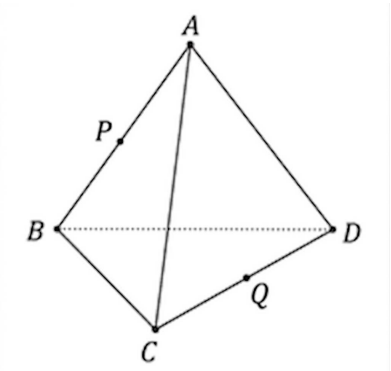
A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD.



Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Câu 22. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

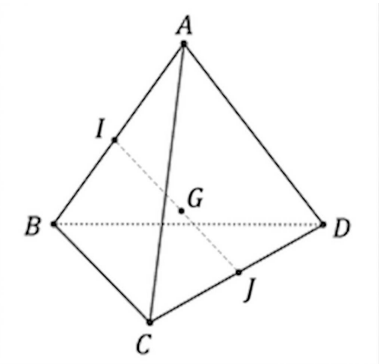
A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.



Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

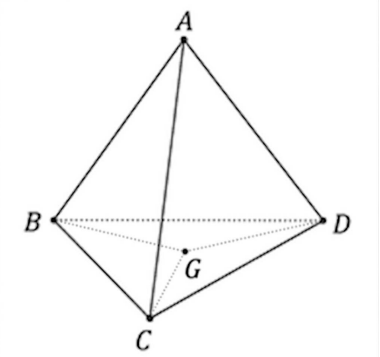
A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.



Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

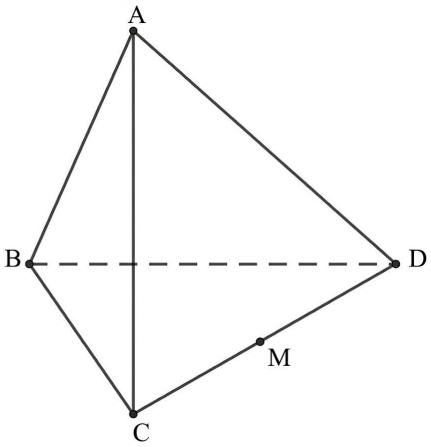
A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

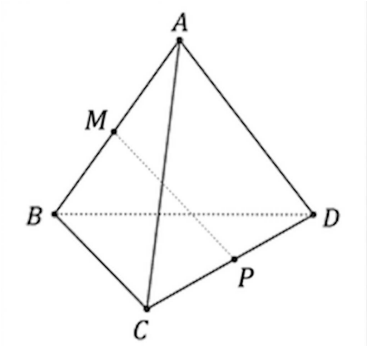
A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$

B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}$.



Khẳng định nào sau đây đúng.

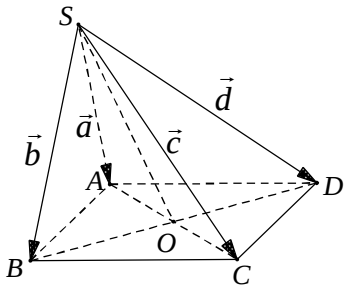
A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$.



Nhận xét nào sau đây đúng?

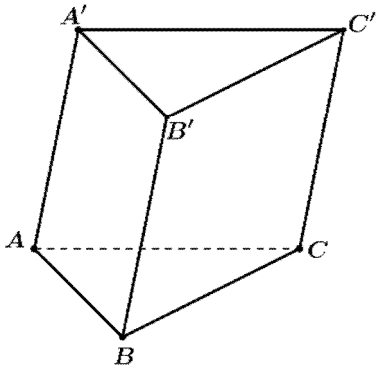
A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.

D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$.



Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

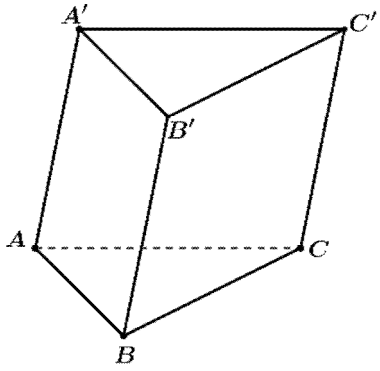
A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

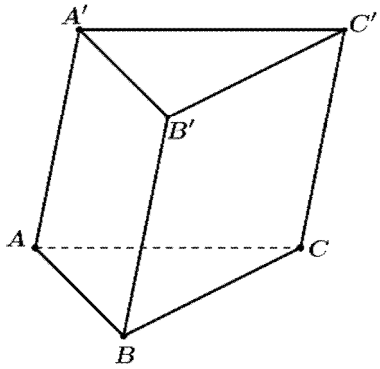
Câu 29. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

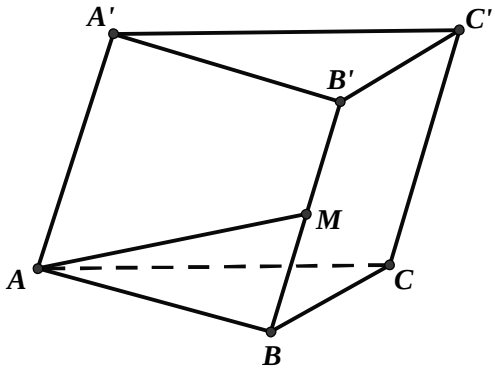
Câu 30. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$ **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$ **C.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$ **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$

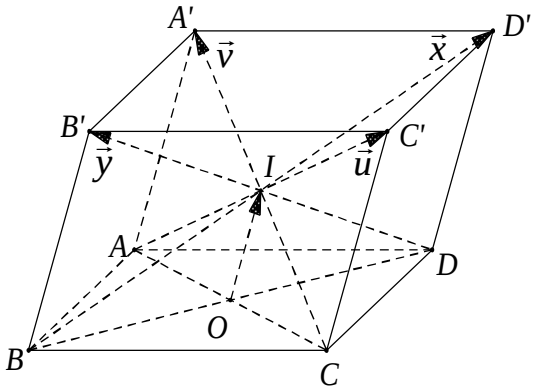
Câu 31. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm I. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$.



Khẳng định nào sau đây đúng?

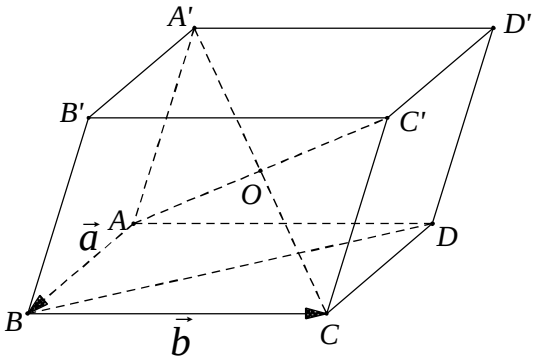
A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

D. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.



Nhận xét nào sau đây đúng?

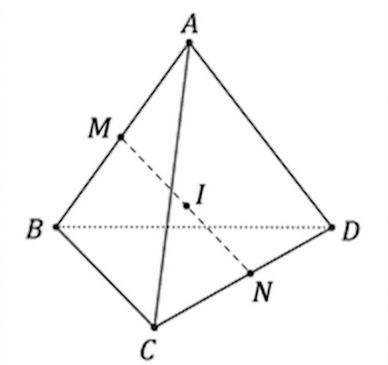
A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB'.

D. M là trung điểm CC'.

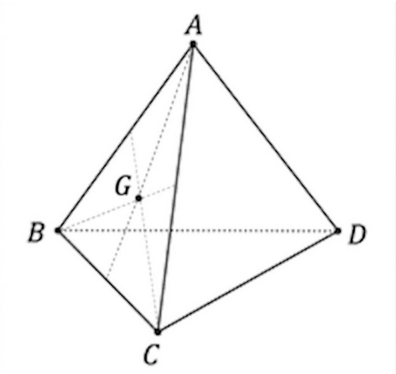
Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

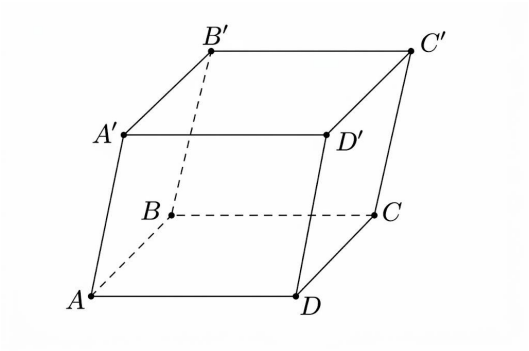
Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=\dfrac{1}{3}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $k=\dfrac{1}{2}$.

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Câu 37. Cho $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

A. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương

B. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng

C. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng

D. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Câu 38. Cho ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vecto $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Haivectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương. **B.** Haivectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Haivectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương. **D.** Đáp án A, B, C, đều sai.

Câu 39. Trong không gian, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 40. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^{\circ}$. **B.** $\alpha=0^{\circ}$. **C.** $\alpha=90^{\circ}$. **D.** $\alpha=45^{\circ}$.

Câu 41. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^{\circ}$. **B.** $\alpha=45^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=120^{\circ}$.

Câu 42. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$. **B.** $\alpha=180^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=45^{\circ}$.

Câu 43. Trong không gian, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $(\vec{a}+2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a}-4\vec{b})$ và $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=90^{\circ}$. **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$.

Câu 44. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^{0}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^{0}$.

Câu 45. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u}+2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2+2\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}(\vec{u}-\vec{v})$.

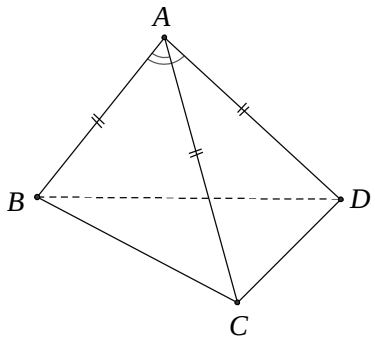
Câu 46. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 47. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=26;|\vec{b}|=28;|\vec{a}+\vec{b}|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

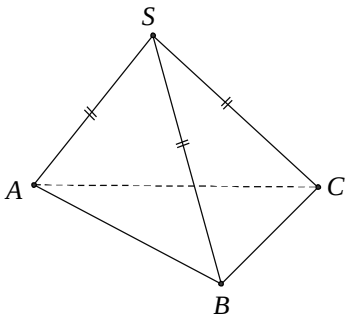
Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

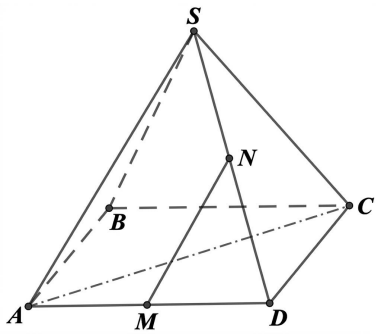
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

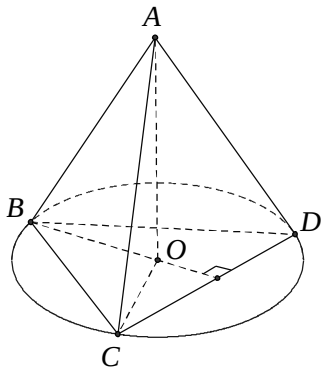
Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD.



Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45° **B.** 30° **C.** 90° **D.** 60°

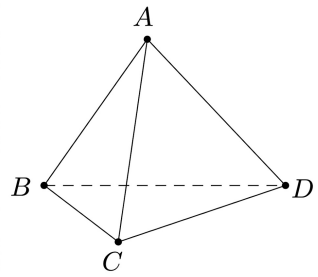
Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

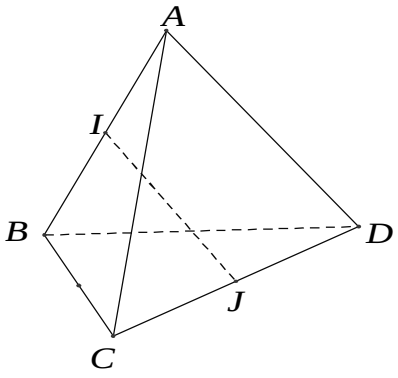
Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

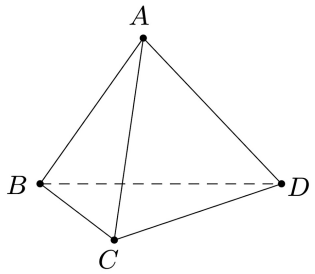
Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều.



Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

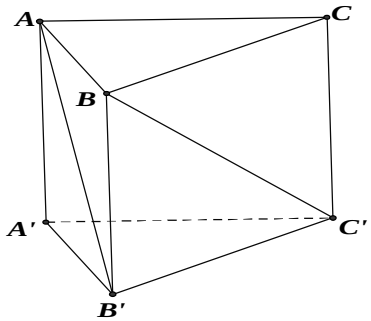
A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Câu 55. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=\sqrt{2}\,a$.



Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng bao nhiêu?

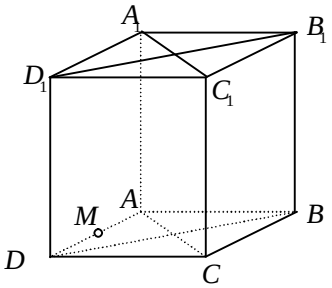
A. $60°$.

B. $45°$.

C. $90°$.

D. $30°$.

Câu 56. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD.



Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$.

B. a^2.

C. $\frac{3}{4}a^2$.

D. $\frac{3}{2}a^2$.

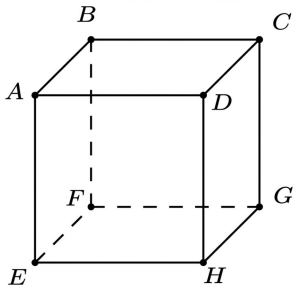
Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$

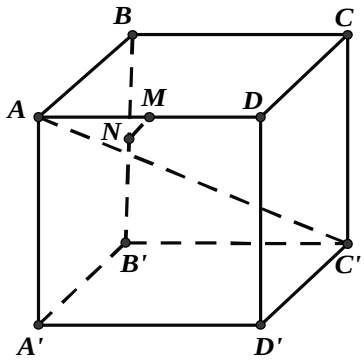
B. $60°$

C. $45°$

D. $120°$



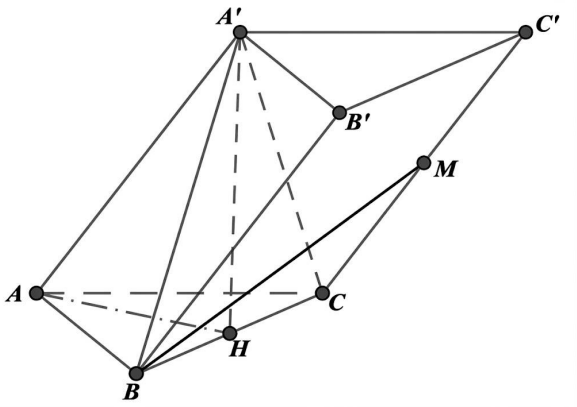
Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'.



Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'.



Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

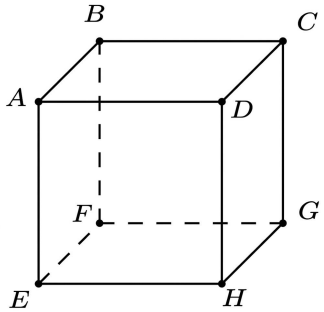
A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 60. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

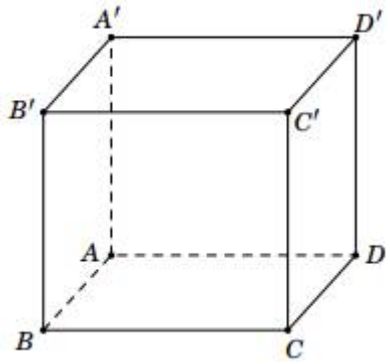
Câu 61. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.



Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, $AD\perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

***Bước 1*:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow AC\perp BD$

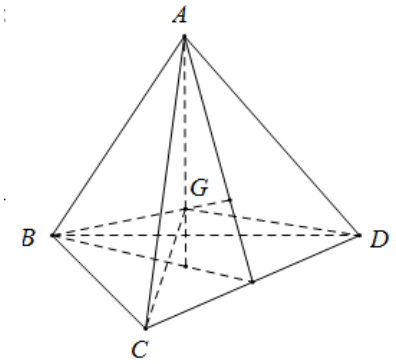
***Bước 2*:** Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD\perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB\perp CD$.

***Bước 3*:** Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng ba bước **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Chọn khẳng định đúng?

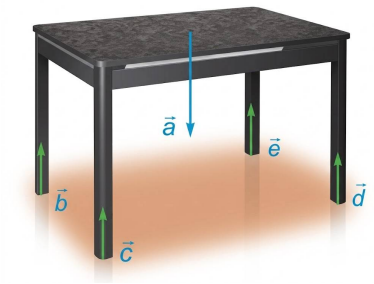
A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Câu 65. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

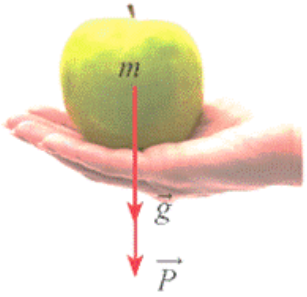
A. Vectơ $\vec{d}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

B. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ đối nhau.

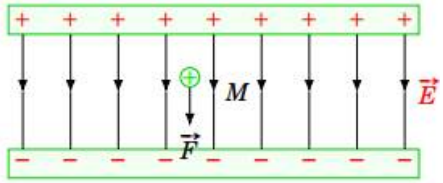
D. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Câu 66. Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9{,}8\ \text{m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 105 gam



A. 1,029 N. **B.** 1,433 N. **C.** 2,096 N. **D.** 1,477 N.

Câu 67. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}\text{C}$ và độ lớn điện trường $E=10^5$ (N/C)



A. 10^{-4} N. **B.** 2.10^{-6} N. **C.** 10^{-2} N. **D.** $1{,}8.10^{-6}$ N.

Câu 68. Theo định luật II Newton thì gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F}=m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right),\vec{F}$ là vectơ lực (N). Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



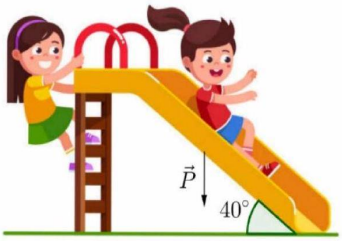
A. $10\,\mathrm{N}$. **B.** $15\,\mathrm{N}$. **C.** $20\,\mathrm{N}$. **D.** $25\,\mathrm{N}$.

Câu 69. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g=9,8m/s^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.



A. $10\,\mathrm{N}$. **B.** $15\,\mathrm{N}$. **C.** $20\,\mathrm{N}$. **D.** $25\,\mathrm{N}$.

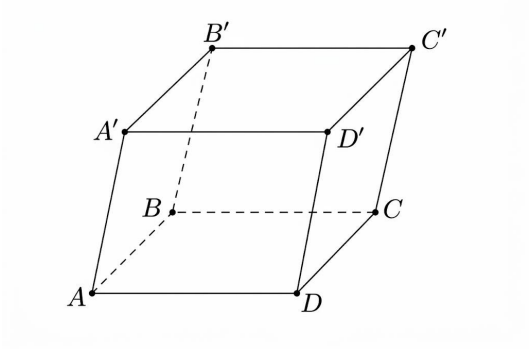
Câu 70. Một em bé cân nặng $m=20$ kg trượt trên cầu thang trượt dài $2m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 40°. Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính theo công thức $\vec{A}=\vec{F}\cdot\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt, biết $g\approx 10\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$. (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $306J$. **B.** $307J$. **C.** $257J$. **D.** $267J$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



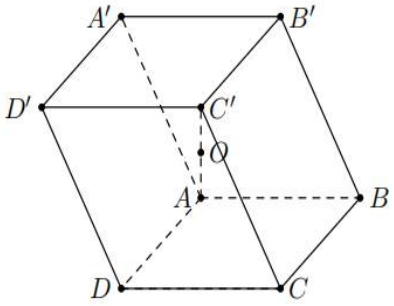
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, ngược chiều

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

Câu 72. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình hộp.



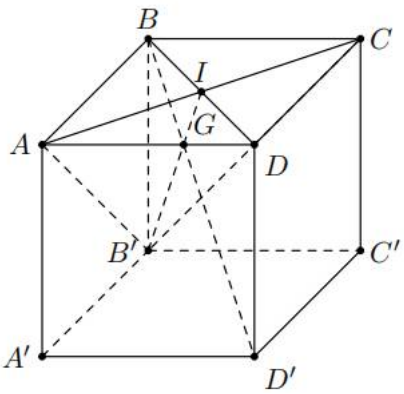
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{C'A}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

d) Với mọi điểm M ta đều có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$.

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).



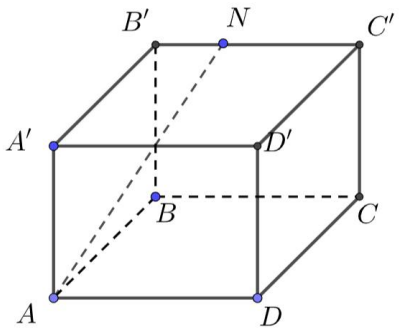
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}=0$.

d) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC'}\right)=30°$.

Câu 74. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có canh bằng a.



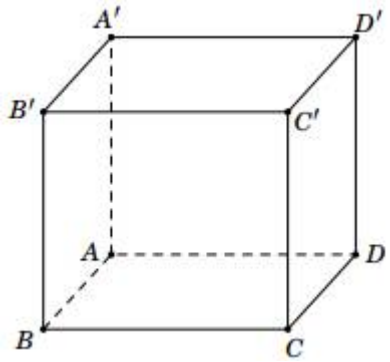
a) $\left|\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{DC'}\right|=a.$

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'C'}=a^2.$

d) Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}.$ Khi đó $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$

Câu 75. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .



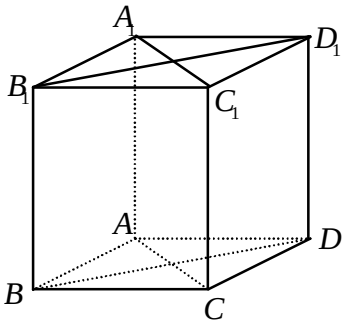
a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}\right)=60°$

c) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

d) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'D}=a^2$

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



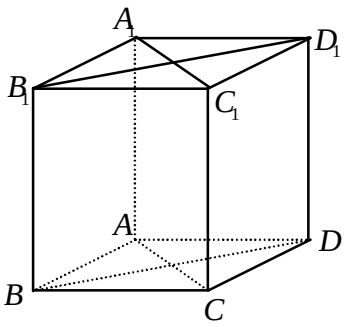
a) $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1A}$

b) $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AD}\right) = 60^0$

c) $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = 0$

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC} = a^2$

Câu 77. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.



a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A}$

b) $\left(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}\right) = 0^0$

c) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D} = 9a^2$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 78. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a;\ AD = a\sqrt{3};\ AA' = 2a$.

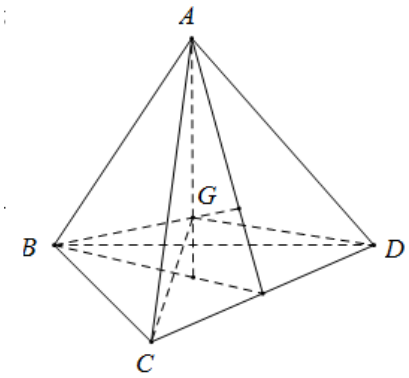
a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right| = 2\sqrt{2}a$

Câu 79. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



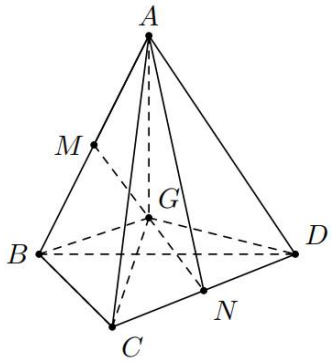
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN.



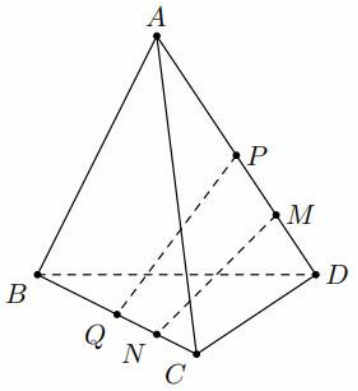
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 81. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC.



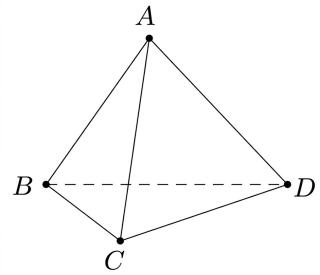
a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a.



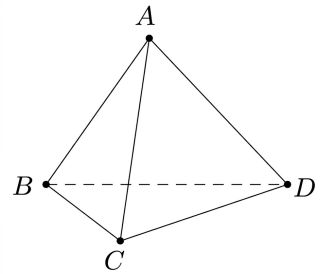
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}.$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 83. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.



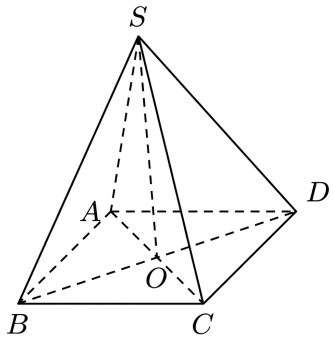
a) Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$, M là điểm tuỳ ý. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$

d) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{3a^2}{4}$

Câu 84. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.



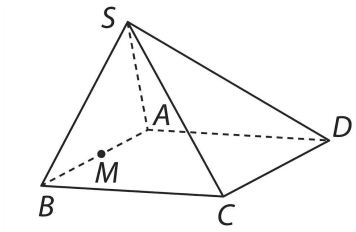
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, khi đó $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB=a$. Gọi M là trung điểm của AB.



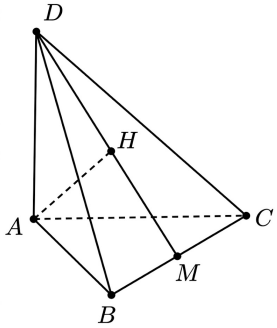
a) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AS}=-\dfrac{a^2}{2}$

d) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS}=0$

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc. Cạnh $AB=AC=a$. Gọi M là trung điểm của BC, H là trung điểm của MD.



a) $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{2}$

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $60°$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\dfrac{a^2}{4}$

d) $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{4}$

Câu 87. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài là $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là $45°$.

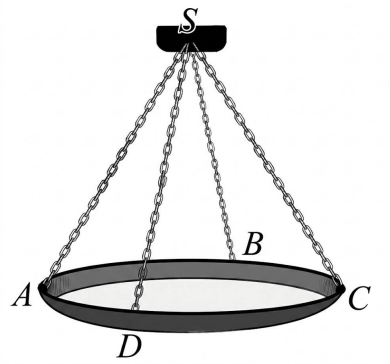
a) $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{2}$.

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=\sqrt{2}-25$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=13$.

Câu 88. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=60°$. Biết $\vec{P}=m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\ \text{m/s}^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg.



a) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

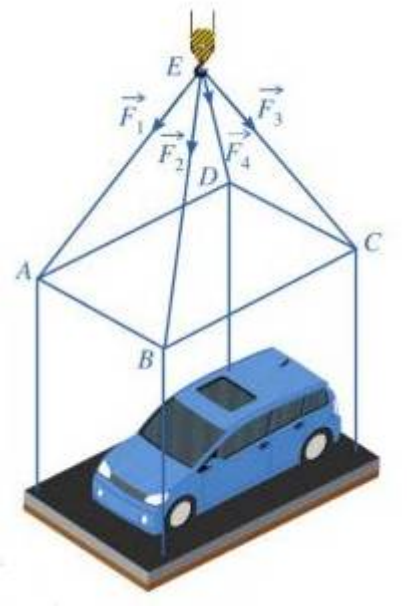
b) Tam giác SAC là tam giác vuông cân.

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $45\,N$.

d) Để đèn chùm đứng yên thì độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}N$

Câu 89. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo

phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\text{N}$



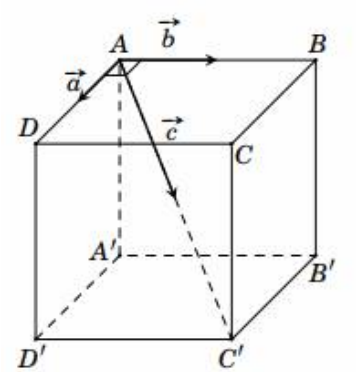
a) $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_4}$

b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16281(\text{N})$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 90. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N},\ 10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

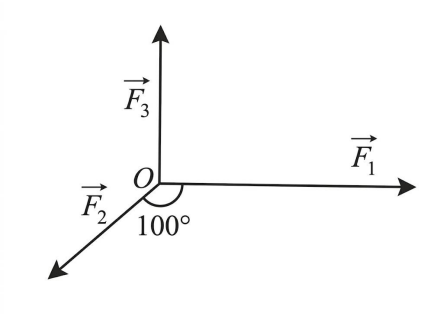
b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=33,6\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của N).

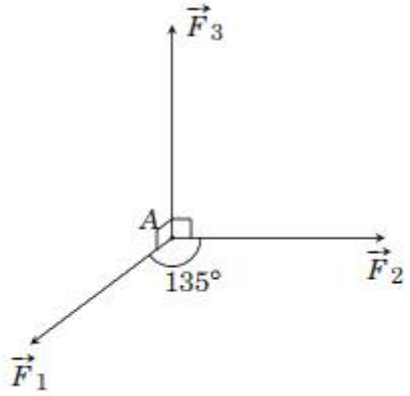
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 91. Có ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật O. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là $25N$ và $12N$. Lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $4N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của N).



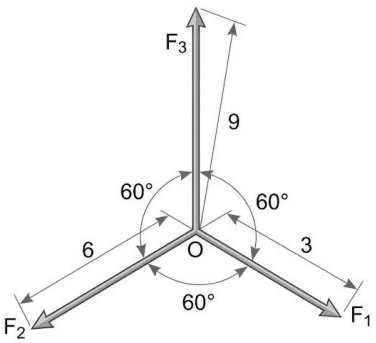
Trả lời: ……..

Câu 92. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)=135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là $20N$, $15N$ và $10N$ (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).



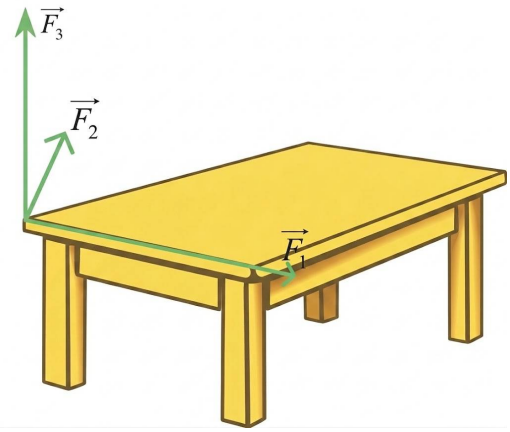
Trả lời: ……..

Câu 93. Có ba lực F_1,F_2,F_3 cùng tác động vào một vật O. Ba lực F_1,F_2,F_3 này đôi một hợp với nhau một góc $60°$ và có độ lớn lần lượt là $3N,6N$ và $9N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (đơn vị N).



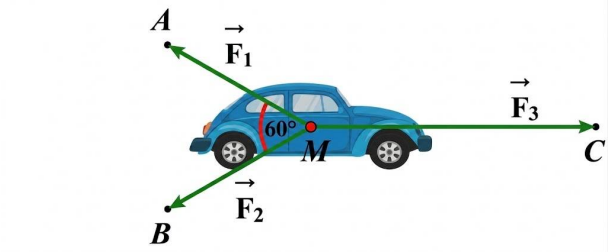
Trả lời: ……..

Câu 94. Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ có giá nằm trên mặt phẳng chứa mặt bàn, tạo với nhau một góc $130°$ và có độ lớn lần lượt là $30N$ và $10N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt bàn và có độ lớn $20N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn về hàng đơn vị của N).



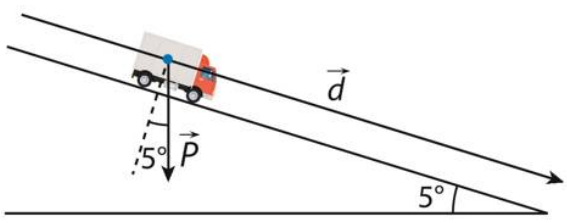
Trả lời: ……..

Câu 95. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên như hình vẽ. Cho biết cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $\widehat{AMB}=60°$. Khi đó cường độ lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của N)



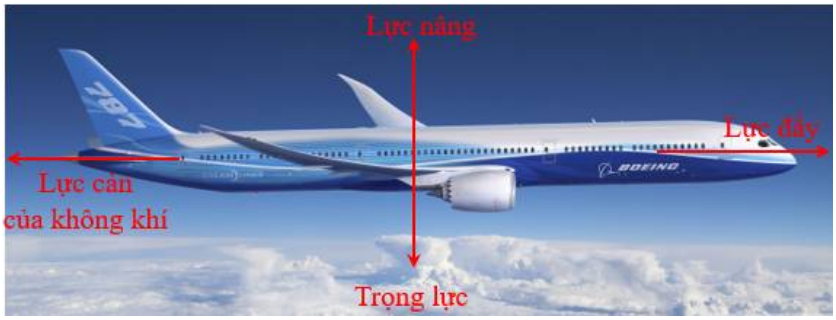
Trả lời: ……..

Câu 96. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng $0{,}15$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng $5°$ so với phương ngang. Tính công (đơn vị: J) sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30m$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9{,}8m/s^2$.



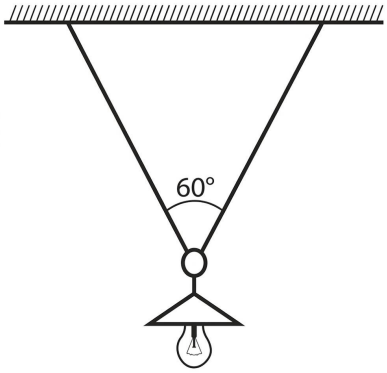
Trả lời: ……..

Câu 97. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ $800\,km/h$ lên $840\,km/h$, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc $800\,km/h$ và $840\,km/h$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Biết $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$, khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



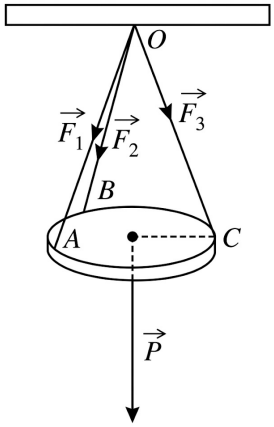
Trả lời: ……..

Câu 98. Người ta treo một bóng đèn có khối lượng $m = 0,5$ kg bằng cách luồn sợi dây qua một cái móc của đèn và hai đầu dây được gắn chặt trên trần nhà. Hai nửa sợi dây có chiều dài bằng nhau và hợp với nhau một góc bằng $60°$ như hình vẽ. Tính lực căng của mỗi nửa sợi dây là bao nhiêu? Lấy $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: ……..

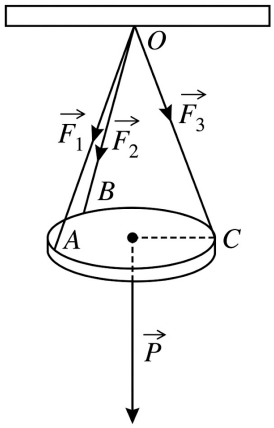
Câu 99. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

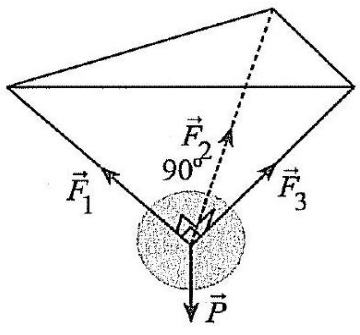
Trả lời: ……..

Câu 100. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đều có độ lớn bằng $60(N)$. Cho biết các đường thẳng OA,OB,OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng $30°$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (đơn vị N).



Trả lời: ……..

Câu 101. Treo một vật nặng có trọng lượng $100(N)$bởi ba sợi dây giống hệt nhau và có độ dài bằng nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc $90°$ như hình vẽ. Gọi $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực $\vec{F_1}$ bằng bao nhiêu Niutơn? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)



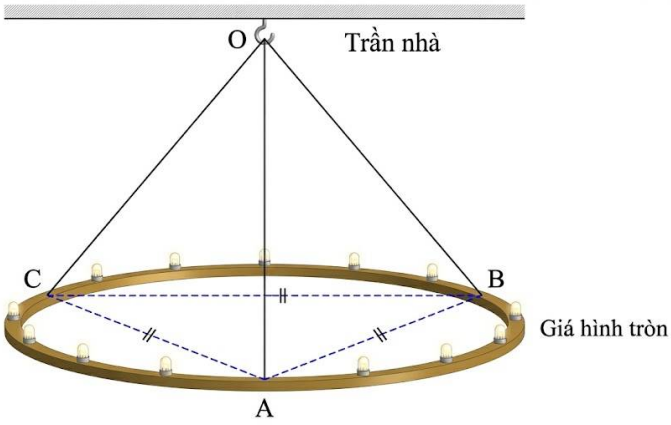
Trả lời: ……..

Câu 102. Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân. Trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là 30 N và được phân bố thành ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lên ba chân của giá đỡ. Ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau và góc tạo bởi mỗi chân của giá đỡ và mặt đất là $60°$. Hỏi độ lớn của lực $\overrightarrow{F_1}$ là bao nhiêu Niutơn *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?*



Trả lời: ……..

Câu 103. Một chiếc đèn trang trí (gồm các bóng đèn gắn vào một giá hình tròn) như hình bên dưới. Đèn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên giá sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L, trọng lượng của chiếc đèn là $27N$, bán kính của giá hình tròn là $0,5m$. Biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $12N$. Hỏi chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



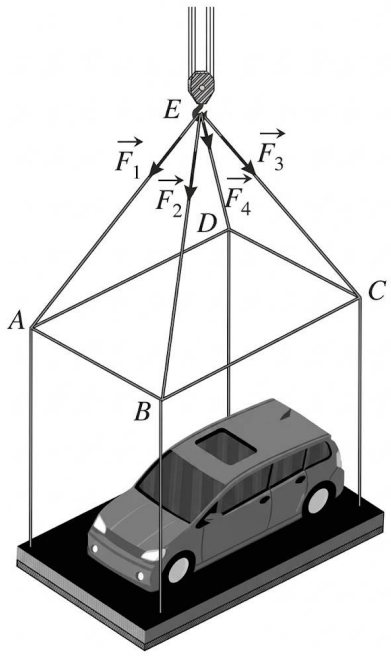
Trả lời: ……..

Câu 104. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dài $60(cm)$ miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính $20(cm)$, ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mối thắt của 3 sợi dây và mối nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi chịu không quá $15N$ trọng lượng của miếng giá gỗ là $5N$. Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



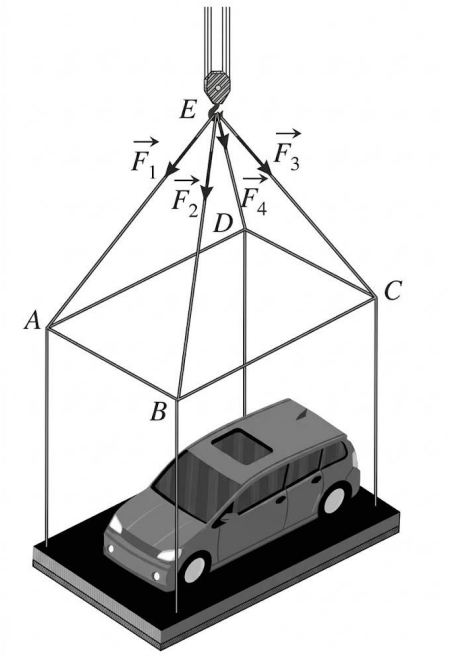
Trả lời: ……..

Câu 105. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $500(N)$ và trọng lượng khung sắt là $200(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị: N, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



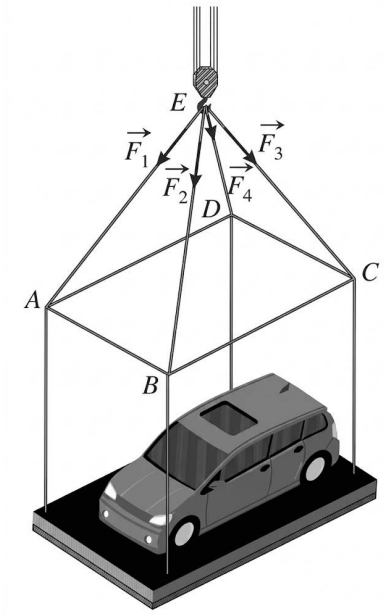
Trả lời: ……..

Câu 106. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$ như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $8000(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

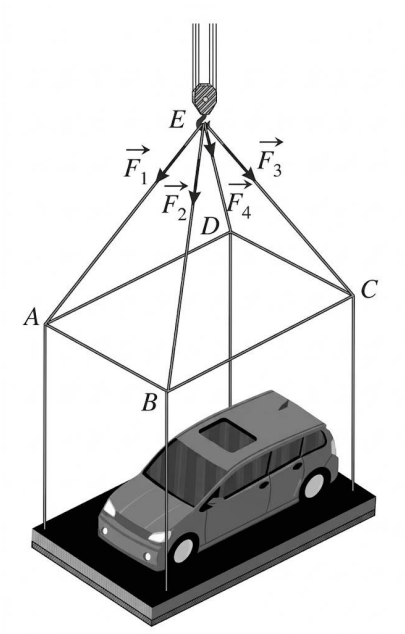
Câu 107. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right| = \left|\vec{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là $1000(N)$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô là $4000(N)$. Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp. (làm tròn đến hàng đơn vị)



Trả lời: ……..

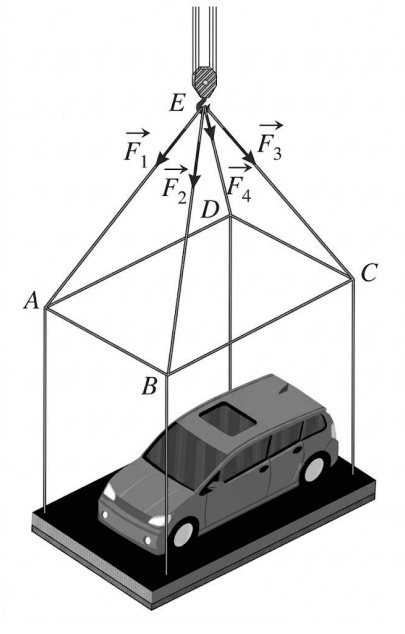
Câu 108. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó

được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp $EA;EB;EC;ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng $\overrightarrow{F_1};\overrightarrow{F_2};\overrightarrow{F_3};\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4800\,N$, trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6}\,N$. Tính $\sin\alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



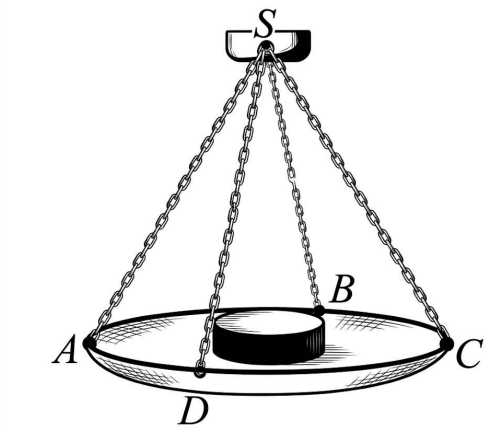
Trả lời: ……..

Câu 109. Trong không gian, một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$. Tìm $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|$ (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của Niu-tơn*).



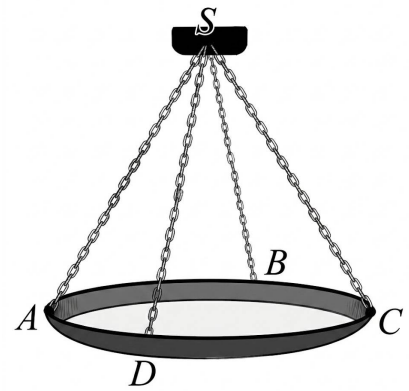
Trả lời: ……..

Câu 110. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=4\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=60°$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$(N). Biết trọng lượng của vật nặng được tính theo công thức $P=mg$, lấy $g=10\,\text{m/s}^2$. Khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



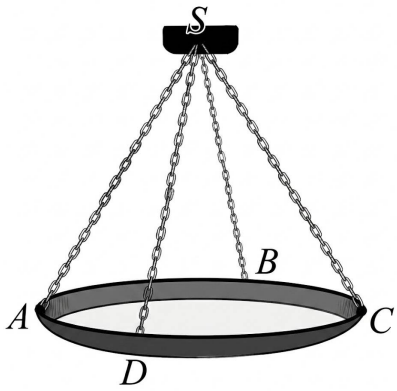
Trả lời: ……..

Câu 111. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m=10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA,SB,SC,SD cùng chất liệu và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều . Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g=10\left(m/s^2\right)$, tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp (đơn vị N).



Trả lời: ……..

Câu 112. Một chùm đèn có khối lượng $m=20(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD cùng chất liệu nhẹ và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90^0$. Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g=10\left(m/s^2\right)$ và lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}\ (N)$. Tìm độ lớn của lực căng (đơn vị N) của mỗi sợi dây cáp (làm tròn đến hàng phần chục).



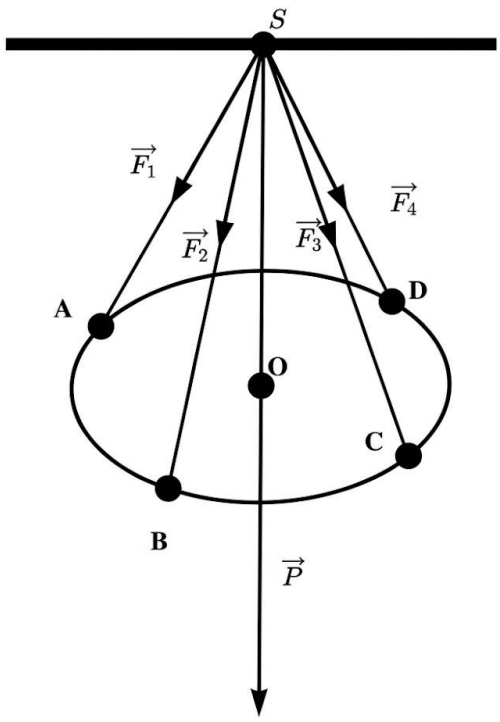
Trả lời: ……..

Câu 113. Người ta vận chuyển một thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc 4 dây cáp vào 4 góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ. Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là $60°$. Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ biểu diễn lực căng của 4 sợi dây, chịu được tối đa lực căng là $5000N$. Hỏi cần cẩu nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy $g = 10 \text{ m}/\text{s}^2$.



Trả lời: ……..

Câu 114. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi bốn dây không dãn xuất phát từ điểm S trên trần nhà lần lượt buộc vào bốn điểm $A;B;C;D$ trên nền tròn sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Độ dài của bốn đoạn dây SA, SB, SC, SD đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $32N$ và bán kính của chiếc đèn là $60cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L. Tìm chiều dài (đơn vị centimet) tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế chịu được lực căng tối đa là $12N$.



Trả lời: ……..

Câu 115. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 116. Trong không gian, cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3$ và $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 117. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$. Tính $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 118. Trong không gian, cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{c}\right|=5$ và $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0}$. Khi đó biểu thức $M=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 119. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

Trả lời: ……..

Câu 120. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 121. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Trả lời: ……..

Câu 122. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD'}=k.\overrightarrow{BG}$.

Trả lời: ……..

Câu 123. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\dfrac{3}{2}AD, \widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60°, CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Tính giá trị $\cos\varphi$.

Trả lời: ……..

Câu 124. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Biết $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$, khi đó giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 125. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

Trả lời: ……..

Câu 126. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

Trả lời: ……..

Câu 127. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ ta được $\overrightarrow{AG}=a.\vec{x}+b.\vec{y}+c.\vec{z}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b+3c$.

Trả lời: ……..

Câu 128. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MP}$ theo ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ta được $\overrightarrow{MP}=x.\vec{b}+y.\vec{c}+z.\vec{d}$ với $x,y,z\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Trả lời: ……..

Câu 129. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AA'}$ ta được $\overrightarrow{AM}=a.\overrightarrow{CA}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{AA'}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 130. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

Trả lời: ……..

Câu 131. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh 10. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 132. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1;G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1. Biết $\overrightarrow{AC_1}=a\overrightarrow{AG_1}+b\overrightarrow{AG_2}$. Tính $a+b$

Trả lời: ……..

Câu 133. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$ và $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}$. Tìm giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$.

Trả lời: ……..

Câu 134. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M,N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{DC}$. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Câu 135. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$ khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 136. Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C=\dfrac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Trả lời: ……..

Câu 137. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI}=a\overrightarrow{AA'}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 138. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,BD và AC sao cho $BC=4BM,AC=3AP,BD=2BN$. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\dfrac{AQ}{AD}$.

Trả lời: ……..

Câu 139. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO. Khi giá trị biểu thức $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{SM}{SO}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA = 3, SB = 4, SC = 5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{SA_1^2} + \dfrac{1}{SB_1^2} + \dfrac{1}{SC_1^2}$.

Trả lời: ……..

CHƯƠNG 2
VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 6
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

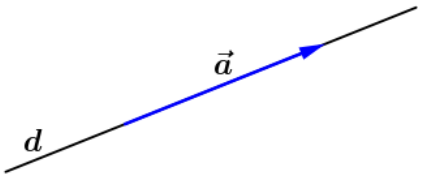
1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},...$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

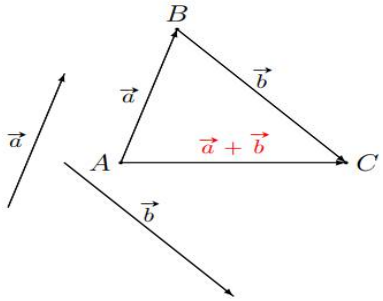
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA},\overrightarrow{BB},...$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý và các điểm B,C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$,** kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ.**

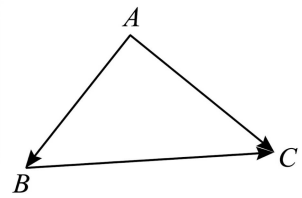


Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

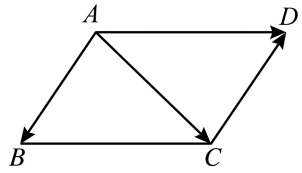
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Nhận xét: Đối với vectơ trong không gian, ta có các quy tắc sau:

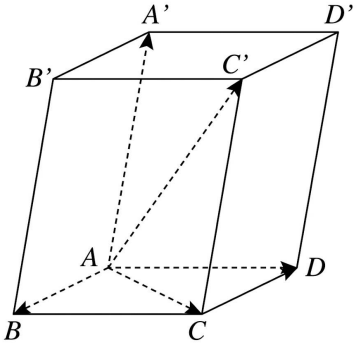
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A,B,C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



b. Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$.

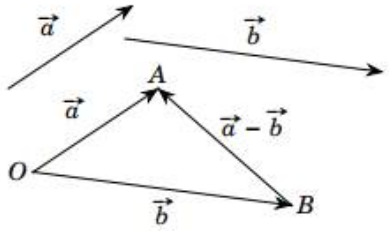
Chú ý:

- Hai vectơ đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

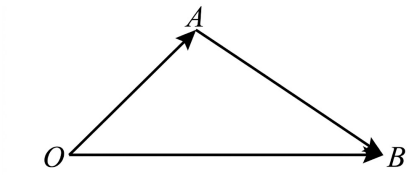
Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ.**



Nhận xét: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vectơ trong không gian

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$
- Có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với vectơ.**

Chú ý:

- Quy ước: $k.\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Nếu $k.\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Tương tự như phép nhân một số với vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là vectơ bất kỳ thì $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kỳ thì $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là vectơ bất kỳ thì $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Chú ý:

- Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

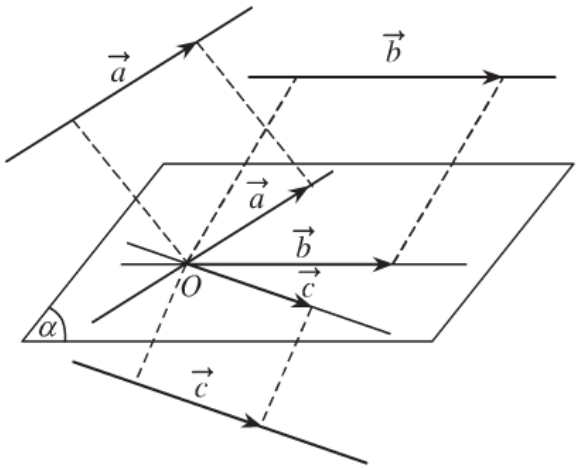
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

Sự đồng phẳng của ba vectơ (tham khảo thêm)

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$
- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

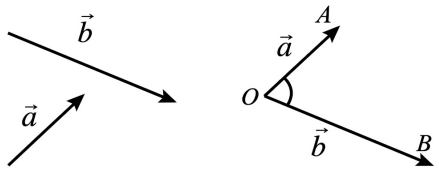
  Khi đó: $\exists m,n,p\in\mathbb{R}:\ \vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

a. Góc giữa hai vectơ trong không gian

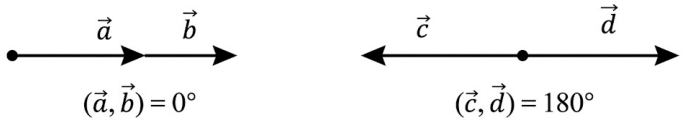
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ $\left(0^\circ\le\widehat{AOB}\le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$

và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



Chú ý:

- $0^o \le \left(\vec{a},\vec{b}\right) \le 180^o$
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



b. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Chú ý:

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.
- Mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

Nhận xét: Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có tính chất như tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

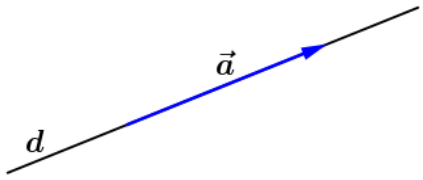
Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH VECTƠ

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ được gọi là bằng nhau, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Hai vectơ được gọi là đối nhau, nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

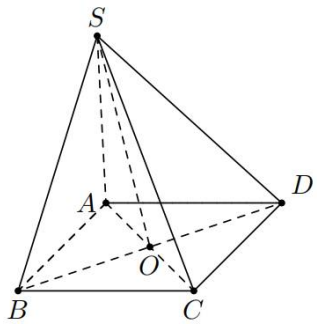
a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.

b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AD}$.

c) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OA}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O.

d) Có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O.

Lời giải



a) Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SA}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD//BC$. Do đó các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AD}$ là: $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

c) Vì O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{OA}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O là: $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}$

d) Vì O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên $OB = OD$, do đó vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm S, A, B, C, D, O là: $\overrightarrow{DO}$

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

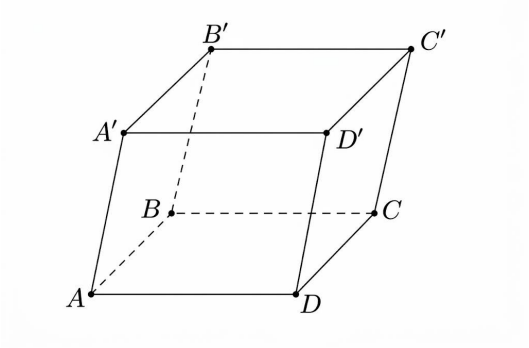
a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

d) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



a) Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD'}$

b) Do $AB // DC // D'C' // A'B'$ (tính chất hình hộp) nên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'A'}$

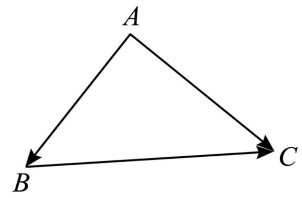
c) Do các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $AA' = BB' = CC' = DD'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

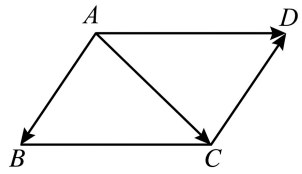
d) Do vectơ $\overrightarrow{D'B'}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $BD = D'B'$ (tính chất hình hộp) nên vectơ $\overrightarrow{D'B'}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

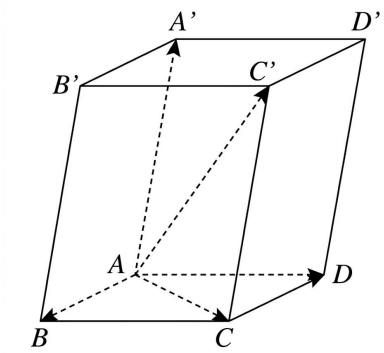
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

Bài 1. Trong không gian, cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Ta có: $VT=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=VP$ suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có:

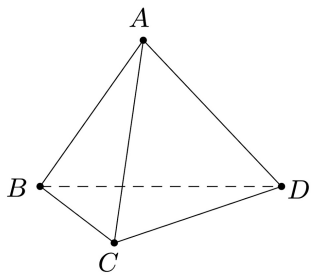
$VT=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}=VP$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



a) Ta có: $VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=VP$

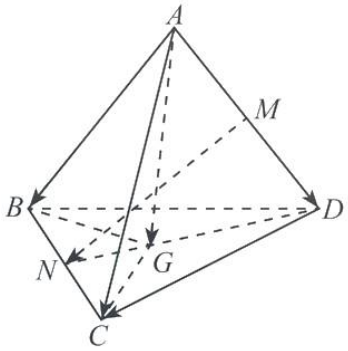
b) Ta có: $VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=VP$

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Lời giải



a) Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$.

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

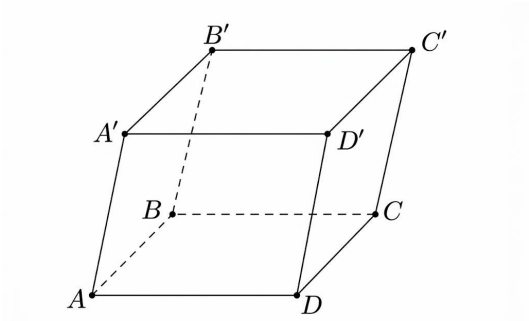
Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$

c) $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CA'}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\left(-\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}$

b) Ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$.

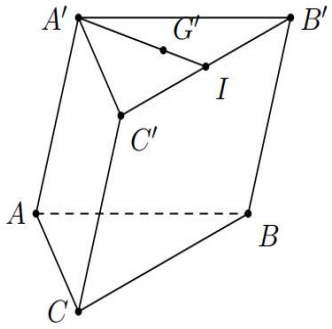
Bài 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}$.

b) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}$.

c) Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Lời giải



a) Ta có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

b) Ta có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.

c) Gọi I là trung điểm $B'C'$. Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'\Rightarrow\overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta lại có:

$$\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$$

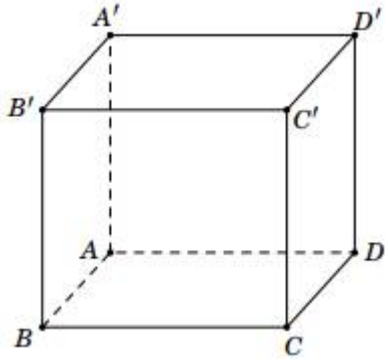
DẠNG 3
TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ

Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông tại A nên theo Pythagone: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$

Vậy độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$

b) Tam giác ABC' vuông tại C nên theo Pythagone: $AC'=\sqrt{AC^2+C'C^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$

Vậy độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ là: $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$

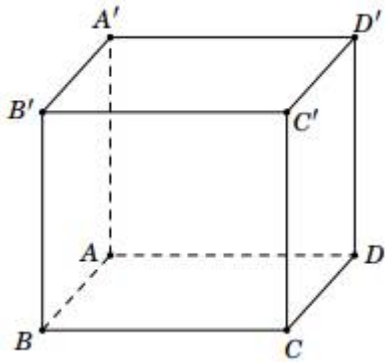
Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}$

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{D'C'}$

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$, chứng minh $\overrightarrow{A'C}=3\overrightarrow{A'G}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{A'G}$.

Lời giải



a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$

Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$

Do đó $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{CA'}\right|$

$ABCD$ cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$

Tam giác ACA' vuông tại A nên theo Pythagone: $CA' = \sqrt{AC^2 + AA'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Vậy độ dài của vectơ $\vec{u}$ là: $|\vec{u}| = |\overrightarrow{CA'}| = a\sqrt{3}$

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BB'} - \left(\overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'B'}\right) = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'} + \left(-\overrightarrow{D'B'}\right) = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD}$

Suy ra $|\vec{v}| = |\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$

c) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$. Khi đó theo quy tắc hình hộp ta có:

$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GD'} = 3\overrightarrow{A'G}$

Do đó $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$ hay $|\overrightarrow{A'G}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{A'C}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{CA'}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

DẠNG 4
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ
PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ

Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, trong đó O và $\vec{a}$ đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:

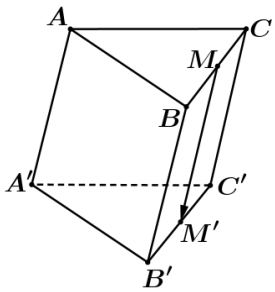
- Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k.
- Trung điểm của đoạn thẳng.
- Hình bình hành.
- Hình hộp.
- Trọng tâm tam giác.
- Trọng tâm của tứ diện, …

Bài 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA'=CC'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM'=BB'$.

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM'=AA'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

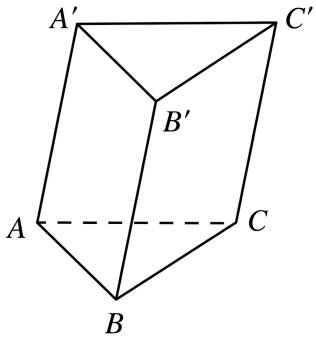
Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Lời giải



a)

Ta có: $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

b) Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên:

$3\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

a) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}\right)+\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB}\right)+\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SC}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$

b) Vì D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$ nên:

$\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DS}+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SA}\right)+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}\right)+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

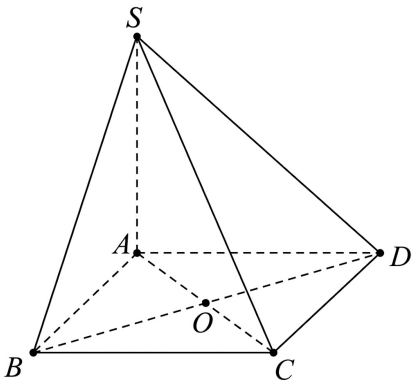
$\Rightarrow \overrightarrow{SD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

Lời giải



a)

• Ta có $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Do đó: $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

• Ta có $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Do đó: $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b)

• Ta có $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

Do đó: $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

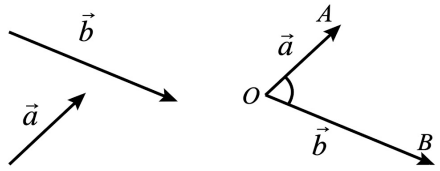
• Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}-\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SO}-\left(\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

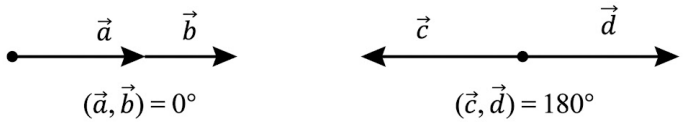
Do đó: $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

DẠNG 5
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$



- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



2. Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$
- $\vec{a}^2\ge 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$
- $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

Bài 1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc $120°$ và $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$.

a) Tính $\vec{a}.\vec{b}$

b) Tính $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

c) Tính $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=3.5.\cos 120°=-4$

b) Ta có: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}-2|\vec{b}|^2=9+3.5-2.25=-26$.

c) **Cách 1 :**

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=9+4.25+4.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=79$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{79}$$

Cách 2 :

Vẽ hình bình hành $ABCD$ sao cho: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Áp dụng định lí hàm côsin trong tam giác ACD:

$AC=\sqrt{CD^2+AD^2-2CD.AD.\cos 60°}=\sqrt{79}$.

Bài 2. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$.

a) Tính $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

b) Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Lời giải

a) Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$

b) $\left(3\vec{a}+5\vec{b}\right)^2=9\vec{a}^2+30\vec{a}\vec{b}+25\vec{b}^2=9+90.\frac{1}{2}+25=79.$

$$\Rightarrow\left|3\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{79}$$

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$. Xác định x sao cho thỏa mãn $\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có:

$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(x\vec{a}+\vec{b}\right)^2=3$

$\Leftrightarrow x^2\vec{a}^2+2x\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=3$

$\Leftrightarrow x^2+2x\cos 60^0+1=3$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bài 4. Trong không gian, cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Ta có:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}.\vec{v}=0 \\ \vec{x}.\vec{y}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)=0 \\ \left(\vec{a}-4\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7\left|\vec{a}\right|^2-15\left|\vec{b}\right|^2=-16\vec{a}.\vec{b} \\ 7\left|\vec{a}\right|^2+8\left|\vec{b}\right|^2=30\vec{a}.\vec{b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b} \\ \left|\vec{a}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b} \\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right| \end{array}\right.$$

Từ đó, ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$

Bài 5. Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|=1, \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}$.

Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=2k\vec{a}-\vec{b}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°$

Lời giải

$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\vec{b}=15\Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b}=1$.

$\vec{u}\vec{v}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2k\vec{a}-\vec{b}\right)=2k\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+(2k-1)\vec{a}\vec{b}=2k-4+\dfrac{2k-1}{2}$.

$\left(\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\right)^2=\left(\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|\left|\left(2k\vec{a}-\vec{b}\right)\right|\right)^2=\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\vec{b}\right)\left(4k^2\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-4k\vec{a}\vec{b}\right)=\left(5+2\vec{a}\vec{b}\right)\left(4k^2+4-4k\vec{a}\vec{b}\right)$

$=6\left(4k^2+4-2k\right)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|=\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}$.

$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°\Rightarrow\cos\left(60°\right)=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{2k-4+\dfrac{2k-1}{2}}{\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}}\Leftrightarrow\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}=6k-9$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}=6k-9\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} k\ge\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{6\left(4k^2+2-k\right)}=6k-9 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} k\ge\dfrac{3}{2} \\ 12k^2-96k+57=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} k\ge\dfrac{3}{2} \\ k=4\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow k=4+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

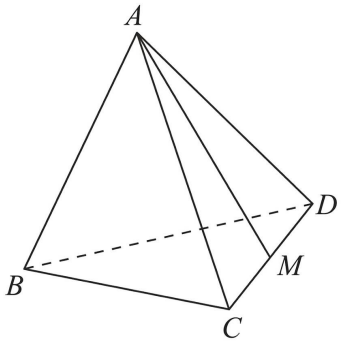
Bài 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=a.a.\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

mà $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}\right)=\dfrac{a^2}{2}$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}$.

AM là trung tuyến của các tam giác đều ACD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$.

BM là trung tuyến của các tam giác đều BCD nên $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}=0$.

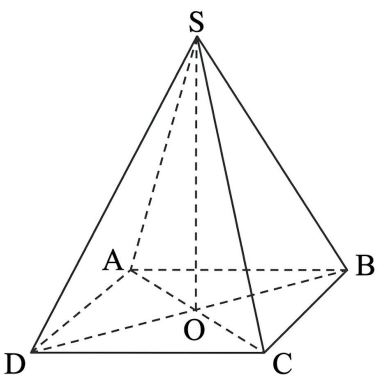
Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90°$

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a.

a) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều suy ra $\widehat{SAD}=60^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ suy ra $\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{SAD}=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos 60^\circ=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA=SC=a$ và $AC=\sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S

Suy ra $\widehat{SAC}=45^\circ$, do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\widehat{SAC}=a.\sqrt{2}a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

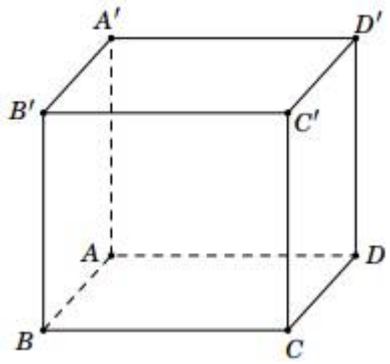
Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$

b) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$

Lời giải



a) Ta có:

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{CAB}=45°$;

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD'}\right)=90°$

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}\right)=180°-\widehat{ACD}=180°-45°=135°$

$\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{C'BD}$ mà tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên khi đó ta có

$\widehat{C'BD}=60°$.

b) Ta có $AC=BD=B'D'=5\sqrt{2}$ suy ra:

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos 45°=25$
- Do AC vuông góc với $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}=0$
- $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}=AD'.BD.\cos 60°=5\sqrt{2}.\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}=25$

c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}=0$

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = 5^2 - 5^2 = 0$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$ (điều phải chứng minh)

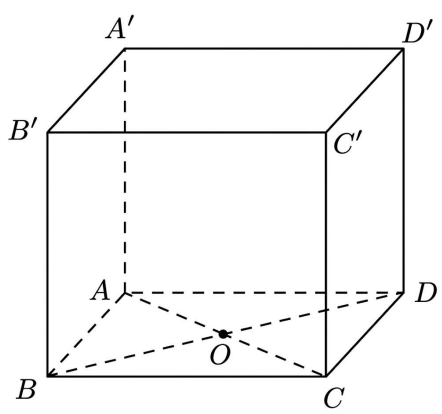
Bài 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$; $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

b) Tính $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BB'}$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính $\left(\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{AC'}\right).\overrightarrow{BD'}$.

Lời giải



a) Ta có:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90°$

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45°$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$, suy ra $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = \left(\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C}\right) = \widehat{D'B'C}$

Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{D'B'C} = 60°$.

Vậy $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = 60°$.

b) $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'}\right) = \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\cos\widehat{A'AC'}$

$= \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\dfrac{\left|\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|} = \left|\overrightarrow{AA'}\right|^2 = a^2$

c) $\left(\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{AC'}\right).\overrightarrow{BD'} = \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC'}\right).\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{AO}\right).\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'}\right)$

$= \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{DD'}$

Ta có

$\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = 0$

$\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD} = 0$

$\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{DD'} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{DD'} = 0$

$\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DD'} \Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{DD'} = 0$

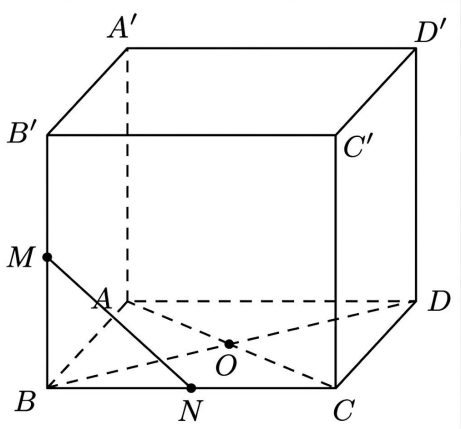
Vậy $\left(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{AC'}\right).\overrightarrow{BD'}=0$

Bài 9. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ sau : $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$; $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm BB' và BC. Tính $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AO}$.

Lời giải



a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau, suy ra $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=180°$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{C'C}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=2.2.\cos180°=-4$

Vì $A'ADD'$ là hình chữ nhật nên $\widehat{A'AD}=90°$ và $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{A'AD}=90°$

Ta có: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=2.1.\cos90°=0$

Vì $A'ABB'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{BA}$. Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAB}=45°$ và $AC=\sqrt{2}$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\sqrt{2}.1.\cos45°=-1$.

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{B'C'}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'C}.\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{C'C}.\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{4}.0$ (do $\overrightarrow{C'C}\perp\overrightarrow{AC}$)

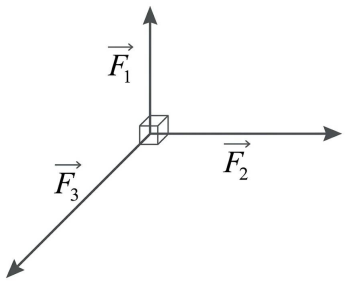
$=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\widehat{ACB}$

$=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\frac{BC}{AC}$

$=\frac{1}{4}BC^2=\sqrt{2}$

DẠNG 6
BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $6N;9N;12N$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Lời giải

Gọi $\overrightarrow{F_{hl}}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, tức là $\overrightarrow{F_{hl}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

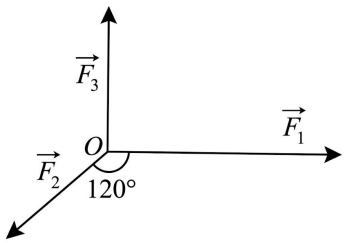
$$\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|^2=\overrightarrow{F_{hl}}^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3}$$

$$=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)+2\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)$$

$$=6^2+9^2+12^2+0+0+0=261$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|=\sqrt{261}N$$

Bài 2. Có ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật O. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ hợp với nhau một góc $120°$ và có độ lớn lần lượt là $20N$ và $16N$. Lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $12N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của N).



Lời giải

Cách 1:

Ta có $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=120°,\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)=90°,\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)=90°$

Gọi $\overrightarrow{F_{hl}}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, tức là $\overrightarrow{F_{hl}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

$$\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|^2=\overrightarrow{F_{hl}}^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3}$$

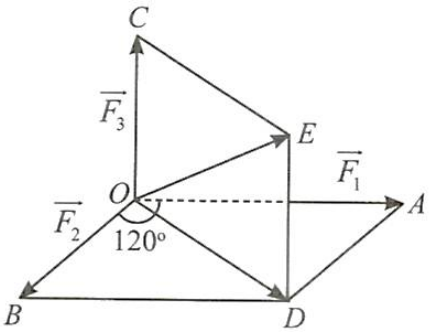
$$=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)+2\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)$$

$=20^2+16^2+12^2+2.20.16.\cos 120°+0+0=480$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|=\sqrt{480}=4\sqrt{30}N$

Cách 2:

Gọi $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ lần lượt là ba lực tác động vào một vật đặt tại điểm O như hình vẽ.



Ta có $\vec{F}_1=\overrightarrow{OA},\vec{F}_2=\overrightarrow{OB},\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OC}$.

Độ lớn các lực: $F_1=OA=20\,N, F_2=OB=16\,N$, $F_3=OC=12N$.

Dựng hình bình hành $OADB$. Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Suy ra $\overrightarrow{OD}^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Mà $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\cdot OB\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, suy ra $OD^2=OA^2+OB^2+2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 120°$.

Dựng hình bình hành $ODEC$.

Tổng lực tác động vào vật là $\vec{F}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Độ lớn của hợp lực tác động vào vật là $F=OE$.

Vì $OC\perp(OADB)$ nên $OC\perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

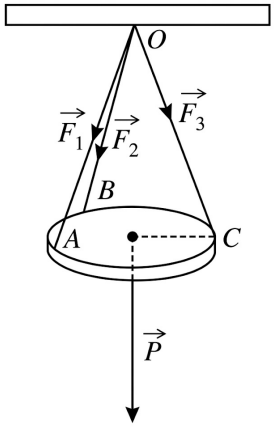
Khi đó, $OE^2=OC^2+OD^2=OC^2+OA^2+OB^2+2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 120°$.

Suy ra $OE=\sqrt{OC^2+OA^2+OB^2+2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 120°}$

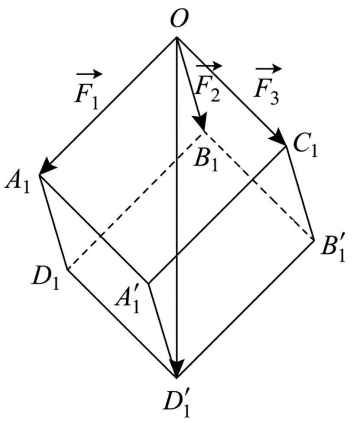
$=\sqrt{12^2+20^2+16^2+2\cdot 20\cdot 16\cdot\cos 120°}=\sqrt{480}=4\sqrt{30}N$

Do đó $F=OE=4\sqrt{30}N$.

Bài 3. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}(N)$ (xem hình vẽ). Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.



Lời giải



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F_3}$

Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp .

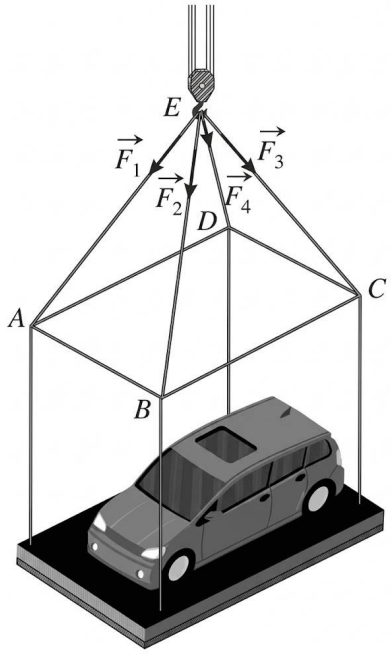
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$

Do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right|$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right| = x$, suy ra độ dài đường chéo bằng $\sqrt{3}x$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

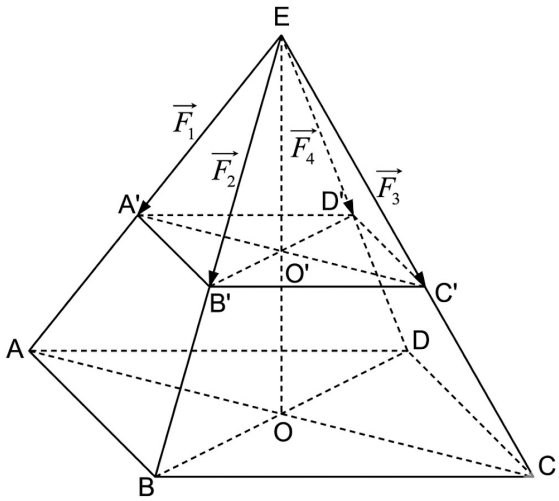
Ta có: $\left|\vec{P}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| \Leftrightarrow 2024\sqrt{3} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow x = 2024(N)$

Bài 4. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$



Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Trọng lượng của chiếc xe ô tô bằng bao nhiêu Niutơn? Biết rằng các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ đều có cường độ là $3500N$ và trọng lượng của khung sắt là $2500N$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{EA'}=\vec{F_1};\ \overrightarrow{EB'}=\vec{F_2};\ \overrightarrow{EC'}=\vec{F_3};\ \overrightarrow{ED'}=\vec{F_4}$, suy ra $\left|\overrightarrow{EA'}\right|=\left|\overrightarrow{EB'}\right|=\left|\overrightarrow{EC'}\right|=\left|\overrightarrow{ED'}\right|=3500\,N$

$\widehat{EA'C'}=\widehat{EAC}=60^{\circ}$ nên tam giác $EA'C'$ đều.

Gọi O' là tâm của hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$

Ta có hợp lực của 4 sợi cáp là: $\vec{F}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{EC'}+\overrightarrow{EB'}+\overrightarrow{ED'}=2\overrightarrow{EO'}+2\overrightarrow{EO'}=4\overrightarrow{EO'}$.

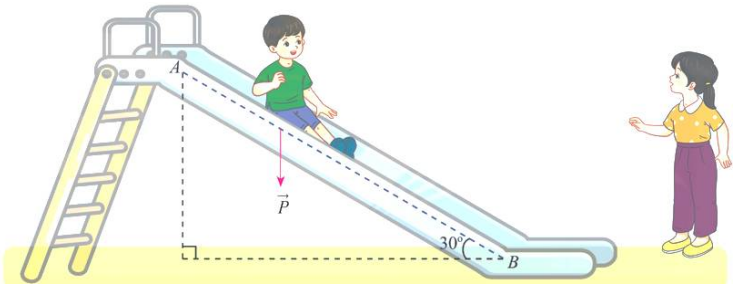
Xét tam giác đều $EA'C'$ có $EO'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}EA'=1750\sqrt{3}$.

Từ đó, $\left|\vec{F}\right|=\left|4\overrightarrow{EO'}\right|=7000\sqrt{3}\,N$.

Ta có $\left|\vec{P}\right|+2500=\left|\vec{F}\right|\Rightarrow\left|\vec{P}\right|=7000\sqrt{3}-2500\approx 9624\,N$.

Vậy trọng lượng xe ô tô là $9624\,N$.

Bài 5. Một em nhỏ cân nặng $m=25kg$ trượt trên cầu trượt dài $3,5m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (như hình vẽ).



a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9,8m/s^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

Lời giải

a) Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: $P=mg\cos 60^\circ=25.9,8\cdot\frac{1}{2}=122,5N$

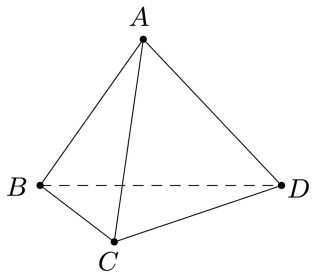
b) Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là:

$A=\vec{F}\cdot\vec{d}=Pd\cos 60^\circ=122,5\cdot 3,5\cdot\frac{1}{2}=214,375J$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình tứ diện $ABCD$.

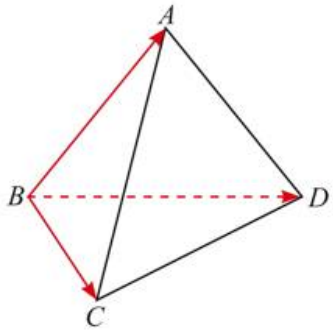


Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

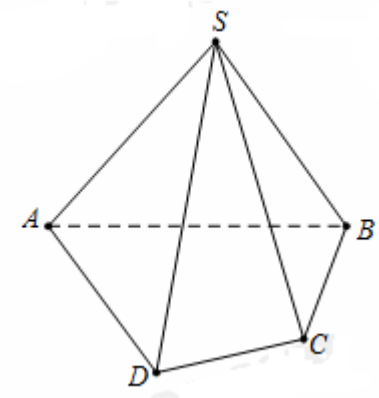
Lời giải

Chọn B.



Ba vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp.

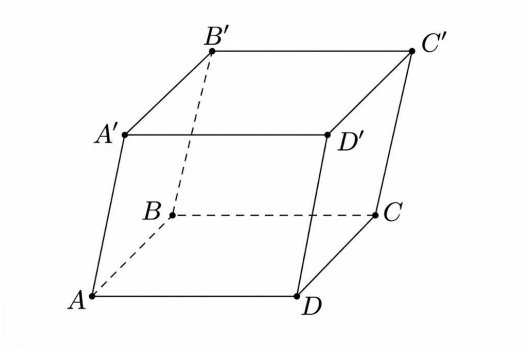
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Ngoài đỉnh S, hình chóp còn có 4 đỉnh A, B, C, D nên ta có 4 vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

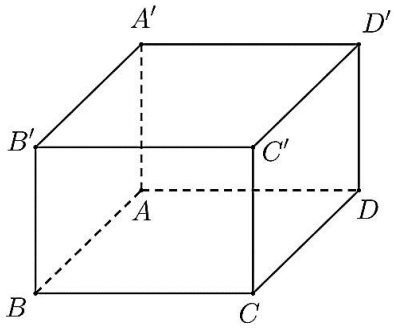
Lời giải

Chọn C.

Do các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $CD = AB = A'B' = C'D'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

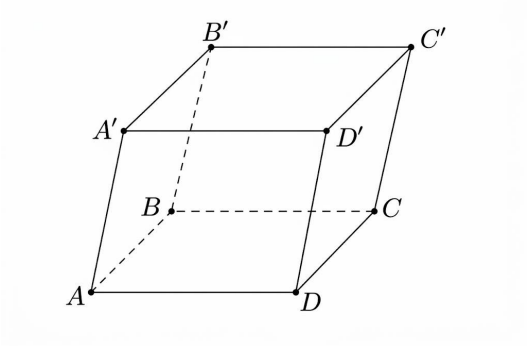
A. $\overrightarrow{B'A'}$. **B.** $\overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{D'C'}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

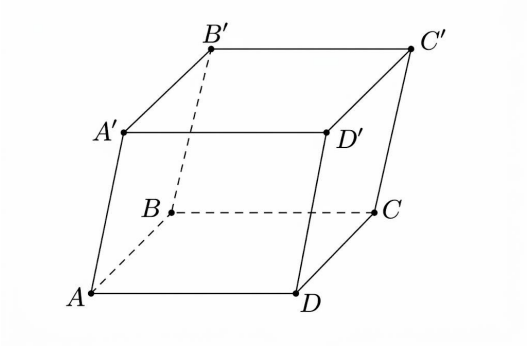
A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{BB'}$. **D.** $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Đẳng thức đúng là: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó tổng của các vecto $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}$ là



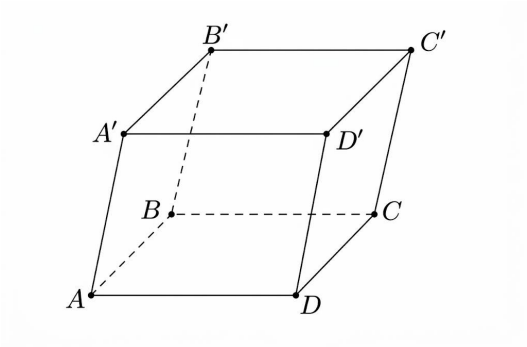
A. $\overrightarrow{AB'}$. **B.** $\overrightarrow{A'C'}$. **C.** $\overrightarrow{AD'}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn D.

Do $ACC'A'$ là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{A'C}$. **C.** $\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{C'A}$.

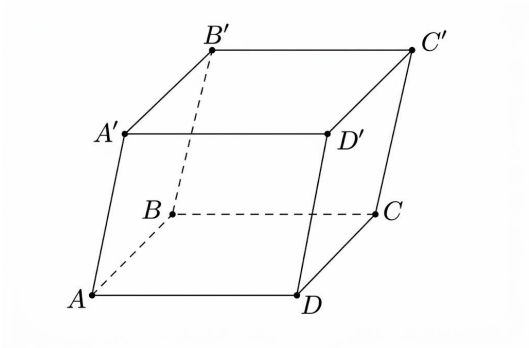
Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Khi đó $2.\overrightarrow{AO}$ bằng véc tơ nào sau đây?



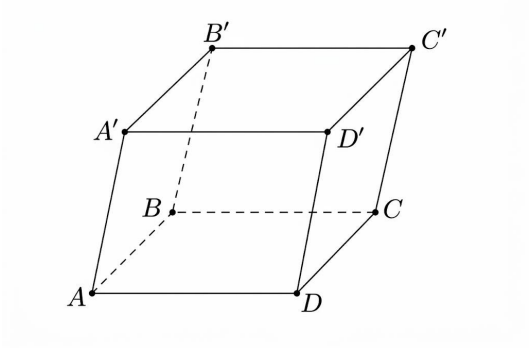
A. $\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $2.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Chọn đẳng thức vectơ đúng:

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

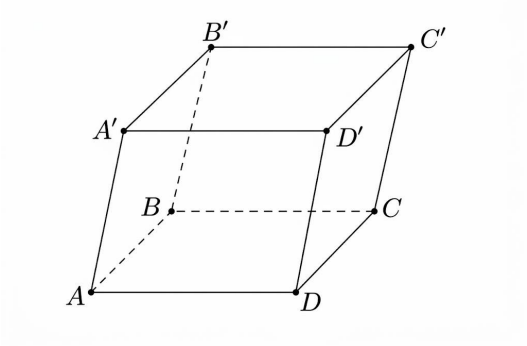
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Biểu thức nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C}$.

B. $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$.

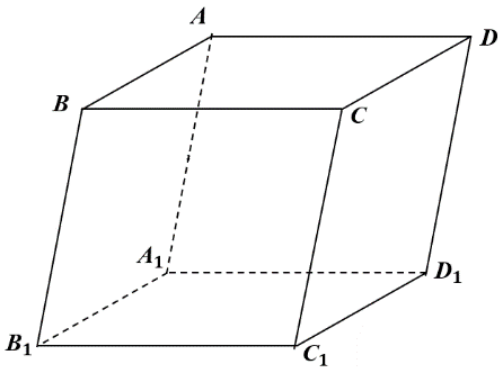
D. $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn C.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

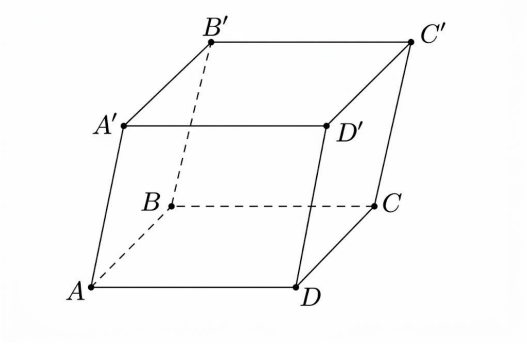
Lời giải

Chọn C.

+ Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

+ Vận dụng công thức trung điểm để kiểm tra.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O.



Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

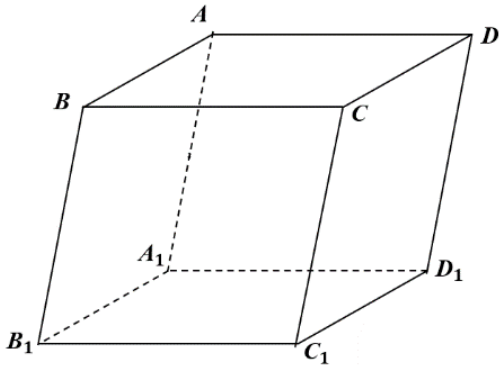
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Chọn đẳng thức **sai?**

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$ nên D sai.

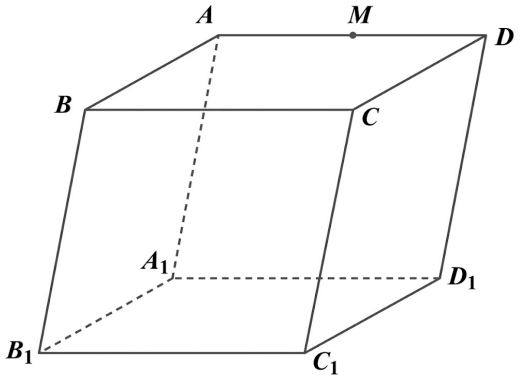
Do $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}$ nên $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. A đúng

Do $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$ nên B đúng.

Do $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD_1}$ nên C đúng.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD.



Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Lời giải

Chọn B.

A. Sai vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.

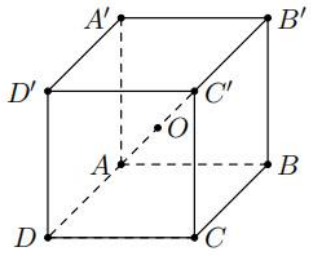
B. Đúng vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. Sai. theo câu B suy ra

D. Đúng vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD_1}$.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương.



Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

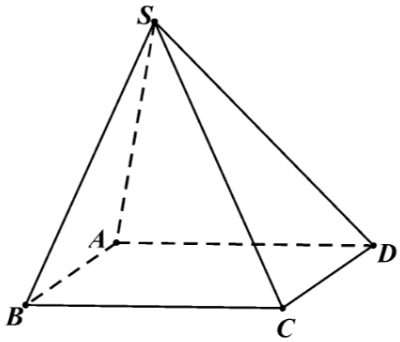
Lời giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

Mà $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$ nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.



Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

C. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

D. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}$.

Lời giải

Chọn B.

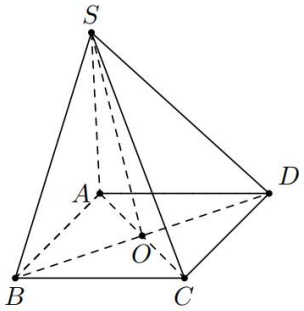
Gọi $O=AC\cap BD$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD.

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

Vậy $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

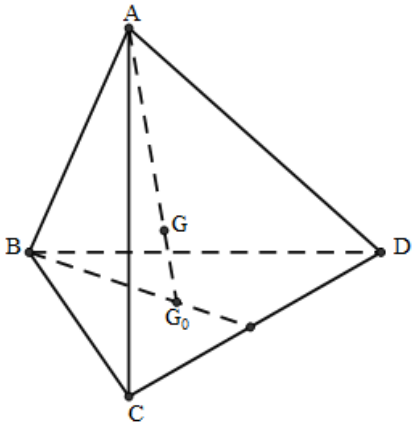
D. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}$.

Lời giải

Chọn A.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD).



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải

Chọn C.

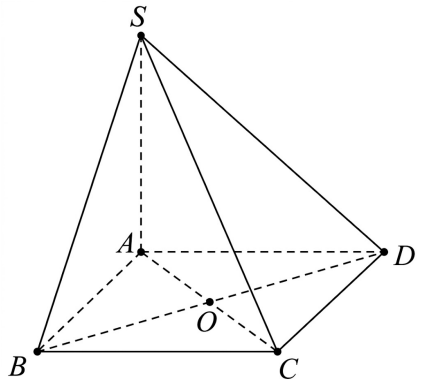
Theo đề: G_O là giao điểm của GA và mp $(BCD)\Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD.

$\Rightarrow \overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=-\left(3\overrightarrow{GG_0}+\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}\right)=-3\overrightarrow{GG_0}=3\overrightarrow{G_0G}$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.



Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $G,\ S,\ O$ không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$ **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

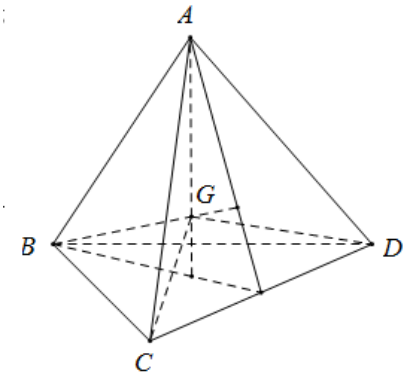
Chọn B.

$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Câu 20. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.

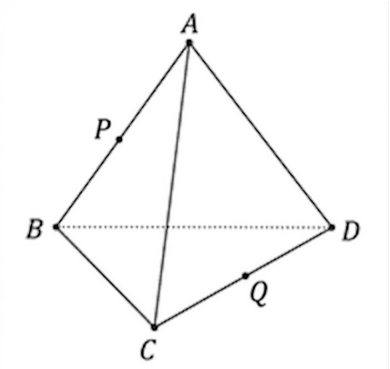
Theo giả thuyết trên thì với O là một điểm bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Ta thay điểm O bởi điểm A thì ta có:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$

Do vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ là sai.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD.



Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$

nên $2\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DQ}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$. Vậy $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 22. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

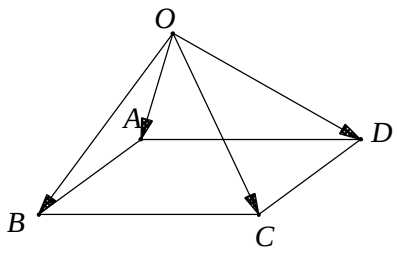
B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình bình hành là:

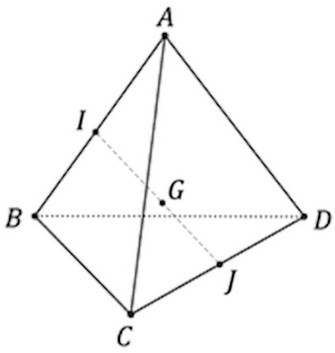
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

Với mọi điểm O bất kì khác A, B, C, D, ta có:

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.



Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{\text{IJ}}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$

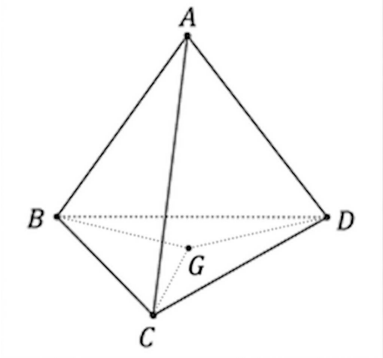
D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

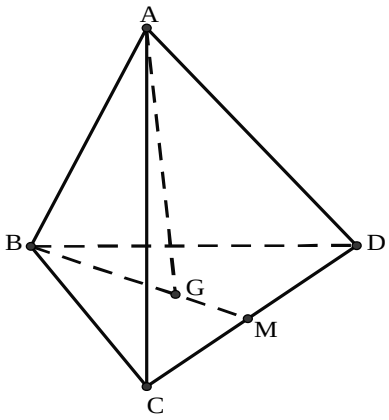


Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

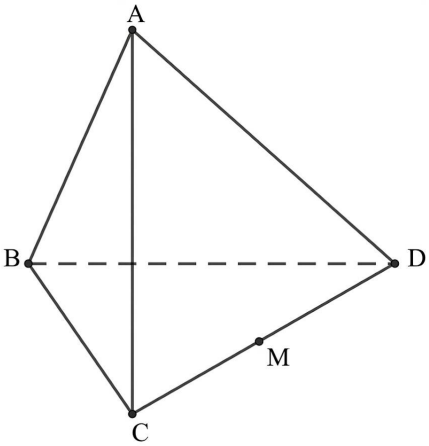


Gọi M là trung điểm BC.

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$

$=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$

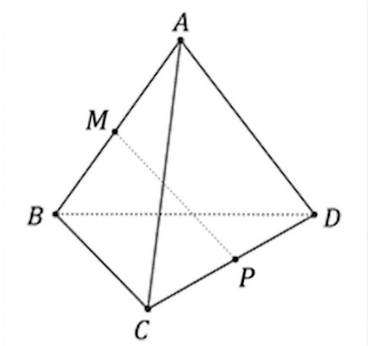
Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$.



Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.

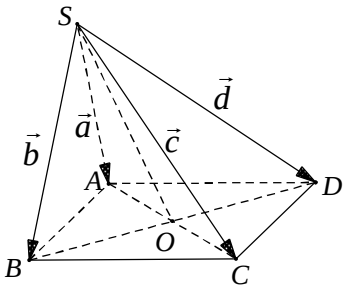
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{MP}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$.



Nhận xét nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.

