

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Mục lục của chương

Bài 1. Giới hạn của dãy số	169
Bài 2. Giới hạn của hàm số	182
Bài 3. Hàm số liên tục	196
Bài 4. Ôn tập chương 3	210

1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1) Giới hạn 0 của dãy số



Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết $\lim u_n = 0$.

Một số giới hạn cơ bản:



- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thỏa mãn $|q| < 1$.
- Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi $n \geq 1$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.



Ví dụ 1



Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1}{n^2}$.

b) $\lim \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\lim \frac{1}{n^2} = 0$.

b) Vì $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ nên $\lim \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

2) Giới hạn hữu hạn của dãy số



Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.



LƯU Ý. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

 Ví dụ 2

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left[2 + \left(\frac{2^n}{3} \right) \right]$.

b) $\lim \left(\frac{1 - 4n}{n} \right)$.

 *Hướng dẫn giải.*

a) Đặt $u_n = 2 + \left(\frac{2^n}{3} \right)$ ta có $u_n - 2 = \left(\frac{2^n}{3} \right)$.

Suy ra $\lim(u_n - 2) = \lim \left(\frac{2^n}{3} \right)$.

Vì $\left| \frac{2}{3} \right| < 1$ nên $\lim \left(\frac{2^n}{3} \right) = 0$ hay $\lim(u_n - 2) = 0$ hay $\lim u_n = 2$.

Vậy $\lim \left[2 + \left(\frac{2^n}{3} \right) \right] = 2$.

b) Đặt $v_n = \frac{1 - 4n}{n} = \frac{1}{n} - 4$ hay $v_n + 4 = \frac{1}{n}$.

Suy ra $\lim(v_n + 4) = \lim \frac{1}{n}$ mà $\lim \frac{1}{n} = 0$, suy ra $\lim(v_n + 4) = 0$ hay $\lim v_n = -4$.

Vậy $\lim \left(\frac{1 - 4n}{n} \right) = -4$.



① Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim u_n = 3$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ



Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

• $\lim (u_n + v_n) = a + b$.

• $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

• $\lim (u_n - v_n) = a - b$.

• Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và

• $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a$.

$\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

• $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.

 Ví dụ 3

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n^2 - 2n + 1}{2 - 3n^2}$.

d) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$.

b) $\lim \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 + 5}$.

e) $\lim \left(\frac{1 + 3^n}{3 \cdot 3^n + 2^n} \right)$.

c) $\lim \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n}$.

f) $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n}{5 \cdot 2^n + 1}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{a) } \lim \frac{n^2 - 2n + 1}{2 - 3n^2} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 3} = \frac{\lim 1 - \lim \frac{2}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim \frac{2}{n^2} - 3} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}.$$

chia cả tử và mẫu cho n^2

$$\text{b) } \lim \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 + 5} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{5}{n^3}} = \frac{\lim \frac{2}{n} + \lim \frac{1}{n^2} - \lim \frac{3}{n^3}}{\lim 1 + \lim \frac{5}{n^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0.$$

chia cả tử và mẫu cho n^3

$$\text{c) } \text{Ta có } \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} = \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2 + 1}{n^2}} = \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}.$$

Từ đó:

$$\lim \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} = \lim \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim \left(9 + \frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{\lim 9 + \lim \frac{1}{n^2}} = \sqrt{9 + 0} = 3.$$

d)

$$\begin{aligned} \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim \frac{2n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= \frac{\lim 2}{\lim \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} = \frac{2}{\sqrt{\lim 1 + \lim \frac{2}{n}} + \lim 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim \left(\frac{1 + 3^n}{3 \cdot 3^n + 2^n} \right) = \lim \left[\frac{\frac{1}{3^n} + 1}{3 + \left(\frac{2}{3} \right)^n} \right] = \frac{\lim \frac{1}{3^n} + \lim 1}{\lim 3 + \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{1}{3}.$$

f) Xét cấp số nhân $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công bội $q = 2$ và có số hạng tổng quát $u_n = 2^n \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow 2^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow m = n + 1$.