D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Lời giải

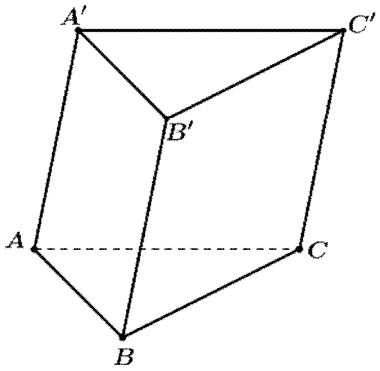
Chọn A.

Ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO} \end{cases}$ (do tính chất của đường trung tuyến)

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$.



Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

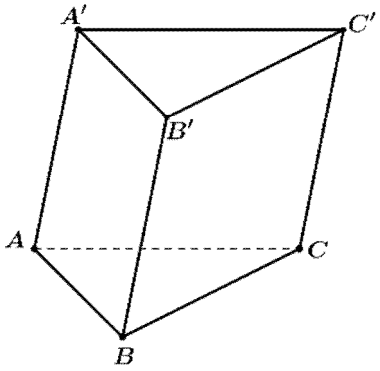
A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn C.

+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Rightarrow \vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}$.

Câu 29. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

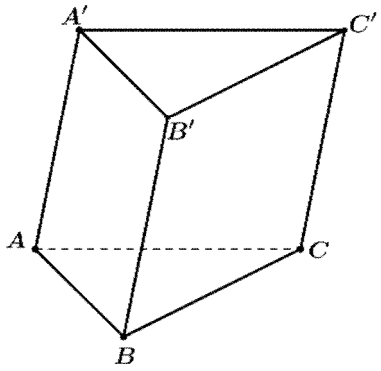
A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 30. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$ **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$ **C.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$ **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

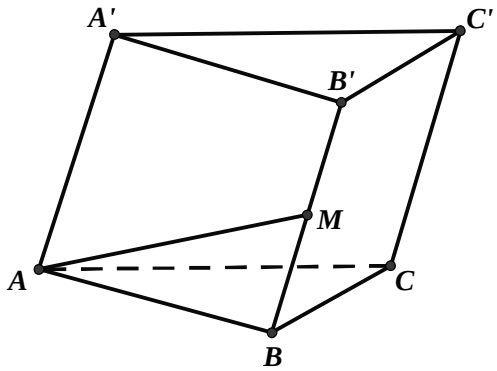
Lời giải

Chọn D.

Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Câu 31. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



Khẳng định nào sau đây đúng?

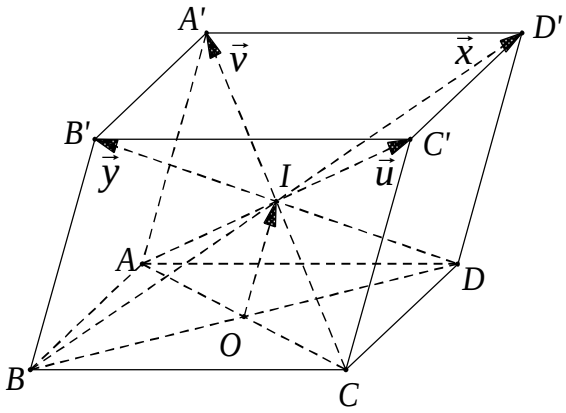
A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}.$ **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$ **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm I. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}, \overrightarrow{CA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BD'} = \vec{x}, \overrightarrow{DB'} = \vec{y}$.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

D. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta phân tích:

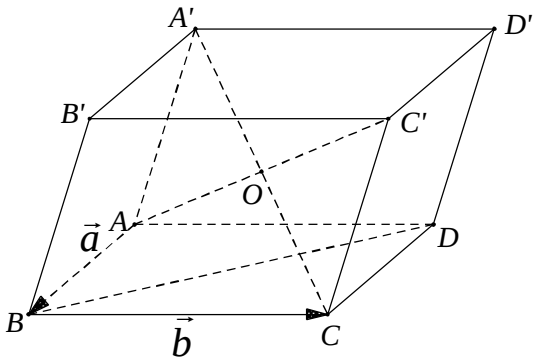
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}\right)=2\overrightarrow{AA'}$.

$\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}\right)=2\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}=4\overrightarrow{AA'}=-4\overrightarrow{A'A}=-4.2\overrightarrow{OI}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.



Nhận xét nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB'.

D. M là trung điểm CC'.

Lời giải

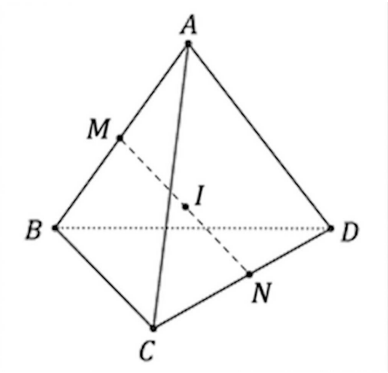
Chọn C.

Ta có:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB'.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

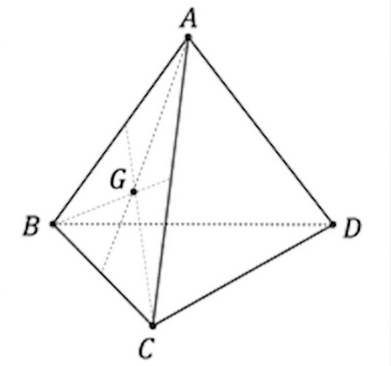
A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta chứng minh được $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên $k=1$

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

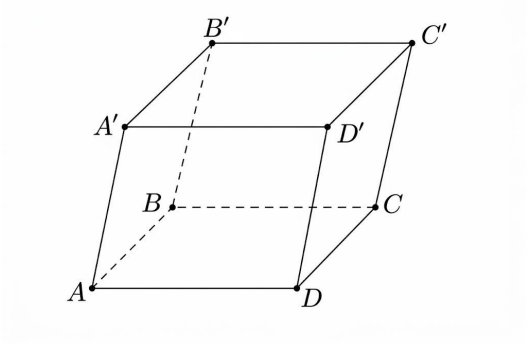
A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn B.

Với $k=1$ ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+1.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Câu 37. Cho $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

A. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương

B. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng

C. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng

D. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}=-3\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{y}=-3\vec{x}$

$\Rightarrow$ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng.

Câu 38. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Haivectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương. **B.** Haivectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Haivectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương. **D.** Đáp án A, B, C, đều sai.

Lời giải

Chọn B.

Nhận thấy: $\vec{y}=-2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

Câu 39. Trong không gian, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0 \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 40. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^o$. **B.** $\alpha=0^o$. **C.** $\alpha=90^o$. **D.** $\alpha=45^o$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 41. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^o$. **B.** $\alpha=45^o$. **C.** $\alpha=60^o$. **D.** $\alpha=120^o$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$

Câu 42. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^o$. **B.** $\alpha=180^o$. **C.** $\alpha=60^o$. **D.** $\alpha=45^o$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0\xrightarrow{\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1}\vec{a}\vec{b}=-1$

Suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 43. Trong không gian, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ và $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$. Khi đó:

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

+Vì $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ nên:

$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right).\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 5\vec{a}^{2}-8\vec{b}^{2}+6\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\dfrac{-5\vec{a}^{2}+8\vec{b}^{2}}{6}$.

Ta có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^{2}=\left|\vec{b}\right|^{2}$. Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{3\vec{a}^{2}}{6}$

+ $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\dfrac{3\vec{a}^{2}}{6}}{\vec{a}^{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 44. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^{0}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^{0}$.

Lời giải

Chọn A.

$(\vec{a}-\vec{b})^{2}=\left|\vec{a}\right|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3}{8}$.

Câu 45. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^{2}$ bằng

A. $\vec{u}^{2}+2\vec{v}^{2}-4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^{2}+4\vec{v}^{2}+4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^{2}+4\vec{v}^{2}$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^{2}=\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)^{2}=\vec{u}^{2}+4\vec{v}^{2}+4\vec{u}.\vec{v}$.

Câu 46. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\ \vec{x}=\vec{a}-2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{x}.\vec{y}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^{2}+2\left(\vec{b}\right)^{2}-3\vec{a}.\vec{b}=4$.

$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x}\right)^{2}}=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^{2}}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^{2}+4\left(\vec{b}\right)^{2}-4\vec{a}.\vec{b}}=2\sqrt{3}$.

$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 47. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a}+\vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Lời giải

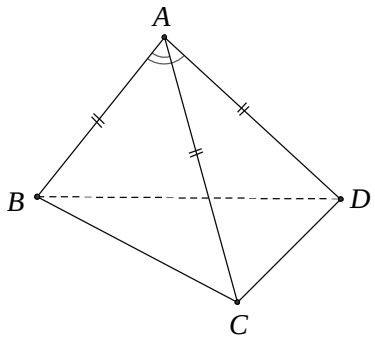
Chọn B.

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a}+\vec{b})^2$

$= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616$

$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{616}.$

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

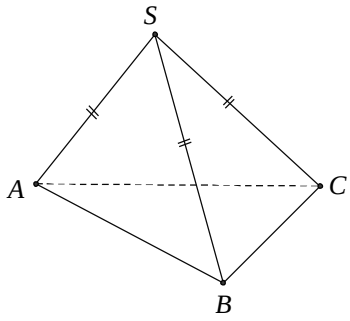
Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^0$

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn B.

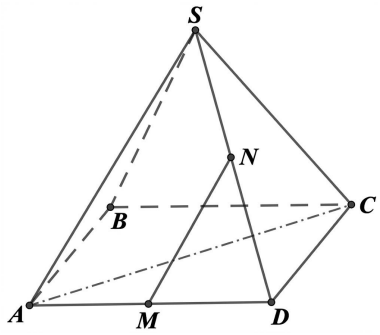
Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB} = 0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD.



Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45° **B.** 30° **C.** 90° **D.** 60°

Lời giải

Chọn C.

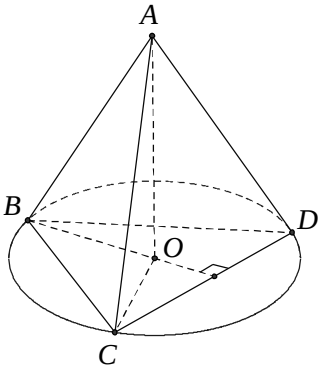
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90° \Rightarrow (MN, SC) = 90°$

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C.

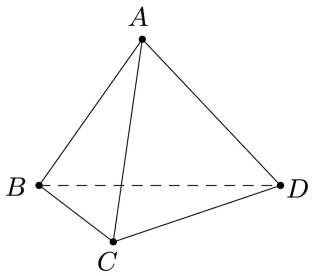
Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=CO.CD.\cos 30^0-CA.CD.\cos 60^0$

$=\frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0.$

Suy ra $AO\perp CD$.

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC, AB\perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Góc giữa PQ và AB là?

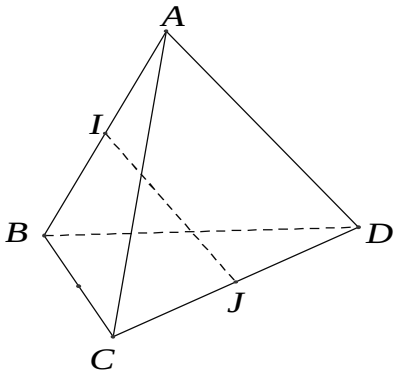
A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}\Rightarrow AB\perp PQ$

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0, \widehat{CAD}=90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B.

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB=AC$ và $\widehat{BAC}=60°$

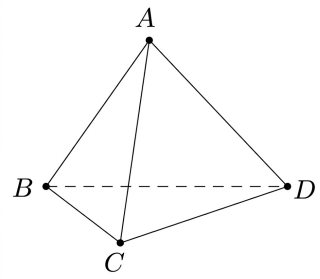
Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI\perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI\perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều.



Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B.

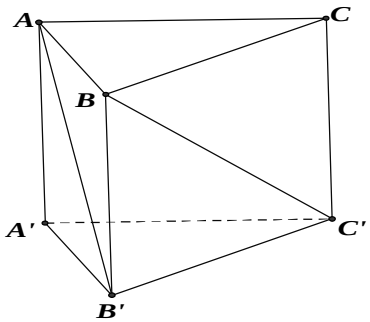
Đặt $AB=AD=AC=a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0=a.a.\frac{1}{2}-a.a.\frac{1}{2}=0$

Vậy $AB\perp CD$.

Câu 55. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=\sqrt{2}\,a$.



Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng bao nhiêu?

A. $60°$.

B. $45°$.

C. $90°$.

D. $30°$.

Lời giải

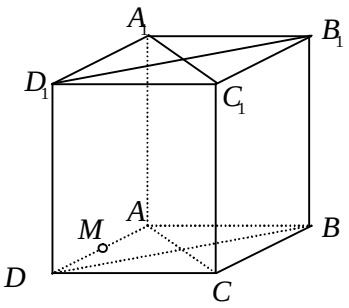
Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}=-\dfrac{a^2}{2}+0+0+2a^2=\dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(AB',BC'\right)=60°$.

Câu 56. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD.



Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{3}{4}a^2$. **D.** $\dfrac{3}{2}a^2$.

Lời giải

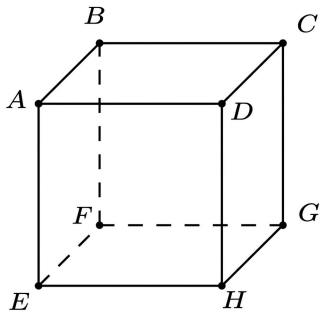
Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 120°



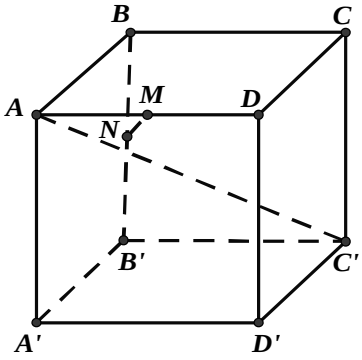
Lời giải

Chọn C.

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45°$

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'.



Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

* Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD},\ \vec{c}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a,\ \vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}=0$.

* Ta có:

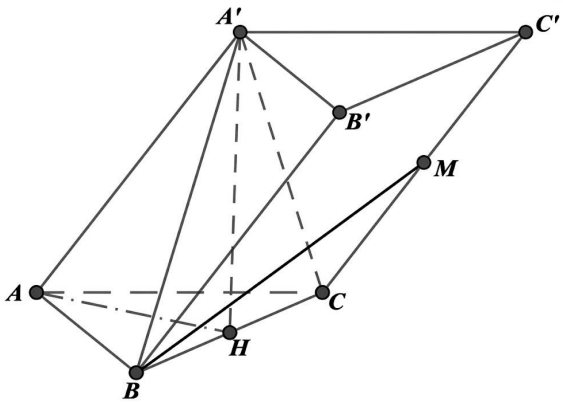
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=a^2$$

$$\cos\left(MN;AC'\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'.



Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $AH = A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2.6}{16}} = a\dfrac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CM} = 0 + \left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{CM}\right|\cos 0° = \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \dfrac{\left|\dfrac{3a^2}{4}\right|}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{22}}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 60. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

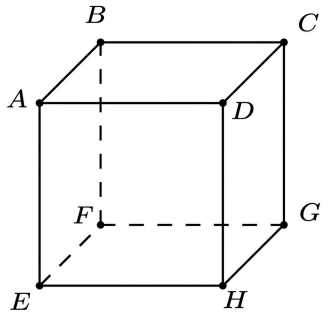
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Lời giải

Chọn A.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(AB, AC) = AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 61. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

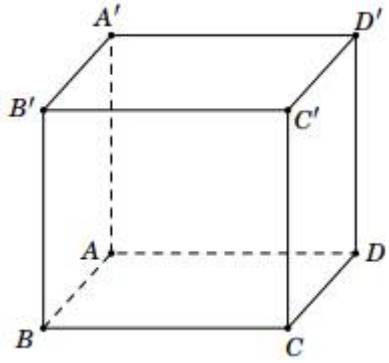
A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\ (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2$ (Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$)

Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.



Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$

D. $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'A'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (vô lí)

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, $AD\perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

***Bước 1*:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow AC\perp BD$

***Bước 2*:** Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD\perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB\perp CD$.

***Bước 3*:** Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

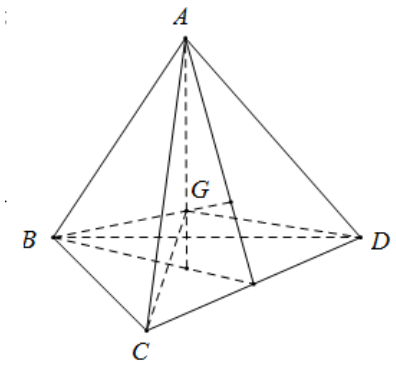
A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng ba bước **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Lời giải

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Lời giải

Chọn B.

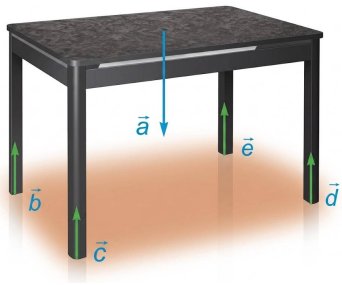
$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2$$
$$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$$
$$=3AG^2+3BG^2+3CG^2+3DG^2+2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$$

Lại có:

$$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$$
$$=2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 65. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Vectơ $\vec{d}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

B. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ đối nhau.

D. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Lời giải

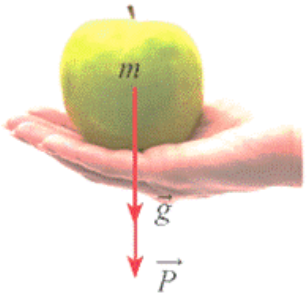
Chọn C.

Do bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn và với mặt bàn nên các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn nên các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ ngược hướng chứ không phải đối nhau vì hai vectơ đối nhgau là hai vectơ cùng ngược hướng, cùng độ dài. Đáp án C sai

Câu 66. Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9,8\ \text{m}/\text{s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 105 gam



A. $1,029$ N. **B.** $1,433$ N. **C.** $2,096$ N. **D.** $1,477$ N.

Lời giải

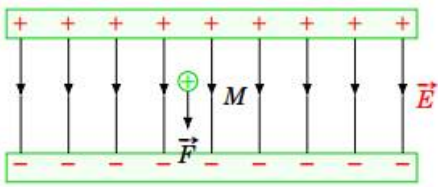
Chọn A.

Đổi $105\,\text{g}=0,105$ kg.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là:

$|\vec{P}|=m|\vec{g}|=0,105.9,8=1,029$ N

Câu 67. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}\text{C}$ và độ lớn điện trường $E=10^5$ (N/C)



A. 10^{-4} N. **B.** 2.10^{-6} N. **C.** 10^{-2} N. **D.** $1,8.10^{-6}$ N.

Lời giải

Chọn A.

Độ lớn của lực tĩnh điện là $|\vec{F}|=q.|\vec{E}|=10^{-9}.10^5=10^{-4}$ N.

Câu 68. Theo định luật II Newton thì gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F}=m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là

vectơ gia tốc $\left(\text{m}/\text{s}^2\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N). Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\ \text{m}/\text{s}^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



A. $10\,\text{N}$. **B.** $15\,\text{N}$. **C.** $20\,\text{N}$. **D.** $25\,\text{N}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$ suy ra $\left|\vec{F}\right| = m\left|\vec{a}\right| = 0,5.50 = 25\left(\text{N}\right)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\ \text{m}/\text{s}^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là $25\ \text{N}$.

Câu 69. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.



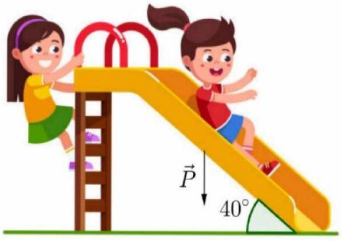
A. $10\,\text{N}$. **B.** $15\,\text{N}$. **C.** $20\,\text{N}$. **D.** $25\,\text{N}$.

Lời giải

Chọn D.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả bưởi: $P = mg = 0,45.9,8 = 4,41N$

Câu 70. Một em bé cân nặng $m = 20$ kg trượt trên cầu thang trượt dài $2m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 40°. Cho biết công $A\left(J\right)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính theo công thức $\vec{A} = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt, biết $g \approx 10\ \text{m}/\text{s}^2$. (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $306J$. **B.** $307J$. **C.** $257J$. **D.** $267J$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{P}=m\vec{g}$ suy ra $P=mg=20.10=200(\text{ N})$.

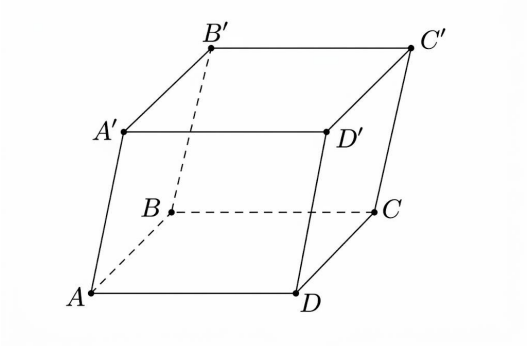
Vậy trọng lực tác dụng lên em bé là 200 N.

Ta có $\vec{A}=\vec{F}\cdot\vec{d}\Rightarrow A=P\cdot s\cdot\cos\left(\vec{P},\vec{s}\right)=200\cdot 2\cdot\cos 50^{\circ}\approx 257J$ (J).

Vậy công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt là $257J$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, ngược chiều

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng chiều (tính chất hình hộp)

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$ Do các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng và $AC=A'C'$ (tính chất hình hộp).

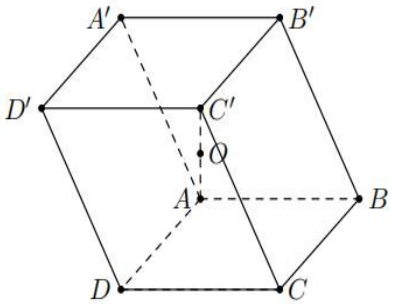
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}++\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}\neq\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

$VT=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}+\underbrace{\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}}_{\overrightarrow{CD'}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}=VP$

Câu 72. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình hộp.



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{C'A}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

d) Với mọi điểm M ta đều có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Lại có $AA'C'C$ là hình chữ nhật nên: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$

Ta có: $VT=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{D'D}\right)=\overrightarrow{A'C}=VP$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

Gọi I và I' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{OI}$.

$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)=4\overrightarrow{OI'}$

Mặt khác: $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI'}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

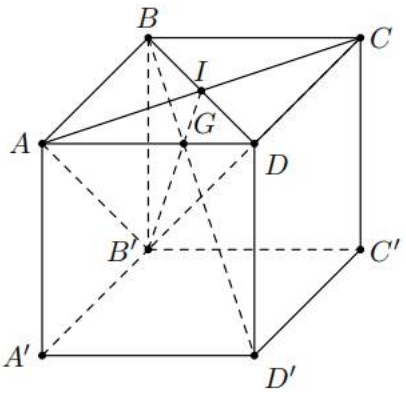
d) $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$

$=\frac{1}{8}\Big[\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD'}\right)\Big]$

$=\frac{1}{8}\Big[8\overrightarrow{MO}+\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right)}_{\vec{0}}\Big]=\overrightarrow{MO}$

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).



a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}=0$.

d) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC'}\right)=30°$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

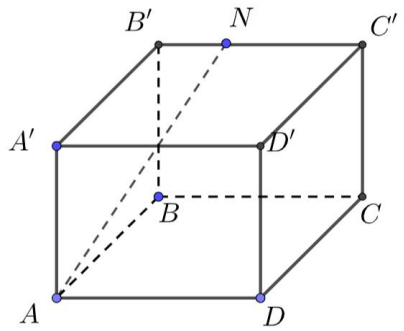
a) Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GB'}=2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GB'}=\vec{0}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).

c) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DD'}=0$ (Vì $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{DD'}$).

d) Ta có: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC'}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB'}\right)=\widehat{CAB'}=60°$ (Vì tam giác CAB' đều).

Câu 74. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có canh bằng a.



a) $\left|\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{DC'}\right|=a$.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'C'}=a^2$.

d) Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$. Khi đó $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{C'C}$.

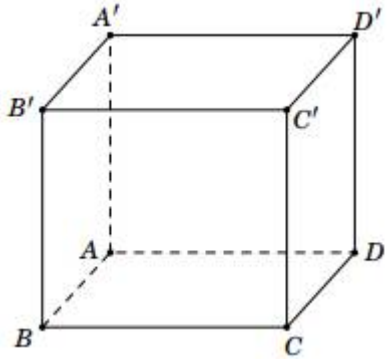
Suy ra $\left|\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{DC'}\right|=\left|\overrightarrow{C'C}\right|=a$.

b) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ (vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$).

d) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'N}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Câu 75. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.



a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}\right)=60°$

c) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

d) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'D}=a^2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

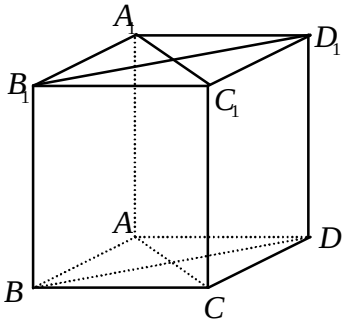
a) Ta có $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\left(-\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}.$

b) $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}\right)=\widehat{A'AB'}=45°$ (do $ABB'A'$ là hình vuông)

c) Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}$. Do đó $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=C'C=a$

d) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'D}=\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{B'D}=\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\overrightarrow{B'D}\right|.\cos\left(180°-\widehat{BB'D}\right)=-\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\overrightarrow{B'D}\right|.\cos\widehat{BB'D}=-\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\overrightarrow{B'D}\right|.\dfrac{BB'}{B'D}=-a^2$

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



a) $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1A}$

b) $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{AD}\right)=60^0$

c) $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1}=0$

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC}=a^2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $VP=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1C}=VT$

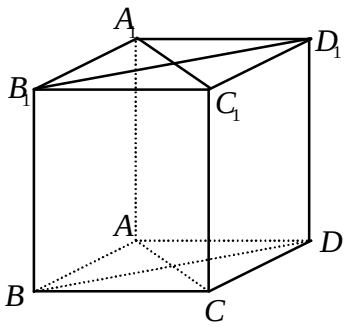
b) $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$

c) Ta có:

$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC}=0$ (vì $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA}\right)=90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$)

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=2a^2$

Câu 77. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB=a, BC=2a, AA_1=3a$.



a) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1A}$

b) $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right)=0^0$

c) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}=9a^2$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC_1}$ (Quy tắc hình hộp).

b) Ta có: $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right)=\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{B_1A}\right)=180^0$

c) Ta có: $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{A_1A}=\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1A}^2+\overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1A}^2=9a^2$

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}=\left|\overrightarrow{A_1B}\right|.\left|\overrightarrow{D_1D}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}\right)$

$A_1B=\sqrt{A_1B^2+AB^2}=a\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}\right)=\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{A_1A}\right)=\dfrac{A_1A}{A_1B}=\dfrac{3a}{a\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D} = a\sqrt{10}.3a.\dfrac{3}{\sqrt{10}} = 9a^2$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}}_{0} = 4a^2$

$\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1} = \left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}\right).\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{C_1B_1}^2 + \underbrace{\overrightarrow{B_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}}_{0} = \overrightarrow{C_1B_1}^2 = 4a^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 78. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a;\ AD = a\sqrt{3};\ AA' = 2a$.

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

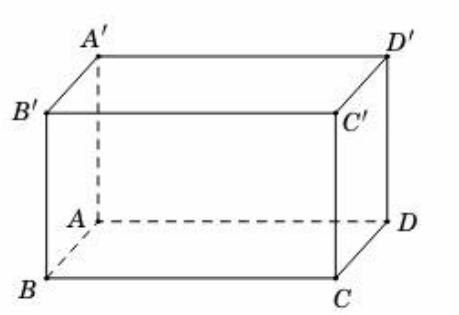
b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'} = \vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right| = 2\sqrt{2}a$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



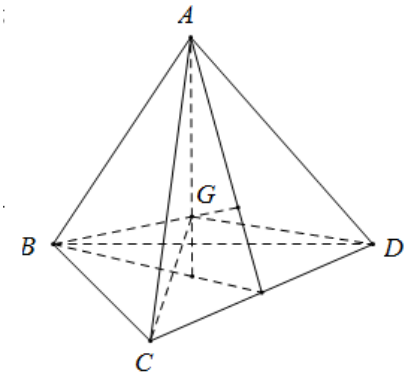
a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{AB^2+AD^2} = 2a$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right| = \left|AC'\right| = \sqrt{AB^2+AD^2+AA^2} = 2\sqrt{2}a$

Câu 79. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Ta có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$

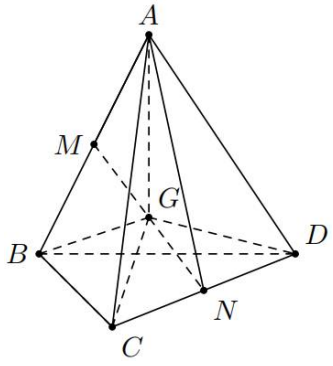
$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}$

d) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN.



a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Vì M,N lần lượt là trung điểm $AB,CD\to\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$

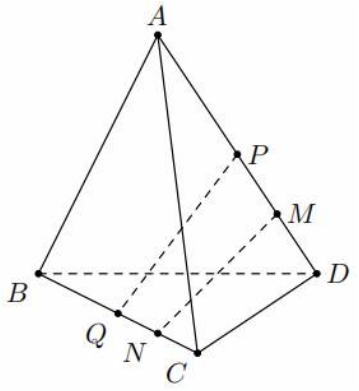
Mặt khác G là trung điểm $MN\to\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

d) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN};\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$. Do đó: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 81. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC.



a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Dễ chứng minh được $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ nên A sai

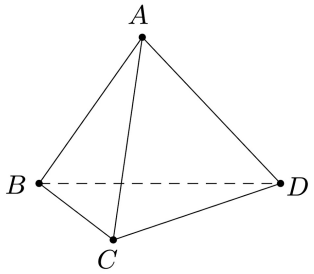
b) Theo giả thuyết ta có M,N là trung điểm của PD,QC

c) $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}$.

d) Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a.



a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC, BCD, CDA, ABD là các tam giác đều.

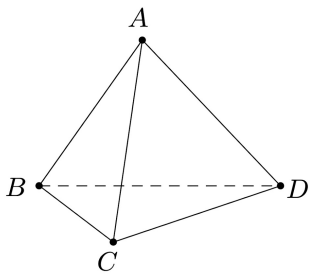
a) Đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

b) Đúng vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-a.a.\cos 60^0=\frac{-a^2}{2}$.

c) Sai vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-a.a.\cos 60^0=-\frac{a^2}{2}$.

d) Đúng vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Câu 83. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.



a) Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$, M là điểm tuỳ ý. Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

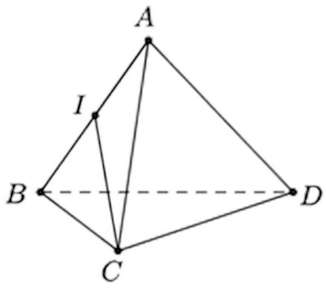
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$

d) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{3a^2}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) vì G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ và M là điểm tuỳ ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60°=\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-a^2+\dfrac{a^2}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$

d) Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. CI là trung tuyến của tam giác đều ABC nên $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

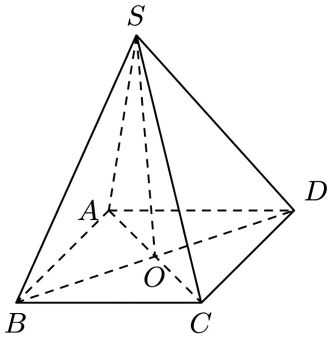
Ta có $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CI}.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}$

Do ΔABC đều nên $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}=0$

Đồng thời $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}=CI.IC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{IC}}\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 180°=-\dfrac{3a^2}{4}$

Suy ra $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=0-\dfrac{3a^2}{4}=-\dfrac{3a^2}{4}$.

Câu 84. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

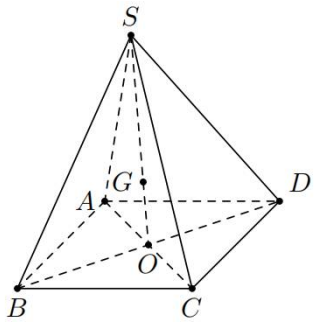
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, khi đó $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

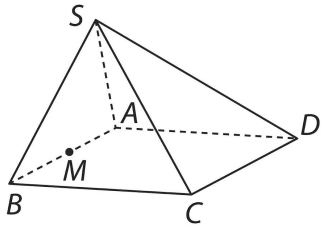
b) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO};\ \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$

d) Ta có

$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB=a$. Gọi M là trung điểm của AB.



a) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

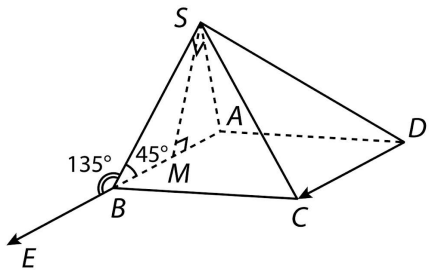
b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AS}=-\dfrac{a^2}{2}$

d) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS}=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$.

Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}$.

Ta có: $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BS})=\widehat{EBS}$

ΔASB vuông cân (tại S) nên $\widehat{SBA}=45^\circ$.

Suy ra $\widehat{EBS}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$, hay $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=135^\circ$.

Mặt khác, do $AB=a$ nên $AS=BS=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=|\overrightarrow{DC}|.|\overrightarrow{BS}|.\cos(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos135^\circ=a^2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}$$

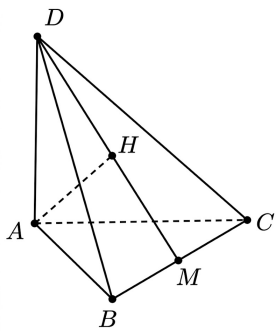
Vậy $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=-\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AS}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS})=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos45^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

d) Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM\perp AB$, hay $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MS}=0$.

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc. Cạnh $AB=AC=a$. Gọi M là trung điểm của BC, H là trung điểm của MD.



a) $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{2}$

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $60°$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\dfrac{a^2}{4}$

d) $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{2}$

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{2}$.

b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $60°$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$

Tam giác DBC cân tại $D \Rightarrow DM \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow AH \perp BC$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{BC}\right)=90^0$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\dfrac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}.\left(\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}}{2}\right)=\overrightarrow{AB}.\dfrac{\overrightarrow{AD}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{2}$

Ta có AB, AC, AD đôi một vuông góc $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

Nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{a^2}{4}$

d) $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{4}$

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$

Câu 87. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài là $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là $45°$.

a) $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{2}$.

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=\sqrt{2}-25$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=13$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

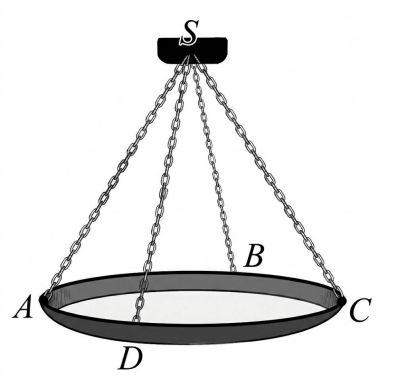
a) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sqrt{2}$.

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}-6\left|\vec{b}\right|^2=1+\sqrt{2}-6.4=\sqrt{2}-23$.

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\sqrt{2}+4=5+2\sqrt{2}$ suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

d) $\left(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\sqrt{2}\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}^2=1+2\sqrt{2}.\sqrt{2}+8=13$ suy ra $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

Câu 88. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=60°$. Biết $\vec{P}=m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\ \text{m/s}^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg.



a) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

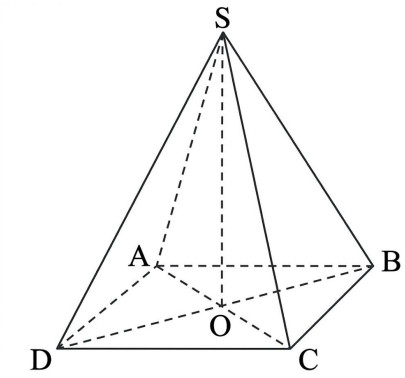
b) Tam giác SAC là tam giác vuông cân.

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $45\,N$.

d) Để đèn chùm đứng yên thì độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}N$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) b) Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA=SB=SC=SD$ nên $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

Ta lại có $\widehat{ASC}=60°$ suy ra tam giác SAC đều.

c) Độ lớn trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P=mg=5.10=50\,N$

d) Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA=SB=SC=SD$ mà $\widehat{ASC}=60°$, suy ra tam giác SAC đều.

Gọi $O=AC\cap BD$

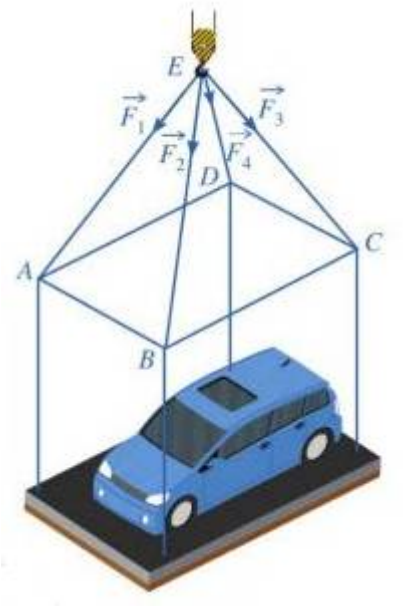
Hợp lực của 4 sợi xích là: $\vec{F}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}+2\overrightarrow{SO}=4\overrightarrow{SO}$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\overrightarrow{SO}=\vec{P}$ hay $4SO=P\Leftrightarrow SO=12,5$

Xét tam giác đều SAC có $SA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}SO=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}N$

Câu 89. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\text{N}$



a) $\vec{F_1}=\vec{F_2}=\vec{F_3}=\vec{F_4}$

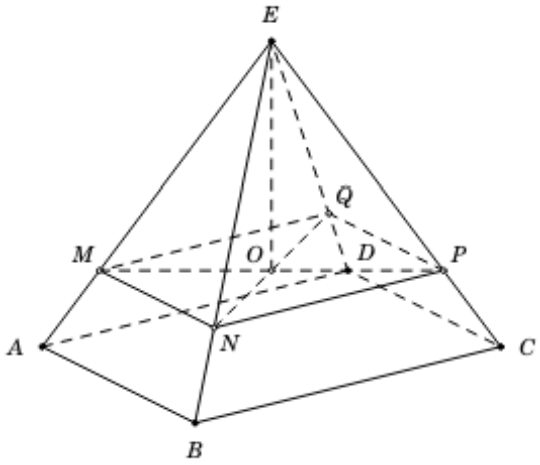
b) $\vec{F_1}+\vec{F_3}=\vec{F_2}+\vec{F_4}$

c) $\left|\vec{F_1}+\vec{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16281(\text{N})$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt trên các tia EA,EB,EC,ED sao cho

$\overrightarrow{EM}=\vec{F_1},\overrightarrow{EN}=\vec{F_2},\overrightarrow{EP}=\vec{F_3},\overrightarrow{EQ}=\vec{F_4}$.

Do các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ nên $EM=EN=EP=EQ=4700$.

Gọi $O=MP\cap NQ$, suy ra O là trung điểm của MP và NQ

a) các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ nên $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_3}\right|=\left|\vec{F_4}\right|$

b) Ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EO}$, suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=|2\overrightarrow{EO}|=2EO$. Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng $60°$ nên góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng $60°$ hay $\widehat{SMO}=60°$.

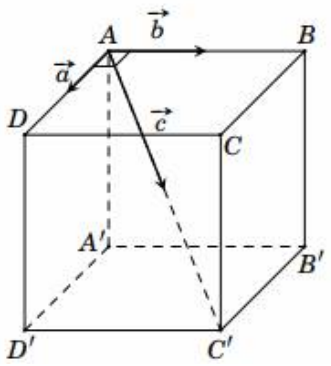
Xét ΔEMO có $EM=4700$, $\widehat{SMO}=60°$ suy ra $EO=EM\sin 60°=2350\sqrt{3}$.

Từ đây ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2EO=2.2350\sqrt{3}\approx 8141(\text{N})$.

d) ta có: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=4EO=4.2350\sqrt{3}$

Trọng lượng của chiếc xe ô tô là: $P=\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|-3000=4.2350\sqrt{3}-3000\approx 13281(\text{N})$

Câu 90. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}$, $10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=33,6\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của N).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ giả thiết ta có $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b},\vec{c})=\cos\widehat{BAC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có $\vec{a}+\vec{c}^{\,2}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\frac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\frac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Mặt khác $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{b}.\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=10^2+2.10.20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\frac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\frac{400\sqrt{3}}{3}}$. Vậy $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

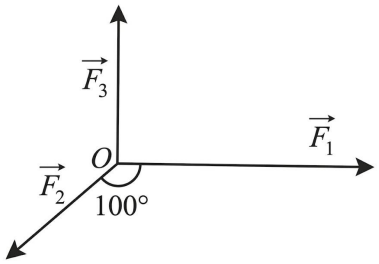
Do đó: $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{c}.\vec{a}$

$\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|\approx 32,6.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 91. Có ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật O. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là $25N$ và $12N$. Lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $4N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của N).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26

Cách 1:

Ta có $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=100°,\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)=90°,\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)=90°$

Gọi $\overrightarrow{F_{hl}}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, tức là $\overrightarrow{F_{hl}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

$$\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|^2=\overrightarrow{F_{hl}}^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3}$$

$$=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)+2\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)$$

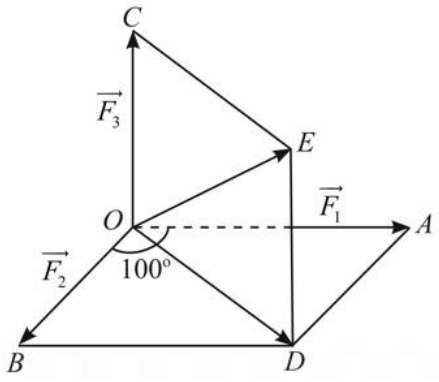
$$=25^2+12^2+4^2+2.25.12.\cos100°+0+0=785+600.\cos100°$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|=\sqrt{785+600.\cos100°}\approx26N$$

Cách 2: Gọi $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25N,12N,4N$.

Vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.



Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos\widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100°$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

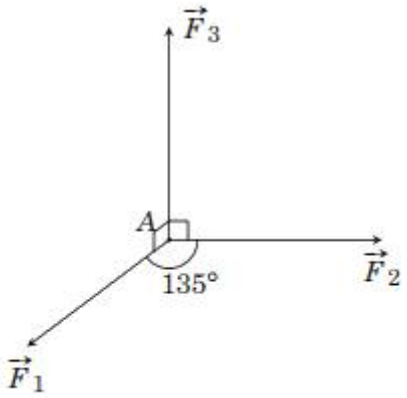
Do đó tam giác ODE vuông tại D.

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100°$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ} = \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100°} \approx 26$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\,N$.

Câu 92. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là $20\,N$, $15\,N$ và $10\,N$ (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17,3

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, tức là $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$ ta có:

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \vec{F}^2 = \left(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}\right)^2 = \vec{F_1}^2 + \vec{F_2}^2 + \vec{F_3}^2 + 2\vec{F_1}\vec{F_2} + 2\vec{F_2}\vec{F_3} + 2\vec{F_1}\vec{F_3}$$

Do $\vec{F_1} \perp \vec{F_3}, \vec{F_2} \perp \vec{F_3}$ nên $\vec{F_1}.\vec{F_3} = \vec{F_2}.\vec{F_3} = 0$.

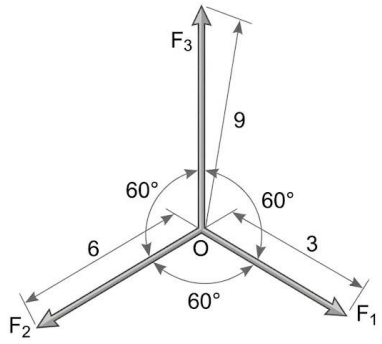
Do đó:

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \vec{F_1}^2 + \vec{F_2}^2 + \vec{F_3}^2 + 2.\vec{F_1}.\vec{F_2} = \vec{F_1}^2 + \vec{F_2}^2 + \vec{F_3}^2 + 2.\left|\vec{F_1}\right|.\left|\vec{F_2}\right|\cos\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$$

$$= 20^2 + 15^2 + 10^2 + 2.20.15.\cos 135° = 725 - 300\sqrt{2}.$$

Vậy $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{725 - 300\sqrt{2}} \approx 17,3$ N.

Câu 93. Có ba lực F_1, F_2, F_3 cùng tác động vào một vật O. Ba lực F_1, F_2, F_3 này đôi một hợp với nhau một góc $60°$ và có độ lớn lần lượt là $3\,N, 6\,N$ và $9N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (đơn vị N).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Gọi $\overrightarrow{F_{hl}}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, tức là $\overrightarrow{F_{hl}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

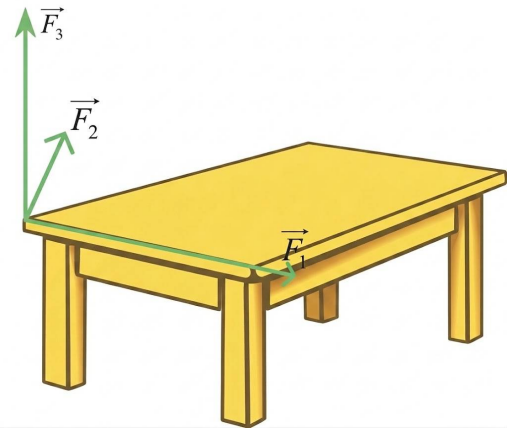
$$\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|^2=\overrightarrow{F_{hl}}^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3}$$

$$=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)+2\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)$$

$$=3^2+6^2+9^2+2.3.6.\frac{1}{2}+2.6.9.\frac{1}{2}+2.3.9.\frac{1}{2}=225$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|=\sqrt{225}=15N$$

Câu 94. Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ có giá nằm trên mặt phẳng chứa mặt bàn, tạo với nhau một góc $130°$ và có độ lớn lần lượt là $30N$ và $10N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt bàn và có độ lớn $20N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn về hàng đơn vị của N).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 31,8

Ta có $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=130°,\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)=90°,\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)=90°$

Gọi $\overrightarrow{F_{hl}}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, tức là $\overrightarrow{F_{hl}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

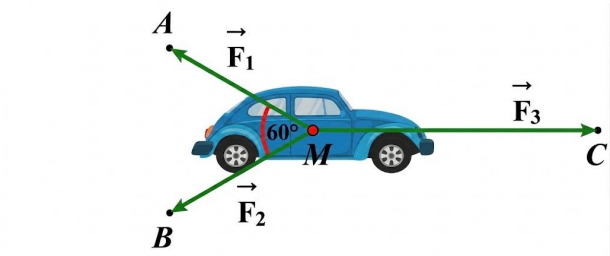
$$\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|^2 = \overrightarrow{F_{hl}}^2 = \left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2 = \overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3}$$

$$=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)+2\left|\overrightarrow{F_2}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)$$

$$=30^2+10^2+20^2+2.30.10.\cos130°+0+0=30^2+10^2+20^2+2.30.10.\cos130°$$

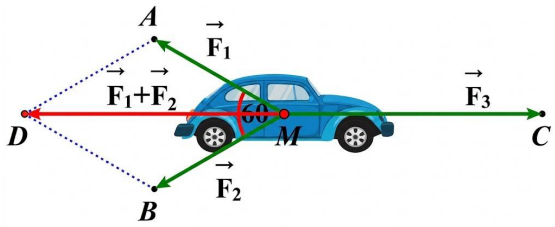
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_{hl}}\right|=\sqrt{30^2+10^2+20^2+2.30.10.\cos130°}\approx31,8N$$

Câu 95. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên như hình vẽ. Cho biết cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $\widehat{AMB}=60°$. Khi đó cường độ lực $\overrightarrow{F_3}$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của N)



Trả lời: ……..

Lời giải



Đáp án: 173

Ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$ (Với D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành).

Ta có: $MA=\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{F_1}\right|=100N$ và $MB=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=100N$

Do $\widehat{AMB}=60°$ nên ΔMAB là tam giác đều. Khi đó: $MD=2.\dfrac{100\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}$

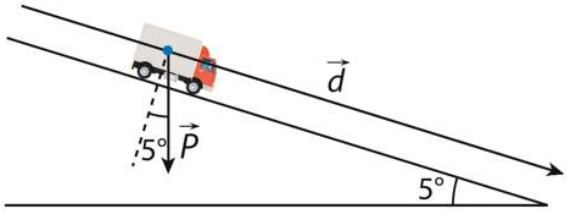
Do ô tô đứng yên nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{F_3}=-(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2})\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\left|-(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2})\right|=\left|\overrightarrow{DM}\right|=MD=100\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của $\overrightarrow{F_3}$ là $100\sqrt{3}\approx173(N)$.

Câu 96. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng $0,15$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng $5°$ so với phương ngang. Tính công (đơn vị: J) sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài

$30\,m$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9{,}8\,m/s^2$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3844

Ta có $0{,}15$ tấn $=150kg$.

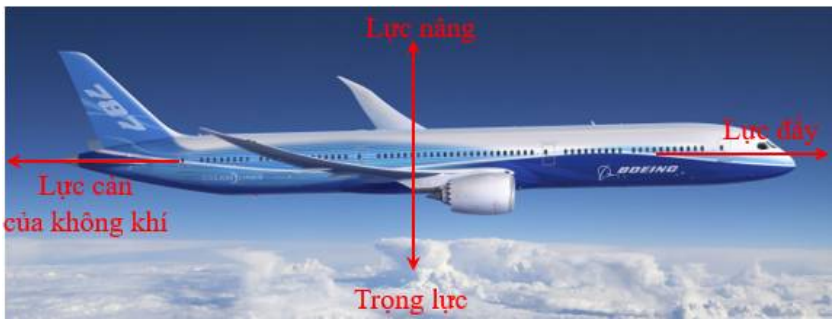
Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}|=m|\vec{g}|=150.9{,}8=1470$ (N).

Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}|=30(m)$ và $(\vec{P},\vec{d})=90°-5°=85°$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30\,m$ là:

$A=\vec{P}\cdot\vec{d}=|\vec{P}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos(\vec{P},\vec{d})=1470.30\cdot\cos 85°\approx 3844(J)$

Câu 97. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ $800\,km/h$ lên $840\,km/h$, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc $800\,km/h$ và $840\,km/h$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$. Biết $\vec{F_1}=k\vec{F_2}$, khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,91

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ $800\,km/h$ lên $840\,km/h$ máy bay giữ nguyên hướng bay nên vectơ $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ có cùng hướng. Do đó, $\vec{F_1}=k\vec{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó (1).

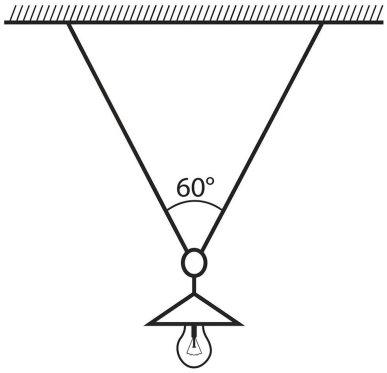
Gọi v_1,v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt $800\,km/h$ và $840\,km/h$.

Suy ra $v_1=800(km/h),v_2=840(km/h)$

Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\frac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2}\right|}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{800^2}{840^2}=\frac{400}{441}\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\frac{400}{441}\left|\overrightarrow{F_2}\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{F_1}=\frac{400}{441}\overrightarrow{F_2}\Rightarrow k=\frac{400}{441}\approx 0,91$

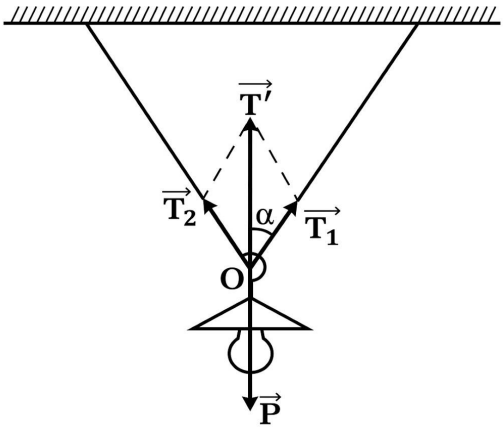
Câu 98. Người ta treo một bóng đèn có khối lượng $m=0,5$ kg bằng cách luồn sợi dây qua một cái móc của đèn và hai đầu dây được gắn chặt trên trần nhà. Hai nửa sợi dây có chiều dài bằng nhau và hợp với nhau một góc bằng $60°$ như hình vẽ. Tính lực căng của mỗi nửa sợi dây là bao nhiêu? Lấy $g=10\ \text{m}/\text{s}^2$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,89



Ta có $\vec{P}=m\vec{g}$ nên $P=\left|\vec{P}\right|=m\cdot\left|\vec{g}\right|=5$ N.

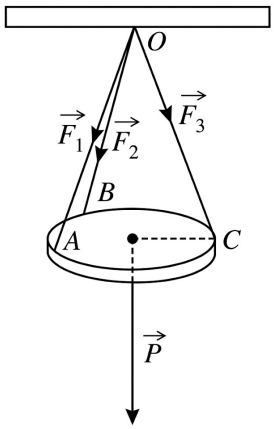
Bóng đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{P}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}=\vec{0}$ hay $\vec{P}=\overrightarrow{T'}$ với $\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{T'}$.

Suy ra $T'=P=5$ N.

Vì $T_1=T_2$ và $\left(\vec{T_1},\vec{T_2}\right)=60°$ nên $\frac{T'}{2}=T_1\cdot\cos 30^\circ\Rightarrow T_1=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\approx 2,89N$.

Câu 99. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng

$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=10(N)$ (xem hình vẽ).

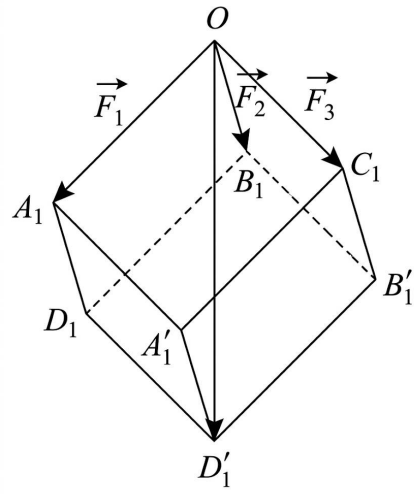


Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17,3



Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$

Lấy các điểm D_1,A_1',B_1',D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp .

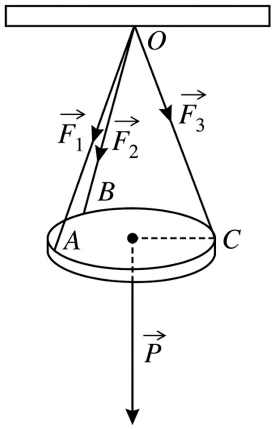
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OD_1'}$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=10(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$

Suy ra trọng lượng của tấm gỗ tròn: $\left|\overrightarrow{P}\right|=\left|\overrightarrow{OD_1'}\right|=10\sqrt{3}(N)\approx 17,3(N)$

Câu 100. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đều có độ lớn bằng $60(N)$. Cho biết các đường thẳng OA,OB,OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng $30°$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (đơn vị N).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 90

Theo giả thiết ta có $O.ABC$ là hình chóp đều với $OA=OB=OC=60$ và góc tạo bởi mỗi đường thẳng OA,OB,OC với (ABC) là $30°$.

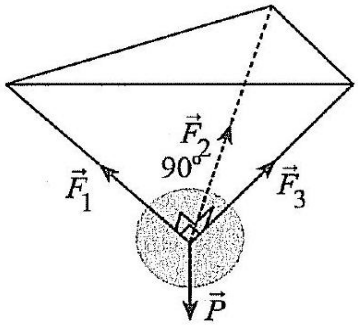
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $OG\perp(ABC)$ và $\widehat{OAG}=\widehat{OBG}=\widehat{OCG}=30°$.

Gọi T là trọng lượng của đèn tròn thì $T=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|3\overrightarrow{OG}\right|=3OG$.

Trong tam giác OAG vuông tại G, ta có: $OG=OA\sin\widehat{OAG}=60\sin 30°=30$.

Vậy trọng lượng của đèn là $T=3.30=90(N)$.

Câu 101. Treo một vật nặng có trọng lượng $100(N)$ bởi ba sợi dây giống hệt nhau và có độ dài bằng nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc $90°$ như hình vẽ. Gọi $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực $\vec{F}_1$ bằng bao nhiêu Niutơn? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

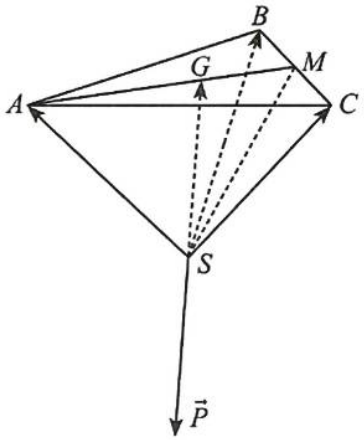


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 173

Xét tứ diện đều $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC biểu diễn độ lớn các lực căng dây và SP biểu diễn độ lớn của trọng lực tác dụng lên vật nặng S.



Ta có $\left|\vec{F_1}\right| = SA, \left|\vec{F_2}\right| = SB, \left|\overrightarrow{F_3}\right| = SC, |\vec{P}| = SG = 100N$ và $\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$, trong đó G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Đặt $x = SA, x > 0 \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$.

Khi đó $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\left(\frac{AC\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

Mặt khác $SG = SP = 100$ nên xét tam giác SAG vuông tại G, ta có

$$SA^2 = SG^2 + AG^2 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 + \frac{2x^2}{3} \Leftrightarrow x = 100\sqrt{3} \approx 173(N).$$

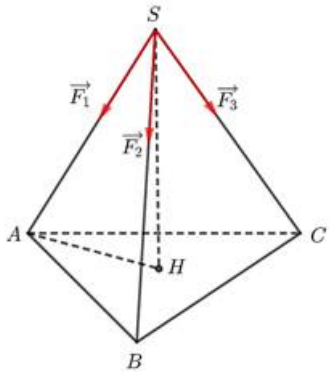
Câu 102. Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân. Trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là 30 N và được phân bố thành ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lên ba chân của giá đỡ. Ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau và góc tạo bởi mỗi chân của giá đỡ và mặt đất là $60°$. Hỏi độ lớn của lực $\overrightarrow{F_1}$ là bao nhiêu Niutơn *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?*



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11,5



Giả sử chiếc máy đo đạc được đặt ở điểm S; mặt phẳng (ABC) là mặt đất; ba chân của giá đỡ tương ứng với ba cạnh SA, SB, SC; các lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ được mô tả như hình vẽ bên.

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó, $SH \perp (ABC)$ và $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

Vì ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ có độ lớn bằng nhau và góc tạo bởi mỗi chân của giá đỡ và mặt đất là $60°$ nên tồn tại số thực $k(k \neq 0)$ để $\vec{F_1}=k\overrightarrow{SA}, \vec{F_2}=k\overrightarrow{SB}, \vec{F_3}=k\overrightarrow{SC}$ và $\widehat{SAH}=60°$.

Ta có $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=k\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)=k\left(3\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=3k\overrightarrow{SH}$.

Lại có $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc máy đo đạc và $\left|\vec{P}\right|=30\,\text{N}$.

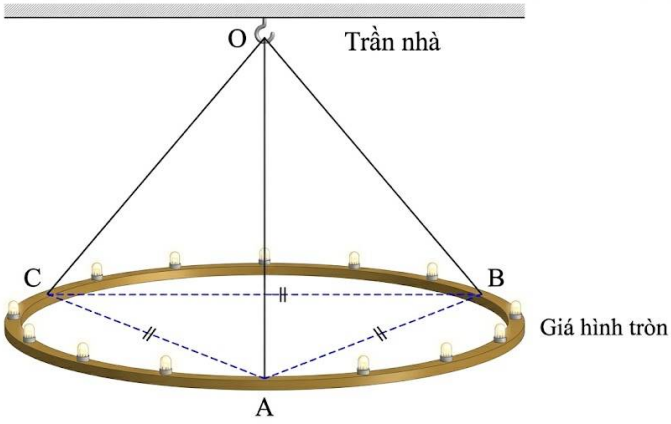
Khi đó, $3k\overrightarrow{SH}=\vec{P}$. Suy ra $3k\left|\overrightarrow{SH}\right|=\left|\vec{P}\right|=30$, do đó $SH=\left|\overrightarrow{SH}\right|=\dfrac{30}{3k}=\dfrac{10}{k}$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SA=\dfrac{SH}{\sin\widehat{SAH}}=\dfrac{\frac{10}{k}}{\sin 60°}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3k}$.

Suy ra $\left|\vec{F_1}\right|=k\left|\overrightarrow{SA}\right|=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\approx 11,5$ (N).

Vậy độ lớn của lực $\vec{F_1}$ xấp xỉ bằng $11,5\,\text{N}$.

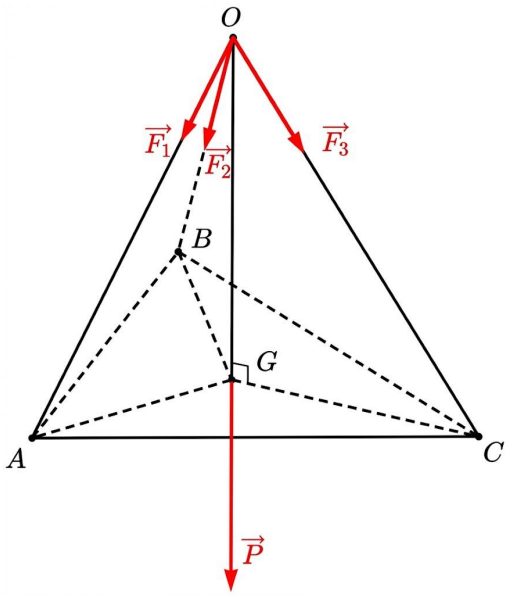
Câu 103. Một chiếc đèn trang trí (gồm các bóng đèn gắn vào một giá hình tròn) như hình bên dưới. Đèn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên giá sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L, trọng lượng của chiếc đèn là $27N$, bán kính của giá hình tròn là $0,5m$. Biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $12N$. Hỏi chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,76



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó, $GA=GB=GC=0,5m$. Gọi F là độ lớn của các lực căng F_1,F_2,F_3 trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F=F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

Theo bài ra ta có $OA=OB=OC=L$ nên $OG\perp(ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=L$

Do đó, $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Vì vậy tồn tại hằng số $c\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{F_1}=c\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{F_2}=c\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{F_3}=c\overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=c\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3c\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác, ta lại có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Mà trọng lực tác dụng lên chiếc đèn là $27N$ nên $\left|\vec{P}\right|=27\Leftrightarrow 3c\left|OG\right|=27N\Leftrightarrow c=\dfrac{9}{OG}$.

Tam giác AOG vuông tại G (do $OG\perp(ABC)$) nên ta suy ra $OG=\sqrt{OA^2-GA^2}=\sqrt{L^2-0,5^2}\ (m)$ với $L>0,5$.

Do đó, $OG=\sqrt{L^2-0,5^2}\Rightarrow c=\dfrac{9}{\sqrt{L^2-0,5^2}}$.

Khi đó, $\left|\vec{F}\right|=\left|\vec{F_1}\right|=c\left|OA\right|=\dfrac{9L}{\sqrt{L^2-0,5^2}}$ (với $L>0,5$).

Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là $12N$.

Suy ra $F\left(L\right)\le 12\Leftrightarrow\dfrac{9L}{\sqrt{L^2-0,5^2}}\le 12\Leftrightarrow 3L\le 4\sqrt{L^2-0,5^2}\Leftrightarrow 9L^2\le 16L^2-4\Leftrightarrow 7L^2\ge 4\Rightarrow L\ge\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\approx 0,76$ (m).

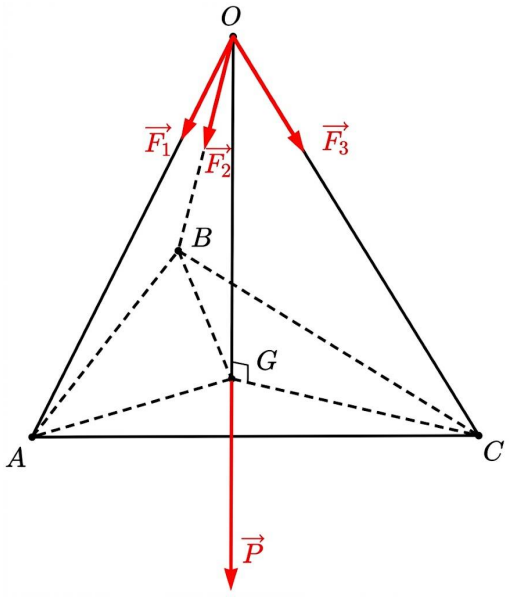
Câu 104. Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dài $60\left(cm\right)$ miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính $20\left(cm\right)$, ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mối thắt của 3 sợi dây và mối nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi chịu không quá $15N$ trọng lượng của miếng giá gỗ là $5N$. Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị N, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37,4



Gọi điểm thắt một đầu bên trên là O và 3 điểm nối 3 sợi dây với giá gỗ tạo thành tam giác đều ABC.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó, $GA=GB=GC=20cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng F_1,F_2,F_3 trên mỗi sợi dây. Đặt $F=x$ với $0<x\le 15$.

Theo bài ra ta có $OA=OB=OC=60cm$ nên $OG\perp(ABC)$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=60$

Do đó, $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Từ đó ta có $\overrightarrow{F_1}=\frac{x}{60}\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{F_2}=\frac{x}{60}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{F_3}=\frac{x}{60}\overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\frac{x}{60}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{3x}{60}\overrightarrow{OG}=\frac{x}{20}\overrightarrow{OG}$.

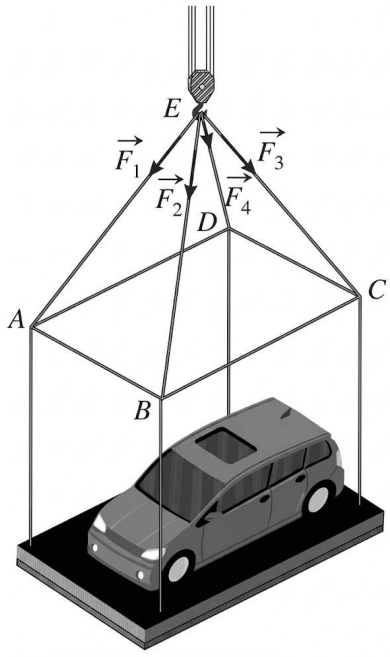
Mặt khác, ta lại có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}$ với $\overrightarrow{P}$ là trọng lượng của giá gỗ và các chậu hoa.

Nên ta có $\left|\overrightarrow{P}\right|=\frac{x}{20}\left|\overrightarrow{OG}\right|=\frac{x\sqrt{60^2-20^2}}{20}=x\sqrt{8}\le 15\sqrt{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất trọng lượng giá gỗ và chậu hoa là $\max\left|\overrightarrow{P}\right|=15\sqrt{8}$.

Suy ra trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt là $15\sqrt{8}-5\approx 37,4(N)$.

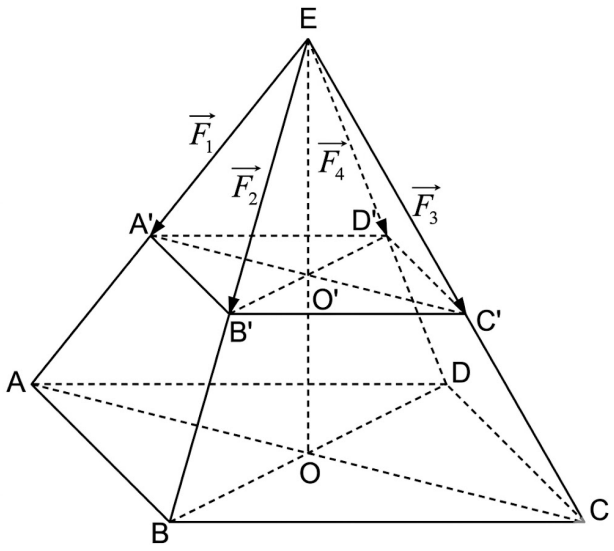
Câu 105. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $500(N)$ và trọng lượng khung sắt là $200(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị: N, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1532



Đặt $\overrightarrow{EA'}=\vec{F_1};\ \overrightarrow{EB'}=\vec{F_2};\ \overrightarrow{EC'}=\vec{F_3};\ \overrightarrow{ED'}=\vec{F_4}$, suy ra $\left|\overrightarrow{EA'}\right|=\left|\overrightarrow{EB'}\right|=\left|\overrightarrow{EC'}\right|=\left|\overrightarrow{ED'}\right|=500\,N$

$\widehat{EA'C'}=\widehat{EAC}=60^{\circ}$ nên tam giác $EA'C'$ đều.

Gọi O' là tâm của hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$

Ta có hợp lực của 4 sợi cáp là: $\vec{F}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{EC'}+\overrightarrow{EB'}+\overrightarrow{ED'}=2\overrightarrow{EO'}+2\overrightarrow{EO'}=4\overrightarrow{EO'}$.

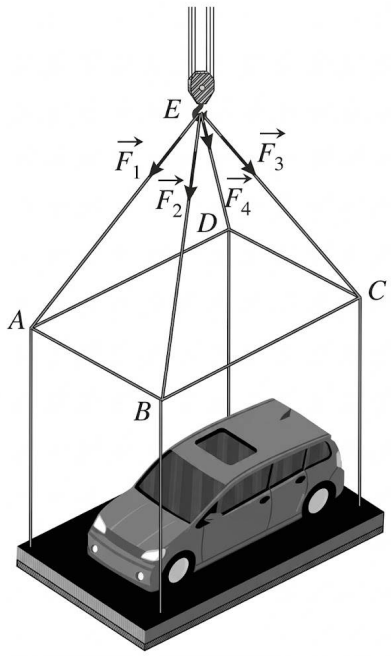
Xét tam giác đều $EA'C'$ có $EO'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}EA'=250\sqrt{3}$.

Từ đó, $\left|\vec{F}\right|=\left|4\overrightarrow{EO'}\right|=1000\sqrt{3}$

Ta có $\left|\vec{P}\right|+200=\left|\vec{F}\right|\Rightarrow\left|\vec{P}\right|=1000\sqrt{3}-200\approx1532\left(N\right)$

Vậy trọng lượng xe ô tô là $1532\left(N\right)$.

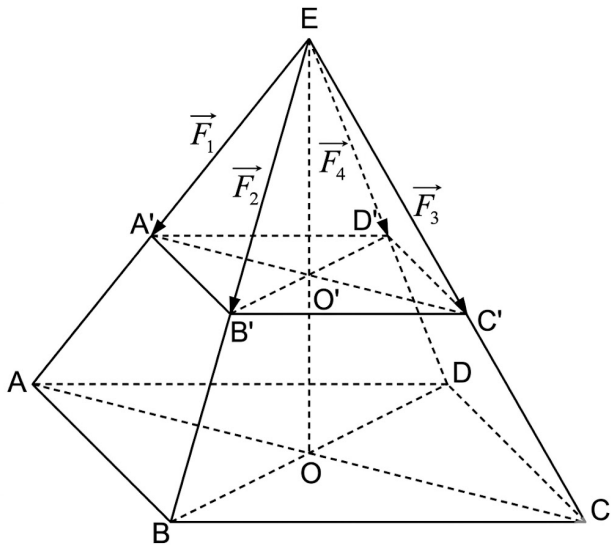
Câu 106. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ một góc $60°$ như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ đều có cường độ $5000\left(N\right)$ và trọng lượng khung sắt là $8000\left(N\right)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9321



Đặt $\overrightarrow{EA'}=\vec{F_1};\ \overrightarrow{EB'}=\vec{F_2};\ \overrightarrow{EC'}=\vec{F_3};\ \overrightarrow{ED'}=\vec{F_4}$, suy ra $\left|\overrightarrow{EA'}\right|=\left|\overrightarrow{EB'}\right|=\left|\overrightarrow{EC'}\right|=\left|\overrightarrow{ED'}\right|=5000\,N$

$\widehat{EA'C'}=\widehat{EAC}=60^{\circ}$ nên tam giác $EA'C'$ đều.

Gọi O' là tâm của hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$

Ta có hợp lực của 4 sợi cáp là: $\vec{F}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{EC'}+\overrightarrow{EB'}+\overrightarrow{ED'}=2\overrightarrow{EO'}+2\overrightarrow{EO'}=4\overrightarrow{EO'}$.

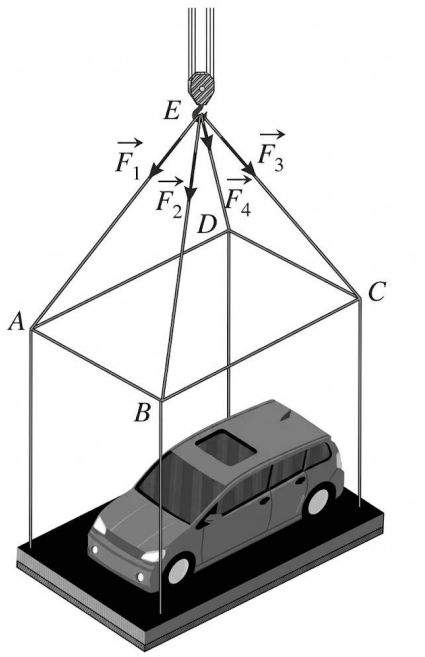
Xét tam giác đều $EA'C'$ có $EO'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}EA'=2500\sqrt{3}$.

Từ đó, $\left|\vec{F}\right|=\left|4\overrightarrow{EO'}\right|=4.2500\sqrt{3}\,N=10000\sqrt{3}\,N$

Ta có $\left|\vec{P}\right|+8000=\left|\vec{F}\right|\Rightarrow\left|\vec{P}\right|=10000\sqrt{3}-8000\approx 9321(N)$

Vậy trọng lượng xe ô tô là $9624\,N$.

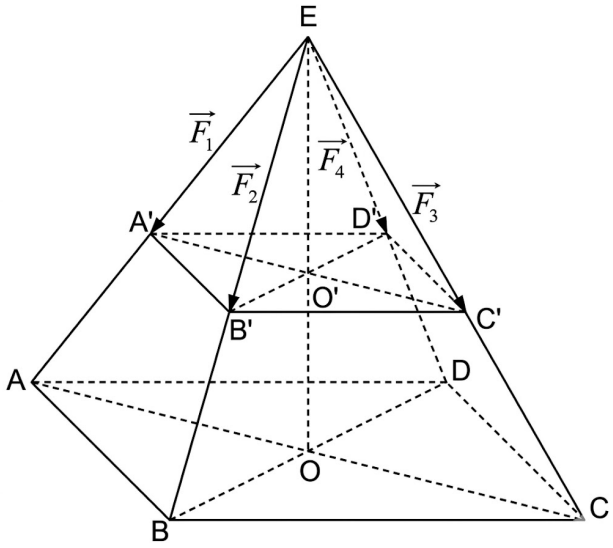
Câu 107. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\left|\overrightarrow{F_4}\right|$, trọng lượng khung sắt là $1000(N)$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô là $4000(N)$. Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp. (làm tròn đến hàng đơn vị)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1768



Đặt $\overrightarrow{EA'}=\overrightarrow{F_1};\ \overrightarrow{EB'}=\overrightarrow{F_2};\ \overrightarrow{EC'}=\overrightarrow{F_3};\ \overrightarrow{ED'}=\overrightarrow{F_4}$, suy ra $\left|\overrightarrow{EA'}\right|=\left|\overrightarrow{EB'}\right|=\left|\overrightarrow{EC'}\right|=\left|\overrightarrow{ED'}\right|=5000\,N$

$\widehat{EA'C'}=\widehat{EAC}=45^o$

Gọi O' là tâm của hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$

Ta có hợp lực của 4 sợi cáp là: $\vec{F} = \overrightarrow{EA'} + \overrightarrow{EC'} + \overrightarrow{EB'} + \overrightarrow{ED'} = 2\overrightarrow{EO'} + 2\overrightarrow{EO'} = 4\overrightarrow{EO'}$.

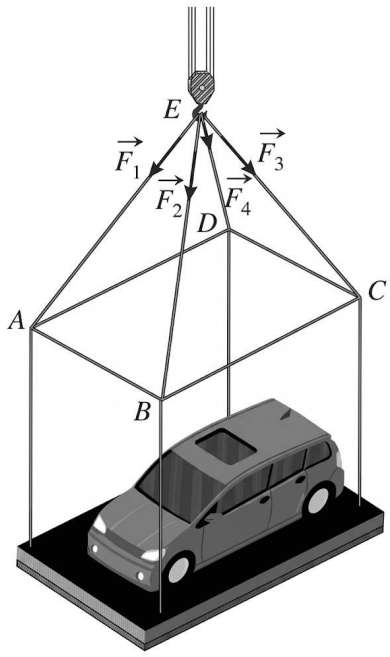
Xét tam giác $EA'C'$ vuông tại O', ta có $EO' = EA'.\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} EA'$.

Từ đó, $\left|\vec{F}\right| = \left|4\overrightarrow{EO'}\right| = 4.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\overrightarrow{EA'}\right| = 2\sqrt{2}\left|\overrightarrow{EA'}\right|$

Ta có $\left|\vec{F}\right| = 4000 + 1000 \Rightarrow 2\sqrt{2}\left|\overrightarrow{EA'}\right| = 5000 \Rightarrow \left|\overrightarrow{EA'}\right| = 1250\sqrt{2}\,(N)$

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right| = \left|\overrightarrow{EA'}\right| = 1250\sqrt{2}\,(N) \approx 1768(N)$

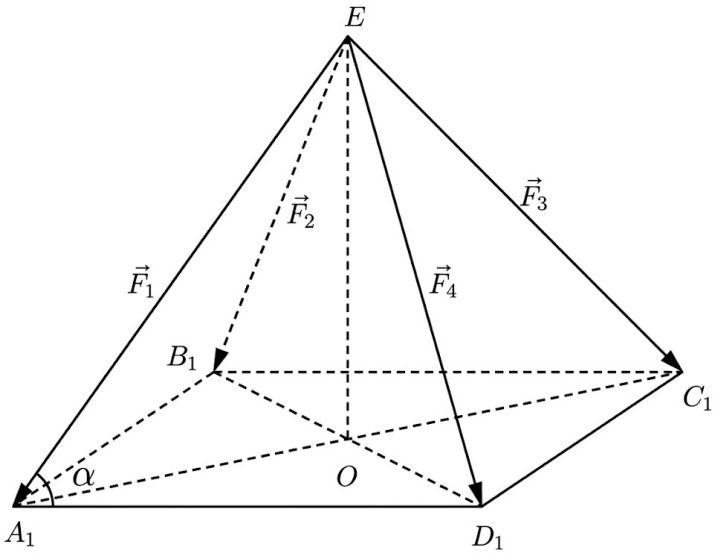
Câu 108. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng $\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_3}; \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4800\,N$, trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6}\,N$. Tính $\sin\alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,92



Gọi $A_1;B_1;C_1;D_1$ là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA_1}=\vec{F}_1;\ \overrightarrow{EB_1}=\vec{F}_2;\ \overrightarrow{EC_1}=\vec{F}_3;\ \overrightarrow{ED_1}=\vec{F}_4$.

Vì $EA;EB;EC;ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α nên $EA_1;EB_1;EC_1;ED_1$ cũng bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc α.

Mặt khác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật có tâm O.

Từ các điều kiện trên ta suy ra $EO\perp(A_1B_1C_1D_1)$. Khi đó $\alpha=(EA_1;(A_1B_1C_1D_1))=\widehat{EA_1O}$.

Ta có: $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}_3|=|\vec{F}_4|=4800N$ nên $EA_1=EB_1=EC_1=ED_1=4800$

Xét tam giác EA_1O vuông tại O nên $EO=EA_1.\sin\alpha=4800.\sin\alpha$.

Ta có: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{EB_1}+\overrightarrow{EC_1}+\overrightarrow{ED_1}=4\overrightarrow{EO}$.

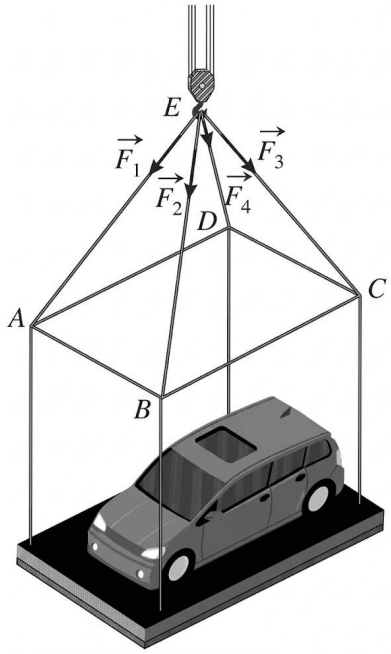
Mặt khác: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lực tác động lên khung chứa xe ô tô.

Suy ra: $\vec{P}=4\overrightarrow{EO}$.

Trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $|\vec{P}|=4EO=19200.\sin\alpha\quad(N)$.

Theo bài ra ta có: $19200.\sin\alpha=7200\sqrt{6}\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}\approx0,92$.

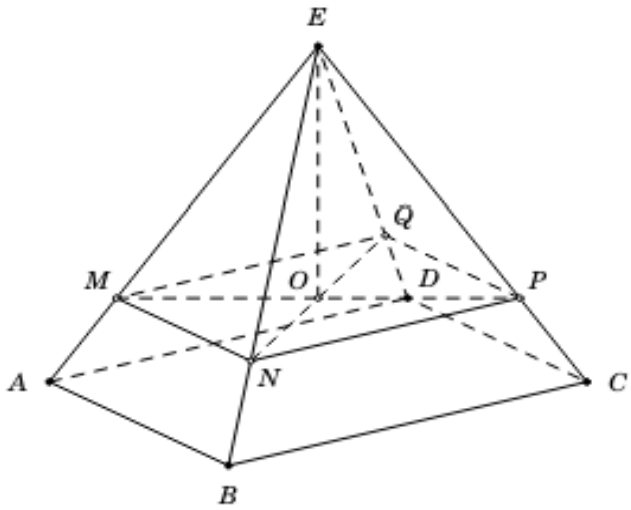
Câu 109. Trong không gian, một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$. Tìm $|\vec{F}_1+\vec{F}_3|$ (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của Niu-tơn*).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8141



Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$\overrightarrow{EM} = \vec{F_1}, \overrightarrow{EN} = \vec{F_2}, \overrightarrow{EP} = \vec{F_3}, \overrightarrow{EQ} = \vec{F_4}.$

$\left|\vec{F_1} + \vec{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP}\right| = \left|2\overrightarrow{EO}\right| = 2EO.$

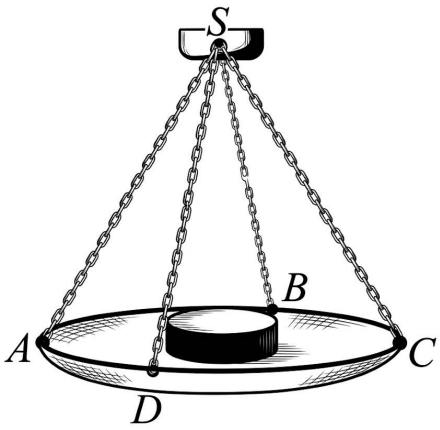
Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng $60°$ nên góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng $60°$ hay $\widehat{EMO} = 60°$.

Xét ΔEMO có $EM = 4700, \widehat{EMO} = 60°$ suy ra $EO = EM.\sin 60° = 2350\sqrt{3}$.

Từ đây ta tính được $\left|\vec{F_1} + \vec{F_3}\right| = 2EO \approx 8141$ N.

Câu 110. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 4$ kg được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60°$. Biết độ

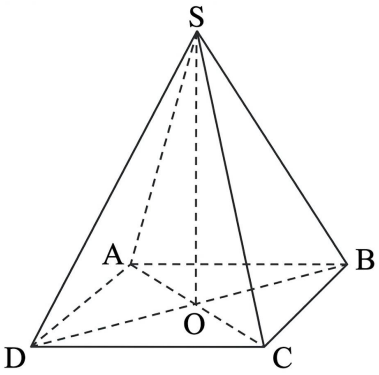
lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$(N). Biết trọng lượng của vật nặng được tính theo công thức $P=mg$, lấy $g=10\,\text{m/s}^2$. Khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO$.

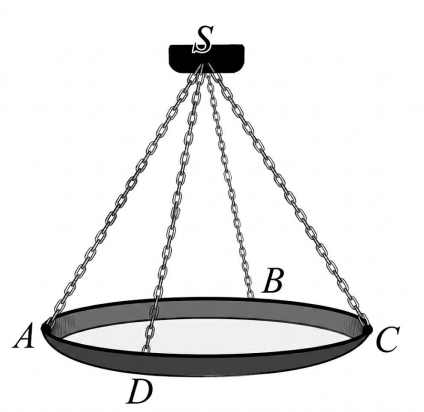
Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=4.10=40(N)$.

Suy ra $4\left|\overrightarrow{SO}\right|=P=40(N)\Rightarrow SO=10$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO=SA.\sin\widehat{SAC}\Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin\widehat{SAC}}\Leftrightarrow\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{10}{\sin 60^\circ}\Rightarrow a=20.$$

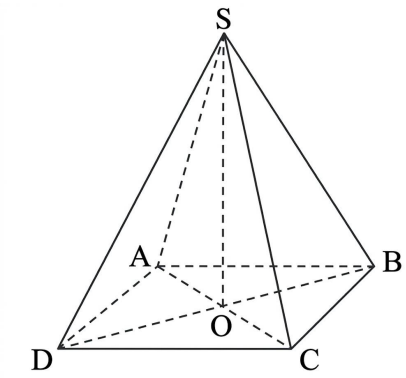
Câu 111. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m=10(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD cùng chất liệu và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều . Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g=10\left(m/s^2\right)$, tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp (đơn vị N).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 25



Ta có độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $\left|\vec{P}\right|=m.g=100N$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Theo bài toán thì là hình chóp $S.ABCD$ có đường cao là SO

Gọi $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ lần lượt là lực căng trên các dây SA, SB, SC, SD

Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F_1}+\vec{F_3}=2\vec{SO}$; $\vec{F_2}+\vec{F_4}=2\vec{SO}$

$\Rightarrow \vec{F_1}+\vec{F_3}+\vec{F_2}+\vec{F_4}=4\vec{SO}$

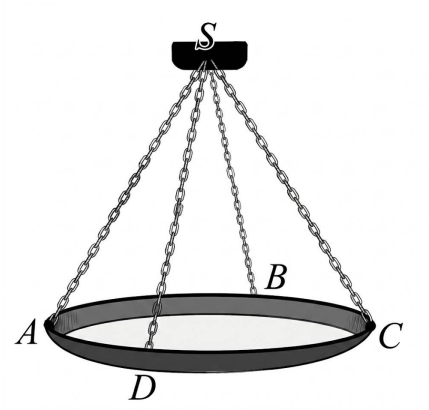
Vì chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=4\vec{SO}$

Độ lớn của lực căng trên mỗi dây bằng nhau và bằng $\left|\vec{F_1}\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|}{4}$

Suy ra $\left|\vec{F_1}\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|}{4}=25N$

Câu 112. Một chùm đèn có khối lượng $m=20(kg)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD cùng chất liệu nhẹ và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có

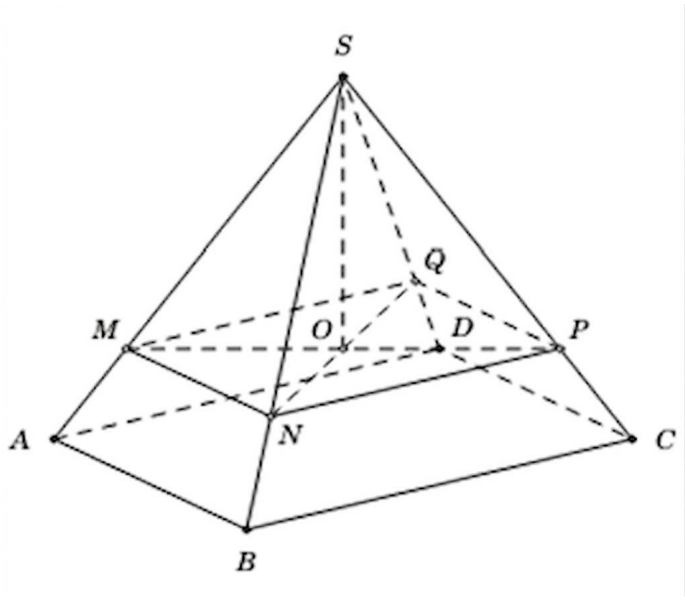
$\widehat{ASC}=90^0$. Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g=10\left(m/s^2\right)$ và lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}\ \ (N)$. Tìm độ lớn của lực căng (đơn vị N) của mỗi sợi dây cáp (làm tròn đến hàng phần chục).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 70,7



Gọi $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F}_3,\vec{F_4}$ lần lượt là lực căng của các sợi dây cáp SA,SB,SC,SD

$\Rightarrow\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F}_3\right|=\left|\vec{F_4}\right|$

Lấy 4 điểm thuộc đĩa đèn M,N,P,Q lần lượt nằm trên các cạnh SA,SB,SC,SD thoả mãn

$SM=\left|\vec{F_1}\right|,SN=\left|\vec{F_2}\right|,SP=\left|\vec{F}_3\right|,SQ=\left|\vec{F_4}\right|$.

Khi đó hình chóp $S.MNPQ$ là hình chóp đều và $\widehat{MSP}=90^0$.

Gọi O là tâm hình vuông $MNPQ$.

Ta có $\vec{P}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F}_3+\vec{F_4}=\vec{SM}+\vec{SN}+\vec{SP}+\vec{SQ}=4\vec{SO}$

$\Rightarrow\left|\vec{P}\right|=4SO=10.20\Rightarrow SO=50$

$\Rightarrow MP = 100 \Rightarrow SM = SP = 50\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right| = 50\sqrt{2} \approx 70,7N$

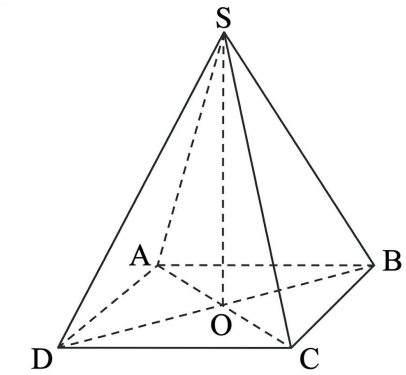
Câu 113. Người ta vận chuyển một thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc 4 dây cáp vào 4 góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ. Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là $60°$. Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ biểu diễn lực căng của 4 sợi dây, chịu được tối đa lực căng là $5000N$. Hỏi cần cẩu nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy $g = 10\ \text{m/s}^2$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1732



Theo hình vẽ ta có các vectơ $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$ biểu thị các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$.

Khi đó $\vec{F}_1 + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS}$

$= -\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}\right) = -\left(\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\right) + \left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)\right) = -\left(2\overrightarrow{SO} + 2\overrightarrow{SO}\right) = -4\overrightarrow{SO}$

Vì các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là $60°$ nên ΔSAC cân và $\widehat{ASC} = 60°$ do đó ΔSAC tam giác đều suy ra $SO = SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}\right| = 4SO = 4.SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10000\sqrt{3}$ N.

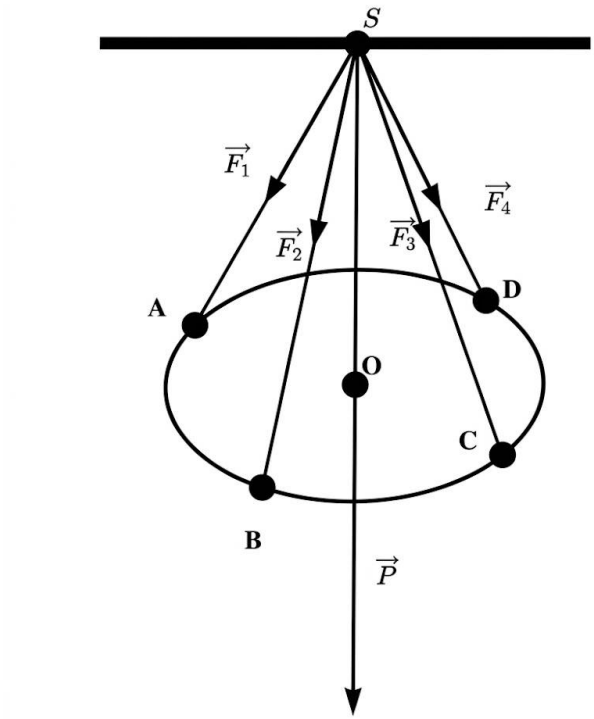
$\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow P = m.g = 10m$.

Để cần cẩu nâng được thùng hàng thì

$\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}\right| \geq P \Rightarrow 10000\sqrt{3} \geq 10m \Rightarrow m \leq 1000\sqrt{3}$ kg.

Vậy $m \leq 1732$ kg.

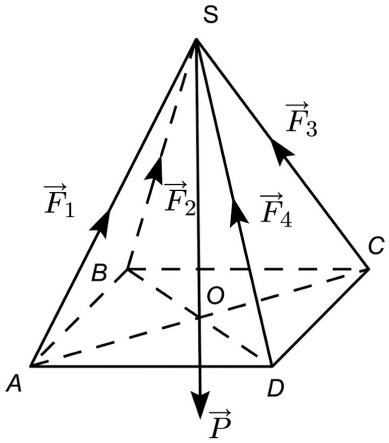
Câu 114. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi bốn dây không dãn xuất phát từ điểm S trên trần nhà lần lượt buộc vào bốn điểm $A;B;C;D$ trên nền tròn sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Độ dài của bốn đoạn dây SA,SB,SC,SD đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $32N$ và bán kính của chiếc đèn là $60cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F=F(L)$ là một hàm số với biến số là L. Tìm chiều dài (đơn vị centimet) tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế chịu được lực căng tối đa là $12N$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 80,5



Các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ trên mỗi sợi dây tại S cũng là các lực căng trên mỗi sợi dậy tại A,B,C,D.

Gọi tâm chiếc đèn là O.

Xét theo phương Oz, vì đèn cân bằng theo phương thẳng đứng nên ta có:

$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=-\overrightarrow{P}$

Chiếu lên Oz:

$F_1\sin\widehat{SAO}+F_2\sin\widehat{SBO}+F_3\sin\widehat{SCO}+F_4\sin\widehat{SDO}=32\ (1)$

Xét tam giác vuông SOA vuông tại O: $\cos\widehat{SAO}=\dfrac{r}{L}=\dfrac{60}{L}$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông và $SA=SB=SC=SD=L$ suy ra $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

$\Rightarrow\widehat{SAO}=\widehat{SBO}=\widehat{SCO}=\widehat{SDO}$.

Từ (1) ta có: $4F.\sin\widehat{SAO}=32\Rightarrow F=\dfrac{8}{\sin\widehat{SAO}}=\dfrac{8}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{SAO}}}=\dfrac{8}{\sqrt{1-(\dfrac{60}{L})^2}}=\dfrac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}$.

Vậy $F=F(L)=\dfrac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}$.

$F=F(L)=\dfrac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}\le 12\Leftrightarrow L\ge 80,5cm$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $80,5cm$.

Câu 115. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 120

Ta có $6\sqrt{3}=\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\Leftrightarrow\left(6\sqrt{3}\right)^2=\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4b^2+4\vec{a}.\vec{b}=108\Leftrightarrow 6^2+4.6^2+4.\vec{a}.\vec{b}=108\Leftrightarrow 4.\vec{a}.\vec{b}=-72\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=-18$.

Lại có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-18}{6.6}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120°$.

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $120°$.

Câu 116. Trong không gian, cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3$ và $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-0,5$

Ta có:

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{7} \Leftrightarrow \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=28 \Leftrightarrow \vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}\vec{b}=28 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=28$

$\Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}=-0,5$

Câu 117. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$. Tính $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3 \Leftrightarrow \left(\vec{a}\right)^2-2.\vec{a}.\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2=9 \Leftrightarrow 1-2.\vec{a}.\vec{b}+4=9 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=-2$.

Ta có: $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\right)^2-3.\vec{a}.\vec{b}-2\left(\vec{b}\right)^2=2.1-3.(-2)-2.4=0$.

Câu 118. Trong không gian, cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{c}\right|=5$ và $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0}$.

Khi đó biểu thức $M=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 29

Ta có $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{c} \Leftrightarrow 25\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=9\vec{c}^2 \Leftrightarrow 25\left(\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2\right)=9\vec{c}^2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=4$.

Tương tự: $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{a}=5\vec{b}+3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{c}=5$.

$5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{c}=20$.

Vậy $M=4+5+20=29$.

Câu 119. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$(quy tắc trung điểm) $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (vì M là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Vậy $k=\frac{1}{2}=0,5$

Câu 120. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,25$

Ta có $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PN}$

nên $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PN}=2(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})=2.2.\overrightarrow{PI}=4\overrightarrow{PI}$.

Vậy $k=\dfrac{1}{4}=0,25$

Câu 121. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,5$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}$

Mà M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{CN}$

Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

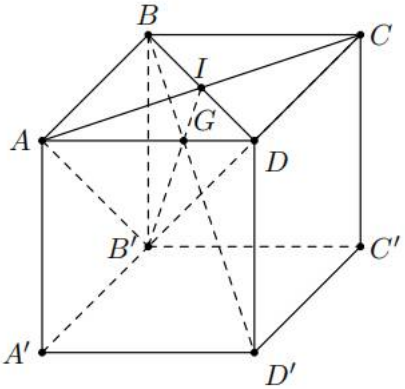
Vậy $k=\dfrac{1}{2}=0,5$

Câu 122. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD'}=k.\overrightarrow{BG}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3



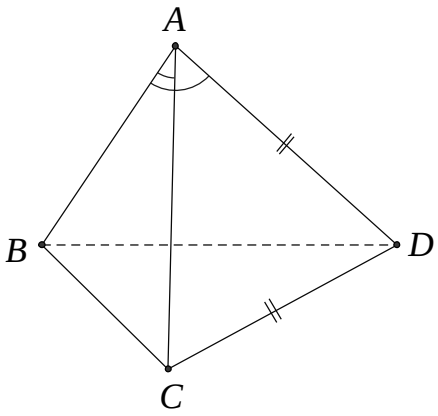
Ta có $\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \Rightarrow \dfrac{BG}{D'G} = \dfrac{BI}{D'B'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{BG}{BD'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$

Câu 123. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60°, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Tính giá trị $\cos\varphi$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,25$



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0$

$= AB.AD.\dfrac{1}{2} - AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}AB.AD = -\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{-\dfrac{1}{4}AB.CD}{AB.CD} = -\dfrac{1}{4}$.

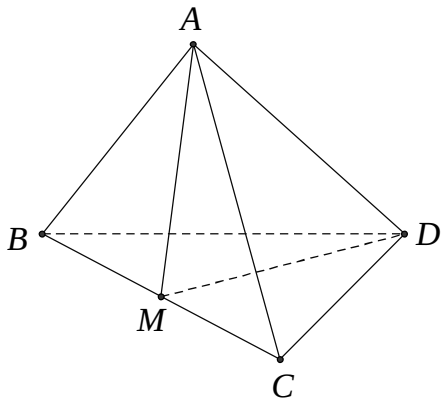
Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

Câu 124. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Biết $\cos\left(AB, DM\right) = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$, khi đó giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,5$



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos 30^0-AB.AD.\cos 60^0$

$=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}.$

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

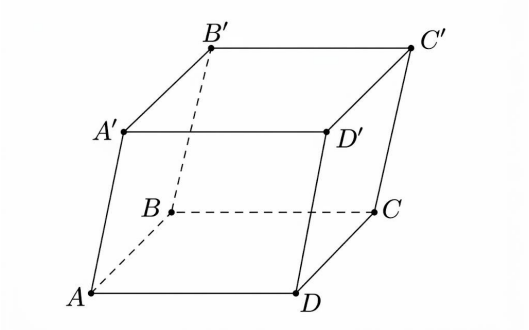
Vậy $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{6}=0,5$

Câu 125. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1



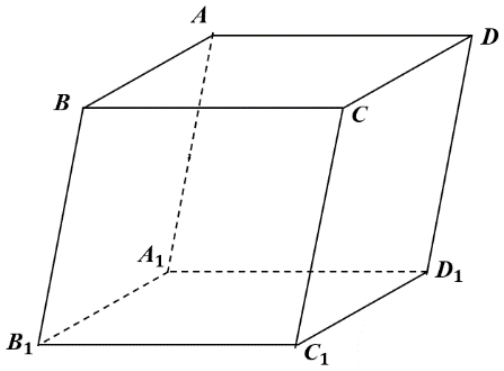
Ta có $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$ nên $k=1$

Câu 126. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1



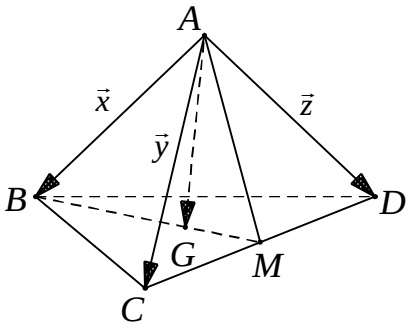
+ Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. Nên $k=1$.

Câu 127. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ ta được $\overrightarrow{AG}=a.\vec{x}+b.\vec{y}+c.\vec{z}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b+3c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2



Gọi M là trung điểm CD.

Ta phân tích:

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{z}.$$

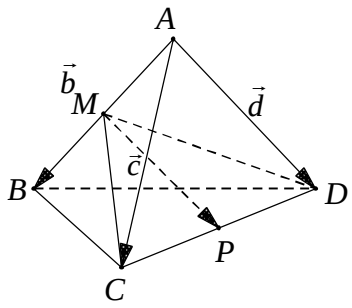
$\Rightarrow T=a+2b+3c=2$

Câu 128. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MP}$ theo ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ta được $\overrightarrow{MP}=x.\vec{b}+y.\vec{c}+z.\vec{d}$ với $x,y,z\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5



Ta phân tích:

$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (tính chất đường trung tuyến)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-2\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

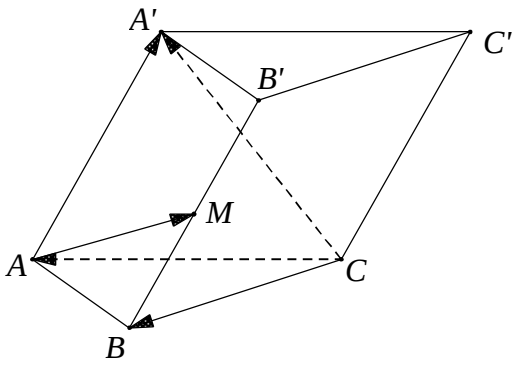
$\Rightarrow T=x+y+z=\frac{1}{2}=0,5$

Câu 129. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AA'}$ ta được $\overrightarrow{AM}=a.\overrightarrow{CA}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{AA'}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5



Ta phân tích như sau: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$\Rightarrow T=a+b+c=1+\left(-1\right)+\frac{1}{2}=0,5$

Câu 130. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

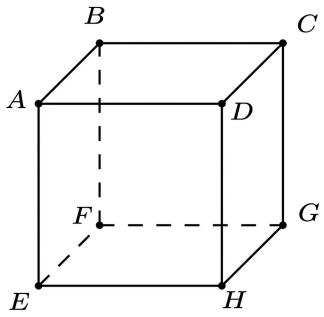
$=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=0.$

Câu 131. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh 10. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 100



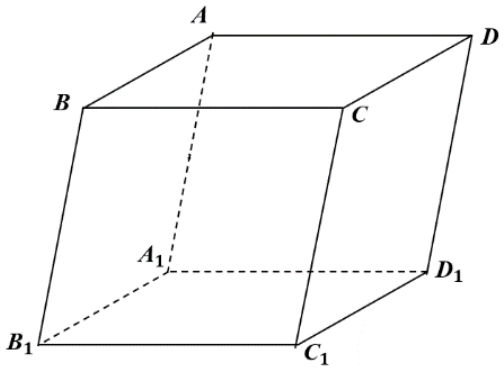
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} &= \left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)\\ &= \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AE}+EF^2+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FB}\\ &= 0+10^2+0+0+0+0=100\end{aligned}$$

Câu 132. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1;G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1. Biết $\overrightarrow{AC_1}=a\overrightarrow{AG_1}+b\overrightarrow{AG_2}$. Tính $a+b$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $2,25$



Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1B}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1D}$; $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1A_1}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=3\overrightarrow{AG_1}$ mà $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$ suy ra $\overrightarrow{AC_1}=3\overrightarrow{AG_1}$ (1)

Ta lại có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2C}$; $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2B_1}$; $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2D_1}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=3\overrightarrow{AG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=3\overrightarrow{AG_2}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_1}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG_2}$.

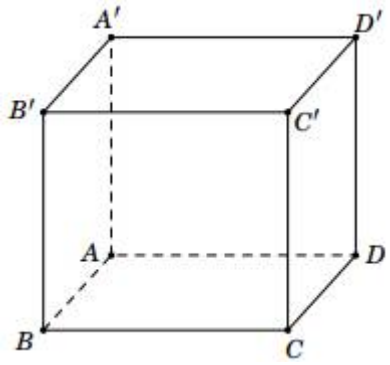
Suy ra $a+b=\dfrac{9}{4}=2,25$

Câu 133. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}$ $(k\in\mathbb{R})$ và $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}$. Tìm giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AB=AA'=AD$

Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AD}$ đôi một vuông góc với nhau.

Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}=0$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$; $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=0$.

Để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$ thì $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\left(-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}\right).\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)=0$

$\Leftrightarrow-8\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}+12\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AA'}.\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)-2\overrightarrow{AD}.\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)=0$

$\Leftrightarrow-8\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-0+0+2k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AA'}-3k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'}+6\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=0$

$\Leftrightarrow-8\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-0+0+0+k\left(\overrightarrow{AA'}\right)^2-0-0-0+6\left(\overrightarrow{AD}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow-8AB^2+kAA'^2+6AD^2=0$ (mà $AB=AA'=AD$)

$\Leftrightarrow-8AB^2+kAB^2+6AB^2=0\Leftrightarrow\left(-8+k+6\right)AB^2=0\Leftrightarrow-8+k+6=0\Leftrightarrow k-2=0\Leftrightarrow k=2$.

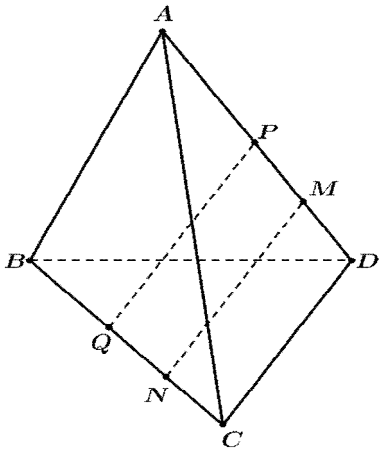
Vậy giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$ là $k=2$.

Câu 134. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M,N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{DC}$. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,5



Do $AM = 3MD$, $BN = 3NC$ và P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC nên M, N lần lượt là trung điểm của PD và QC.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right)$

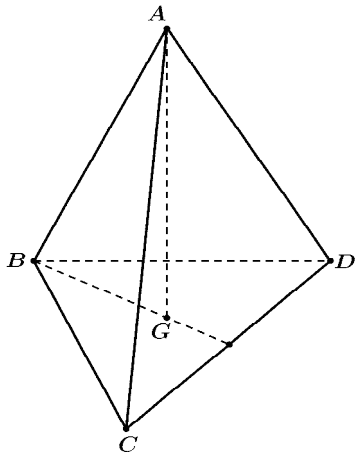
Khi đó: $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = \frac{3}{2} = 1,5$.

Câu 135. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$ khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15



Gọi G là trọng tâm tâm giác BCD, M là trung điểm CD.

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|3\overrightarrow{AG}\right| = 3AG$.

Xét tam giác đều BCD có $BM = BC.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM = 5\sqrt{3}$.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD) \Rightarrow \widehat{AGB} = 90°$.

Xét tam giác ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{15^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{6}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=3AG=15\sqrt{6}\Rightarrow a=15$.

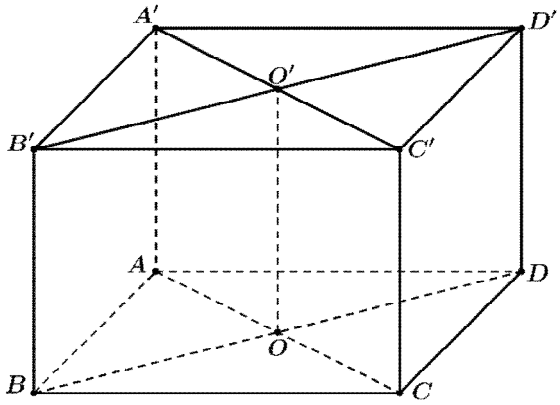
Vậy giá trị của $a=15$.

Câu 136. Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C=\dfrac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17



Ta có: $A'C^2=A'A^2+AC^2=3A'A^2\Rightarrow A'A=\dfrac{A'C}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)=2\overrightarrow{OO'}+2\overrightarrow{OO'}=4\overrightarrow{OO'}$

Suy ra $OS=\left|\overrightarrow{OS}\right|=\left|4\overrightarrow{OO'}\right|=4OO'=4.\dfrac{\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

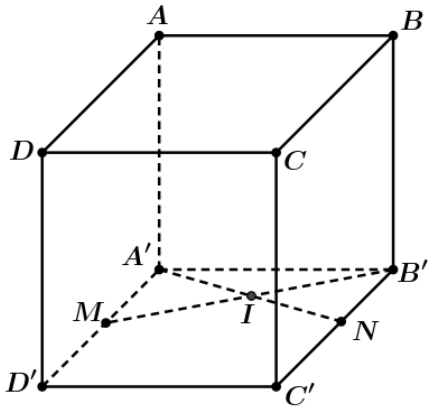
Khi đó $a=1,b=4\Rightarrow P=a^2+b^2=17$.

Câu 137. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI}=a\overrightarrow{AA'}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,8



Ta có tam giác $IA'M$ đồng dạng với tam giác INB' nên suy ra:

$$\frac{IA'}{IN}=\frac{A'M}{B'N}=\frac{\frac{1}{2}A'D'}{\frac{1}{3}A'D'}=\frac{3}{2}\Rightarrow A'I=\frac{3}{5}A'N$$

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'N}\right)=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}.$$

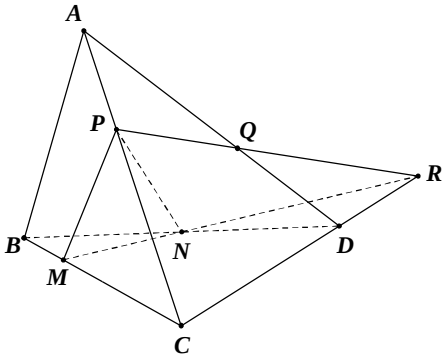
Suy ra $a+b+c=\frac{9}{5}=1,8$

Câu 138. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,BD và AC sao cho $BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,6



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c},\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}=k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b};\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right);\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{b}$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+k\vec{c} \end{cases}$

Vì M,N,P,Q đồng phẳng nên $x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}\Leftrightarrow\begin{cases}0,25x+0,75y=0,75\\0,25x-\frac{1}{12}y=0,25\\0,5x=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\y=\frac{3}{5}\\k=\frac{3}{5}\end{cases}.$

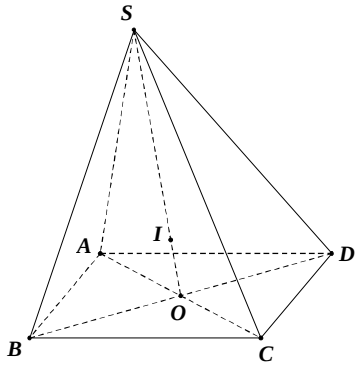
Vậy $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5}=0,6$.

Câu 139. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O,M là điểm thay đổi trên SO. Khi giá trị biểu thức $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{SM}{SO}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,8



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI}=4\overrightarrow{IO}$.

Suy ra: $P=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$.

Vậy $P_{\min}$ khi $M\equiv I\Rightarrow\frac{SM}{SO}=\frac{4}{5}=0,8$.

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA=3, SB=4, SC=5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{SA_1^2}+\dfrac{1}{SB_1^2}+\dfrac{1}{SC_1^2}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,32$

Gọi G là trọng tâm của $S.ABC$ khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$.

Từ đó $\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)(1)$.

Do A_1, B_1, C_1 thuộc các tia SA, SB, SC nên $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SA_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SB_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SC_1}$ cùng hướng, từ đó $\dfrac{\overrightarrow{SA}}{SA}=\dfrac{\overrightarrow{SA_1}}{SA_1}, \dfrac{\overrightarrow{SB}}{SB}=\dfrac{\overrightarrow{SB_1}}{SB_1}, \dfrac{\overrightarrow{SC}}{SC}=\dfrac{\overrightarrow{SC_1}}{SC_1}$.

Vậy (1) tương đương với $\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{SA}{SA_1}\overrightarrow{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}\overrightarrow{SC_1}\right)(2)$

Do G, A_1, B_1, C_1 thuộc một mặt phẳng nên từ (2) ta có $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{SA}{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}\right)=1$

Hay $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}=4$ trong đó $x=SA_1, y=SB_1, z=SC_1$.

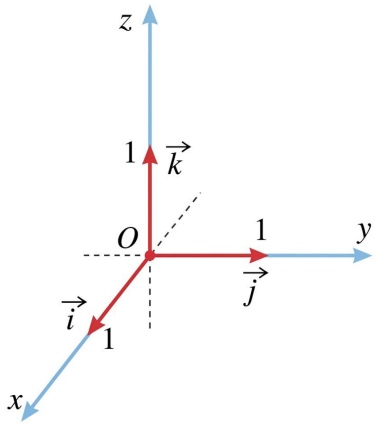
Vậy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$ trong điều kiện $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}=4$ và $0<x<3; 0<x<4; 0<z<5$.

Ta có $16=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}\right)^2\le\left(3^2+4^2+5^2\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)$.

Suy ra $P=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\ge\dfrac{8}{25}=0,32$

BÀI 7
HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục tọa độ trong không gian



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các **vectơ đơn vị** trên các trục Ox, Oy, Oz.

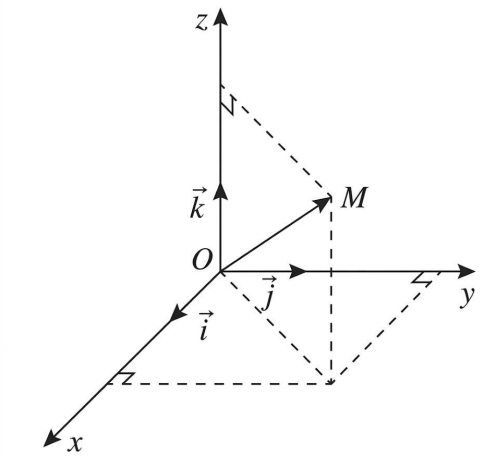
- Hệ trục như vậy được gọi là **hệ trục tọa độ Descartes vuông góc** $Oxyz$**,** hay đơn giản là **hệ tọa độ** $Oxyz$.
- Điểm $O(0;0;0)$ được gọi là **gốc tọa độ**.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc nhau được gọi là các **mặt phẳng tọa độ.**

Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. Tọa độ của điểm, tọa độ của một vectơ trong không gian

a. Khái niệm tọa độ của điểm trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x;\ y;\ z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là **tọa độ** của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M=(x;\ y;\ z)$ hoặc $M(x;\ y;\ z)$, trong đó x là **hoành độ**, y là **tung độ**, z là **cao độ** của điểm M.

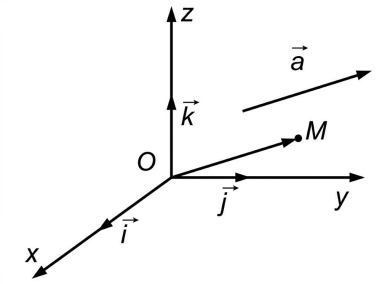


Nhận xét : Nếu điểm có tọa độ $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;0;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;0\right)$, $M_3\left(0;0;z_M\right)$
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$, $\left(Oyz\right)$, $\left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;z_M\right)$, $M_3\left(x_M;0;z_M\right)$

b. Khái niệm tọa độ của một vectơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x;\ y;\ z)$ duy nhất sao cho $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là **tọa độ của vectơ** $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ hoặc $\vec{a}(x;\ y;\ z)$.



Nhận xét :

- Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là tọa độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Cho $\vec{a}=(x;\ y;\ z),\ \vec{b}=(x';\ y';\ z')$, khi đó $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$

c. Tọa độ của một vectơ theo toạ độ hai đầu mút

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ và $N\left(x_N;\ y_N;\ z_N\right)$. Khi đó, ta viết:

$$\overrightarrow{MN}=\left(x_N-x_M;\ y_N-y_M;z_N-z_M\right)$$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ VECTƠ

- Vectơ đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i}=(1;0;0)$.

  Vectơ đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j}=(0;1;0)$.

  Vectơ đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k}=(0;0;1)$.

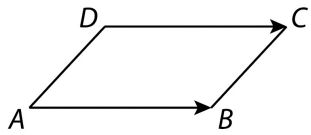
- Nếu $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ thì $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$. Ngược lại, nếu $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ thì $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

- $M=(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=(x;\ y;\ z)$

- Cho $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, $\vec{b}=(x';\ y';\ z')$, khi đó $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$

- $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ và $N\left(x_N;\ y_N;\ z_N\right)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN}=\left(x_N-x_M;\ y_N-y_M;z_N-z_M\right)$.

- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



- Nếu điểm có tọa độ $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì:

  + Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;0;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;0\right)$, $M_3\left(0;0;z_M\right)$

  + Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$, $\left(Oyz\right)$, $\left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;z_M\right)$, $M_3\left(x_M;0;z_M\right)$

  + Điểm đối xứng của M qua các trục Ox,Oy,Oz có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;-y_M;-z_M\right)$, $M_2\left(-x_M;y_M;-z_M\right)$, $M_3\left(-x_M;-y_M;z_M\right)$

  + Điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$, $\left(Oyz\right)$, $\left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;-z_M\right)$, $M_2\left(x_M;-y_M;z_M\right)$, $M_3\left(-x_M;y_M;z_M\right)$

  + Điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ O có tọa độ là $M'\left(-x_M;-y_M;-z_M\right)$.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. b) $\vec{u}=2026\vec{i}-2027\vec{j}$. c) $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{k}$. d) $\vec{u}=-\dfrac{1}{2026}\vec{k}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u}=(2;-1;3)$. b) $\vec{u}=(-3;0;1)$. c) $\vec{u}=\left(0;\dfrac{1}{2026};-\dfrac{1}{2027}\right)$ d) $\vec{u}=(0;0;2026)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;-4)$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox, Oy và Oz.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oyz).

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;3)$.

a) Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là tọa độ điểm đối xứng với A qua trục Ox,Oy,Oz. Tìm tọa độ điểm A_1,A_2,A_3.

b) Gọi A_4,A_5,A_6 lần lượt là tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Oxz)$. Tìm tọa độ điểm A_4,A_5,A_6.

c) Tìm tọa độ điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ O.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;2),B(1;2;3),C(2;1;2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

c) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

d) Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$, tìm tọa độ điểm I.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp.

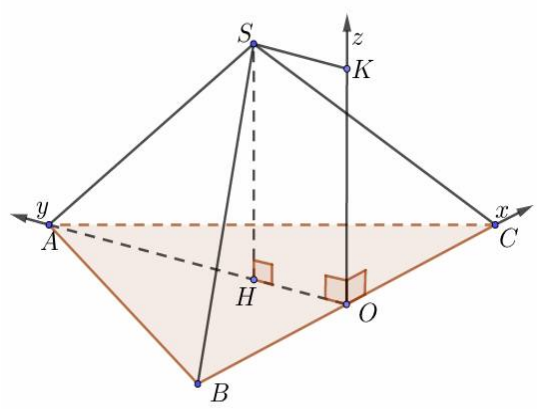
b) Gọi I là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, tìm tọa độ điểm I.

DẠNG 2
ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

I. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

1. Hình chóp đều

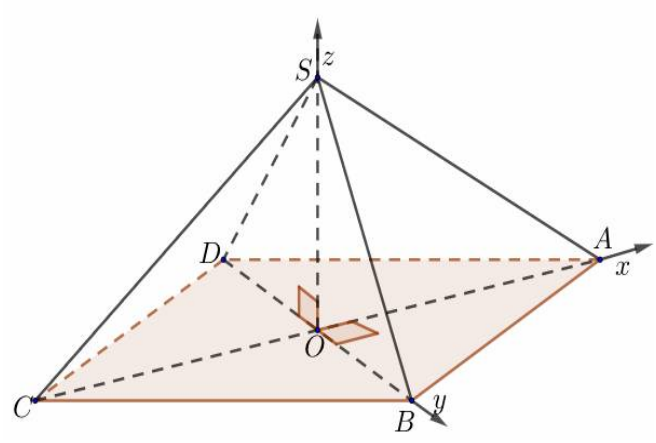
a. Hình chóp tam giác đều và tứ diện đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = a$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ , khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right), S(0;OH;OK).$$

b. Hình chóp tứ giác đều

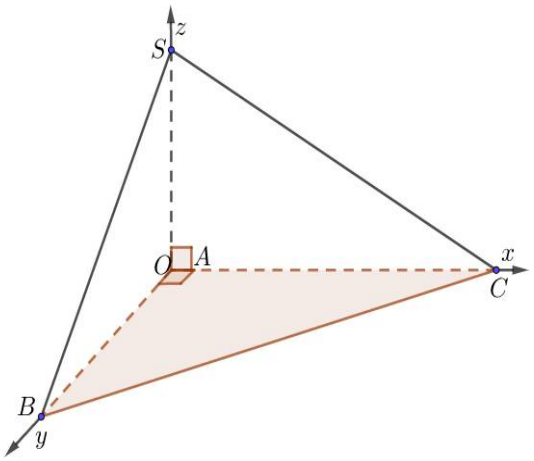


Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO).$$

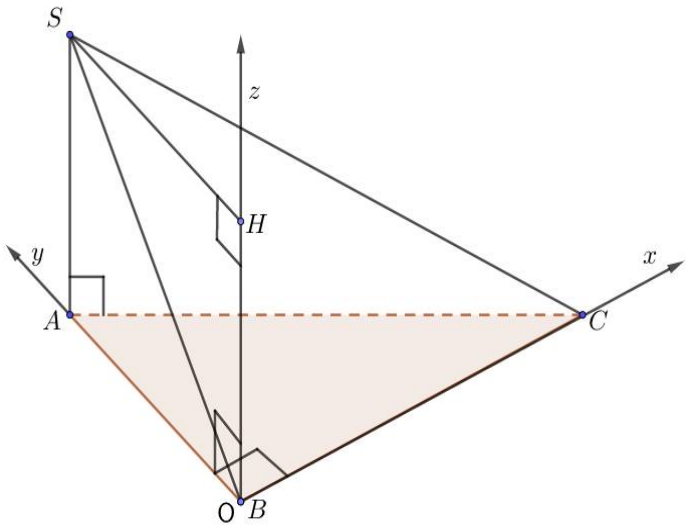
2. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

a. Đáy là tam giác vuông tại A



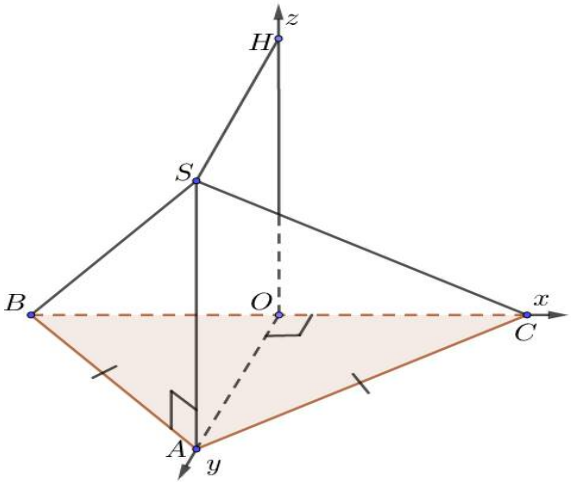
Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0), B(0;OB;0), C(AC;0;0), S(0;0;SA)$.

b. Đáy là tam giác vuông tại B



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $B \equiv O(0;0;0), A(0;AB;0), C(BC;0;0), S(0;AB;SA)$.

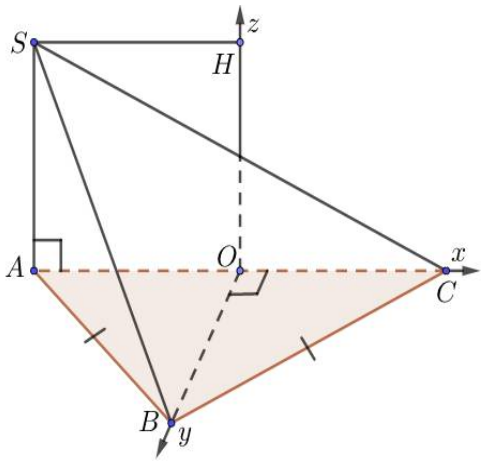
c. Đáy là tam giác cân tại A



Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0), C(OC;0;0), S(0;OA;OH).$$

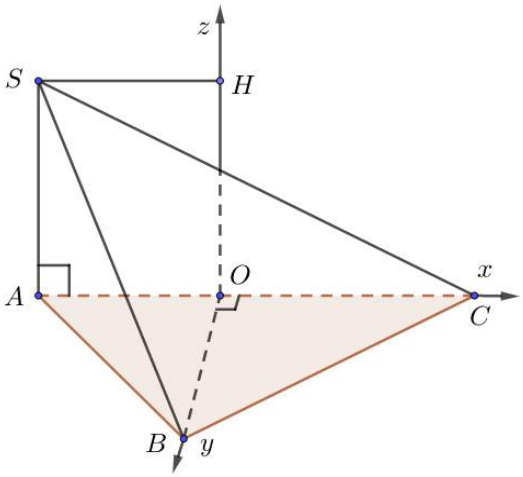
d. Đáy là tam giác cân tại B



Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

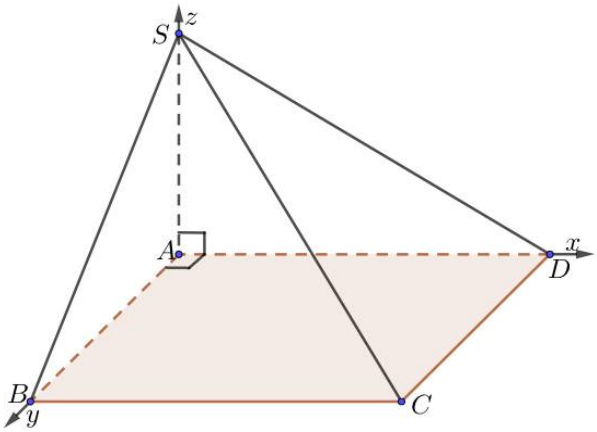
e. Đáy là tam giác thường



Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

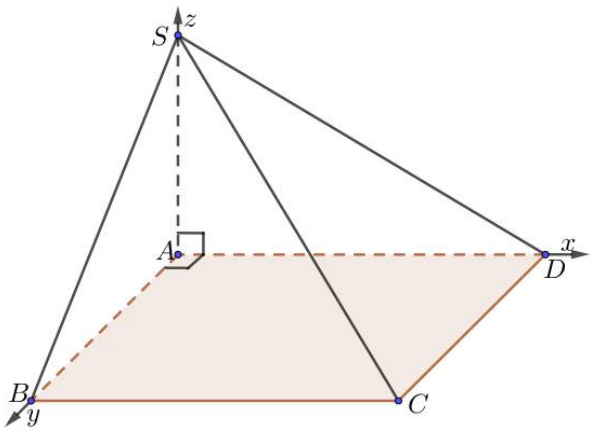
f. Đáy là hình vuông



Chọn hệ trục như hình vẽ, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;a;0), C(1;a;0), D(a;0;0), S(0;0;SA),$$

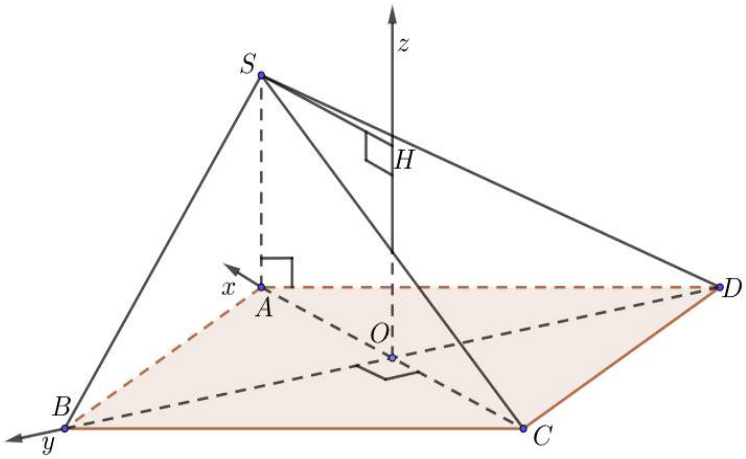
g. Đáy là hình chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0),\ D(AD;0;0),\ S(0;0;SA),$$

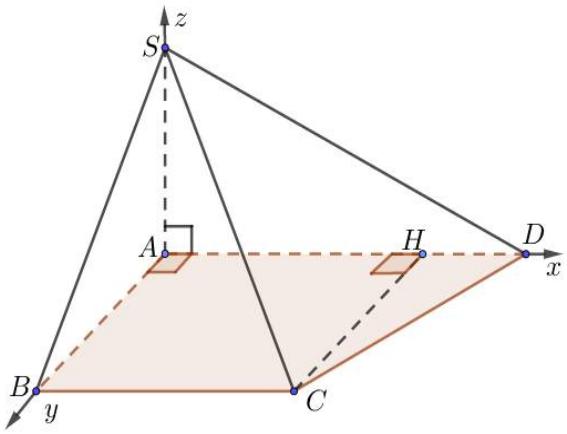
h. Đáy là hình thoi



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(0;OB;0), C(-OC;0;0), D(0;-OD;0),\ S(OA;0;OH)$$

m. Đáy là hình thang vuông

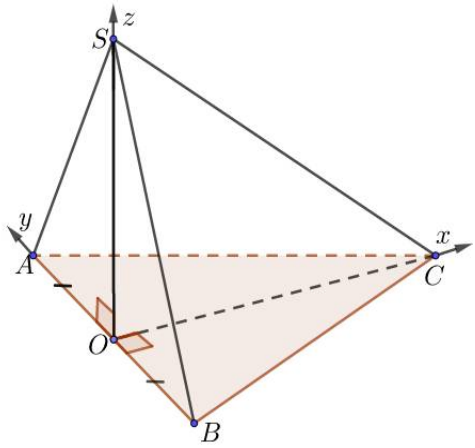


Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AH;AB;0), D(AD;0;0),\ S(0;0;SA).$$

3. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

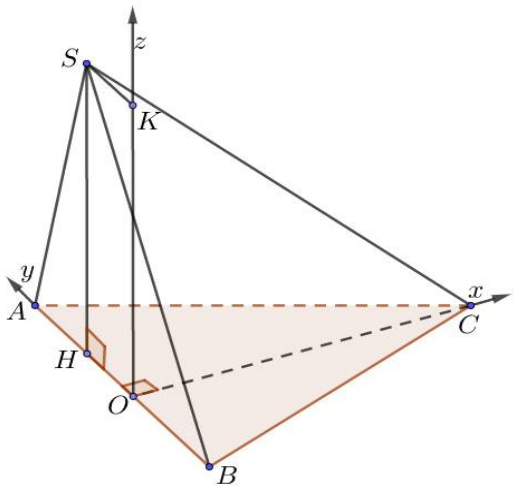
a. Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;0;SO)$$

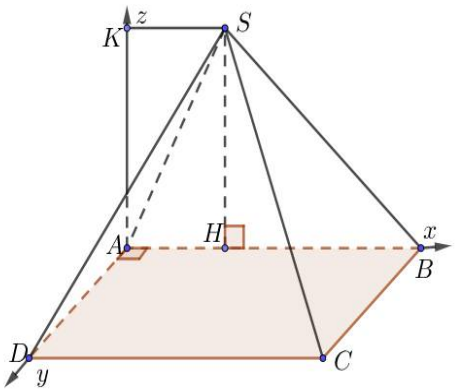
b. Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;OH;OK)$$

c. Đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật



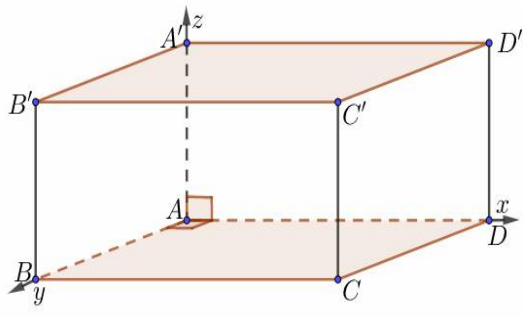
Vẽ đường cao SH trong SAB, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S(AH;0;AK)$$

II. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

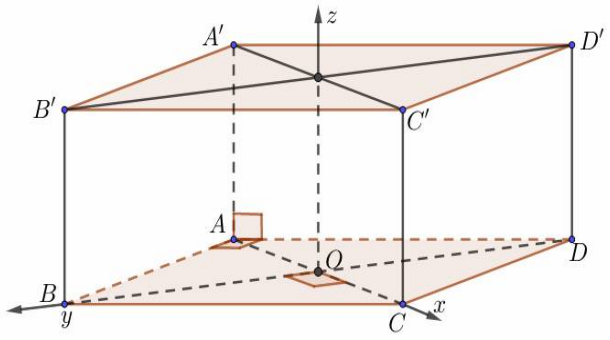
1. Lăng trụ đứng

a. Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

b. Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

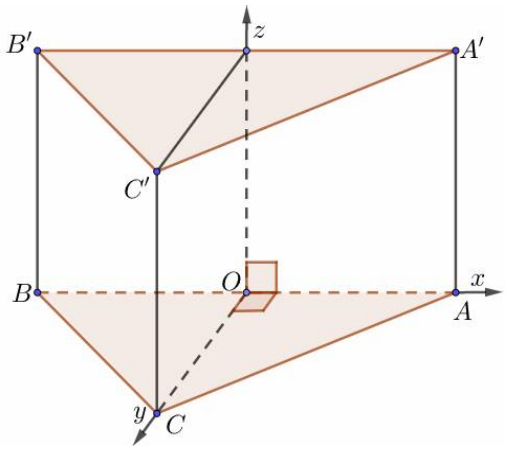


Gọi O là tâm hình thoi đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(-OA;0;0),\ B(0;OB;0),\ C(OC;0;0),\ D(0;-OD;0),$$

$$A'(-OA;0;AA'),\ B'(0;OB;AA'),\ C'(OC;0;CC'),\ D'(0;-OD;DD')$$

c. Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân

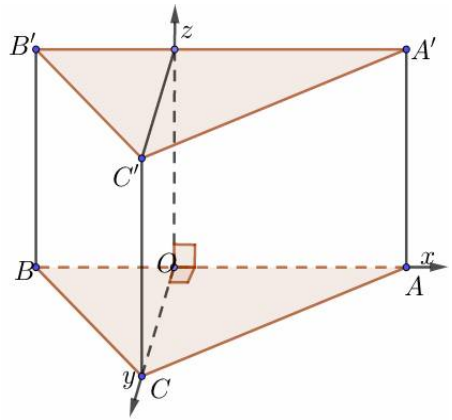


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A\left(\frac{AB}{2};0;0\right),\ B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right),\ C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'),\ B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right),\ C'(0;OC;CC').$$

c. Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

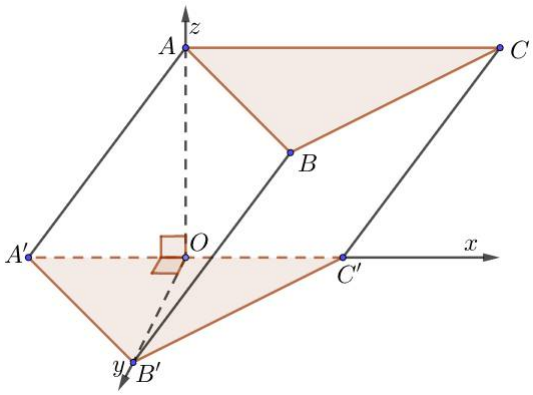


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

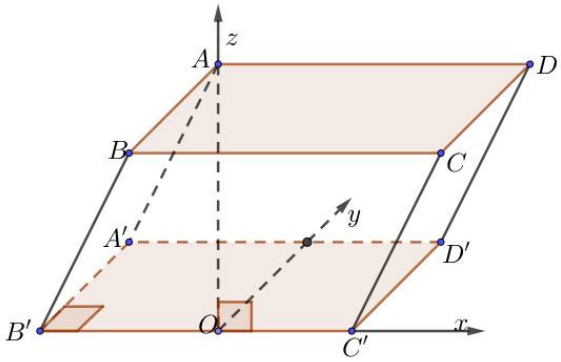
2. Lăng trụ xiên

a. Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

b. Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có các vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $OA=10, OC=12, OO'=8$.

a) Xác định tọa độ các điểm A, C, O'.

b) Xác định tọa độ các điểm A', B'.

c) Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AB'}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=7, AD=5, AA'=3$.

a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}$.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh $C'D'$. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AM}$.

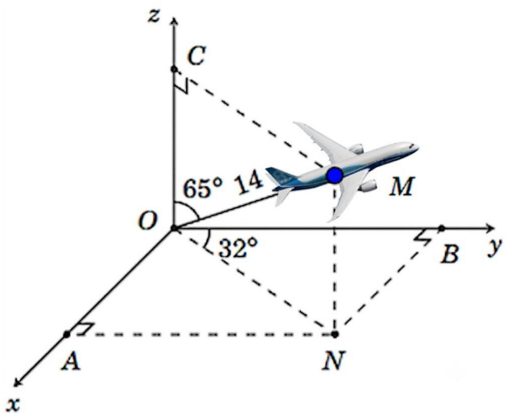
d) Gọi G là trọng tâm của ΔABD. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AG}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=AA'=6, AD=8$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và F là trung điểm của cạnh AC'.

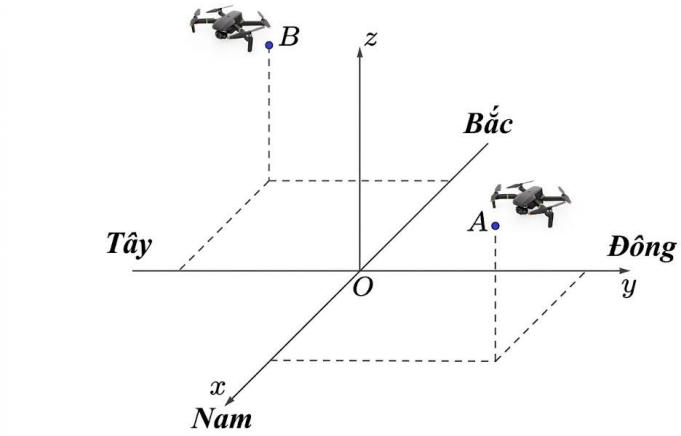
a) Xác định toạ độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định toạ độ hai điểm E và F.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, một máy bay cất cánh từ phi trường O, bay đến điểm M như hình vẽ. Cho biết $OM=14$, $\widehat{NOB}=32°$, $\widehat{MOC}=65°$. Tìm toạ độ điểm M (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



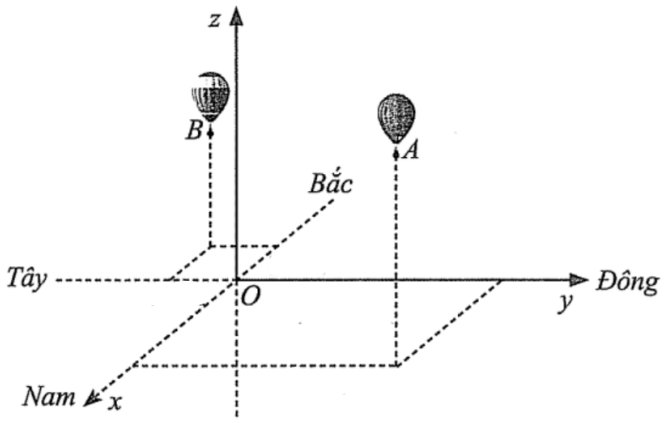
Bài 5. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía Nam và $2m$ về phía Đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía Bắc và $6m$ về phía Tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



a) Xác định toạ độ điểm A và B.

b) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Bài 6. Hai chiếc kinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, khinh khí cầu A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $1km$; khinh khí cầu B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là kilômét).

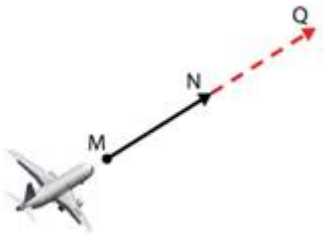


a) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.

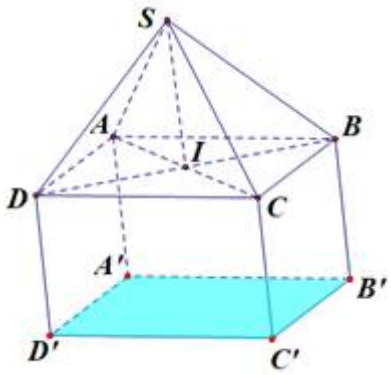
b) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Bài 7. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(400;100;9)$ đến điểm $N(700;200;14)$ trong 15 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 15 phút tiếp theo máy bay đến vị trí $Q(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.



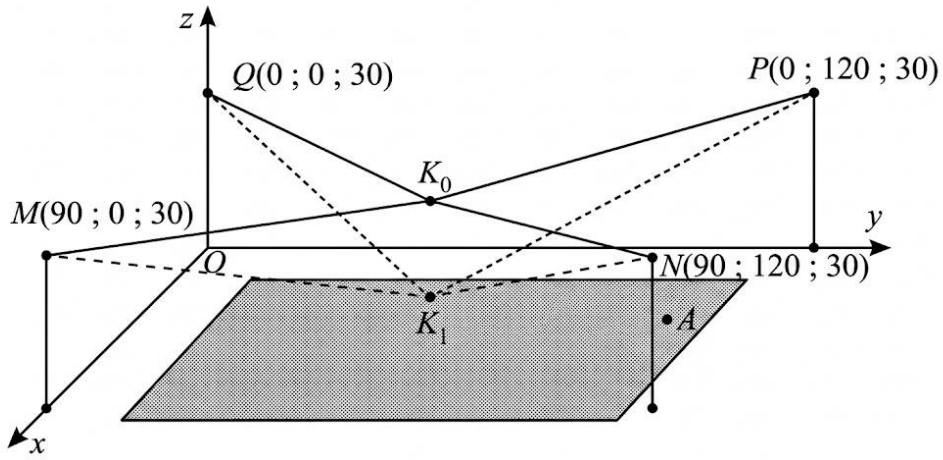


Bài 8. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông (như hình vẽ).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (*đơn vị trên mỗi trục là mét*) sao cho $A'(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;0,5;1)$. Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 *cm* để lắp ráp thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm S là $(a;b;c)$. Tính giá trị của $a+b+c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 9. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (như hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25m và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 . Biết rằng vecto $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c)$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?


z
Q(0 ; 0 ; 30)
P(0 ; 120 ; 30)
K0
M(90 ; 0 ; 30)
y
O
N(90 ; 120 ; 30)
K1
A
x

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;3;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

A. $M=(0;2;1)$. **B.** $M=(1;2;0)$. **C.** $M=(2;1;0)$. **D.** $M=(2;0;1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=6\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(4;6;-3)$. **B.** $(-4;-6;3)$. **C.** $(-6;-4;3)$. **D.** $(6;4;-3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz tương ứng và vectơ $\vec{a}=(1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. **B.** $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$. **C.** $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$. **D.** $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(-2;1;-1)$. **B.** $(2;-1;1)$. **C.** $(0;-1;3)$. **D.** $(0;-1;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j};\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là?

A. $(2;2;-2)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(2;0;-2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.

B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.

C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.

D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;2z)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;5;2)$. **B.** $(0;5;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;2)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3;-1;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(3;0;0)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(0;2;-3)$. **B.** $(1;0;-3)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(1;0;0)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$ **B.** $N(0;-1;1)$ **C.** $P(0;-1;0)$ **D.** $Q(0;0;1)$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $M(3;4;0)$. **B.** $P(-2;0;3)$. **C.** $Q(2;0;0)$. **D.** $N(0;4;-1)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M'. Xác định tọa độ M'.

A. $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2025;2026;-2027)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là:

A. $A'(-2025;-2026;2027)$. **B.** $A'(-2025;-2026;-2027)$.

C. $A'(-2025;2026;-2027)$. **D.** $A'(2025;2026;2027)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;0)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là:

A. $A'(5;2;0)$. **B.** $A'(-5;-2;0)$. **C.** $A'(5;-2;0)$. **D.** $A'(5;2;1)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-6;0;-4)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là:

A. $A'(6;0;-4)$. **B.** $A'(-6;0;-4)$. **C.** $A'(-6;0;4)$. **D.** $A'(6;0;4)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-5;7)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O là:

A. $A'(-2;-5;-7)$. **B.** $A'(2;-5;-7)$. **C.** $A'(-2;5;-7)$. **D.** $A'(2;5;7)$.

Lời giải

Chọn C.

A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O nên $A'(-2;5;-7)$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm N thoả mãn $\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+3\vec{k}$. Tìm toạ độ điểm K là hình chiếu của điểm M trục Ox.

A. $K(-2;0;0)$. **B.** $K(2;0;0)$. **C.** $K(-2;0;-3)$. **D.** $K(2;0;3)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxz).

A. $H(0;3;-4)$. **B.** $H(-2;-3;4)$. **C.** $H(2;3;0)$. **D.** $H(2;0;-4)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:

A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A. $(3;0;-2)$. **B.** $(-1;-2;6)$. **C.** $(1;0;-6)$. **D.** $(1;2;-6)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2-1), \overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)$

A. $C(-1;6;-1)$. **B.** $C(1;6;2)$. **C.** $C(1;6;0)$. **D.** $C(-1;-6;-2)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;-3), N$ và vectơ $\vec{v}=(2;-1;-2)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. Tọa độ của điểm N là

A. $(-1;3;-1)$. **B.** $(3;1;-5)$. **C.** $(1;-3;1)$. **D.** $(-3;-1;5)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho véctơ $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là:

A. $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;3;-2)$ trên trục Oz. Khi đó vectơ $\overrightarrow{MM'}$ có tọa độ là

A. $(1;3;0)$. **B.** $(0;0;2)$. **C.** $(-1;-3;0)$. **D.** $(0;0;-2)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$, $K(-1;3;1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{KP}$.

A. $\overrightarrow{KP}=(6;6;-11)$. **B.** $\overrightarrow{KP}=(8;6;-11)$. **C.** $\overrightarrow{KP}=(6;6;-4)$. **D.** $\overrightarrow{KP}=(3;3;-2)$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có toạ độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;1;0)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(4;4;1)$. **D.** $D(1;3;-1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3;1;2)$, $B(-2;4;-1)$, $C(1;-3;3)$. Tọa độ điểm D là

A. $(0;-6;6)$. **B.** $(-6;7;-2)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(-4;2;5)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(-2;8;-3)$. **B.** $(-4;8;-3)$. **C.** $(-4;8;-5)$. **D.** $(-2;2;5)$.

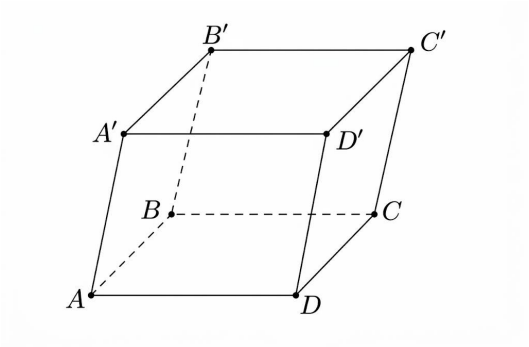
Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có tọa độ các đỉnh $B(3;1;0)$, $D(0;4;-6)$. Tìm tọa độ điểm I.

A. $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right)$. **B.** $I(3;5;-6)$. **C.** $I\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $I(-3;5;-6)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó biểu thức $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

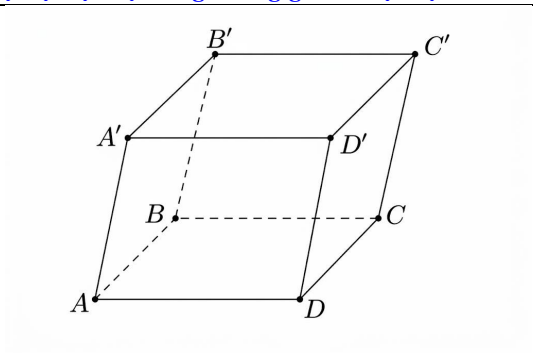
A. 44. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -1.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



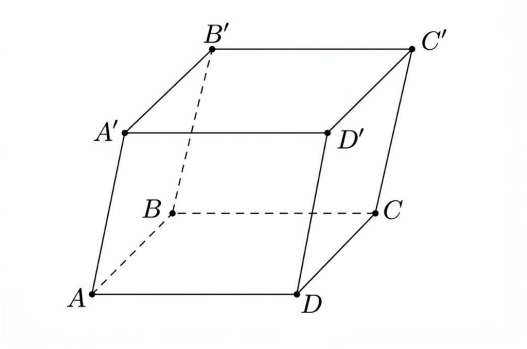
A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.



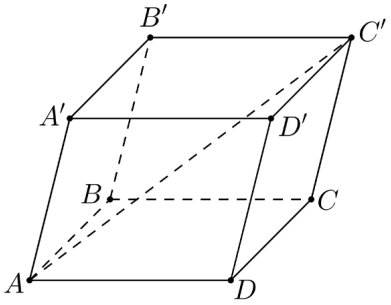
A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là



A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(0;1;3)$. Tìm toạn độ vectơ $\overrightarrow{AC'}$.

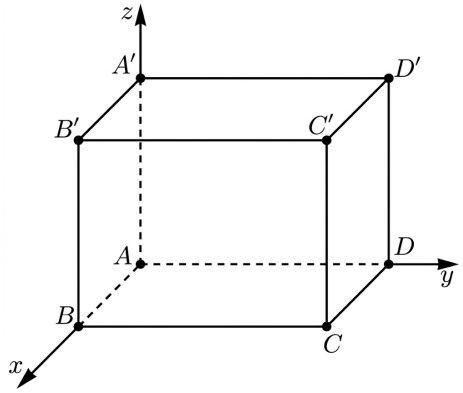


A. $\overrightarrow{AC'}=(2;4;3)$. **B.** $\overrightarrow{AC'}=(2;3;5)$. **C.** $\overrightarrow{AC'}=(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=(1;5;3)$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ O, điểm B nằm trên tia Ox, điểm D nằm trên tia Oy, điểm A' nằm trên tia Oz. Biết $AB=2, AD=4, AA'=3$. Gọi tọa độ của C' là $(a;b;c)$, khi đó biểu thức $a+b-c$ có giá trị là.

A. -4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

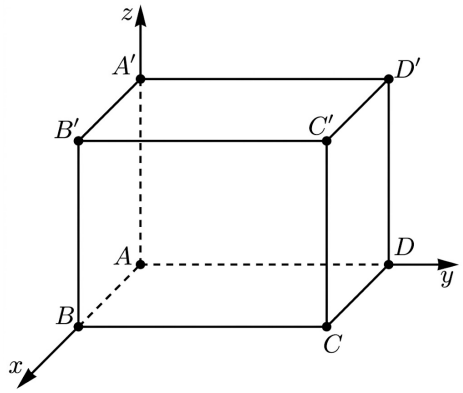
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ).



Tọa độ vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ có tọa độ là

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;1;0)$. **D.** $(1;1;1)$.

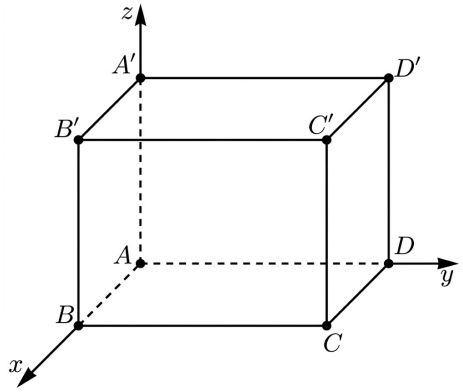
Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

A. $C'(2;2;0)$ **B.** $C'(2;2;2)$ **C.** $C'(2;0;2)$ **D.** $C'(2;0;0)$

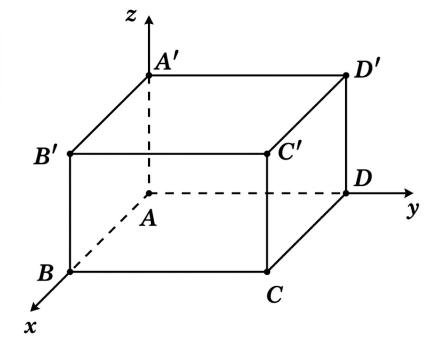
Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm B' là

A. $B(2;0;2)$ **B.** $B(2;2;2)$ **C.** $B(2;2;0)$ **D.** $B(0;2;0)$

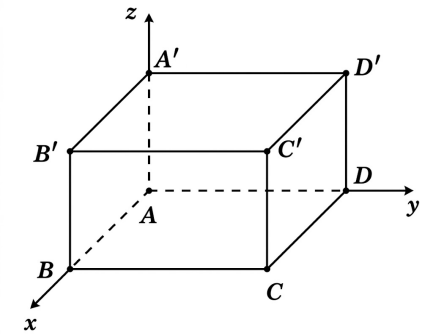
Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Tọa độ điểm E là

A. $E\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ **B.** $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ **C.** $E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $E\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$

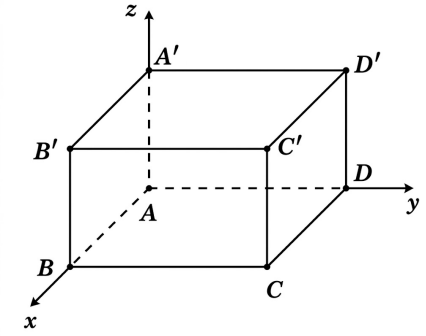
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

A. $E(1;2;3)$ **B.** $E(1;2;6)$ **C.** $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ **D.** $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

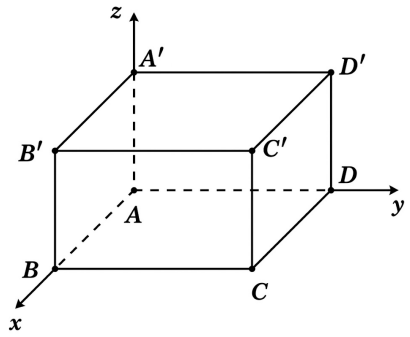
Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

A. $E\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $E\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ **D.** $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

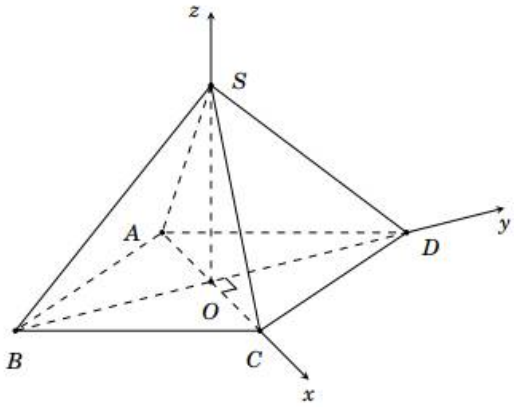
Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Tọa độ $\overrightarrow{B'D}$ là

A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;2;-3)$ **C.** $(1;2;-3)$ **D.** $(-1;2;3)$

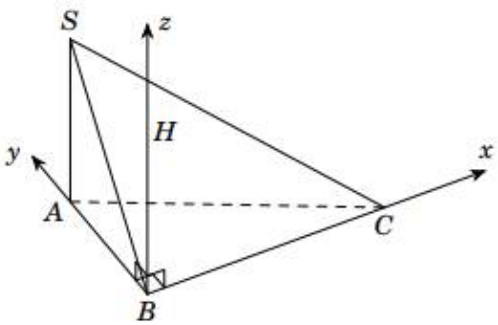
Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



A. $\overrightarrow{SC}=(2a;0;-2a)$ **B.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$

C. $\overrightarrow{SC}=(2a;-a;-2a)$ **D.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;2a)$

Câu 50. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**



A. $A(0;2;0)$ **B.** $S(-2;2;2)$ **C.** $C(3;0;0)$ **D.** $B(0;0;0)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-4\vec{k}$.

a) Tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là $(2;-3;0)$.

b) Tọa độ của điểm B là $(1;0;-4)$.

c) Tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ là $(3;-3;3)$.

d) Gọi điểm C là điểm thứ tư của hình bình hành $OABC$. Khi đó $\overrightarrow{OC}=(-1;3;5)$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M có toạ độ $(4;-4;2)$.

a) $\overrightarrow{OM}=(4;-4;2)$.

b) $\overrightarrow{OM}=4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

c) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox có toạ độ là $(0;-4;2)$.

d) Gọi H là điểm thuộc mặt phẳng Oxz. Đoạn MH ngắn nhất khi $\overrightarrow{MH}=(4;0;2)$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=(m-n;4m-6n;n^2-3m+2)$, với m,n là tham số.

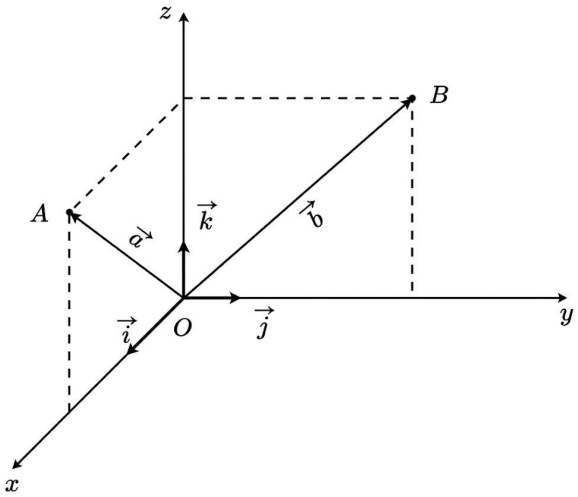
a) $\vec{a}=(1;3;-4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ và $\vec{b}=(2;0;-3)$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



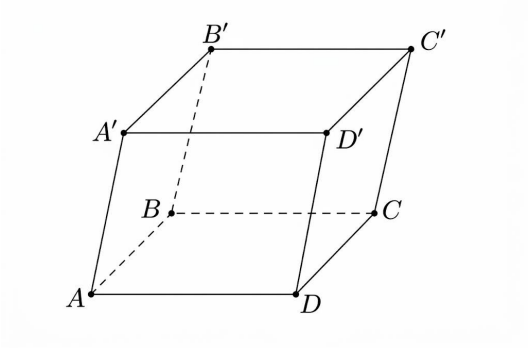
a) $\vec{a}=(1;-1;3)$.

b) $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$

c) $\overrightarrow{AB}=(1;1;-6)$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có toạ độ $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.



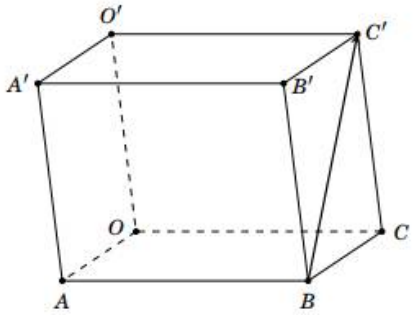
a) $\overrightarrow{AC}=(-2;2;0)$

b) $\overrightarrow{OA'}=(1;1;1)$

c) Tọa độ các điểm B', B, D lần lượt là $B'(0;4;2)$; $B(1;5;1)$; $D(1;-1;-1)$.

d) $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{BC}=(1;5;-4)$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0)$ và $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$.



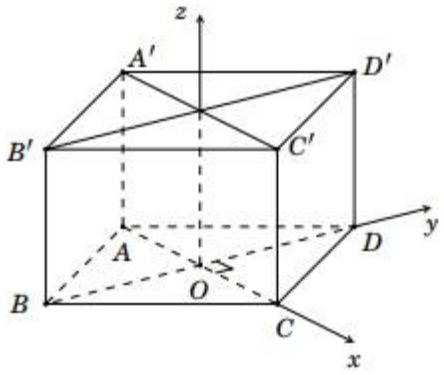
a) $C'(2;3;6)$.

b) $O'(3;-5;-5)$.

c) $\overrightarrow{AB'}=(2;-3;6)$.

d) Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$. Khi đó $\overrightarrow{HK}=(1;2;1)$.

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 6. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



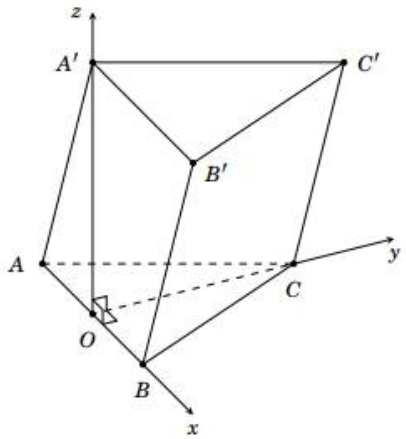
a) $A(-3;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC'}=\left(3\sqrt{2};0;6\right)$.

c) $\overrightarrow{AC'}=\left(-6\sqrt{2};0;-6\right)$.

d) $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\left(6\sqrt{2};0;6\right)$

Câu 58. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO}=60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC).



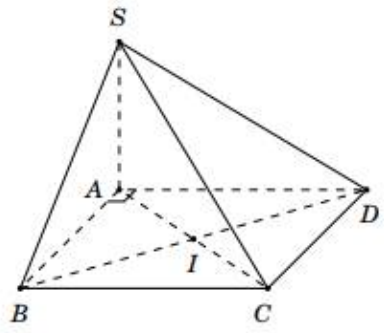
a) $A(-1;0;0)$.

b) $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) $A'\left(-1;0;\sqrt{3}\right)$.

d) $\overrightarrow{OC'}=\left(2;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I và $AB=1, AD=2$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.



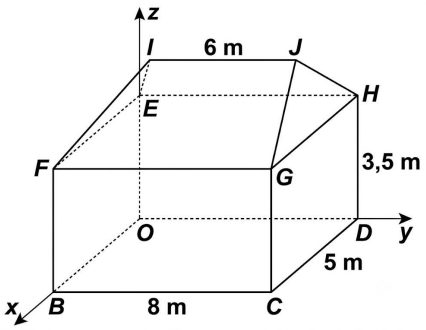
a) $D(2;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC}=(2;2;0)$.

c) $\overrightarrow{SC}=(2;2;-3)$.

d) $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Câu 60. Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$).



Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà $IJGF$, $IJHE$ là các hình thang cân và có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà số đo góc nhị diện $[J,FG,H]$ là $45°$.

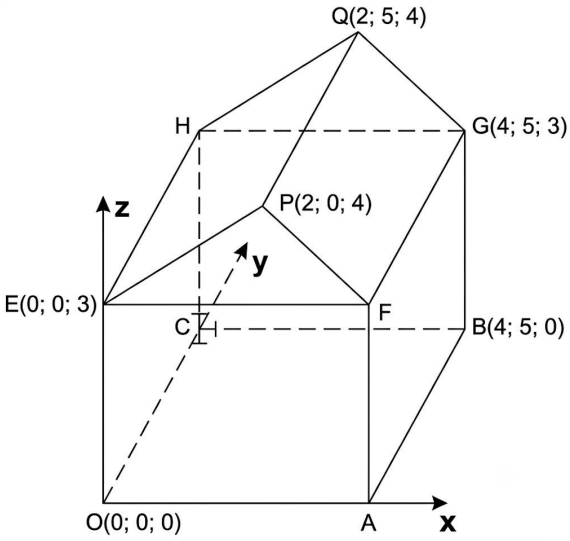
a) $B(5;0;0)$.

b) $\overrightarrow{BD}=(5;8;0)$

c) $G(5;8;0)$

d) Chiều cao ngôi nhà là $7m$.

Câu 61. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$), trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



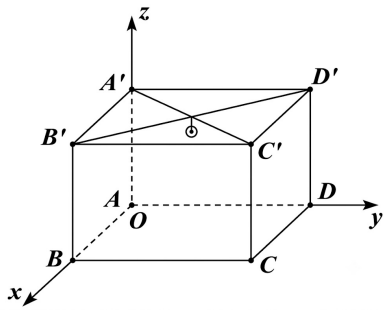
a) $\overrightarrow{GQ}=(-2;0;1)$.

b) $F(3;0;4)$.

c) $\overrightarrow{AH}=(4;-5;-3)$.

d) Chiều cao ngôi nhà là $4m$.

Câu 62. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB=6m$, $AD=7m$, $AA'=3,7m$. Một bóng đèn được treo ở vị trí chính giữa trần nhà của phòng học và cách trần nhà $0,2m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$) sao cho gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz như hình vẽ.



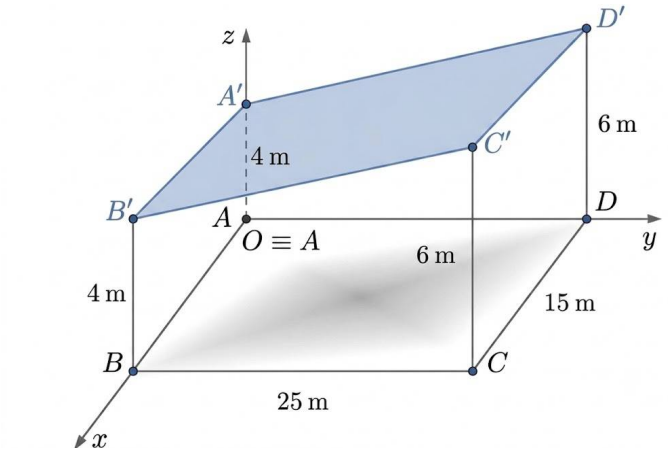
a) $D(0;7;0)$.

b) $C(7;6;0)$.

c) $\overrightarrow{C'D'}=(6;0;0)$

d) Biết bóng đèn nằm tại vị trí có tọa độ $(a;b;c)$. Khi đó $2a+b+c=13$.

Câu 63. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi dựng bốn chiếc cột AA',BB',CC',DD' lần lượt tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước là $CD=15m, AB=25m$. Bốn chiếc cột AA',BB',CC',DD' vuông góc với mặt sân và có chiều cao là $AA'=BB'=4m, CC'=DD'=6m$. Một tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét) sao cho $O\equiv A$ và các trục Ox,Oy,Oz trùng với AB, AD, AA' như hình vẽ bên dưới.



a) $A'(0;0;4)$.

b) $\overrightarrow{A'C'}=(15;25;2)$.

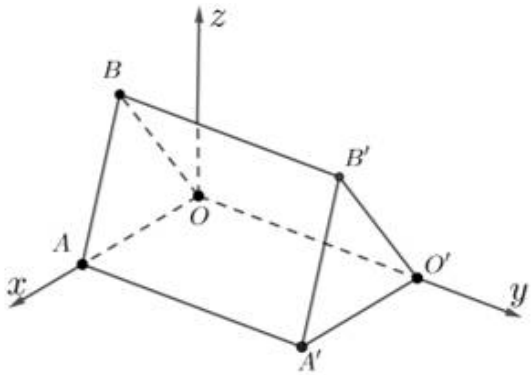
c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD'}=(15;25;0)$

d) Ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi muốn treo một bóng đèn công suất lớn nằm ở chính giữa tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Biết bóng đèn cách tại vị trí treo $0,4m$, Khi đó bóng đèn cách mặt sàn của sân là $4,6m$.

Câu 64. Những căn nhà gỗ trong hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình 2 với OAB là tam giác cân tại B. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.



Hình 1



Hình 2

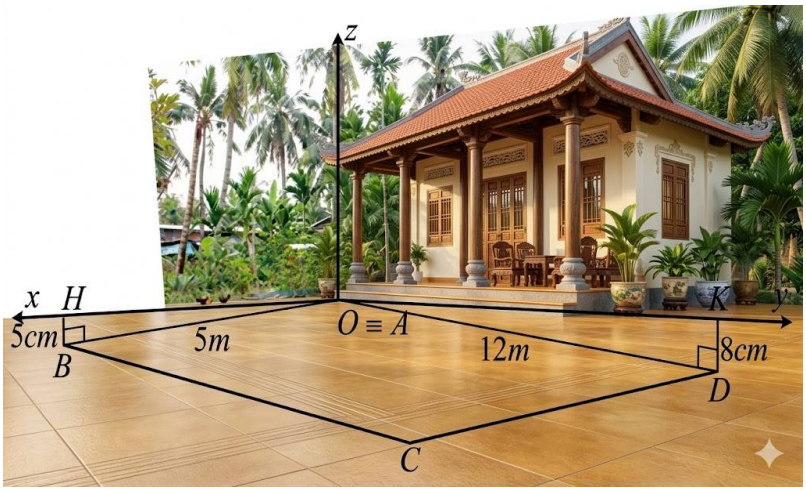
a) $\overrightarrow{A'B'}=(-120;0;300)$.

b) $A(120;0;0)$.

c) $\overrightarrow{AO'}=(-120;450;0)$.

d) $\overrightarrow{OB}=(120;0;300)$.

Câu 65. Bác Bảo Toàn muốn xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB=5m$ và $CD=12m$, dùng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi,... Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác Bảo Toàn xây vị trí B thấp hơn vị trí A là $5cm$, vị trí D thấp hơn vị trí A là $8cm$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là centimét) sao cho $O\equiv A$ và mặt phẳng Oxy trùng với mặt sân khi chưa hạ thấp điểm B và điểm D ($(Oxy)\equiv(OHK)$), các trục Ox,Oy trùng với OH,OK và Oz hướng lên trời như hình vẽ bên dưới.



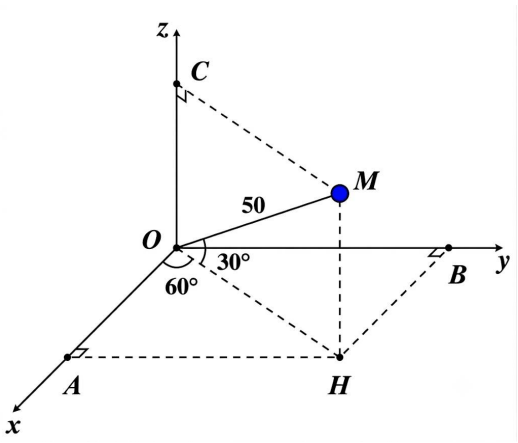
a) $B\left(\sqrt{249975};0;5\right)$

b) $\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{249975};0;-5\right)$

c) $\overrightarrow{BD}=\left(-\sqrt{249975};\sqrt{1439936};-13\right)$

d) Vị trí C thấp hơn vị trí A là $13cm$.

Câu 66. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM=50$, $\left(\vec{i};\overrightarrow{OH}\right)=60°$, $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=30°$.



a) $A\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

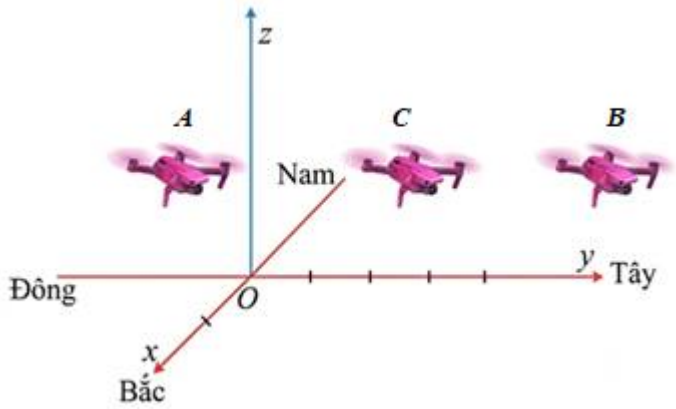
b) $\overrightarrow{BC}=\left(0;\frac{75}{2};25\right)$

c) $\overrightarrow{OM}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{75}{2}\vec{j}-25\vec{k}$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};\frac{75}{2};-25\right)$

Câu 67. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một điểm O. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất bay đến điểm A cách điểm xuất phát O về phía Đông $100m$ và về phía Nam $80m$, đồng thời cách mặt đất $40m$. Chiếc máy bay thứ hai, bay đến điểm B cách điểm xuất phát O về phía Bắc $60m$ và về phía Tây $40m$, đồng thời cách mặt đất $20m$. Chiếc máy bay thứ ba, bay đến điểm C là điểm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát O của ba chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét (xem hình vẽ).



a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $A(-100;-80;40)$.

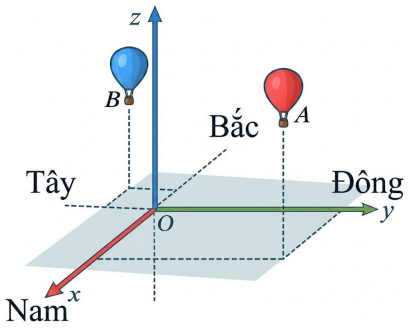
b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $B(40;60;20)$.

c) Chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $C(-10;30;30)$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc máy bay thứ ba trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a-b+2027c=20$.

Câu 68. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát $2\,km$ về phía Nam và $1\,km$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\,km$. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát $1\,km$ về phía Bắc và $1,5\,km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\,km$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



a) $A\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$.

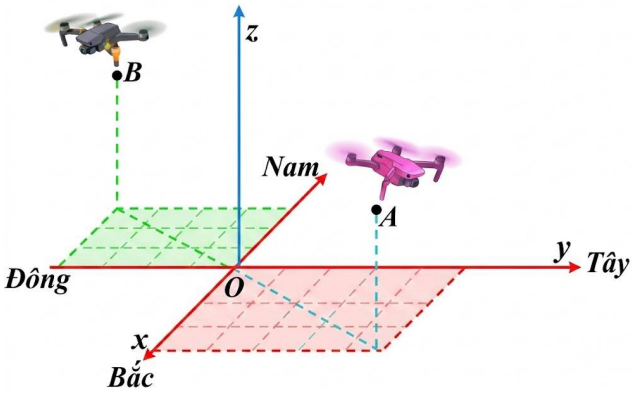
b) $\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\frac{3}{2};-\frac{4}{5}\right)$.

c) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}+\frac{3}{10}\vec{k}$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc khinh khí cầu B trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=2,5$.

Câu 69. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(10;20;0,7)$.

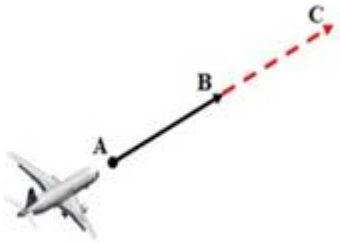
b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

c) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0;20;0)$.

d) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất là $(-30;-25;0)$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(920;740;5,2)$ đến điểm $B(980;800;6,8)$ trong 12 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 12 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$.





a) $\overrightarrow{OA}=(920;740;5,2)$.

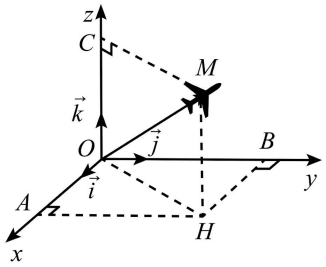
b) $\overrightarrow{AB}=(60;60;-1,6)$.

c) $\overrightarrow{BC}=60\vec{i}+60\vec{j}-1,6\vec{k}$.

d) $x+y+10z=1980$.

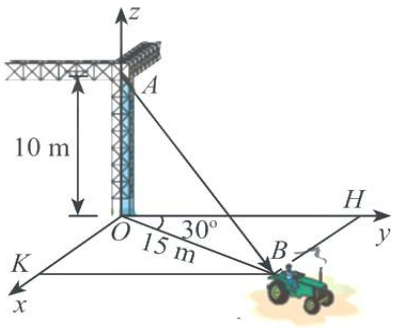
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 71. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM=80;(\vec{i},\overrightarrow{OH})=60°;(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM})=45°$. Gọi toạ độ điểm $M(a;b;c)$, khi đó giá trị của $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{2}$ bằng bao nhiêu?



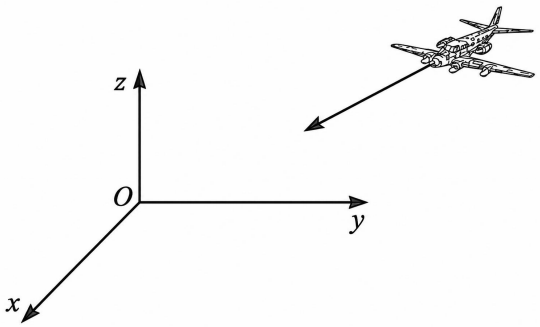
Trả lời: ……..

Câu 72. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Biết $\overrightarrow{AB}=(x;y;z)$. Tính $x+\sqrt{3}y-z$.



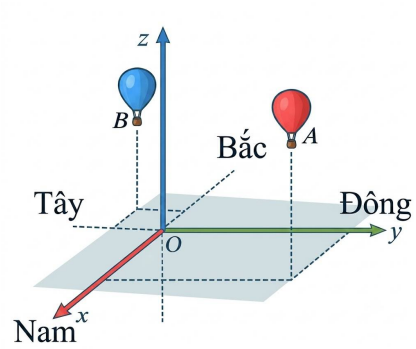
Trả lời: ……..

Câu 73. Trong không gian với một hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo kilômét) có mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) , một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm $(-50;30;10)$ đến vị trí hạ cánh là $(2;3;0)$. Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: ……..

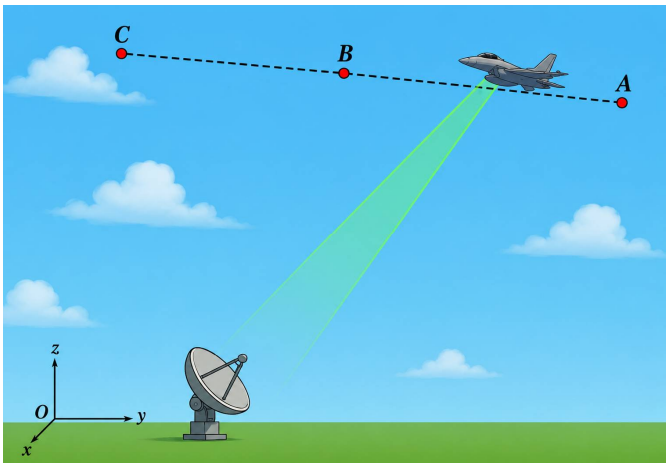
Câu 74. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, khinh khí cầu thứ nhất bay đến điểm A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất một khoảng nhất định; khinh khí thứ hai bay đến điểm B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất một khoảng nhất định (hình minh họa bên dưới).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là kilômét). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm A và B trên mặt đất. Gọi toạ độ vectơ $\overrightarrow{HK}=(a;b;c)$, khi đó giá trị của $2a-4b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

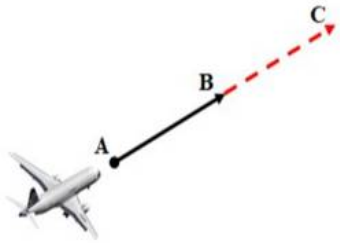
Câu 75. Trong không gian với một hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 24 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau $0,4$ giờ tiếp theo là điểm C như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{OC}=(x;y;z)$, khi đó giá trị của $x-y+2z$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

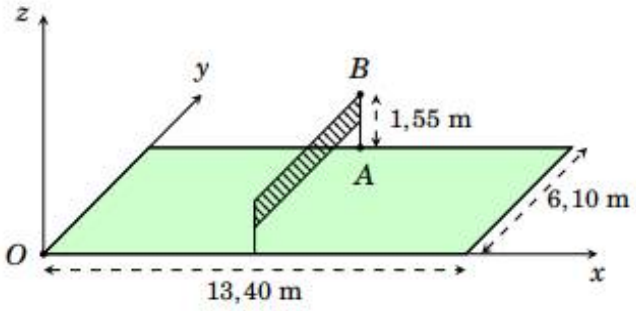
Câu 76. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy

bay sau 25 phút tiếp theo tiếp theo là điểm $C(x;y;z)$ như hình vẽ. Khi đó giá trị của $x-y+4z$ bằng bao nhiêu?



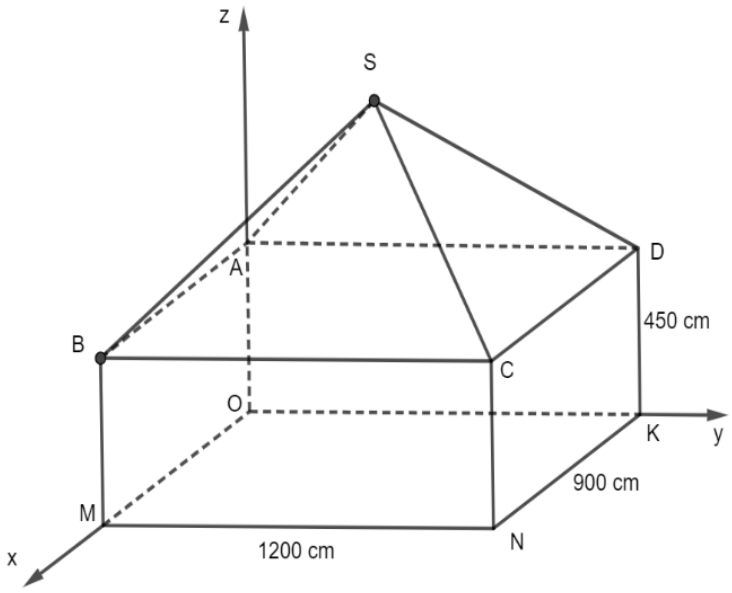
Trả lời: ……..

Câu 77. Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là (a,b,c). Tính giá trị biểu thức $T=a+b+100c$.



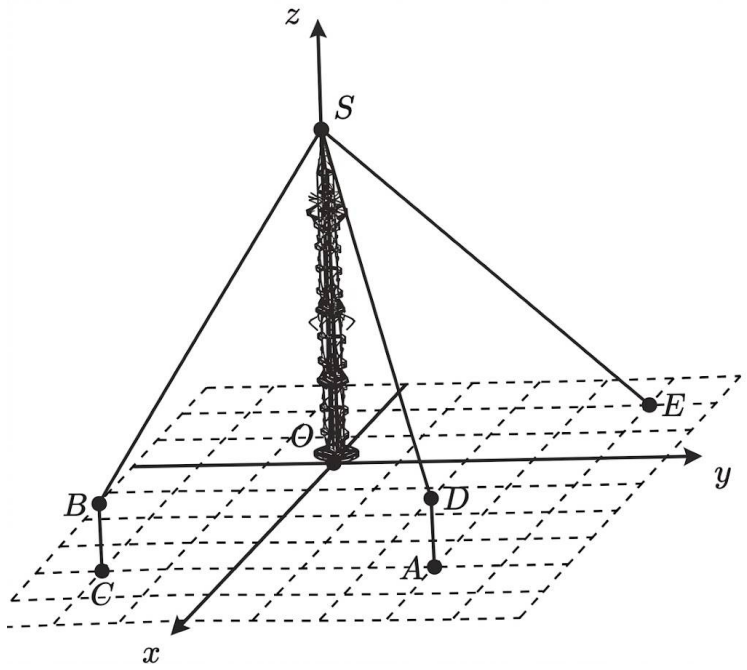
Trả lời: ……..

Câu 78. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài $1200cm$, chiều rộng $900cm$, chiều cao $450cm$. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và tạo với mặt đáy $ABCD$ một góc α với $\tan\alpha=\frac{1}{5}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo mét) sao cho M thuộc tia Ox, K thuộc tia Oy, A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a;b;c)$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



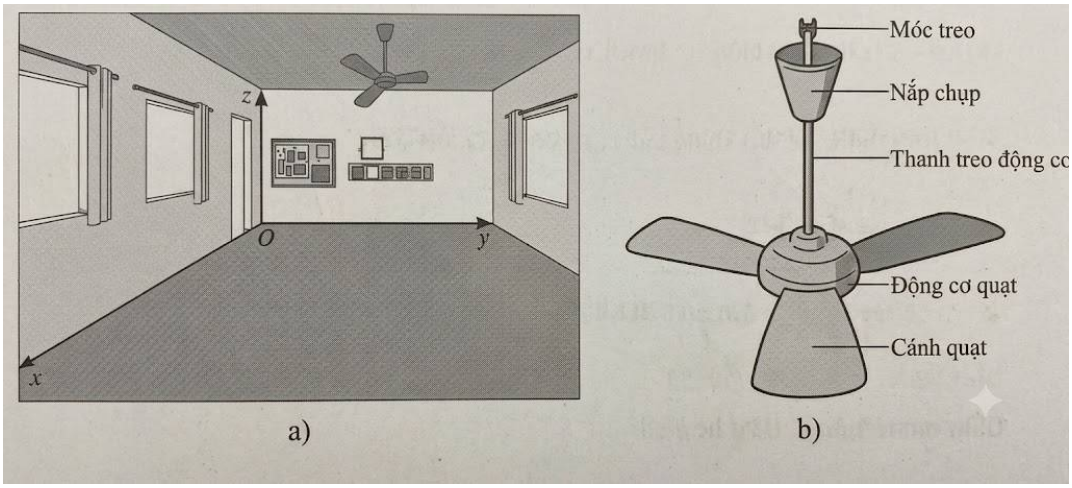
Trả lời: ……..

Câu 79. Một trụ anten viễn thông được lắp đặt trên nóc của một toà nhà cao tầng, để trụ anten được vững chắc và chống chọi được gió bão, các kỹ sư lắp đặt đã chằng trụ anten này bằng ba sợi dây thép đặc biệt không bị trùng đồng thời được căng thẳng bằng các thiết bị chuyên dụng. Do đặc điểm của mặt sàn, để đảm bảo yếu tố kỹ thuật, các kỹ sư đã xây thêm hai trụ BC, AD, mỗi trụ cao $1,5$ mét (tính từ mặt sàn và hai trụ BC, AD vuông góc với sàn), hai dây được móc vào hai đầu trụ, dây thứ ba được móc liền với mặt sàn tại vị trí điểm E, điểm móc dây trên thân anten (điểm S) cách mặt sàn $6,5$ mét. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục là 1 mét) với gốc toạ độ trùng với chân trụ anten, mặt sàn trùng với mặt phẳng (Oxy)(xem hình minh hoạ), biết $A(4;3;0)$, $C(4;-2;0)$, $E(-2;4;0)$. Biết rằng $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=(a;b;c)$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Câu 80. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $12m$,chiều rộng $6m$ và chiều cao $3,2m$. Một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học như hình sau:



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn như hình a (đơn vị đo lấy theo mét). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài $0,4m$. Giả sử tọa độ của động cơ chiếc quạt trần là $I(a;b;c)$, khi đó giá trị của $a+b+10c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 81. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6m và chiều cao là 4 m. Một bóng đèn công suất lớn được treo trên trần nhà sao cho là điểm chính giữa của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy theo mét) có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn. Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ của điểm treo quạt. Tính giá trị $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm B trùng với gốc tọa độ O và tọa độ các điểm $A(3;0;0)$, $D(3;1;0)$, $B'(0;0;5)$. Gọi tọa độ $C'(m;n;p)$, khi đó $m^2+n^2+p^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2)$, $B(x;y;z)$, $C(0;-2;1)$, $D(1;0;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Trả lời: ……..

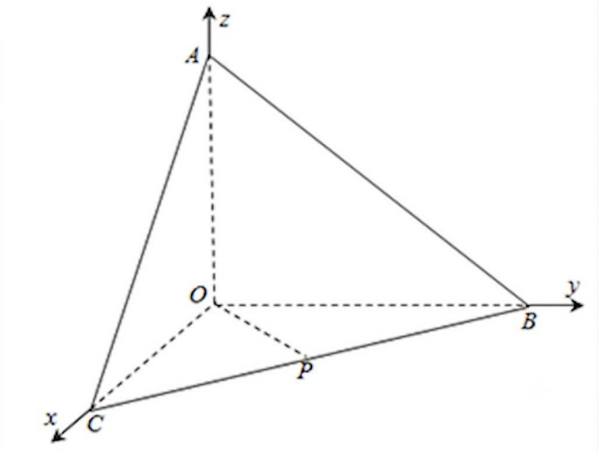
Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz). Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;4)$. Gọi H là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) và K là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Biết $\overrightarrow{HK}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

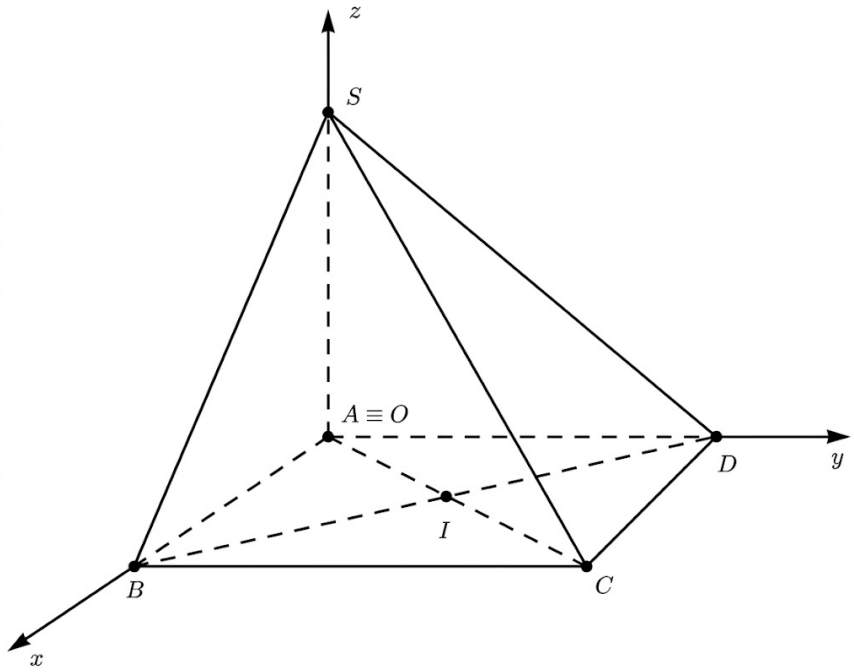
Trả lời: ……..

Câu 87. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau $OA=3$ và $OB=OC=2$. Gọi P là trung điểm của BC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có các điểm A,B,C lần lượt thuộc các tia Oz,Oy,Ox như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{AP}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+c$ bằng bao nhiêu?



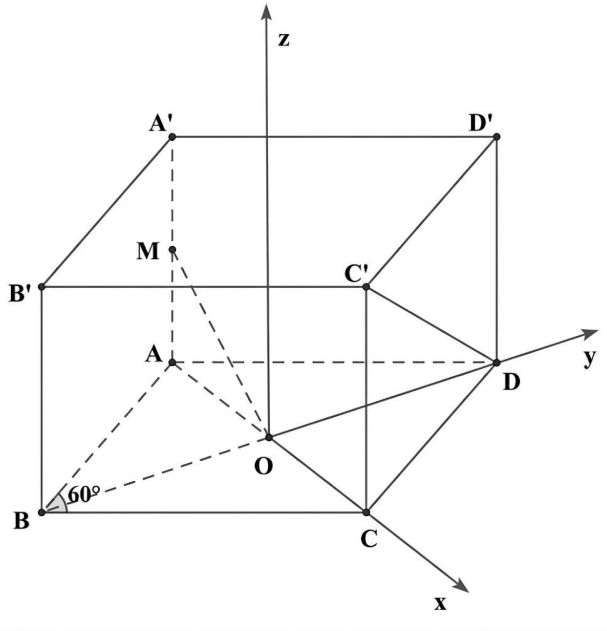
Trả lời: ……..

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I và độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) như hình vẽ dưới. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì $\overrightarrow{SI}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2a+3b-4c$ bằng bao nhiêu?



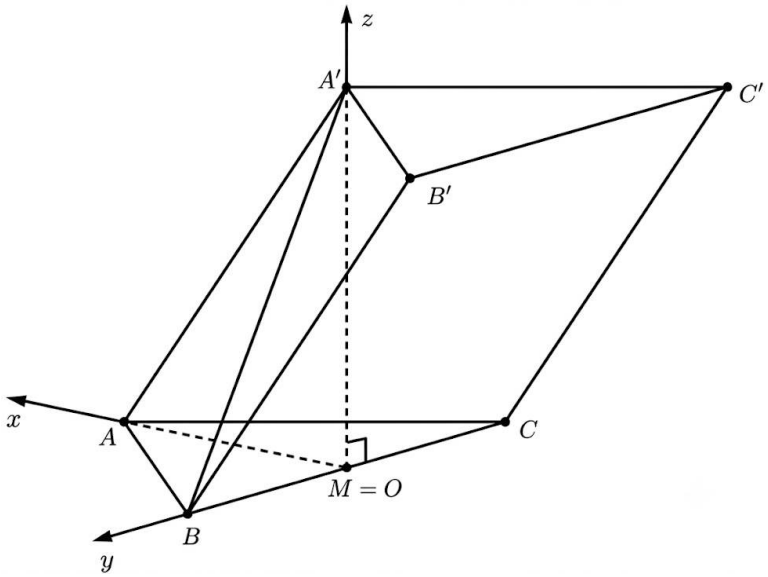
Trả lời: ……..

Câu 89. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O có cạnh bằng 1 và $AA'=1$, $\widehat{ABC}=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có C,D lần lượt thuộc các tia Ox,Oy và trục Oz song song AA' như hình vẽ . Biết $\overrightarrow{MC'}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+2c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

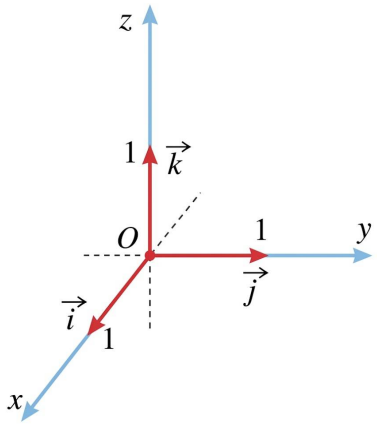
Câu 90. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Góc giữa $A'B$ và (ABC) bằng $60°$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có $M \equiv O$ và các điểm A, B, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz như hình vẽ như hình vẽ . Biết $\overrightarrow{AB'} = (a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a\sqrt{3} + 2030b + \sqrt{3}c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

BÀI 7
HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục tọa độ trong không gian



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các **vectơ đơn vị** trên các trục Ox, Oy, Oz.

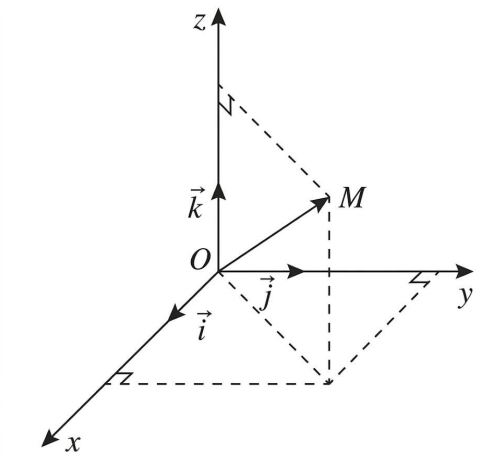
- Hệ trục như vậy được gọi là **hệ trục tọa độ Descartes vuông góc** $Oxyz$**,** hay đơn giản là **hệ tọa độ** $Oxyz$.
- Điểm $O(0;0;0)$ được gọi là **gốc tọa độ**.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc nhau được gọi là các **mặt phẳng tọa độ.**

Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. Tọa độ của điểm, tọa độ của một vectơ trong không gian

a. Khái niệm tọa độ của điểm trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x;\ y;\ z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là **tọa độ** của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M=(x;\ y;\ z)$ hoặc $M(x;\ y;\ z)$, trong đó x là **hoành độ**, y là **tung độ**, z là **cao độ** của điểm M.