Tổng các số hạng của cấp số nhân trên là $S_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$.

$$\text{Suy ra } \lim \frac{2^{n+1} - 1}{5 \cdot 2^n + 1} = \lim \frac{2 \cdot 2^n - 1}{5 \cdot 2^n + 1} = \lim \frac{2 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{5 + \left(\frac{1}{3} \right)^n} = \frac{2 - 0}{5 + 0} = \frac{2}{5}.$$



② Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim \frac{6 - 7n^2}{2n^3 + 9}.$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n + 1}.$$

$$\text{c) } \lim \frac{5^n + 2 \cdot 6^n}{6^n + 4^n}.$$



③ Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 5 m xuống mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n . Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN



Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$.

Ví dụ 4



Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$

 *Hướng dẫn giải.* Tổng trên là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{3}$ nên

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 5



Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $2, (12) = 2,121212\dots$ thành phân số.

 *Hướng dẫn giải.* Ta có: $2, (12) = 2 + 0, (12)$.

Mà

$$\begin{aligned} 0, (12) &= 0,121212\dots \\ &= 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + 0,00000012 + \dots \\ &= 0,12 + 0,12 \cdot \frac{1}{100^2} + 0,12 \cdot \frac{1}{100^2} + 0,12 \cdot \frac{1}{100^4} + \dots \end{aligned}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng 0,12 và công bội bằng $\frac{1}{100}$.

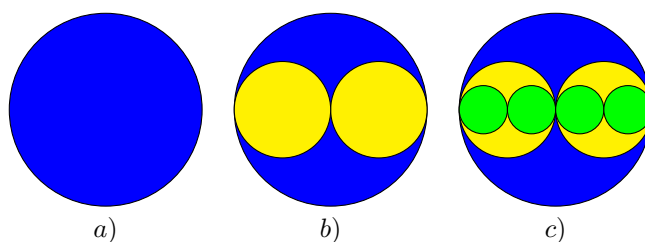
$$\text{Tổng này bằng } 0,12 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

$$\text{Vậy } 2, (12) = 2 + \frac{4}{33} = \frac{70}{33}.$$

Ví dụ 6

Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a.

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



Hướng dẫn giải. Diện tích của các hình tròn trong các lần cắt là

- ❖ Lần thứ 1: $S_1 = \pi R^2$.
- ❖ Lần thứ 2: $S_2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.
- ❖ Lần thứ 3: $S_3 = 4 \cdot \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2^2}$.
- ❖ Lần thứ n : $S_n = \frac{\pi R^2}{2^{n-1}}$.

Do đó diện tích các hình tròn lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $S_1 = \pi R^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên tổng diện tích các hình tròn là $S_1 + S_2 + \dots = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2$.



④ Tính tổng $S = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \dots + \frac{2}{7^{n-1}} + \dots$.



⑤ Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

IV. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC



- ❖ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- ❖ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.



LƯU Ý. Ta có các kết quả sau:

- a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim (-u_n) = -\infty$.
- b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- c) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Nhận xét:

- a) $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$).
- b) $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).

Ví dụ 7



Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim(n^2 + 3n - 5)$.
- b) $\lim \frac{n^2 + 7}{1 - 2n}$.
- c) $\lim(3^n - 2^n)$.

Hướng dẫn giải.

a) $n^2 + 3n - 5 = n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$.

Ta có $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = \lim 1 + \lim \frac{3}{n} - \lim \frac{5}{n^2} = 1 + 0 - 0 = 1$.

Suy ra $\lim(n^2 + 3n - 5) = \lim \left[n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right) \right] = +\infty$.

b) $\frac{n^2 + 7}{1 - 2n} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{n \left(\frac{1}{n} - 2\right)} = \frac{n \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - 2}$

Ta có $\lim n = +\infty$ và $\lim \left(\frac{1 + \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n} - 2}\right) = \frac{\lim 1 + \lim \frac{7}{n^2}}{\lim \frac{1}{n} - \lim 2} = \frac{1 + 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$

Suy ra $\lim \frac{n^2 + 7}{1 - 2n} = \lim \left(n \cdot \frac{1 + \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n} - 2} \right) = -\infty$

c) $3^n - 2^n = 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

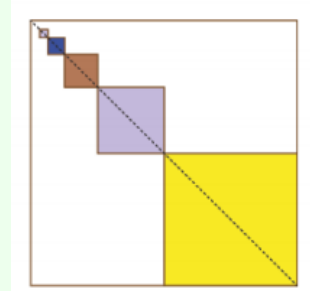
Ta có $\lim 3^n = +\infty$ và $\lim \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1 - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1$

Suy ra $\lim(3^n - 2^n) = \lim \left[3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \right] = +\infty$.