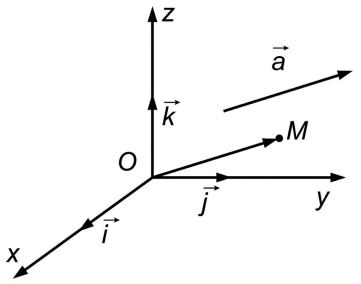


Nhận xét : Nếu điểm có tọa độ $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;0;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;0\right)$, $M_3\left(0;0;z_M\right)$
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$, $\left(Oyz\right)$, $\left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;0\right)$, $M_2\left(0;y_M;z_M\right)$, $M_3\left(x_M;0;z_M\right)$

b. Khái niệm tọa độ của một vectơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x;\ y;\ z)$ duy nhất sao cho $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là **tọa độ của vectơ** $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ hoặc $\vec{a}(x;\ y;\ z)$.



Nhận xét :

- Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là tọa độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Cho $\vec{a}=(x;\ y;\ z),\ \vec{b}=(x';\ y';\ z')$, khi đó $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$

c. Tọa độ của một vectơ theo toạ độ hai đầu mút

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ và $N\left(x_N;\ y_N;\ z_N\right)$. Khi đó, ta viết:

$$\overrightarrow{MN}=\left(x_N-x_M;\ y_N-y_M;z_N-z_M\right)$$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

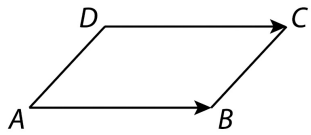
DẠNG 1
TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ VECTƠ

- Vectơ đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vectơ đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Vectơ đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k}=(0;0;1)$.

- Nếu $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ thì $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$. Ngược lại, nếu $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ thì $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
- $M=(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=(x;\ y;\ z)$
- Cho $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, $\vec{b}=(x';\ y';\ z')$, khi đó $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$
- $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ và $N\left(x_N;\ y_N;\ z_N\right)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN}=\left(x_N-x_M;\ y_N-y_M;z_N-z_M\right)$.
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



- Nếu điểm có tọa độ $M\left(x_M;\ y_M;\ z_M\right)$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì:

+ Hình chiếu vuông góc của M trên các trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;0;0\right),\ M_2\left(0;y_M;0\right),\ M_3\left(0;0;z_M\right)$

+ Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right),\ \left(Oyz\right),\ \left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;0\right),\ M_2\left(0;y_M;z_M\right),\ M_3\left(x_M;0;z_M\right)$

+ Điểm đối xứng của M qua các trục Ox,Oy,Oz có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;-y_M;-z_M\right),\ M_2\left(-x_M;y_M;-z_M\right),\ M_3\left(-x_M;-y_M;z_M\right)$

+ Điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right),\ \left(Oyz\right),\ \left(Ozx\right)$ có tọa độ lần lượt là $M_1\left(x_M;y_M;-z_M\right),\ M_2\left(x_M;-y_M;z_M\right),\ M_3\left(-x_M;y_M;z_M\right)$

+ Điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ O có tọa độ là $M'\left(-x_M;-y_M;-z_M\right)$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. b) $\vec{u}=2026\vec{i}-2027\vec{j}$. c) $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{k}$. d) $\vec{u}=-\dfrac{1}{2026}\vec{k}$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$. Do đó:

a) $\vec{u}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(4;2;-1)$.

b) $\vec{u}=2026\vec{i}-2027\vec{j}\Leftrightarrow\vec{u}=(2026;2027;0)$.

c) $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(-1;0;3)$.

d) $\vec{u}=-\dfrac{1}{2026}\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=\left(0;0;-\dfrac{1}{2026}\right)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u}=(2;-1;3)$. b) $\vec{u}=(-3;0;1)$. c) $\vec{u}=\left(0;\dfrac{1}{2026};-\dfrac{1}{2027}\right)$ d) $\vec{u}=(0;0;2026)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$. Do đó:

a) $\vec{u}=(2;-1;3)\Leftrightarrow\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

b) $\vec{u}=(-3;0;1)\Leftrightarrow\vec{u}=-3\vec{i}+\vec{k}$.

c) $\vec{u}=\left(0;\dfrac{1}{2026};-\dfrac{1}{2027}\right)\Leftrightarrow\vec{u}=\dfrac{1}{2026}\vec{j}-\dfrac{1}{2027}\vec{k}$.

d) $\vec{u}=(0;0;2026)\Leftrightarrow\vec{u}=-2026\vec{k}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;-4)$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox, Oy và Oz.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oyz).

Lời giải

a) Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên các trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $(-2;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;-4)$

b) Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oyz) lần lượt là $(-2;1;0)$, $(0;1;-4)$, $(-2;0;-4)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;3)$.

a) Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là tọa độ điểm đối xứng với A qua trục Ox,Oy,Oz. Tìm tọa độ điểm A_1,A_2,A_3.

b) Gọi A_4,A_5,A_6 lần lượt là tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Oxz)$. Tìm tọa độ

điểm A_4, A_5, A_6.

c) Tìm tọa độ điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ O.

Lời giải

a) Gọi $A_1(x;y;z)$ là tọa độ điểm đối xứng với A qua trục Ox.

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(-2;-4;3)$ trên trục Ox là $B(-2;0;0)$.

$\overrightarrow{BA_1} = (x+2;y;z)$

$\overrightarrow{AB} = (0;4;-3)$

A_1 đối xứng với A qua trục Ox nên B là trung điểm đoạn thẳng A_1A

Do đó: $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y=4 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \\ z=-3 \end{cases}$

Vậy $A_1(-2;4;-3)$.

Làm tương tự như trên ta tìm được $A_2(2;-4;-3), A_3(2;4;-3)$

b) Gọi $A_4(x;y;z)$ là tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy)

Tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(-2;-4;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là $C(-2;-4;0)$.

$\overrightarrow{CA_4} = (x+2;y+4;z)$

$\overrightarrow{AC} = (0;0;-3)$

A_4 đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) nên C là trung điểm đoạn thẳng A_4A

Do đó: $\overrightarrow{CA_4} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y+4=0 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \\ z=-3 \end{cases}$

Vậy $A_4(-2;-4;-3)$.

Làm tương tự như trên ta tìm được $A_5(-2;4;-3), A_6(2;-4;-3)$

c) Gọi $A'(x;y;z)$ là tọa độ điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O.

$\overrightarrow{OA'} = (x;y;z)$

$\overrightarrow{AO} = (2;4;-3)$

A' đối xứng với A qua gốc tọa độ O nên O là trung điểm đoạn thẳng $A'A$

Do đó: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-3 \end{cases}$

Vậy $A'(2;4;-3)$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

d) Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$, tìm tọa độ điểm I.

Lời giải

a) Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1-2;2-0;3-2) = (-1;2;1)$

$\overrightarrow{BC} = (2-1;1-2;2-3) = (1;-1;-1)$

$\overrightarrow{CA} = (2-2;0-1;2-2) = (0;-1;0)$

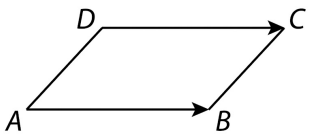
b) Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (-1;2;1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{BC} = (1;-1;-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$\overrightarrow{CA} = (0;-1;0) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\vec{j}$

c) A, B, C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là toạ độ điểm D.

Ta có: $\overrightarrow{DC} = (2-x_D;1-y_D;2-z_D)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1;2;1)$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x_D = -1 \\ 1-y_D = 2 \\ 2-z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -1 \\ z_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(3;-1;1)$$

Vậy $D(3;-1;1)$.

d) Gọi $(x_I; y_I; z_I)$ là toạ độ điểm I.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x_I - 2; y_I; z_I - 2)$ và $\overrightarrow{IC} = (2-x_I;1-y_I;2-z_I)$

I là tâm của hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - 2 = 2 - x_I \\ y_I = 1 - y_I \\ z_I - 2 = 2 - z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = \dfrac{1}{2} \\ z_I = 2 \end{cases} \Rightarrow I\left(2;\dfrac{1}{2};2\right)$

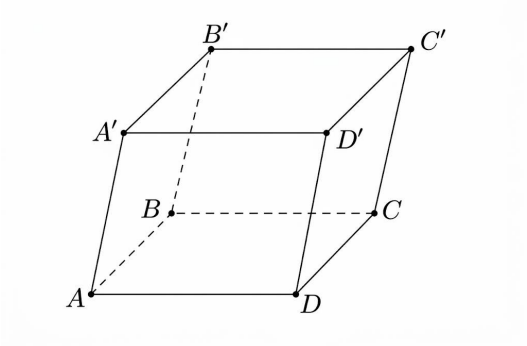
Vậy $I\left(2;\dfrac{1}{2};2\right)$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp.

b) Gọi I là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, tìm tọa độ điểm I.

Lời giải



a) Gọi $(x_C;y_C;z_C)$ là toạ độ điểm C.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{DC}=(x_C-1;y_C+1;z_C-1)$

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-1=1\\y_C+1=1\\z_C-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=2\\y_C=0\\z_C=2\end{cases}\Rightarrow C(2;0;2)$

Tương tự như trên ta tính được tọa độ các điểm A',B',D'

$ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}\Leftrightarrow\begin{cases}1=4-x_{A'}\\0=5-y_{A'}\\1=-5-z_{A'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=3\\y_{A'}=5\\z_{A'}=-6\end{cases}\Rightarrow A'(3;5;-6)$

$BCC'B'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}\Leftrightarrow\begin{cases}0=4-x_{B'}\\-1=5-y_{B'}\\0=-5-z_{B'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{B'}=4\\y_{B'}=6\\z_{B'}=-5\end{cases}\Rightarrow B'(4;6;-5)$

$DCC'D'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}\Leftrightarrow\begin{cases}1=2-x_{D'}\\1=-y_{D'}\\1=2-z_{D'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{D'}=1\\y_{D'}=-1\\z_{D'}=1\end{cases}\Rightarrow D'(1;-1;1)$

b) Gọi $(x_I;y_I;z_I)$ là toạ độ điểm I.

Ta có: $\overrightarrow{AI}=(x_I-1;y_I;z_I-1)$; $\overrightarrow{IC'}=(4-x_I;5-y_I;-5-z_I)$

Vì I là tâm của hình hộp nên I là trung điểm AC', do đó:

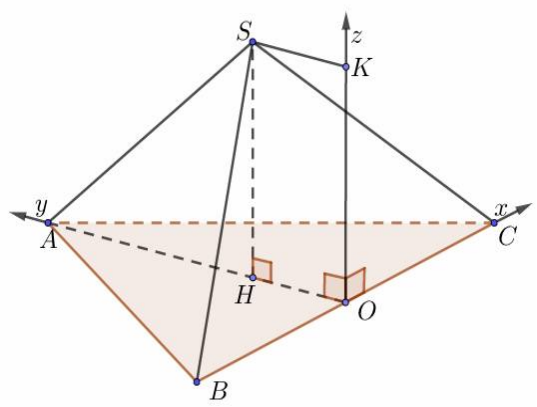
$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I-1=4-x_I\\y_I=5-y_I\\z_I-1=-5-z_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{5}{2}\\y_I=\dfrac{5}{2}\\z_I=-2\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};-2\right)$$

DẠNG 2
ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

I. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

1. Hình chóp đều

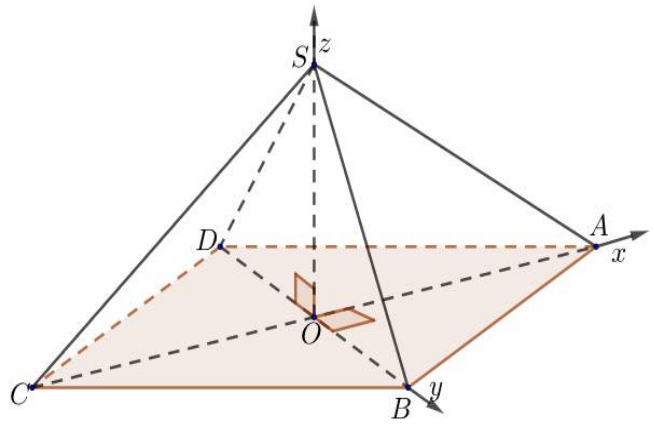
a. Hình chóp tam giác đều và tứ diện đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = a$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ , khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right), S(0;OH;OK).$$

b. Hình chóp tứ giác đều

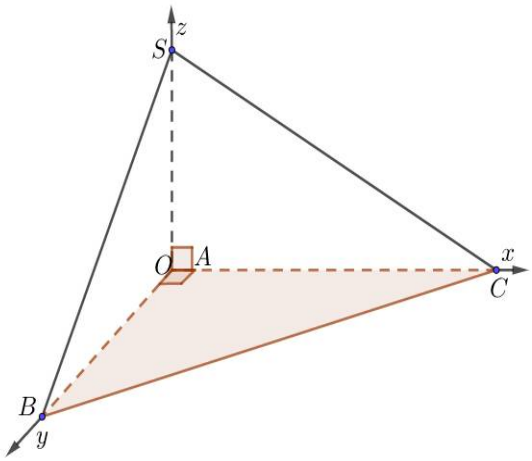


Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO).$$

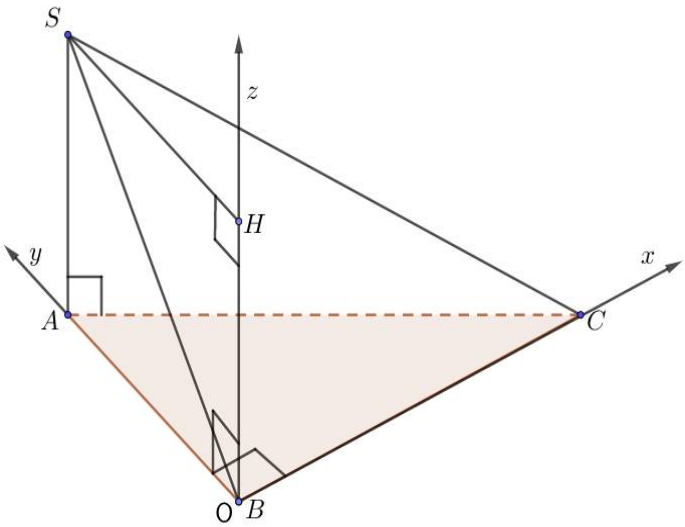
2. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

a. Đáy là tam giác vuông tại A



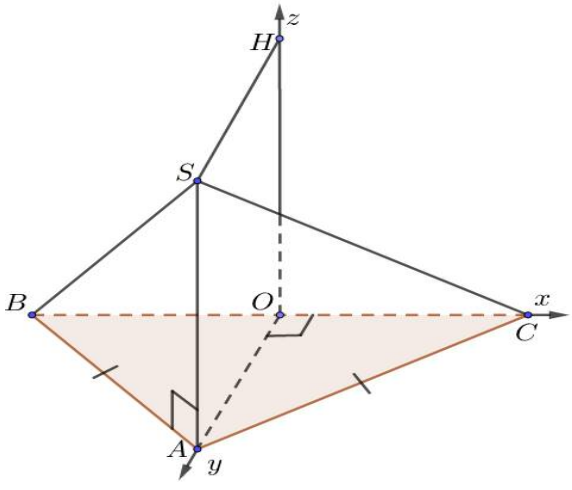
Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0), B(0;OB;0), C(AC;0;0), S(0;0;SA)$.

b. Đáy là tam giác vuông tại B



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $B \equiv O(0;0;0), A(0;AB;0), C(BC;0;0), S(0;AB;SA)$.

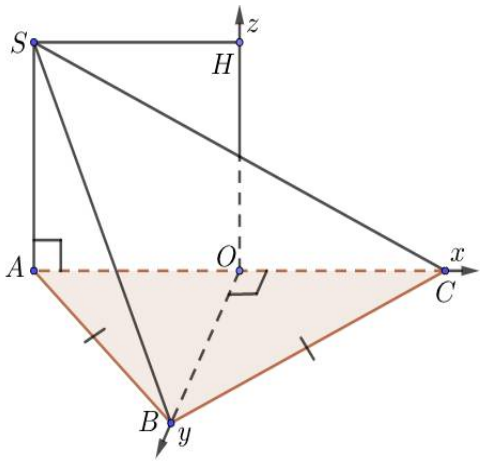
c. Đáy là tam giác cân tại A



Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(-OB;0;0), C(OC;0;0),\ S(0;OA;OH).$$

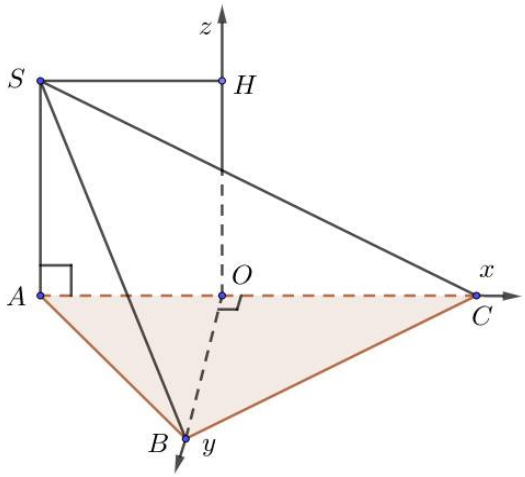
d. Đáy là tam giác cân tại B



Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

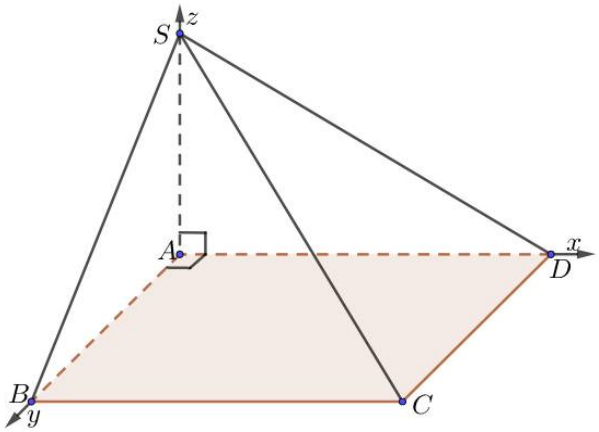
e. Đáy là tam giác thường



Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

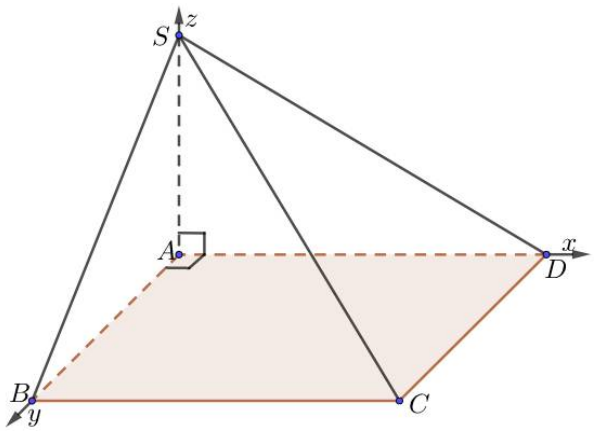
f. Đáy là hình vuông



Chọn hệ trục như hình vẽ, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;a;0), C(1;a;0), D(a;0;0), S(0;0;SA),$$

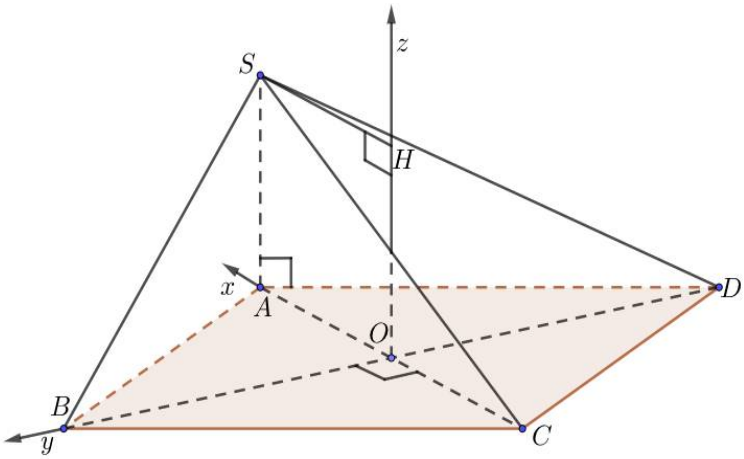
g. Đáy là hình chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0),\ D(AD;0;0),\ S(0;0;SA),$$

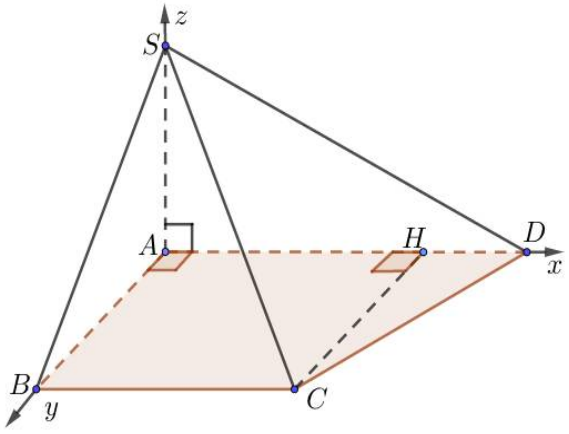
h. Đáy là hình thoi



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(0;OB;0), C(-OC;0;0), D(0;-OD;0),\ S(OA;0;OH)$$

m. Đáy là hình thang vuông

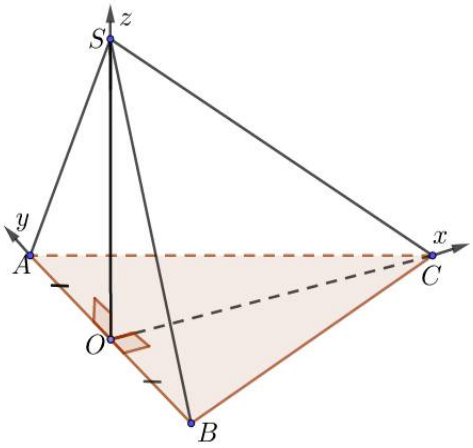


Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AH;AB;0), D(AD;0;0),\ S(0;0;SA).$$

3. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

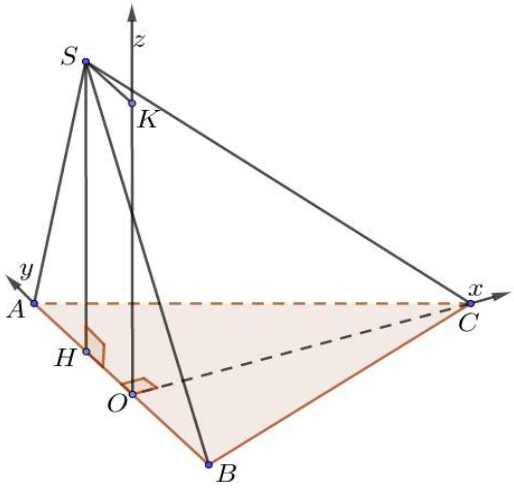
a. Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;0;SO)$$

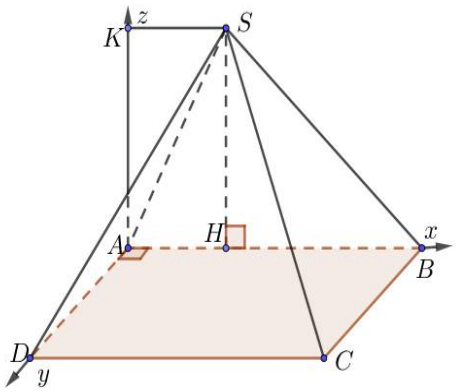
b. Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;OH;OK)$$

c. Đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật



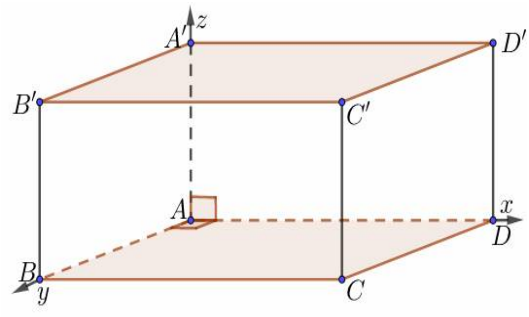
Vẽ đường cao SH trong SAB, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S(AH;0;AK)$$

II. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

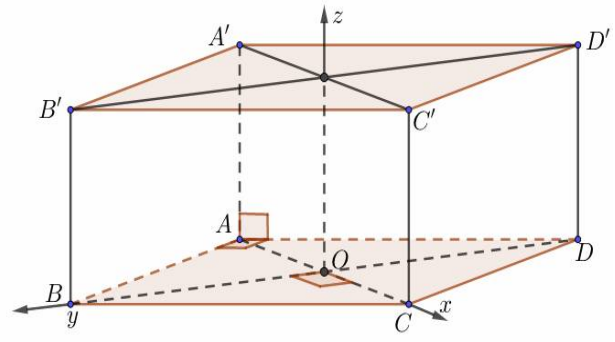
1. Lăng trụ đứng

a. Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

b. Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

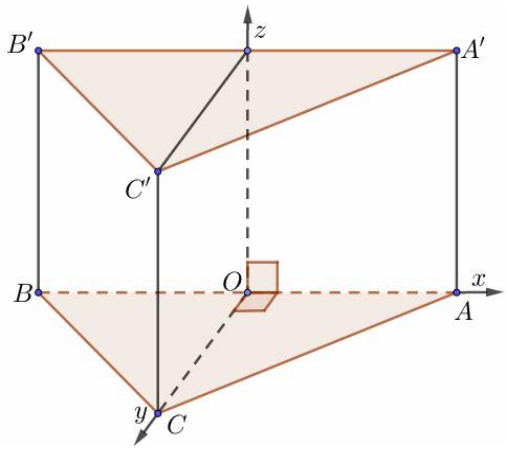


Gọi O là tâm hình thoi đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$,

$A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

c. Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân

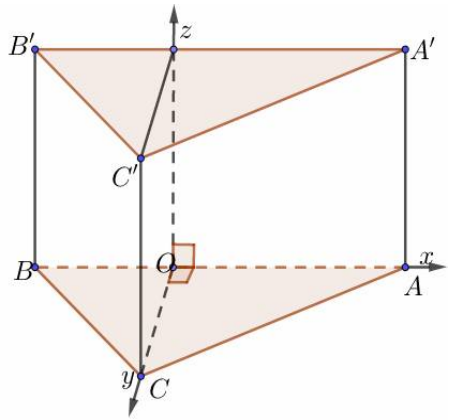


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A\left(\frac{AB}{2};0;0\right),\ B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right),\ C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'),\ B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right),\ C'(0;OC;CC').$$

c. Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

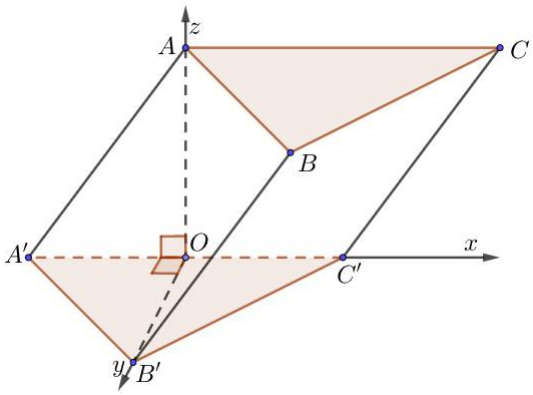


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

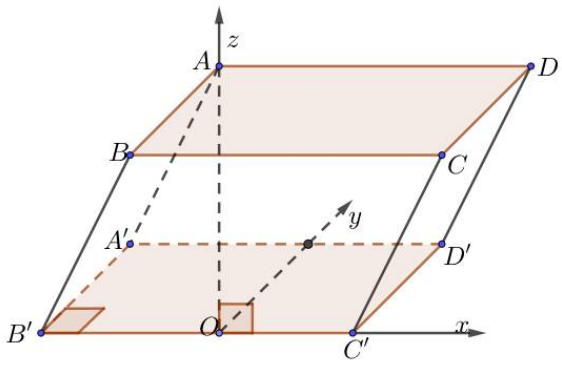
2. Lăng trụ xiên

a. Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

b. Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$.

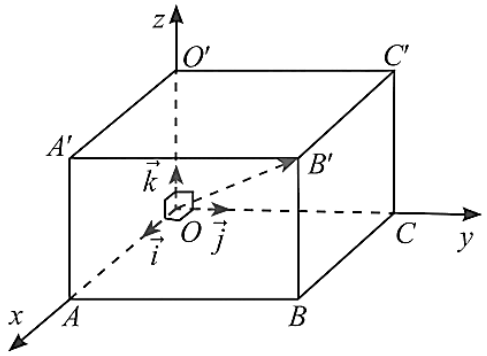
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có các vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $OA=10, OC=12, OO'=8$.

a) Xác định tọa độ các điểm A, C, O'.

b) Xác định tọa độ các điểm A', B'.

c) Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AB'}$.

Lời giải



a) Ta có:

$OA=10$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên $\overrightarrow{OA}=10\vec{i}$. Suy ra $A(10;0;0)$.

$OC=12$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng với $\vec{j}$ nên $\overrightarrow{OC}=12\vec{j}$. Suy ra $C(0;12;0)$.

$OO'=8$ và $\overrightarrow{OO'}$ cùng hướng với $\vec{k}$ nên $\overrightarrow{OO'}=8\vec{k}$. Suy ra $O'(0;0;8)$.

b) Theo quy tắc hình bình hành $OAA'O'$, ta có: $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OO'}=10\vec{i}+8\vec{k}$. Suy ra $A'(10;0;8)$.

Theo quy tắc hình hộp $OABC.O'A'B'C'$, ta có: $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}=10\vec{i}+12\vec{j}+8\vec{k}$. Suy ra $B'(10;12;8)$

c) Ta có:

$\overrightarrow{AA'}=(10-10;0-0;8-0)=(0;0;8)$

$\overrightarrow{AB'}=(10-10;12-0;8-0)=(0;12;8)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=7, AD=5, AA'=3$.

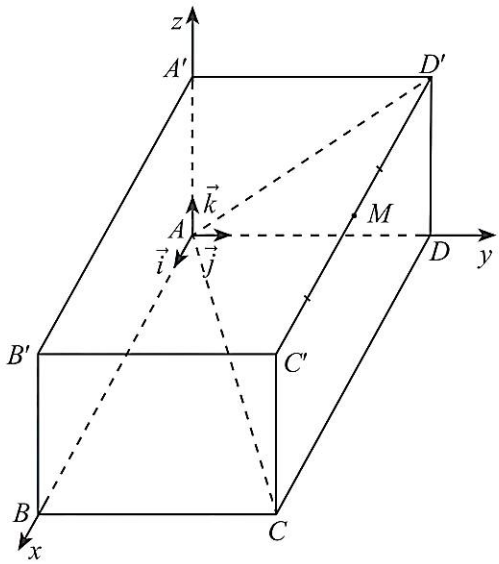
a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}$.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh $C'D'$. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AM}$.

d) Gọi G là trọng tâm của ΔABD. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AG}$.

Lời giải



a) Ta có:

$AB=7$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên $\overrightarrow{AB}=7\vec{i}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(7;0;0)$.

$AD=5$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\vec{j}$ nên $\overrightarrow{AD}=5\vec{j}$. Suy ra $\overrightarrow{AD}=(0;5;0)$.

$AA'=3$ và $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\vec{k}$ nên $\overrightarrow{AA'}=3\vec{k}$. Suy ra $\overrightarrow{AA'}=(0;0;3)$.

b) Theo quy tắc hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=7\vec{i}+5\vec{j}$. Suy ra $\overrightarrow{AC}=(7;5;0)$.

Theo quy tắc hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=7\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$. Suy ra $\overrightarrow{AC'}=(7;5;3)$

c) Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)=\frac{1}{2}\left(7\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}+5\vec{j}+3\vec{k}\right)=\frac{7}{2}\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{7}{2};5;3\right)$.

d) G là trọng tâm của ΔABD nên:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(7\vec{i}+5\vec{j}\right)=\frac{7}{3}\vec{i}+\frac{5}{3}\vec{j}$.

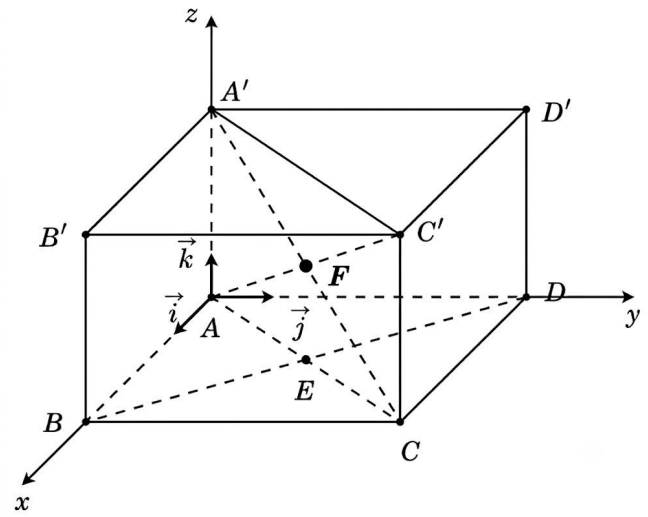
Suy ra $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3};0\right)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=AA'=6, AD=8$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và F là trung điểm của cạnh AC'.

a) Xác định toạ độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định toạ độ hai điểm E và F.

Lời giải



a) Ta có:

$A \equiv O \Rightarrow A(0;0;0)$

$AB = 6$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$. Suy ra $B(6;0;0)$.

$AD = 8$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\vec{j}$ nên $\overrightarrow{AD} = 8\vec{j}$. Suy ra $D(0;8;0)$.

$AA' = 6$ và $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\vec{k}$ nên $\overrightarrow{AA'} = 6\vec{k}$. Suy ra $A'(0;0;6)$.

$ABCD$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$. Suy ra $C(6;8;0)$.

$ABB'A'$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = 6\vec{i} + 6\vec{k}$. Suy ra $C(6;0;6)$.

$ADD'A'$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{j} + 6\vec{k}$. Suy ra $D'(0;8;6)$.

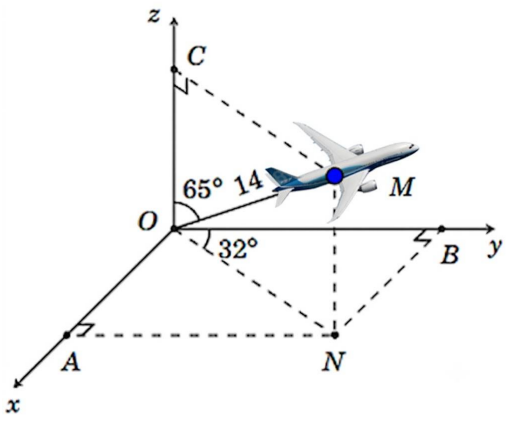
$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}$. Suy ra $C'(6;8;6)$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Suy ra $E(3;4;0)$.

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{1}{2}\left(6\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}\right) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Suy ra $F(3;4;3)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, một máy bay cất cánh từ phi trường O, bay đến điểm M như hình vẽ. Cho biết $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$. Tìm toạ độ điểm M (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Ta có:

$OC = OM.\cos 65° \approx 5,9$

$ON = CN = OM.\sin 65° \approx 12,7$

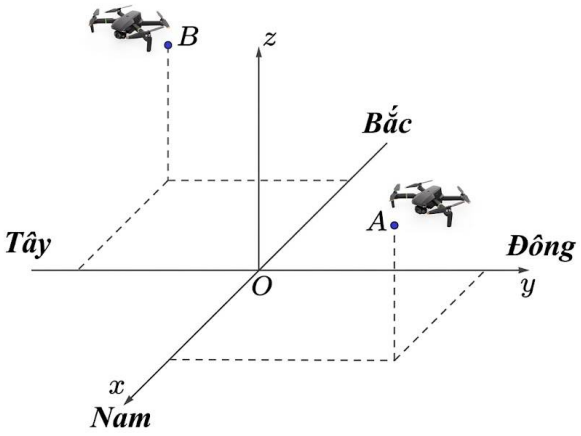
$OB = ON.\cos 32° \approx 6,7$

Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 6,7.\vec{i} + 10,8.\vec{j} + 5,9.\vec{k}$

Vậy $M\left(6,7;10,8;5,9\right)$

Bài 5. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía Nam và $2m$ về phía Đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía Bắc và $6m$ về phía Tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



a) Xác định toạ độ điểm A và B.

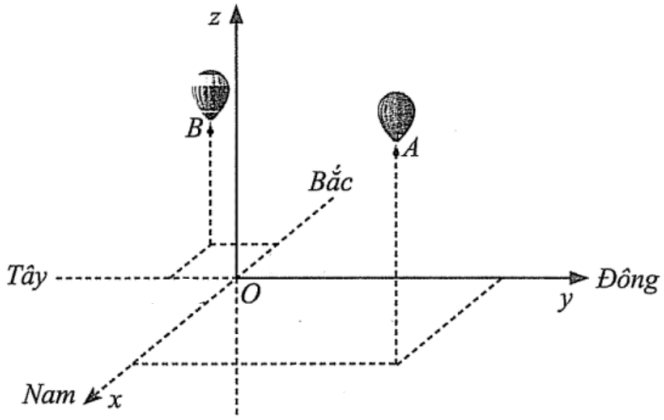
b) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Theo đề bài ta có $A\left(3;2;5\right), B\left(-6;-6;5\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-6-3;-6-2;5-5)=(-9;-8;0)$

Bài 6. Hai chiếc kinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, khinh khí cầu A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $1km$; khinh khí cầu B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là kilômét).



a) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.

b) Xác định toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

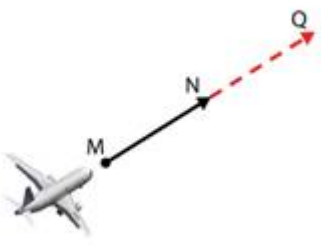
a) Theo đề bài ta có: $A(3;4;1), B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{OA}=(3;4;1)$ và $\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(-1-3;-\frac{3}{2}-4;\frac{4}{5}-1\right)=\left(-4;-\frac{11}{2};-\frac{1}{5}\right)$.

Bài 7. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(400;100;9)$ đến điểm $N(700;200;14)$ trong 15 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 15 phút tiếp theo máy bay đến vị trí $Q(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.





Lời giải

Gọi $Q(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MN}=(300;100;5)$

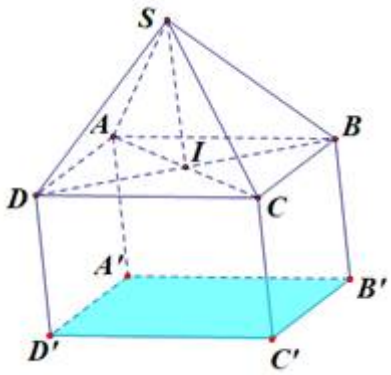
$\overrightarrow{NQ}=(x-700;y-200;z-14)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to N$ bằng thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MN=NQ$

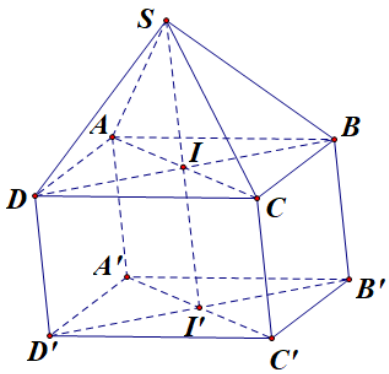
Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}300=x-700\\100=y-200\\5=z-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1000\\y=300\\z=19\end{cases}\Rightarrow Q(1000;300;19)\Rightarrow x+y+z=1319$

Bài 8. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông (như hình vẽ).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (*đơn vị trên mỗi trục là mét*) sao cho $A'(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;0,5;1)$. Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để lắp ráp thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm S là $(a;b;c)$. Tính giá trị của $a+b+c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Đổi 60 $cm=0,6$ (m)

Ta có $SA=0,6$ (m)

$A'(0;0;0)$, $A(0;0;1), B(0;0,5;1) \Rightarrow AB = \frac{1}{2}$, $AA' = 1$.

Gọi $I = AC \cap BD$, $I' = A'C' \cap B'D'$

Vì $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SI \perp (ABCD)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $(ABCD) // (A'B'C'D'), II' \perp (A'B'C'D')$.

Do đó $SI \perp (A'B'C'D')$. Suy ra S, I, I' thẳng hàng. Vì vậy $SI' \perp (A'B'C'D')$.

Xét tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Xét tam giác vuông SIA có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{0,6^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{94}}{20}$.

Gọi I' là trung điểm của $A'C' \Rightarrow II' = AA' = 1 \Rightarrow SI' = II' + SI = 1 + \frac{\sqrt{94}}{20} = \frac{20 + \sqrt{94}}{20}$.

Ta có $AA'B'B$ là hình chữ nhật và $A'(0;0;0)$, $A(0;0;1), B(0;0,5;1) \Rightarrow B'(0;0,5;0) \in Oy$

Mà $A'(0;0;0) \equiv O$, $A(0;0;1) \in Oz \Rightarrow D' \in Ox$.

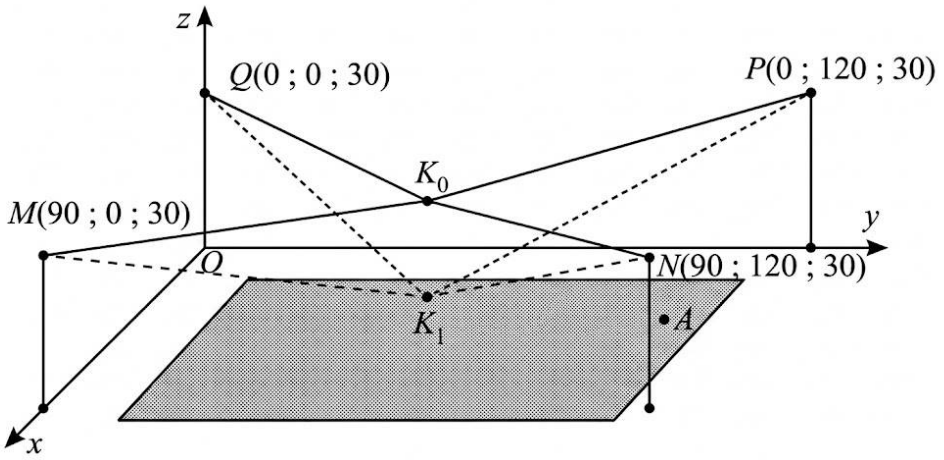
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh $\frac{1}{2} \Rightarrow A'D' = \frac{1}{2} \Rightarrow D'(0,5;0;0)$

$\Rightarrow I'(0,25;0,25;0)$.

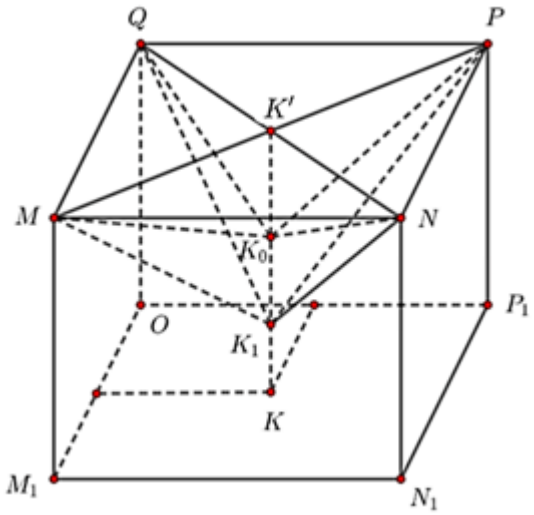
Vì $I'(0,25;0,25;0)$ là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy và $SI' = \frac{20 + \sqrt{94}}{20}$

$\Rightarrow S\left(0,25;0,25;\frac{20 + \sqrt{94}}{20}\right) \Rightarrow a + b + c = 0,25 + 0,25 + \frac{20 + \sqrt{94}}{20} \approx 1,98$.

Bài 9. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (như hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25m và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 . Biết rằng vecto $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c)$, với $a,b,c \in \mathbb{R}$, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy).

Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật. Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ.

Khi đó $K'Q = K'P = K'N = K'M$. Vì $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.

Khi đó, các điểm K', K_0, K_1, K có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của K_0 và K_1 lần lượt là 25 và 19. Giả sử $K_0(x;y;25)$ và $K_1(x;y;19)$.

Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $K'K = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.

Do đó, $K'(x;y;30)$.

Ta có $\overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OK'} = 30\vec{k} - \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}\right) = -x\vec{i} - y\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{K'Q} = (-x;-y;0)$.

$\overrightarrow{NK'} = \overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{ON} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}\right) - \left(90\vec{i} + 120\vec{j} + 30\vec{k}\right) = (x-90)\vec{i} + (y-120)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NK'} = (x-90; y-120; 0)$.

Vì K' là giao hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ.

Suy ra $\overrightarrow{K'Q}=\overrightarrow{NK'}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=x-90\\-y=y-120\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=45\\y=60\end{cases}$.

Do vậy, $K_0(45;\ 60;\ 25);K_1(45;\ 60;\ 19)$ nên ta có

$\overrightarrow{K_0K_1}=\overrightarrow{OK_1}-\overrightarrow{OK_0}=\left(45\vec{i}+60\vec{j}+19\vec{k}\right)-\left(45\vec{i}+60\vec{j}+25\vec{k}\right)=-6\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{K_0K_1}=(0;0;-6).$

Do đó, $a+b+c=-6.$

Cách 2:

Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(x_I-90;y_I-0;z_I-30)$, $\overrightarrow{IP}=(0-x_I;120-y_I;30-z_I)$.

I là trung điểm của MP khi và chỉ khi $\begin{cases}x_I-90=0-x_I\\y_I-0=120-y_I\\z_I-30=30-z_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=45\\y_I=60\\z_I=30.\end{cases}\Rightarrow$ Tọa độ điểm $I(45;60;30)$.

Các điểm I,K_0,K_1 nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Mà K_0 có cao độ bằng 25 nên $K_0(45;60;25)$; K_1 có cao độ bằng 19 nên $K_1(45;60;19)$.

Suy ra $\overrightarrow{K_0K_1}=(0;0;-6)\Rightarrow a=0;b=0;c=-6$.

Vậy $T=a+2b+3c=-18.$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải

Chọn A.

$\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{a}(-1;2;-3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;3;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó, $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(2;3;-1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{a}(x;y;z)$ nên $\vec{a}(-1;2;-3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

A. $M=(0;2;1)$. **B.** $M=(1;2;0)$. **C.** $M=(2;1;0)$. **D.** $M=(2;0;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Vì điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$ nên tọa độ điểm $M=(2;1;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=6\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(4;6;-3)$. **B.** $(-4;-6;3)$. **C.** $(-6;-4;3)$. **D.** $(6;4;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{OA}=6\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{k}=4\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow A(4;6;-3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz tương ứng và vectơ $\vec{a}=(1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. **B.** $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$. **C.** $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$. **D.** $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(-2;1;-1)$. **B.** $(2;-1;1)$. **C.** $(0;-1;3)$. **D.** $(0;-1;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}-\left(-\vec{i}+\vec{k}\right)=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j};\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Khi đó tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là?

A. $(2;2;-2)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(2;0;-2)$.

Lời giải

Chọn D.

$\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(-1;1;0)$.

$\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=(1;1;-2)$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1;1;-2)-(-1;1;0)=(2;0;-2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.

B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.

C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.

D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;2z)$.

Lời giải

Chọn C

Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;-y;z)$. Do đó phương án A sai.

Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(-x;y;-z)$. Do đó phương án B sai.

Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$. Do đó phương án C đúng.

Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(-x;-y;-z)$. Do đó phương án D sai.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;5;2)$. **B.** $(0;5;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3;0;0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3;-1;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(3;0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;1)$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(0;2;-3)$. **B.** $(1;0;-3)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(1;0;0)$.

Lời giải

Chọn C.

Hình chiếu của điểm $A(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(a;b;0)$ nên hình chiếu của điểm $A(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(1;2;0)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2;1;-1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2;0;-1)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$ **B.** $N(0;-1;1)$ **C.** $P(0;-1;0)$ **D.** $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz), ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $M(3;4;0)$. **B.** $P(-2;0;3)$. **C.** $Q(2;0;0)$. **D.** $N(0;4;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x=0 \Rightarrow N(0;4;-1) \in (Oyz)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M'. Xác định tọa độ M'.

A. $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;5;6)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2025;2026;-2027)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là:

A. $A'(-2025;-2026;2027)$. **B.** $A'(-2025;-2026;-2027)$.

C. $A'(-2025;2026;-2027)$. **D.** $A'(2025;2026;2027)$.

Lời giải

Chọn D

A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) nên $A'(2025;2026;2027)$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-5;2;0)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là:

A. $A'(5;2;0)$. **B.** $A'(-5;-2;0)$. **C.** $A'(5;-2;0)$. **D.** $A'(5;2;1)$.

Lời giải

Chọn A.

A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) nên $A'(5;2;0)$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-6;0;-4)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là:

A. $A'(6;0;-4)$. **B.** $A'(-6;0;-4)$. **C.** $A'(-6;0;4)$. **D.** $A'(6;0;4)$.

Lời giải

Chọn B.

A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) nên $A'(-6;0;-4)$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-5;7)$. Tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O là:

A. $A'(-2;-5;-7)$. **B.** $A'(2;-5;-7)$. **C.** $A'(-2;5;-7)$. **D.** $A'(2;5;7)$.

Lời giải

Chọn C.

A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ O nên $A'(-2;5;-7)$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm N thoả mãn $\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+3\vec{k}$. Tìm toạ độ điểm K là hình chiếu của điểm M trục Ox.

A. $K(-2;0;0)$. **B.** $K(2;0;0)$. **C.** $K(-2;0;-3)$. **D.** $K(2;0;3)$.

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+3\vec{k}\Rightarrow N(-2;0;3)$

Điểm K là hình chiếu của điểm N trên trục Ox nên $K(-2;0;0)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxz).

A. $H(0;3;-4)$. **B.** $H(-2;-3;4)$. **C.** $H(2;3;0)$. **D.** $H(2;0;-4)$.

Lời giải

Chọn D.

$\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\Rightarrow M(2;3;-4)$

Điểm H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxz) nên $H(2;0;-4)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:

A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A;z_A)=(-2;3;5)$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A. $(3;0;-2)$. **B.** $(-1;-2;6)$. **C.** $(1;0;-6)$. **D.** $(1;2;-6)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2-1;1-(-1);-4-2)=(1;2;-6)$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2-1),\overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x;y;z)$

Có $\overrightarrow{AB}=(1;3;1)=(x-1;y-2;z+1)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\\z=0\end{cases}\Rightarrow B(2;5;0)$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)$

A. $C(-1;6;-1)$. **B.** $C(1;6;2)$. **C.** $C(1;6;0)$. **D.** $C(-1;-6;-2)$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi tọa độ điểm $C(x;y;z)$, $\overrightarrow{AC}=(x-1;y;z-1)$. Ta có $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-0=6\\z-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=6\\z=2\end{cases}$.

Vậy $C(1;6;2)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;-3),N$ và vectơ $\vec{v}=(2;-1;-2)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. Tọa độ của điểm N là

A. $(-1;3;-1)$. **B.** $(3;1;-5)$. **C.** $(1;-3;1)$. **D.** $(-3;-1;5)$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $N(x,y,z)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(x-1;y-2;z+3)$

$\vec{v}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-2=-1\\z+3=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\z=-5\end{cases}$

Vậy $N(3;1;-5)$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho vécto $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là:

A. $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $B(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(x-4;y-6;z+3)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=-3\\y-6=2\\z+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=8\\z=-2\end{cases}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;3;-2)$ trên trục Oz. Khi đó vectơ $\overrightarrow{MM'}$ có tọa độ là

A. $(1;3;0)$. **B.** $(0;0;2)$. **C.** $(-1;-3;0)$. **D.** $(0;0;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $M'(0;0;-2)$. Suy ra $\overrightarrow{MM'}=(-1;-3;0)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$, $K(-1;3;1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{KP}$.

A. $\overrightarrow{KP}=(6;6;-11)$. **B.** $\overrightarrow{KP}=(8;6;-11)$. **C.** $\overrightarrow{KP}=(6;6;-4)$. **D.** $\overrightarrow{KP}=(3;3;-2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)\Rightarrow M(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)\Rightarrow N(3;7;-4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP ta suy ra được:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N-x_M=x_P-x_N\\y_N-y_M=y_P-y_N\\z_N-z_M=z_P-z_N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_P=5\\y_P=9\\z_P=-10\end{cases}\Rightarrow P(5;9;-10)$. Khi đó $\overrightarrow{KP}=(6;6;-11)$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có toạ độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;1;0)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(4;4;1)$. **D.** $D(1;3;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Vì $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-3=1\\y_D-1=3\\z_D-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=4\\y_D=4\\z_D=1\end{cases}\Rightarrow D(4;4;1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3;1;2)$, $B(-2;4;-1)$, $C(1;-3;3)$. Tọa độ điểm D là

A. $(0;-6;6)$. **B.** $(-6;7;-2)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(-4;2;5)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-1\\y+3=-3\\z-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-6\\z=6\end{cases}\Rightarrow D(0;-6;6)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(-2;8;-3)$. **B.** $(-4;8;-3)$. **C.** $(-4;8;-5)$. **D.** $(-2;2;5)$.

Lời giải

Chọn B.

Hình bình hành $ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên ta có:

$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\\z_A+z_C=z_B+z_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+(-3)=2+x_D\\2+5=-1+y_D\\-1+1=3+z_D\end{cases}$. Vậy $D(-4;8;-3)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có tọa độ các đỉnh $B(3;1;0)$, $D(0;4;-6)$. Tìm tọa độ điểm I.

A. $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right)$. **B.** $I(3;5;-6)$. **C.** $I\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $I(-3;5;-6)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $I(a;b;c)$ suy ra $\overrightarrow{BI}=(a-3;b-1;c)$, $\overrightarrow{ID}=(-a;4-b;-6-c)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành tâm I nên $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{ID}\Rightarrow\begin{cases}a-3=-a\\b-1=4-b\\c=-6-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=\frac{5}{2}\\c=-3\end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right)$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó biểu thức $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 44. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(1;-3;4)$; $\overrightarrow{AC}(-3;1;4)$. Do $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ là hai véc tơ không cùng phương nên tạo thành tam giác ABC.

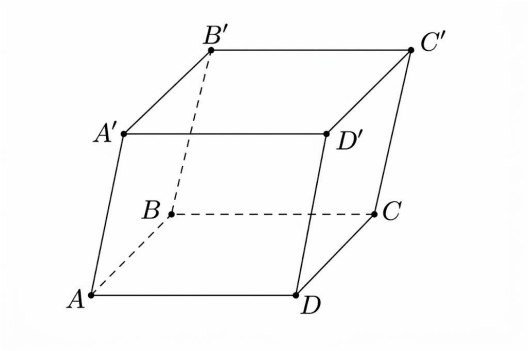
Vậy điểm $M(a;b;c)$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$

Có $\overrightarrow{MC}=(-2-a;3-b;3-c)$.

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}-2-a=1\\3-b=-3\\3-c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=6\\c=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a^2+b^2-c^2=(-3)^2+6^2-(-1)^2=44$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

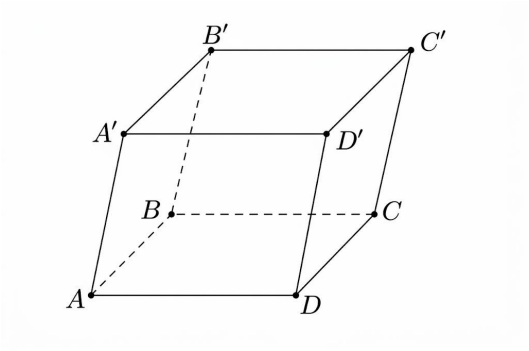
Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'}=(2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.



A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

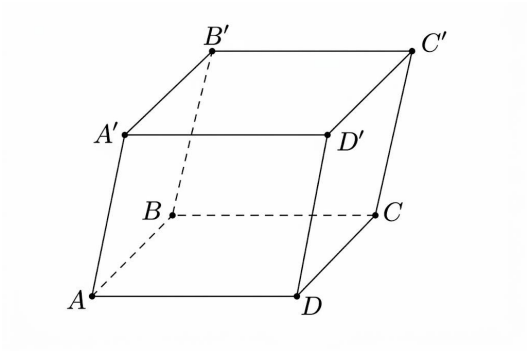
Lời giải

Chọn C

Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=(10;4;4)\Rightarrow\begin{cases}x=10+3\\y=4-0\\z=4-0\end{cases}\Rightarrow C'(13;4;4)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là



A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $D(a;b;c)$, $B'(a';b';c')$

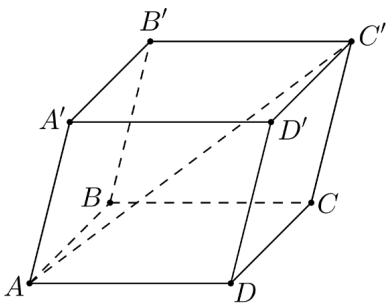
Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow O\left(\frac{1}{2};4;\frac{-7}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=8\\c=-7\end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{DD'}=(9;0;17)$, $\overrightarrow{BB'}=(a'-4;b';c')$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}\Rightarrow\begin{cases}a'=13\\b'=0\\c'=17\end{cases}$.

Vậy $B'(13;0;17)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(0;1;3)$. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AC'}$.



A. $\overrightarrow{AC'}=(2;4;3)$. **B.** $\overrightarrow{AC'}=(2;3;5)$. **C.** $\overrightarrow{AC'}=(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=(1;5;3)$.

Lời giải

Chọn C.

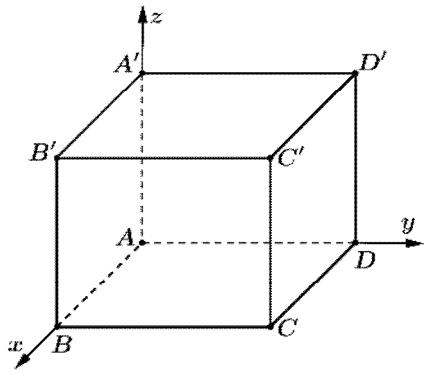
Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=(2;5;3)$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ O, điểm B nằm trên tia Ox, điểm D nằm trên tia Oy, điểm A' nằm trên tia Oz. Biết $AB=2, AD=4, AA'=3$. Gọi tọa độ của C' là $(a;b;c)$, khi đó biểu thức $a+b-c$ có giá trị là.

A. -4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

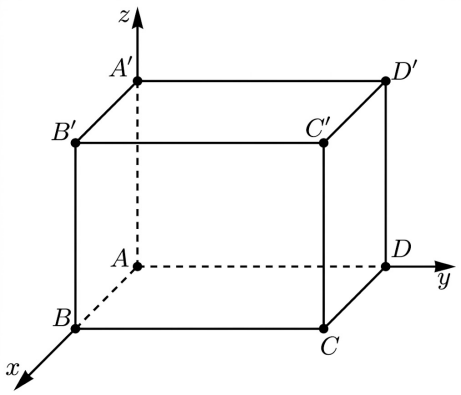


Theo giả thiết có $\overrightarrow{AB}=2\vec{i};\ \overrightarrow{AD}=4\vec{j};\overrightarrow{AA'}=3\vec{k}$;

Áp dụng quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

Do đó điểm C' có tọa độ là $(2;4;3)$. Vậy $a+b-c=2+4-3=3$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ (như hình vẽ).



Tọa độ vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ có tọa độ là

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;1;0)$. **D.** $(1;1;1)$.

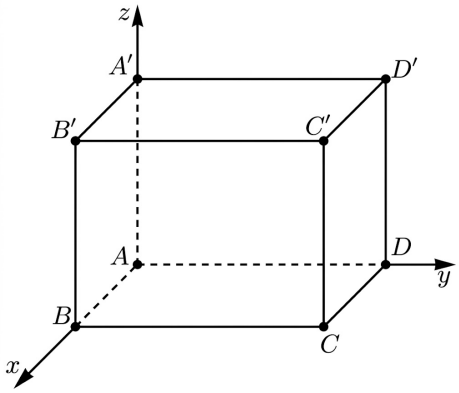
Lời giải

Chọn C.

Ta có $A'(0;0;1);C'(1;1;1)$.

Do đó $\overrightarrow{A'C'}=(1;1;0)$

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

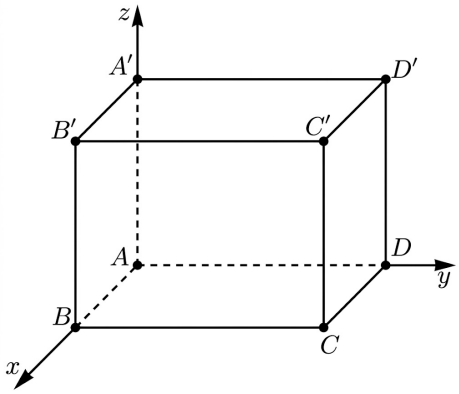
A. $C'(2;2;0)$ **B.** $C'(2;2;2)$ **C.** $C'(2;0;2)$ **D.** $C'(2;0;0)$

Lời giải

Chọn B.

Với A là gốc toạ độ thì $C'(2;2;2)$

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm B' là

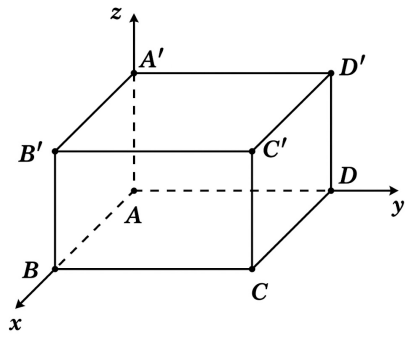
A. $B(2;0;2)$ **B.** $B(2;2;2)$ **C.** $B(2;2;0)$ **D.** $B(0;2;0)$

Lời giải

Chọn A.

Với A là gốc toạ độ thì $B(2;0;2)$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Tọa độ điểm E là

A. $E\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ **B.** $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ **C.** $E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $E\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$

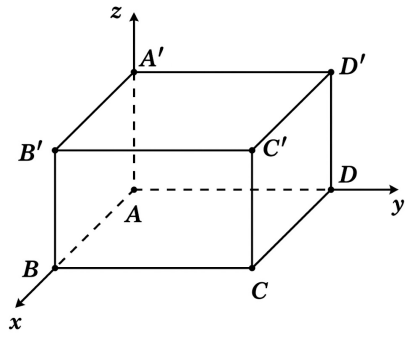
Lời giải

Chọn A.

$A(0;0;0), C(1;2;0)$

E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ nên điểm E là trung điểm $AC \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

A. $E(1;2;3)$ **B.** $E(1;2;6)$ **C.** $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ **D.** $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

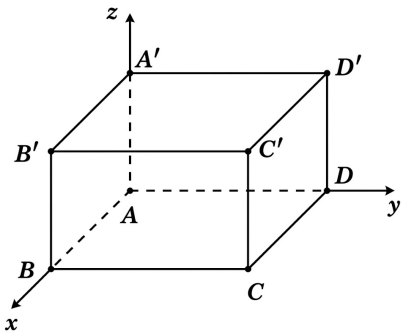
Lời giải

Chọn C.

$A'(0;0;3), C'(1;2;3)$

E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$ nên điểm E là trung điểm $A'C' \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

A. $E\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $E\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ **D.** $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

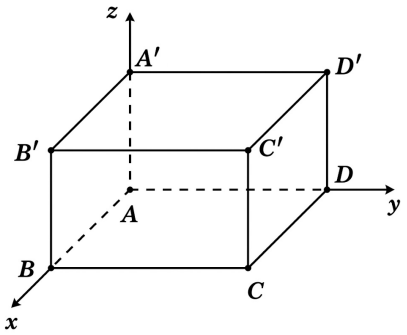
Lời giải

Chọn B.

$A(0;0;0), C'(1;2;3)$

E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên điểm E là trung điểm $AC' \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$, $AA'=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Tọa độ $\overrightarrow{B'D}$ là

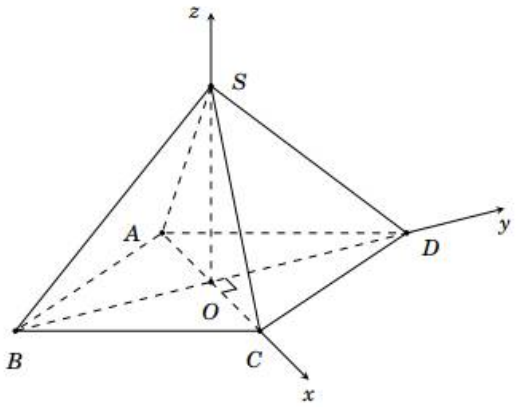
A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;2;-3)$ **C.** $(1;2;-3)$ **D.** $(-1;2;3)$

Lời giải

Chọn B.

$B'(1;0;3), D(0;2;0) \Rightarrow \overrightarrow{B'D}=(-1;2;-3)$

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



A. $\overrightarrow{SC}=(2a;0;-2a)$ **B.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$

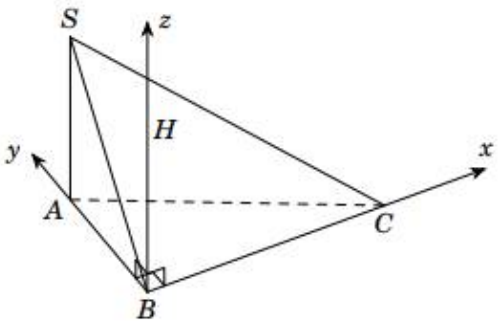
C. $\overrightarrow{SC}=(2a;-a;-2a)$ **D.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;2a)$

Lời giải

Chọn B.

Tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$.

Câu 50. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**



A. $A(0;2;0)$ **B.** $S(-2;2;2)$ **C.** $C(3;0;0)$ **D.** $B(0;0;0)$

Lời giải

Chọn B.

Toạ độ điểm $S(0;2;2)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-4\vec{k}$.

a) Tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là $(2;-3;0)$.

b) Tọa độ của điểm B là $(1;0;-4)$.

c) Tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ là $(3;-3;3)$.

d) Gọi điểm C là điểm thứ tư của hình bình hành $OABC$. Khi đó $\overrightarrow{OC}=(-1;3;5)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(2;-3;1)$

b) $\overrightarrow{OB}=\vec{i}-4\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=(1;0;-4)\Rightarrow B(1;0;-4)$

c) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}+\vec{i}-4\vec{k}=3\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(3;-3;-3)$

d) $OABC$ là hình bình hành nên:

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{i}-4\vec{k}-\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)=-\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(-1;3;-5)$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M có toạ độ $(4;-4;2)$.

a) $\overrightarrow{OM}=(4;-4;2)$.

b) $\overrightarrow{OM}=4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

c) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox có toạ độ là $(0;-4;2)$.

d) Gọi H là điểm thuộc mặt phẳng Oxz. Đoạn MH ngắn nhất khi $\overrightarrow{MH}=(4;0;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) b) Ta có $M(4;-4;2)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(4;-4;2)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

c) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox có toạ độ là $(4;0;0)$

d) MH ngắn nhất khi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxz, suy ra $H(4;0;2)$

Do đó: $\overrightarrow{MH}=(4-4;0-(-4);2-2)=(0;4;0)$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=\left(m-n;4m-6n;n^2-3m+2\right)$, với m,n là tham số.

a) $\vec{a}=(1;3;-4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(1;-4;3)$.

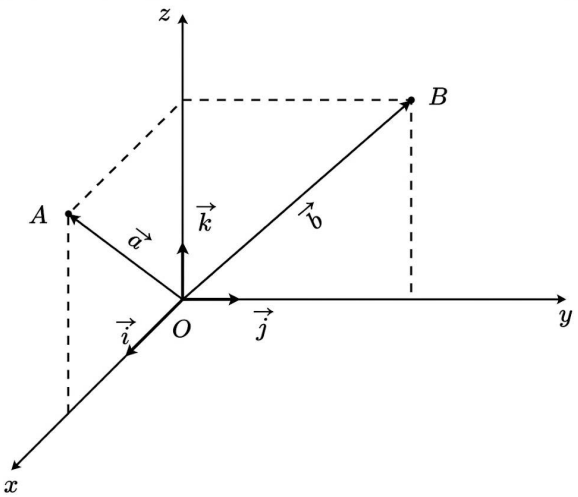
b) Khi $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A. Suy ra $A(1;-4;3)$.

c) $\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=0\\4m-6n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại m,n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=1\\4m-6n=-4\\n^2-3m+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=4\end{cases}$. Suy ra $m+n=9$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ và $\vec{b}=(2;0;-3)$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



a) $\vec{a}=(1;-1;3)$.

b) $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$

c) $\overrightarrow{AB}=(1;1;-6)$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(1;-1;3)$.

b) $\vec{b}=(2;0;-3)\Rightarrow\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{k}$.

c) Ta có :

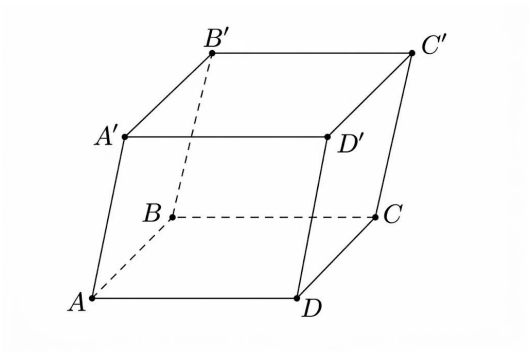
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì toạ độ vectơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ $A\Rightarrow A(1;-1;3)$.

$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ thì toạ độ vectơ $\vec{b}$ cũng chính là toạ độ $B\Rightarrow B(2;0;-3)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=(2-1;0+1;-3-3)=(1;1;-6)$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}+2\vec{i}-3\vec{k}=3\vec{i}-\vec{j}$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có toạ độ $A(2;1;0),C(0;3;0),C'(-1;2;1),D'(0;-2;0)$.



a) $\overrightarrow{AC}=(-2;2;0)$

b) $\overrightarrow{OA'}=(1;1;1)$

c) Tọa độ các điểm B',B,D lần lượt là $B'(0;4;2)$; $B(1;5;1);D(1;-1;-1)$.

d) $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{BC}=(1;5;-4)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $\overrightarrow{AC}=(-2;2;0)$

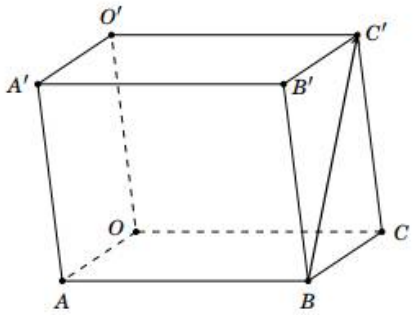
b) Gọi tọa độ điểm A' là $(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{A'C'}=(-1-x;2-y;1-z)$

$A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}-1-x=-2\\2-y=2\\1-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}\Rightarrow A'(1;0;1)\Rightarrow\overrightarrow{OA'}=(1;0;1)$

c) Làm tương tự câu b) ta được $B'(0;4;2)$; $B(1;5;1);D(1;-1;-1)$

d) $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'D}=(1-0;-1-4;-1-3)=(1;-5;-4)$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0)$ và $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$.



a) $C'(2;3;6)$.

b) $O'(3;-5;-5)$.

c) $\overrightarrow{AB'}=(2;-3;6)$.

d) Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$. Khi đó $\overrightarrow{HK}=(1;2;1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)\Rightarrow\begin{cases}x-0=2\\y-3=-6\\z-0=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=6\end{cases}\Rightarrow C'(2;-3;6)$.

b) Gọi $O'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{BC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-1=-6\\z+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-5\\z=5\end{cases}\Rightarrow O'(3;-5;5)$

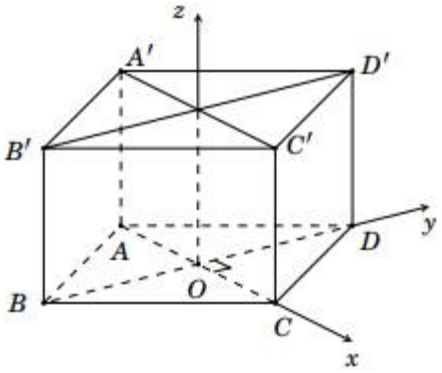
c) Ta có: $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OC'}=(2;-3;6)$.

d) Vì H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$ nên $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$

Suy ra $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$.

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 6. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



a) $A(-3;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC'}=\left(3\sqrt{2};0;6\right)$.

c) $\overrightarrow{AC'}=\left(-6\sqrt{2};0;-6\right)$.

d) $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\left(6\sqrt{2};0;6\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

$ABCD$ hình vuông có cạnh bằng 6 nên $AC=6\sqrt{2}$.

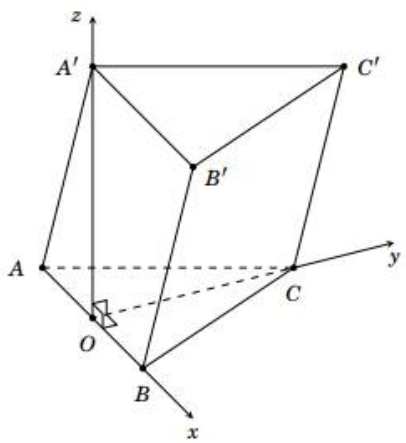
a) Điểm $A\in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA=\dfrac{1}{2}AC=3\sqrt{2}$ nên $A\left(-3\sqrt{2};0;0\right)$.

b) Ta tính được $C'\left(3\sqrt{2};0;6\right)$. Suy ra $\overrightarrow{OC'}=\left(3\sqrt{2};0;6\right)$.

c) Ta có $A\left(-3\sqrt{2};0;0\right)$ và $C'\left(3\sqrt{2};0;6\right)$ nên $\overrightarrow{AC'}=\left(6\sqrt{2};0;6\right)$

d) $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC'}=\left(6\sqrt{2};0;6\right)$

Câu 58. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO}=60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC).



a) $A(-1;0;0)$.

b) $C(0;\sqrt{3};0)$.

c) $A'(-1;0;\sqrt{3})$.

d) $\overrightarrow{OC'}=(2;\sqrt{3};\sqrt{3})$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Độ dài $OC=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cdot OA'=OA\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

a) Đúng: Điểm $A\in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA=1$ nên $A(-1;0;0)$.

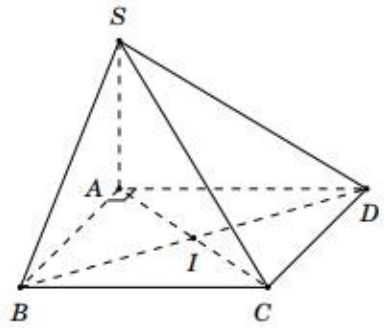
b) Đúng: Điểm $A'\in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC=\sqrt{3}$ nên $C(0;\sqrt{3};0)$.

c) Sai: $A'\in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA'=\sqrt{3}$ nên $A'(0;0;\sqrt{3})$.

d) Đúng: Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có

$$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-0=1\\y-0=\sqrt{3}\\z-\sqrt{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\\z=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})\Rightarrow\overrightarrow{OC'}=(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I và $AB=1, AD=2$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.



a) $D(2;0;0)$.

b) $\overrightarrow{OC}=(2;2;0)$.

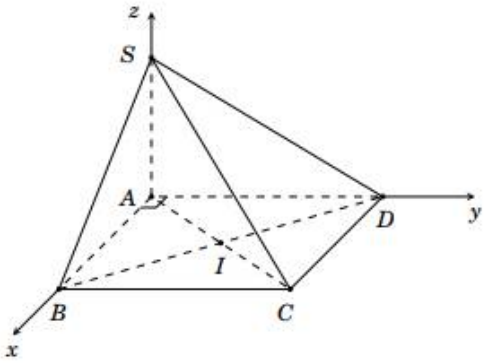
c) $\overrightarrow{SC}=(2;2;-3)$.

d) $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Chọn hệ trục như hình vẽ :



Với $AB=1, AD=2, SA=3$ ta có:

a) Điểm $D\in Oy$ và $AD=2$ nên $D(0;2;0)$.

b) Điểm $C\in(Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D. Do $AB=1$ và $AD=2$ nên

$C(2;2;0)\Rightarrow \overrightarrow{OC}=(2;2;0)$.

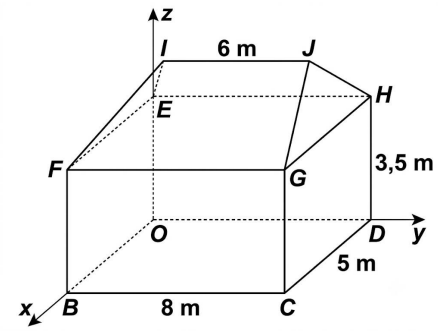
c) Điểm $S\in Oz$ và $AS=3$ nên $S(0;0;3)$.

Do đó $\overrightarrow{SC}=(2;2;-3)$

d) Điểm $I\in(Oxy)$ và và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên

$I\left(\frac{1}{2};1;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\left(\frac{1}{2};1;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Câu 60. Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$).



Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà $IJGF$, $IJHE$ là các hình thang cân và có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà số đo góc nhị diện $[J,FG,H]$ là $45°$.

a) $B(5;0;0)$.

b) $\overrightarrow{BD}=(5;8;0)$

c) $G(5;8;0)$

d) Chiều cao ngôi nhà là $7m$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Ngôi nhà gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ nên ta có:

a) Điểm $B \in Ox$ và $OB = CD = 5$ nên $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} \Rightarrow B(5;0;0)$.

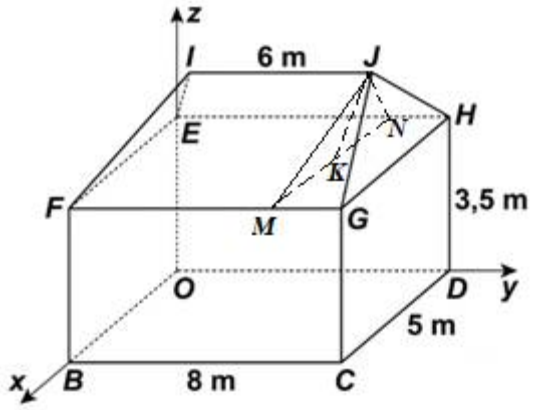
b) Điểm $D \in Oy$ và $AD = BC = 8$ nên $\overrightarrow{OD} = 8\vec{j} \Rightarrow D(0;8;0)$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (-5;8;0)$.

c) Điểm $E \in Oz$ và $OE = DH = \dfrac{7}{2}$ nên $\overrightarrow{OE} = \dfrac{7}{2}\vec{k}$

Ta có: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + \dfrac{7}{2}\vec{k} \Rightarrow G\left(5;8;\dfrac{7}{2}\right)$

d)

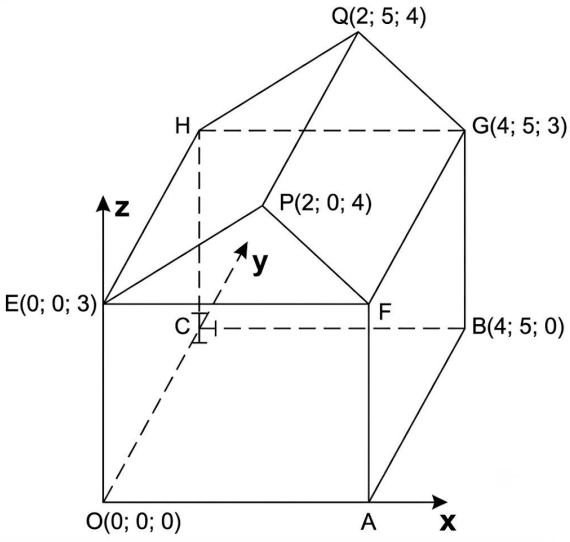


Kẻ JM vuông góc với FG và JN vuông góc với EH. Khi đó số đo góc nhị diện $[J, FG, H]$ bằng số đo góc $\widehat{JMN} = 45°$

Tam giác JMN cân tại J. Gọi K là hình chiếu của J trên cạnh MN, khi đó tam giác JMK vuông cân tại K, suy ra $KJ = KM = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}EF = 2,5 \Rightarrow z_I = z_J = 3,5 + 2,5 = 6$

Vậy chiều cao ngôi nhà là $6m$.

Câu 61. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$), trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) $\overrightarrow{GQ}=(-2;0;1)$.

b) $F(3;0;4)$.

c) $\overrightarrow{AH}=(4;-5;-3)$.

d) Chiều cao ngôi nhà là $4m$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{GQ}=(-2;0;1)$

b) Gọi $F(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{FP}=(2-x;-y;4-z)$

Vì $\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{GQ}$ nên $\begin{cases}2-x=-2\\-y=0\\4-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=0\\z=3\end{cases}\Rightarrow F(4;0;3)$

c) Tương tự câu b) từ $\overrightarrow{HQ}=\overrightarrow{EP}\Rightarrow H(0;5;3)$ và $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FE}\Rightarrow A(4;0;0)$

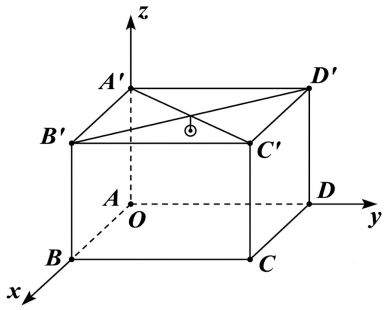
Suy ra $\overrightarrow{AH}=(-4;5;3)$.

c) Điểm $E\in Oz$ và $OE=DH=\dfrac{7}{2}$ nên $\overrightarrow{OE}=\dfrac{7}{2}\vec{k}$

Ta có: $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=5\vec{i}+8\vec{j}+\dfrac{7}{2}\vec{k}\Rightarrow G\left(5;8;\dfrac{7}{2}\right)$

d) Ta có $z_P=z_Q=4$ nên chiều cao ngôi nhà là $4m$.

Câu 62. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB=6m$, $AD=7m$, $AA'=3,7m$. Một bóng đèn được treo ở vị trí chính giữa trần nhà của phòng học và cách trần nhà $0,2m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là $1m$) sao cho gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox,Oy,Oz như hình vẽ.



a) $D(0;7;0)$.

b) $C(7;6;0)$.

c) $\overrightarrow{C'D'}=(6;0;0)$

d) Biết bóng đèn nằm tại vị trí có tọa độ $(a;b;c)$. Khi đó $2a+b+c=13$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Điểm $D\in Oy$ và $AD=7$ nên $D(0;7;0)$.

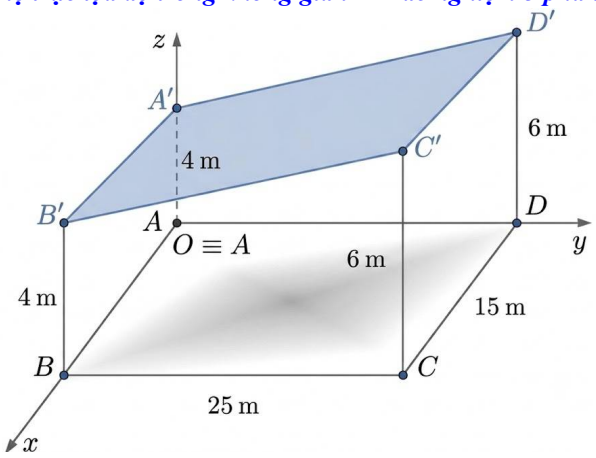
b) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, nên C có tọa độ $(6;7;0)$

c) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{BA}=(-6;0;0)$

d) Bóng đèn có hoành độ và tung độ trùng với tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và cao độ thấp hơn trần nhà $0,2m$, do đó toạ độ của bóng đèn là $(3;3,5;3,5)$

$\Rightarrow 2a+b+c=13$

Câu 63. Để chuẩn bị cho ngày hội thao, ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi dựng bốn chiếc cột AA',BB',CC',DD' lần lượt tại bốn góc của một sân bóng hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước là $CD=15m, AB=25m$. Bốn chiếc cột AA',BB',CC',DD' vuông góc với mặt sân và có chiều cao là $AA'=BB'=4m, CC'=DD'=6m$. Một tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được căng phẳng với bốn góc được cố định vào đầu bốn cột như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét) sao cho $O\equiv A$ và các trục Ox,Oy,Oz trùng với AB, AD, AA' như hình vẽ bên dưới.



a) $A'(0;0;4)$.

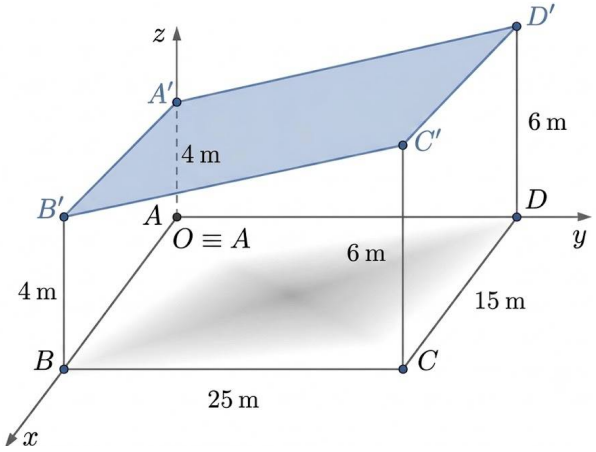
b) $\overrightarrow{A'C'}=(15;25;2)$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD'}=(15;25;0)$

d) Ban tổ chức trường Nguyễn Văn Trỗi muốn treo một bóng đèn công suất lớn nằm ở chính giữa tấm bạt hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Biết bóng đèn cách tại vị trí treo $0,4m$, Khi đó bóng đèn cách mặt sàn của sân là $4,6m$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



Từ hình vẽ ta có:

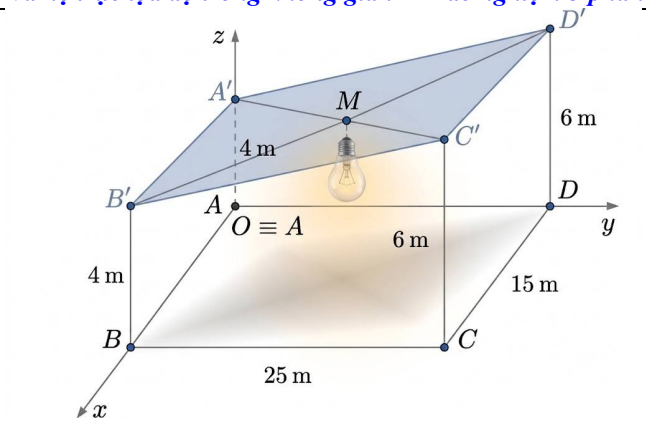
$O\equiv A(0;0;0), B(15;0;0), C(15;25;0), D(0;25;0), A'(0;0;4), B'(15;0;4), C'(15;25;6), D'(0;25;6)$.

a) $A'(0;0;4)$.

b) $\overrightarrow{A'C'}=(15-0;25-0;6-4)=(15;25;2)$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{A'C'}=(15;25;2)$

d)



Gọi $M\left(x;y;z\right)$ là điểm treo bóng đèn, suy ra M là trung điểm $A'C'$

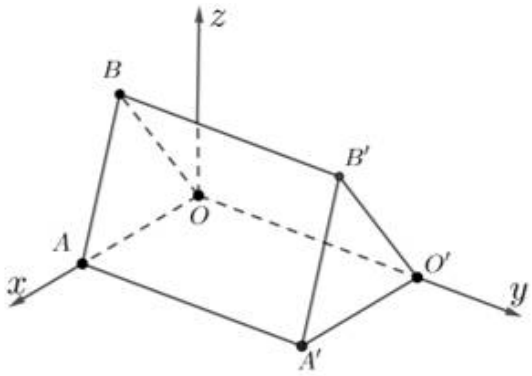
Do đó $\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{MC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x-0=15-x\\y-0=25-y\\z-4=6-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{15}{2}\\y=\dfrac{25}{2}\\z=5\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{25}{2};5\right)$

Vậy bóng đèn cách mặt sàn của sân là $z_M-0,4=5-0,4=4,6m$

Câu 64. Những căn nhà gỗ trong hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình 2 với OAB là tam giác cân tại B. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $\left(240;450;0\right)$ và $\left(120;450;300\right)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.



Hình 1



Hình 2

a) $\overrightarrow{A'B'}=\left(-120;0;300\right)$.

b) $A\left(120;0;0\right)$.

c) $\overrightarrow{AO'}=\left(-120;450;0\right)$.

d) $\overrightarrow{OB}=\left(120;0;300\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là $450cm$ và $240cm$. Suy ra $O'O = A'A = 450cm$ và $A'O' = AO = 240cm$.

Ta có $A'(240;450;0)$ và $B'(120;450;300)$

a) $\overrightarrow{A'B'} = (120-240;450-450;300-0) = (-120;0;300)$

b) c) $A \in Ox \Rightarrow A(240;0;0)$ và $O' \in Oy \Rightarrow O'(0;450;0)$

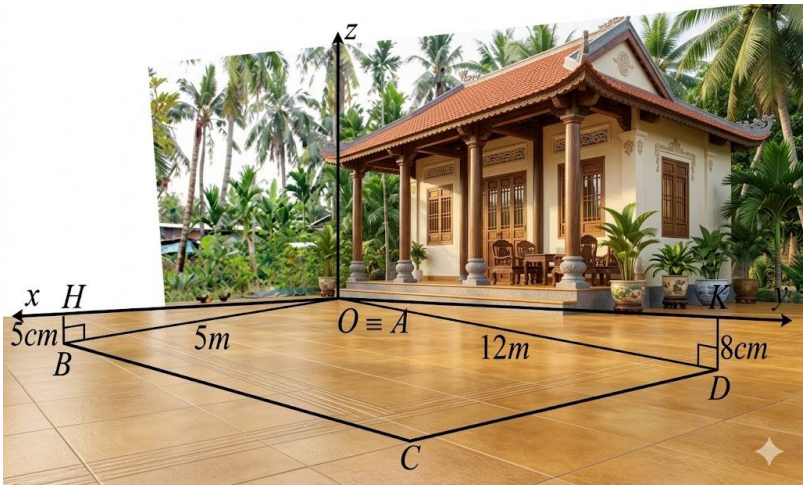
Ta có: $\overrightarrow{AO'} = (-240;450;0)$

d) Gọi $B(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x-240;y;z)$

Mà $ABB'A'$ là hình chữ nhật nên: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-240=-120 \\ y=0 \\ z=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=120 \\ y=0 \\ z=300 \end{cases} \Rightarrow B(120;0;300)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = (120;0;300)$

Câu 65. Bác Bảo Toàn muốn xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5m$ và $CD = 12m$, dùng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi,... Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác Bảo Toàn xây vị trí B thấp hơn vị trí A là $5cm$, vị trí D thấp hơn vị trí A là $8cm$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là centimét) sao cho $O \equiv A$ và mặt phẳng Oxy trùng với mặt sân khi chưa hạ thấp điểm B và điểm D ($(Oxy) \equiv (OHK)$), các trục Ox, Oy trùng với OH, OK và Oz hướng lên trời như hình vẽ bên dưới.



a) $B(\sqrt{249975};0;5)$

b) $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{249975};0;-5)$

c) $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{249975};\sqrt{1439936};-13)$

d) Vị trí C thấp hơn vị trí A là $13cm$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tam giác OBH vuông tại B nên: $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{500^2-5^2}=\sqrt{249975}\left(cm\right)$

Tam giác ODK vuông tại D nên: $AK=\sqrt{AD^2-DK^2}=\sqrt{1200^2-8^2}=\sqrt{1439936}\left(cm\right)$

a) Dựa vào hình vẽ ta có: $O\equiv A\left(0;0;0\right),B\left(\sqrt{249975};0;-5\right),D\left(0;\sqrt{1439936};-8\right)$

b) $\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{249975};0;-5\right)$

c) $\overrightarrow{BD}=\left(0-\sqrt{249975};\sqrt{1439936}-0;-8+5\right)=\left(-\sqrt{249975};\sqrt{1439936};-3\right)$

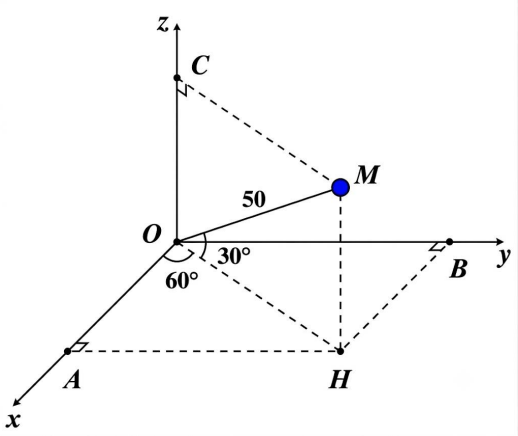
d) Gọi $C\left(x;y;z\right)$ là điểm cần tìm

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{249975};0;-5\right)$ và $\overrightarrow{DC}=\left(x;y-\sqrt{1439936};z+8\right)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{249975}=x\\0=y-\sqrt{1439936}\\-5=z+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{249975}\\y=\sqrt{1439936}\\z=13\end{cases}\Rightarrow C\left(\sqrt{249975};\sqrt{1439936};13\right)$$

Vậy vị trí C thấp hơn vị trí A là $13cm$.

Câu 66. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng $\left(Oxy\right)$. Cho biết $OM=50$, $\left(\vec{i};\overrightarrow{OH}\right)=60°$, $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=30°$.



a) $A\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

b) $\overrightarrow{BC}=\left(0;\frac{75}{2};25\right)$

c) $\overrightarrow{OM}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{75}{2}\vec{j}-25\vec{k}$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};\frac{75}{2};-25\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Tam giác OMH vuông tại H có $OM=50$, $\widehat{OMH}=30°$ nên ta có:

$OH=OM.\cos 30°=25\sqrt{3}$

$OC=MH=OM.\sin 30°=25$

Tam giác OAH vuông tại A, $OH=25\sqrt{3}$, $\widehat{AOH}=60°$ nên ta có:

$OA=OH.\cos 60°=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$OB=AH=OH.\sin 60°=\frac{75}{2}$

Do đó $A\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{75}{2};0\right),C(0;0;25),M\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};\frac{75}{2};25\right)$

a) $A\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

b) $\overrightarrow{BC}=\left(0-0;0-\frac{75}{2};25-0\right)=\left(0;-\frac{75}{2};25\right)$

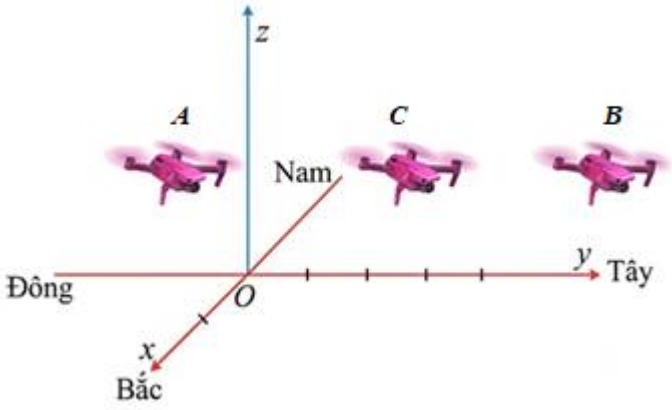
c) $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};\frac{75}{2};25\right)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{75}{2}\vec{j}+25\vec{k}$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}=\frac{25\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{75}{2}\vec{j}+25\vec{k}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\frac{25\sqrt{3}}{2};\frac{75}{2};25\right)$

Câu 67. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một điểm O. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất bay đến điểm A cách điểm xuất phát O về phía Đông $100m$ và về phía Nam $80m$, đồng thời cách mặt đất $40m$. Chiếc máy bay thứ hai, bay đến điểm B cách điểm xuất phát O về phía Bắc $60m$ và về phía Tây $40m$, đồng thời cách mặt đất $20m$. Chiếc máy bay thứ ba, bay đến điểm C là điểm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát O của ba chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét (xem hình vẽ).



a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $A(-100;-80;40)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $B(40;60;20)$.

c) Chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $C(-10;30;30)$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc máy bay thứ ba trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a-b+2027c=20$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ theo hình vẽ ta có:

a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $A(-80;-100;40)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $B(60;40;20)$.

c) Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên điểm C ở vị trí trung điểm của đoạn thẳng AB.