⑥ Một nhà thầu nhận được hợp đồng sơn màu trang trí một bức tường hình vuông màu trắng kích thước $4\text{m} \times 4\text{m}$ của một trường mẫu giáo. Hai điều kiện của hợp đồng như sau:

- a) Các hình vuông cần sơn màu như hình vẽ. Hình vuông lớn nhất có diện tích bằng một phần tư diện tích bức tường được sơn màu tùy ý khác màu trắng. Mỗi hình vuông tiếp theo có diện tích bằng một phần tư diện tích hình vuông trước nó, được sơn màu khác với hình vuông trước đó và màu trắng;
- b) Một phần ba bức tường phải được sơn màu.



Sau khi xem các điều kiện của hợp đồng thì nhà thầu từ chối vì cho rằng không thể thực hiện theo yêu cầu của nhà trường. Hãy giải thích lí do vì sao họ từ chối hợp đồng.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ Câu 1. Phát biểu nào sau đây **sai**?

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 0$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$.

❖ Câu 2. Cho $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$. Phát biểu nào dưới đây **sai**?

(A) $\lim(u_n + v_n) = a + b$.

(B) $\lim(u_n - v_n) = a - b$.

(C) $\lim(u_n \cdot v_n) = ab$.

(D) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a - b}{b}$.

❖ Câu 3. Nếu $\lim u_n = C$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

(A) 0.

(B) 1.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

❖ Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

(A) 0.

(B) $-\frac{3}{4}$.

(C) -1.

(D) $-\infty$.

❖ **Câu 5.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 5}{n^3 - n^2 + 7}$ là

- (A) -3 . (B) 2 . (C) 1 . (D) 0 .

❖ **Câu 6.** $\lim(5n - n^2 + 1)$ bằng

- (A) 5 . (B) $-\infty$. (C) -1 . (D) $+\infty$.

❖ **Câu 7.** Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = C, C > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
 (B) Nếu $\lim u_n = -\infty$ và $\lim v_n = C, C < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
 (C) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = C, C < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
 (D) Nếu $\lim u_n = -\infty$ và $\lim v_n = C, C > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$.

❖ **Câu 8.** Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- (A) Nếu $\lim u_n = a$ và thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
 (B) Nếu $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
 (C) Nếu $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$.
 (D) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

❖ **Câu 9.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2}$ bằng

- (A) 2 . (B) 1 . (C) 0 . (D) $\frac{3}{2}$.

❖ **Câu 10.** Giá trị của giới hạn $\lim (n - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2})$ bằng

- (A) -1 . (B) $+\infty$. (C) 0 . (D) $-\infty$.

❖ **Câu 11.** $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ bằng

- (A) 1 . (B) 7 . (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{7}{5}$.

❖ **Câu 12.** $\lim \frac{2}{2n + 3}$ bằng

- (A) 0 . (B) 1 . (C) $\frac{3}{2}$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 13.** Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2 + n + 3}$ bằng

- (A) 3 . (B) 1 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 14.** Giới hạn $\lim \frac{2n^2 + n + 5}{2n + 1}$ bằng

- (A) 0 . (B) 1 . (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 15.** Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 2} + n}{n}$ bằng

- (A) 2 . (B) 3 . (C) 5 . (D) $+\infty$.

❖ **Câu 16.** Giới hạn $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n^2 - 1} + 4n + 3}{3n - 7}$ bằng

- (A) 2 . (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 4 .

❖ **Câu 17.** Tính $\lim \frac{\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt[3]{8n^3 + n^2}}{n}$.

- (A) -2 . (B) -1 . (C) $-\infty$. (D) 0 .

❖ **Câu 18.** Giới hạn $L = \lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ bằng

- (A) $L = 0$. (B) $L = \frac{1}{3}$. (C) $L = +\infty$. (D) $L = \frac{1}{6}$.

❖ **Câu 19.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- (A) $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$) . (B) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$) .
(C) $\lim C = C$ ($C \in \mathbb{R}$) . (D) $\lim \frac{1}{n^{2025}} = 0$.

❖ **Câu 20.** Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$ dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim(u_n \cdot v_n)$ bằng

- (A) 15 . (B) 8 . (C) 5 . (D) 3 .