Gọi $C(x;y;z)$ là điểm cần tìm

$\overrightarrow{AC}=(x+80;y+100;z-40)$

$\overrightarrow{CB}(60-x;40-y;20-z)$

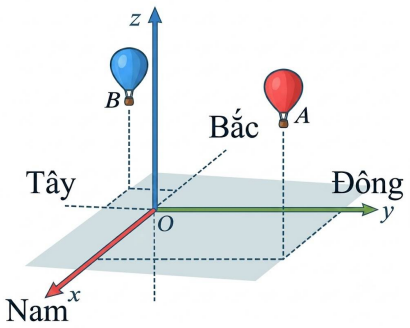
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+80=60-x\\y+100=40-y\\z-40=20-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10\\y=-30\\z=30\end{cases}\Rightarrow C(-10;-30;30)$$

suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $C(-10;-30;30)$.

d) Chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $C(-10;-30;30)$ nên khi chiếu trên (Oxy) (mặt đất) có toạ độ là $(-10;-30;0)\Rightarrow a-b+2027c=20$

Câu 68. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát $2\,km$ về phía Nam và $1\,km$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\,km$. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát $1\,km$ về phía Bắc và $1,5\,km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\,km$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



a) $A\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\frac{3}{2};-\frac{4}{5}\right)$.

c) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}+\frac{3}{10}\vec{k}$.

d) Hình chiếu của tọa độ chiếc khinh khí cầu B trên mặt đất là $(a;b;c)$, khi đó $a+b+c=2,5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ theo hình vẽ ta có:

Chiếc khinh khí cầu A và B có tọa độ lần lượt là $A\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$ và $B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$.

a) $A(2;1;0,5)$

b) $B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$

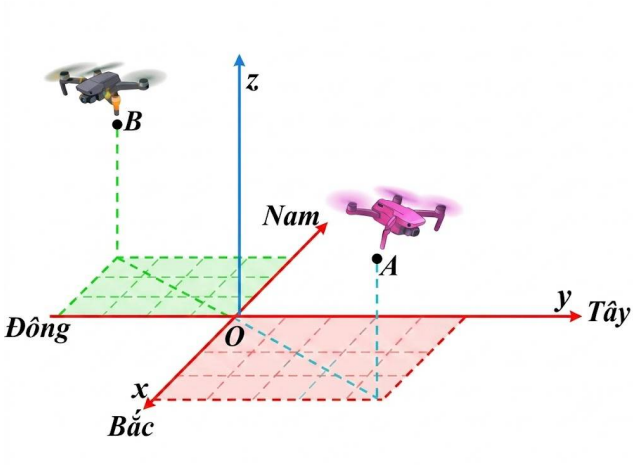
c) $\overrightarrow{AB}=\left(-1-2;-\frac{3}{2}-1;\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)=\left(-3;-\frac{5}{2};\frac{3}{10}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-\frac{5}{2}\vec{j}+\frac{3}{10}\vec{k}$

d) Chiếc khinh khí cầu B có tọa độ $B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$ nên khi chiếu trên (Oxy) (mặt đất) có toạ độ là

$\left(-1;-\frac{3}{2};0\right)\Rightarrow a+b+c=-2,5$

Câu 69. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(10;20;0,7)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

c) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0;20;0)$.

d) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất là $(-30;-25;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ theo hình vẽ ta có:

a) Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $A(20;10;0,7)$.

b) Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $B(-30;-25;1)$.

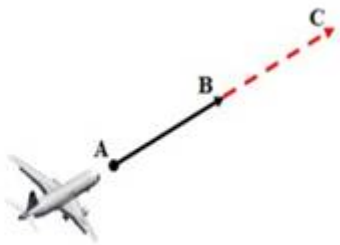
c) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ nhất trên trục Oy là $(0;10;0)$.

d) Toạ độ hình chiếu của chiếc máy bay thứ hai trên mặt đất (hay (Oxy)) là $(-30;-25;0)$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(920;740;5,2)$ đến điểm $B(980;800;6,8)$

trong 12 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 12 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$.





a) $\overrightarrow{OA}=(920;740;5,2)$.

b) $\overrightarrow{AB}=(60;60;-1,6)$.

c) $\overrightarrow{BC}=60\vec{i}+60\vec{j}-1,6\vec{k}$.

d) $x+y+10z=1980$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) $A(920;740;5,2)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(920;740;5,2)$

b) $\overrightarrow{AB}=(60;60;1,6)$

c) Do chiếc may bay di duyển với tốc độ và hướng không đổi từ A đến B trong 10 phút và từ B đến C trong 10 phút nên $AB=BC$ và A,B,C thẳng hàng, suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{AB}=(60;60;1,6)$ nên $\overrightarrow{BC}=(60;60;1,6)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=60\vec{i}+60\vec{j}+1,6\vec{k}$

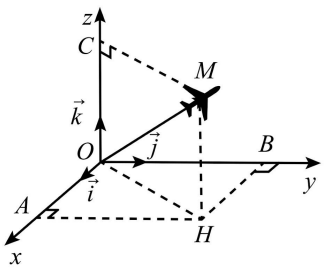
d) Gọi $C(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(x-980;y-800;z-6,8)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}60=x-980\\60=y-800\\1,6=z-6,8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1040\\y=860\\z=8,4\end{cases}\Rightarrow C(1040;860;8,4).$$

Vậy $x+y+10z=1984$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 71. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM=80;\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=60°;\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=45°$. Gọi toạ độ điểm $M(a;b;c)$, khi đó giá trị của $a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{2}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 240

Ta có: $\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=60°\Rightarrow\widehat{AOH}=60°$ và $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=45°\Rightarrow\widehat{HOM}=45°$

Do đó:

$OC=MH=OM\sin\widehat{HOM}=80\sin 45°=40\sqrt{2}$

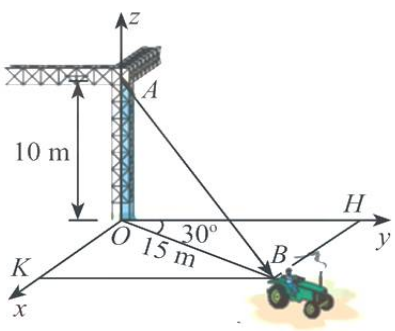
$OH=OM\cos\widehat{HOM}=80\cos 45°=40\sqrt{2}$

$OA=OH\cos\widehat{AOH}=40\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}=20\sqrt{2}$

$OB=AH=OH\sin\widehat{AOH}=40\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{6}$

Suy ra $\begin{cases}a=20\sqrt{2}\\b=20\sqrt{6}\\c=40\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow a\sqrt{2}+b\sqrt{6}+c\sqrt{2}=240$

Câu 72. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Biết $\overrightarrow{AB}=(x;y;z)$. Tính $x+\sqrt{3}y-z$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

Vì $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $OA=10$ nên $\overrightarrow{OA}=10\vec{k}$.

Xét ΔOBH vuông tại H, có $BH=OB.\sin 30°=15.\dfrac{1}{2}=7,5m$.

$OH=OB.\cos 30°=7,5\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}m$.

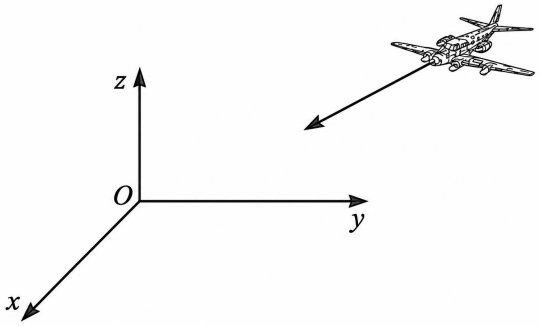
Vì $\overrightarrow{OH}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $OK=7,5$ nên $\overrightarrow{OH}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{15}{2}\vec{i}+\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}-10\vec{k}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{15\sqrt{3}}{2};-10\right)$.

Vậy $x+\sqrt{3}y-z=7,5+\sqrt{3}.\dfrac{15\sqrt{3}}{2}+10=40$.

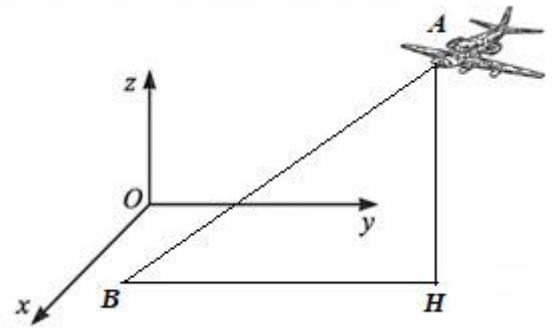
Câu 73. Trong không gian với một hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo kilômét) có mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng), một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm $(-50;30;10)$ đến vị trí hạ cánh là $(2;3;0)$. Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9,7

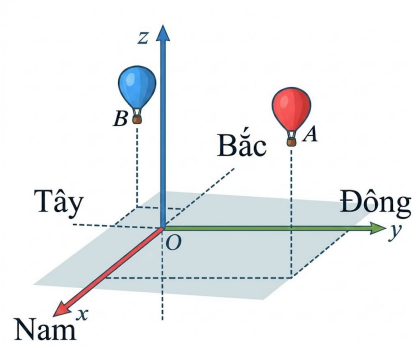


Đặt $A(-50;\ 30;\ 10)$, $B(2;\ 3;\ 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy), khi đó $H(-50;\ 30;\ 0)$ và $\widehat{ABH}$ là góc hợp bởi đường bay với mặt đất.

Xét tam giác AHB vuông tại H, ta có $\tan\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{10}{\sqrt{(-52)^2+27^2}}\Rightarrow\widehat{ABH}\approx 9,7°$.

Câu 74. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, khinh khí cầu thứ nhất bay đến điểm A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất một khoảng nhất định; khinh khí thứ hai bay đến điểm B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất một khoảng nhất định (hình minh họa bên dưới).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là kilômét). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của điểm A và B trên mặt đất. Gọi toạ độ vectơ $\overrightarrow{HK}=(a;b;c)$, khi đó giá trị của $2a-4b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 14

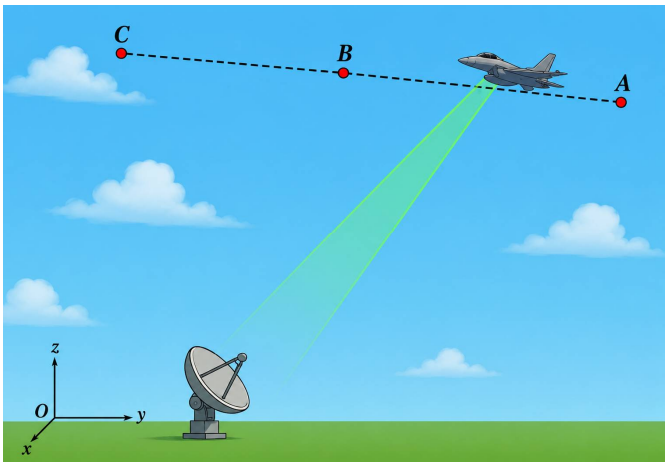
Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ trên ta có: tọa độ hai kinh khí cầu là $A(3;4;z_A),B\left(-1;-\dfrac{3}{2};z_B\right)$

Vì H,K lần lượt là hình chiếu của điểm A và B trên mặt đất ((Oxy)) nên $H(3;4;0),K\left(-1;-\dfrac{3}{2};0\right)$

Do đó $\overrightarrow{HK}=\left(-1-3;-\frac{3}{2}-4;0-0\right)=\left(-4;-\frac{11}{2};0\right)$

$\Rightarrow 2a-4b+c=14$

Câu 75. Trong không gian với một hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 24 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau $0,4$ giờ tiếp theo là điểm C như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{OC}=(x;y;z)$, khi đó giá trị của $x-y+2z$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 455

$0,4$ giờ $=$ 24 phút

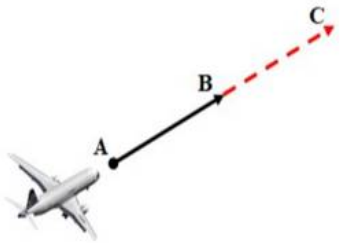
Do máy bay giữ nguyên tốc độ nên vận tốc của máy bay trên quãng đường AB và BC, đồng thời thời gian bay trên hai quãng đường là như nhau nên $AB=BC$.

Và máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai vectơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}140=2(x-940)\\50=2(y-550)\\2=2(z-9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=10\end{cases}\Rightarrow C(1010;575;10)\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(1010;575;10)$

Vậy $x-y+2z=455$

Câu 76. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 25 phút tiếp theo tiếp theo là điểm $C(x;y;z)$ như hình vẽ. Khi đó giá trị của $x-y+4z$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 516

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 25 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến C nên $AB=BC \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(140;50;1)$

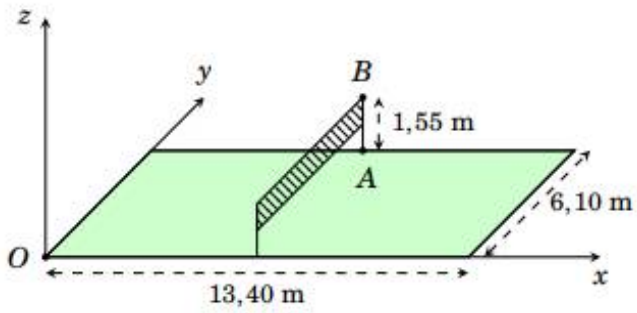
$\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$

Mà $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases}x-940=140\\y-550=50\\z-8=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1080\\y=600\\z=9\end{cases} \Rightarrow C(1080;600;9)$

Vậy tọa độ của máy bay trong 25 phút tiếp theo là $(1080;600;9)$.

$x-y+4z=516$

Câu 77. Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là (a,b,c). Tính giá trị biểu thức $T=a+b+100c$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 155

Gọi tọa độ điểm A là $(x_A;y_A;z_A)$.

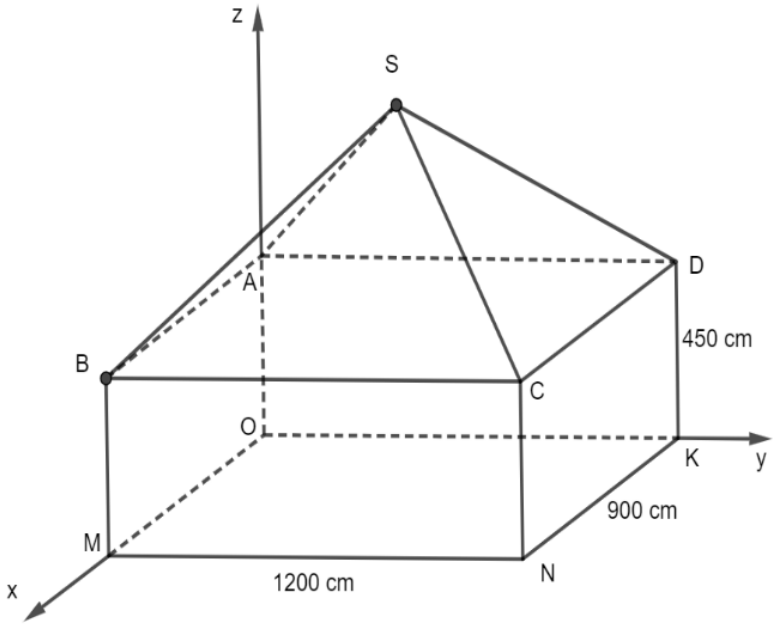
Vì chiều rộng của sân là $6,1m$ nên $x_A=6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là $6,7m$ nên $y_A=6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A=0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1;6,7;0)$.

Độ dài đoạn thẳng AB là $1,55m$ nên điểm B có tọa độ là $(6,1;6,7;1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB}=(6,1-6,1;6,7-6,7;1,55-0)$, tức là $\overrightarrow{AB}=(0;0;1,55)$.

$\Rightarrow T=a+b+100c=155$

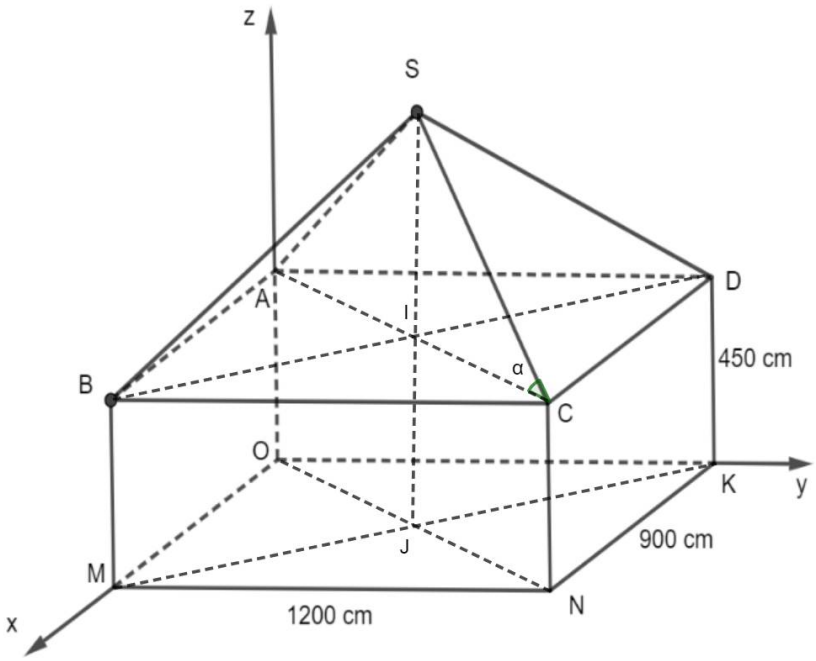
Câu 78. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài $1200cm$, chiều rộng $900cm$, chiều cao $450cm$. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và tạo với mặt đáy $ABCD$ một góc α với $\tan\alpha=\frac{1}{5}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo mét) sao cho M thuộc tia Ox, K thuộc tia Oy, A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a;b;c)$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 900



Gọi I, J lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD, OMNK$

Vì $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (Oxy)$.

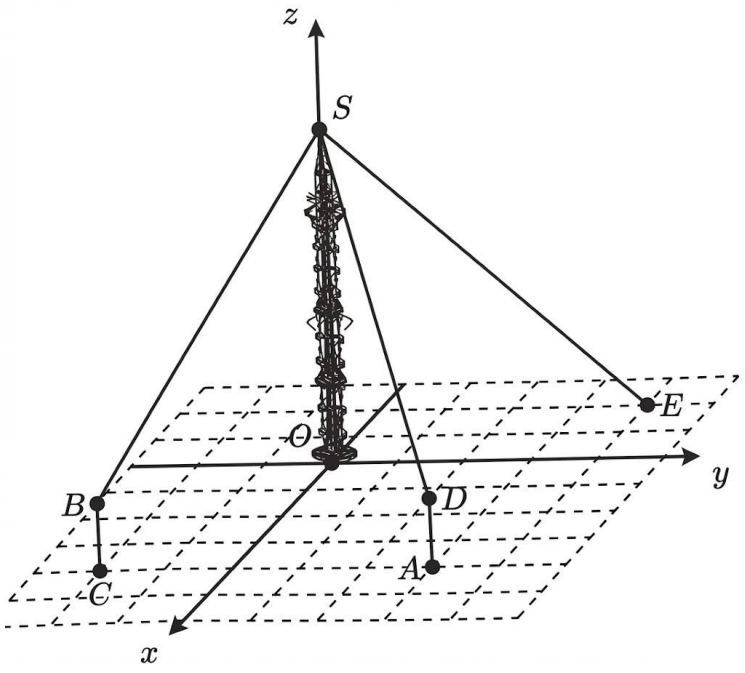
Theo giả thiết ta có $IJ \perp (Oxy) \Rightarrow S \in \text{IJ}$.

Lại có $\alpha = \widehat{SCI}$, $ON = AC = \sqrt{900^2 + 1200^2} = 1500 \Rightarrow CI = \frac{1}{2}AC = 750$.

Từ đó suy ra: $SI = CI.\tan\alpha = 750.\frac{1}{5} = 150 \Rightarrow SJ = SI + IJ = 150 + 450 = 600$.

Vậy $S(450;600;600) \Rightarrow 2a - b + c = 900$.

Câu 79. Một trụ anten viễn thông được lắp đặt trên nóc của một toà nhà cao tầng, để trụ anten được vững chắc và chống chọi được gió bão, các kỹ sư lắp đặt đã chằng trụ anten này bằng ba sợi dây thép đặc biệt không bị trùng đồng thời được căng thẳng bằng các thiết bị chuyên dụng. Do đặc điểm của mặt sàn, để đảm bảo yếu tố kỹ thuật, các kỹ sư đã xây thêm hai trụ BC, AD, mỗi trụ cao $1,5$ mét (tính từ mặt sàn và hai trụ BC, AD vuông góc với sàn), hai dây được móc vào hai đầu trụ, dây thứ ba được móc liền với mặt sàn tại vị trí điểm E, điểm móc dây trên thân anten (điểm S) cách mặt sàn $6,5$ mét. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục là 1 mét) với gốc toạ độ trùng với chân trụ anten, mặt sàn trùng với mặt phẳng (Oxy) (xem hình minh hoạ), biết $A(4;3;0)$, $C(4;-2;0)$, $E(-2;4;0)$. Biết rằng $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = (a;b;c)$, khi đó giá trị của biểu thức $a + b - c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19

Dựa vào hình vẽ, ta xác định được toạ độ các điểm: $S(0;0;6,5)$

Điểm C là hình chiếu của B trên sàn và $BC = 1,5$ nên $B(4;-2;1,5)$

Điểm A là hình chiếu của D trên sàn và $AD=1,5$ nên $D(4;3;1,5)$

Ta có:

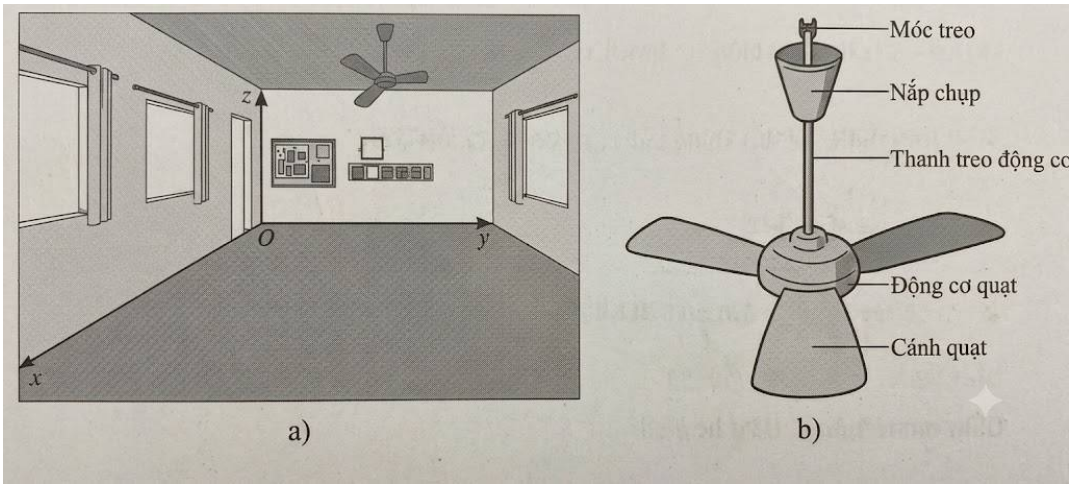
$\overrightarrow{SB}=(4;-2;-5)\Rightarrow \overrightarrow{SB}=4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$

$\overrightarrow{SD}=(4;3;-5)\Rightarrow \overrightarrow{SD}=4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$

Do đó $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}+4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}=8\vec{i}+\vec{j}-10\vec{k}\Rightarrow \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=(8;1;-10)$

Vậy: $a+b-c=19$

Câu 80. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $12m$,chiều rộng $6m$ và chiều cao $3,2m$. Một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học như hình sau:



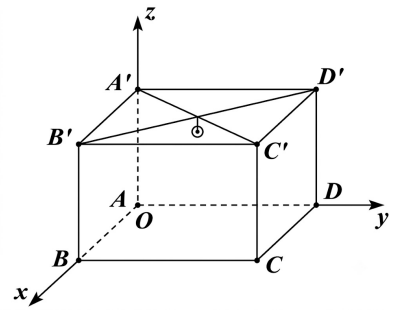
Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn như hình a (đơn vị đo lấy theo mét). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài $0,4m$. Giả sử tọa độ của động cơ chiếc quạt trần là $I(a;b;c)$, khi đó giá trị của $a+b+10c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37

Phòng học là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ và được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau



Khi đó, ta có : $AD=12m$, $AB=6m$, $AA'=3,2m$

Ta tính được $B'(6;0;3,2)$ và $D'(0;12;3,2)$

Gọi $M = A'C' \cap B'D'$, khi đó điểm chính giữa của trần nhà (nơi treo móc treo của chiếc quạt trần) là điểm M

Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

Ta có $\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow M\left(3;6;3,2\right)$

Do thanh treo động cơ của quạt có độ dài $0,8$ m nên độ cao của động cơ thấp hơn điểm chính giữa trần nhà là $0,4m$. Do đó toạ độ của động cơ là $I\left(3;6;2,8\right)$.

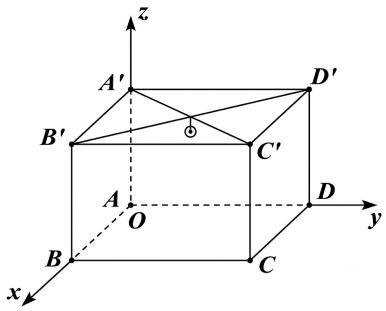
Suy ra $a+b+10c=37$.

Câu 81. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6m và chiều cao là 4 m. Một bóng đèn công suất lớn được treo trên trần nhà sao cho là điểm chính giữa của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy theo mét) có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn. Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ của điểm treo quạt. Tính giá trị $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12



Ta có $C'(6;10;4)$, $A'(0;0;4)$.

Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là trung điểm của $A'C'$. Do đó $\begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = 5 \\ z_I = 4 \end{cases}$

Vậy tọa độ của điểm treo bóng đèn $I(3;5;4)$

suy ra $a+b+c=12$.

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A\left(1;2;-3\right)$, $B\left(2;5;7\right)$, $C\left(-3;1;4\right)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $\left(a;b;c\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -12

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 - a \\ 3 = 1 - b \\ 10 = 4 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$

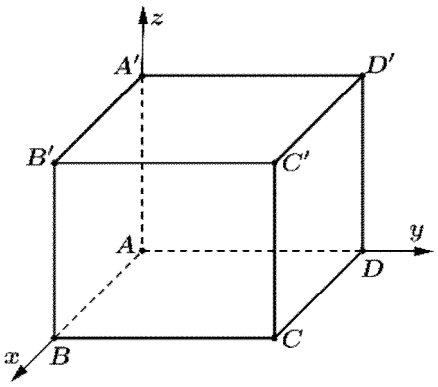
$\Rightarrow T = a+b+c = -12$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm B trùng với gốc tọa độ O và tọa độ các điểm $A(3;0;0)$, $D(3;1;0)$, $B'(0;0;5)$. Gọi tọa độ $C'(m;n;p)$, khi đó $m^2+n^2+p^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26



Vì tọa độ điểm $A(3;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{BA}=3\vec{i}$; tọa độ điểm $D(3;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{BD}=3\vec{i}+\vec{j}$

Mặt khác: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{i}=\vec{j}$

Vì tọa độ điểm $B'(0;0;5) \Rightarrow \overrightarrow{BB'}=5\vec{k}$

Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow C'(0;1;5)$.

Vậy $m^2+n^2+p^2=26$

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2)$, $B(x;y;z)$, $C(0;-2;1)$, $D(1;0;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

Tọa độ điểm B là $(x;y;z)$

$\overrightarrow{BA}=(-x;1-y;-2-z)$

$\overrightarrow{CD}=(1;2;-2)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

Suy ra $\begin{cases}-x=1\\1-y=2\\-2-z=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-1\\z=0\end{cases}$

$\Rightarrow T=x+y+z=-2$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz). Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxz) là $A'(1;-2;3) \Rightarrow T=a+b+c=2$

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;4)$. Gọi H là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) và K là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Biết $\overrightarrow{HK}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –9

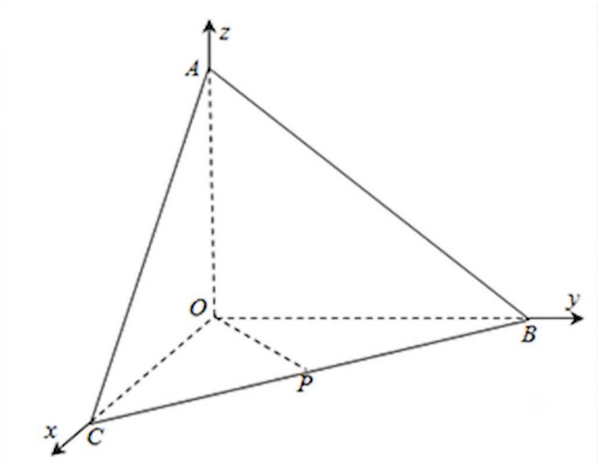
Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;1;4)$ qua mặt phẳng (Oyz) là $H(2;1;4)$.

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;1;4)$ trục Ox là $K(-2;0;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{HK}=(-4;-1;-4)$

$\Rightarrow a+b+c=-9$

Câu 87. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau $OA=3$ và $OB=OC=2$. Gọi P là trung điểm của BC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có các điểm A,B,C lần lượt thuộc các tia Oz,Oy,Ox như hình vẽ. Biết $\overrightarrow{AP}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

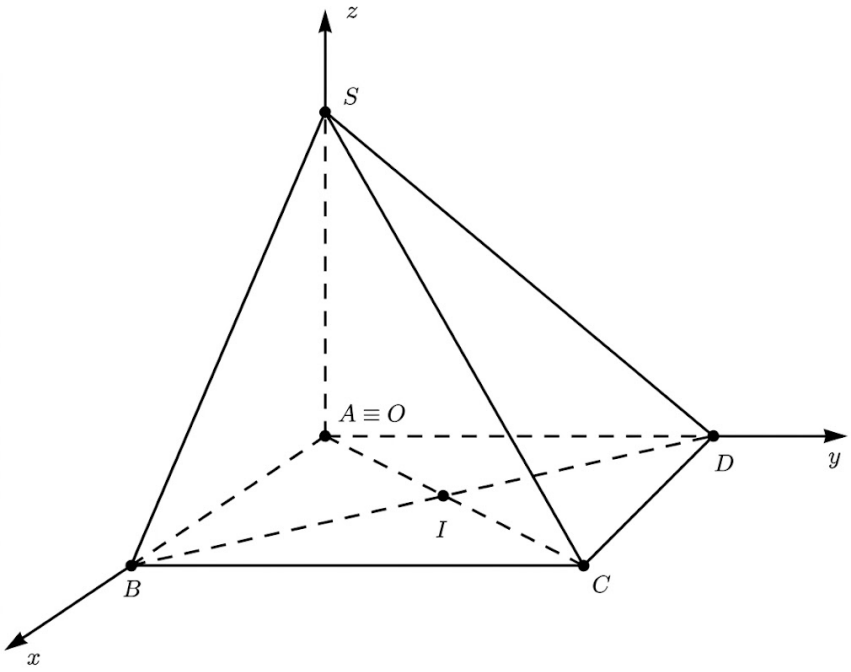
Đáp án: –4

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;3)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$

P là trung điểm của BC nên $P(1;1;0)$

Do đó $\overrightarrow{AP}=(1;1;-3)\Rightarrow 2026a-2027b+c=-4$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I và độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) như hình vẽ dưới. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì $\overrightarrow{SI}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2a+3b-4c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Gọi $I=AC\cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng 1.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ SI\perp BD\\ AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow((SBD);(ABCD))=(SI;AI)=\widehat{SIA}.$

Ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=1.$

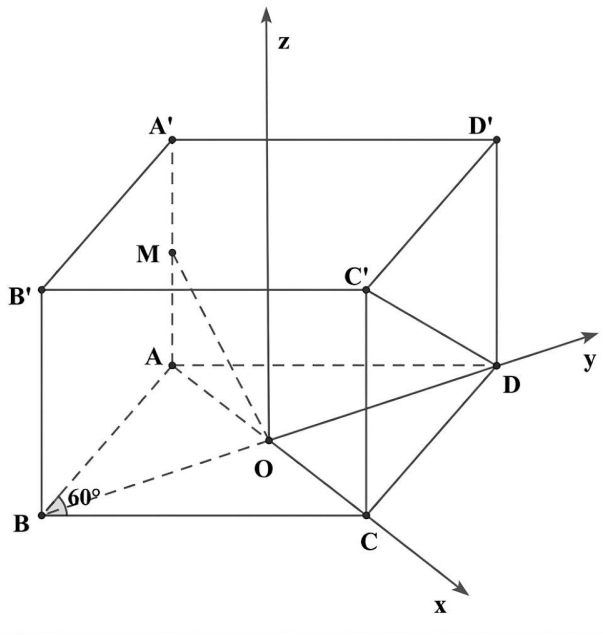
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;1)$.

I là tâm hình vuông $ABCD\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{SI}=\left(\dfrac{1}{2};0;-\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 2a+3b-4c=3$

Câu 89. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O có cạnh bằng 1 và $AA'=1$, $\widehat{ABC}=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có C,D lần lượt thuộc các tia Ox,Oy và trục Oz song song AA' như hình vẽ . Biết $\overrightarrow{MC'}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $2026a-2027b+2c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

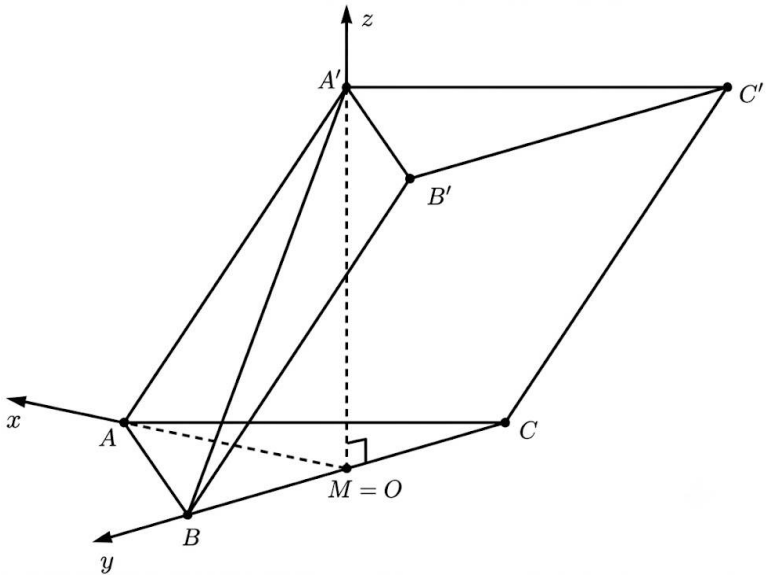
Đáp án: 2028

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Dễ dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ và $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MC'}=\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 2026a-2027b+2c=2028$.

Câu 90. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Góc giữa $A'B$ và (ABC) bằng $60°$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo được lấy 1 đơn vị) có $M\equiv O$ và các điểm A,B,A' lần lượt thuộc các tia Ox,Oy,Oz như hình vẽ như hình vẽ . Biết $\overrightarrow{AB'}=(a;b;c)$, khi đó giá trị biểu thức $a\sqrt{3}+2030b+\sqrt{3}c$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'BM} = 60°$.

Ta có $A'M = BM.\tan 60° = \sqrt{3}$; $AM = AB.\sin 60° = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Khi đó $A\left(\sqrt{3};0;0\right)$, $B\left(0;1;0\right)$, $C\left(0;-1;0\right)$, $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Gọi $B'\left(x_0;y_0;z_0\right)$, ta có $\overrightarrow{A'B'} = \left(x_0;y_0;z_0-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{3};1;0\right)$.

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \left(-2\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$.

$a\sqrt{3} + 2030b + \sqrt{3}c = 2027$

BÀI 8
BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x;y;z)$, $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

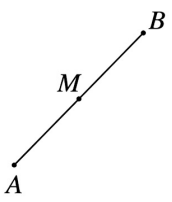
- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';\ y-y';\ z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)\ \ (k\in\mathbb{R})$

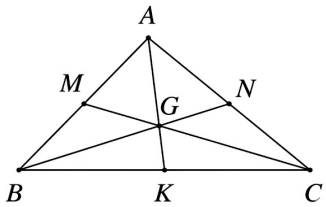
Nhận xét : $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \\ z=kz' \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$. Khi đó :

- Nếu $M(x_M;y_M;z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
- Nếu $G(x_G;y_G;z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$





2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định công thức: $\vec{a}.\vec{b}=x.x'+y.y'+z.z'$.

Nhận xét :

- Hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ vuông góc khi và chỉ khi $x.x'+y.y'+z.z'=0$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Nếu hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ khác $\vec{0}$ thì:

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

- Nếu $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ và $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$ thì $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x;y;z)$, $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';\ y-y';\ z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)\ \ (k\in\mathbb{R})$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$

Cách 2:

+ Nếu $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương .

+ Nếu $\dfrac{x}{x'}\neq\dfrac{y}{y'}$ hoặc $\dfrac{y}{y'}\neq\dfrac{z}{z'}$ hoặc $\dfrac{x}{x'}\neq\dfrac{z}{z'}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương .

- $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=k\vec{b}\\k>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\\k>0\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$
- $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=k\vec{b}\\k<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\\k<0\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$
- $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v}=\left(3;-\frac{5}{4};2\right)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$ và tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{a}$ sao cho $\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

d) Biết vectơ $\vec{b}$ thoả mãn $\vec{u}-2\vec{b}+3\vec{v}=\vec{0}$. Tính độ dài vectơ $\vec{b}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-1;5),\vec{b}=(0;3;-3),\vec{c}=(1;4;-2)$.

a) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương không?

b) Tính $\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|$.

c) Tính độ dài của vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{d}=2\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+3\vec{c}$.

d) Tìm toạ độ của $\vec{u}$ sao cho $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{u}=4\vec{c}$.

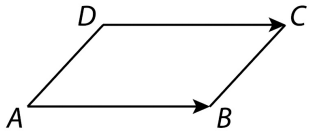
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

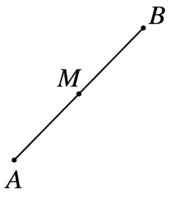
a) Cho vectơ $\vec{u}=(x;y;4)$, tìm $x;y$ để vectơ $\vec{u}$ cùng phương vectơ $\vec{a}$.

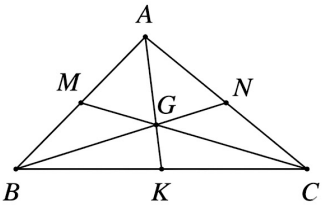
b) Cho vectơ $\vec{v}=(5;x;y)$, tìm $x;y$ để vectơ $\vec{v}$ ngược hướng vectơ $\vec{m}$, biết $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

DẠNG 2
TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ VECTƠ
TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ

- $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$
- $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}\quad (k\in\mathbb{R})$
- Ba điểm A,B,C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\neq k\,\overrightarrow{AC}\quad (k\in\mathbb{R})$
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.







- $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
- $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

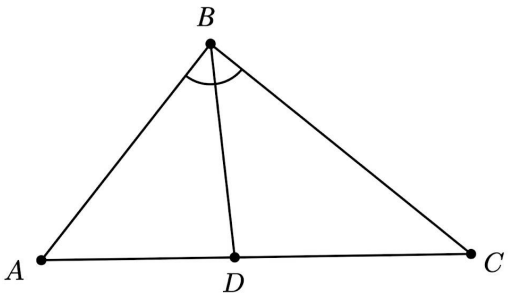
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

- $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow \overrightarrow{DA}=\frac{BA}{BC}\overrightarrow{DC}$$



Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$.

a) Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua trục Ox.

b) Tìm tọa độ điểm A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy).

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1), D(2;-3;4)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của AB.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm I của tứ diện $ABCD$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$.

a) Tính các độ dài AB, BC, CA.

b) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

c) Gọi M là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ điểm M đến điểm G.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;-1;4), B(3;5;-1), C(-1;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

d) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5;-3;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$

b) Tìm toạ độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

a) Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Ox sao cho $AQ = 3$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oxz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC.

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$, khi đó:

- $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\vec{a}.\vec{b}=x.x'+y.y'+z.z'$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

  + $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x.x'+y.y'+z.z'=0$

  + $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=(-2;3;-2)$ và $\vec{c}=(3;-2;1)$.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

b) Tìm $\vec{a}.\vec{b}$ và $(\vec{a},\vec{b})$.

c) Tính $(\vec{a}-2\vec{b})\vec{c}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{u}.\vec{v}=1$.

b) Tìm số thực m sao cho $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng $135°$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n),\vec{c}=(1;4;-2)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{a}\perp\vec{c}$.

b) Tìm số thực n sao cho $|\vec{b}|=|\vec{c}|$.

c) Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(7;3;3),B(1;2;4),C(2;3;5)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\cos\widehat{BAC}$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}=\left(1;-2;\frac{1}{4}\right)$, $\vec{b}=(-2;1;1)$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{c}$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{c}.\vec{b}$. Trong ba vectơ trên có các cặp vectơ nào vuông góc ?

d) Tính $\cos(\vec{a},\vec{b}),\cos(\vec{a},\vec{i})$

Bài 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a}=(2;5;4)$, $\vec{b}=(6;0;-3)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính độ dài của vectơ $\left|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right|$.

c) Tính $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

d) Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 11. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$, $\vec{c}=(2;-1;1)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính độ dài của vectơ $\left|\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right|$.

c) Tính $(\vec{a}-2\vec{b})\vec{c}$.

d) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{u}\perp\vec{a}$, $\vec{u}\perp\vec{b}$, $\vec{u}.\vec{c}=-6$.

Bài 12. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$, $\vec{c}=(3;2;-4)$.

a) Tính $(\vec{a}+3\vec{b})\vec{b}$.

b) Tính $(2\vec{a}-5\vec{b})\vec{c}$.

c) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{a}.\vec{u}=-5,\vec{u}.\vec{b}=-11,\vec{u}.\vec{c}=20$.

Bài 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;-1;-3),\vec{b}=(m-1;3;-2),\vec{c}=(1;2n-1;-1)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{a}\perp\vec{b}$.

b) Tìm tất cả giá trị của n để góc giữa $\vec{a}$, $\vec{c}$ bằng 45°.

c) Tìm m,n để các vectơ $\vec{b},\vec{c}$ cùng phương.

Bài 14. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;-1)$.

a) Tính $(\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

b) Tìm m để $\vec{u}=m\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=3\vec{a}+2m\vec{b}$ cùng phương.

Bài 15. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-7;9)$, $\vec{b}=(3;-6;1)$, $\vec{c}=(2;1;-7)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Biểu diễn vectơ $\vec{u}=(-4;13;-6)$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Bài 16. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-1;1),\ \vec{b}=(0;1;2),\ \vec{c}=(4;2;3)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}=\vec{0}$

b) Trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, có các cặp véctơ nào vuông góc ?

c) Biểu diễn vectơ $\vec{u}=(1;2;-2)$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Bài 17. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a}=(2;5;4),\ \vec{b}=(6;0;-3),\ \vec{c}=(3;2;-1)$.

a) Tính $(2\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

b) Xác định các số thực m,n để $m\vec{a}-3n\vec{b}=\vec{c}$.

Bài 18. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ : $\vec{a}=(2;-1;3),\ \vec{b}=(1;-3;2),\ \vec{c}=(3;2;-4)$.

a) Tính $(3\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{c})$.

b) Xác định các số thực m,n để $\frac{m}{3}\vec{a}-n\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$.

Bài 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4;2;3),B(-2;1;-1),C(3;8;7)$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$

f) Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

g) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Bài 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-4;7),B(-5;3;-2),C(1;2;-3)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành ΔABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

c) Tìm tọa độ trọng tâm của ΔABC.

d) Tính góc $\widehat{ABC}$.

e) Tính độ dài đường cao BH của ΔABC

Bài 21. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1;-1;1),\ B(2;-3;2),\ C(4;-2;2),\ D(3;0;1),\ E(1;2;3)$

a) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính góc $\widehat{ABC}$.

c) Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm AB

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$, $B(3;7;4)$, $C(x;y;6)$.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm $x;y$ để ba điểm A,B,C thẳng hàng.

c) Tìm $x;y$ để ba điểm A,B,C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$.

a) Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Oy sao cho $BQ=2\sqrt{6}$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oyz sao cho ba điểm A,B,N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$.

Bài 24. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4;-1;2)$; $B(7;3;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm $M\in Ox$ và cách đều hai điểm A,B.

b) Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A.

Bài 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-3),B(0;3;7),C(2;5;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành tam giác ABC.

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tính góc $\widehat{ABC}$.

e) Tính diện tích ΔABC. Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC.

Bài 26. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $(1;2;-1)$, $B(-1;1;3),C(-1;-1;2),D'(2;-2;-3)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta AA'C$.

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB'}=\overrightarrow{MD}$

Bài 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(0;2;2),B(0;1;2),C(-1;1;1),C'(1;-2;-1)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta B'DD'$.

Bài 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $B(2;0;0),C(2;3;0),D(0;3;0),A'(0;0;5)$

a) Chứng minh hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

b) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật chữ nhật.

c) Tính $\widehat{BA'D}$ của tam giác $A'BD$.

DẠNG 4
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) (hoặc $M \in (Oyz)$ hoặc $M \in (Oxz)$) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

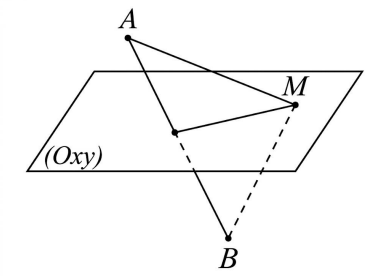
Phương pháp giải

Ta xét hai trường hợp sau:

• **Trường hợp 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (Oxy).

Ta có: $MA+MB \geq AB$ (bất đẳng thức tam giác)

Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \in \mathbb{R})$, từ đây ta tìm được điểm M.

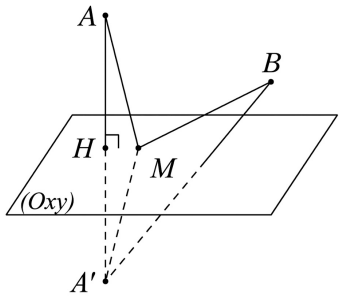


• **Trường hợp 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (Oxy).

Gọi A' đối xứng với A qua (Oxy), suy ra $MA = MA'$.

Khi đó $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$ (bất đẳng thức tam giác)

Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A', M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \in \mathbb{R})$, từ đây ta tìm được điểm M.



Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc sao cho $T = \left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2 ... \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải: Tâm tỉ cự

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}\qquad\left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\\&\Rightarrow T=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right|\left|\overrightarrow{MI}\right|\end{aligned}$$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}\Leftrightarrow M\equiv I$

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,A_2,...,A_n$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1;\alpha_2...\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$).

Chú ý:

$T_{\min}\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

$T_{\max}\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

Phương pháp giải:

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

+ Ta có:

$$\begin{aligned}T&=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MA_n}\right)^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)MI^2+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2+2\overrightarrow{MI}\left(\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2\qquad\left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$$

+ Vì $\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(2026;2027;-2028\right)$.

a) Tìm điểm $M_1 \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_1 ngắn nhất.

b) Tìm điểm $M_2 \in \left(Oxy\right)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_2 ngắn nhất.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(1;2;-3\right), B\left(2;1;4\right)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(2;-1;2\right), B\left(-3;-2;1\right)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(-1;2;-3\right), B\left(0;2;1\right), C\left(-1;2;1\right)$.

a) Tìm $M \in Oy$ sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho điểm $M\left(2;1;a\right)$. Tìm a sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm điểm M sao cho biểu thức $T=MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(4;-2;6\right)$, $B\left(2;4;2\right)$. Lấy điểm $M\left(a;b;c\right)$ sao cho biểu thức $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(3;1;1\right)$, $B\left(7;3;9\right)$ và $C\left(2;2;2\right)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ trên $\left(Oxz\right)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=6a+12b-18c$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A\left(2;-3;7\right)$, $B\left(0;4;1\right)$, $C\left(3;0;5\right)$ và $D\left(3;3;3\right)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;2;3\right), B\left(0;1;4\right), C\left(2;-1;-2\right)$. Lấy điểm $M\left(a;b;c\right)$ sao cho biểu thức $T=MA^2-MB^2-4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T=2a+b+3c$

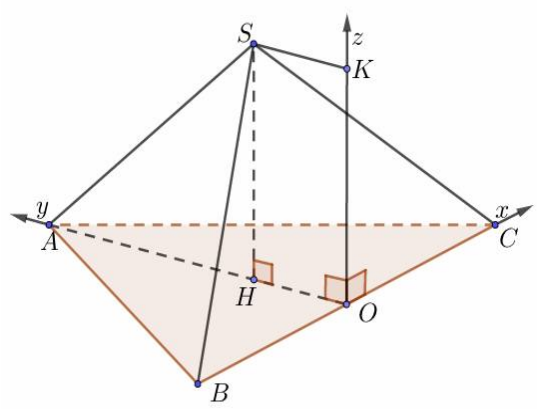
Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(3;1;1\right)$, $B\left(7;3;9\right)$ và $C\left(2;2;2\right)$. Lấy điểm $M\left(a;b;c\right)$ sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2-3MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T=2a+b+3c$

DẠNG 5
ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

I. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

1. Hình chóp đều

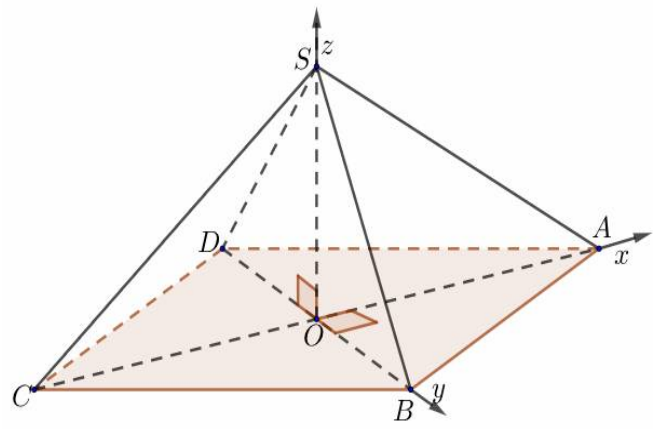
a. Hình chóp tam giác đều và tứ diện đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = a$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ , khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right), S(0;OH;OK).$$

b. Hình chóp tứ giác đều

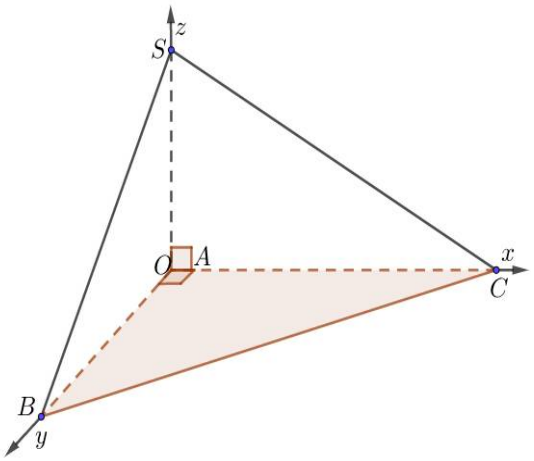


Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO).$$

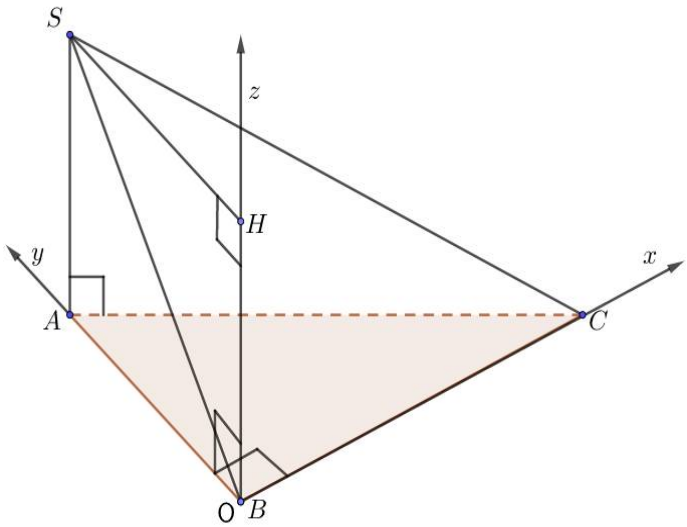
2. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

a. Đáy là tam giác vuông tại A



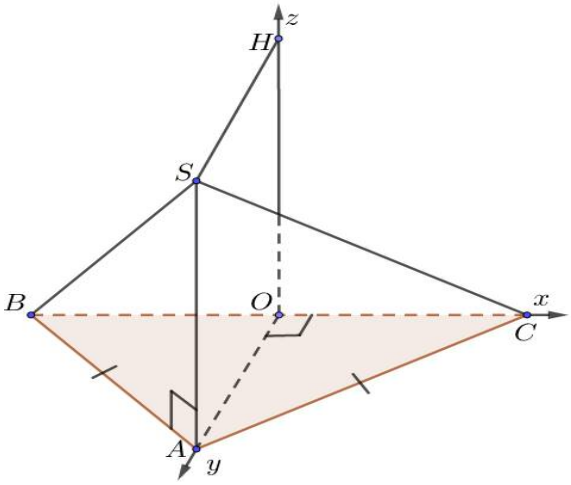
Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0), B(0;OB;0), C(AC;0;0), S(0;0;SA)$.

b. Đáy là tam giác vuông tại B



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $B \equiv O(0;0;0), A(0;AB;0), C(BC;0;0), S(0;AB;SA)$.

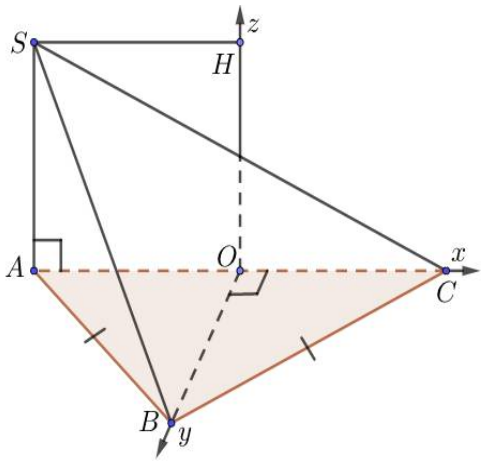
c. Đáy là tam giác cân tại A



Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0), C(OC;0;0), S(0;OA;OH).$$

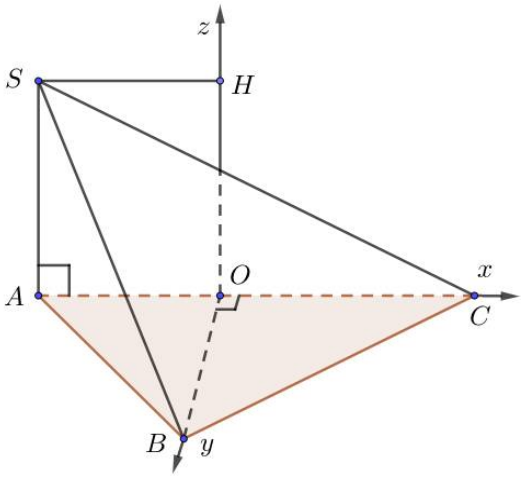
d. Đáy là tam giác cân tại B



Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

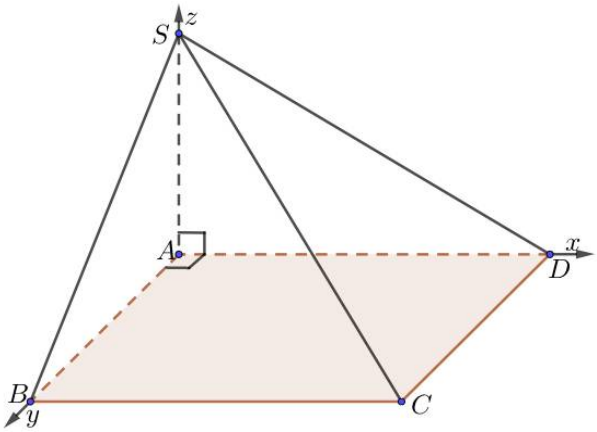
e. Đáy là tam giác thường



Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

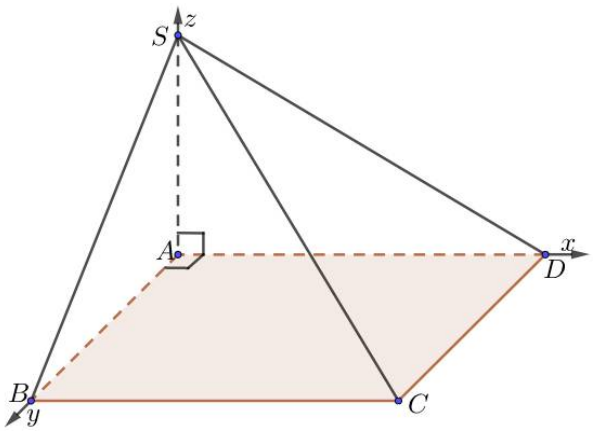
f. Đáy là hình vuông



Chọn hệ trục như hình vẽ, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;a;0), C(1;a;0), D(a;0;0), S(0;0;SA),$$

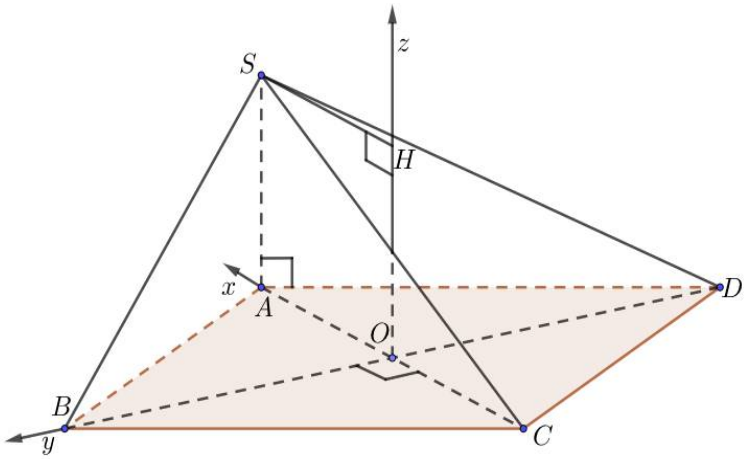
g. Đáy là hình chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0),\ D(AD;0;0),\ S(0;0;SA),$$

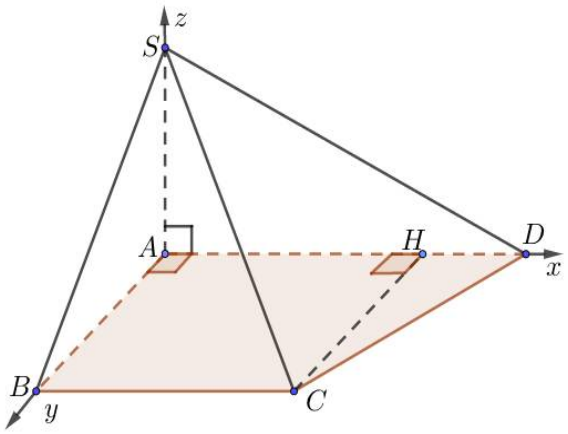
h. Đáy là hình thoi



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(0;OB;0), C(-OC;0;0), D(0;-OD;0),\ S(OA;0;OH)$$

m. Đáy là hình thang vuông

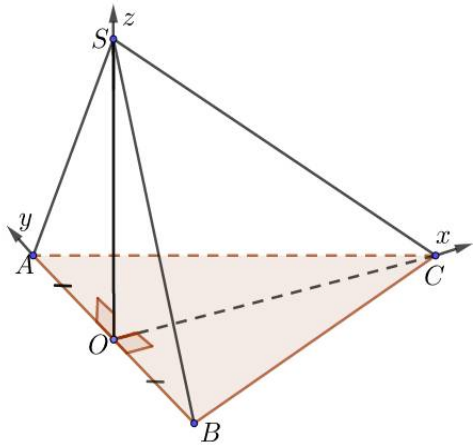


Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AH;AB;0), D(AD;0;0),\ S(0;0;SA).$$

3. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

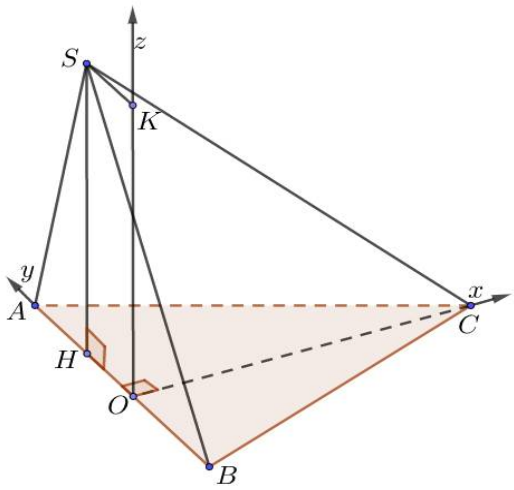
a. Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;0;SO)$$

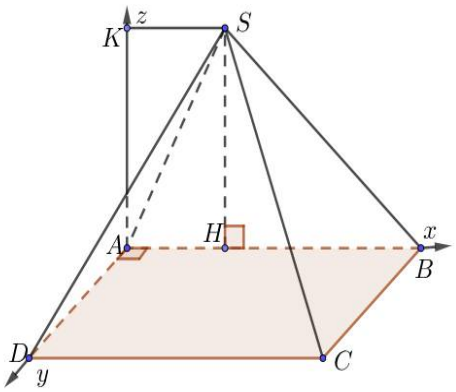
b. Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;OH;OK)$$

c. Đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật



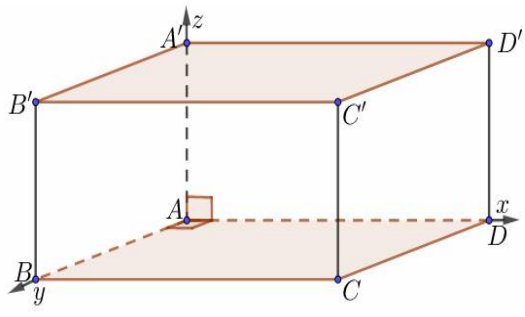
Vẽ đường cao SH trong SAB, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S(AH;0;AK)$$

II. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

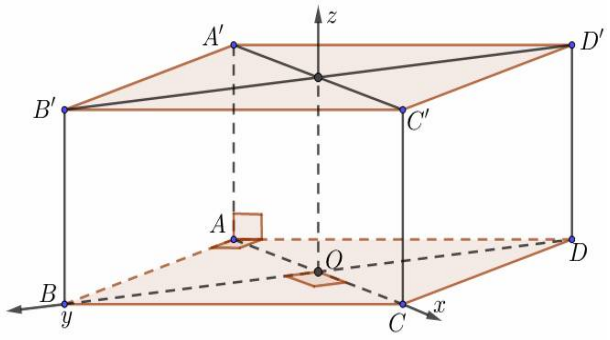
1. Lăng trụ đứng

a. Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

b. Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

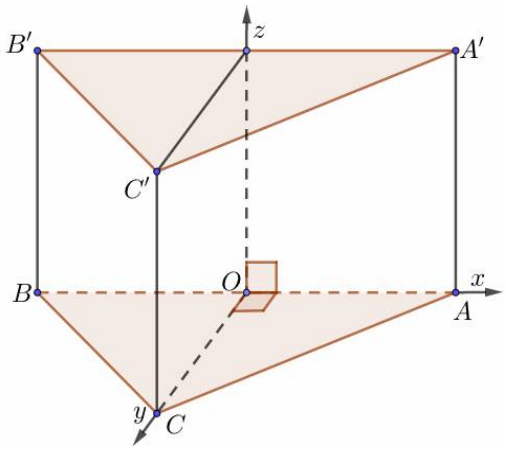


Gọi O là tâm hình thoi đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(-OA;0;0),\ B(0;OB;0),\ C(OC;0;0),\ D(0;-OD;0),$$

$$A'(-OA;0;AA'),\ B'(0;OB;AA'),\ C'(OC;0;CC'),\ D'(0;-OD;DD')$$

c. Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân

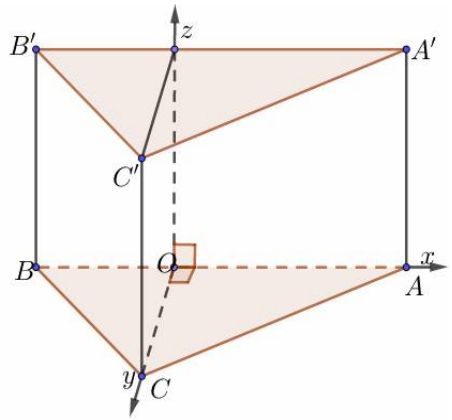


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A\left(\frac{AB}{2};0;0\right),\ B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right),\ C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'),\ B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right),\ C'(0;OC;CC').$$

c. Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

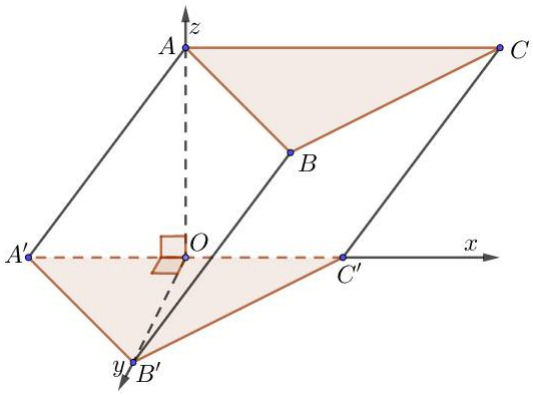


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

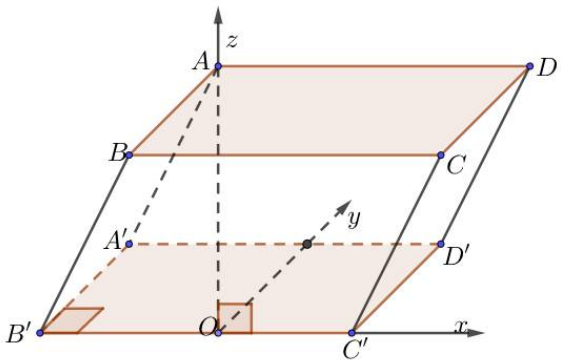
2. Lăng trụ xiên

a. Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

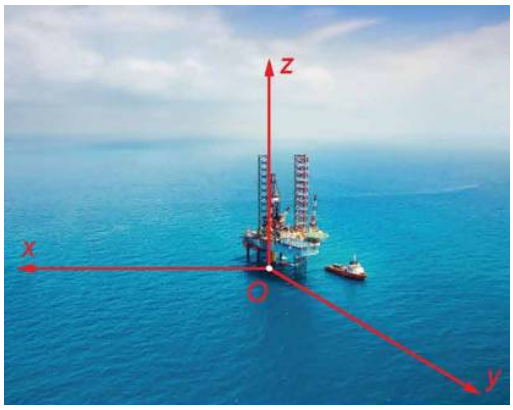
b. Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$.

Bài 1. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$. Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F}=(2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét, tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này?

Bài 2. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là $30\,km$. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Bài 3. Rađa của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời như hình vẽ bên dưới, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét.

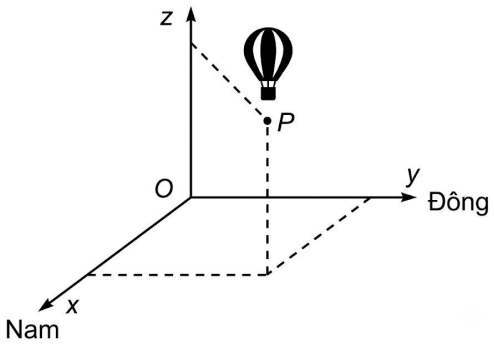


Hỏi rađa trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200;400;200)$ đối với hệ trục tọa độ không?

Bài 4. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau 3 giờ bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).





a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

c) Biết khinh khí cầu bay theo một đường thẳng với vận tốc không đổi, tính vận tốc đó.

Bài 5. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát $2\,km$ về phía Nam và $1\,km$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\,km$. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát $1\,km$ về phía Bắc và $1,5\,km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\,km$.



a) Tính tổng khoảng cách từ vị trí xuất phát đến hai chiếc khinh khí cầu A và B.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu.

c) Cùng thời điểm hai chiếc khinh khí cầu A và B cách điểm xuất phát như trên, bạn Trúc Linh đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí bạn Trúc Linh đứng có tổng khoảng cách đến hai kinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét?

Các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai của kilômét).

Bài 6. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau 1 giờ bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai sau 1 giờ bay (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômét).

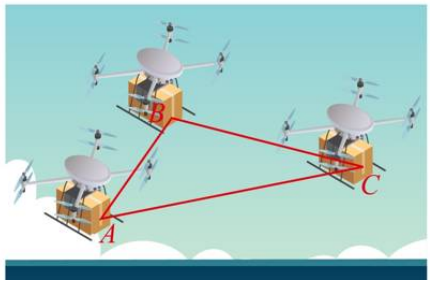
b) Sau 1 giờ bay, xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômét).

c) Sau 1 giờ bay, tại thời điểm này, trên mặt đất có bạn Minh Hiền đang đứng ở vị trí điểm M và có toạ độ $M\left(x;y;z\right)$. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí bạn Minh Hiền đứng có tổng khoảng cách đến chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai là nhỏ nhất. Tính giá trị $x-2y-3z$.

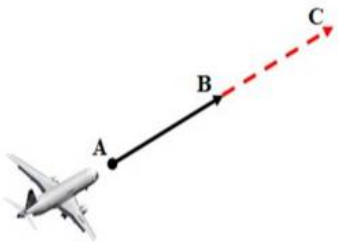
Bài 7. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A,B,C đang có toạ độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9),C(9;11;4)$.

a) Tính các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

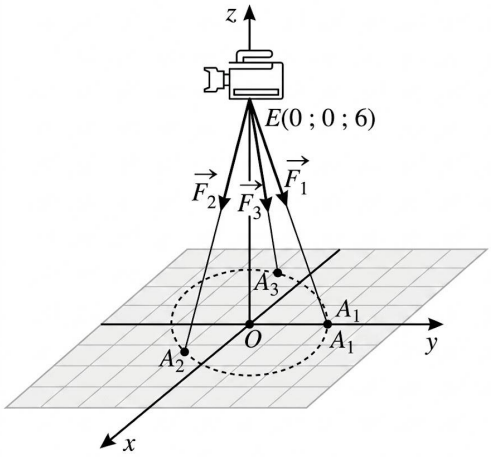
b) Tính góc $\widehat{BAC}$.



Bài 8. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 25 phút tiếp theo như thế nào?



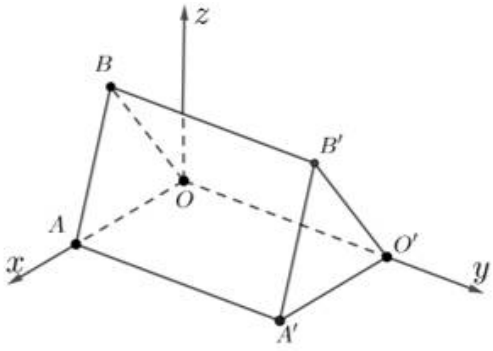
Bài 9. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là $300\,N$. Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ khi đó tích vô hướng của $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}$ bằng?



Bài 10. Những căn nhà gỗ trong hình a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình b với OAB là tam giác cân tại B. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như hình b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.

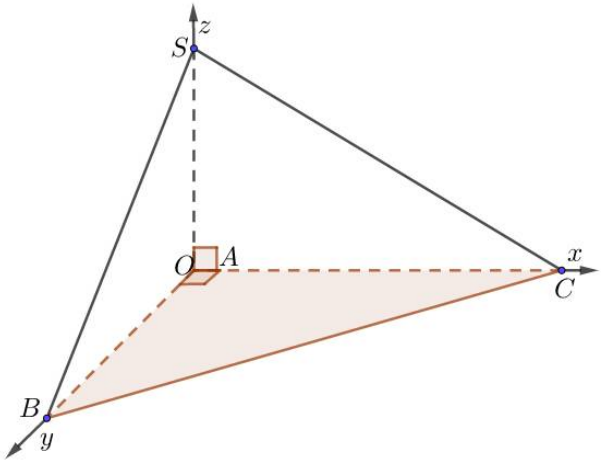


Hình 1



Hình 2

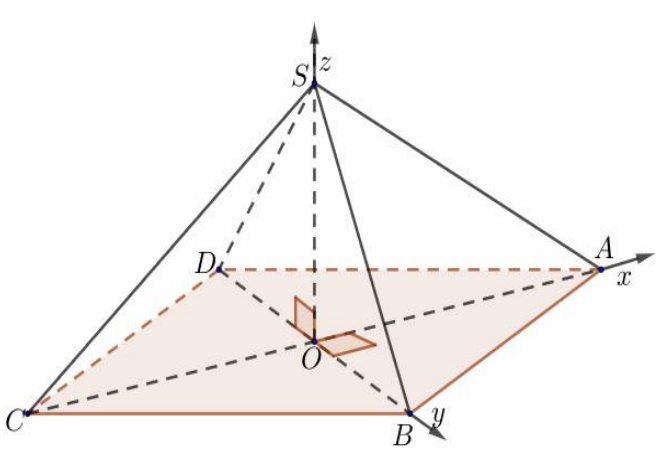
Bài 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, . . đôi một vuông góc và $AS = 2025; AB = AC = 2026$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AC, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{SG}$.

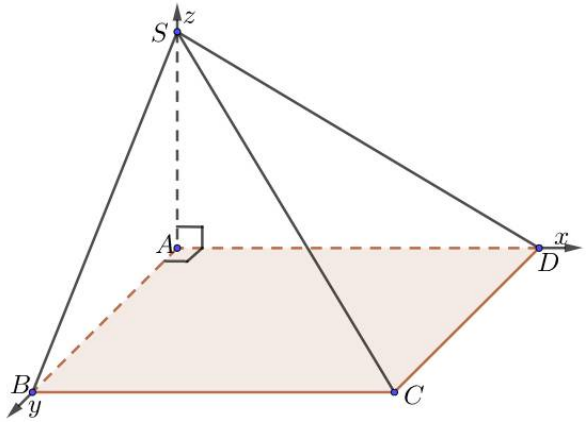
Bài 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=\sqrt{2}$, $SA=\sqrt{10}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm hình vuông $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB

b) Tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}$.

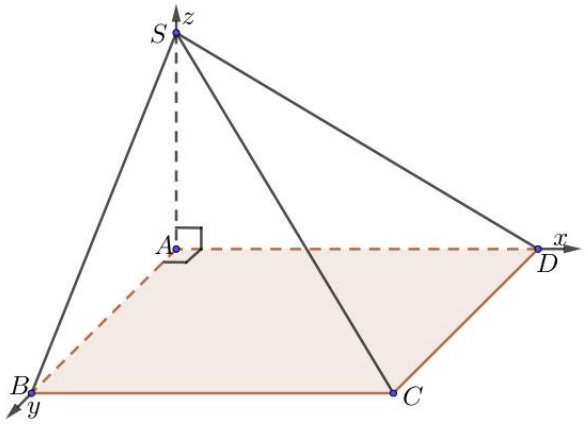
Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ tâm hình vuông $ABCD$.

b) Tính $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)$.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=3, AD=4$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết mặt bên (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



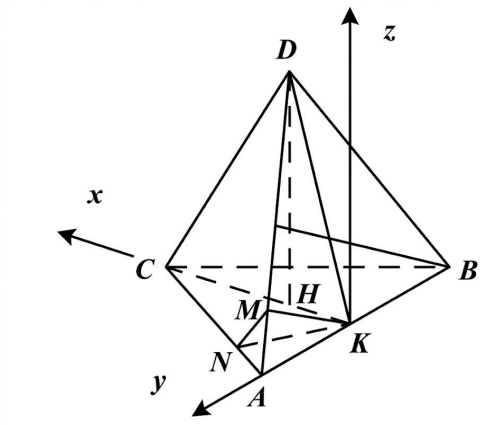
a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.

b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác BCD.

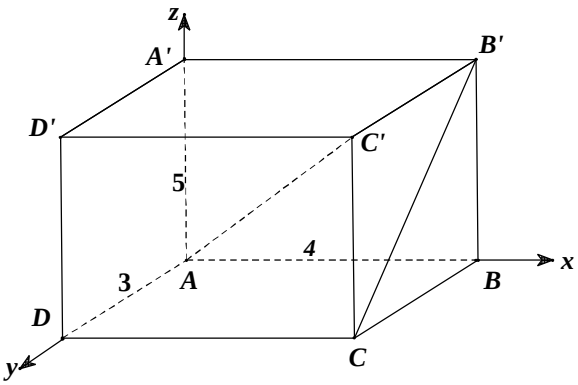
c) Tính $\left(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AC}\right)$.

d) Tìm tọa độ điểm M trên đoạn BD sao cho $BM=\frac{2}{3}MD$.

Bài 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và H là tâm của tam giác ABC. Gọi K là trung điểm AB, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng K và các tia Ox, Oy lần lượt trùng với các tia KC, KA và tia Oz vuông góc mặt phẳng (ABC) tại K như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm M, N theo a.



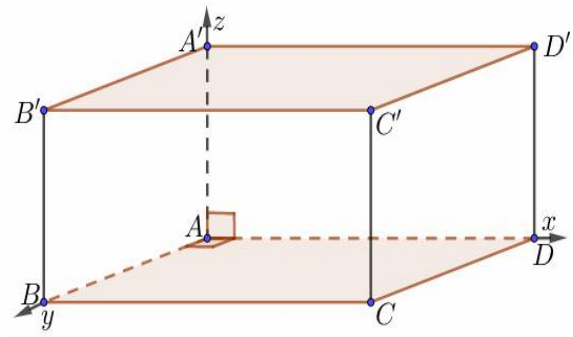
Bài 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính độ dài BG.

Bài 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính $\left(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{D'C}\right)$.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$; $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $k\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.
B. $|\vec{a}|=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.
C. $\vec{a}-\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.
D. $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$. **C.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$. **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-4;0)$ và $\vec{v}=(-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u}+3\vec{v}$ có tọa độ là

A. $(-2;-10;3)$. **B.** $(-2;-6;3)$. **C.** $(-4;-8;4)$. **D.** $(-2;-10;-3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;3;-2)$ và $\vec{v}=(2;1;-1)$. Toạ độ vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là:

A. $(3;4;-3)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(-1;2;-1)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc tơ $\vec{a}(1;2;3),\vec{b}(2;2;-1),\vec{c}(4;0;-4)$. Toạ độ của véc tơ $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(7;0;-4)$. **B.** $\vec{d}(-7;0;-4)$. **C.** $\vec{d}(7;0;4)$. **D.** $\vec{d}(-7;0;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2),\vec{b}=(2;1;-3),\vec{c}=(0;3;-2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, tổng $x+y+z$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -2.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

A. $\vec{a}=(4;1;-1)$. **B.** $\vec{a}=(3;1;-4)$. **C.** $\vec{a}=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Vectơ $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;7;2)$. **B.** $(1;5;2)$. **C.** $(3;7;2)$. **D.** $(1;7;3)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các vecto $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Tọa độ của vectơ $\vec{w}$ là

A. $\vec{w}=(3;-1;2)$. **B.** $\vec{w}=(3;1;-2)$. **C.** $\vec{w}=(3;1;2)$. **D.** $\vec{w}=(3;-1;-2)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2;2;0),\vec{b}(2;2;0),\vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $m=7$; $n=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=8$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=6$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=0$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-6$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}=1$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $\left|\vec{u}\right|=2$, $\left|\vec{v}\right|=5$. Tính $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

A. $\sqrt{19}$. **B.** -5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{39}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.

Câu 23. Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $120°$. **B.** $45°$. **C.** $135°$. **D.** $60°$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;\text{m})$. Tìm m để $(\vec{a};\vec{b})=90°$.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=\sqrt{5}$ **B.** $OA=5$ **C.** $OA=3$ **D.** $OA=9$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;2;2)$. **B.** $(2;1;1)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

A. $(3;6;3)$. **B.** $(3;6;-3)$. **C.** $(3;-3;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2), B(2;1;-3)$, $C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

A. $G(2;-1;-1)$. **B.** $G(2;-2;-1)$. **C.** $G(0;-1;-1)$. **D.** $G(6;-3;-3)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm. $A(-1;-2;3)$ $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3);B(-1;2;1);C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. -6. **B.** -14. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, ba điểm $M(1;0;2)$, $N(2;-3;0)$ và $P(2;3;2)$. Chu vi của tam giác MNP là:

A. $\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{40}$. **B.** $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$. **C.** 64. **D.** $\sqrt{20}+\sqrt{22}+\sqrt{24}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(5;3;-1), B(2;3;-4)$, $C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9-2\sqrt{6}$. **B.** $9-3\sqrt{6}$. **C.** $9+3\sqrt{6}$. **D.** $9+2\sqrt{6}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(1;-1;2), C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

A. $M(5;5;0)$. **B.** $M(-2;-6;4)$. **C.** $M(-2;6;-4)$. **D.** $M(2;-6;4)$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;1;-2)$, $B(-1;-1;-1), C(-3;1;1)$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\sqrt{57}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{33}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $S(1,2,3);A(2,2,3);B(1,3,3);C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5;9;13)$. **B.** $\left(\frac{5}{3};3;\frac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{4};\frac{9}{4};\frac{13}{4}\right)$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Tìm điểm E thỏa năm đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$.

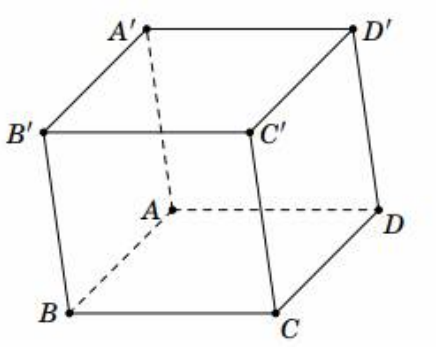
A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD=BC$.

A. $D(6;0;0), D(12;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

C. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ **D.** $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$.



Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ với $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;2;0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz), điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C.

A. $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\frac{-3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{-3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;3;2), B(1;0;1), C(5;-3;2)$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2m$. Giá trị của m là

A. $m=-9$. **B.** $m=9$. **C.** $m=18$. **D.** $m=18$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'(-1;0;0)$. **B.** $M'(1;0;0)$. **C.** $M'\left(1;0;\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'\left(1;-\sqrt{2};0\right)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\sqrt{2};0;\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(0;-\sqrt{2};0\right)$. **B.** $M'\left(\sqrt{2};0;0\right)$. **C.** $M'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'\left(0;0;0\right)$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M\left(1;2;-\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$. **B.** $M'\left(0;2;-\sqrt{3}\right)$. **C.** $M'\left(0;0;-\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$. Tìm điểm $A'\in(Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

A. $A'(-1;1;0)$. **B.** $A'(1;1;0)$. **C.** $A'(2;2;0)$. **D.** $A'(2;-1;2)$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5}\right)$. Tìm điểm $M'\in(Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5}\right)$. **B.** $M'\left(1;1-\sqrt{2};0\right)$.

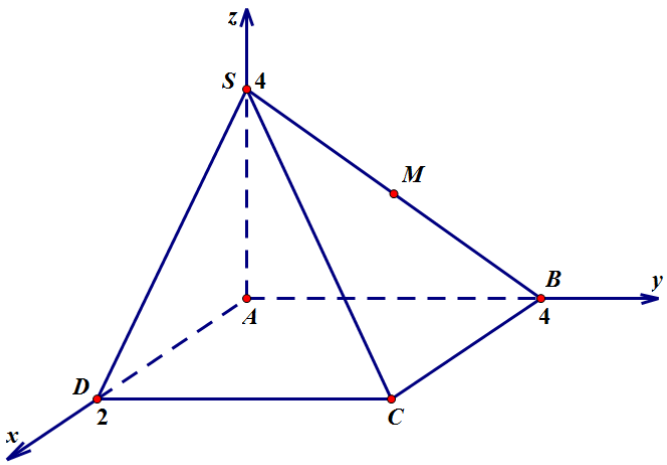
C. $M'\left(1;0;2+\sqrt{5}\right)$. **D.** $M'\left(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5}\right)$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1+\sqrt{2};2;1-\sqrt{2}\right)$. Tìm điểm $M'\in(Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1+\sqrt{2};0;1-\sqrt{2}\right)$. **B.** $M'\left(0;2;1-\sqrt{2}\right)$.

C. $M'\left(0;-2;1-\sqrt{2}\right)$. **D.** $M'\left(0;-2;1+\sqrt{2}\right)$.

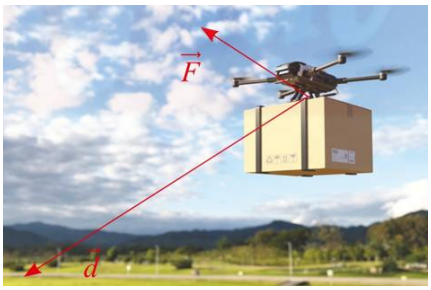
Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD.



Độ dài MG là:

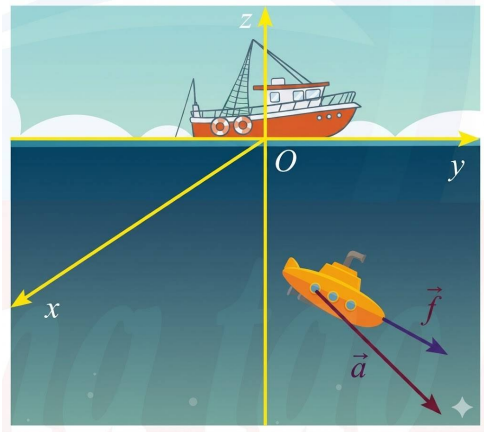
A. $MG=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MG=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $MG=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MG=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 55. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}=(20;30;-10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (hình vẽ) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d}=(150;200;100)$ (đơn vị: m).



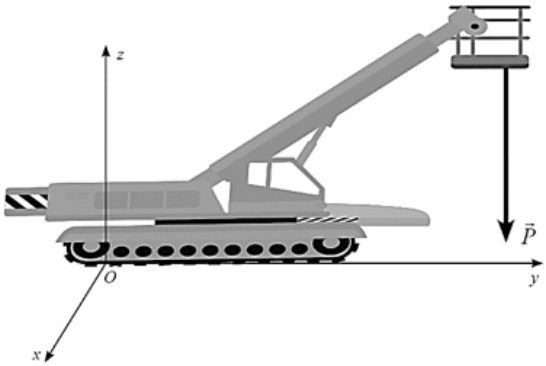
A. $3200J$. **B.** $8000J$. **C.** $10000J$. **D.** $5800J$.

Câu 56. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$. Một thiết bị thăm dò đáy biển (hình vẽ) được đẩy bởi một lực $\vec{f}=(5;4;-2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a}=(70;20;-40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



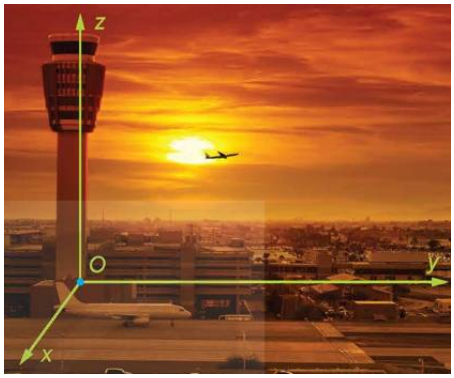
A. $510J$. **B.** $350J$. **C.** $700J$. **D.** $450J$.

Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$. Một robot cắt dây đã di chuyển một lực $\vec{P}=(0;0;-150)$ (đơn vị: N) theo độ dời $\vec{d}=(0;-8;-10)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{P}$ khi thực hiện độ dời nói trên.



A. $3000J$. **B.** $2500J$. **C.** $2000J$. **D.** $1500J$.

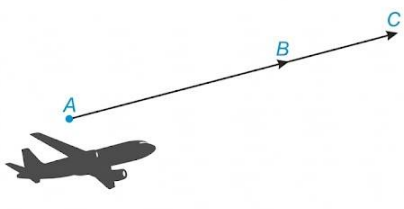
Câu 58. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía Nam với tốc độ không đổi là $890\,km/h$ trong 45 phút. Xác định toạ độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong 45 phút đó đối với hệ toạ độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



A. $(0;890;0)$. **B.** $(0;667,5;0)$. **C.** $(0;0;667,5)$. **D.** $(667,5;0;667,5)$.

Câu 59. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 40 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 20 phút bằng bao nhiêu?





A. $(910;575;8,5)$ **B.** $(1010;550;17)$ **C.** $(1010;575;17)$ **D.** $(1010;575;8,5)$

Câu 60. Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a}=(300;200;400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.



Tính tốc độ của máy bay B (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $1414\,km/h$ **B.** $1515\,km/h$ **C.** $1717\,km/h$ **D.** $1616\,km/h$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 61. Trong không gian *Oxyz*, cho vectơ $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$ và $\vec{c}=(-1;1;2)$

a) $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

b) $|\vec{b}|=\sqrt{3}$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng.

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

Câu 62. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$.

a) $|\vec{a}|=\sqrt{14}$

b) $\vec{a}.\vec{b}=19$

c) $\cos(\vec{a}.\vec{c})=\dfrac{2\sqrt{91}}{91}$

d) $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

Câu 63. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$

c) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})=-23$

d) $|3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}|=\sqrt{929}$

Câu 64. Trong không gian *Oxyz*, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(-4;-2;6)$, $\vec{c}=(m-1;2;0)$

a) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.

b) $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$.

c) $\vec{a}.\vec{b}=0$.

d) Nếu $\vec{b}\perp\vec{c}$ thì $m=1$

Câu 65. Trong không gian *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$.

a) $|\vec{b}|=4$

b) $\vec{a}.\vec{b}=17$

c) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$

d) Biết vectơ $\vec{c}=(x;y;1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$. Khi đó $x+y=\dfrac{6}{5}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(3;0;1),\vec{b}=(1;-1;-2),\vec{c}=(1;7;-3)$.

a) $|\vec{c}|=\sqrt{59}$.

b) $\vec{a}.\vec{b}=-1$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

d) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ lớn hơn $90°$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2),B(1;0;3),C(0;2;-2)$.

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

d) $\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

Câu 68. Trong mặt phẳng $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{2};4\right)$.

b) Tọa độ vectơ là $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

c) $a+b+c=-2$

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{14\sqrt{57}}{57}$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$

b) Lấy điểm $N\in Oy$. Độ dài đoạn thẳng NA ngắn nhất bằng 4.

c) Lấy điểm $Q\in(Oxz)$. Độ dài đoạn thẳng QB ngắn nhất khi đó tọa điểm Q là $(3;0;1)$.

d) Biết tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$. Khi đó $x+y-z=11$.

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$.

a) $AB=\sqrt{26}$

b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-26$

c) Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$. Khi đó $x+y+z=2$.

d) Gọi $D(a;b;c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó $a+b+c=1$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;-2),B(2;-1;3),C(1;3;-2),D(5;-1;8)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$

b) $AC=\sqrt{5}$

c) Ba điểm A,B,C có thẳng hàng.

d) Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Toạ độ ba đỉnh A,B,C lần lượt là $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang $ABCD$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$

b) $BC=3\sqrt{2}$

c) $BC=2AD$

d) Giả sử đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c=6$.

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Biết $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=23$

b) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\sqrt{70}}{70}$

c) $AD=3BC$

d) Biết đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c=10$.

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(-2;3;4)$ và $C(4;-6;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;6)$.

b) Hình chiếu vuông góc của B lên trục Ox là $B'(-2;3;0)$.

c) Tồn tại 1 điểm M thuộc trục hoành sao cho tam giác MBC vuông tại M.

d) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(1;-3;7)$.

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(4;0;2)$, $B(1;-4;-2)$ và $C(2;1;1)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{7}{3};-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

b) Điểm D thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là $D(5;5;5)$.

c) Tam giác ABC là tam giác tù.

d) Gọi điểm $E(a;b;c)$ là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz), khi đó $\dfrac{2a}{c}+b=\dfrac{9}{2}$.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;6;2)$ và $C(-2;2;4)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M.

a) $\overrightarrow{AB}(-7;3;1)$

b) Tam giác ABC vuông tại A.

c) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$

d) Tọa độ của điểm M là $(-9;0;-2)$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC với $A(1;-3;3), B(2;-4;5), C(3;-2;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2)$.

b) Điểm $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác ΔABC thì $a+b+c=2$.

c) Điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, khi đó $2x+y+z>4$.

d) Gọi $M(x;y;z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho biểu thức $P=-2MA^2-MB^2-3MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $x+y-z>-5$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1;-2;0), B(2;1;-2), C(0;3;4)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(1;3;-2)$.

b) Toạ độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(0;0;-2)$.

c) Gọi điểm $E(a;b;c)$ là hình chiếu của C lên AB, khi đó $7a+3b+c=8$.

d) Toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng xOz sao cho $T=MC+MB$ nhỏ nhất là $M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;-1)$, $N(4;3;1)$.

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Oy có tọa độ là $(0;2;0)$.

b) Gọi E là điểm đối xứng của điểm M qua N. Tọa độ của điểm E là $(5;8;3)$.

c) Cho $P(1;m;n)$. Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $2m+5n=20$.

d) Điểm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $T=\left|2\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $3a-2b+c=20$.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2,-1,1), B(-1,3,-1)$, $C(5;-3,4)$.

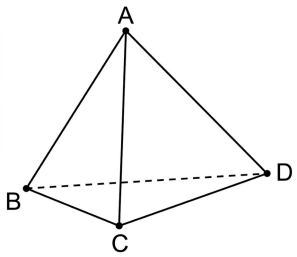
a) Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=23$.

b) Góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$.

d) Lấy điểm $M(a;b;c)\in(Oxy)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+6b+3c=0$.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;3), B(0;0;-1), C(1;0;-1), D(0;1;-1)$.



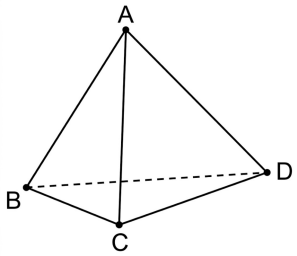
a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$.

c) $AB \perp AC$

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;3;-2), B(3;2;-4), C(2;1;0), D(3;5;-1)$.



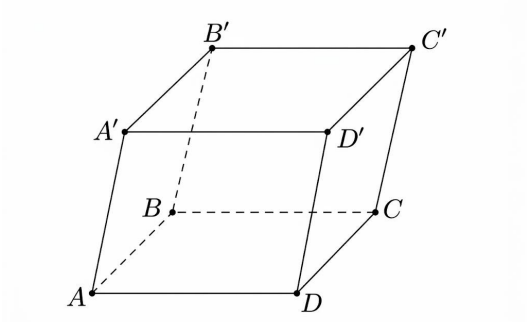
a) $AB = 9$

b) $AB \perp CD$.

c) Tam giác BCD là tam giác đều.

d) $\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$.



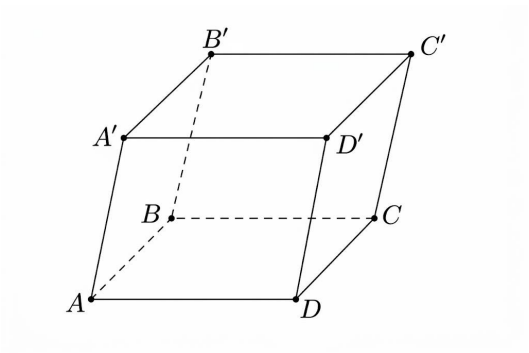
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$

b) Tọa độ $D(0;2;0)$.

c) $\overrightarrow{A'D} = (1;1;5)$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.



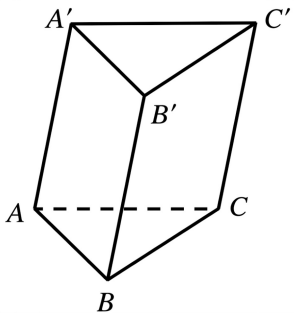
a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

b) $\left|\overrightarrow{B'D}\right|=\sqrt{29}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D}=-23$.

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'D}\right)=\dfrac{22}{3\sqrt{70}}$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.



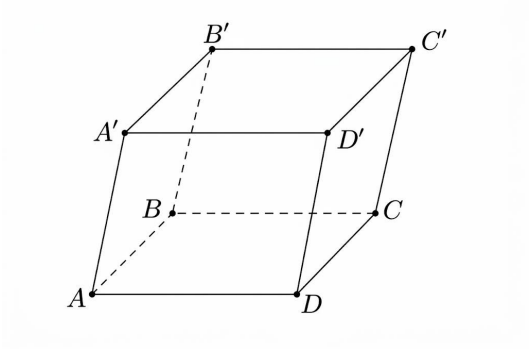
a) $\overrightarrow{AA'}=(4;0;-1)$

b) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=20$

c) Tọa độ đỉnh B' là $(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z=13$.

d) Hình chiếu của điểm C' trên mặt phẳng (Oyz) có toạ độ là $C'(0;3;-8)$.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$.



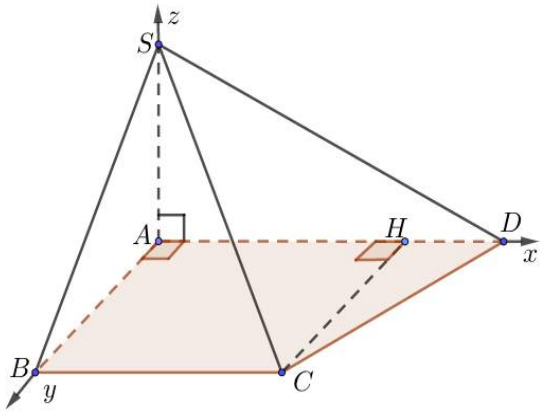
a) $AB=9$

b) Tọa độ đỉnh $C(2;3;0)$

c) Tọa độ đỉnh A',B' lần lượt là $A'(0;0;-3)$ và $B'(3;0;-3)$.

d) Gọi $G(x_G;y_G;z_G)$ là toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$. Khi đó $x_G+y_G+z_G=5$.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA=4$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AD,AB,AS như hình vẽ.



a) $H(2;0;0)$.

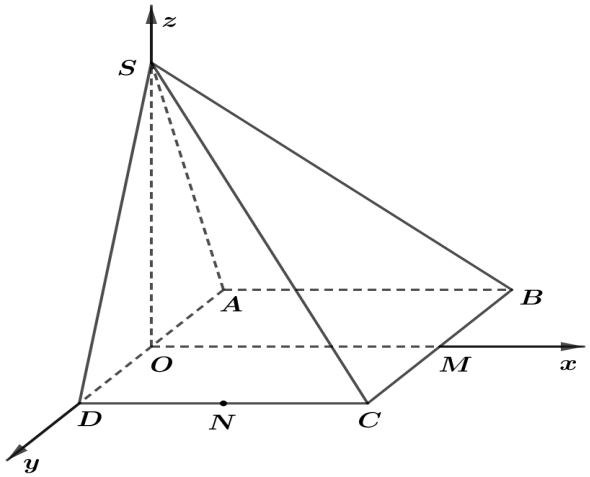
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Khi đó, toạ độ vectơ $\overrightarrow{AG}$ là $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Khi đó $HG=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\cos\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Thiết lập hệ trục

tọa độ $Oxyz$ với O trùng trung điểm cạnh AD và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OM, OD, OS như hình vẽ.



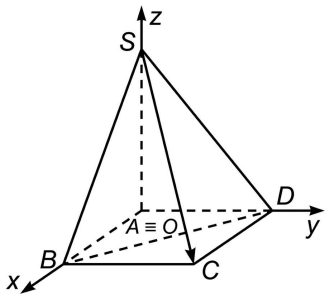
a) $M\left(0;1;0\right)$.

b) $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{4}$

d) $\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS như hình vẽ.



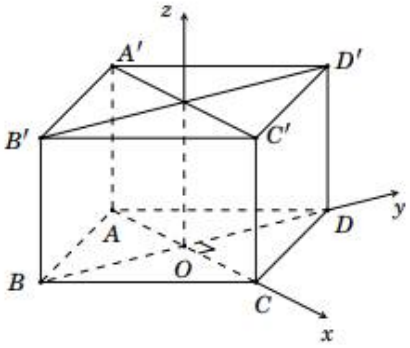
a) $C(3;4;0)$

b) $SC=29$

c) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC. Khi đó: $\overrightarrow{SI}.\overrightarrow{CD}=\frac{9}{2}$

c) $\cos(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})=\frac{7}{5\sqrt{29}}$

Câu 90. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

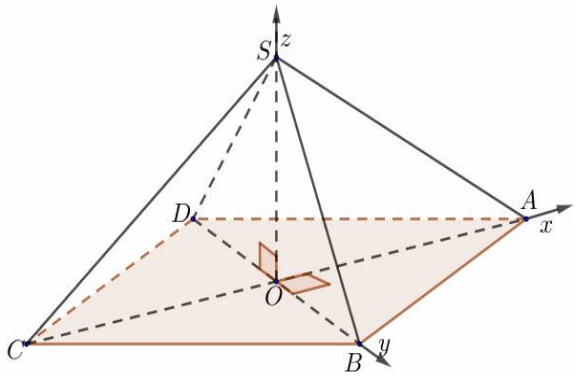
b) $\overrightarrow{AC'}=\left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

c) Tọa độ $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD'}=8$.

Câu 91. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $ABCD$ là đáy. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm tứ giác $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ (đơn vị: mét).





a) $S\left(0;0;98\right)$

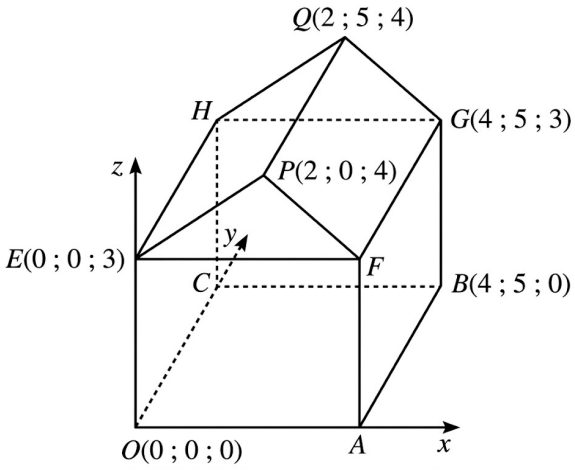
b) $\overrightarrow{CD}=\left(-90\sqrt{2};90\sqrt{2};0\right)$

c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{CD}=16200$

c) Góc giữa hai đường thẳng SA và CD xấp xỉ bằng $56°$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Câu 92. Một ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.





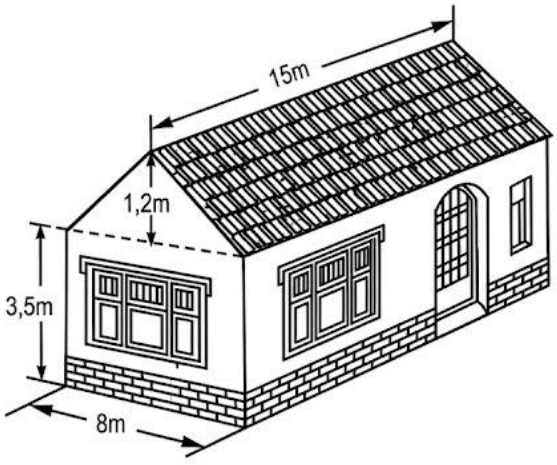
a) Tọa độ điểm A là $(3;0;0)$.

b) $AH = 6\sqrt{2}$

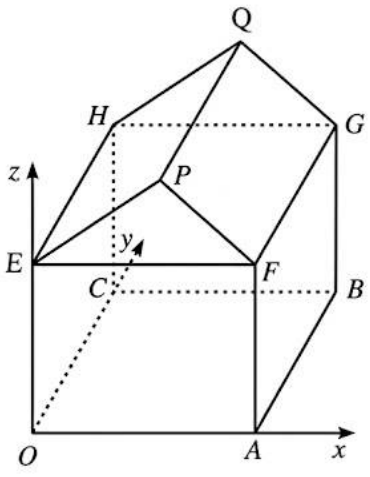
c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF} = 9$

d) Số đo của góc hai mái nhà (mái nhà chứa mặt phẳng $(EGQH)$ và mái nhà chứa mặt phẳng $(FGQP)$) bằng $63°$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)

Câu 93. Thầy Nam muốn xây một ngôi nhà có kích thước như hình 1. Ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 2 (đơn vị: mét), trong đó nền nhà, bốn bức tường là hình chữ nhật và hai mái nhà là hai hình chữ nhật bằng nhau. Biết $OE = 3,5m;\ OA = 8m;\ PQ = 15m$ và khoảng cách từ điểm P đường đường thẳng EF bằng $1,2m$.



Hình 1



Hình 2

a) Chiều cao ngôi nhà bằng $3,5m$

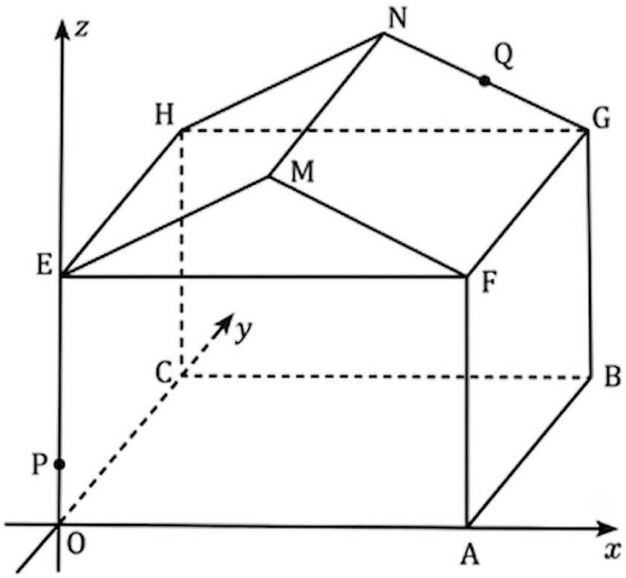
b) $AQ = \sqrt{290}\,(m)$

c) Thầy Nam muốn treo bóng đèn tại trung điểm cạnh PQ. Tọa độ vị trí bóng đèn là $(4;7,5;4,7)$.

d) Hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $33,4°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

Câu 94. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFME.CBGNH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật, P là điểm trên đoạn thẳng OE sao cho $OP=\frac{1}{4}OE$ và Q là trung điểm của đoạn thẳng GN. Người ta mô hình hoá bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m).

Biết $A(6;\,0;\,0), C(0;\,20;\,0), E(0;\,0;\,4), M(3;\,0;\,7)$.



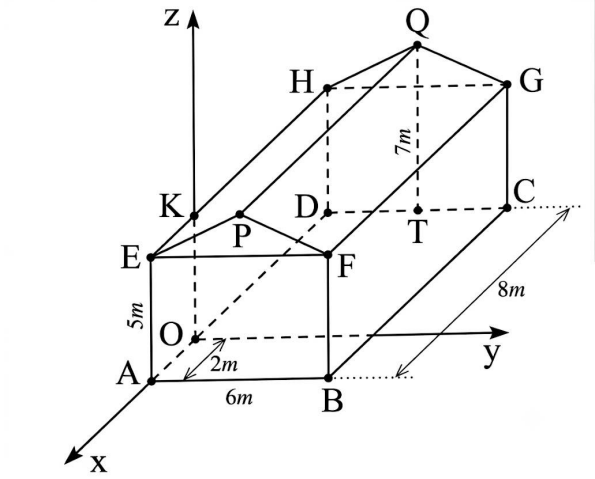
a) Toạ độ $\overrightarrow{BP}$ là $(-6;\,20;\,1)$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{EM},\overrightarrow{GN}$ vuông góc với nhau.

c) Số đo góc nhị diện $[M,FG,E]$ bằng $60°$.

d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí Q và đầu thu giữ liệu đặt tại vị trí P. Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ P đến E rồi từ E đến H, sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn dây cáp tối thiểu bằng $28,7m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười cuae mét).

Câu 95. Nhà anh Bảo Toàn được mô tả như hình vẽ bên dưới, trong đó phần thân nhà là hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Ngôi nhà được lợp ngói hai mái là hai hình chữ nhật $PEHQ$ và $PFGQ$, biết tam giác EFP là tam giác cân tại P. Gọi T là trung điểm của cạnh DC. Các kích thước của nhà lần lượt là $AB=6m,\ AE=5m, AD=8m,\ QT=7m$. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA=2m$ và các trục toạ độ tương ứng là các trục Ox,Oy,Oz.



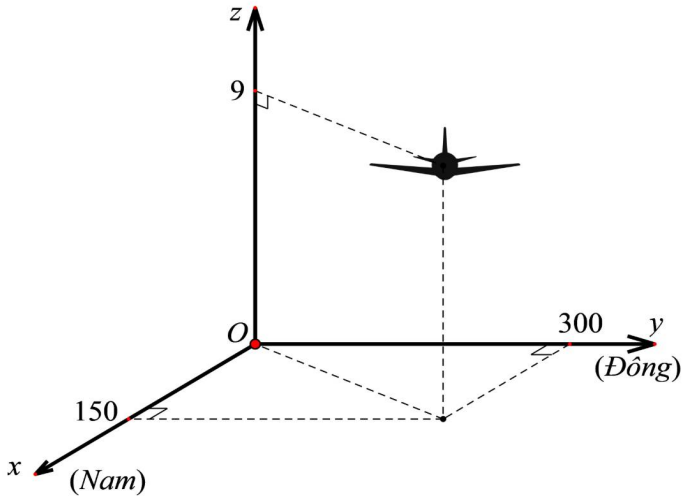
a) Toạ độ điểm A là $(2;0;0)$

b) Vectơ $\overrightarrow{AC}$ có toạ độ là $(6;0;0)$

c) Mái nhà anh Bảo Toàn được lợp bằng ngói đất nung, giá tiền mỗi viên ngói là 11000 đồng và để lợp được $1m^2$ diện tích mái cần 22 viên ngói. Số tiền cần bỏ ra để mua ngói lợp mái nhà là 13960000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các viên ngói, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

d) Anh Bảo Toàn muốn lắp một chiếc đèn lồng tại vị trí trung điểm của FG và đầu nguồn điện đặt tại vị trí O. Anh ấy thiết kế đường dây điện nối từ O đến K sau đó nối đến chiếc đèn lồng. Độ dài đoạn dây điện nối tối thiểu bằng $5+2\sqrt{10}(m)$.

Câu 96. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị tính theo đơn vị km.



a) Máy bay đang ở độ cao 9 km

b) Tọa độ của máy bay lúc 9h30 là $(150;300;9)$

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động và bay theo hướng đông, độ cao không đổi lúc 10h30 máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$. Khi đó vận tốc của máy bay là 776 km/h, biết vận tốc gió theo hướng đông là 10 m/s.

d) Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại (hướng Tây) với vận tốc 800 km/h với độ cao không đổi biết lúc đó trời lặng gió thì lúc11 giờ máy bay cách gốc tọa độ một khoảng 723 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 97. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 1 m), một flycam bay với vận tốc có độ lớn và hướng không đổi. Tại thời điểm $t=0$, flycam ở vị trí $A(1;2;3)$ và sau 10 phút nó ở vị trí $B(21;32;33)$.

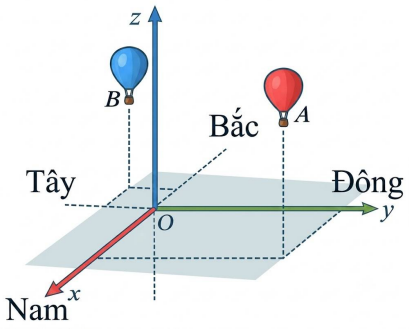
a) Flycam không bay qua vị trí $D(5;8;9)$.

b) Vectơ vận tốc của flycam có tọa độ là $\vec{v}=(20;30;30)$.

c) Độ lớn của vận tốc flycam là $\sqrt{22}$ (m/phút).

d) Sau 15 phút vị trí flycam là $C(31;47;48)$.

Câu 98. Hai chiếc khinh khí cầu A và B cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu A cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu B cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



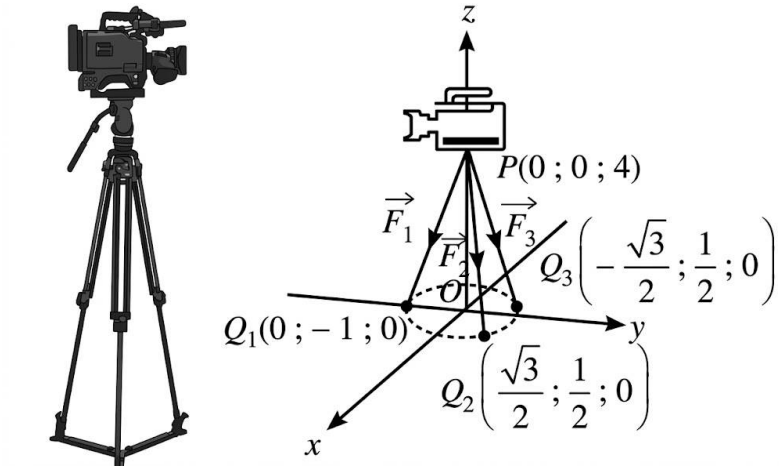
a) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu A có tọa độ là $(100;80;1)$.

b) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu B có tọa độ là $(-70;-60;-0,8)$.

c) Sau 1 giờ bay, khinh khí cầu A bay được quãng đường $128(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Sau 1 giờ bay, khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu A và chiếc khinh khí cầu B lớn hơn $221(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 99. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right), Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ (Hình vẽ). Biết rằng trọng lượng của máy quay là $360\,N$.



a) $\overrightarrow{PQ_1}=(0;-1;-4)$

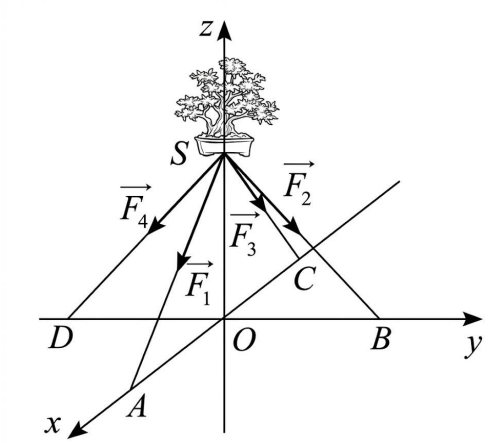
b) $PQ_1=PQ_2=PQ_3=\sqrt{17}$

c) Trọng lực $\vec{F}$ tác dụng lên máy quay có tọa độ là: $(0;0;360)$

d) Các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ tác dụng lên giá đỡ có tọa độ lần lượt là:

$\vec{F_1}=(0;-30;-120);\vec{F_2}=(15\sqrt{3};15;-120);\vec{F_3}=(-15\sqrt{3};15;-120)$

Câu 100. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0),B(0;20;0),C(-20;0;0),D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40\,N$ và được phân bố thành bốn lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ (mỗi centimét biểu diễn $1\,N$).



a) $\overrightarrow{SA}=(20;0;-20)$

b) $SB=20$

c) $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=120^0$

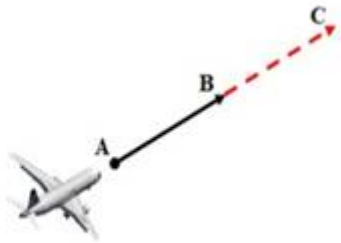
d) Các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ có tọa độ lần lượt là:

$\vec{F_1}=(10;0;-10),\vec{F_2}=(0;10;-10),\vec{F_3}=(-10;0;-10),\vec{F_4}=(0;-10;-10).$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(812;600;5)$ đến điểm $B(950;530;6)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

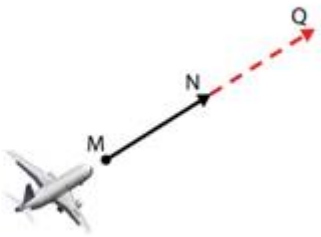




Trả lời: ……..

Câu 102. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo có tọa độ là $Q(x;y;z)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+2z$.

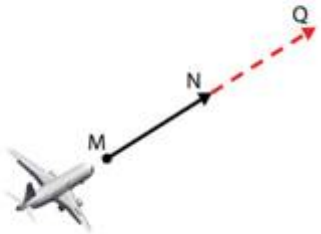




Trả lời: ……..

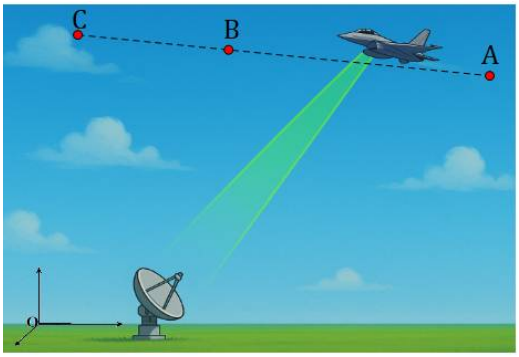
Câu 103. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm $N(x;y;z)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+2z$.





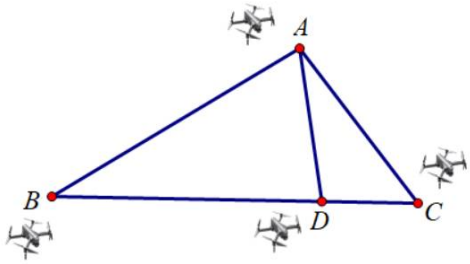
Trả lời: ……..

Câu 104. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là điểm $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.



Trả lời: ……..

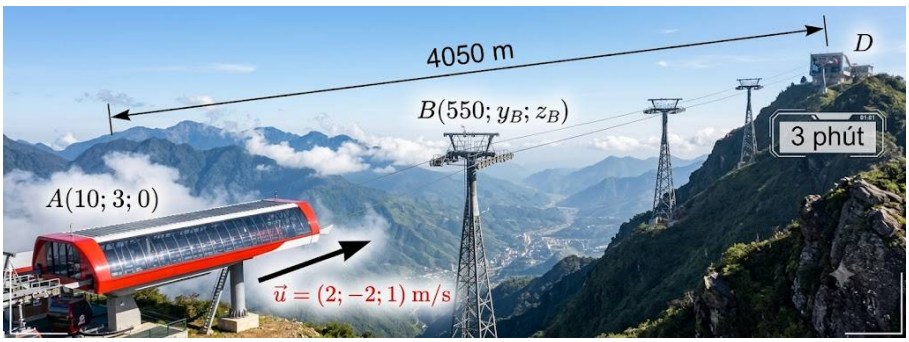
Câu 105. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$ (đơn vị mét). Một đội gồm 4 drone giao hàng *A, B, C, D* xếp đội hình bay có dạng tam giác *A*; *B*; *C* và *D* nằm trên cạnh BC sao cho $DB=4DC$ (Hình vẽ bên dưới). Tại thời điểm các drone có tọa độ là $A(80;20;80), B(70;20;20)$, $C(420;120;120)$ thì khoảng cách giữa drone *A* và drone *D* bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Trả lời: ……..

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1m$), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí *D* cách *A* một khoảng $4050\,m$. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u}(2;-2;1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất

phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B = 550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu phút?



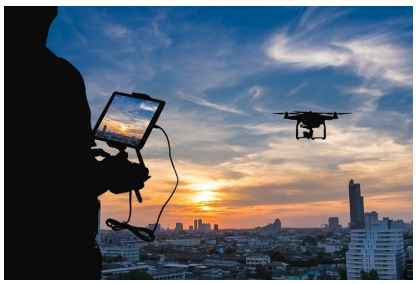
Trả lời: ……..

Câu 107. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến phần chục, đơn vị: km).



Trả lời: ……..

Câu 108. Anh Bảo Toàn điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí A cách vị trí điều khiển $100m$ về phía Nam và $150m$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $30m$. Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, anh Bảo Toàn điều khiển flycam đến vị trí B cách vị trí điều khiển $80m$ về phía Bắc và $120m$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $50m$. Biết vận tốc flycam bay không đổi là $8m/s$, và flycam bay từ vị trí A đến vị trí B theo một đường thẳng. Hỏi thời gian bay của flycam bay từ vị trí A đến vị trí B mất bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của giây).



Trả lời: ……..

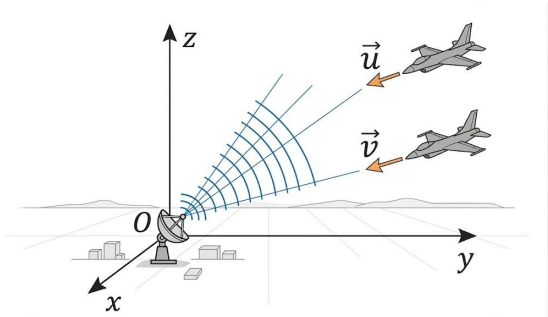
Câu 109. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm

xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).



Trả lời: ……..

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$ được thiết lập tại một sân bay, người ta ghi nhận hai máy bay đang bay đến với các vectơ vận tốc $\vec{u}=(100;-90;-140)$, $\vec{v}=(90;-70;-80)$. Hỏi góc giữa hai vectơ vận tốc nói trên bằng bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của độ).



Trả lời: ……..

Câu 111. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, đơn vị đo là kilômet, một rada phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1100;650;14)$ đến điểm N trong 20 phút. Nếu đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $Q(1500;860;16)$. Biết một khẩu pháo ở toạ độ vị trí điểm $E\left(\frac{1700}{3};370;\frac{34}{3}\right)$ được bắn ra với vận tốc không đổi gấp 5 lần vận tốc máy bay nhằm bắn trúng máy bay tại vị trí N. Sau bao nhiêu phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.



Trả lời: ……..

Câu 112. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilomet, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_1}=(3;4;0)$ với tốc độ không đổi $900(km/h)$ và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31;10;11)$, bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_2}=(5;12;0)$ với tốc độ không đổi $910(km/h)$. Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



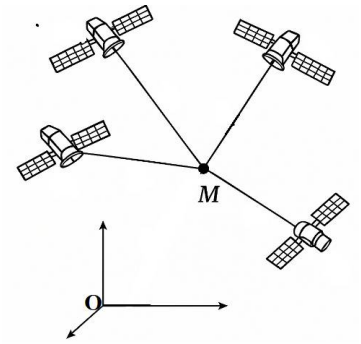
Trả lời: ……..

Câu 113. Để xác định vị trí của máy bay khi đang bay, người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ đặt tại một sân bay để xác định tọa độ của sân bay. Biết rằng cao độ của tọa độ máy bay chính là độ cao của máy bay đối với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc bay không đổi. Tại một thời điểm nào đó, máy bay đang ở vị trí có tọa độ $(200;70;118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau 25 giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km? biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có tọa độ $(80;105;113)$.



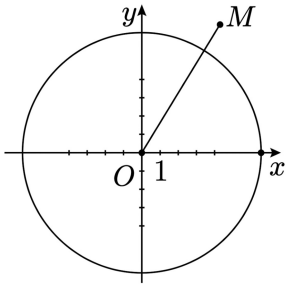
Trả lời: ……..

Câu 114. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3$, $MB=6$, $MC=5$, $MD=13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu kilômét?



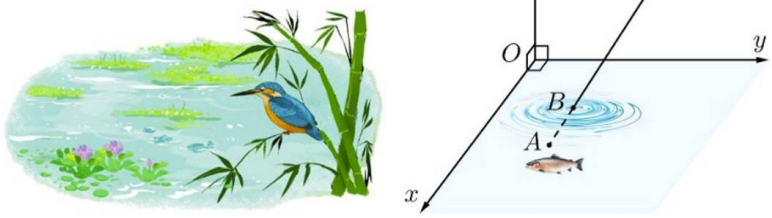
Trả lời: ……..

Câu 115. Thiên thạch với kích thước chỉ 30 cm đến 40 cm đến từ vùng không gian giữa các hành tinh, khi xuyên vào khí quyển Trái Đất ở độ cao 150 km so với mực nước biển, tạo ra vùng không khí bốc cháy quanh nó rộng vài trăm mét gây nên hiện tượng sao băng. Xem Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) được phát hiện ở vị trí điểm $M\left(4,29;7;0\right)$ và đang chuyển động thẳng với tốc độ không đổi 960 km/phút đến tâm Trái Đất. Xác định thời điểm (đơn vị phút) thiên thạch bị bốc cháy kể từ lúc phát hiện (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



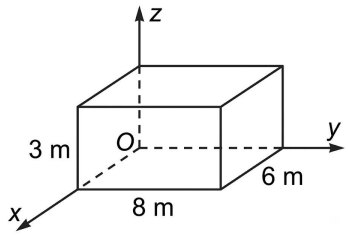
Trả lời: ……..

Câu 116. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a;b;c)$. Tính $T=5a+10b+2026c$.



Trả lời: ……..

Câu 117. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8m$, chiều rộng là $6m$ và chiều cao là $3m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Giả sử toạ độ của điểm treo đèn là (a,b,c). Tính giá trị biểu thức $T=2a+3b-4c$.



Trả lời: ……..

Câu 118. Trong một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có 2 cây quạt treo tường. Cây quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, cây quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị: mét). Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu mét?



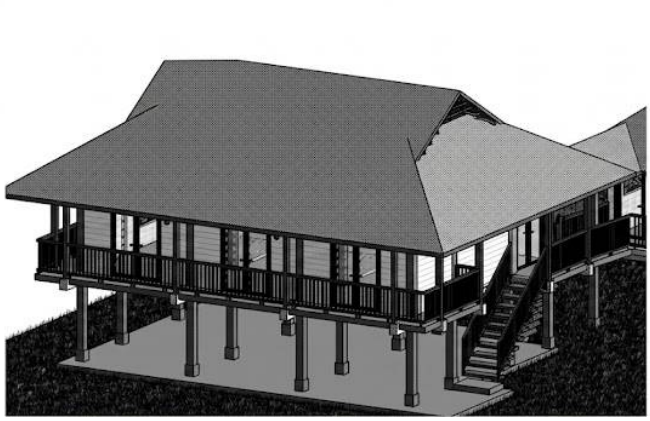
Trả lời: ……..

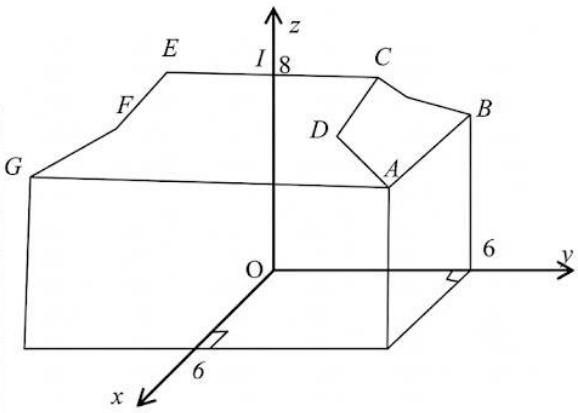
Câu 119. Trong một góc phòng học có treo hai chiếc đèn. Chiếc thứ nhất cách mặt đất $3\ m$ và cách mỗi bức tường $1\ m$. Chiếc thứ hai cách mặt đất $3,5\ m$ và cách mỗi bức tường $2,5\ m$. Tính khoảng cách giữa hai chiếc đèn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

Câu 120. Thầy Thanh muốn xây dựng một nhà sàn theo thiết kế như hình vẽ dưới đây.

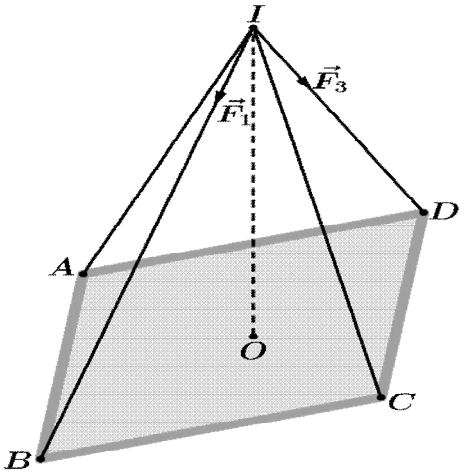




Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm $G\left(6;-6;6\right)$; $C\left(3;4;8\right)$; $F\left(4;-4;7\right)$ và điểm I là trung điểm CE. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ……..

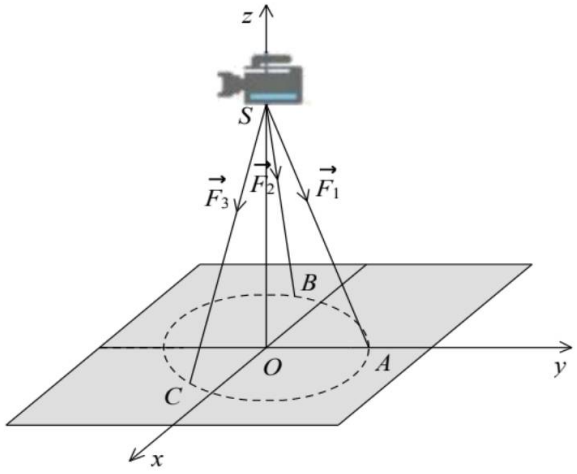
Câu 121. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0;0;9)$ như hình vẽ. Điểm $O(0;0;5)$; $A(-\sqrt{2};\sqrt{2};5)$ và góc $\widehat{OID}$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ lần lượt là lực căng của các sợi dây IB, IC, ID, IA. Biết rằng $|\vec{F_1}| = 50$ N và $|\vec{F_2}| = 40$ N



Tính khối lượng m (kg) của tấm bảng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) (Cho gia tốc trọng trường $g = 9,8(\text{m/s}^2)$ và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = m.g$)

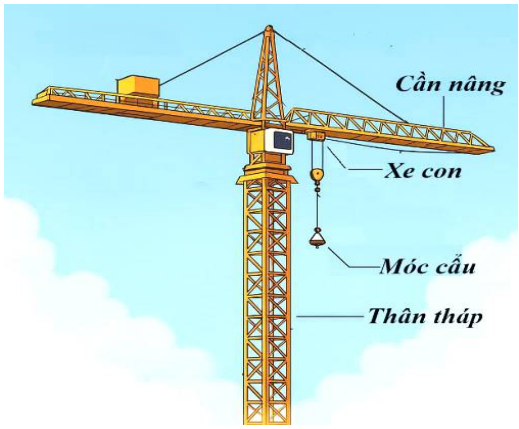
Trả lời: ……..

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, một chiếc máy quay phim được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;5)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0;1;0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ (hình vẽ bên). Biết lực tác dụng của máy quay phim lên các giá đỡ SA, SB, SC lần lượt là $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ và trọng lượng của chiếc máy là $60\,N$, giá trị của $|\vec{F_1}|+|\vec{F_2}|+|\vec{F_3}|$ bằng bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



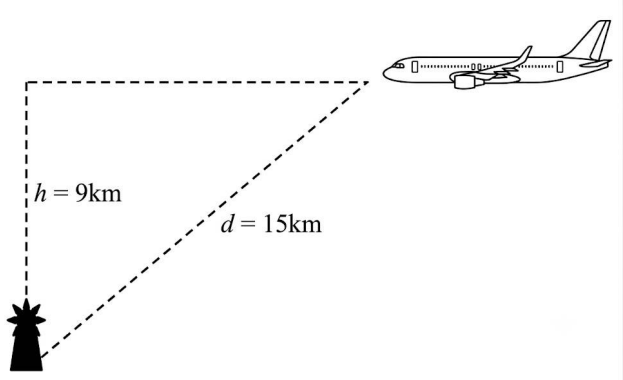
Trả lời: ……..

Câu 123. Người ta thường dùng cẩu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cẩu trục dùng móc cẩu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn $1m$ so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cẩu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0°;180°)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6;8;0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4;-3;15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Trả lời: ……..

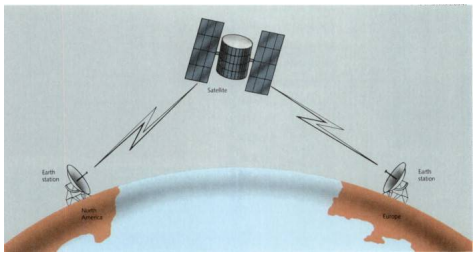
Câu 124. Một máy bay đang bay ở độ cao $h = 9\,km$ trên một đường bay sẽ đưa nó đi thẳng qua một trạm kiểm soát không lưu (Xem hình vẽ minh họa). Tại thời điểm máy bay cách trạm một khoảng $d = 15\,km$, khoảng cách d giữa máy bay và trạm không lưu đang giảm với tốc độ $v = 760\,km/h$; Hỏi tốc độ V của máy bay lúc này là bao nhiêu km/h?



Trả lời: ……..

Câu 125. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại ở vị trí M, biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi tuyền đến trạm thu tại A. Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0;0;0)$, $A(30;40;0)$ $M(x;y;35)$ (đơn vị

tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s. Một tín hiệu phát từ A đến M, rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây? (làm tròn đến hàng phần trăm).



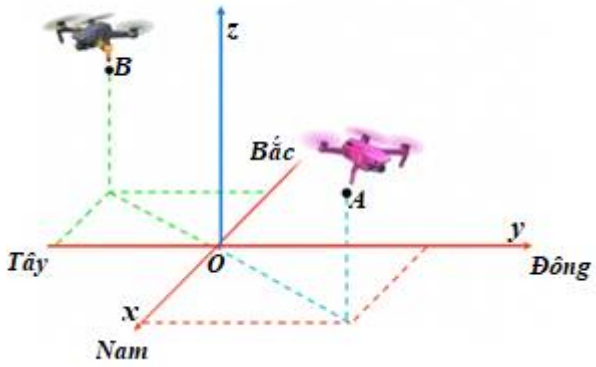
Trả lời: ……..

Câu 126. Hai chiếc kinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, kinh khí cầu A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $1km$; kinh khí cầu B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$ (hình minh họa bên dưới). Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai kinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Câu 127. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía nam và $2m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía bắc và $6m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?



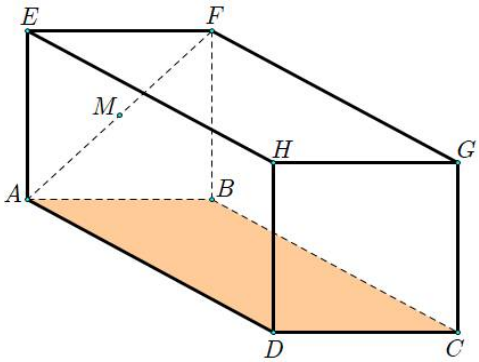
Trả lời: ……..

Câu 128. Nhân dịp lễ 30/4/2025, tại Quảng trường trung tâm TP. Hồ Chí Minh diễn ra màn trình diễn máy bay trực thăng kéo cờ Tổ quốc và cờ Đảng. Hai máy bay cất cánh cùng lúc từ một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 500m. Cùng thời điểm đó, một chiến sĩ công an đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc máy bay nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí chiến sĩ công an đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc máy bay là nhỏ nhất. Khoảng cách từ vị trí chiến sĩ công an quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc máy bay là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

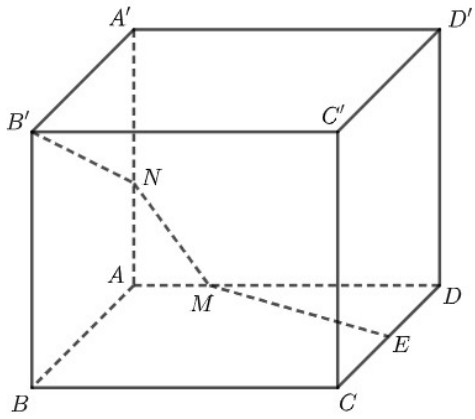
Câu 129. Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB=6$ (dm), $AD=8$ (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm G đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm M là trung điểm của AF được mô hình hóa như hình vẽ sau:



Để đường đi ngắn nhất thì chú cá bơi đến điểm dưới đáy hồ cách BA và BC những đoạn bằng a và b. Khi đó tổng $D=3a+6b$ bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Câu 130. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 4 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu đêcimet?



Trả lời: ……..

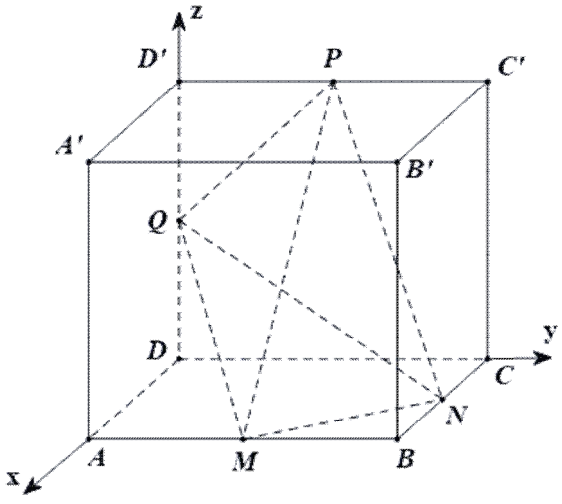
Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ có cạnh bằng 9 sao cho điểm D thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy và điểm O' thuộc tia Oz. Điểm M thuộc cạnh $O'B'$ sao cho $O'B' = 3O'M$. Một con kiến bò từ vị trí M qua sáu mặt của hình lập phương đã cho rồi quay lại vị trí điểm M sao cho quãng đường đi được của con kiến là ngắn nhất. Hỏi với cách bò như vậy, con kiến đã bò qua bao nhiêu điểm mà điểm đó có hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương?

Trả lời: ……..

Câu 132. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD. Biết độ dài $BI = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a + b$.

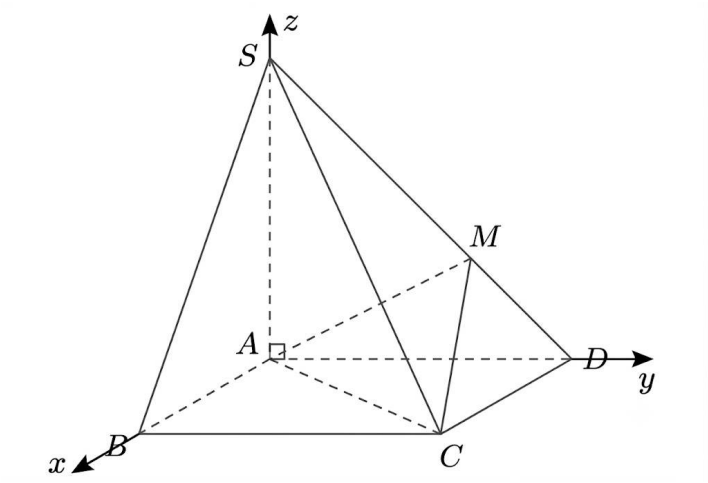
Trả lời: ……..

Câu 133. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, tổng các vectơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ có toạ độ là $(m; n; p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + 4p$.



Trả lời: ……..

Câu 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS như hình vẽ. Tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN. Biết độ dài cạnh $DG=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 136. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Biết độ dài cạnh $C'G=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

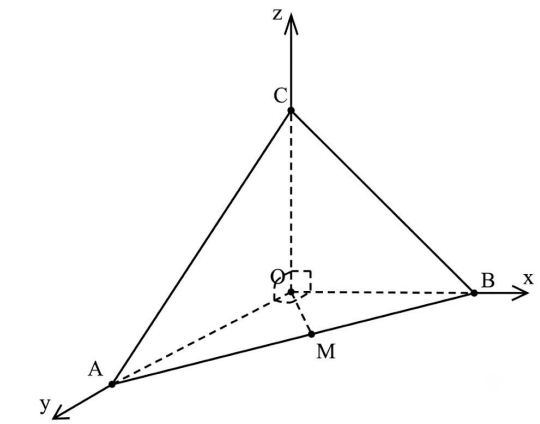
Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD. Biết độ dài cạnh $CG=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD. Góc NMG của tam giác NMG bằng bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến phần mười độ).

Trả lời: ……..

Câu 139. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OB, OA, OC như hình vẽ. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng bao nhiêu độ?



Trả lời: ……..

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE. Biết độ dài cạnh $BG=\dfrac{a\sqrt{113}}{6}$ ($\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 141. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN. Biết khoảng cách từ G đến K bằng $\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ ($\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Biết vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}=(x_0;y_0;z_0)$. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ……..

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(5;4;-1)$, $\vec{b}=(2;-5;3)$, $\vec{u}=(x;y;z)$ thỏa mãn $\vec{a}+2\vec{u}=\vec{b}$ .Tính giá trị biểu thức $T=2x+2y+z$.

Trả lời: ……..

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

Trả lời: ……..

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;-1;0)$. Xác định k để vectơ $\vec{u}=(2;2k-1;0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

Trả lời: ……..

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Trả lời: ……..

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3;7;2), N(5;1;-1)$ và $P(4;-4;-2)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác MNP. Tính giá trị biểu thức $T=a+3b+3c$.

Trả lời: ……..

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3), B(a;b;c)$ và $M(2;1;-2)$. Biết M là trung điểm của AB, tính $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì giá trị của $x+y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x+y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Biết tọa độ của điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a+3b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M có tọa độ $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 156. Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có $\widehat{ADC} = 45°$.

Trả lời: ……..

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1)\, C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Trả lời: ……..

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diệt tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Trong không gian gọi điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90°$ và không trùng với các điểm A, B, C, O. Tính giá trị của $3x+6y+3z$.

Trả lời: ……..

Câu 160. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA} = 4MB.\overrightarrow{MB}$. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để giá trị $\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3), B(2;2;1), M(a;b;c) \in Ox$. Khi biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $2a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;3), B(2;1;1), C(1;2;3), M(a;b;c) \in Oz$. Khi biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(5;-2;0), B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Đặt $Q = 2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng $a\sqrt{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Để biểu thức $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $2MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b + 3c$

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b + 3c$

Trả lời: ……..

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$.

Trả lời: ……..

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Lấy điểm $M(x;y;z)$ sao cho biểu thức $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = 4x + 2y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời: ……..

Câu 171. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

Trả lời: ……..

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2$.

Trả lời: ……..

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3), C(3;1;-5)$ và $\overrightarrow{OM} = b.\vec{j} + c.\vec{k}$ trong đó b,c là các số thực luôn thay đổi. Khi $S = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ có giá trị lớn nhất thì giá trị biểu thức $T = 4b - 2026c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ……..

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$. Lấy điểm $M(0;b;c)$ sao cho biểu thức $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và $\overrightarrow{OM}=b.\vec{j}+c.\vec{k}$ trong đó b,c là các số thực luôn thay đổi. Khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất thì giá trị biểu thức $T=2025b+2026c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 178. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;2), B(-2;0;3), C(0;1;-2)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$ trong đó a,b là các số thực luôn thay đổi. Biết biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất, hãy giá trị biểu thức $T=6a+24b$.

Trả lời: ……..

Câu 179. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và điểm $M(a,b,c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+2b-c-1=0$. Biết $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S=11a+22b+33c$.

Trả lời: ……..

BÀI 8
BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x;y;z)$, $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

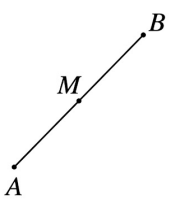
- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';\ y-y';\ z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)\ \ (k\in\mathbb{R})$

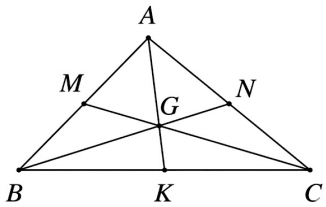
Nhận xét : $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \\ z=kz' \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$. Khi đó :

- Nếu $M(x_M;y_M;z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
- Nếu $G(x_G;y_G;z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$





2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định công thức: $\vec{a}.\vec{b}=x.x'+y.y'+z.z'$.

Nhận xét :

- Hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ vuông góc khi và chỉ khi $x.x'+y.y'+z.z'=0$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Nếu hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ khác $\vec{0}$ thì:

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

- Nếu $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ và $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$ thì $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x;y;z)$, $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';\ y-y';\ z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)\ \ (k\in\mathbb{R})$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$

Cách 2:

+ Nếu $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương .

+ Nếu $\dfrac{x}{x'}\neq\dfrac{y}{y'}$ hoặc $\dfrac{y}{y'}\neq\dfrac{z}{z'}$ hoặc $\dfrac{x}{x'}\neq\dfrac{z}{z'}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương .

- $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=k\vec{b}\\k>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\\k>0\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$
- $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=k\vec{b}\\k<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\\k<0\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$
- $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v}=\left(3;-\frac{5}{4};2\right)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$ và tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{a}$ sao cho $\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

d) Biết vectơ $\vec{b}$ thoả mãn $\vec{u}-2\vec{b}+3\vec{v}=\vec{0}$. Tính độ dài vectơ $\vec{b}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u}=\left(-2;3;\frac{3}{4}\right)$.

$$|\vec{u}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{217}}{4}$$

b) Vì $\vec{v}=\left(3;-\frac{5}{4};2\right)$ nên $\vec{v}=3\vec{i}-\frac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}$.

c) Ta có:

$$2\vec{u}=\left(-4;6;\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3}\vec{v}=\left(1;-\frac{5}{12};\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=\left(-4+1;6-\frac{5}{12};\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)=\left(-3;\frac{67}{12};\frac{13}{6}\right)$$

Vậy $\vec{a}=\left(-3;\frac{67}{12};\frac{13}{6}\right)$

Cách 2: Biểu diễn $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị:

$$\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=2\left(-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}\right)+\frac{1}{3}\left(3\vec{i}-\frac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}\right)=-3\vec{i}+\frac{67}{12}\vec{j}+\frac{13}{6}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\left(-3;\frac{67}{12};\frac{13}{6}\right)$$

d) Ta có: $\vec{u}-2\vec{b}+3\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$.

$$\frac{1}{2}\vec{u}=\left(-1;\frac{3}{2};\frac{3}{8}\right)$$

$$\frac{3}{2}\vec{v}=\left(\frac{9}{2};-\frac{15}{8};3\right)$$

$$\Rightarrow \vec{b}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}=\left(-1+\frac{9}{2};\frac{3}{2}-\frac{15}{8};\frac{3}{8}+3\right)=\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{8};\frac{27}{8}\right)$$

Do đó $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{27}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{761}{32}}$

Cách 2: Gọi $\vec{b}=(x;y;z)$ là vectơ cần tìm.

Ta có:

$\vec{u}=\left(-2;3;\frac{3}{4}\right)$

$-2\vec{b}=(-2x;-2y;-2z)$

$3\vec{v}=\left(9;-\frac{15}{4};6\right)$

$\Rightarrow \vec{u}-2\vec{b}+3\vec{v}=\left(-2-2x+9;3-2y-\frac{15}{4};\frac{3}{4}-2z+6\right)$

Vì $\vec{u}-2\vec{b}+3\vec{v}=\vec{0}$ nên $\begin{cases}-2-2x+9=0\\3-2y-\frac{15}{4}=0\\\frac{3}{4}-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\y=-\frac{3}{8}\\z=\frac{27}{8}\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=\left(\frac{7}{2};-\frac{3}{8};\frac{27}{8}\right)$

Do đó $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{27}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{761}{32}}$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-1;5),\vec{b}=(0;3;-3),\vec{c}=(1;4;-2)$.

a) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương không?

b) Tính $\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|$.

c) Tính độ dài của vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{d}=2\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+3\vec{c}$.

d) Tìm toạ độ của $\vec{u}$ sao cho $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{u}=4\vec{c}$.

Lời giải

a) **Cách 1:** Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, do đó $\vec{a}=k\vec{b}\,(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}2=0.k\\-1=3k\\5=-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=0.k\\k=-\frac{1}{3}\\k=-\frac{5}{3}\end{cases}$ (vô lí). Do đó hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương .

Cách 2: Ta có $\frac{0}{2}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{-3}{5}$, Do đó hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương .

b) Ta có: $3\vec{a}=3(2;-1;5)=(6;-3;15);-2\vec{b}=-2(0;3;-3)=(0;-6;6)$

$\Rightarrow 3\vec{a}-2\vec{b}=(6;3;9)$

Do đó $\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+3^2+9^2}=3\sqrt{14}$

c) $\vec{d}=2\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+3\vec{c}$

Ta có : $2\vec{a}=(4;-2;10)$; $-\frac{1}{5}\vec{b}=\left(0;-\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$; $3\vec{c}=(3;12;-6)$.

Do đó $\vec{d}=\left(4+0+3;-2-\frac{3}{5}+12;10+\frac{3}{5}-6\right)=\left(7;\frac{47}{5};\frac{23}{5}\right)$

Vậy $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{7^2+\left(\frac{47}{5}\right)^2+\left(\frac{23}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{3963}}{5}$.

d) Ta có: $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{u}=4\vec{c}\Leftrightarrow\vec{u}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$

$-\frac{1}{3}\vec{a}=\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$

$\frac{2}{3}\vec{b}=(0;2;-2)$

$\frac{4}{3}\vec{c}=\left(\frac{4}{3};\frac{16}{3};-\frac{8}{3}\right)$

$\Rightarrow\vec{u}=\left(-\frac{2}{3}+0+\frac{4}{3};\frac{1}{3}+2+\frac{16}{3};-\frac{5}{3}-2-\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{23}{3};-\frac{19}{3}\right)$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

a) Cho vectơ $\vec{u}=(x;y;4)$, tìm $x;y$ để vectơ $\vec{u}$ cùng phương vectơ $\vec{a}$.

b) Cho vectơ $\vec{v}=(5;x;y)$, tìm $x;y$ để vectơ $\vec{v}$ ngược hướng vectơ $\vec{m}$, biết $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

Lời giải

a) $\vec{u}$ cùng phương $\vec{a}\Leftrightarrow\vec{u}=k\vec{a}(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x=3k\\y=k\\4=2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\\k=2\end{cases}\Rightarrow x=6;y=2$

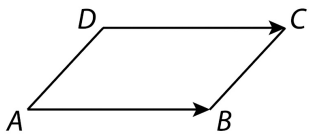
b) Ta có $2\vec{a}=(6;2;4)$; $3\vec{b}=(-9;0;12)$; $5\vec{c}=(30;-5;0)$

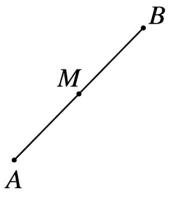
Do đó: $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}=(6+9-30;2+5;4-12)=(-15;7;-8)$

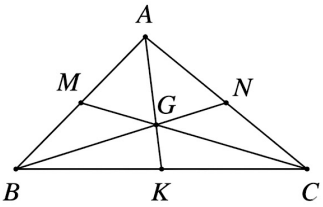
$\vec{v}$ ngược hướng vectơ $\vec{m}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{v}=k\vec{m}\\k<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5=-15k\\x=7k\\y=-8k\\k<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\x=-\frac{7}{3}\\y=\frac{8}{3}\\k<0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{7}{3};y=\frac{8}{3}$

DẠNG 2
TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ TỌA ĐỘ VECTƠ
TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ

- $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$
- $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}\quad (k\in\mathbb{R})$
- Ba điểm A,B,C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\neq k\,\overrightarrow{AC}\quad (k\in\mathbb{R})$
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.







- $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
- $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

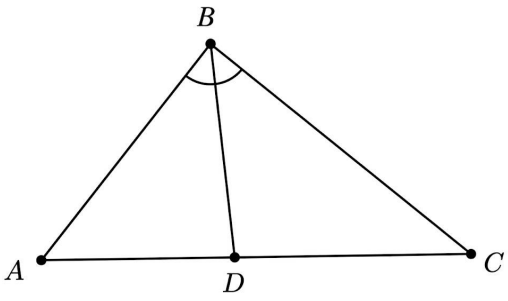
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

- $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow \overrightarrow{DA}=\frac{BA}{BC}\overrightarrow{DC}$$



Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$.

a) Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua trục Ox.

b) Tìm tọa độ điểm A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

a) Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox là $B(3;0;0)$.

A_1 đối xứng với A qua trục Ox nên B là trung điểm đoạn thẳng A_1A

Do đó

$$x_{A_1} = 2x_B - x_A = 3$$
$$y_{A_1} = 2y_B - y_A = 0$$
$$z_{A_1} = 2z_B - z_A = 2$$

Vậy $A_1(3;0;2)$.

b) Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là $C(0;0;-2)$.

A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng nên C là trung điểm đoạn thẳng A_1A

Do đó

$$x_{A_1} = 2x_C - x_A = -3$$
$$y_{A_1} = 2y_C - y_A = 0$$
$$z_{A_1} = 2z_C - z_A = -2$$

Vậy $A_2(-3;0;-2)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1), D(2;-3;4)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của AB.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm I của tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$M\left(\frac{1+0}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{1+2}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

b) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$G\left(\frac{1+0+1}{3};\frac{-1+1+0}{3};\frac{1+2+1}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$.

b) Toạ độ trọng tâm I của tứ diện $ABCD$ là

$I\left(\frac{1+0+1+2}{4};\frac{-1+1+0-3}{4};\frac{1+2+1+4}{4}\right)$ hay $I\left(1;-\frac{3}{4};2\right)$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$.

a) Tính các độ dài AB, BC, CA.

b) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác.

c) Gọi M là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ điểm M đến điểm G.

Lời giải

a) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(1-2;2-0;3-2)=(-1;2;1)\Rightarrow AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC}=(2-1;1-2;2-3)=(1;-1;-1)\Rightarrow BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC}=(2-2;1-0;2-2)=(0;1;0)\Rightarrow AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$

b) $\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$ và $\overrightarrow{AC}=(0;1;0)$

Giả sử $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, do đó $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\left(k\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-1=0.k\\2=1.k\\1=0.k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=0\\k=2\\1=0\end{cases}$ (vô lí). Do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay ba điểm A,B,C không thẳng, Suy ra ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác

c) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{2+1}{2};\frac{0+2}{2};\frac{2+3}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{3}{2};1;\frac{5}{2}\right)$.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{2+1+2}{3};\frac{0+2+1}{3};\frac{2+3+2}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{5}{3};1;\frac{7}{3}\right)$.

Do đó: $\overrightarrow{MG}=\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2};1-1;\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{1}{6};0;-\frac{1}{6}\right)\Rightarrow MG=\left|\overrightarrow{MG}\right|=\sqrt{\frac{1}{36}+0+\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A\left(2;-1;4\right),B\left(3;5;-1\right),C\left(-1;1;2\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

d) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Vì $A(2;-1;4)$ và $B(3;5;-1)$ nên $\overrightarrow{AB}=(3-2;5-(-1);-1-4)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=(1;6;-5)$.

b) $\overrightarrow{AB}=(1;6;-5);\overrightarrow{AC}=(-3;2;-2)$

Ta có $\frac{1}{-3}\neq\frac{6}{2}\neq\frac{-5}{-2}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay ba điểm A,B,C không thẳng

Suy ra ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác

c) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

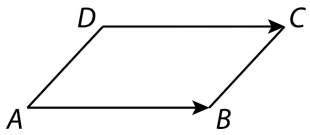
$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{4}{3}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{5}{3}$

$z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{5}{3}$

Vậy $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

d) A, B, C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là toạ độ điểm D.

Ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D)$.

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ 1 - y_D = 6 \\ 2 - z_D = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \\ z_D = 7 \end{cases}$$

Vậy $D(-2;-5;7)$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5;-3;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$

b) Tìm toạ độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;4;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (-1;4;2)$; $\overrightarrow{BC} = (2;0;3) \Rightarrow \vec{u} = (-17;12;-15)$

b) Gọi $N(x;y;z)$ khi đó $\overrightarrow{NA} = (5-x;-3-y;-z)$; $\overrightarrow{NB} = (2-x;1-y;-1-z)$

$$2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5-x) = -2 + x \\ 2(-3-y) = -1 + y \\ -2z = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{5}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(4; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

a) Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Ox sao cho $AQ = 3$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oxz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) $Q \in Ox$ nên $Q(x;0;0)$.

Ta có:

$$AQ = 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0+2)^2} = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2+5 = 9$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy có hai điểm Q cần tìm là $Q(-1;0;0)$ và $Q(1;0;0)$.

b) $N \in (Oxz)$ nên $N(x;0;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3;-2;3)$, $\overrightarrow{AN} = (x;-1;z+2)$

Ba điểm A, B, N thẳng hàng nên hai $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương hay $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ -1 = -2k \\ z+2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ k = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$$

Vậy $N\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$

c) Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x;y-1;z+2)$; $\overrightarrow{AB} = (3;-2;3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y-1 = -6 \\ z+2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}.$$

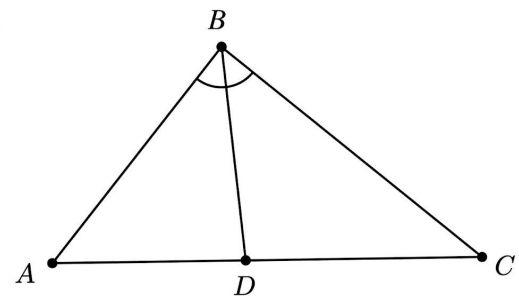
Vậy $M(9;-5;7)$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC.

Lời giải



a) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\dfrac{1}{3}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{8}{3}$

$z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{7}{3}$

Vậy $G\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{BA} = (-1;-3;4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BC} = (-6;8;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{26}$

Gọi $D(x;y;z)$ là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Ta có: $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}; \overrightarrow{DC} = (-4-x;7-y;5-z); \overrightarrow{DA} = (1-x;2-y;-1-z)$

Mà : $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} -4-x = -2(1-x) \\ -7-y = -2(2-y) \\ 5-z = -2(-1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Vậy tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$, khi đó:

- $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\vec{a}.\vec{b}=x.x'+y.y'+z.z'$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

  + $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x.x'+y.y'+z.z'=0$

  + $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=(-2;3;-2)$ và $\vec{c}=(3;-2;1)$.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

b) Tìm $\vec{a}.\vec{b}$ và $(\vec{a},\vec{b})$.

c) Tính $(\vec{a}-2\vec{b})\vec{c}$.

Lời giải

a) Ta có: $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$

b) Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+1\cdot3+(-2)\cdot(-2)=3$

Do đó $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$, suy ra $(\vec{a},\vec{b})\approx76°$.

c) $(\vec{a}-2\vec{b})\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}-2\vec{b}.\vec{c}=2.3-1.3-2.1-2(-2.3-3.2-2.1)=29$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{u}.\vec{v}=1$.

b) Tìm số thực m sao cho $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng $135°$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=1\Leftrightarrow3-m=1\Leftrightarrow m=2$.

b) Ta có: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow3-m=0\Leftrightarrow m=3$

c) $(\vec{u},\vec{v})=135°$

$\Leftrightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{\sqrt{6}.\sqrt{9+m^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(m^2+9\right)}=m-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 3 \\ 2m^2+6m+18=0\left(Vô\ nghiem\right) \end{cases}$

Vậy không có giá trị m nào thỏa yêu cầu bài toán

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=\left(2;m-1;3\right),\vec{b}=\left(1;3;-2n\right),\vec{c}=(1;4;-2)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{a}\perp\vec{c}$.

b) Tìm số thực n sao cho $|\vec{b}|=|\vec{c}|$.

c) Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

a) $\vec{a}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{c}=0\Leftrightarrow 2.1+\left(m-1\right)4+3\left(-2\right)=0\Leftrightarrow m=2$.

b) Ta có:

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2+\left(-2n\right)^2}=\sqrt{4n^2+10}$

$|\vec{c}|=\sqrt{1^2+4^2+\left(-2\right)^2}=\sqrt{21}$

Mà $|\vec{b}|=|\vec{c}|$ nên $\sqrt{4n^2+10}=\sqrt{21}\Leftrightarrow 4n^2=11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-\dfrac{\sqrt{11}}{2} \\ n=\dfrac{\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

Vậy $n=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ hoặc $n=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ \left(k>0\right)\Leftrightarrow\begin{cases} 2=k \\ m-1=3k \\ 3=k\left(-2n\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k=2 \\ m=7 \\ n=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $m=7;n=-\dfrac{3}{4}$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\left(7;3;3\right),B\left(1;2;4\right),C\left(2;3;5\right)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\cos\widehat{BAC}$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-6;-1;1);\overrightarrow{BC}=(1;1;1)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-6).1+(-1).1+1.1=-6$

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-6;-1;1)\Rightarrow AB=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{38}$

$\overrightarrow{AC}=(-5;0;2)\Rightarrow AC=\sqrt{(-5)^2+0^2+2^2}=\sqrt{29}$

$\Rightarrow \cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{30+0+2}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}}=\dfrac{32}{\sqrt{38\cdot 29}}$

a) Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;1;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

Suy ra $\overrightarrow{BH}=(x-1;y-2;z-4)$.

$\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, do đó $\begin{cases}x-1=k\\y-2=k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$, suy ra $H(1+t;2+t;4+t)$.
$z-4=k$

Ta có $\overrightarrow{AH}=(x-7;y-3;z-3)$.

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow(x-7).1+(y-3).1+(z-3).1=0\Leftrightarrow x+y+z=13$.

Ta có hệ: $\begin{cases}x-1=k\\y-2=k\\z-4=k\\x+y+z=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k+1\\y=k+2\\z=k+4\\k+1+k+2+k+4=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\\z=6\\k=2\end{cases}$

Vậy $H(3;4;6)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}=\left(1;-2;\dfrac{1}{4}\right)$, $\vec{b}=(-2;1;1)$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{c}$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{c}.\vec{b}$. Trong ba vectơ trên có các cặp vectơ nào vuông góc ?

d) Tính $\cos(\vec{a},\vec{b}),\cos(\vec{a},\vec{i})$

Bài 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a}=(2;5;4)$, $\vec{b}=(6;0;-3)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính độ dài của vectơ $\left|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right|$.

c) Tính $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

d) Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 11. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;3;-1),\ \vec{b}=(1;-2;3),\vec{c}=(2;-1;1)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính độ dài của vectơ $\left|\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right|$.

c) Tính $(\vec{a}-2\vec{b})\vec{c}$.

d) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{u}\perp\vec{a},\ \vec{u}\perp\vec{b},\ \vec{u}.\vec{c}=-6$.

Bài 12. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;3),\ \vec{b}=(1;-3;2),\ \vec{c}=(3;2;-4)$.

a) Tính $(\vec{a}+3\vec{b})\vec{b}$.

b) Tính $(2\vec{a}-5\vec{b})\vec{c}$.

c) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{a}.\vec{u}=-5,\vec{u}.\vec{b}=-11,\vec{u}.\vec{c}=20$.

Bài 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;-1;-3),\vec{b}=(m-1;3;-2),\vec{c}=(1;2n-1;-1)$.

a) Tìm số thực m sao cho $\vec{a}\perp\vec{b}$.

b) Tìm tất cả giá trị của n để góc giữa $\vec{a}$, $\vec{c}$ bằng 45° .

c) Tìm m,n để các vectơ $\vec{b},\vec{c}$ cùng phương.

Bài 14. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;-2;1),\ \vec{b}=(2;1;-1)$.

a) Tính $(\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

b) Tìm m để $\vec{u}=m\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=3\vec{a}+2m\vec{b}$ cùng phương.

Bài 15. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-7;9),\ \vec{b}=(3;-6;1),\ \vec{c}=(2;1;-7)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$

b) Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Biểu diễn vectơ $\vec{u}=(-4;13;-6)$ theo các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Bài 16. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-1;1),\ \vec{b}=(0;1;2),\ \vec{c}=(4;2;3)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}=\vec{0}$

b) Trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, có các cặp véctơ nào vuông góc ?

c) Biểu diễn vectơ $\vec{u}=(1;2;-2)$ theo các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Bài 17. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a}=(2;5;4),\ \vec{b}=(6;0;-3),\ \vec{c}=(3;2;-1)$.

a) Tính $(2\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

b) Xác định các số thực m,n để $m\vec{a}-3n\vec{b}=\vec{c}$.

Bài 18. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ : $\vec{a}=(2;-1;3),\ \vec{b}=(1;-3;2),\ \vec{c}=(3;2;-4)$.

a) Tính $(3\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{c})$.

b) Xác định các số thực m,n để $\frac{m}{3}\vec{a}-n\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$.

Bài 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4;2;3), B(-2;1;-1), C(3;8;7)$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$

f) Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

g) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Bài 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành ΔABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

c) Tìm tọa độ trọng tâm của ΔABC.

d) Tính góc $\widehat{ABC}$.

e) Tính độ dài đường cao BH của ΔABC

Bài 21. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1;-1;1)$, $B(2;-3;2)$, $C(4;-2;2)$, $D(3;0;1)$, $E(1;2;3)$

a) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính góc $\widehat{ABC}$.

c) Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm AB

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$, $B(3;7;4)$, $C(x;y;6)$.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm $x;y$ để ba điểm A,B,C thẳng hàng.

c) Tìm $x;y$ để ba điểm A,B,C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$.

a) Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Oy sao cho $BQ=2\sqrt{6}$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oyz sao cho ba điểm A,B,N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$.

Bài 24. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4;-1;2)$; B(7;3;2).

a) Tìm tọa độ điểm $M\in Ox$ và cách đều hai điểm A,B.

b) Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A.

Bài 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-3), B(0;3;7), C(2;5;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC.

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tính góc $\widehat{ABC}$.

e) Tính diện tích ΔABC. Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC.

Bài 26. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $(1;2;-1)$, $B(-1;1;3), C(-1;-1;2), D'(2;-2;-3)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta AA'C$.

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB'}=\overrightarrow{MD}$

Bài 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(0;2;2), B(0;1;2), C(-1;1;1), C'(1;-2;-1)$

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.

c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta B'DD'$.

Bài 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $B(2;0;0), C(2;3;0), D(0;3;0), A'(0;0;5)$

a) Chứng minh hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

b) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật chữ nhật.

c) Tính $\widehat{BA'D}$ của tam giác $A'BD$.

DẠNG 4
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) (hoặc $M \in (Oyz)$ hoặc $M \in (Oxz)$) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

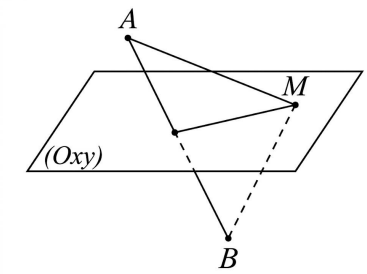
Phương pháp giải

Ta xét hai trường hợp sau:

• **Trường hợp 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (Oxy).

Ta có: $MA+MB \geq AB$ (bất đẳng thức tam giác)

Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \in \mathbb{R})$, từ đây ta tìm được điểm M.

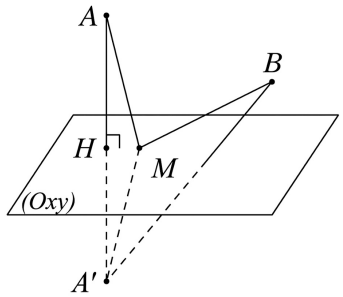


• **Trường hợp 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (Oxy).

Gọi A' đối xứng với A qua (Oxy), suy ra $MA = MA'$.

Khi đó $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$ (bất đẳng thức tam giác)

Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A', M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \in \mathbb{R})$, từ đây ta tìm được điểm M.



Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc sao cho $T = \left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (với $\alpha_1; \alpha_2 ... \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải: Tâm tỉ cự

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}\qquad\left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\\&\Rightarrow T=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right|\left|\overrightarrow{MI}\right|\end{aligned}$$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}\Leftrightarrow M\equiv I$

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,A_2,...,A_n$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1;\alpha_2...\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$).

Chú ý:

$T_{\min}\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

$T_{\max}\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

Phương pháp giải:

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I.

+ Ta có:

$$\begin{aligned}T&=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MA_n}\right)^2\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)MI^2+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2+2\overrightarrow{MI}\left(\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2\qquad\left(do\ \alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T=\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\overrightarrow{MI}+\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$$

+ Vì $\alpha_1IA_1^2+\alpha_2IA_2^2+...+\alpha_nIA_n^2$ không đổi nên:

- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(2026;2027;-2028\right)$.

a) Tìm điểm $M_1 \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_1 ngắn nhất.

b) Tìm điểm $M_2 \in \left(Oxy\right)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_2 ngắn nhất.

Lời giải

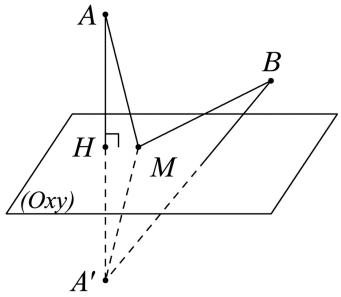
a) MM_1 ngắn nhất khi điểm M_1 là hình chiếu điểm M trên trục $Oz \Rightarrow M_1\left(0;0;-2028\right)$

b) MM_2 ngắn nhất khi điểm M_2 là hình chiếu điểm M trên $\left(Oxy\right) \Rightarrow M_2\left(2026;2027;0\right)$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(1;2;-3\right), B\left(2;1;4\right)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $z_A=-3<0$ và $z_B=4>0$ nên hai điểm A, B nằm về hai phía so với $\left(Oxy\right)$.



$M \in \left(Oxy\right) \Rightarrow M\left(x;y;0\right)$

$\overrightarrow{AM}=\left(x-1;y-2;3\right)$

$\overrightarrow{MB}=\left(x-2;y-1;-4\right)$

Khi đó: $MA+MB \geq AB$ (bất đẳng thức tam giác)

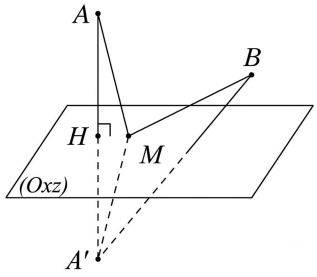
Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$ $\left(k \in \mathbb{R}\right)$

Suy ra $\begin{cases} x-1=k\left(x-2\right) \\ y-2=k\left(y-1\right) \\ 3=-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=11 \\ k=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(6;11;0\right)$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(2;-1;2\right), B\left(-3;-2;1\right)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $y_A=-1<0$ và $y_B=-2<0$ nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với $\left(Oxz\right)$.



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz), suy ra $A'(2;1;2)$

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$

$\overrightarrow{A'M} = (x-2;-1;z-2)$

$\overrightarrow{MB} = (-3-x;-2;1-z)$

Khi đó: $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$ (bất đẳng thức tam giác)

Đẳng thức xảy ra khi ba điểm A', M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \in \mathbb{R})$

Suy ra $\begin{cases} x-2 = k(-3-x) \\ -1 = -2k \\ z-2 = k(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{7}{3}\right) \\ z = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;-3), B(0;2;1), C(-1;2;1)$.

a) Tìm $M \in Oy$ sao cho biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho điểm $M(2;1;a)$. Tìm a sao cho biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Vì $M \in Oy$ nên $M(0;y;0)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-1;2-y;-3); \overrightarrow{MB} = (0;2-y;1)$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (-1;4-2y;-2)$

$\Rightarrow T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(-1)^2+(4-2y)^2+(-2)^2} = \sqrt{4y^2-16y+21} = \sqrt{4(y-2)^2+5} \geq \sqrt{5}$

$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{5}$ khi $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$

Vậy $M(0;2;0)$

b) Ta có:

$\overrightarrow{MA} = (-3;1;-3-a)$

$\overrightarrow{MB} = (-2;1;1-a) \Rightarrow -3\overrightarrow{MB} = (6;-3;-3+3a)$

$\overrightarrow{MC} = (-3;1;1-a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(0;-1;-5+a)$

$\Rightarrow T=\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-5+a)^2}=\sqrt{(a-5)^2+1}\geq 1$

$\Rightarrow T_{\min}=\sqrt{5}$ khi $a-5=0\Leftrightarrow a=5$

Vậy $M(2;1;5)$

c) Gọi $I(x;y;z)$ là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IA}=(-1-x;2-y;-3-z)$

$2\overrightarrow{IB}=(-2x;4-2y;2-2z)$

$\overrightarrow{IC}=(-1-x;2-y;1-z)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-2-4x;8-4y;-4z)$

Mà $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ nên $\begin{cases}-2-4x=0\\8-4y=0\\-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=2\\z=0\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};2;0\right)$

Ta có: $T=MA^2+2MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=4\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2$

$=4MI^2+IA^2+2IB^2+IC^2$

Do $IA^2+2IB^2+IC^2$ không đổi nên $T_{\min}\Leftrightarrow 4MI^2{}_{\min}\Leftrightarrow M\equiv I\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};2;0\right)$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Suy ra I là trung điểm $AB\Rightarrow I(3;1;4)$.

Ta có $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2\geq 0$

$T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv I\Rightarrow M(3;1;4)$.

Vậy $T=a+b+c=8$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (Oxz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=6a+12b-18c$.

Lời giải

+ Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(3-x;1-y;1-z)\\ \overrightarrow{IB}=(7-x;3-y;9-z)\\ \overrightarrow{IC}=(2-x;2-y;2-z)\end{cases}$.

$+\ \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}23-6x=0\\13-6y=0\\25-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}\\ y=\dfrac{13}{6}\\ z=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right).$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxz).

Suy ra $M\left(\dfrac{23}{6};0;\dfrac{25}{6}\right)\Rightarrow S=6a+12b-18c=-52$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;4), C(2;-1;-2)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $T=MA^2-MB^2-4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T=2a+b+3c$

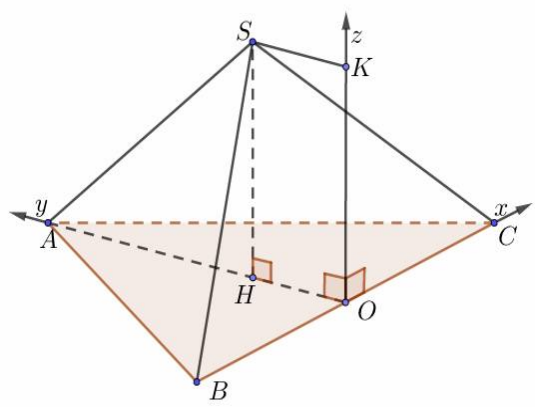
Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2-3MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T=2a+b+3c$

DẠNG 5
ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

I. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

1. Hình chóp đều

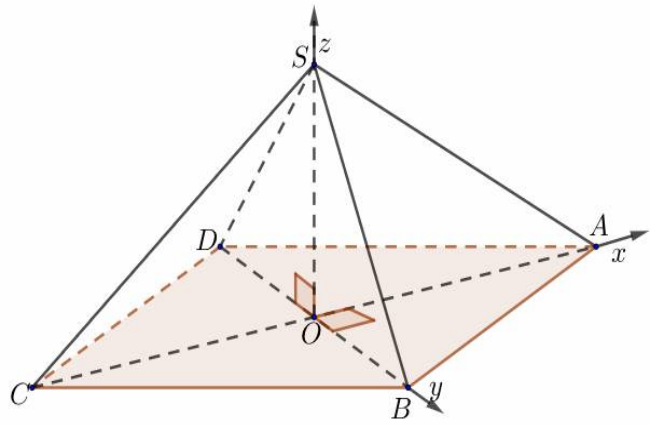
a. Hình chóp tam giác đều và tứ diện đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = a$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ , khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right), S(0;OH;OK).$$

b. Hình chóp tứ giác đều

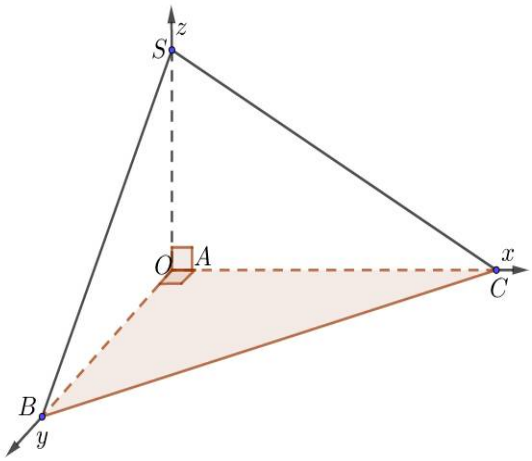


Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO).$$

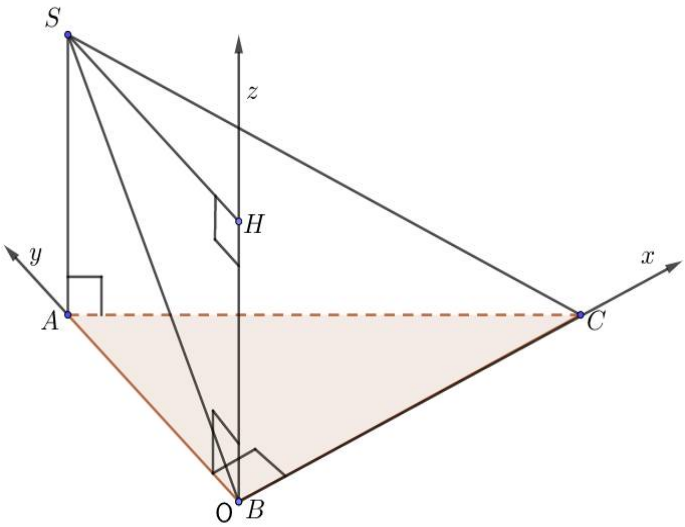
2. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

a. Đáy là tam giác vuông tại A



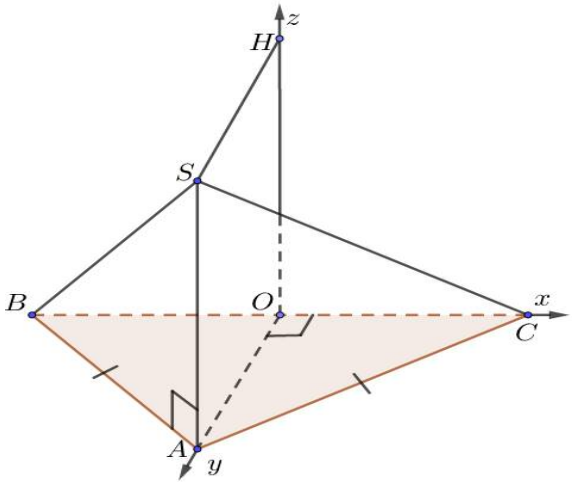
Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0), B(0;OB;0), C(AC;0;0), S(0;0;SA)$.

b. Đáy là tam giác vuông tại B



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $B \equiv O(0;0;0), A(0;AB;0), C(BC;0;0), S(0;AB;SA)$.

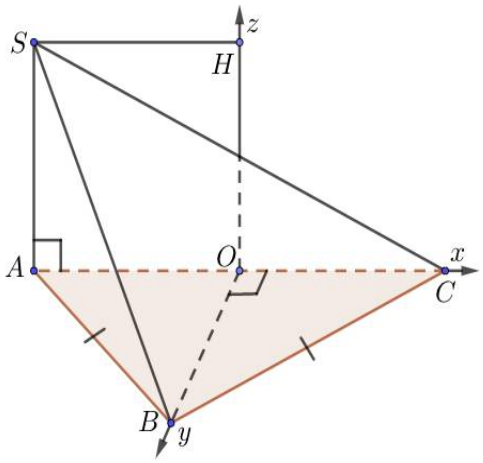
c. Đáy là tam giác cân tại A



Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(-OB;0;0), C(OC;0;0),\ S(0;OA;OH).$$

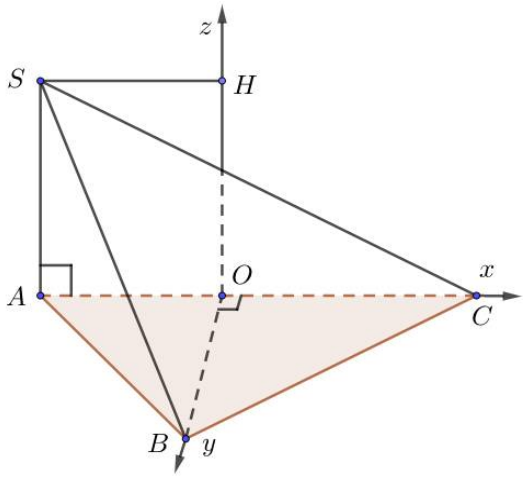
d. Đáy là tam giác cân tại B



Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

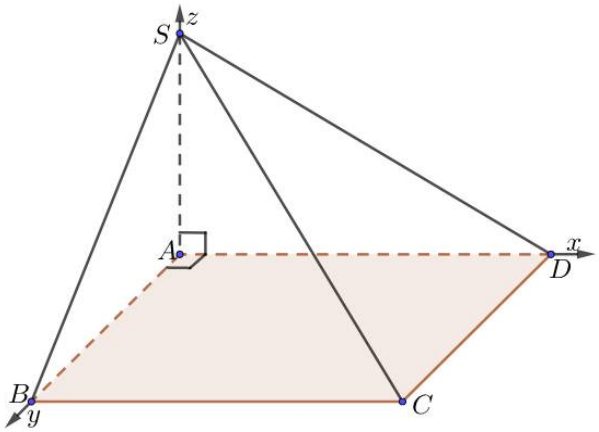
e. Đáy là tam giác thường



Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0,OB;0), C(OC;0;0), S(-OA;0;OH).$$

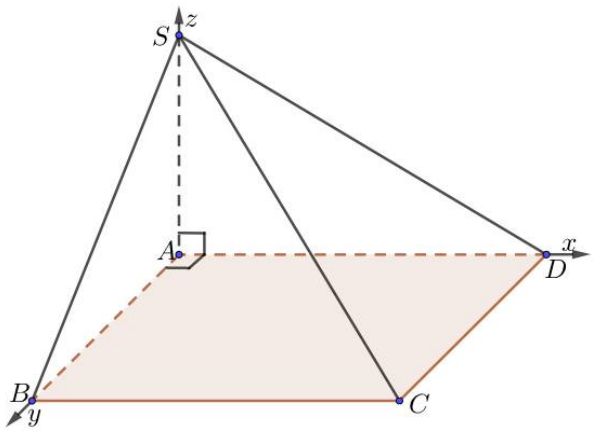
f. Đáy là hình vuông



Chọn hệ trục như hình vẽ, đặt $AB = a$, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;a;0), C(1;a;0), D(a;0;0), S(0;0;SA),$$

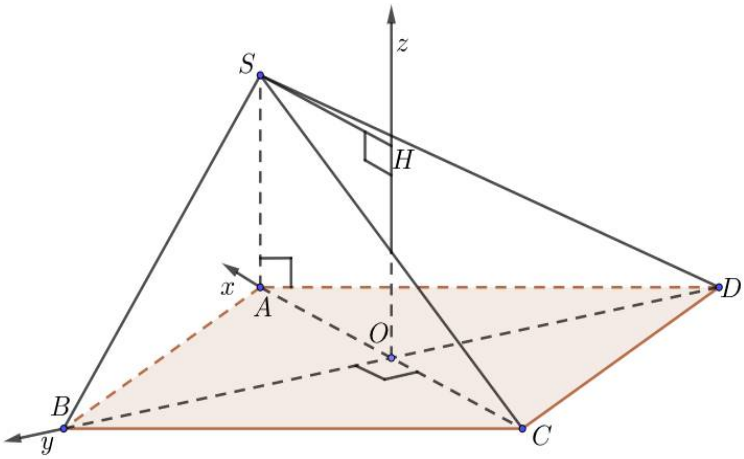
g. Đáy là hình chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0),\ D(AD;0;0),\ S(0;0;SA),$$

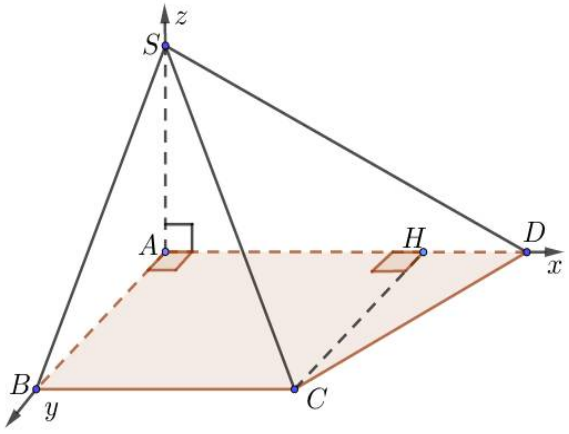
h. Đáy là hình thoi



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(0;OB;0), C(-OC;0;0), D(0;-OD;0),\ S(OA;0;OH)$$

m. Đáy là hình thang vuông

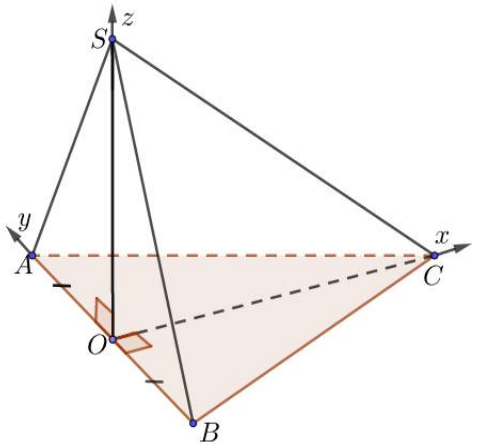


Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AH;AB;0), D(AD;0;0),\ S(0;0;SA).$$

3. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

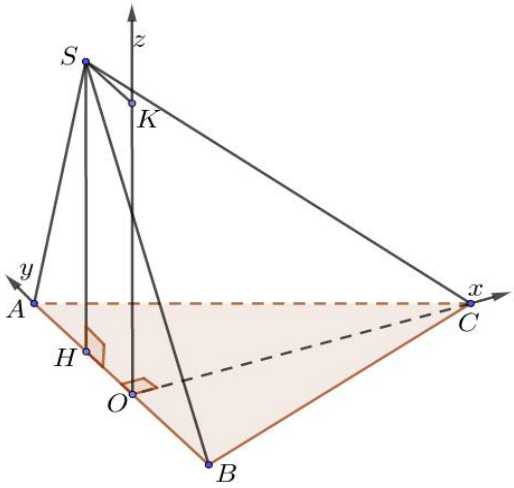
a. Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;0;SO)$$

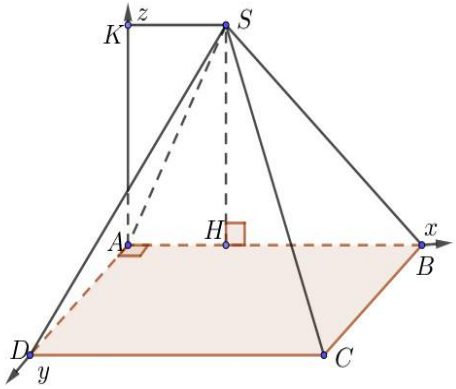
b. Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong ΔABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(0;OA;0), B(0;-OB;0),\ C(OC;0;0),\ S(0;OH;OK)$$

c. Đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật



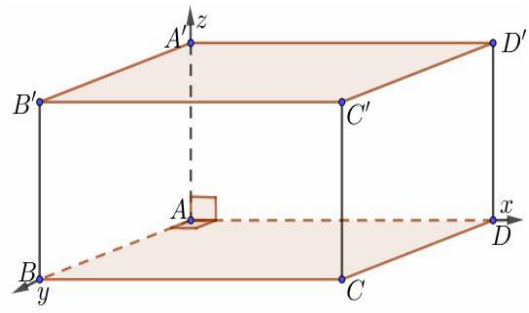
Vẽ đường cao SH trong SAB, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S(AH;0;AK)$$

II. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

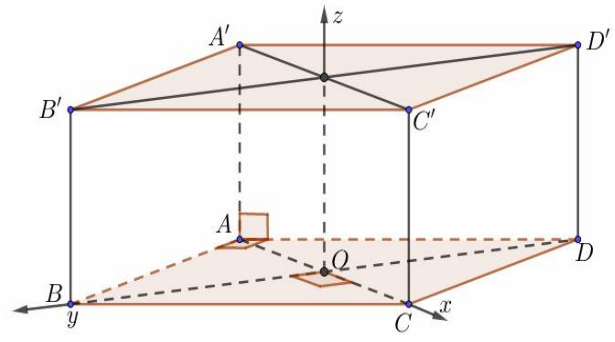
1. Lăng trụ đứng

a. Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

b. Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

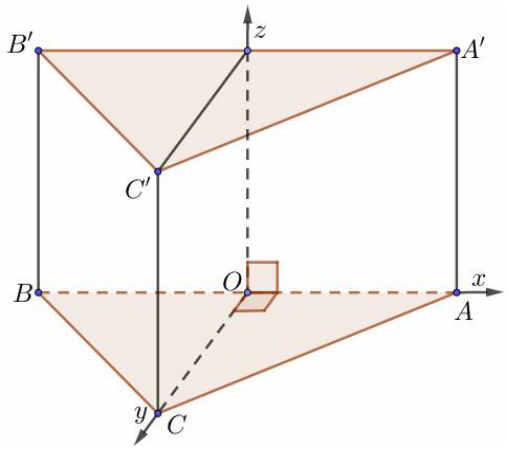


Gọi O là tâm hình thoi đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A(-OA;0;0),\ B(0;OB;0),\ C(OC;0;0),\ D(0;-OD;0),$$

$$A'(-OA;0;AA'),\ B'(0;OB;AA'),\ C'(OC;0;CC'),\ D'(0;-OD;DD')$$

c. Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân

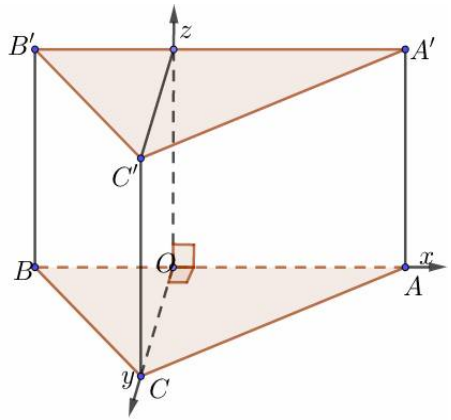


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$$O(0;0;0),\ A\left(\frac{AB}{2};0;0\right),\ B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right),\ C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'),\ B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right),\ C'(0;OC;CC').$$

c. Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

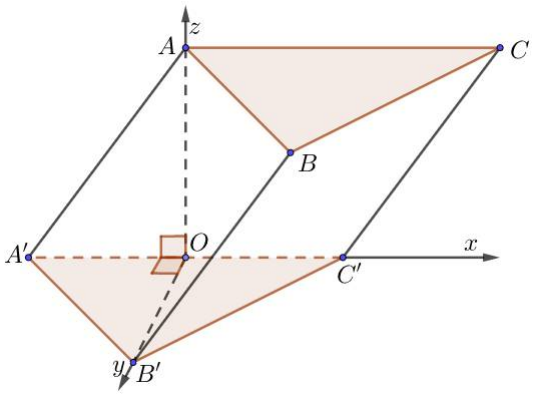


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC, chọn hệ trục như hình vẽ, khi đó tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

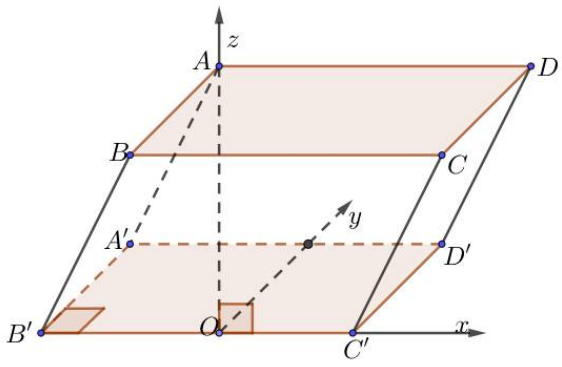
2. Lăng trụ xiên

a. Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

b. Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$.

Bài 1. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$. Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F}=(2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét, tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này?

Lời giải

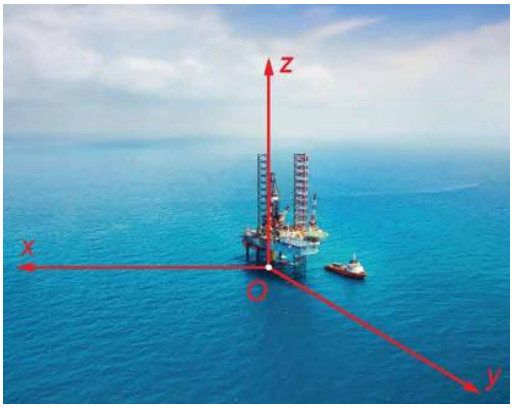
Trong không gian $Oxyz$, một người đã tác động một lực không đổi $\vec{F}=(2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(1;2;1)$. Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{OM}=2.1+3.2+(-1).1=7.$

Như vậy công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này là $A=7$ (J).

Bài 2. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là $30\,km$. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Lời giải

Vì $\overrightarrow{OM}(25;15;-10)\Rightarrow OM=\sqrt{25^2+15^2+(-10)^2}=5\sqrt{38}>30$

Do đó, ra đa không thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ tọa độ nói trên.

Bài 3. Rađa của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời như hình vẽ bên dưới, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét.



Hỏi rađa trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200;400;200)$ đối với hệ trục tọa độ không?

Lời giải

Khoảng cách từ trung tâm kiểm soát không lưu tới máy bay tại vị trí A bằng độ dài OA:

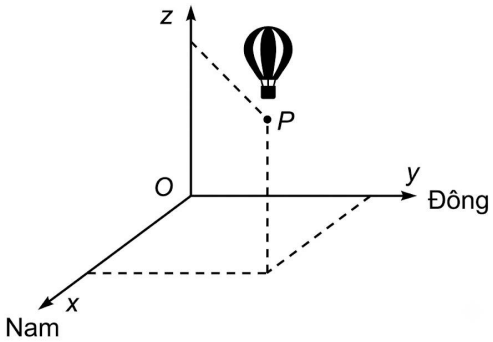
$$OA=\sqrt{(-200)^2+400^2+200^2}=200\sqrt{6}<500$$

Vì vậy rađa trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200;400;200)$.

Bài 4. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau 3 giờ bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).





a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

c) Biết khinh khí cầu bay theo một đường thẳng với vận tốc không đổi, tính vận tốc đó.

Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5;10;0,4)$.

b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{5^2+10^2+(0,4)^2}\approx 11,2(km)$

c) Vận tốc của khinh khí cầu là: $\frac{11,2}{3} \approx 3,73(h)$.

Bài 5. Hai chiếc khinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian bay, chiếc A nằm cách điểm xuất phát $2\,km$ về phía Nam và $1\,km$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\,km$. Chiếc B nằm cách điểm xuất phát $1\,km$ về phía Bắc và $1,5\,km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\,km$.



a) Tính tổng khoảng cách từ vị trí xuất phát đến hai chiếc khinh khí cầu A và B.

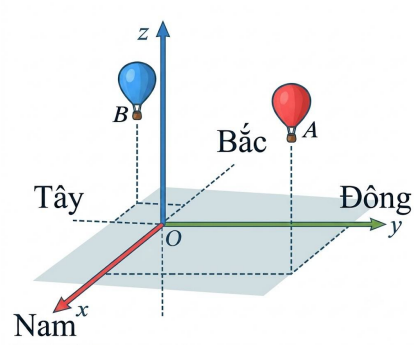
b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu.

c) Cùng thời điểm hai chiếc khinh khí cầu A và B cách điểm xuất phát như trên, bạn Trúc Linh đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí bạn Trúc Linh đứng có tổng khoảng cách đến hai kinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét?

Các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai của kilômét).

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



a) Chiếc khinh khí cầu A và B có tọa độ lần lượt là $A(2;1;0,5)$ và $B(-1;-1,5;0,8)$.

Tổng khoảng cách từ vị trí xuất phát đến hai chiếc khinh khí cầu A và B là:

$$OA+OB=\sqrt{2^2+1^2+0,5^2}+\sqrt{(-1)^2+(-1,5)^2+0,8^2}\approx 4,26km$$

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$AB=\sqrt{(-1-2)^2+(-1,5-1)^2+(0,8-0,5)^2}=\sqrt{15,34}\approx 3,92(km).$$

c) Chiếc khinh khí cầu A và B có tọa độ lần lượt là $A(2;1;0,5)$ và $B(-1;-1,5;0,8)$.

Gọi M là vị trí bạn Trúc Linh đứng quan sát.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy), suy ra $B'(-1;-1,5;-0,8)$

Khi đó $MA+MB=MA+MB'\geq AB'=\sqrt{(-1-2)^2+(-1,5-1)^2+(-0,8-0,5)^2}\approx 4,12\,km$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M,A,B' thẳng hàng và M thuộc đoạn AB'.

Vậy tổng khoảng cách từ vị trí bạn Trúc Linh đến hai kinh khí cầu là nhỏ nhất bằng $4,12\,km$.

Bài 6. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau 1 giờ bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



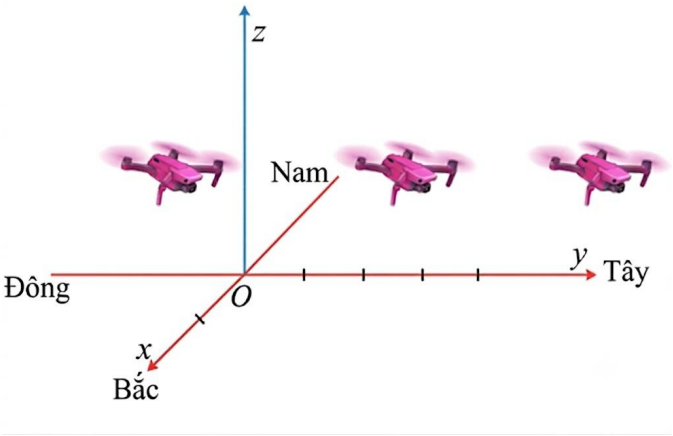
a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai sau 1 giờ bay (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômét).

b) Sau 1 giờ bay, xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của kilômét).

c) Sau 1 giờ bay, tại thời điểm này, trên mặt đất có bạn Minh Hiền đang đứng ở vị trí điểm M và có toạ độ $M(x;y;z)$. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí bạn Minh Hiền đứng có tổng khoảng cách đến chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai là nhỏ nhất. Tính giá trị $x-2y-3z$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của ba chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60;-40;2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80;50;4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $\left(\frac{-60+80}{2};\frac{-40+50}{2};\frac{2+4}{2}\right)=(10;5;3)$.