❖ **Câu 21.** Cho dãy (x_n) có $\lim x_n = -3$ dãy (y_n) có $\lim y_n = 2$. Khi đó $\lim(x_n - y_n)$ bằng

- (A) -5 . (B) -1 . (C) 5 . (D) 1 .

❖ **Câu 22.** Cho $\lim u_n = 3$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. (B) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$.
(C) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$. (D) $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

❖ **Câu 23.** Cho cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Tổng cấp số nhân đó bằng

- (A) $S = 8$. (B) $S = 4$. (C) $S = \frac{1}{4}$. (D) $S = \frac{1}{8}$.

❖ **Câu 24.** Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$

- (A) $S = 16$. (B) $S = 14$. (C) $S = \frac{27}{2}$. (D) $S = 15$.

❖ **Câu 25.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,353535\dots$ được biểu diễn phân số tối giản dạng $\frac{a}{b}$. Tính ab .

- (A) 1409 . (B) 3465 . (C) 3645 . (D) 3546 .

Tự luận

 **Bài 1.** Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim u_n, \lim v_n$.
 b) $\lim (u_n + v_n), \lim (u_n - v_n), \lim (u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$.

 **Bài 2.** Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim \frac{-2n+1}{n}$. b) $\lim \frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$. c) $\lim \frac{4}{2n+1}$. d) $\lim \frac{n^2-2n+3}{2n^2}$.

 **Bài 3.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim \frac{5n+1}{2n}$; c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$; e) $\lim \frac{3^n+2^n}{4 \cdot 3^n}$;
 b) $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$; d) $\lim \left(2 - \frac{1}{3^n}\right)$; f) $\lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n}$.

 **Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n}$. b) $\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. c) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

 **Bài 5.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. b) $\lim \frac{3^n}{4^n-1}$. c) $\lim \frac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}$. d) $\lim \frac{4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

 **Bài 6.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim (\sqrt{n^2+2n} - n - 2)$. c) $\lim (\sqrt{n^2-n+2} + n)$.
 b) $\lim (2 + n^2 - \sqrt{n^4+1})$. d) $\lim (3n - \sqrt{4n^2+1})$.

 **Bài 7.** Cho $u_n = \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$ với a, b là các số thực thỏa mãn $|a| < 1, |b| < 1$.
 Tính $\lim u_n$.

 **Bài 8.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2-n+9}$. d) $\lim \frac{2+4+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n+1}$.
 b) $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2+2n}$. e) $\lim \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$
 c) $\lim \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. f) $\lim \left[\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right]$

 **Bài 9.** Cho dãy số u_n với $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim u_n$.

Bài 10. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

c) $0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

d) $2 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{3^{n-1}} + \dots$

Bài 11. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số

a) $0,444\dots$

b) $1,4545\dots$

c) $3,102102,\dots$

Bài 12. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Bài 13. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

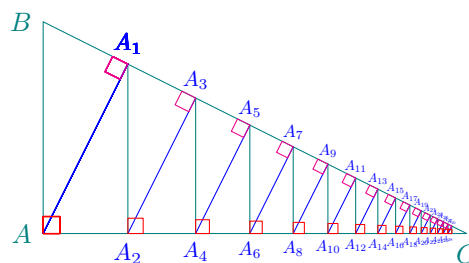
Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Bài 14. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .

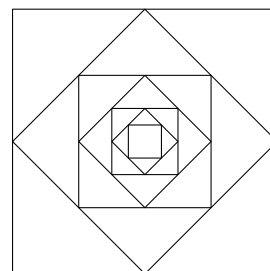


Bài 15. Một khinh khí cầu bay cao 200m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng một nửa độ cao bay được ở phút trước đó. Khinh khí cầu có thể đạt độ cao 400 m hay không?

Bài 16. Người ta thả một viên bi lăn trong một khe thẳng trên mặt phẳng. Viên bi lăn chậm dần. Giây đầu tiên nó đi được 2 mét. Mỗi giây tiếp theo nó đi được một đoạn bằng $\frac{3}{4}$ đoạn đường đi được trước nó.