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$\sqrt{(-60-80)^2+(-40-50)^2+(2-4)^2}\approx 166,4(km)$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$\sqrt{10^2+5^2+3^2}\approx 11,6(km)$

c) $M(x;y;z)\in(Oxy)\Rightarrow M(x;y;0)$

Gọi chiếc máy bay thứ nhất là A và có tọa độ là $A(-60;-40;2)$.

Gọi chiếc máy bay thứ hai là B và có tọa độ là $B(80;50;4)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy), suy ra $B'(80;50;-4)$

Khi đó $MA+MB=MA+MB'\geq AB'=\sqrt{(80+60)^2+(50+40)^2+(-4-2)^2}\approx 166,5\,km$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M,A,B' thẳng hàng và M thuộc đoạn AB'.

Do đó: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB'}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=(x+60;y+40,-2)$ và $\overrightarrow{MB'}=(80-x;50-y,-6)$

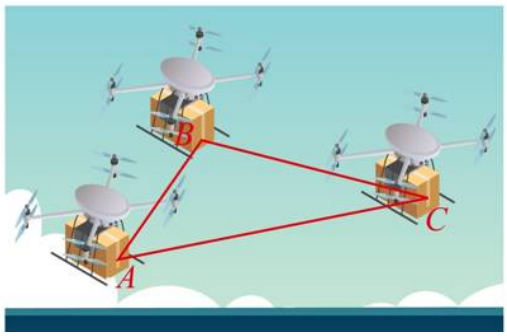
$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB'}\Leftrightarrow\begin{cases}x+60=k(80-x)\\y+40=k(50-y)\\-2=-6k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-25\\y=-\frac{35}{2}\Rightarrow M\left(-25;-\frac{35}{2};0\right)\\k=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy $x-2y-3z=10$

Bài 7. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có toạ độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9), C(9;11;4)$.

a) Tính các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Tính góc $\widehat{BAC}$.



Lời giải

a) Ta có:

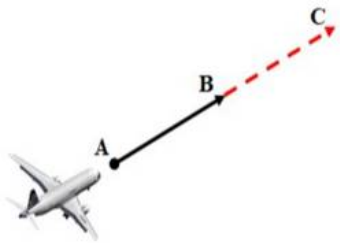
$\overrightarrow{AB} = (4;6;8) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = 2\sqrt{29}$

$\overrightarrow{AC} = (8;10;3) \Rightarrow \sqrt{8^2 + 10^2 + 3^2} = \sqrt{173}$

$\overrightarrow{BC} = (4;4;-5) \Rightarrow \sqrt{4^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{57}$

b) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{4.8 + 6.10 + 8.3}{2\sqrt{29} \cdot \sqrt{173}} \approx 0,82 \Rightarrow \widehat{BAC} = 35,03^\circ$

Bài 8. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 25 phút tiếp theo như thế nào?



Lời giải

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 25 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến C nên $AB = BC \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

Ta có:

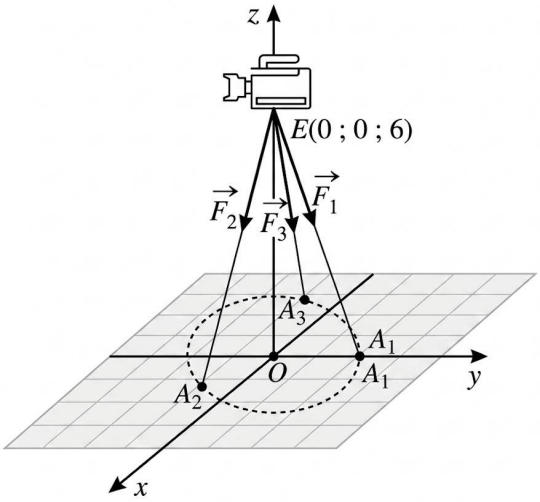
$\overrightarrow{AB} = (140;50;1)$

$\overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8)$

Mà $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases}x-940=140\\y-550=50\\z-8=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1080\\y=600\\z=9\end{cases}\Rightarrow C(1080;600;9)$

Vậy tọa độ của máy bay trong 25 phút tiếp theo là $(1080;600;9)$.

Bài 9. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là $300\,N$. Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ khi đó tích vô hướng của $\vec{F_1}.\vec{F_2}$ bằng?



Lời giải

Ta có:

$\overrightarrow{EA_1}=(0;1;-6)\Rightarrow EA_1\sqrt{37}$

$\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)\Rightarrow EA_2=\sqrt{37}$

$\overrightarrow{EA_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)\Rightarrow EA_3=\sqrt{37}$

$\Rightarrow EA_1=EA_2=EA_3=\sqrt{37}\Rightarrow\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_3}\right|$ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ

Do đó:

$\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{EA_1}=(0;k;-6k)$

$\overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$

$\overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{EA_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(0;0;-18k)$

Mà $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{P}=(0;0;-300)\Rightarrow -18k=300\Leftrightarrow k=\frac{50}{3}$

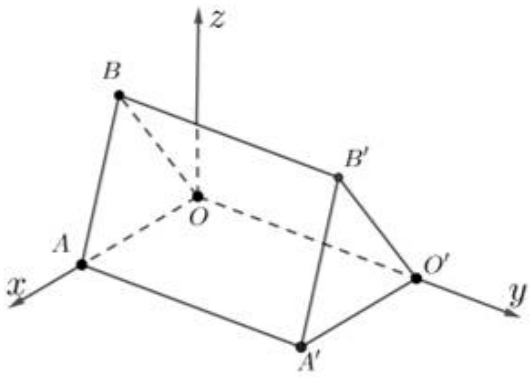
Vậy $\overrightarrow{F_1}=\left(0;\frac{50}{3};-100\right);\overrightarrow{F_2}=\left(\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{50}{6};-100\right);\overrightarrow{F_3}=\left(-\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{50}{6};-100\right)$

Suy ra $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\frac{88750}{9}$

Bài 10. Những căn nhà gỗ trong hình a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình b với OAB là tam giác cân tại B. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như hình b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox,Oy lần lượt là $450cm$ và $240cm$. Suy ra $A'A=450cm$ và $A'O'=240cm$.

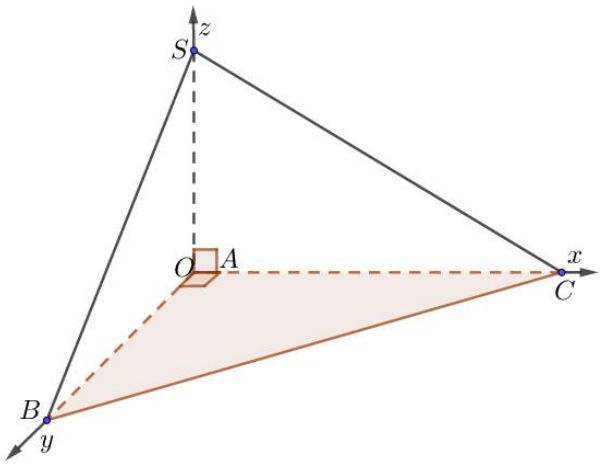
Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'}=(-120;0;300)$, do đó $A'B'=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\sqrt{(-120)^2+0^2+300^2}=60\sqrt{29}\approx 323(cm)$.

Vì $O'O=A'A=450cm$ và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $(0;450;0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'}=(120;0;300)$ và $O'B'=\left|\overrightarrow{O'B'}\right|=\sqrt{120^2+0^2+300^2}=60\sqrt{29}\approx 323(cm)$.

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $450cm$, chiều rộng là $240cm$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là $323cm$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, . . đôi một vuông góc và $AS=2025;AB=AC=2026$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AC,AB,AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các điểm A,B,C,S

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{SG}$.

Lời giải

a) Ta có: $A(0;0;0), B(0;2026;0), C(2026;0;0), S(0;0;2025)$

b) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2026}{3}$$

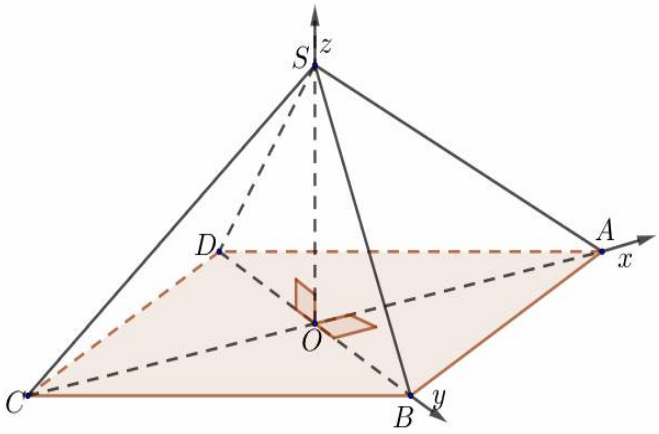
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2026}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{2026}{3};\frac{2026}{3};0\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SG} = \left(\frac{2026}{3};\frac{2026}{3};-2025\right)$$

Bài 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=\sqrt{2}$, $SA=\sqrt{10}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm hình vuông $ABCD$ và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia OA,OB,OS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB

b) Tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}$.

Lời giải

$ABCD$ là hình vuông cạnh $AB=\sqrt{2} \Rightarrow AC=2$

O trùng tâm hình vuông $ABCD$ nên $OA=OB=OC=OD=\dfrac{AC}{2}=1$

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=3$

Ta có: $O(0;0;0), A(1;0;0), B(0;1;0), C(-1;0;0), D(0;-1;0), S(0;0;3)$

a) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB

$I\left(\dfrac{1+0}{2};\dfrac{0+1}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$ hay $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

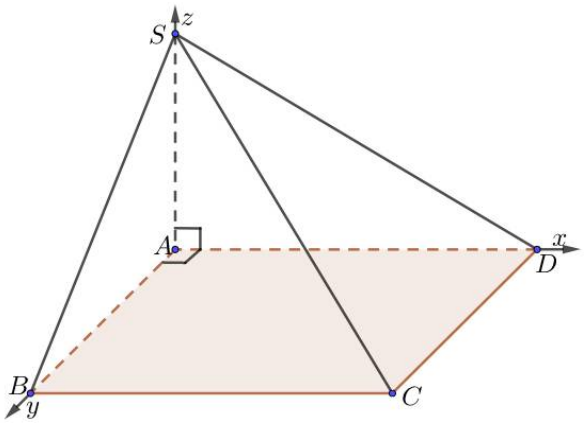
b) Ta có:

$\overrightarrow{SC}=(-1;0;-3)$

$\overrightarrow{SD}=(0;-1;-3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}=(-1).0+0.(-1)+(-3).(-3)=9$

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ tâm hình vuông $ABCD$.

b) Tính $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)$.

Lời giải

$ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $3 \Rightarrow AC=3\sqrt{2}$

SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0 nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA=AC=3\sqrt{2}$

Ta có: $A\equiv O(0;0;0), B(0;3;0), C(3;3;0), D(3;0;0), S\left(0;0;3\sqrt{2}\right)$

a) Gọi I là tọa độ tâm hình vuông $ABCD$, suy ra I là trung điểm đoạn thẳng AC

$I\left(\dfrac{0+3}{2};\dfrac{0+3}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$ hay $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

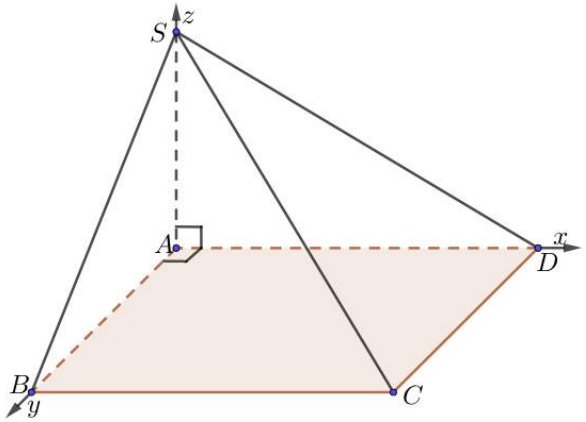
b) Ta có:

$\overrightarrow{SC}=\left(3;3;3\sqrt{2}\right)\Rightarrow SC=6$

$\overrightarrow{SD}=\left(3;0;3\sqrt{2}\right)\Rightarrow SD=3\sqrt{3}$

$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SD}\right|}=\dfrac{3.3+3.0+3\sqrt{2}.3\sqrt{2}}{6.3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=60^0$

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=3, AD=4$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết mặt bên (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.

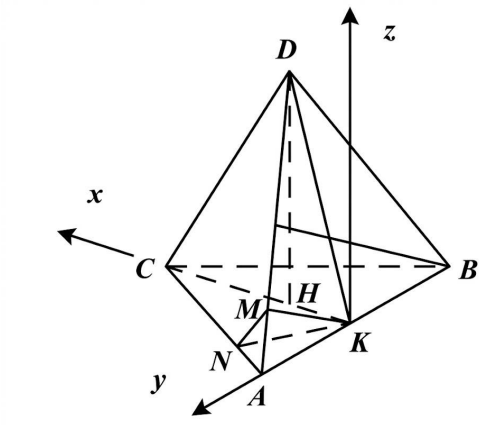
b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác BCD.

c) Tính $\left(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AC}\right)$.

d) Tìm tọa độ điểm M trên đoạn BD sao cho $BM=\dfrac{2}{3}MD$.

Lời giải

Bài 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và H là tâm của tam giác ABC. Gọi K là trung điểm AB, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng K và các tia Ox, Oy lần lượt trùng với các tia KC, KA và tia Oz vuông góc mặt phẳng (ABC) tại K như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm M, N theo a.



Lời giải

Ta có: $KC=\frac{\sqrt{3}}{2}a;DH=\frac{\sqrt{6}}{3}a;HK=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

$AN=\frac{1}{4}AC;AM=\frac{1}{4}AD$

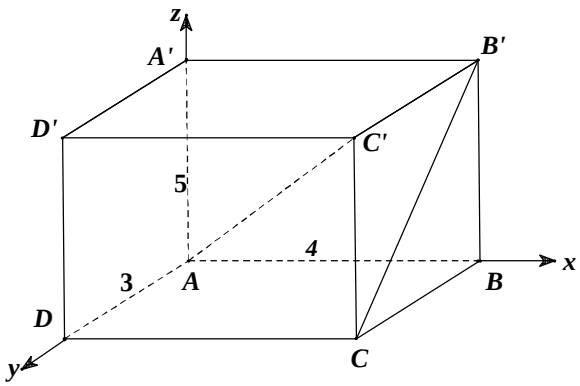
Theo hình vẽ ta có: $K\equiv O(0;0;0),A\left(0;\frac{a}{2};0\right),C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),D\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8};\frac{3a}{8};0\right)$.

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24};0;\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$

Vậy $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24};0;\frac{a\sqrt{6}}{12}\right),N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8};\frac{3a}{8};0\right)$

Bài 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4,AD=3,AA'=5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB,AD,AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính độ dài BG.

Lời giải

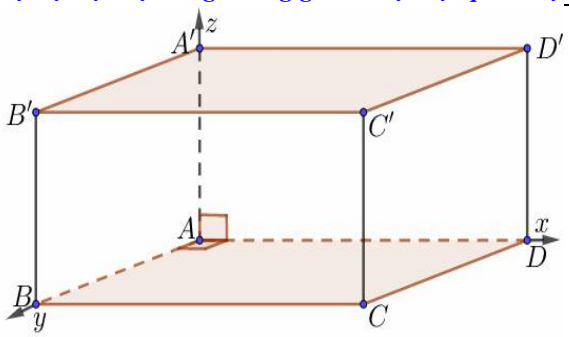
a) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, , khi đó tọa độ điểm:

$O\equiv A(00;0),B(4;0;0),C(4;3;0),D(0;3;0),A'(0;0;5),B'(4;0;5),C'(4;3;5),D'(0;3;5)$.

b) G là trọng tâm của tam giác $ACB'\Rightarrow G\left(\frac{8}{3};1;\frac{5}{3}\right)$

Độ dài BG là: $BG=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-4\right)^2+(1-0)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Bài 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AD,AB,AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính $\left(\overrightarrow{B'D},\overrightarrow{D'C}\right)$.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{B'M}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.

Lời giải

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$; $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $k\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.
B. $|\vec{a}|=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.
C. $\vec{a}-\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.
D. $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$. **C.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$. **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0),\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó, $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-4;0)$ và $\vec{v}=(-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u}+3\vec{v}$ có tọa độ là

A. $(-2;-10;3)$.
B. $(-2;-6;3)$.
C. $(-4;-8;4)$.
D. $(-2;-10;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\vec{v}=(-3;-6;3)$.

Do đó $\vec{u}+3\vec{v}=(-2;-10;3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;3;-2)$ và $\vec{v}=(2;1;-1)$. Toạ độ vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là:

A. $(3;4;-3)$.
B. $(-1;2;-3)$.
C. $(-1;2;-1)$.
D. $(1;-2;1)$.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{u}-\vec{v}=(-1;2;-1)$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{a}-\vec{b}=(2-1;3-1;2+1)=(1;2;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Lời giải

Chọn B.

Có $2\vec{a}=(4;-6;6)$; $3\vec{b}=(0;6;-3)$; $-2\vec{c}=(-6;2;-10)$.

Khi đó: $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=(-2;2;-7)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc tơ $\vec{a}(1;2;3),\vec{b}(2;2;-1),\vec{c}(4;0;-4)$. Toạ độ của véc tơ $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(7;0;-4)$. **B.** $\vec{d}(-7;0;-4)$. **C.** $\vec{d}(7;0;4)$. **D.** $\vec{d}(-7;0;4)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2),\vec{b}=(2;1;-3),\vec{c}=(0;3;-2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, tổng $x+y+z$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{OM}+\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=(3;0;-6) \Rightarrow x+y+z=-3$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

A. $\vec{a}=(4;1;-1)$. **B.** $\vec{a}=(3;1;-4)$. **C.** $\vec{a}=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $2\vec{y}=(2;0;-2)$.

$\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}=(2+2;1+0;-3-2)=(4;1;-5)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Vectơ $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;7;2)$. **B.** $(1;5;2)$. **C.** $(3;7;2)$. **D.** $(1;7;3)$.

Lời giải

Chọn A.

Có $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, gọi $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1=2.1+(-1)=1\\c_2=2.2+3=7\\c_3=2.1+0=2\end{cases}$$

Vậy $\vec{c}=(1;7;2)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các vecto $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Tọa độ của vectơ $\vec{w}$ là

A. $\vec{w}=(3;-1;2)$. **B.** $\vec{w}=(3;1;-2)$. **C.** $\vec{w}=(3;1;2)$. **D.** $\vec{w}=(3;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn B.

$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{u}=(1;2;-3)$

$\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\vec{v}=(2;-1;1)$

$\Rightarrow\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=(3;1;-2)$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2;2;0),\vec{b}(2;2;0),\vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2;6;2)$.

Vậy $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=2\sqrt{11}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u}=(2;-2;1)$

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ và $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$

Do đó $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Lời giải

Chọn A.

Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2=k\\m-1=3k\\3=k(-2n)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2=k\\m-1=6\\3=2(-2n)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2=k\\m=7\\n=\frac{-3}{4}\end{array}\right..$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=8$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=6$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=0$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-6$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.2+0.1+1.0=6$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{a}+\vec{b}=(-1;-1;5)\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}=-1.(-2)+(-1).1+5.2=11$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}=1$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=1\Leftrightarrow 3-m=1\Leftrightarrow m=2$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$

A. $\sqrt{19}$. **B.** -5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{39}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $\left(|\vec{u}+\vec{v}|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u};\vec{v})+|\vec{v}|^2$

$=2^2+2.2.5.\left(-\frac{1}{2}\right)+5^2=19$.

Suy ra $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{19}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vậy: $\cos(\vec{i},\vec{u})=\frac{\vec{i}.\vec{u}}{|\vec{i}|.|\vec{u}|}=\frac{1.\left(-\sqrt{3}\right)+0.0+0.1}{1.\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(\vec{i},\vec{u})=150°$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3.5+4.0+0.12}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}.\sqrt{5^2+0^2+12^2}}=\dfrac{-3}{13}$.

Câu 23. Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $120°$. **B.** $45°$. **C.** $135°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=135°$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;\text{m})$. Tìm m để $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90°$.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$

Lời giải

Chọn B.

$\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90°\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow5-m=0\Leftrightarrow m=5$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

$+\ \left(\vec{u},\vec{v}\right)=45°\Leftrightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sqrt{3\left(m^2+1\right)}=1-2m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m\geq0\\3m^2+3=1-4m+4m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\dfrac{1}{2}\\m^2-4m-2=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=\sqrt{5}$ **B.** $OA=5$ **C.** $OA=3$ **D.** $OA=9$

Lời giải

Chọn C.

$OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D.

$\overrightarrow{AB}=(2;3;-3)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{22}.$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;2;2)$. **B.** $(2;1;1)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi M là trung điểm của AB ta có: $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1 \\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{2+0}{2}=1 \end{cases}$.

Vậy $M(2;1;1)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử $B(x_B;y_B;z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có: $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2=\dfrac{-1+x_B}{2} \\ 1=\dfrac{5+y_B}{2} \\ -2=\dfrac{3+z_M}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_B=5 \\ y_B=-3 \\ z_B=-7 \end{cases}$.

Vậy $B(5;-3;-7)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-2+2+0}{3} = 0 \Rightarrow G(0;0;3) \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{3+5+1}{3} = 3 \end{cases}$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

A. $(3;6;3)$. **B.** $(3;6;-3)$. **C.** $(3;-3;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi M là trung điểm cạnh BC. Ta có: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AM} = 2.\dfrac{3}{2}.\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} = (3;6;-3)$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2), B(2;1;-3)$, $C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

A. $G(2;-1;-1)$. **B.** $G(2;-2;-1)$. **C.** $G(0;-1;-1)$. **D.** $G(6;-3;-3)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 2 \\ y_G = \dfrac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = -2 \\ z_G = \dfrac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = -1 \end{cases}$. Vậy $G(2;-2;-1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2;3;1); \overrightarrow{AM} = (x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{-1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases}$.

Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm. $A(-1;-2;3)$ $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;5;-2)$; $\overrightarrow{AC}(5;4;-1)$.

$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{5+20+2}{\sqrt{30}.\sqrt{42}}=\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3);B(-1;2;1);C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. -6. **B.** -14. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2);\overrightarrow{AC}=(2;-3;-5)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, ba điểm $M(1;0;2)$, $N(2;-3;0)$ và $P(2;3;2)$. Chu vi của tam giác MNP là:

A. $\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{40}$. **B.** $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$. **C.** 64. **D.** $\sqrt{20}+\sqrt{22}+\sqrt{24}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$MN=\sqrt{(2-1)^2+(-3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{14}$

$MP=\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2+(2-2)^2}=\sqrt{10}$

$NP=\sqrt{(2-2)^2+(3+3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}$

Vậy chu vi tam giác MNP là: $\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{40}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(5;3;-1)$, $B(2;3;-4)$, $C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9-2\sqrt{6}$. **B.** $9-3\sqrt{6}$. **C.** $9+3\sqrt{6}$. **D.** $9+2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AC^2+BC^2=9+9=AB^2\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

Suy ra: $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{\dfrac{1}{2}CA.CB}{\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\dfrac{3.3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}}=9-3\sqrt{6}$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1),B(1;-1;2),C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

A. $M(5;5;0)$. **B.** $M(-2;-6;4)$. **C.** $M(-2;6;-4)$. **D.** $M(2;-6;4)$.

Lời giải

Chọn B.

Tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(1-3)-(1-3)=-2\\y=2(-1-2)-(2-2)=-6\\z=2(2-1)-(-1-1)=4\end{cases}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;1;-2)$, $B(-1;-1;-1),C(-3;1;1)$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\sqrt{57}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{33}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;1);\ \overrightarrow{AC}=(0;0;3)\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}=(0;0;6)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=(2;-2;7)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{57}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $S(1,2,3);A(2,2,3);B(1,3,3);C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5;9;13)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{3};3;\dfrac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{9}{4};\dfrac{13}{4}\right)$

Lời giải

Chọn D.

Gọi $G(x,y,z)$ là trọng tâm của hình chóp $SABC$ suy ra

Ta có: $\begin{cases}x=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_S}{4}\\y=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_S}{4}\\z=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_S}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+1+1+1}{4}=\dfrac{5}{4}\\y=\dfrac{2+3+2+2}{4}=\dfrac{9}{4}\\z=\dfrac{3+3+4+3}{4}=\dfrac{13}{4}\end{cases}$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Tìm điểm E thỏa năm đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$.

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x;y;z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE}=(x-7;y-4;z+2)$; $2\overrightarrow{EB}=(2-2x;4-2y;-6-2z)$

$$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-7=2-2x\\y-4=4-2y\\z+2=-6-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\frac{8}{3}\\z=-\frac{8}{3}\end{cases}$$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD=BC$.

A. $D(6;0;0), D(12;0;0)$ **B.** $D(0;0;0), D(6;0;0)$

C. $D(-2;1;0), D(-4;0;0)$ **D.** $D(0;0;0), D(-6;0;0)$

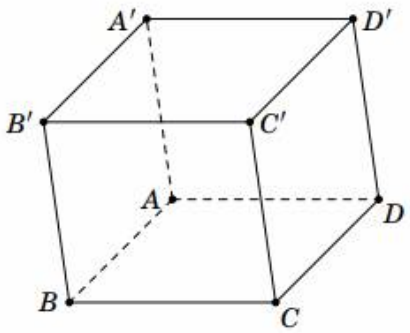
Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x;0;0)\in Ox$

$$AD=BC\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+16}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=6\end{array}\right.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$.



Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$.

Suy ra $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC'=3|a|$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ với $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{BD}=(-8;-4;-8) \Rightarrow BD=12 \Rightarrow AB=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC=3\sqrt{10}$.

$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|2\overrightarrow{CM}\right|=2CM=6\sqrt{10}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)\\ \overrightarrow{BC}=(-7;-5;-1)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC.

$\Rightarrow I\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right)$. Vậy $a+2b+c=3$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;2;0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz), điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C.

A. $M\left(\dfrac{3}{4};0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\dfrac{-3}{4};0;\dfrac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\dfrac{3}{4};0;\dfrac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\dfrac{-3}{4};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $A(2;2;2)$ và $PA=PB=PC=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;3;2), B(1;0;1), C(5;-3;2)$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2m$. Giá trị của m là

A. $m=-9$. **B.** $m=9$. **C.** $m=18$. **D.** $m=18$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-6;0)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2m$

$\Rightarrow 0.4+(-3)(-6)+(-1).0=2m$

$\Rightarrow 18=2m$

$\Rightarrow m=9$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'(-1;0;0)$. **B.** $M'(1;0;0)$. **C.** $M'\left(1;0;\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'\left(1;-\sqrt{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục Ox $\Rightarrow M'(1;0;0)$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\sqrt{2};0;\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(0;-\sqrt{2};0\right)$. **B.** $M'\left(\sqrt{2};0;0\right)$. **C.** $M'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'(0;0;0)$.

Lời giải

Chọn D.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục Oy $\Rightarrow M'(0;0;0)$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;2;-\sqrt{3}\right)$. Tìm điểm $M'\in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$. **B.** $M'\left(0;2;-\sqrt{3}\right)$. **C.** $M'\left(0;0;-\sqrt{3}\right)$. **D.** $M'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục Oz $\Rightarrow M'\left(0;0;-\sqrt{3}\right)$

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$. Tìm điểm $A'\in(Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

A. $A'(-1;1;0)$. **B.** $A'(1;1;0)$. **C.** $A'(2;2;0)$. **D.** $A'(2;-1;2)$.

Lời giải

Chọn B.

AA' ngắn nhất khi điểm A' là hình chiếu điểm A trên mặt phẳng (Oxy) $\Rightarrow A'(1;1;0)$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5}\right)$. Tìm điểm $M'\in(Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5}\right)$.

B. $M'\left(1;1-\sqrt{2};0\right)$.

C. $M'\left(1;0;2+\sqrt{5}\right)$.

D. $M'\left(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oxz)\Rightarrow M'\left(1;0;2+\sqrt{5}\right)$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1+\sqrt{2};2;1-\sqrt{2}\right)$. Tìm điểm $M'\in(Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

A. $M'\left(1+\sqrt{2};0;1-\sqrt{2}\right)$.

B. $M'\left(0;2;1-\sqrt{2}\right)$.

C. $M'\left(0;-2;1-\sqrt{2}\right)$.

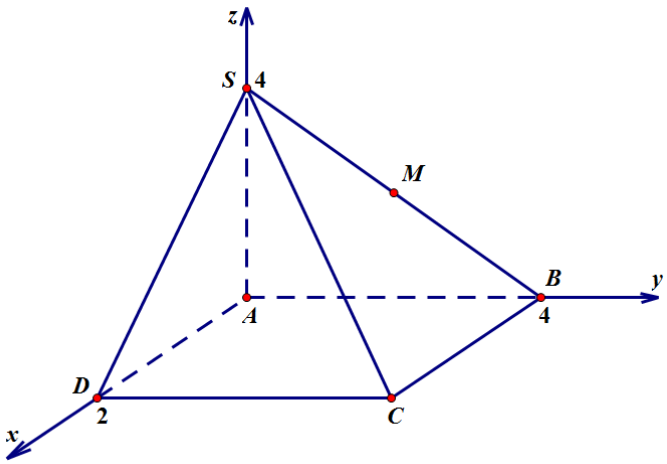
D. $M'\left(0;-2;1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oyz)\Rightarrow M'\left(0;2;1-\sqrt{2}\right)$

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD.



Độ dài MG là:

A. $MG=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $MG=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $MG=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $MG=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ : $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$.

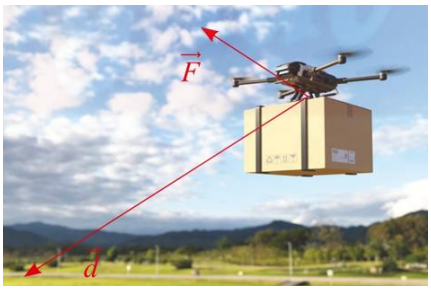
M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

G là trọng tâm của tam giác $SCD \Rightarrow G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

Độ dài MG là: $MG = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-2\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 55. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20;30;-10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (hình vẽ) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150;200;100)$ (đơn vị: m).



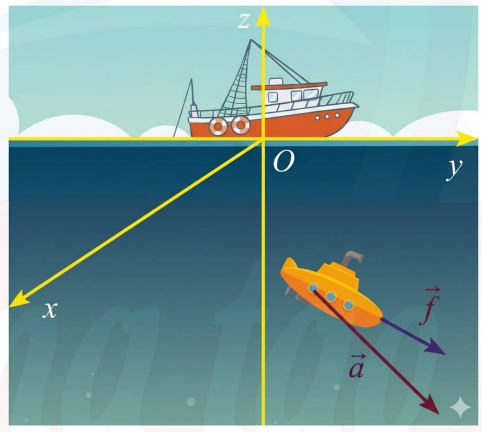
A. $3200J$. **B.** $8000J$. **C.** $10000J$. **D.** $5800J$.

Lời giải

Chọn B

Công sinh bởi lực $\vec{F}$ là: $A = \vec{F} \cdot \vec{d} = 20.150 + 30.200 - 10.100 = 8000J$

Câu 56. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Một thiết bị thăm dò đáy biển (hình vẽ) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5;4;-2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70;20;-40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



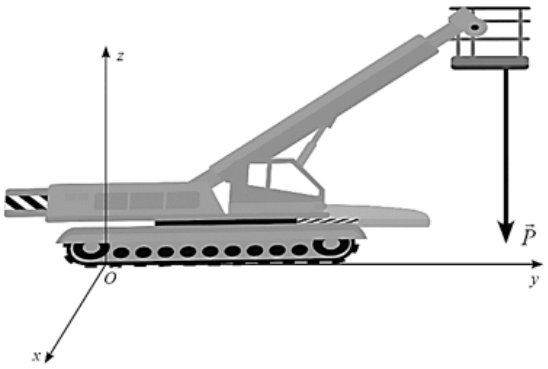
A. $510J$. **B.** $350J$. **C.** $700J$. **D.** $450J$.

Lời giải

Chọn A

Công sinh bởi lực $\vec{f}$ là: $A = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5.70 + 4.20 - 2 \cdot (-40) = 510J$

Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Một robot cắt dây đã di chuyển một lực $\vec{P} = (0;0;-150)$ (đơn vị: N) theo độ dời $\vec{d} = (0;-8;-10)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{P}$ khi thực hiện độ dời nói trên.



A. $3000J$. **B.** $2500J$. **C.** $2000J$. **D.** $1500J$.

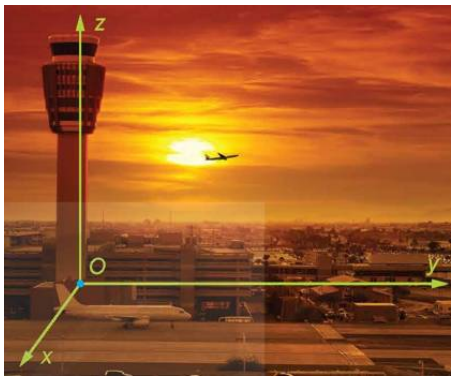
Lời giải

Chọn D.

Công sinh bởi lực $\vec{P}$ khi thực hiện độ dời $\vec{d}$ là:

$A = \vec{P}.\vec{d} = 0.0 + 0.(-8) + (-10).(-150) = 1500(J)$

Câu 58. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía Nam với tốc độ không đổi là $890\,km/h$ trong 45 phút. Xác định toạ độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong 45 phút đó đối với hệ toạ độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



A. $(0;890;0)$. **B.** $(0;667,5;0)$. **C.** $(0;0;667,5)$. **D.** $(667,5;0;667,5)$.

Lời giải

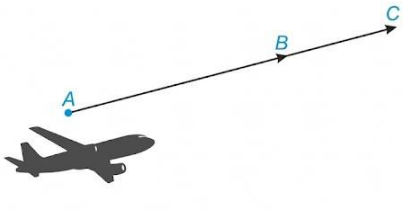
Chọn B

Quãng đường máy bay bay được với vận tốc $890km/h$ trong 45 phút là: $890.\frac{45}{60}=667,5\left(km\right)$

Vì máy bay duy trì hướng bay về phía nam nên tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó với hệ tọa độ đã chọn là $\left(0;667,5;0\right)$.

Câu 59. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 40 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 20 phút bằng bao nhiêu?





A. $\left(910;575;8,5\right)$ **B.** $\left(1010;550;17\right)$ **C.** $\left(1010;575;17\right)$ **D.** $\left(1010;575;8,5\right)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 20 phút tiếp theo.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ta có:

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{940-800}{2};\frac{550-500}{2};\frac{8-7}{2}\right)=(70;25;0,5)$.

$\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$

Mà $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases}x-940=70\\y-550=25\\z-8=0,5.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=8,5\end{cases}\Rightarrow C\left(1010;575;8,5\right)$

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $\left(1010;575;8,5\right)$.

Câu 60. Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a}=(300;200;400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.



Tính tốc độ của máy bay B (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $1414\,km/h$ **B.** $1515\,km/h$ **C.** $1717\,km/h$ **D.** $1616\,km/h$

Lời giải

Chọn D

Gọi vectơ $\vec{b}=(x;y;z)$ (đơn vị: km/h) là vectơ vận tốc của máy bay B

Ta có: $3\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}3.300=x\\3.200=y\\3.400=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=900\\y=600\\z=1200\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=(900;600;1200)$

Tốc độ của máy bay B là: $|\vec{b}|=\sqrt{900^2+600^2+1200^2}\approx 1616\,km/h$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$ và $\vec{c}=(-1;1;2)$

a) $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

b) $|\vec{b}|=\sqrt{3}$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng.

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $\vec{a}=(2;-2;-4)\Rightarrow\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$

b) Ta có $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

c) Ta có $\vec{a}=(2;-2;-4)=-2(-1;1;2)=-2\vec{c}$, do đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.

d) Ta có $\vec{a}.\vec{b}=2.1+(-2).(-1)+(-4).1=0$, do đó $\vec{a}\perp\vec{b}$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$.

a) $|\vec{a}|=\sqrt{14}$

b) $\vec{a}.\vec{b}=19$

c) $\cos(\vec{a}.\vec{c})=\dfrac{2\sqrt{91}}{91}$

d) $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+1}=\sqrt{14}$

b) $\vec{a}.\vec{b}=2.(-1)+3.5+1.2=15$

c) $\cos(\vec{a}.\vec{c})=\dfrac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|.|\vec{c}|}=\dfrac{2.4+3.(-1)+1.3}{\sqrt{2^2+3^2+1}.\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$

d) Đặt: $\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+m.\vec{c}$, với $m,n,p\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow (-3;22;5)=m.(2;3;1)+n.(-1;5;2)+p.(4;-1;3)\Rightarrow \begin{cases}2m-n+4p=-3\\3m+5n-p=22\\m+2n+3p=5\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=3\\p=-1\end{cases}.$$

Vậy $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{17}$

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=-23$

d) $\left|3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}\right|=\sqrt{929}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=(2;-3;2)\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

b) Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{17}$

c) Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=(2;-3;2)$ và $\vec{b}-\vec{c}=(-1;-5;-3)$

nên $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=2.(-1)+(-3).(-5)+2.(-3)=-7$

d) Ta có: $3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}=(11;22;18)$

$\Rightarrow \left|3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}\right|=\sqrt{11^2+22^2+18^2}=\sqrt{929}$

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(-4;-2;6)$, $\vec{c}=(m-1;2;0)$

a) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.

b) $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$.

c) $\vec{a}.\vec{b}=0$.

d) Nếu $\vec{b}\perp\vec{c}$ thì $m=1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=-2(2;1;-3)\Rightarrow \vec{b}=-2\vec{a}$ suy ra vectơ $\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{b}$

b $\vec{b}=-2\vec{a}\Rightarrow \left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$.

c) $\vec{a}.\vec{b}=2.(-4)+1.(-2)+(-3).6=-28\neq 0$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\vec{b}.\vec{c}=0\Leftrightarrow -4(m-1)+(-2).2=0\Leftrightarrow m=0$

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$.

a) $|\vec{b}|=4$

b) $\vec{a}.\vec{b}=17$

c) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$

d) Biết vectơ $\vec{c}=(x;y;1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$. Khi đó $x+y=\dfrac{6}{5}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

b) $\vec{a}.\vec{b}=1.(-1)+3.2+4.3=17$

c) $\vec{a}=(1;3;4)\Rightarrow\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

d) ta có vectơ $\vec{c}=(x;y;1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$. nên

$$\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=0\\ \vec{c}.\vec{b}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1x+3y+4.1=0\\ -1x+2y+3.1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=-4\\ -x+2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\\ y=-\dfrac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow\vec{c}=\left(\frac{1}{5};-\frac{7}{5};1\right)$$

$$\Rightarrow x+y=-\frac{6}{5}$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(3;0;1),\vec{b}=(1;-1;-2),\vec{c}=(1;7;-3)$.

a) $|\vec{c}|=\sqrt{59}$.

b) $\vec{a}.\vec{b}=-1$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

d) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ lớn hơn $90°$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+7^2+(-3)^2}=\sqrt{59}$

b) Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=3.1+0.(-1)+1.(-2)=1$

c) Ta có: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10};|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

$\Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}.\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{15}}{30}$

d) Ta có $\vec{c}.\vec{a}=1.3+7.0+(-3).1=0\Rightarrow \vec{c}\perp\vec{a}$ hay $(\vec{a},\vec{c})=90°$

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2), B(1;0;3), C(0;2;-2)$.

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$

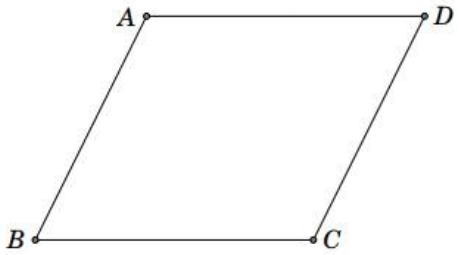
b) $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

d) $\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$ (quy tắc hình bình hành)

b) $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là trung điểm AC hay $\left(\dfrac{-1+0}{2};\dfrac{1+2}{2};\dfrac{2-2}{2}\right)$ hay $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$

d) Gọi tọa độ điểm D là $(x;y;z)$

$\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$

$\overrightarrow{DC}=(-x;2-y;-2-z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\begin{cases}-x=2\\2-y=-1\\-2-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=3\\z=-3\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(-1;2;-5)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$

Câu 68. Trong mặt phẳng $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};4\right)$.

b) Tọa độ vectơ là $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

c) $a+b+c=-2$

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{14\sqrt{57}}{57}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};4\right)$.

b) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

c) $G(1;c;3)$ làm trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}1=\frac{1+2+a}{3}\\c=\frac{-3-4-2}{3}\\3=\frac{3+5+b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\c=-3\end{cases}$

Vậy: $a+b+c=-2$

d) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(-1;1;-6)$

$$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1.(-1)+(-1).1+2.(-6)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+(-6)^2}}=-\frac{7\sqrt{57}}{57}$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$

b) Lấy điểm $N\in Oy$. Độ dài đoạn thẳng NA ngắn nhất bằng 4.

c) Lấy điểm $Q\in(Oxz)$. Độ dài đoạn thẳng QB ngắn nhất khi đó tọa điểm Q là $(3;0;1)$.

d) Biết tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$. Khi đó $x+y-z=11$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$

b) NA ngắn nhất khi điểm N là hình chiếu điểm A trên trục $Oy \Rightarrow N(0;1;0)$

Do đó: $\overrightarrow{NA}=(0;0;-2)\Rightarrow NA=2$

b) QB ngắn nhất khi điểm Q là hình chiếu điểm B trên $(Oxz) \Rightarrow Q(3;0;1)$

d) Gọi $M(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x;y-1;z+2)$; $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$.

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y-1=-6\\z+2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-5\\z=7\end{cases}.$$

Vậy $x+y+z=11$

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$.

a) $AB=\sqrt{26}$

b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-26$

c) Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$. Khi đó $x+y+z=2$.

d) Gọi $D(a;b;c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Khi đó $a+b+c=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) b) Ta có: $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;4)\Rightarrow|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{26};\overrightarrow{BC}=(-6;8;2)\Rightarrow|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{26}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-1).(-6)+(-3).8+4.2=-10$

c) Ta có:

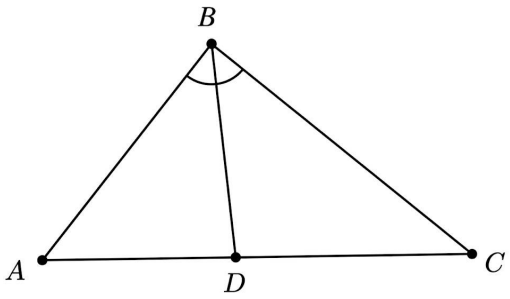
$\overrightarrow{MA}=(1-x;2-y;-1-z)$

$\overrightarrow{MC}=(-4-x;7-y;5-z)$

$3\overrightarrow{MB}=(6-3x;-3-3y;9-3z)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MB}$ nên $\begin{cases}1-x-4-x=6-3x\\2-y+7-y=-3-3y\\-1-z+5-z=9-3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-12\\z=5\end{cases}\Rightarrow M(9;-12;5)\Rightarrow x+y+z=2$

d)



Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra : $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow \overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

$\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;-2), B(2;-1;3), C(1;3;-2), D(5;-1;8)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$

b) $AC=\sqrt{5}$

c) Ba điểm A,B,C có thẳng hàng.

d) Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$

b) $\overrightarrow{AC}=(1;2;0)\Rightarrow AC=\sqrt{5}$

c) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5), \overrightarrow{AC}=(1;2;0)$. Vì $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-2}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

d) Ta có $\overrightarrow{CD}=(4;-4;10)$. Xét toạ độ của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$, ta thấy: $\frac{4}{2}=\frac{-4}{-2}=\frac{10}{5}$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương. Suy ra AB và CD song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này không thể trùng nhau (do A,B,C không thẳng hàng). Vậy $AB//CD$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Toạ độ ba đỉnh A,B,C lần lượt là $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang $ABCD$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$

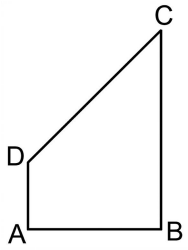
b) $BC=3\sqrt{2}$

c) $BC=2AD$

d) Giả sử đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c=6$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$

b) Ta có $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên:

$$\frac{1}{2}AB(AD+BC)=6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}.3.\left(AD+3\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\frac{1}{3}BC\Rightarrow BC=3AD.$$

d) Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có $\begin{cases}a-1=\frac{4}{3}\\b-2=\frac{1}{3}\\c-1=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{3}\\b=\frac{7}{3}\\c=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Biết $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=23$

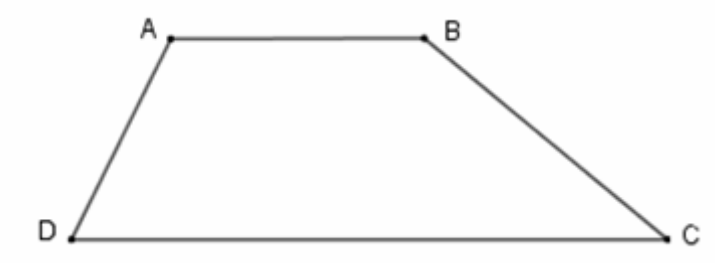
b) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\sqrt{70}}{70}$

c) $AD=3BC$

d) Biết đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c=10$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-1), \overrightarrow{BC}=(-5;-2;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=23$

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-1) \Rightarrow AB=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1) \Rightarrow BC=\sqrt{30}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{23}{\sqrt{21}.\sqrt{30}}=\dfrac{23\sqrt{70}}{210}$

c) Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC)$

$\Leftrightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC}. \Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC=AD+BC \Leftrightarrow AD=2BC.$

d) Ta có $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D+2=-10 \\ y_D-3=-4 \\ z_D-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-12 \\ y_D=-1 \\ z_D=3 \end{cases}$.

Vậy $D(-12;-1;3) \Rightarrow a+b+c=-10$

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(-2;3;4)$ và $C(4;-6;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;6)$.

b) Hình chiếu vuông góc của B lên trục Ox là $B'(-2;3;0)$.

c) Tồn tại 1 điểm M thuộc trục hoành sao cho tam giác MBC vuông tại M.

d) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(1;-3;7)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(-2-1;3-0;4+2)=(-3;3;6)$.

b) Hình chiếu vuông góc của B lên trục Ox là $B'(-2;0;0)$.

c) M thuộc trục hoành $\Rightarrow M\left(x_M;0;0\right)$.

Tam giác MBC vuông tại M

Suy ra $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

$\Rightarrow\left(-2-x_M\right)\cdot\left(4-x_M\right)+3\cdot\left(-6\right)+4\cdot1=0$.

$\Rightarrow x_M^2-2x_M-22=0$.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{23}\\x=1-\sqrt{23}\end{array}\right.$.

Suy ra tồn tại 2 điểm M thuộc trục hoành sao cho tam giác MBC vuông tại M.

d) $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow\begin{cases}-3=4-x_D\\3=-6-y_D\\6=1-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=7\\y_D=-9\\z_D=-5\end{cases}$.

Vậy $D\left(7;-9;-5\right)$.

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(4;0;2)$, $B(1;-4;-2)$ và $C(2;1;1)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{7}{3};-1;\frac{1}{3}\right)$.

b) Điểm D thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là $D\left(5;5;5\right)$.

c) Tam giác ABC là tam giác tù.

d) Gọi điểm $E\left(a;b;c\right)$ là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ $\left(Oxz\right)$, khi đó $\frac{2a}{c}+b=\frac{9}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Tọa độ trọng tâm là $G\left(\frac{4+1+2}{3};\frac{0+\left(-4\right)+1}{3};\frac{2+\left(-2\right)+1}{3}\right)=G\left(\frac{7}{3};-1;\frac{1}{3}\right)$.

b) Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-2=-3\\y_D-1=-4\\z_D-1=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-1\\y_D=-3\\z_D=-3\end{cases}$

Vậy $D\left(-1;-3;-3\right)$

c) Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(1;5;3\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(-2;1;-1\right)$.

Do đó $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=-2+5-3=0$ nên tam giác ABC vuông tại C.

d) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E(a;0;c)$.

Ta có $\overrightarrow{BE}=(a-1;4;c+2), \overrightarrow{BC}=(1;5;3)$.

E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz)

Suy ra B,C,E thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=k\\4=5k\\c+2=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{5}\\k=\dfrac{4}{5}\\c=\dfrac{2}{5}\end{cases}.$$

Suy ra $E\left(\frac{9}{5};0;\frac{2}{5}\right)\Rightarrow\frac{2a}{c}+b=9$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;6;2)$ và $C(-2;2;4)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M.

a) $\overrightarrow{AB}(-7;3;1)$

b) Tam giác ABC vuông tại A.

c) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$

d) Tọa độ của điểm M là $(-9;0;-2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}(-7;3;1)$

b) $\overrightarrow{AB}(7;3;1)$; $\overrightarrow{AC}(0;-1;3)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên tam giác ABC vuông tại A

c) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$

d) $M\in(Oxz)$ nên gọi tọa độ $M(x;0;z)$. Do M thuộc đường thẳng AB nên 3 điểm $A;B;M$ thẳng hàng.

$\overrightarrow{AB}(7;3;1)$; $\overrightarrow{AM}(x+2;-3;z-1)$.

3 điểm $A;B;M$ thẳng hàng $\frac{x+2}{7}=\frac{-3}{3}=\frac{z-1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\z=0\end{cases}$.

Vậy $M(-9;0;0)$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC với $A(1;-3;3), B(2;-4;5), C(3;-2;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2)$.

b) Điểm $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác ΔABC thì $a+b+c=2$.

c) Điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, khi đó $2x+y+z>4$.

d) Gọi $M(x;y;z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho biểu thức $P=-2MA^2-MB^2-3MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $x+y-z>-5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$.

b) Điểm $G(2;-3;3)\Rightarrow a+b+c=2$.

c) Điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IA}(1-x;-3-y;3-z);\overrightarrow{IB}(2-x;-4-y;5-z);\overrightarrow{IC}(3-x;-2-y;1-z)$

$$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}13-6x=0\\-16-6y=0\\14-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13}{6}\\y=\dfrac{-8}{3}\\z=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow 2x+y+z=4.$$

d) Gọi Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, theo (c) ta có $I\left(\dfrac{13}{6};\dfrac{-8}{3};\dfrac{7}{3}\right)$

$$\begin{aligned}2MA^2+MB^2+3MC^2&=2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+3\overrightarrow{MC}^2\\&=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=6MI^2+2IA^2+IB^2+3IC^2\Rightarrow P=-6MI^2-2IA^2-IB^2-3IC^2\end{aligned}$$

Do tổng $2IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI^2 nhỏ nhất hay IM nhỏ nhất.

Mà M nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên IM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oyz). Suy ra: $M\left(0;\dfrac{-8}{3};\dfrac{7}{3}\right)\Rightarrow x+y-z=-5$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1;-2;0), B(2;1;-2), C(0;3;4)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(1;3;-2)$.

b) Toạ độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(0;0;-2)$.

c) Gọi điểm $E(a;b;c)$ là hình chiếu của C lên AB, khi đó $7a+3b+c=8$.

d) Toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng xOz sao cho $T=MC+MB$ nhỏ nhất là $M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(1;3;-2)$

b) Toạ độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(2;1;0)$.

c) Gọi điểm $E(a;b;c)$ là hình chiếu của C lên AB,

Ta có $\overrightarrow{CE}=(a;b-3;c-4), \overrightarrow{AE}=(a-1;b+2;c), \overrightarrow{AB}=(1;3;-2)$.

Vì $CE\perp AB$ và vectơ $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên $\begin{cases}a+3(b-3)-2(c-4)=0\\ \frac{a-1}{1}=\frac{b+2}{3}=\frac{c}{-2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+3b-2c=1\\3a-b=5\\-2a-c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{10}{7}\\b=\frac{-5}{7}\\c=-\frac{6}{7}\end{cases}\Rightarrow 7a+3b+c=7.$$

d) Điểm M thuộc mặt phẳng xOz suy ra $M(a;0;c)$.

Hai điểm B,C cùng phía với mặt phẳng xOz, ta gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng xOz, khi đó $B'(2;-1;-2)$, suy ra $MB=MB'$

Ta có $MB+MC=MB'+MC\geq B'C$.

Dấu bằng xảy ra khi B',M,C thẳng hàng.

$\overrightarrow{CM}=(a;-3;c-4)$; $\overrightarrow{CB'}=(2;-4;-6)$.

$$A,M,B' \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow\frac{a}{2}=\frac{-3}{-4}=\frac{c-4}{-6}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\c=-4\end{cases}\Rightarrow M\left(3;0;-\frac{1}{2}\right).$$

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;-1)$, $N(4;3;1)$.

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Oy có tọa độ là $(0;2;0)$.

b) Gọi E là điểm đối xứng của điểm M qua N. Tọa độ của điểm E là $(5;8;3)$.

c) Cho $P(1;m;n)$. Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $2m+5n=20$.

d) Điểm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $T=\left|2\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $3a-2b+c=20$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Vì hình chiếu của điểm M trên trục Oy có tọa độ là $(0;-2;0)$.

b) Gọi $E(a;b;c)$ là điểm đối xứng của điểm M qua N.

Khi đó N là trung điểm của ME.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{a+3}{2}=4\\ \dfrac{b-2}{2}=3\\ \dfrac{c-1}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=8\\ c=3\end{cases}$. Suy ra tọa độ của điểm E là $(5;8;3)$.

c) Cho $P(1;m;n)$. Ta có $\overrightarrow{NP}=(-3;m-3;n-1)$; $\overrightarrow{MN}=(1;5;2)$.

Do ΔMNP vuông tại N nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0\Rightarrow -3+5(m-3)+2(n-1)=0\Rightarrow 5m+2n=20$.

d) Điểm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên $c=0$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(3-a;-2-b;-1)\Rightarrow 2\overrightarrow{IM}=(6-2a;-4-2b;-2)$; $\overrightarrow{IN}=(4-a;3-b;1)$.

Suy ra $2\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=(2-a;-7-b;-3)$.

Khi đó $T=\left|2\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right|=\sqrt{(2-a)^2+(7+b)^2+9}\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=2\\ b=-7\end{cases}$.

Khi đó $3a-2b+c=3.2-2.(-7)=20$.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 diểm $A(2,-1,1), B(-1,3,-1), C(5;-3,4)$.

a) Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=23$.

b) Góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $\dfrac{-23}{\sqrt{638}}$.

d) Lấy điểm $M(a;b;c)\in(Oxy)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+6b+3c=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $\overrightarrow{AB}(-3;4;-2)$; $\overrightarrow{AC}(3;-2;3)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3.3 + 4.(-2) + 3.(-2) = -23$

b) Góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -23 < 0$. Suy ra góc $\widehat{BAC}$ là góc tù

c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $\dfrac{-23}{\sqrt{638}}$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-23}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2+(-2)^2}.\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(3)^2}} = \frac{-23}{\sqrt{638}}$$

d) Lấy điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó tọa độ điểm $M \in (2;-\frac{1}{3};0)$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, Tọa độ $G\left(2;-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3.\overrightarrow{GM}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$

Vì $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ không đổi

Nên $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt GTNN khi MG đạt GTNN

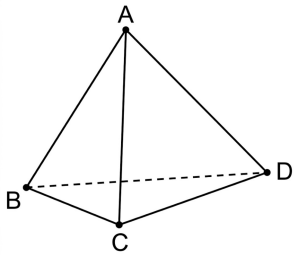
Với điểm $G\left(2;-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ cố định và điểm M bất kì $M \in (Oxy)$.

Để MG đạt GTNN thì M là hình chiếu của $G\left(2;-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ trên (Oxy)

Suy ra tọa độ $M\left(2;-\frac{1}{3};0\right)$

$\Rightarrow a + 6b + 3c = 0$

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;3), B(0;0;-1), C(1;0;-1), D(0;1;-1)$.



a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$.

c) $AB \perp AC$

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;\,0;\,-4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=4$

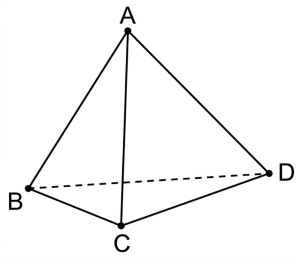
b) Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{0+0+1}{3};\frac{0+0+0}{3};\frac{3-1-1}{3}\right)$ hay $\left(\frac{1}{3};0;\frac{1}{3}\right)$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;\,0;\,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\,0;\,-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=16\neq 0\Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

d) Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;\,0;\,-4)$, $\overrightarrow{BD}=(0;1;0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=90^0\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=0$

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;3;-2),B(3;2;-4),C(2;1;0),D(3;5;-1)$.



a) $AB=9$

b) $AB\perp CD$.

c) Tam giác BCD là tam giác đều.

d) $\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-2)\Rightarrow AB=3$

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-2),\overrightarrow{CD}=(1;4;-1)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=2\cdot1+(-1)\cdot4+(-2)\cdot(-1)=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow AB\perp CD$.

b) Tính ba cạnh của tam giác BCD:

$\overrightarrow{CD}=(1;4;-1)\Rightarrow CD=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-3)^2+(1-2)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(3-3)^2+(5-2)^2+(-1-(-4))^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

Suy ra BCD là tam giác đều.

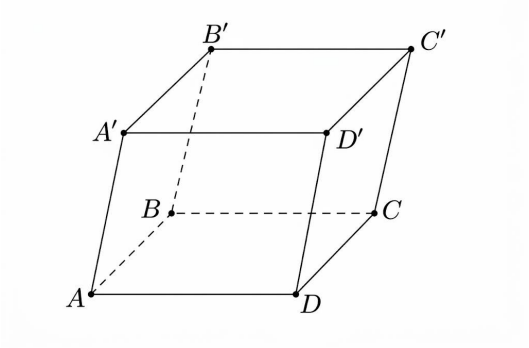
c) Ta có $\widehat{AMD}=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})$.

Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};-2\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$ và $\overrightarrow{MD}=\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};1\right)$.

Từ đó ta tính được: $\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})=\dfrac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}+0.1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$.



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$

b) Tọa độ $D(0;2;0)$.

c) $\overrightarrow{A'D}=(1;1;5)$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ (qui tắc hình hộp)

b) Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(0;2;0)\Rightarrow D(0;2;0)$.

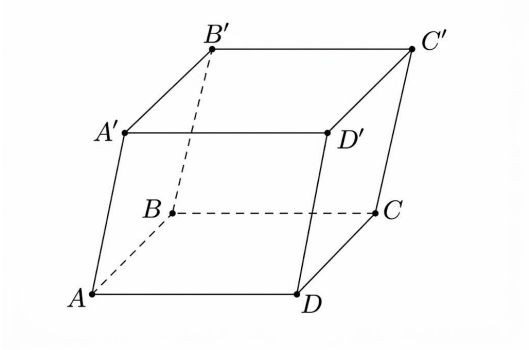
c) Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=(-1;1;5)\Rightarrow A'(-1;1;5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'D}=(1;1;-5)$

d) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=(0;3;5)$.

Xét $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{0^2+3^2+5^2}=\sqrt{34}$

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.



a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

b) $\left|\overrightarrow{B'D}\right|=\sqrt{29}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D}=-23$.

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'D}\right)=\dfrac{22}{3\sqrt{70}}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Gọi tọa độ điểm A' là $(x;y;z)$

$\overrightarrow{A'C'}=(-1-x;2-y;1-z)$

$\overrightarrow{AC}=(-2;2;0)$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\begin{cases}-1-x=-2\\2-y=2\\1-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}\Rightarrow A'(1;0;1)$

Làm tương tự ta có: $B'(0;4;2); B(1;5;1); D(1;-1;-1)$

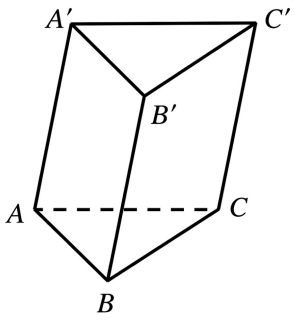
a) $\overrightarrow{AB}=(1;4;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$

b) $\overrightarrow{B'D}=(1;-5;-3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{B'D}\right|=\sqrt{35}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D}=1.1+4.(-5)+1.(-3)=-22$

d) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'D}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{B'D}\right|}=\dfrac{-22}{\sqrt{1+16+2}.\sqrt{1+25+9}}=-\dfrac{22}{3\sqrt{70}}$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.



a) $\overrightarrow{AA'}=(4;0;-1)$

b) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=20$

c) Tọa độ đỉnh B' là $(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z=13$.

d) Hình chiếu của điểm C' trên mặt phẳng (Oyz) có toạ độ là $C'(0;3;-8)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'}=\left(x_{A'}-x_A;y_{A'}-y_A;z_{A'}-z_A\right)=(4;0;-1)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AA'}=(4;0;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-5;4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=12$

c) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{BB'}=(x-3;y-2;z-5)$.

Vì $ABC\cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

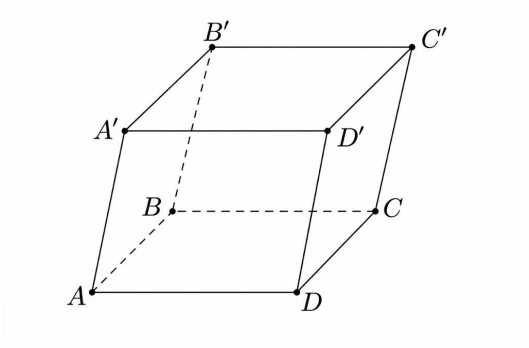
Do đó $\begin{cases}x-3=4\\y-2=0\\z-5=-1\end{cases}$ hay $x=7, y=2, z=4$.

Vậy $B'(7;2;4)\Rightarrow x+y+z=13$

d) Lập luận tương tự câu c) suy ra $C'(11;-3;8)\Rightarrow a+b+c=16$

Do đó, hình chiếu của điểm $C'(11;-3;8)$ trên mặt phẳng (Oyz) có toạ độ là $C'(0;-3;8)$

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$.



a) $AB=9$

b) Tọa độ đỉnh $C(2;3;0)$

c) Tọa độ đỉnh A',B' lần lượt là $A'(0;0;-3)$ và $B'(3;0;-3)$.

d) Gọi $G(x_G;y_G;z_G)$ là toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$. Khi đó $x_G+y_G+z_G=5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;\,0;\,0)\Rightarrow AB=3$

b) Gọi $C(x;y;\,z)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(x;\,y-3;\,z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(x;\,y;\,z)=(3;\,3;\,0)\Rightarrow C(3;\,3;\,0)$

c) Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;\,3;\,0)$.

Gọi $A'(x';\,y';\,z')\Rightarrow\overrightarrow{A'D'}=(-x';\,3-y';\,-3-z')$

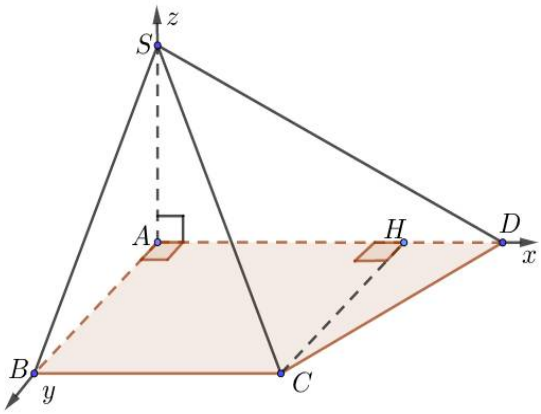
$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}\Rightarrow(x';\,y';\,z')=(0;\,0;\,-3)\Rightarrow A'(0;\,0;-3)$

Gọi $B'(x_0;\,y_0;\,z_0)\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=(x_0;\,y_0;\,z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow(x_0;\,y_0;\,z_0)=(3;\,0;-3)\Rightarrow B'(3;\,0;-3)$

d) G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{0+3+3}{3}=2\\ y_G=\dfrac{0+0+3}{3}=1\\ z_G=\dfrac{-3-3+0}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow G(2;\,1;\,-2)\Rightarrow x_G+y_G+z_G=1$

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA=4$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AD,AB,AS như hình vẽ.



a) $H\left(2;0;0\right)$.

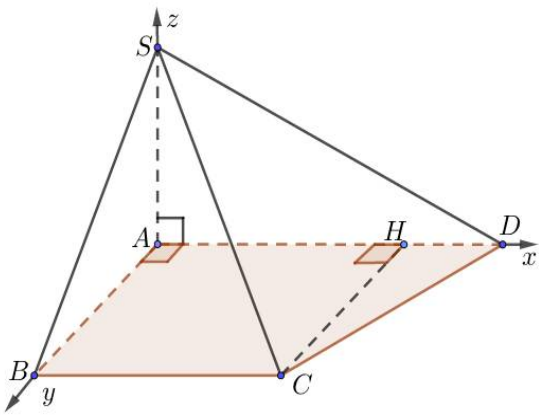
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Khi đó, toạ độ vectơ $\overrightarrow{AG}$ là $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Khi đó $HG=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\cos\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**



Dễ tính được $AB=BC=AH=CH=4$

Với hệ trục như hình vẽ, ta có: $A\left(0;0;0\right),B\left(0;2;0\right),C\left(2;2;0\right),D\left(4;0;0\right),S\left(0;0;4\right),H\left(2;0;0\right)$

a) ta có: $H\left(2;0;0\right)$

b) G là trọng tâm của tam giác SBC nên

$$x_G=\frac{x_S+x_B+x_C}{3}=\frac{2}{3}$$

$$y_G=\frac{y_S+y_B+y_C}{3}=\frac{4}{3}$$

$$z_G=\frac{z_S+z_B+z_C}{3}=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{HG}=\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow HG=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

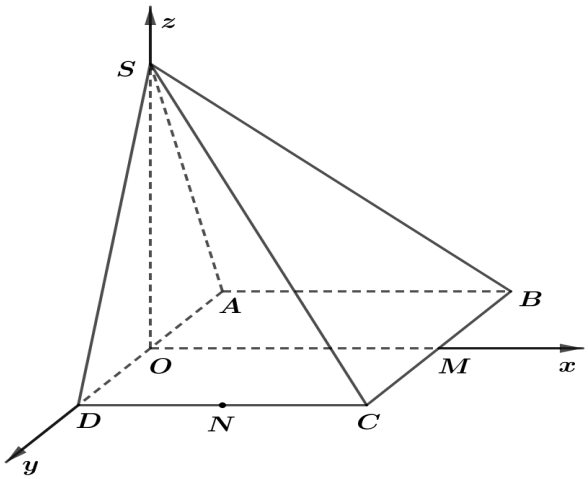
d) Ta có:

$\overrightarrow{SB}=(0;2;-4)$

$\overrightarrow{CD}=(2;-2;0)$

$\cos\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{SB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{0.2+2.(-2)+(-4).0}{\sqrt{0^2+2^2+(-4)^2}.\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng trung điểm cạnh AD và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia OM,OD,OS như hình vẽ.



a) $M\left(0;1;0\right)$.

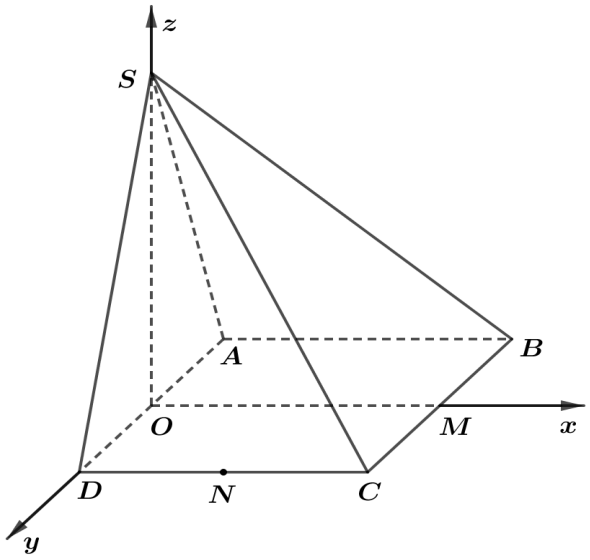
b) $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{4}$

d) $\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



SAD là tam giác đều có cạnh $AD=1$ nên $SO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với hệ trục như hình vẽ, ta có:

$A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right), B\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right), C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right), D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), M\left(1;0;0\right), N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$

a) $M\left(1;0;0\right)$

b) $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) Ta có:

$\overrightarrow{SA}=\left(0;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

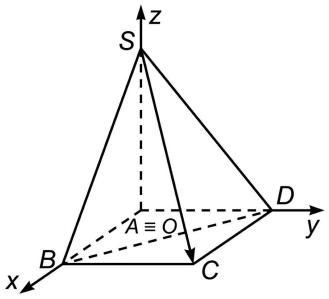
$\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{MN}=0.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).0=-\dfrac{1}{4}$

d) Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\frac{-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS như hình vẽ.



a) $C(3;4;0)$

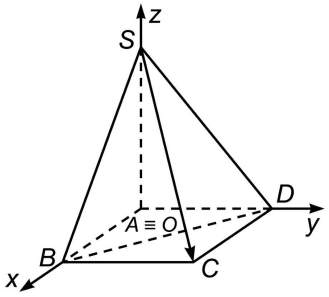
b) $SC = 29$

c) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC . Khi đó: $\overrightarrow{SI}.\overrightarrow{CD} = \frac{9}{2}$

c) $\cos(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}) = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$.

Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3;0;0)$.

Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0;4;0)$.

Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0;0;2)$.

Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;4;0)$.

Vậy tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là : $S(0;0;2), A(0;0;0), B(3;0;0), C(3;4;0), D(0;0;4)$.

a) $C(3;4;0)$

b) Ta có $\overrightarrow{SC} = (3-0;4-0;0-2) = (3;4;-2)$, suy ra $SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{3^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$.

c) I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC nên $I\left(\frac{0+3}{2};\frac{0+4}{2};\frac{2+0}{2}\right)$ hay $I\left(\frac{3}{2};2;1\right) \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \left(\frac{3}{2};2;-1\right)$

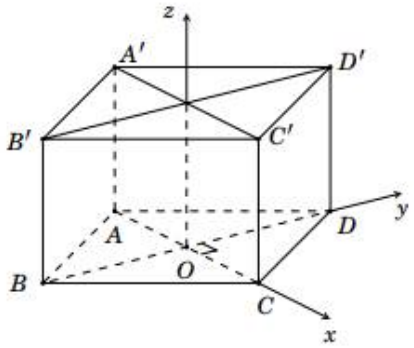
$\overrightarrow{CD} = (3;0;0)$

Do đó $\overrightarrow{SI}.\overrightarrow{CD} = \frac{9}{2}$

d) Ta có $\overrightarrow{BD}=(0-3;4-0;0-0)=(-3;4;0)$, suy ra $BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$.

Do đó: $\cos(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}=\dfrac{(-3)\cdot3+4\cdot4+0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}}=\dfrac{7}{5\sqrt{29}}$

Câu 90. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

b) $\overrightarrow{AC'}=\left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

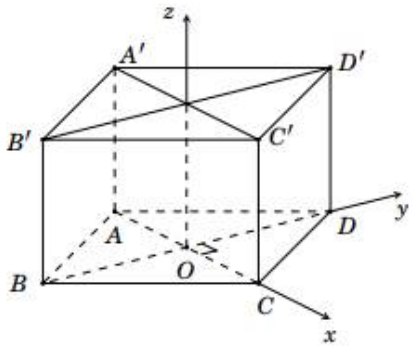
c) Tọa độ $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD'}=8$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Độ dài $AC=2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



a) Điểm $A\in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA=\sqrt{2}$ nên $A\left(-\sqrt{2};0;0\right)$.

b) Tọa độ $C'\left(\sqrt{2};0;2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'}=\left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D\left(0;\sqrt{2};0\right)$ và $DD'=2$ nên $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

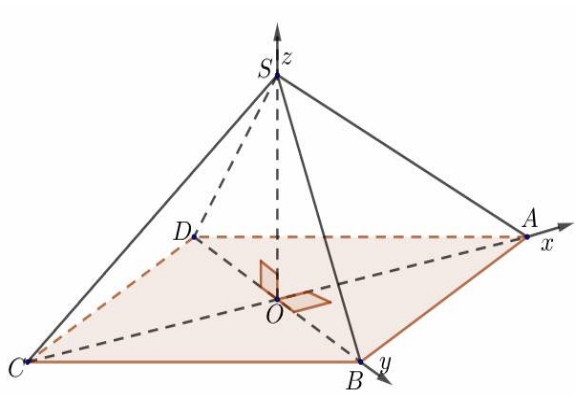
d) Tọa độ $B\left(0;-\sqrt{2};0\right),D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'}=\left(0;2\sqrt{2};2\right)$.

$\overrightarrow{AC'}=\left(2\sqrt{2};0;2\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD'}=4$

Câu 91. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $ABCD$ là đáy. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm tứ giác $ABCD$ và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia OA,OB,OS như hình vẽ (đơn vị: mét).





a) $S\left(0;0;98\right)$

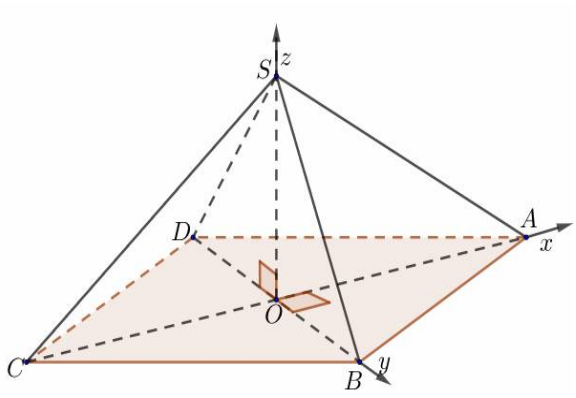
b) $\overrightarrow{CD}=\left(-90\sqrt{2};90\sqrt{2};0\right)$

c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{CD}=16200$

c) Góc giữa hai đường thẳng SA và CD xấp xỉ bằng $56°$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy.

Vậy $AB=180m, SO=98m$ suy ra $\Rightarrow OA=OB=OC=OD=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=90\sqrt{2}m$

Tọa độ các điểm S,A,B,C,D lần lượt là :

$S\left(0;0;98\right), A\left(90\sqrt{2};0;0\right), B\left(0;90\sqrt{2};0\right), C\left(-90\sqrt{2};0;0\right), D\left(0;-90\sqrt{2};0\right).$

a) $S\left(0;0;98\right)$

b) $\overrightarrow{CD}=\left(-90\sqrt{2};-90\sqrt{2};0\right)$

c) $\overrightarrow{SA}=\left(90\sqrt{2};0;-98\right)$

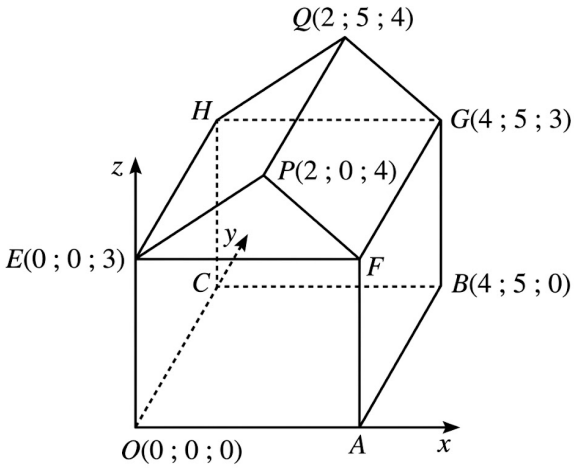
$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{CD}=-16200$

d) $\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{-16200}{\sqrt{\left(90\sqrt{2}\right)^2+0^2+98^2}.\sqrt{\left(-90\sqrt{2}\right)^2+\left(-90\sqrt{2}\right)^2+0^2}}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CD}\right)\approx 124°$, hay góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $180°-124°=56°$.

Câu 92. Một ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.





a) Tọa độ điểm A là $(3;0;0)$.

b) $AH=6\sqrt{2}$

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=9$

d) Số đo của góc hai mái nhà (mái nhà chứa mặt phẳng $(EGQH)$ và mái nhà chứa mặt phẳng $(FGQP)$) bằng $63°$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A=x_B=4$, $y_C=y_B=5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H=y_C=5$, $z_H=z_E=3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$. Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F=x_A=4; z_F=z_E=3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

a) $A(4;0;0)$

b) $H(0;5;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(-4;5;3)\Rightarrow AH=5\sqrt{2}$

c) Ta có $A(4;0;0)$ và $F(4;0;3)$, do đó $\overrightarrow{AF}=(0;0;3)$

Suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=0+0+9=9$

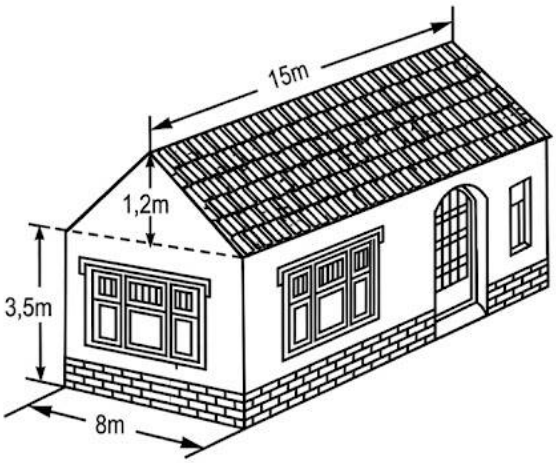
d) Số đo của góc hai mái nhà (mái nhà chứa mặt phẳng $(EGQH)$ và mái nhà chứa mặt phẳng $(FGQP)$)

chính là góc của $\left(\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PF}\right)$

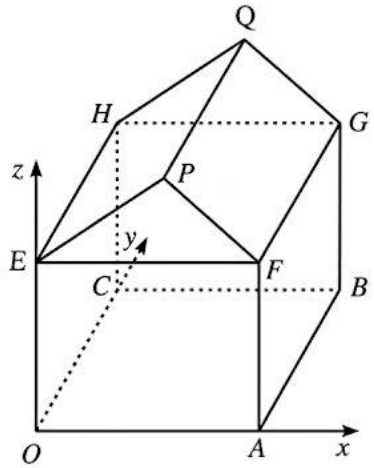
Ta có: $\overrightarrow{PF}=(2;0;1),\overrightarrow{PF}=(2;0;-1)$.

Suy ra: $\cos\left(\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PF}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PE}.\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PF}|.|\overrightarrow{PF}|}=\dfrac{4-1}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\left(\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PF}\right)\approx 53°$

Câu 93. Thầy Nam muốn xây một ngôi nhà có kích thước như hình 1. Ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 2 (đơn vị: mét), trong đó nền nhà, bốn bức tường là hình chữ nhật và hai mái nhà là hai hình chữ nhật bằng nhau. Biết $OE=3,5m$; $OA=8m$; $PQ=15m$ và khoảng cách từ điểm P đường đường thẳng EF bằng $1,2m$.



Hình 1



Hình 2

a) Chiều cao ngôi nhà bằng $3,5m$

b) $AQ=\sqrt{290}\,(m)$

c) Thầy Nam muốn treo bóng đèn tại trung điểm cạnh PQ. Tọa độ vị trí bóng đèn là $(4;7,5;4,7)$.

d) Hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $33,4°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ hình vẽ, ta có kích thước ngôi nhà như sau:

$OA = CB = HG = EF = 8m$; $OC = AB = FG = EH = PQ = 15m$

Khoảng cách từ điểm P đường đường thẳng EF bằng $1,2m$

Tọa độ các điểm là :

$O(0;0;0), A(8;0;0), B(8;15;0), C(0;15;0), E(0;0;3,5), F(8;0;3,5), G(8;15;3,5), H(0;15;3,5)$.

$P(4;0;4,7), Q(4;15;4,7)$

a) Chiều cao ngôi nhà bằng $3,5+1,2=3,7m$

b) $\overrightarrow{AQ} = (-4;15;7) \Rightarrow AQ = \sqrt{290}(m)$

c) Tọa độ trung điểm cạnh PQ là $(4;7,5;4,7)$

d) góc hợp bởi hai mái nhà là góc hai mặt phẳng $(FGQP)$ và ($(EHQP)$ hay góc EPF

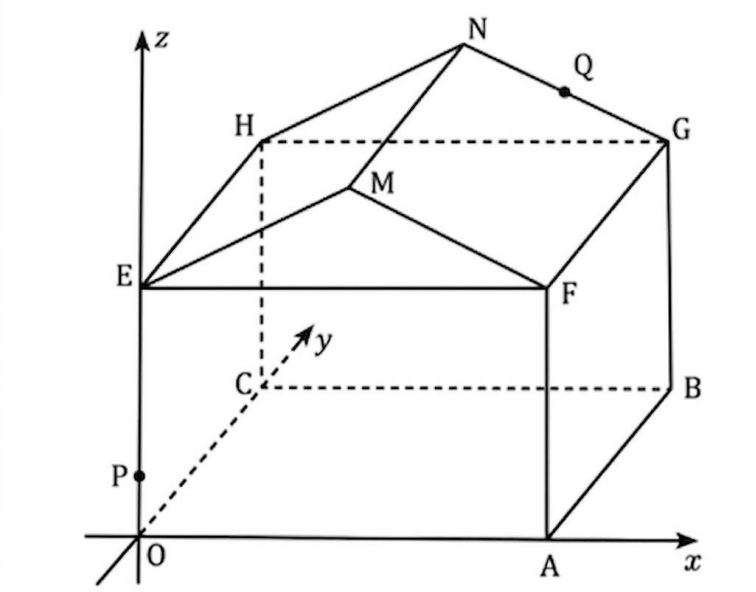
Ta có: $\overrightarrow{PE} = (-4;0;-1,2), \overrightarrow{PF} = (4;0;-1,2)$.

Suy ra $\cos\widehat{EPF} = \cos(\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PF}) = \dfrac{\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{PF}|} = \dfrac{(-4).(4)+0.0+(-1,2).(-1,2)}{\sqrt{(-4)^2+0^2+(-1,2)^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+(-1,2)^2}} = -\dfrac{91}{109}$.

$\Rightarrow \widehat{EPF} \approx 146,6°$. Vậy hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $146,6°$.

Câu 94. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFME.CBGNH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật, P là điểm trên đoạn thẳng OE sao cho $OP = \dfrac{1}{4}OE$ và Q là trung điểm của đoạn thẳng GN. Người ta mô hình hoá bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m).

Biết $A(6;0;0), C(0;20;0), E(0;0;4), M(3;0;7)$.



a) Toạ độ $\overrightarrow{BP}$ là $(-6;20;1)$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{GN}$ vuông góc với nhau.

c) Số đo góc nhị diện $[M, FG, E]$ bằng $60°$.

d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí Q và đầu thu giữ liệu đặt tại vị trí P. Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ P đến E rồi từ E đến H, sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn dây cáp tối thiểu bằng $28,7m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười cuae mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Toạ độ của P là $(0;0;1)$; toạ độ của B là $(6;20;0)$; Toạ độ của $\overrightarrow{BP}$ là $(-6;-20;1)$;

b) Ta có $\overrightarrow{EM}=(3;0;3)$; $\overrightarrow{FM}=(-3;0;3)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{EM}\right|=\left|\overrightarrow{FM}\right|;\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FM}=0$. Vậy tam giác EMF vuông cân tại M. Mà $FM\,||\,GN$ suy ra $\overrightarrow{EM},\overrightarrow{GN}$ vuông góc với nhau.

c) Ta có $OAFME.CBGNH$ là hình lăng trụ đứng với $OAFE$ là hình chữ nhật nên $MNGF$ là hình chữ nhật. Khi đó $MF\perp GN;EF\perp GN$, suy ra góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M,FG,E]$ là góc MFE. Vì tam giác EMF vuông cân tại M nên góc MFE có số đo bằng $45°$.

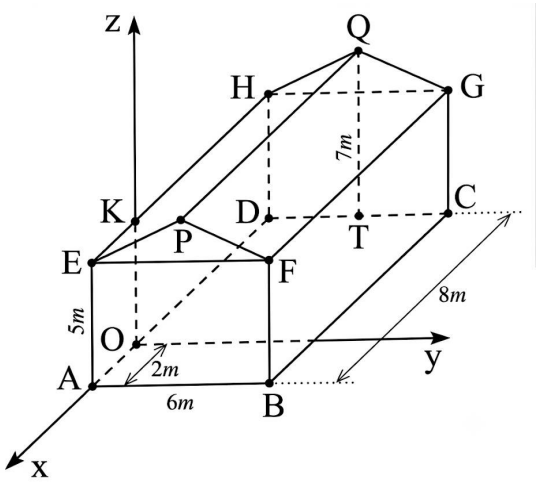
d) Ta có độ dài đoạn dây cáp tối thiểu là: $PE+EH+HQ=3+20+HQ$.

Ta có tam giác HNG vuông cân tại N và $HG=6$ nên $HN=3\sqrt{2}$

Suy ra $HQ=\sqrt{HN^2+NQ^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Vậy $PE+EH+HQ=3+20+HQ=23+\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\approx 27,7m$.

Câu 95. Nhà anh Bảo Toàn được mô tả như hình vẽ bên dưới, trong đó phần thân nhà là hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Ngôi nhà được lợp ngói hai mái là hai hình chữ nhật $PEHQ$ và $PFGQ$, biết tam giác EFP là tam giác cân tại P. Gọi T là trung điểm của cạnh DC. Các kích thước của nhà lần lượt là $AB=6m,\ AE=5m, AD=8m,\ QT=7m$. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA=2m$ và các trục toạ độ tương ứng là các trục Ox,Oy,Oz.



a) Toạ độ điểm A là $(2;0;0)$

b) Vectơ $\overrightarrow{AC}$ có toạ độ là $(6;0;0)$

c) Mái nhà anh Bảo Toàn được lợp bằng ngói đất nung, giá tiền mỗi viên ngói là 11000 đồng và để lợp được $1m^2$ diện tích mái cần 22 viên ngói. Số tiền cần bỏ ra để mua ngói lợp mái nhà là 13960000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các viên ngói, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

d) Anh Bảo Toàn muốn lắp một chiếc đèn lồng tại vị trí trung điểm của FG và đầu nguồn điện đặt tại vị trí O. Anh ấy thiết kế đường dây điện nối từ O đến K sau đó nối đến chiếc đèn lồng. Độ dài đoạn dây điện nối tối thiểu bằng $5+2\sqrt{10}(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Toạ độ điểm A là $(2;0;0)$

b) Điểm $C(-6;6;0) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(-8;6;0)$

c) Gọi J là trung điểm HG

Ta có $QG=\sqrt{QJ^2+JG^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Diện tích hai mái nhà bằng $2.8.\sqrt{13}=16.\sqrt{13}(m^2)$

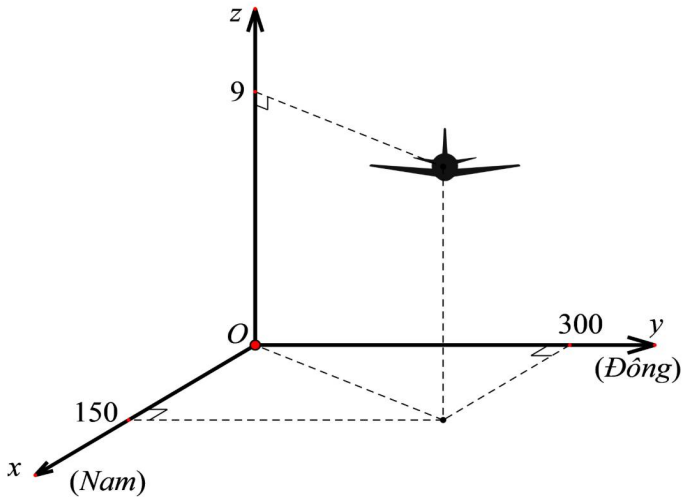
Số viên ngói là $16\sqrt{13}.22=352\sqrt{13}$

Số tiền cần mua ngói là $352\sqrt{13}.11000\approx 13961$ nghìn đồng.

d) Gọi M là trung điểm của FG

Ta có $K(0;0;5)$, $M(-2;6;5) \Rightarrow MK+OK=2\sqrt{10}+5(m)$

Câu 96. Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị tính theo đơn vị km.



a) Máy bay đang ở độ cao 9 km

b) Tọa độ của máy bay lúc 9h30 là $(150;300;9)$

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động và bay theo hướng đông, độ cao không đổi lúc 10h30 máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$. Khi đó vận tốc của máy bay là 776 km/h, biết vận tốc gió theo hướng đông là 10 m/s.

d) Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại (hướng Tây) với vận tốc 800 km/h với độ cao không đổi biết lúc đó trời lặng gió thì lúc11 giờ máy bay cách gốc tọa độ một khoảng 723 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Máy bay đang ở độ cao 9 km.

b) Toạ độ của máy bay lúc 9h30 là $(150;300;9)$

c) $10\text{m/s} = 36\text{km/h}$

Gọi A là vị trí của máy bay lúc $9\text{h}30 \Rightarrow A(150;300;9)$.

Gọi B là vị trí của máy bay lúc $10\text{h}30 \Rightarrow B(150;1086;9)$.

Quãng đường máy bay di chuyển được từ 9h30 đến 10h30 là

$AB = \sqrt{0^2 + 786^2 + 0^2} = 786\,\text{km}$

Khi đó vận tốc của máy bay là: $786 - 36 = 750\,\text{km/h}$.

d) Quãng đường máy bay di chuyển được từ 10h30 đến 11 giờ là: $800.\frac{1}{2} = 400$ km.

Tại thời điểm 11 giờ tọa độ máy bay là: $(150;686;9)$.

Khoảng cách của máy bay so với gốc tọa độ là: $\sqrt{150^2 + 686^2 + 9^2} \approx 702,3\,\text{km/h}$.

Câu 97. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 1 m), một flycam bay với vận tốc có độ lớn và hướng không đổi. Tại thời điểm $t = 0$, flycam ở vị trí $A(1;2;3)$ và sau 10 phút nó ở vị trí $B(21;32;33)$.

a) Flycam không bay qua vị trí $D(5;8;9)$.

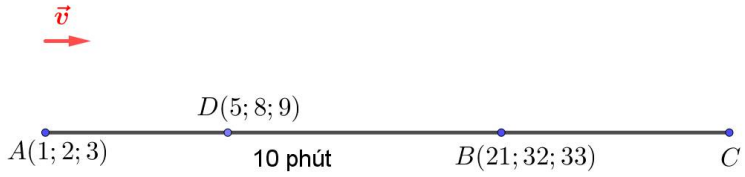
b) Vectơ vận tốc của flycam có tọa độ là $\vec{v} = (20;30;30)$.

c) Độ lớn của vận tốc flycam là $\sqrt{22}$ (m/phút).

d) Sau 15 phút vị trí flycam là $C(31;47;48)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) $\overrightarrow{AB}=(20;30;30)$; $\overrightarrow{AD}=(4;6;6)$.

Ta có $\frac{20}{4}=\frac{30}{6}=\frac{30}{6}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

$\Rightarrow$ 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Do đó flycam bay qua vị trí $D(5;8;9)$.

b) Flycam ở vị trí $A(1;2;3)$ và sau 10 phút nó ở vị trí $B(21;32;33)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=10\vec{v}$ $\Leftrightarrow \vec{v}=\frac{\overrightarrow{AB}}{10}=(2;3;3)$.

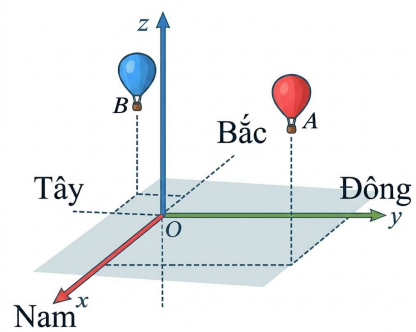
c) Độ lớn của vận tốc flycam là $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{22}$ (m/phút).

d) Tại thời điểm $t=0$, flycam ở vị trí A và sau 15 phút flycam ở vị trí C

Suy ra $\overrightarrow{AC}=15\vec{v}$ $\Leftrightarrow (x_C-1;y_C-2;z_C-3)=15(2;3;3)\Leftrightarrow \begin{cases} x_C=31 \\ y_C=47 \\ z_C=48 \end{cases}$.

Vậy $C(31;47;48)$.

Câu 98. Hai chiếc khinh khí cầu A và B cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu A cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu B cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



a) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu A có tọa độ là $(100;80;1)$.

b) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu B có tọa độ là $(-70;-60;-0,8)$.

c) Sau 1 giờ bay, khinh khí cầu A bay được quãng đường $128(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Sau 1 giờ bay, khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu A và chiếc khinh khí cầu B lớn hơn $221(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu A có tọa độ là $(100;80;1)$.

b) Sau 1 giờ bay, chiếc khinh khí cầu B có tọa độ là $(-70;-60;0,8)$.

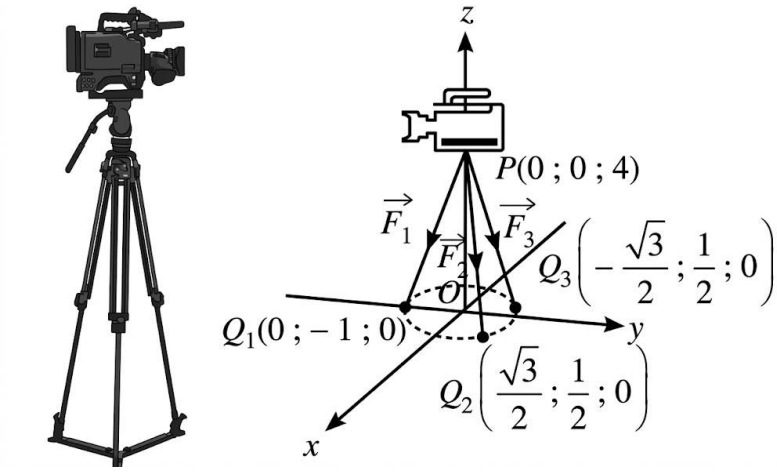
c) Sau 1 giờ bay, khinh khí cầu A bay được quãng đường là :

$OA=\sqrt{100^2+80^2+1^2}\approx 128(km)$

d) Sau 1 giờ bay, khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu A và chiếc khinh khí cầu B là

$AB=\sqrt{(-70-100)^2+(-60-80)^2+(0,8-1)^2}\approx 220(km)$

Câu 99. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right), Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ (Hình vẽ). Biết rằng trọng lượng của máy quay là $360\,N$.



a) $\overrightarrow{PQ_1}=(0;-1;-4)$

b) $PQ_1=PQ_2=PQ_3=\sqrt{17}$

c) Trọng lực $\vec{F}$ tác dụng lên máy quay có tọa độ là: $(0;0;360)$

d) Các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ tác dụng lên giá đỡ có tọa độ lần lượt là:

$\vec{F_1}=(0;-30;-120);\vec{F_2}=(15\sqrt{3};15;-120);\vec{F_3}=(-15\sqrt{3};15;-120)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Theo giả thiết, ta có các điểm $P(0;0;4), Q_1(0;-1;0), Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

a) Ta có: $\overrightarrow{PQ_1}=(0-0;-1-0;0-4)$ hay $\overrightarrow{PQ_1}=(0;-1;-4)$

b) Ta có: $\overrightarrow{PQ_1}=(0;-1;-4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ_1}\right|=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0;\frac{1}{2}-0;0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ_2}\right|=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0;\frac{1}{2}-0;0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ_3}\right|=\sqrt{17}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{PQ_1}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_2}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_3}\right|=\sqrt{17}$.

c) Ta có: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\overrightarrow{F_3}=\vec{F}$, với $\vec{F}=(0;0;-360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

d) Ta có $\left|\overrightarrow{PQ_1}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_2}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_3}\right|=\sqrt{17}$ nên $\left|\vec{F}_1\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\vec{F}_3\right|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $k\neq 0$ sao cho:

$\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{PQ_1}=(0;-k;-4k)$

$\overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k;\frac{1}{2}k;-4k\right)$

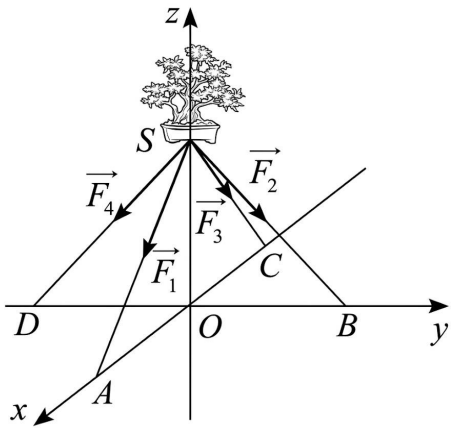
$\overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k;\frac{1}{2}k;-4k\right)$

Suy ra $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(0;0;-12k)$.

Mặt khác, ta có: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\overrightarrow{F_3}=\vec{F}$, trong đó $\vec{F}=(0;0;-360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-12k=-360$, tức là $k=30$.

Vậy $\overrightarrow{F_1}=(0;-30;-120);\overrightarrow{F_2}=(15\sqrt{3};15;-120);\overrightarrow{F_3}=(-15\sqrt{3};15;-120)$.

Câu 100. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40\,N$ và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ (mỗi centimét biểu diễn $1\,N$).



a) $\overrightarrow{SA}=(20;0;-20)$

b) $SB=20$

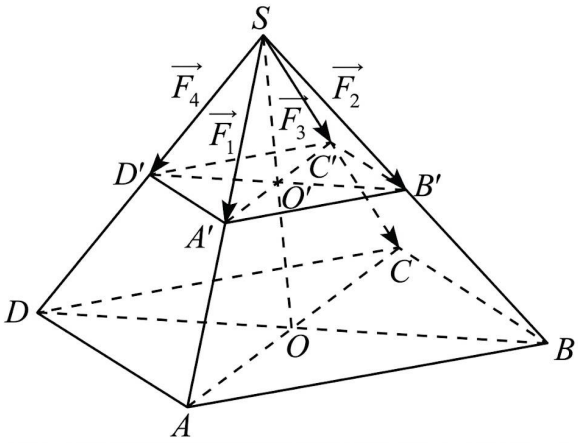
c) $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=120^0$

d) Các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ có tọa độ lần lượt là:

$\overrightarrow{F_1}=(10;0;-10),\overrightarrow{F_2}=(0;10;-10),\overrightarrow{F_3}=(-10;0;-10),\overrightarrow{F_4}=(0;-10;-10).$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

a) Ta có: $\overrightarrow{SA}=(20;0;-20)$

b) $\overrightarrow{SB}=(0;20;-20)\Rightarrow\left|\overrightarrow{SB}\right|=20\sqrt{2}$

c) Ta có:

$\overrightarrow{SC}=(-20;0;-20)\Rightarrow\left|\overrightarrow{SC}\right|=20\sqrt{2}$

$\overrightarrow{SD}=(0;-20;-20)\Rightarrow\left|\overrightarrow{SD}\right|=20\sqrt{2}$

$$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=\frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SD}\right|}=\frac{(-20).0+0.0+(-20)(-20)}{20\sqrt{2}.20\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right)=60^\circ$$

d) Ta có: $SA=SB=SC=SD=20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vectơ $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A',B',C',D'.

Ta có $SA'=SB'=SC'=SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{SA'}+\overrightarrow{SB'}+\overrightarrow{SC'}+\overrightarrow{SD'}=4\overrightarrow{SO'}$.

Ta có $|\vec{F}|=40$, suy ra $\left|\overrightarrow{SO'}\right|=SO'=10$.

Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA'=SO'\sqrt{2}=10\sqrt{2}=\frac{1}{2}SA$, suy ra $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}=(10;0;-10)$.

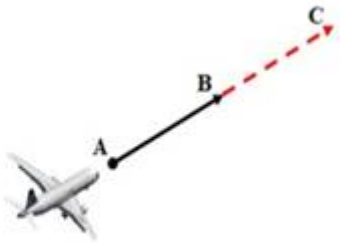
Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}=(0;10;-10),\overrightarrow{F_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=(-10;0;-10),\overrightarrow{F_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}=(0;-10;-10).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(812;600;5)$ đến điểm $B(950;530;6)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

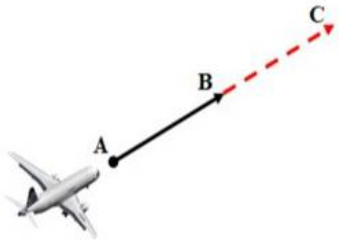




Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1555



Do chiếc may bay di duyển với tốc độ và hướng không đổi từ A đến B trong 10 phút và từ B đến C trong 10 phút.

Nên suy ra $AB=BC$ và A,B,C thẳng hàng.

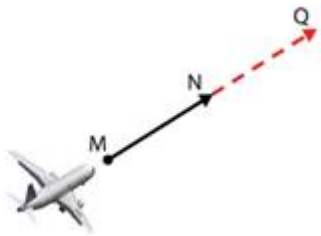
Suy ra B là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_C}{2} \\ z_B=\dfrac{z_A+z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 950=\dfrac{812+x}{2} \\ 530=\dfrac{600+y}{2} \\ 6=\dfrac{5+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1088 \\ y=460 \\ z=7 \end{cases}.$$

Vậy $x+y+z=1555$.

Câu 102. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo có tọa độ là $Q(x;y;z)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+2z$.

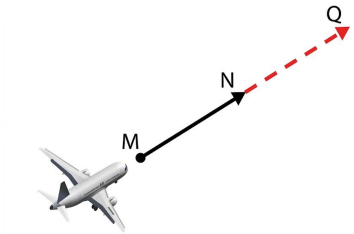




Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1221



Gọi $Q(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MN}=(300;100;2)$

$\overrightarrow{NQ}=(x-800;y-300;z-10)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MN=4NQ$

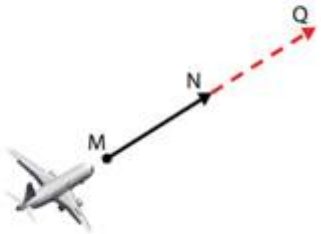
Suy ra $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}300=4(x-800)\\100=4(y-300)\\2=4(z-10)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=875\\y=325\\z=10,5\end{cases}\Rightarrow Q(875;325;10,5)$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875;325;10,5)$

$\Rightarrow T=x+y+2z=1221$

Câu 103. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm $N(x;y;z)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+2z$.

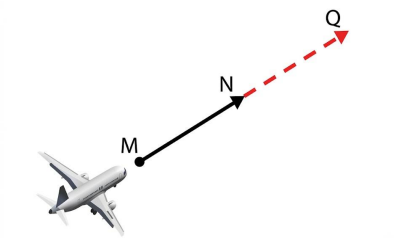




Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2081



Gọi $N\left(x;y;z\right)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MQ}=\left(400;200;2\right)$

$\overrightarrow{NQ}=\left(1400-x;800-y;16-z\right)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

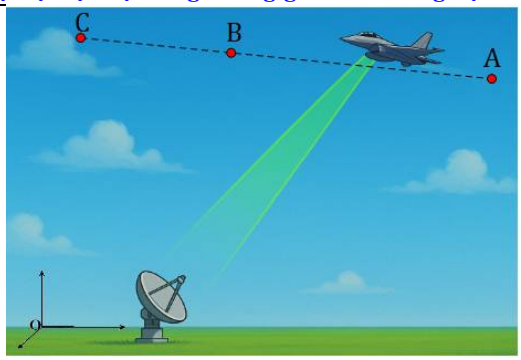
Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MQ=4NQ$

Suy ra $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}400=4\left(1400-x\right)\\200=4\left(800-y\right)\\2=4\left(16-z\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1300\\y=750\\z=15,5\end{cases}\Rightarrow N\left(1300;750;15,5\right)$

Tọa độ vị trí điểm N là $\left(1300;750;15,5\right)$

$T=x+y+2z=2081$.

Câu 104. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A\left(800;500;7\right)$ đến điểm $B\left(940;550;9\right)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là điểm $C\left(x;y;z\right)$. Tính $x+y+z$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1595

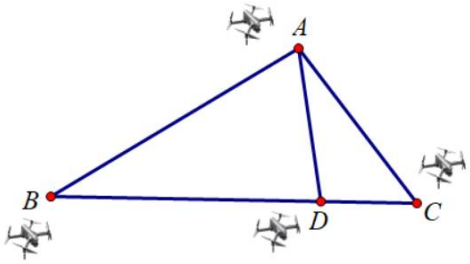
Do máy bay giữ nguyên tốc độ nên vận tốc của máy bay trên quãng đường AB và BC là như nhau. Ta có: $\frac{AB}{10}=\frac{BC}{5}\Leftrightarrow AB=2BC$.

Và máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai vectơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}140=2(x-940)\\50=2(y-550)\\2=2(z-9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=10\end{cases}$

Vậy $x+y+z=1595$

Câu 105. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$ (đơn vị mét). Một đội gồm 4 drone giao hàng *A*, *B*, *C*, *D* xếp đội hình bay có dạng tam giác *A*; *B*; *C* và *D* nằm trên cạnh *BC* sao cho $DB=4DC$ (Hình vẽ bên dưới). Tại thời điểm các drone có tọa độ là $A(80;20;80), B(70;20;20), C(420;120;120)$ thì khoảng cách giữa drone *A* và drone *D* bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Trả lời: ……..

Lời giải

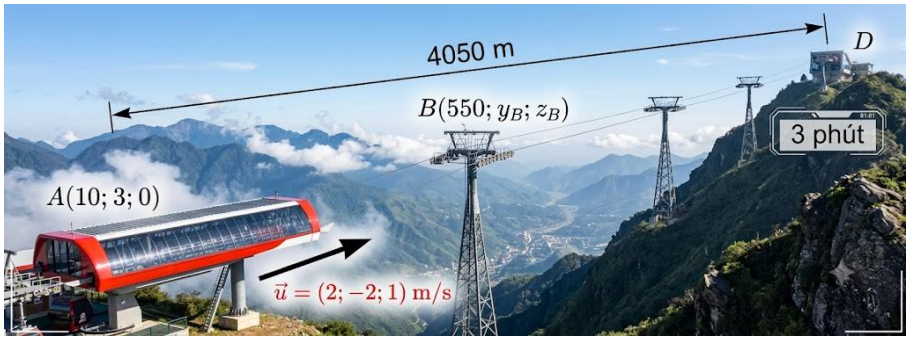
Đáp án: 282

Ta có : $\overrightarrow{CB}=(-350;-100;-100)$.

Gọi $D(x_D;y_D;z_D)$, có $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-420=-70\\y_D-120=-20\\z_D-120=-20\end{cases}\Rightarrow D(350;100;100)$.

Do đó khoảng cách giữa drone A và drone D bằng $AD=\sqrt{270^2+80^2+20^2}=10\sqrt{797}\approx 282$.

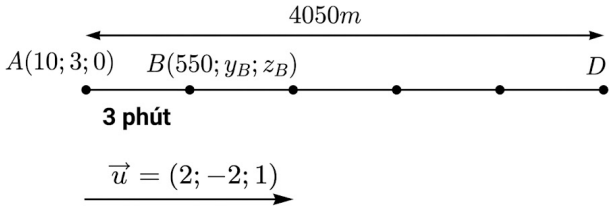
Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1m$), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách A một khoảng $4050\,m$. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u}(2;-2;1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B=550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu phút?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15



Ta có: $\overrightarrow{AB}=k\vec{u},\ k\neq 0$ (do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{u}$ cùng phương)

$\Leftrightarrow (540;y_B-3;z_B)=k(2;-2;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}540=2k\\ y_B-3=-2k\\ z_B=k\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}k=270\\ y_B=-537\\ z_B=270\end{cases}.$

Suy ra $B(550;-537;270)$.

$\Rightarrow AB=\sqrt{(550-10)^2+(-537-3)^2+(270-0)^2}=810\ (m)$.

Mặt khác $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4050}{810}=5$ hay $AD=5AB$.

Mà vận tốc không đổi chuyển động đều theo cáp thẳng đến D và thời gian di chuyển từ A đến B là 3 phút

Nên thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là $5\cdot 3=15$ (phút).

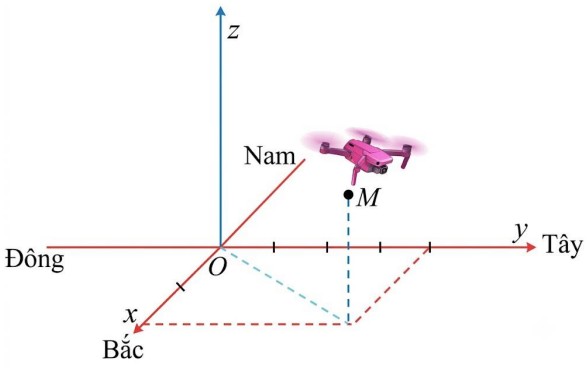
Câu 107. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến phần chục, đơn vị: km).



Trả lời: ……..

Lời giải

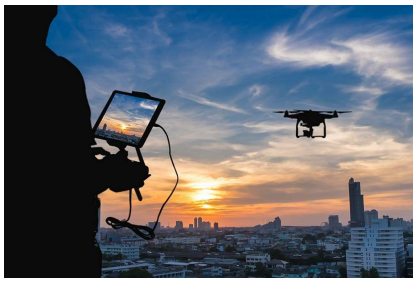
Đáp án: $53,9$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Suy ra chiếc máy bay có tọa độ $M(50;20;1)$.

Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $OM=\sqrt{50^2+20^2+1^2}\approx 53,9(km)$

Câu 108. Anh Bảo Toàn điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí A cách vị trí điều khiển $100m$ về phía Nam và $150m$ về phía Đông, đồng thời cách mặt đất $30m$. Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, anh Bảo Toàn điều khiển flycam đến vị trí B cách vị trí điều khiển $80m$ về phía Bắc và $120m$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $50m$. Biết vận tốc flycam bay không đổi là $8m/s$, và flycam bay từ vị trí A đến vị trí B theo một đường thẳng. Hỏi thời gian bay của flycam bay từ vị trí A đến vị trí B mất bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của giây).

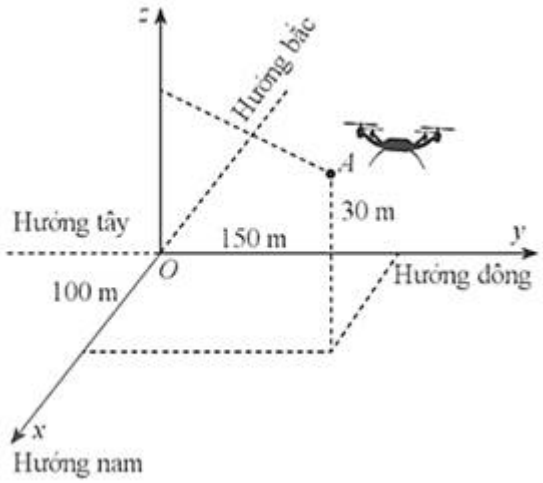


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 41

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng Nam, trục Oy có hướng trùng với hướng Đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 m.



Theo giả thiết đề cho, ta có:

Tọa độ của flycam tại vị trí điểm A là (100; 150; 30).

Tọa độ của flycam tại vị trí điểm B là (−80; −120; 50).

Quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B bằng khoảng cách giữa hai điểm A và B, ta có:

$$AB=\sqrt{(-80-100)^2+(-120-150)^2+(50-30)^2}$$

Vậy thời gian bay của flycam bay từ vị trí A đến vị trí B là: $t=\dfrac{AB}{8}\approx 41$ giây

Câu 109. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

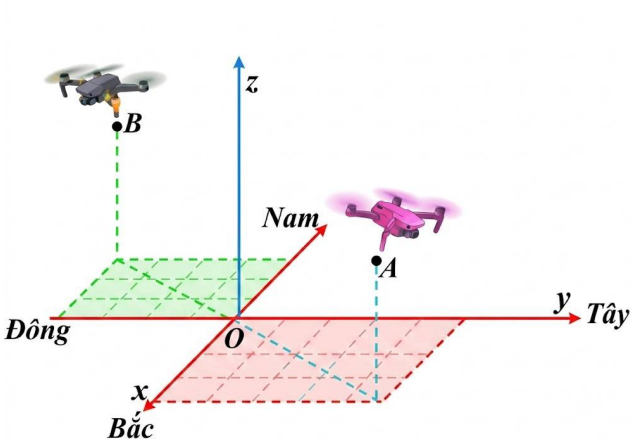


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 61

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

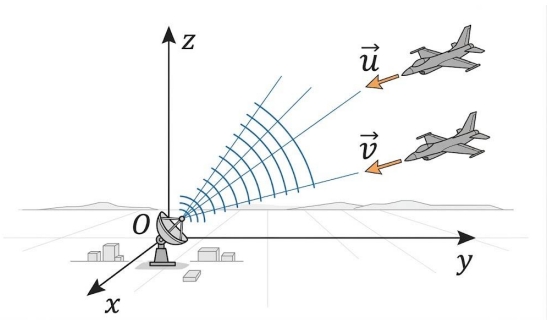


Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $A(20;10;0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $B(-30;-25;1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $AB=\sqrt{(20+30)^2+(10+25)^2+(0,7-1)^2}\approx 61(km)$

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$ được thiết lập tại một sân bay, người ta ghi nhận hai máy bay đang bay đến với các vectơ vận tốc $\vec{u}=(100;-90;-140)$, $\vec{v}=(90;-70;-80)$. Hỏi góc giữa hai vectơ vận tốc nói trên bằng bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của độ).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11,5

Góc hai vectơ: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{100.90+(-90).(-70)+(-140).(-80)}{\sqrt{100^2+(-90)^2+(-140)^2}.\sqrt{90^2+(-70)^2+(-80)^2}}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})\approx 11,5^\circ$

Câu 111. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, đơn vị đo là kilômet, một rada phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1100;650;14)$ đến điểm N

trong 20 phút. Nếu đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $Q(1500;860;16)$. Biết một khẩu pháo ở toạ độ vị trí điểm $E\left(\frac{1700}{3};370;\frac{34}{3}\right)$ được bắn ra với vận tốc không đổi gấp 5 lần vận tốc máy bay nhằm bắn trúng máy bay tại vị trí N. Sau bao nhiêu phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Do vận tốc của máy bay không đổi nên thời gian và quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Thời gian máy bay di chuyển từ M đến Q là 30 phút nên $\frac{MN}{MQ}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(x_N-1100;y_N-650;z_N-14)$; $\overrightarrow{MQ}=(400;210;2)$

Suy ra $\begin{cases} x_N=\frac{2}{3}\cdot 400+1100=\frac{4100}{3} \\ y_N=\frac{2}{3}\cdot 210+650=790 \\ z_N=\frac{2}{3}\cdot 2+14=\frac{46}{3} \end{cases}$ tức là $N\left(\frac{4100}{3};790;\frac{46}{3}\right)$.

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{800}{3};140;\frac{4}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{ME}=\left(\frac{-1600}{3};-280;\frac{-8}{3}\right)$

Khi đó $\frac{\frac{800}{3}}{\frac{-1600}{3}}=\frac{140}{-280}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{-8}{3}}=-\frac{1}{2}$ nên ba điểm M, E, N thẳng hàng; M nằm giữa E và N; $ME=2MN$.



Giả sử sau x phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.

Khi đó vận tốc khẩu pháo là $\frac{EN}{20-x}$ kilômet/phút; vận tốc máy bay là $\frac{MN}{20}$ kilômet/phút.

Theo đề bài $\frac{EN}{20-x}=5\cdot\frac{MN}{20}=\frac{MN}{4}$

Suy ra $\frac{3MN}{20-x}=\frac{MN}{4}\Leftrightarrow 20-x=12\Leftrightarrow x=8$.

Vậy sau 8 phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.

Câu 112. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilomet, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v_1}=(3;4;0)$ với tốc độ không đổi $900(km/h)$ và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31;10;11)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v_2}=(5;12;0)$ với tốc độ không đổi $910(km/h)$. Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8,42

Đổi $900(km/h)=15km$/phút

$910\,km/h=\frac{91}{6}$km/phút

Vectơ vận tốc máy bay thứ nhất $\vec{u_1}=m\vec{v_1}$ với $m>0$, $|\vec{u_1}|=m|\vec{v_1}|=15\Rightarrow m=3\Rightarrow\vec{u_1}=(9,12,0)$

Vectơ vận tốc máy bay thứ hai $\vec{u_2}=n\vec{v_2}$ với n >0, $|\vec{u_2}|=m|\vec{v_2}|=\frac{91}{6}\Rightarrow n=\frac{7}{6}\Rightarrow\vec{u_2}=\left(\frac{35}{6},14,0\right)$

Sau t phút duy trì hướng bay, máy bay thứ nhất bay đến vị trí M thỏa mãn

$\overrightarrow{AM}=t\vec{u_1}=(9t;12t;0),t>0\Rightarrow M(9t;12t+35;10)$

Máy bay thứ hai bay đến vị trí N thỏa mãn

$\overrightarrow{BN}=t\overrightarrow{u_2}=\left(\frac{35}{6}t;14t;0\right),t>0\Rightarrow N\left(\frac{35}{6}t+31;14t+10;11\right)$

Khoảng cách hai máy bay là:

$MN=\sqrt{\left(\frac{35}{6}t+31-9t\right)^2+\left(14t+10-12t-35\right)^2+\left(11-10\right)^2}$

$\Leftrightarrow MN=\sqrt{\left(\frac{19}{6}t-31\right)^2+\left(2t-25\right)^2+1^2}\le 9,3\Rightarrow 8,42\le t\le 10,56$

$\Rightarrow t\approx 8,42$

Câu 113. Để xác định vị trí của máy bay khi đang bay, người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ đặt tại một sân bay để xác định tọa độ của sân bay. Biết rằng cao độ của tọa độ máy bay chính là độ cao của máy bay đối với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc bay không đổi. Tại một thời điểm nào đó, máy bay đang ở vị trí có tọa độ $(200;70;118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau 25 giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km? biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có tọa độ $(80;105;113)$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16,8

Gọi tọa độ ban đầu của máy bay tại thời điểm $t=0$ là $A(200;70;118)$.

Sau 50 giây, độ cao giảm 400 m nên tọa độ z giảm 4 đơn vị, tức là $z=114$.

Gọi tọa độ sau 50 giây là $B(x;y;114)$.

Vận tốc bay (giả sử bay thẳng đều):

$\vec{v}=\frac{\overrightarrow{AB}}{50}=\left(\frac{x-200}{50};\frac{y-70}{50};\frac{114-118}{50}\right)=\left(\frac{x-200}{50};\frac{y-70}{50};-\frac{4}{50}\right).$

Sau 25 giây nữa (tổng 75 giây), ta có:

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+75\cdot\vec{v}=\left(200+\frac{3(x-200)}{2};70+\frac{3(y-70)}{2};112\right)$.

Xét điểm $P(80;105;113)$.

Giả sử tồn tại t sao cho: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t.\vec{v}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}80=200+t\cdot\frac{x-200}{50}\\105=70+t\cdot\frac{y-70}{50}\\113=118-\frac{4t}{50}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=104\\y=98\\t=62,5\end{cases}\Rightarrow \text{Tọa độ } B(104;98;114)$$

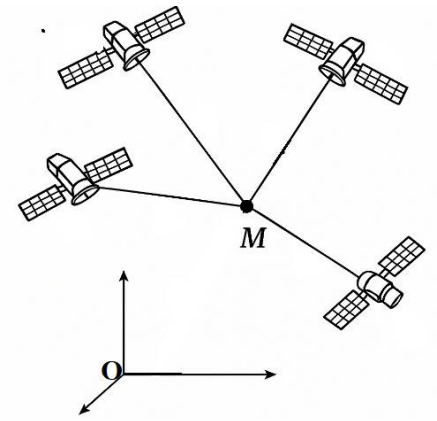
Suy ra: $\vec{v}=(-1,92;0,56;-0,08), C(56;112;112)$

Tính khoảng cách từ sân bay (gốc tọa độ) đến điểm C:

$d=OC=\sqrt{56^2+112^2+112^2}=\sqrt{28224}=168$ đơn vị trục 100 mét/ đơn vị.

Vậy khoảng cách từ sân bay đến máy bay sau 75 giây là $168.100\frac{1}{1000}=16,8$ km.

Câu 114. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3$, $MB=6$, $MC=5$, $MD=13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu kilômét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Do vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3, MB=6, MC=5, MD=13$

$\overrightarrow{AM}=(a-3;b-1;c)\Rightarrow(a-3)^2+(b-1)^2+c^2=3^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-6a-2b+1=0(1)$

$\overrightarrow{BM}=(a-3;b-6;c-6)\Rightarrow (a-3)^2+(b-6)^2+(c-6)^2=6^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-6a-12b-12c+45=0(2)$

$\overrightarrow{CM}=(a-4;b-6;c-2)\Rightarrow (a-4)^2+(b-6)^2+(c-2)^2=5^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-8a-12b-4c+31=0(3)$

$\overrightarrow{DM}=(a-6;b-2;c-14)\Rightarrow (a-6)^2+(b-2)^2+(c-14)^2=13^2$

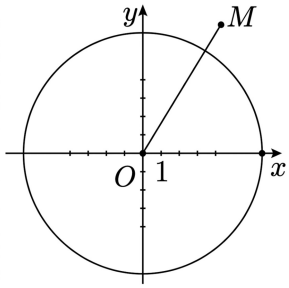
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-12a-4b-28c+67=0(4)$

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 10b+12c=44 \\ 2a+10b+4c=30 \\ 6a+2b+28c=66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$

$\Rightarrow M(1;2;2)\Rightarrow \overrightarrow{OM}(1;2;2)\Rightarrow OM=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3.$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng 3.

Câu 115. Thiên thạch với kích thước chỉ 30 cm đến 40 cm đến từ vùng không gian giữa các hành tinh, khi xuyên vào khí quyển Trái Đất ở độ cao 150 km so với mực nước biển, tạo ra vùng không khí bốc cháy quanh nó rộng vài trăm mét gây nên hiện tượng sao băng. Xem Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) được phát hiện ở vị trí điểm $M(4,29;7;0)$ và đang chuyển động thẳng với tốc độ không đổi 960 km/phút đến tâm Trái Đất. Xác định thời điểm (đơn vị phút) thiên thạch bị bốc cháy kể từ lúc phát hiện (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $1,73$

Khoảng cách từ thiên thạch từ lúc phát hiện đến tâm trái đất: $OM=\sqrt{4,29^2+7^2}=8,21$ nghìn km.

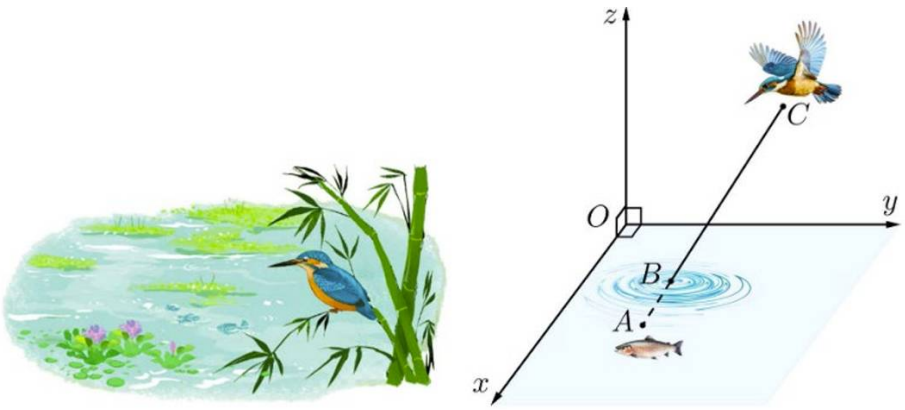
Quãng đường thiên thạch đã đi từ lúc bị phát hiện đến khi bốc cháy là

$d=OM-(R+150)=8210-(6400+150)=1660$ km

Thời gian cần tìm là: $t=\dfrac{1660}{960}=\dfrac{83}{48}\approx 1,73$ phút.

Câu 116. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt

phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a;b;c)$. Tính $T=5a+10b+2026c$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 21

Ta quy ước cứ $1m$ = 1 đơn vị trong hệ tọa độ $Oxyz$.

Gọi vị trí của con chim bói cá ban đầu là C, khi đó nó cách phía trên mặt nước $2m$ nên $z_C=2$, ngoài ra cách mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ nên $y_C=3$ và $x_C=1$. Do đó tọa độ điểm $C(1;3;2)$.

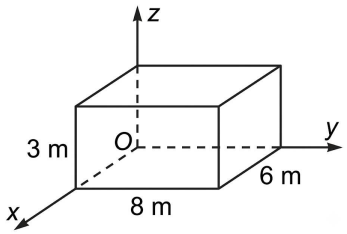
Gọi vị trí của con cá là A, khi đi con cá đang dưới mặt nước 50cm = 0,5m nên $z_A=-0,5$, ngoài ra cách mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$ nên $y_A=1$ và $x_A=1,5$. Do đó tạo độ điểm $A(1,5;1;-0,5)$

Vì điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước nên $B\in(Oxy)$ hay $c=0$ khi đó tọa độ $B(a;b;0)$.

Ta có 3 điểm A,B,C thẳng hàng nên: $\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=0,5k\\b-3=-2k\\-2=-2,5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{5}\\b=\dfrac{7}{5}\\k=\dfrac{4}{5}\end{cases}$.

Vậy $B\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5};0\right)$ suy ra $T=5a+10b+2026c=21$.

Câu 117. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8m$, chiều rộng là $6m$ và chiều cao là $3m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Giả sử toạ độ của điểm treo đèn là (a,b,c). Tính giá trị biểu thức $T=2a+3b-4c$.

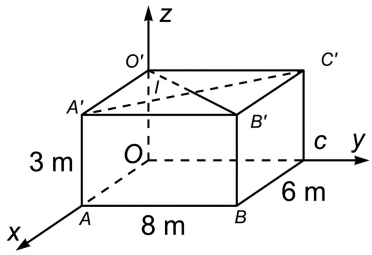


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Khi đó, $O'(0;0;3), B'(8;6;3)$.

Vì phòng học thiết kế dạng hình hộp chữ nhật nên hình $O'C'B'A'$ là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo $O'B'$ và $A'C'$ nên I là trung điểm của $O'B'$.

Vì đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học nên đèn trùng với I.

Do đó: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{O'} + x_{B'}}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_{O'} + y_{B'}}{2} = 3. \\ z_I = \dfrac{z_{O'} + z_{B'}}{2} = 3 \end{cases}$

Vậy điểm treo đèn là $I(4;3;3)$

$\Rightarrow T = 2a + 3b - 4c = 5$

Câu 118. Trong một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có 2 cây quạt treo tường. Cây quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, cây quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1m$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị: mét). Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Từ hình vẽ: $A\in(Oxz)$ nên $A(x;0;z)$, $B\in(Oyz)$ nên $B(0;y;z)$

Cây quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$ nên $A(4;0;3)$.

Cây quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1m$ nên $B(0;3;3)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(-4;3;0)\Rightarrow AB=5(m)$

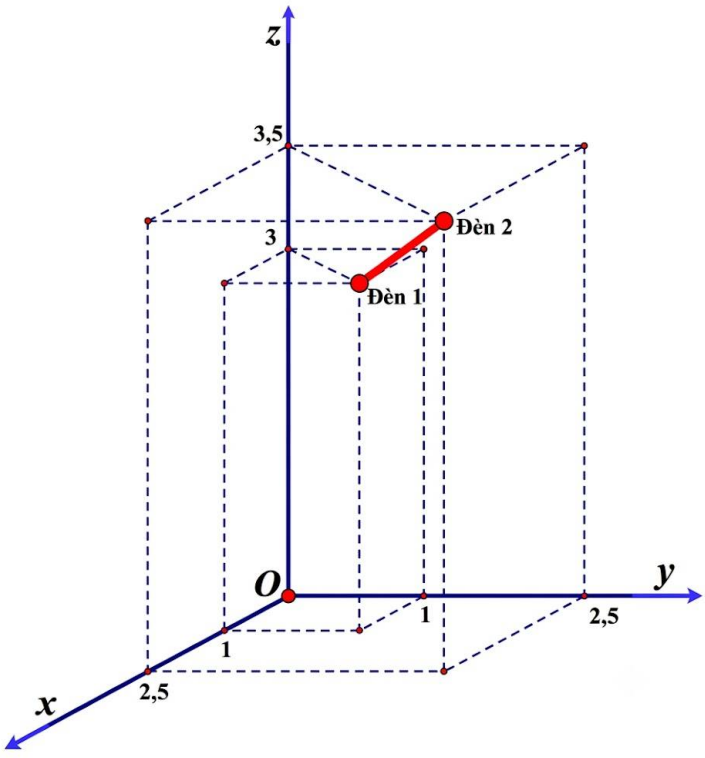
Câu 119. Trong một góc phòng học có treo hai chiếc đèn. Chiếc thứ nhất cách mặt đất $3\ m$ và cách mỗi bức tường $1\ m$. Chiếc thứ hai cách mặt đất $3,5\ m$ và cách mỗi bức tường $2,5\ m$. Tính khoảng cách giữa hai chiếc đèn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,18

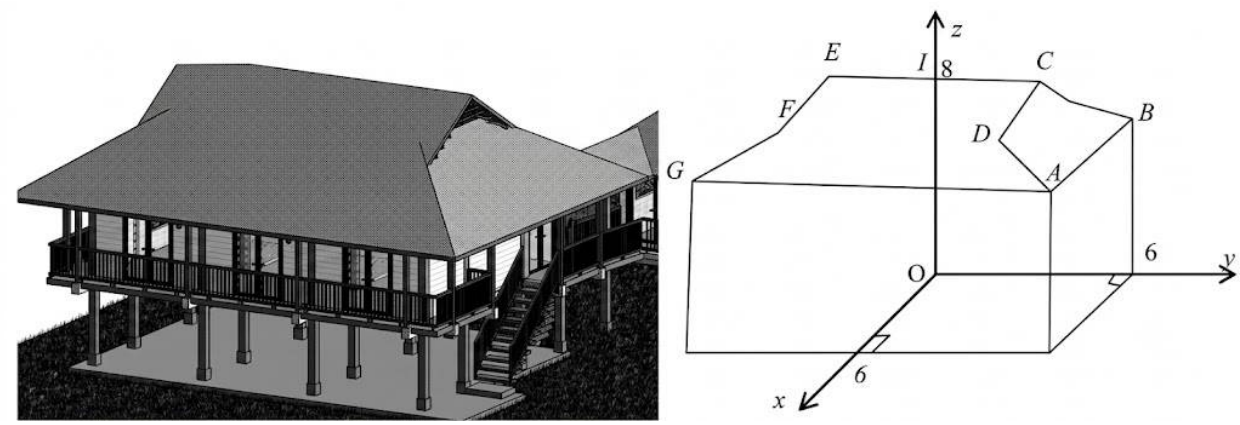


Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc O trùng với góc phòng, các trục Ox, Oy, Oz trùng với các mép tường như hình vẽ. Đơn vị trên trong không gian $Oxyz$ được lấy theo mét. Khi đó tọa độ của chiếc đèn thứ nhất là $(1;1;3)$ và tọa độ của chiếc đèn thứ hai là $(2,5;2,5;3,5)$.

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc đèn là

$$\sqrt{(2,5-1)^2+(2,5-1)^2+(3,5-3)^2}=\sqrt{(1,5)^2+(1,5)^2+(0,5)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}\approx 2,18\ (m).$$

Câu 120. Thầy Thanh muốn xây dựng một nhà sàn theo thiết kế như hình vẽ dưới đây.

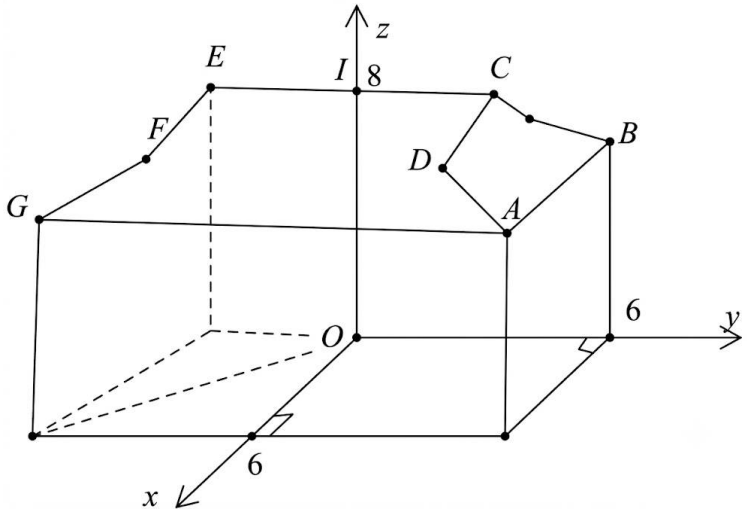


Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm $G(6;-6;6)$; $C(3;4;8)$; $F(4;-4;7)$ và điểm I là trung điểm CE. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng bao nhiêu độ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 45



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta có:

Vì A, G đối xứng qua (Oxz) nên tọa độ điểm A là $A(6;6;6)$.

Vì AB // (Oxy) và $B\in(Oyz)$ nên tọa độ điểm B là $B(0;6;6)$.

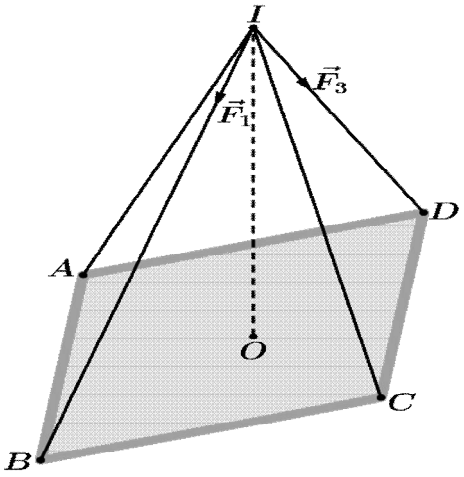
Vì D, F đối xứng qua (Oxz) nên tọa độ điểm D là $D(4;4;7)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(-6;0;0)$; $\overrightarrow{DC}=(-1;0;1)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(-6)(-1)+0.0+0.1}{\sqrt{(-6)^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos a.$$

$\Rightarrow a=45°$

Câu 121. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0;0;9)$ như hình vẽ. Điểm $O(0;0;5)$; $A(-\sqrt{2};\sqrt{2};5)$ và góc $\widehat{OID}$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ lần lượt là lực căng của các sợi dây IB, IC, ID, IA. Biết rằng $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=50$ N và $\left|\overrightarrow{F_2}\right|=40$ N



Tính khối lượng m (kg) của tấm bảng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) (Cho gia tốc trọng trường $g=9,8(\text{m/s}^2)$ và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P=m.g$)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Do O là trung điểm của AC nên $C(\sqrt{2};-\sqrt{2};5)$ và gọi $D(a;b;c)$

Khi đó $\overrightarrow{OD}=(a;b;c-5)$; $\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{2};-2\sqrt{2};0)$ mà hai vectơ này vuông góc với nhau

Từ đó $2\sqrt{2}a=2\sqrt{2}b\Leftrightarrow a=b\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(a-\sqrt{2};a+\sqrt{2};c-5);\overrightarrow{DA}=(a+\sqrt{2};a-\sqrt{2};c-5)$

Ta có: $\overrightarrow{ID}=(a;a;\sqrt{4-2a^2}-4);\overrightarrow{IO}=(0;0;-4)\Rightarrow\cos\widehat{OID}=\dfrac{16-4\sqrt{4-2a^2}}{16\sqrt{a^2+a^2+\left(4-4\sqrt{4-2a^2}\right)^2}}$

Khảo sát hàm số $f(a)=\dfrac{16-4\sqrt{4-2a^2}}{16\sqrt{a^2+a^2+\left(4-4\sqrt{4-2a^2}\right)^2}}$ tìm được $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy tọa độ các điểm: $A\left(-\sqrt{2};\sqrt{2};5\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2};1\right)$; $C\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};5\right)$; $D\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2};6\right)$

Ta có: $\overrightarrow{IA}=\left(-\sqrt{2};\sqrt{2};-4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IA}\right|=2\sqrt{5}$; $\overrightarrow{IC}=\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};-4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IC}\right|=2\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{F_4}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=k.2\sqrt{5}=40\Rightarrow k=4\sqrt{5}$

Suy ra $\overrightarrow{F_2}=\left(-4\sqrt{10};4\sqrt{10};-16\sqrt{5}\right)$; $\overrightarrow{F_4}=\left(4\sqrt{10};-4\sqrt{10};-16\sqrt{5}\right)$

Tương tự $\overrightarrow{IB}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2};-5\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IB}\right|=2\sqrt{7}$; $\overrightarrow{ID}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2};-3\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{ID}\right|=2\sqrt{3}$

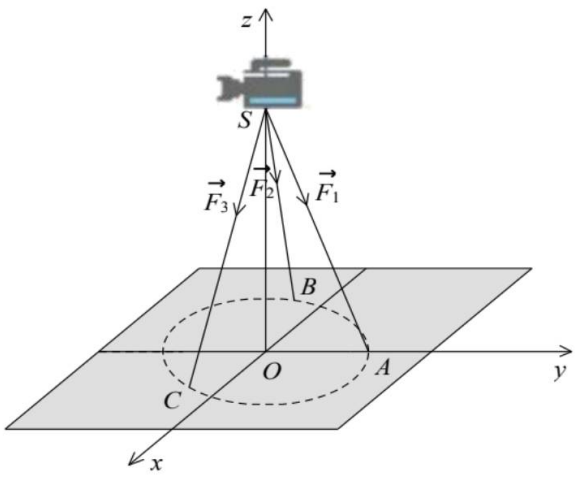
Sử dụng tỉ lệ giữa độ dài dây và độ lớn lực: $\frac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_3}\right|}=\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\frac{50\sqrt{21}}{7}$

Suy ra $\overrightarrow{F_3}=\left(\frac{25\sqrt{42}}{14};-\frac{25\sqrt{42}}{14};-\frac{75\sqrt{7}}{7}\right)$; $\overrightarrow{F_1}=\left(-\frac{25\sqrt{42}}{14};-\frac{25\sqrt{42}}{14};-\frac{125\sqrt{7}}{7}\right)$

Để hệ cân bằng thì $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{P}=\left(0;0;-32\sqrt{5}-\frac{200\sqrt{7}}{7}\right)\Rightarrow\left|P\right|=\frac{200\sqrt{7}}{7}+32\sqrt{5}$

Vậy khối lượng của thanh kim loại là: $m=\frac{P}{g}=\frac{\frac{200\sqrt{7}}{7}+32\sqrt{5}}{9{,}8}=15{,}015\approx15\,(\text{kg})$

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, một chiếc máy quay phim được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S\left(0;0;5\right)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A\left(0;1;0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ (hình vẽ bên). Biết lực tác dụng của máy quay phim lên các giá đỡ SA, SB, SC lần lượt là $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ và trọng lượng của chiếc máy là $60\,N$, giá trị của $\left|\overrightarrow{F_1}\right|+\left|\overrightarrow{F_2}\right|+\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ bằng bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 61,2

$\overrightarrow{SA}=(0;1;-5)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-5\right)$, $\overrightarrow{SC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-5\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};0\right)$, $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3};0;0)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};0\right)\Rightarrow AB=BC=AC=3$

Ta có $SA=SB=SC=\sqrt{26}$ nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC mà lại có ΔABC đều nên $SO\perp(ABC)$

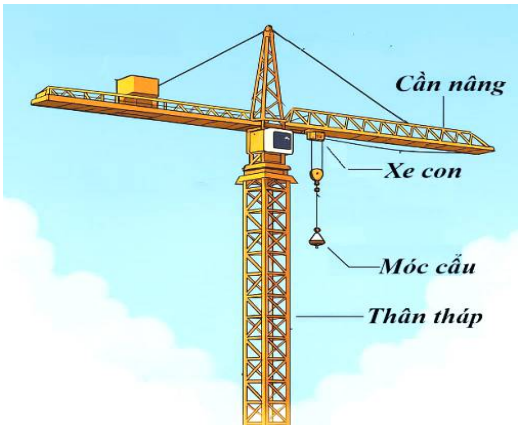
Giả sử $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{SC}$ $(k>0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=k\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)=(0;0;-15k)$

Theo bài ta lại có $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=60\Rightarrow 15k=60\Rightarrow k=4$

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}\right|+\left|\overrightarrow{F_2}\right|+\left|\overrightarrow{F_3}\right|=4(SA+SB+SC)=12\sqrt{26}\approx 61,2N$

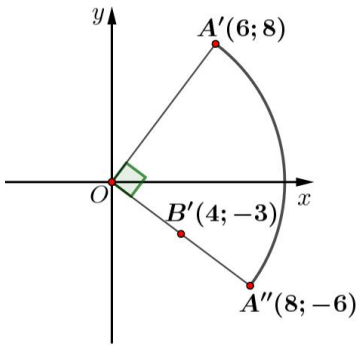
Câu 123. Người ta thường dùng cẩu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cẩu trục dùng móc cẩu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn $1m$ so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cẩu trục quay cần nâng một góc $\alpha\in(0°;180°)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6;8;0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4;-3;15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 37,7



Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của điểm A và điểm B trên mặt phẳng (Oxy).

Lúc đầu vật liệu ở vị trí $A'(6;8)$ di chuyển thẳng đứng theo phương song song với phương của trục Oz quãng đường $16m$ (phải cao hơn độ cao $15m$ của vị trí điểm đến $1m$)

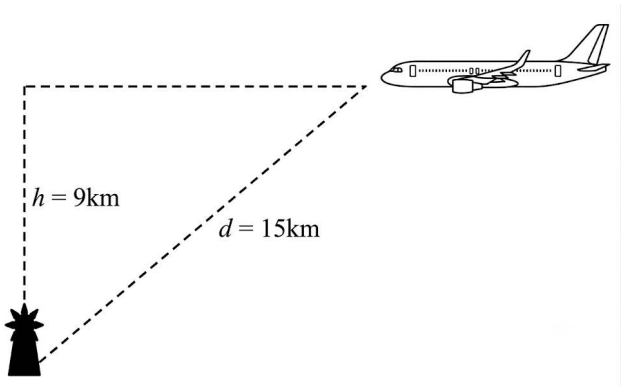
Tiếp theo cẩu trục quay cần nâng di chuyển từ vị trí điểm A' đến vị trí điểm A'' (di chuyển một góc có độ lớn $90°$), khi đó vật liệu di chuyển một quảng đường $l = R\alpha = OA'.\frac{\pi}{2} = 10\frac{\pi}{2} = 5\pi$.

Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển từ vị trí A'' đến vị trí B' (với B' là trung điểm của OA''), tức là vật liệu di chuyển quảng đường $A''B' = 5m$.

Cuối cùng mốc cẩu hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt là điểm $B(4;-3;15)$.

Vậy tổng quảng đường di chuyển của vật liệu là: $16 + 5\pi + 5 + 1 \approx 37,7m$.

Câu 124. Một máy bay đang bay ở độ cao $h = 9\,km$ trên một đường bay sẽ đưa nó đi thẳng qua một trạm kiểm soát không lưu (Xem hình vẽ minh họa). Tại thời điểm máy bay cách trạm một khoảng $d = 15\,km$, khoảng cách d giữa máy bay và trạm không lưu đang giảm với tốc độ $v = 760\,km/h$; Hỏi tốc độ V của máy bay lúc này là bao nhiêu km/h?



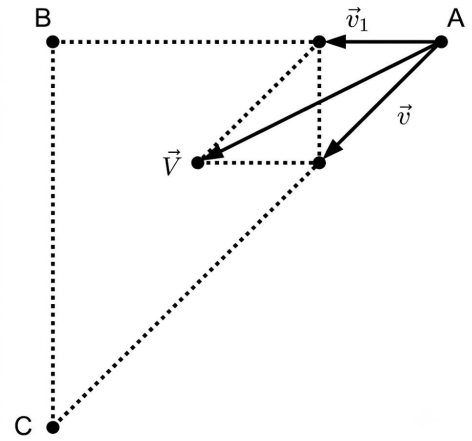
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1299

Ta đánh dấu máy bay là điểm A và trạm kiểm soát không lưu là C.

Gọi B là hình chiếu của C lên đường bay thẳng của máy bay.



$\vec{v}$ là vector biểu thị tốc độ giảm của khoảng cách d giữa máy bay và trạm lưu không gian.

Gọi $\overrightarrow{v_1}$ là hình chiếu của vector $\vec{v}$ lên AB. Khi đó vectơ vận tốc của máy bay lúc này sẽ là:

$\vec{V}=\vec{v}+\overrightarrow{v_1}$.

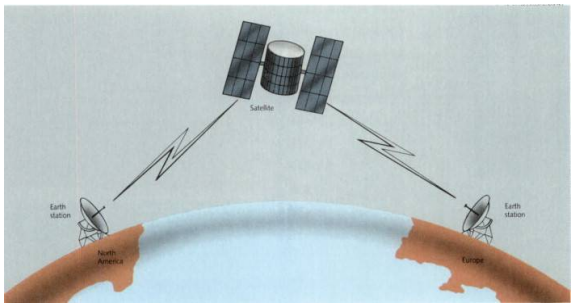
Ta có $\cos\left(\vec{v};\overrightarrow{v_1}\right)=\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{15^2-9^2}}{15}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$ và

$\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{v};\overrightarrow{v_1}\right)=\dfrac{760.4}{5}=608.$

Ta có: $\left|\vec{V}\right|^2=\left|\vec{v}+\overrightarrow{v_1}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+2.\left|\vec{v}\right|.\left|\overrightarrow{v_1}\right|.\cos\left(\vec{v},\overrightarrow{v_1}\right)=760^2+608^2+2.608^2=1686592\Rightarrow\left|\vec{V}\right|\approx1298,69.$

Như vậy tốc độ của máy bay lúc này là $1299\,km/h$.

Câu 125. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại ở vị trí M, biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi tuyền đến trạm thu tại A. Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0;0;0)$, $A(30;40;0)$ $M(x;y;35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s. Một tín hiệu phát từ A đến M, rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây? (làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 32

Ta có độ dài quãng đường truyền tín hiệu

$T=OM+MA=\sqrt{x^2+y^2+35^2}+\sqrt{(30-x)^2+(40-y)^2+35^2}$

$\geq \sqrt{(x+30-x)^2+(y+40-y)^2+(35+35)^2}=10\sqrt{74}$ (ngàn km)

Thời gian ít nhất để A nhận được tín hiệu từ O là: $\frac{10\sqrt{74}}{270}\approx 0,32$ (s).

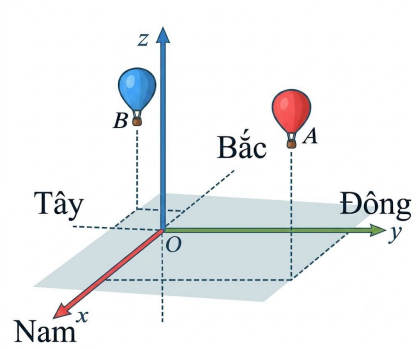
Câu 126. Hai chiếc kinh khí cầu A và B bay lên từ cùng một vị trí O trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, kinh khí cầu A nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $1km$; kinh khí cầu B nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$ (hình minh họa bên dưới). Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai kinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7,03



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm xuất phát là gốc O như hình vẽ trên.

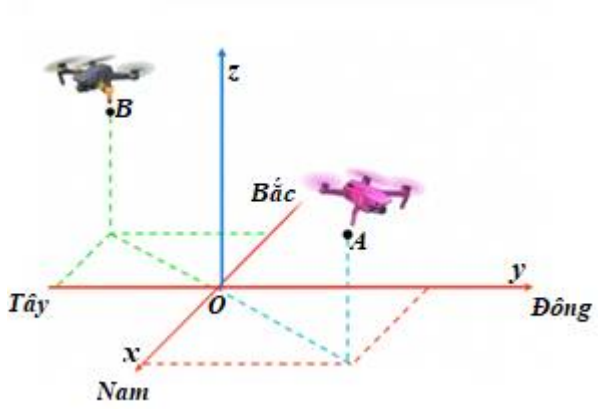
Khi đó tọa độ hai kinh khí cầu là $A(3;4;1), B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$

Gọi M là vị trí người quan sát và $B'\left(-1;-\frac{3}{2};-\frac{4}{5}\right)$ là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy).

Khi đó $MA+MB=MA+MB'\geq AB'=\sqrt{(3+1)^2+\left(4+\frac{3}{2}\right)^2+\left(1+\frac{4}{5}\right)^2}\approx 7,03km$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, A, B' thẳng hàng và M thuộc đoạn AB'.

Câu 127. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía nam và $2m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía bắc và $6m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2,5

Ta có $A(3;2;5), B(-6;-6;5)$. Gọi M là một vị trí trên mặt đất $\Rightarrow M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$.

Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai điểm A và B là:

$$MA+MB=\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2+5^2}+\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+5^2}$$
$$\geq \sqrt{(3-x+x+6)^2+(2-y+y+6)^2+(5+5)^2}=7\sqrt{5}$$

$\min(MA+MB)=7\sqrt{5}$ xảy ra khi $\dfrac{3-x}{6+x}=\dfrac{2-y}{6+y}=\dfrac{5}{5} \Leftrightarrow \begin{cases}3-x=6+x\\2-y=6+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-3}{2}\\y=-2\end{cases}$.

Do đó vị trí để tổng khoảng cách từ nó đến hai chiếc flycam ngắn nhất là $M\left(\dfrac{-3}{2};-2;0\right)$

Vậy $OM=\sqrt{\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+(-2)^2}=2,5(m)$.

Câu 128. Nhân dịp lễ 30/4/2025, tại Quảng trường trung tâm TP. Hồ Chí Minh diễn ra màn trình diễn máy bay trực thăng kéo cờ Tổ quốc và cờ Đảng. Hai máy bay cất cánh cùng lúc từ một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời

cách mặt đất 500m. Cùng thời điểm đó, một chiến sĩ công an đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc máy bay nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí chiến sĩ công an đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc máy bay là nhỏ nhất. Khoảng cách từ vị trí chiến sĩ công an quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc máy bay là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,47$

Xét hệ trục tọa độ *Oxyz* với điểm xuất phát của hai máy bay là gốc $O(0,0,0)$, trục *Ox*: hướng đông, trục *Oy*: hướng Bắc, trục *Oz* hướng lên trên và mặt đất là mặt phẳng (Oxy). Đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là 1 km.

Sau một thời gian máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km nên máy bay thứ nhất có tọa độ là $A(1;-3;1)$.

Tương tự máy bay thứ hai có tọa độ là $B(-1;2;0,5)$.

Gọi *C* là điểm đối xứng với *A* qua (Oxy). Ta có $C(1;-3;-1)$

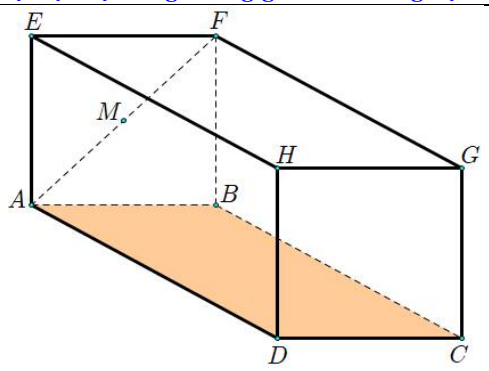
Chiến sĩ công an đứng trên mặt đất, nên có tọa độ $P(x,y,0)$.

Có $PA+PB=PC+PB\geq BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi P,B,C thẳng hàng

$$\overrightarrow{BC}=(2;-5;-1,5) \text{ và } \overrightarrow{BP}=(x+1;y-2;-0,5)\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{-0,5}{-1,5}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0\right)\Rightarrow OP=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+0}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0,47.$$

Câu 129. Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB=6$ (dm), $AD=8$ (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm G đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm M là trung điểm của AF được mô hình hóa như hình vẽ sau:

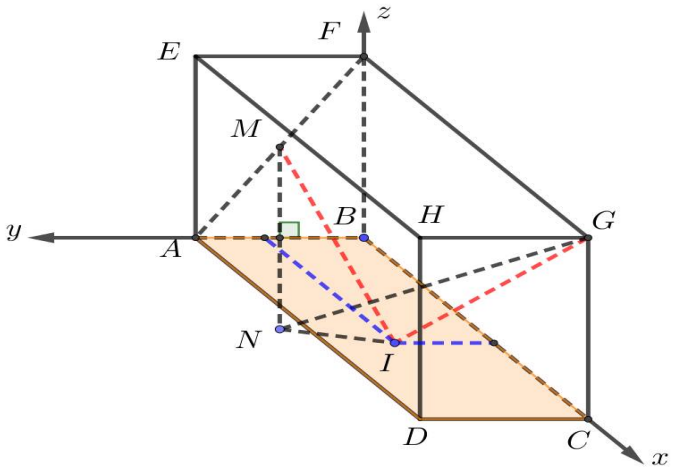


Để đường đi ngắn nhất thì chú cá bơi đến điểm dưới đáy hồ cách BA và BC những đoạn bằng a và b. Khi đó tổng $D = 3a + 6b$ bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20



Dựng hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ

Khi đó tọa độ các điểm là $B(0;0;0)$, $C(8;0;0)$, $D(8;6;0)$, $A(0;6;0)$, $G(8;0;10)$, $F(0;0;10)$.

Ta có: M là trung điểm của $AF \Rightarrow M(0;3;5)$.

Con cá bơi từ điểm G đến chạm mặt đáy hồ tại điểm $I(x;y;0) \in (Oxy)$ với $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 6$.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua $(Oxy) \Rightarrow N(0;3;-5)$.

Quãng đường di chuyển của con cá là $G - I - M$

Ta có: $IM + IG = IN + IG \ge GN = \sqrt{(0-8)^2 + (3-0)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{298}$.

Để $IM + IG$ nhỏ nhất thì ba điểm I, G, N thẳng hàng

Suy ra $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{NG}$ cùng phương.

$\overrightarrow{IG} = (8-x;-y;10)$.

$\overrightarrow{NG} = (8;-3;15)$.

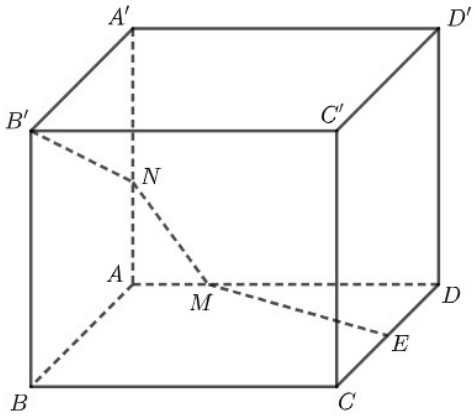
Do đó $\dfrac{8-x}{8} = \dfrac{-y}{-3} = \dfrac{10}{15}$.

Suy ra $x=\frac{8}{3},\ y=2\Rightarrow I\left(\frac{8}{3};2;0\right)$.

Khi đó, $a=d\left(I,BA\right)=\frac{8}{3},\ b=d\left(I,BC\right)=2$.

Vậy $D=3a+6b=3\cdot\frac{8}{3}+6\cdot 2=20$.

Câu 130. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 4 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu đềcimet?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Cách 1 : Trải phẳng

Cách 2:

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A; các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD và AA'. Ta có: $B'\left(4;0;4\right)$ và $E\left(2;4;0\right)$.

$N\in Oz\Rightarrow N\left(0;0;a\right)$; $M\in Oy\Rightarrow M\left(0;b;0\right)$, (điều kiện $0\le a,b\le 4$).

$\Rightarrow B'N=\sqrt{16+\left(a-4\right)^2};MN=\sqrt{a^2+b^2};ME=\sqrt{4+\left(b-4\right)^2}$.

Ta có: $B'N+MN+ME=\sqrt{16+\left(a-4\right)^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{4+\left(b-4\right)^2}$.

$=\sqrt{\left(4-a\right)^2+4^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2^2+\left(4-b\right)^2}\ge\sqrt{\left(4-a+a+2\right)^2+\left(4+b+4-b\right)^2}=10$.

(Áp dụng bất đẳng thức Mincôpxki).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4-a}{4}=\frac{a}{b}=\frac{2}{4-b}=\frac{4-a+a+2}{4+b+4-b}=\frac{6}{8}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng 10 dm.

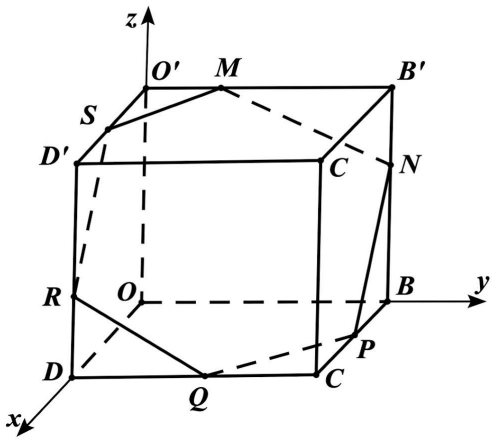
Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ có cạnh bằng 9 sao cho điểm D thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy và điểm O' thuộc tia Oz. Điểm M thuộc cạnh

$O'B'$ sao cho $O'B' = 3O'M$. Một con kiến bò từ vị trí M qua sáu mặt của hình lập phương đã cho rồi quay lại vị trí điểm M sao cho quãng đường đi được của con kiến là ngắn nhất. Hỏi với cách bò như vậy, con kiến đã bò qua bao nhiêu điểm mà điểm đó có hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương?

Trả lời: ……..

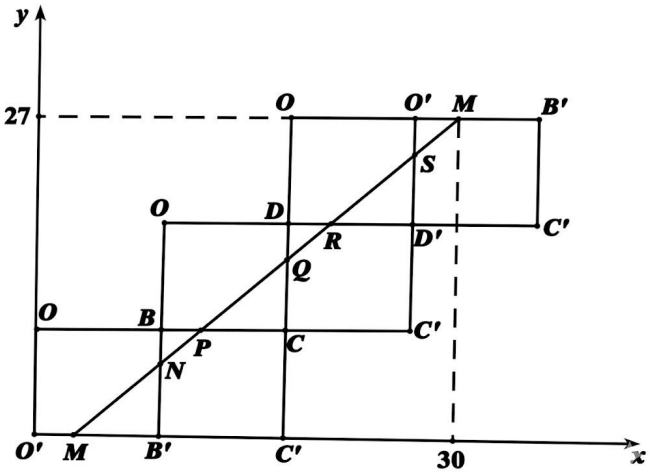
Lời giải

Đáp án: 6



Giả sử con kiến bò theo đường $MNPQSRM$.

Ta trải phẳng các mặt của hình lập phương và minh họa đường đi ngắn nhất của con kiến như hình sau:



Gắn hệ trục $O'xy$ như hình vẽ. Do độ dài cạnh hình lập phương là 9 và $O'M = \frac{1}{3}O'B' = 3$ nên trong hệ trục tọa độ này, ta có: đường thẳng d minh họa đường đi ngắn nhất của con kiến đi qua các điểm có tọa độ $(3;0)$, $(30;27)$.

Phương trình $d:\ y = x + 3$.

Các đoạn thẳng MN, PQ, RS lần lượt thuộc các mặt phẳng tọa độ $(yOz),(xOy),(xOz)$ nên trong không gian, tọa độ của các điểm thuộc các đoạn thẳng này không thỏa yêu cầu bài toán (hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương).

Vậy ta chỉ cần đếm tổng số điểm có tọa độ nguyên dương thuộc các đoạn thẳng NP, QR, SM (không tính các đầu mút) trong hệ tọa độ $xO'y$.

+) Xét đoạn NP: Điểm $I(x_0;y_0)\in NP$ và có tọa độ là các số nguyên dương khi $\begin{cases}9<x_0<12\\x_0\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow x_0\in\{10;11\}$. Trường hợp này có 2 điểm.

Hai trường hợp còn lại tương tự.

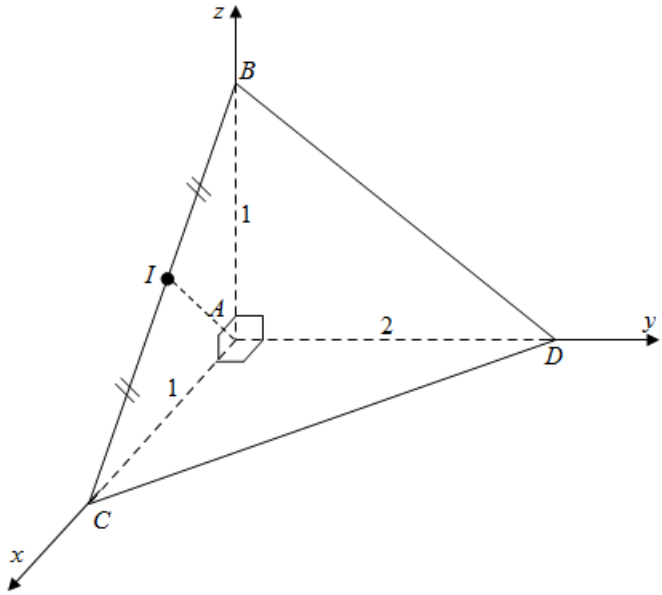
Kết luận: có tất cả 6 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 132. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau và $AD=2,AB=AC=1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD. Biết độ dài $BI=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4



Vì tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax, AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra:

$A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B\in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C\in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D\in Ay$.

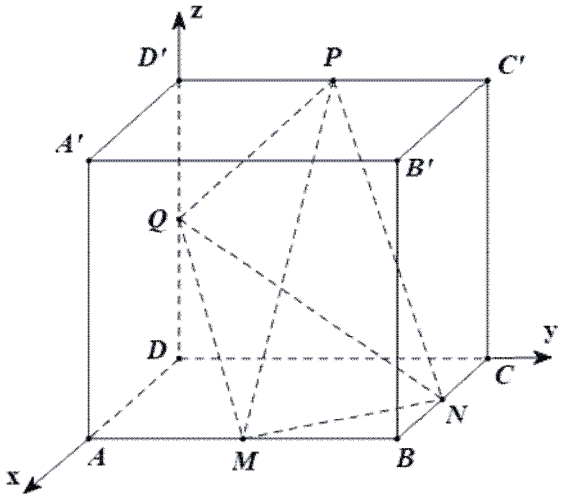
Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $ABD\Rightarrow G\left(\dfrac{1}{6};0;\dfrac{1}{2}\right)$

Độ dài BI là: $BI=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)^2+(0-0)^2+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow a+b=4.$

Câu 133. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,BC,C'D'$ và DD'. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, tổng các vectơ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$ có toạ độ là $(m;n;p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T=2m+n+4p$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0),A(1;0;0),\ B(1;1;0),C(0;1;0),\ A'(1;0;1),\ B'(1;1;1),$ $C'(0;1;1),D'(0;0;1)$.

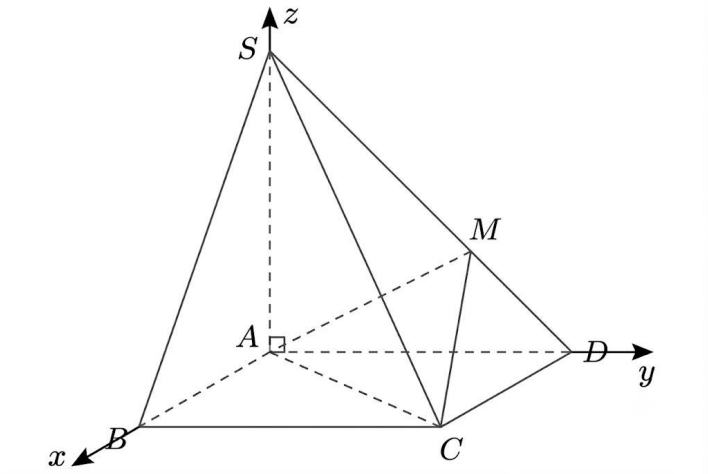
Vì M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,BC,C'D'$ và DD' nên

$M\left(1;\frac{1}{2};0\right),N\left(\frac{1}{2};1;0\right),P\left(0;\frac{1}{2};1\right),Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\overrightarrow{MP}=(-1;0;1),\overrightarrow{MQ}=\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow T=m+2n+4p=0$

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{5}{2};0;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow T=2m+n+4p=1$

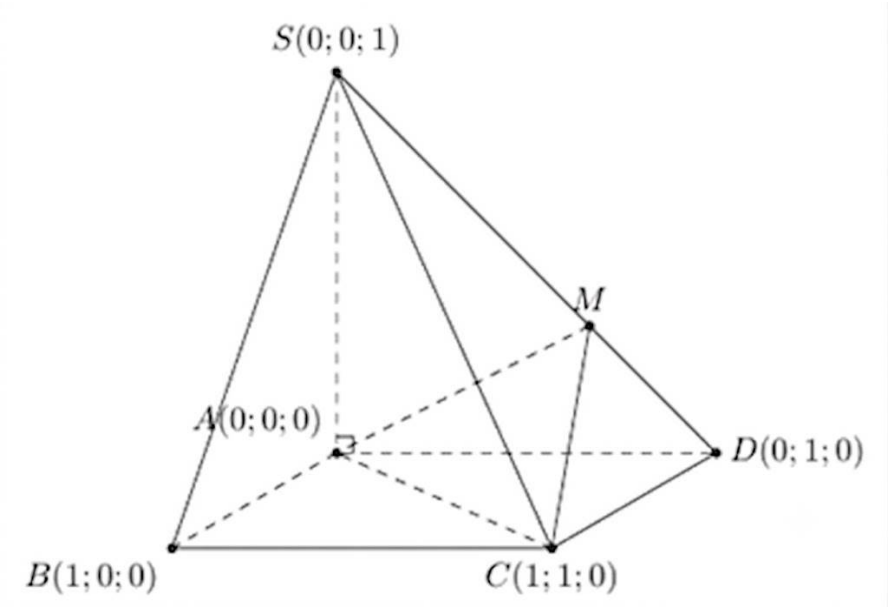
Câu 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB,AD,AS như hình vẽ. Tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B, D, S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$

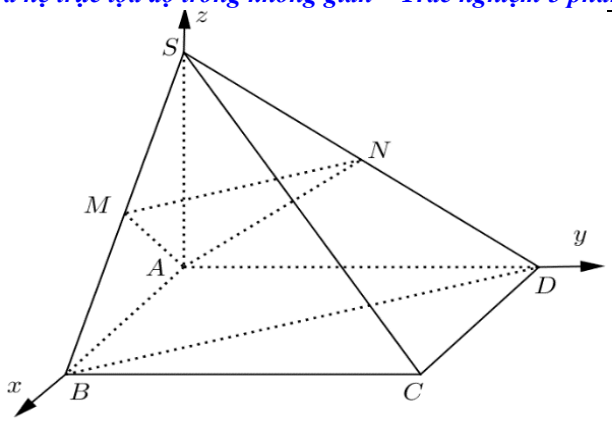
suy ra: $\overrightarrow{SM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \Rightarrow M\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (1;1;0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (1;1;0) \Rightarrow 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN. Biết độ dài cạnh $DG = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A\equiv O, B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$(như minh họa hình vẽ),

suy ra $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DG}=\left(\frac{a}{6};-\frac{5a}{6};\frac{a}{3}\right)\Rightarrow DG=\sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2+\left(-\frac{5a}{6}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=a\sqrt{\frac{5}{6}}$

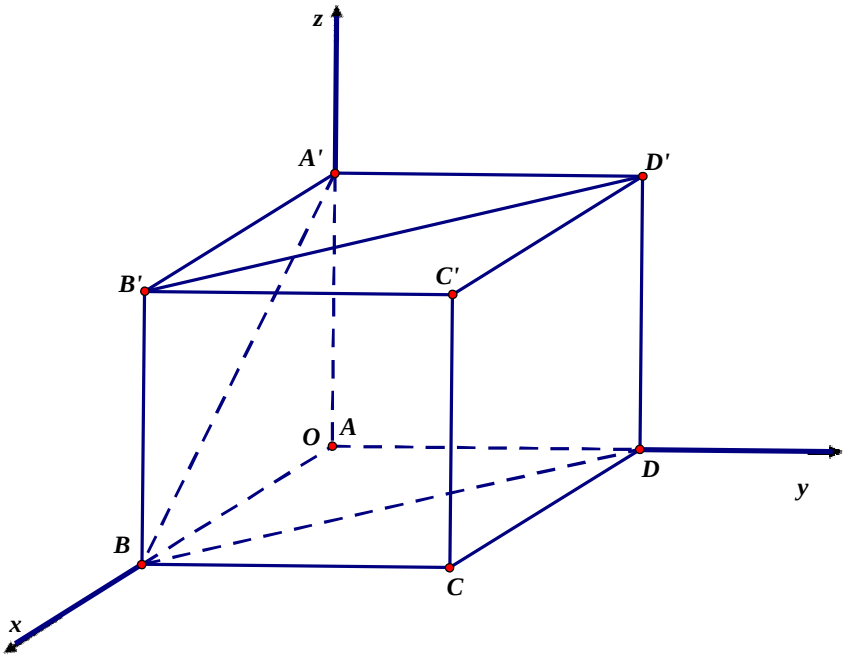
$\Rightarrow m+n=11$

Câu 136. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Biết độ dài cạnh $C'G=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A\equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$,

$B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

Độ dài $C'G$ là: $C'G=\sqrt{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{a}{3}-a\right)^2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}=a\sqrt{\frac{4}{3}}$

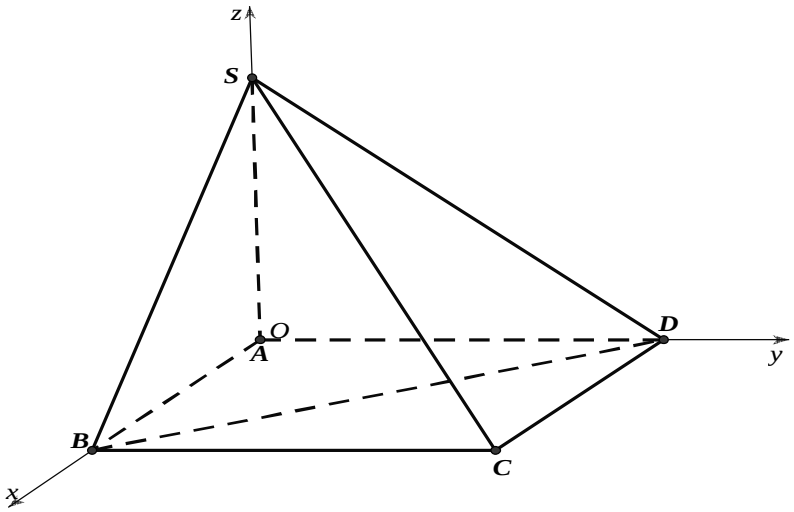
$\Rightarrow m+n=7$

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD. Biết độ dài cạnh $CG=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, $D\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $S\left(0;0;a\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $SBD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a}{3}\right)$

Độ dài CG là: $CG=\sqrt{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}-0\right)^2}=a\sqrt{\frac{17}{9}}$

$\Rightarrow m+n=26$

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M,N lần lượt là trung điểm của SC,SD. Góc NMG của tam giác NMG bằng bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến phần mười độ).

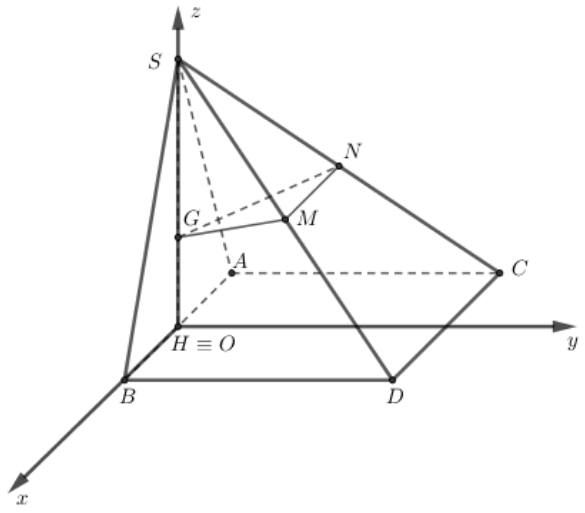
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $64,3$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng H và các tia Ox, Oz lần lượt trùng với các tia HB, HS và tia Oy đi qua H đồng thời song song BD như hình vẽ.



C

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$

suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó ta có:

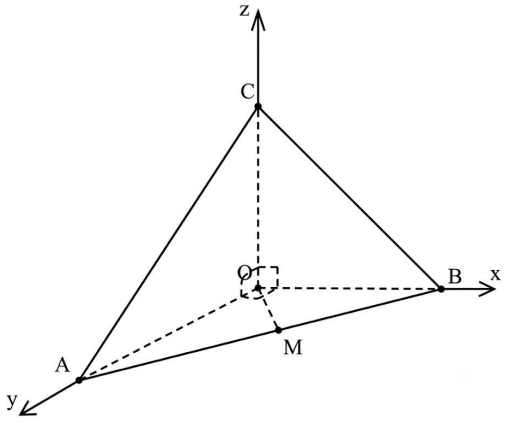
$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a}{2}$

$\overrightarrow{MG} = \left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

góc NMG của tam giác NMG là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MG}$. Do đó, ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MG}\right) = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MG}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{MG}\right|} = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MG}\right) \approx 64,3^0 \Rightarrow \widehat{NMG} \approx 64,3^0$$

Câu 139. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OB, OA, OC như hình vẽ. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng bao nhiêu độ?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 120

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC}=(-a;0;a), \overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

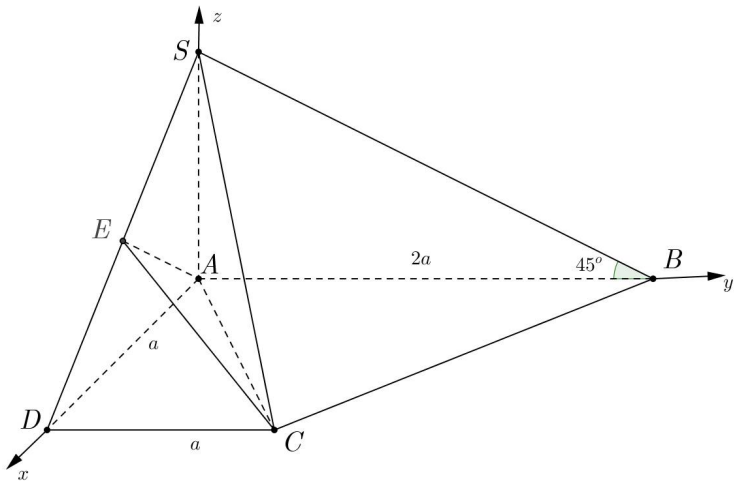
$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OM}}{BC.OM}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a.\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=120^\circ$$

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE. Biết độ dài cạnh $BG=\frac{a\sqrt{113}}{6}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 119



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA} = 45^o$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ACE \Rightarrow G\left(\frac{a}{2};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{3}-2a\right)^2+\left(\frac{a}{3}-0\right)^2} = \frac{a\sqrt{113}}{6}$

$\Rightarrow m+n=119.$

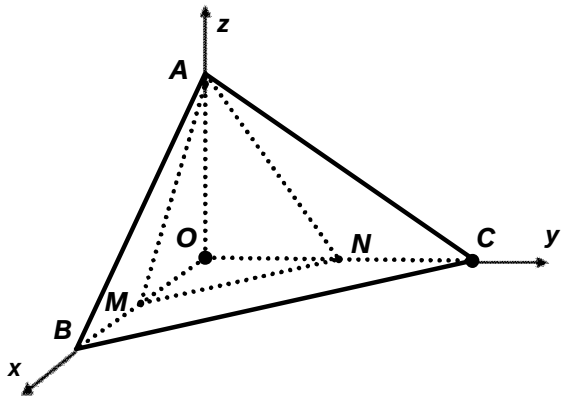
Câu 141. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN. Biết khoảng cách từ G đến K bằng $\frac{\sqrt{m}}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n.$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO=5, OB=2, OC=4$

$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0).$

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

Khoảng cách từ G đến K là: $GK=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow m+n=8.$

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Biết vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}=\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 34

Ta có

$3\vec{a}=(3\cdot 2;3\cdot 1;3\cdot 5)=(6;3;15)$

$2\vec{b}=(2\cdot 2;2\cdot 2;2\cdot 1)=(4;4;2)$.

Do đó $3\vec{a}+2\vec{b}=(6+4;3+4;15+2)=(10;7;17)$

$\Rightarrow x_0+y_0+z_0=34$

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=\left(5;4;-1\right)$, $\vec{b}=\left(2;-5;3\right)$, $\vec{u}=\left(x;y;z\right)$ thỏa mãn $\vec{a}+2\vec{u}=\vec{b}$ .Tính giá trị biểu thức $T=2x+2y+z$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

Ta có:

$2\vec{u}=\left(2x;2y;2z\right)\Rightarrow\vec{a}+2\vec{u}=\left(5+2x;4+2y;-1+2z\right)$

$\vec{b}=\left(2;-5;3\right)$

Vì $\vec{a}+2\vec{u}=\vec{b}$ nên: $\begin{cases}5+2x=2\\4+2y=-5\\-1+2z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\y=-\frac{9}{2}\\z=2\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left(-\frac{3}{2};-\frac{9}{2};2\right)$

Do đó: $T=2x+2y+z=-10$

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=\left(5;3;-2\right)$ và $\vec{b}=\left(m;-1;m+3\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\cos\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3m-9}{\sqrt{38}.\sqrt{2m^2+6m+10}}$.

Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)<0\Leftrightarrow 3m-9<0\Leftrightarrow m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;\ 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;-1;0)$. Xác định k để vectơ $\vec{u}=(2;2k-1;0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-0,5$

Ta có : $\vec{u}=(2;2k-1;0)=2\left(1;\dfrac{2k-1}{2};0\right)$

vectơ $\vec{u}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ khi $\dfrac{2k-1}{2}=-1\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}=-0,5$

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M\left(2;3;-1\right)$, $N\left(-1;1;1\right)$ và $P\left(1;m-1;2\right)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có

$\overrightarrow{NM}=\left(3;2;-2\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(2;m-2;1\right)$.

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=0$

$\Leftrightarrow 3.2+2.\left(m-2\right)-2.1=0\ \Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3;7;2), N(5;1;-1)$ và $P(4;-4;-2)$. Gọi $G\left(a;b;c\right)$ là trọng tâm của tam giác MNP. Tính giá trị biểu thức $T=a+3b+3c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Áp dụng công thức tính toạ độ trọng tâm theo toạ độ các đỉnh của tam giác MNP, ta có

$G\left(\dfrac{3+5+4}{3};\dfrac{7+1-4}{3};\dfrac{2-1-2}{3}\right)$, hay $G\left(4;\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow T=a+3b+3c=7$

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3), B(a;b;c)$ và $M(2;1;-2)$. Biết M là trung điểm của AB, tính $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -5

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+a}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+b}{2} \\ z_M=\dfrac{z_A+c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\dfrac{-1+a}{2} \\ 1=\dfrac{5+b}{2} \\ -2=\dfrac{3+c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=-7 \end{cases} \Rightarrow T=a+b+c=-5.$$

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -10

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy. Suy ra $H(0;-3;0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA'.

$$\begin{cases} a=2x_H-x_A=-2 \\ b=2y_H-y_A=-3 \\ c=2z_H-z_A=-5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;-3;-5) \Rightarrow T=a+b+c=-10.$$

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì giá trị của $x+y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2), \overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$.

$x+y=3$

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x+y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -8

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;-x-2;2)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-3;y+1)$.

Để A,B,C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}-4=k.4\\-x-2=k.(-3)\\2=k.(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\x=-5\\y=-3\end{cases}$.

Vậy $x+y=-5-3=-8$.

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Biết tọa độ của điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A-3x_B}{1-3}=4\\y_M=\dfrac{y_A-3y_B}{1-3}=-3\\z_M=\dfrac{z_A-3z_B}{1-3}=8\end{cases}\Rightarrow M(4;-3;8)$.

$\Rightarrow T=a+b+c=9$

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a+3b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $M(a;b;c)$.

Vì M thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}3-a=-2(2-a)\\1-b=-2(-3-b)\\-2-c=-2(5-c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\\b=-\dfrac{5}{3}\\c=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Suy ra $a+3b+c=0$

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M có tọa độ $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –9

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$

$\overrightarrow{AB}=(7;3;1)$

$\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\quad (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$

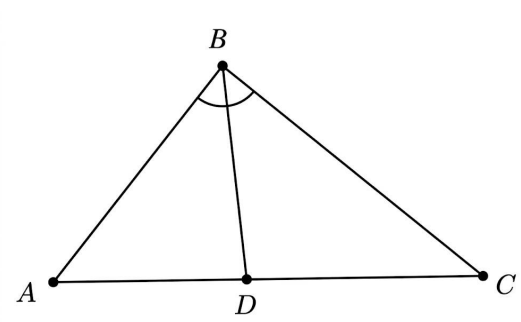
$\Rightarrow T=a+b+c=-9$

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5



Ta có $AB=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x;y;z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\,(1)$.

Ta có $\overrightarrow{DA}=(1-x;2-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{DC}=(-4-x;7-y;5-z)$.

Do đó $(1)\Rightarrow\begin{cases}1-x=-\frac{1}{2}(-4-x)\\2-y=-\frac{1}{2}(7-y)\\-1-z=-\frac{1}{2}(5-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=\frac{11}{3}\\z=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)\Rightarrow a+b+2c=5$.

Câu 156. Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có $\widehat{ADC}=45°$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $D(x;y;z)$ khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{DC}=(-1-x;-y;3-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$\Rightarrow \dfrac{-1-x}{2}=\dfrac{-y}{2}=\dfrac{3-z}{1}\Rightarrow \begin{cases} x=2z-7 \\ y=2z-6 \end{cases}.$

$\begin{cases} \overrightarrow{AD}=(x-1;y+1;z-1) \\ \overrightarrow{CD}=(x+1;y;z-3) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD}=(2z-8;2z-5;z-1) \\ \overrightarrow{CD}=(2z-6;2z-6;z-3) \end{cases}$

$\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)}.\sqrt{9(z-3)^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(z-3)^2}}{\sqrt{z^2-6z+10}}$

$\Rightarrow 2(z^2-6z+9)=z^2-6z+10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=4 \\ z=2 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=2 \\ x=-3;y=-2 \end{array}\right.$.

Vậy $D(1;2;4)$ hoặc $D(-3;-2;2)$.

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1)\, C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=3$; $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$\dfrac{1}{2}AB(AD+BC)=6\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.3.(AD+3\sqrt{2})=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\dfrac{1}{3}BC$.

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có $\begin{cases} a-1=\dfrac{4}{3} \\ b-2=\dfrac{1}{3} \\ c-1=\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \end{cases}\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diệt tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –16

Ta có $S_{ABCD}=4S_{ABC}\Leftrightarrow\frac{1}{2}d\left(BC,AD\right)\left(BC+AD\right)=4.\frac{1}{2}d\left(BC,AD\right)BC$

$\Leftrightarrow BC+AD=4BC\Leftrightarrow AD=3BC$. Do $ABCD$ là hình thang có đáy $AD\Rightarrow\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2=-15\\b-3=-6\\c-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-17\\b=-3\\c=4\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-16.$

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(2;0;0\right)$, $B\left(0;2;0\right)$, $C\left(0;0;2\right)$. Trong không gian gọi điểm $M\left(x;y;z\right)$ thỏa mãn $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90°$ và không trùng với các điểm A,B,C,O. Tính giá trị của $3x+6y+3z$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Gọi $M\left(x;y;z\right)$.Ta có: $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90°\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\\\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0\\\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x-2\right)+y\left(y-2\right)+z^2=0\\x^2+y\left(y-2\right)+z\left(z-2\right)=0\\x\left(x-2\right)+y^2+z\left(z-2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y=0\\x^2+y^2+z^2-2y-2z=0\\x^2+y^2+z^2-2x-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y=0\\x=z\\y=z\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-4x=0\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(0;0;0\right)\equiv O\\M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\end{array}\right.\Rightarrow M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow 3x+6y+3z=8.$

Câu 160. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A\left(1;-2;3\right)$, $B\left(4;1;-1\right)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA}=4MB.\overrightarrow{MB}$. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Do $MA\overrightarrow{MA}=4MB\overrightarrow{MB}$ nên $\overrightarrow{MA}$ cùng hướng $\overrightarrow{MB}$.

$MA\overrightarrow{MA}=4MB\overrightarrow{MB}\Rightarrow MA^2=4MB^2\Leftrightarrow MA=2MB\Rightarrow B$ là trung điểm $AM\Rightarrow M\left(7;4;-5\right)$.

Khi đó $a+b+c=7+4+\left(-5\right)=6$

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(2;5;1\right),B\left(-2;-6;2\right),C\left(1;2;-1\right)$ và điểm $M\left(m;m;m\right)$, để giá trị $\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$\overrightarrow{AC}(-1;-3;-2), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$

$\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{m^2+m^2+(m-6)^2} = \sqrt{3m^2-12m+36} = \sqrt{3(m-2)^2+24}$

Để $\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|$ nhỏ nhất thì $m=2$

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3), B(2;2;1), M(a;b;c) \in Ox$. Khi biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $2a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$

$\overrightarrow{MA} = (1-a;2;3)$

$\overrightarrow{MB} = (2-a;2;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (3-2a;4;4)$

$\Rightarrow T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(3-2a)^2+32} \geq \sqrt{32}$

$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{32} \Leftrightarrow 3-2a=0 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};0;0\right) \Rightarrow 2a+b+c=3$

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;3), B(2;1;1), C(1;2;3), M(a;b;c) \in Oz$. Khi biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $a+b+2c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

$M \in Oz \Rightarrow M(0;0;c)$

$\overrightarrow{MA} = (0;2;3-c)$

$\overrightarrow{MB} = (2;1;1-c) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (-4;-2;-2+2c)$

$\overrightarrow{MC} = (1;2;3-c) \Rightarrow 3\overrightarrow{MC} = (3;6;9-3c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = (-1;6;10-2c)$

$\Rightarrow T = \left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(10-2c)^2+37} \geq \sqrt{37}$

$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{37} \Leftrightarrow 10-2c=0 \Leftrightarrow c=5$

$\Rightarrow M(0;0;5) \Rightarrow a+b+2c=10$

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(5;-2;0), B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Đặt $Q = 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng $a\sqrt{b}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 43

Ta có $Q = 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = 2\left|3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$

Với $G(3;2;0)$ là trọng tâm của tam giác ABC và $I(2;4;0)$ là trung điểm BC, ta có:

$Q = 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}\right| = 6(MG+MI)$,

Do G và I nằm cùng phía so với Ox nên gọi $G'(3;-2;0)$ là điểm đối xứng của G qua Ox.

Khi đó $Q = 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}\right| = 6(MG+MI) = 6(MG'+MI) \ge 6G'I = 6\sqrt{37}$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $G'I$ và Ox.

$\Rightarrow a+b = 6+37 = 43$

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Để biểu thức $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$\overrightarrow{MA} = (2-m;5-m;1-m)$

$\overrightarrow{MB} = (-2-m;-6-m;2-m)$

$\overrightarrow{MC} = (1-m;2-m;-1-m)$

$\Rightarrow MA^2-MB^2-MC^2 = -3m^2-24m-20 = 28-3(m-4)^2 \le 28$

Để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m=4$

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a+b+3c$

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ suy ra $I(-1;1;1)$

$2MA^2+3MB^2 = 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = 5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2$

Mà $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hay $M\equiv I$ hay $M(-1;1;1)$.

$\Rightarrow T = 2a+b+3c = 2$

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2+2SB^2+3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=2a+b+3c$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Gọi G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow G\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{3}\right)$

$SA^2+2SB^2+3SC^2$

$=\overrightarrow{SA}^2+2\overrightarrow{SB}^2+3\overrightarrow{SC}^2$

$=\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=6SG^2+GA^2+2GB^2+3GC^2\geq 6SG^2$

$SA^2+2SB^2+3SC^2$ nhỏ nhất khi SG^2 nhỏ nhất hay $S\equiv G$ hay $S\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{3}\right)$.

$T=2a+b+3c=-1$.

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1)\Rightarrow I(2;1;1)$.

Khi đó, $T=MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=5MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2$

$=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$ (vì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M\equiv I(2;1;1)\Rightarrow a=2$, $b=c=1$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Lấy điểm $M(x;y;z)$ sao cho biểu thức $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=4x+2y+z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 14

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ và $G\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có:

$S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$

$=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2$

$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$

$=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

Vì $GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$ không đổi nên $4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\geq 4MG^2$

Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)\Rightarrow \mathrm{T}=4x+2y+z=14$.

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta thấy $M(a;b;0)\in(Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=\left(\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}\right)+\left(\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}\right)$

$=IM^2+2IA^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=IM^2+\frac{AB^2}{2}=IM^2+7$.

Bởi vậy MA^2+MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy). Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Như vậy $a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.

Câu 171. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Lấy điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Lấy $G(1;3;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy.

Vậy $M\left(1;3;0\right)\Rightarrow S=a+b+c=4$

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Ta có $G\left(-1;3;2\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$

Vậy $M\left(-1;3;0\right)$. Từ đó $T=\left(-1\right)^2+3^2=10$.

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A\left(1;2;1\right),B\left(2;-1;3\right),C\left(3;1;-5\right)$ và $\overrightarrow{OM}=b.\vec{j}+c.\vec{k}$ trong đó b,c là các số thực luôn thay đổi. Khi $S=MA^2-2MB^2-MC^2$ có giá trị lớn nhất thì giá trị biểu thức $T=4b-2026c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có $\overrightarrow{OM}=b.\vec{j}+c.\vec{k}\Rightarrow M\left(0;b;c\right)$, do đó điểm $M\left(0;b;c\right)\in\left(Oyz\right)$

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I\left(-3;\frac{3}{2};0\right)$

Ta có:

$S = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= -2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right) + IA^2 - 2IB^2 - IC^2$

$= -2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - IC^2 \quad \left(do\ \ \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}\right)$

Vì điểm I, A, B, C cố định nên $IA^2 - 2IB^2 - IC^2$ có giá trị không đổi.

Để $S = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ có giá trị max $\Leftrightarrow MI$ min mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) suy ra $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Vậy $T = 4b - 2026c = 6$.

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = x_0 + y_0 + z_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}\right) + 2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}\right) - \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = (2;3;1) \Leftrightarrow I(2;3;1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right|$

$= \left|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2MI$.

$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2;3;1)$ lên mặt phẳng (Oyz). Suy ra $M(0;3;1)$.

$\Rightarrow S = x_0 + y_0 + z_0 = 4$

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$. Lấy điểm $M(0;b;c)$ sao cho biểu thức $T = \left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta thấy điểm $M(0;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz)

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-1-y;3-z)\Rightarrow 3\overrightarrow{IA}=(3-3x;-3-3y;9-3z)$

$\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-z)\Rightarrow 2\overrightarrow{IB}=(4-2x;2-2y;-2z)$

$\overrightarrow{IC}=(-3-x;-1-y;-3-z)$

Khi đó $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-2x-4;-2y-6;-2z+6)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-4=0\\-2y-6=0\\-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\\z=3\end{cases}.$$

Vậy $I(-2;-3;3)$

Ta có $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Suy ra $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz). Do đó $M(0;-3;3)$

$\Rightarrow S=b+2c=3$

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow$ Tọa độ điểm $I=(-23;20;-11)$

Khi đó: $3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+5\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)-7\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)=-\overrightarrow{IM}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)=-\overrightarrow{IM}$.

Nên: $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|-\overrightarrow{IM}\right|=IM\geq 0$

Suy ra $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy). Do đó $M(-23;20;0)$

$\Rightarrow S=a+b+c=-3$

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$ và $\overrightarrow{OM}=b.\vec{j}+c.\vec{k}$ trong đó b,c là các số thực luôn thay đổi. Khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất thì giá trị biểu thức $T=2025b+2026c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Ta có $\overrightarrow{OM}=b.\vec{j}+c.\vec{k}\Rightarrow M(0;b;c)$, do đó điểm $M(0;b;c)\in(Oyz)$

Lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I$ là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow I(1;1;-1)$.

Ta có:

$$T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$
$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)$$
$$=3MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)\quad\left(do\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\right)$$
$$=3MI^2+\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$$

Vì điểm I,A,B,C cố định nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi.

Để $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị min $\Leftrightarrow MI$ min mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) suy ra $M(0;1;-1)$.

Vậy $T=2025b+2026c=2025.1+2026.(-1)=-1$.

Câu 178. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;2),B(-2;0;3),C(0;1;-2)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$ trong đó a,b là các số thực luôn thay đổi. Biết biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ có giá trị nhỏ nhất, hãy giá trị biểu thức $T=6a+24b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{j}\Rightarrow M(a;b;0)$, do đó điểm $M(a;b;0)\in(Oxy)$

Gọi I là điểm thỏa mãn: $4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{4x_A+3x_B+5x_C}{12}\\ y_I=\dfrac{4y_A+3y_B+5y_c}{12}\\ z_I=\dfrac{4x_A+3z_B+5z_C}{12}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{-2}{12},\dfrac{1}{12},\dfrac{7}{12}\right).$

Ta có:

$$S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$$
$$=6MI^2+\overrightarrow{MI}(4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC})+\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}$$
$$=6MI^2+\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}\quad\left(do\quad 4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\right)$$

Vì điểm I,A,B,C cố định nên $\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi nên $S_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt $(Oxy)\Rightarrow M\left(-\dfrac{2}{12},\dfrac{1}{12},0\right)\Rightarrow T=6a+24b=2$

Câu 179. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Cách 1: Tâm tỉ cự

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}\Rightarrow M(a;0;b)$

$\overrightarrow{MA}=(-1-a;2;3-b);\overrightarrow{MB}=(6-a;-5;8-b)\Rightarrow -2\overrightarrow{MB}=(-12+2a;10;-16+2b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=(a-13;12;b-13)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(a-13)^2+12^2+(b-13)^2}\geq 12$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|_{\min}=12\Leftrightarrow \begin{cases}a=13\\ b=13\end{cases}$.

Do đó $a-b=0$

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và điểm $M(a,b,c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+2b-c-1=0$. Biết $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S=11a+22b+33c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Vì $MA=MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB.

Ta có $(P): y+z=0$ nên $\begin{cases}b+c=0\\ a+2b-c-1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}c=-b\\ a=1-3b\end{cases}$.

$\overrightarrow{MA}=(1+3b;2-b;b), \overrightarrow{MB}=(1+3b;-b;-2+b)$

$\Rightarrow \cos\widehat{AMB}=\dfrac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\dfrac{(1+3b)^2+2b(b-2)}{\sqrt{(1+3b)^2+(b-2)^2+b^2}.\sqrt{(1+3b)^2+(b-2)^2+b^2}}$

$=\dfrac{9b^2+6b+1+2b^2-4b}{9b^2+6b+1+2b^2-4b+4}=\dfrac{11b^2+2b+1}{11b^2+2b+5}$

Xét $f(b)=\dfrac{11b^2+2b+1}{11b^2+2b+5}$ có $f'(b)=\dfrac{4(22b+2)}{11b^2+2b+5}=0\Rightarrow b=\dfrac{-1}{11}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(b)$ nhỏ nhất tại $b=-\dfrac{1}{11}\Rightarrow a=\dfrac{14}{11}, c=\dfrac{1}{11}$

Nên $11a+22b+33c=11.\frac{14}{11}-22.\frac{1}{11}+33.\frac{1}{11}=15$