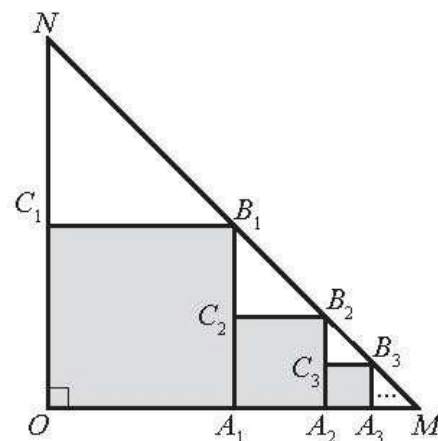
- Tính đoạn đường viên bi đi được trong 5 giây đầu tiên.
- Giả sử chuyển động của viên bi không bao giờ chấm dứt, viên bi có thể cách xa vị trí ban đầu 8 mét hay không?

Bài 17. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông.

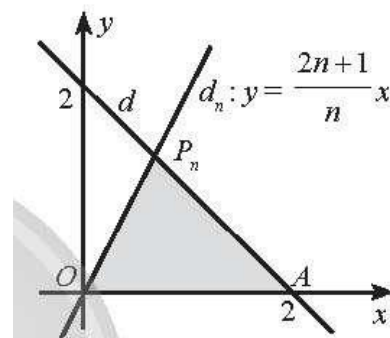


- Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n , S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).
- Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Bài 18. Cho tam giác OMN vuông cân tại O , $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN , vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON . Trong tam giác A_1MB_1 , vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình vẽ). Tính tổng diện tích các hình vuông này.

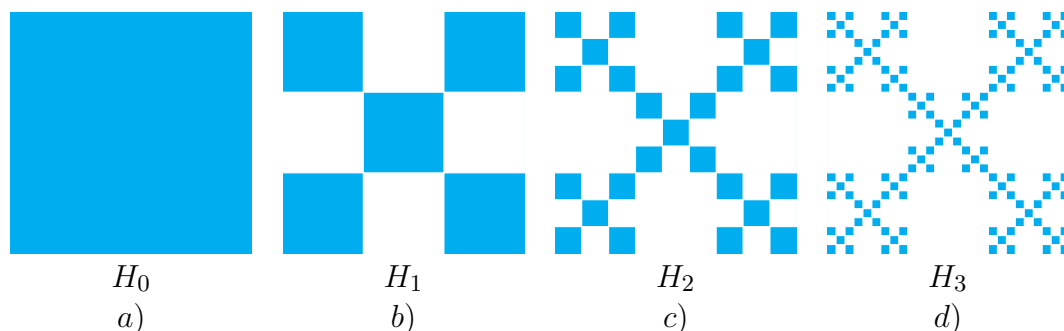


Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d : x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d' : y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm P_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n . Tìm $\lim S_n$.



Bài 20. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Bài 21. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

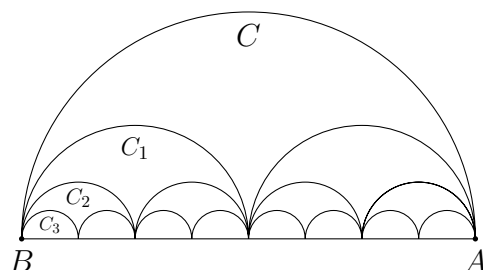
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}, \dots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}, \dots$

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n , S_n .

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .



2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM



Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ điểm x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

◆ Nhận xét:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số).



Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

👉 Hướng dẫn giải.

a) Đặt $f(x) = 2x^2 - x$.

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy bất kì, thỏa mãn $x_n \in \mathbb{R}$ với mọi n và $x_n \rightarrow 3$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim (2x_n^2 - x_n) = 2 \lim x_n^2 - \lim x_n = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x) = 15$.

b) Đặt $g(x) = 2x^2 - x$.

Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Giả sử (v_n) là dãy bất kì, thỏa mãn $v_n \neq -1$ với mọi n và $v_n \rightarrow -1$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ta có:

$$\lim g(v_n) = \lim \frac{v_n^2 + 2v_n + 1}{v_n + 1} = \lim \frac{(v_n + 1)^2}{v_n + 1} = \lim (v_n + 1) = \lim v_n + \lim 1 = -1 + 1 = 0.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$.



① Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ



a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

◆ Nhận xét:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$ và tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

☕ Ví dụ 2



Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2).$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}.$

🔗 Hướng dẫn giải.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} 5x - \lim_{x \rightarrow -2} 2 = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2 = -8.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 + 1 = 2.$

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + x + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 5 \cdot 2^2 + 2 + 4 = 26.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4} = \sqrt{26}.$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+9} + 3)} \quad (\text{nhân cả tử và mẫu cho } \sqrt{x+9} + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9) - 3^2}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



② Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

III. GIỚI HẠN MỘT PHÍA



- ◇ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- ◇ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.



LƯU Ý.

a) Ta thừa nhận các tính chất sau:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở mục II vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

Ví dụ 3



Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$.

Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

 **Hướng dẫn giải.** • Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $f(x_n) = x_n^2 + 2$ nên $\lim f(x_n) = \lim(x_n^2 + 2) = \lim x_n^2 + \lim 2 = (-1)^2 + 2 = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$.

• Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$. Khi đó $f(x_n) = 1 - 2x_n$ nên $\lim f(x_n) = \lim(1 - 2x_n) = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$. Vì $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ nên $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$.

IV. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC



- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.



LƯU Ý.

- a) Với c là hằng số, k là số nguyên dương ta có

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x^k} = 0.$$

- b) Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.

Ví dụ 4

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$

Hướng dẫn giải.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 3}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^2} - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x})} = \frac{0 - 3}{1 + 0} = -3.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= -\sqrt{1 + 0} = -1. \end{aligned}$$



Ghi nhớ: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} & \text{nếu } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b} & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$.

☕ Ví dụ 5

Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3 . Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $2 \text{ m}^3/\text{phút}$.

- Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

📖 Hướng dẫn giải.

- Trong 200 m^3 nước có nồng độ muối là 10 kg/m^3 .

Do đó trong 200 m^3 nước có $10 \cdot 200 = 2000 \text{ kg}$ muối.

Mỗi phút người ta bơm nước ngọt vào hồ 2 m^3 thì sau t phút có $200 + 2t \text{ (m}^3\text{)}$.

Khi đó nồng độ muối trong bể là: $C(t) = \frac{2000}{200 + t} \text{ kg/m}^3$.

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2000}{200 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2000}{t}}{\frac{200}{t} + 1} = \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2000}{t}}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{200}{t} + 1\right)} = 0.$$

Ý nghĩa: Khi t càng lớn thì nồng độ muối càng dần về 0, tức là đến một lúc nào đó nồng độ muối trong hồ không đáng kể, nước trong hồ gần như là nước ngọt.



③ Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1}.$$

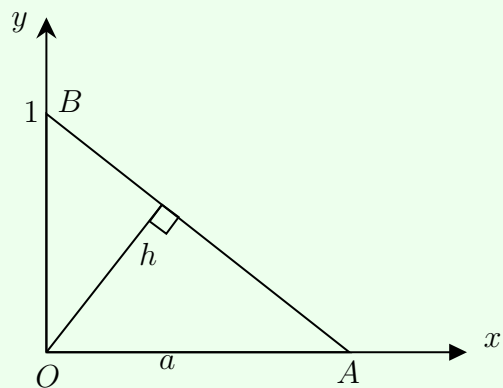
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}.$$



④

Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình vẽ. Đường cao OH có độ dài là h .

- Tính h theo a .
- Khi điểm A dịch chuyển về O , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?
- Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?



V. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1) Khái niệm



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- ◇ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bên phải là $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.
- ◇ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bên phải là $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.



🔔 LƯU Ý.

a) Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- ◇ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$);
- ◇ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;
- ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

2) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực



🔔 LƯU Ý. Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

- ◇ Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ được tính

theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

◇ Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Ví dụ 6



Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1)$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 6$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[2x \cdot \frac{1}{x-3} \right] = -\infty$.

b) Ta có: $3x-1 = x \left(3 - \frac{1}{x} \right)$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

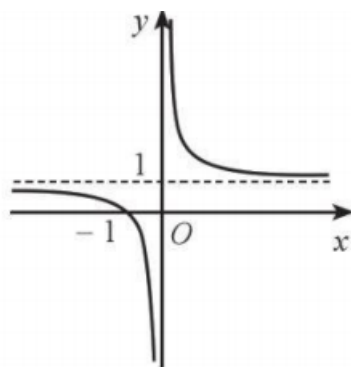
c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

Ví dụ 7

Quan sát đồ thị hàm số ở hình bên và tính các giới hạn

sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.



Hướng dẫn giải. Từ đồ thị hàm số ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Ví dụ 8

Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x)$.

Hướng dẫn giải. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) g(x)$$

$$(\text{do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) g(x) = 1 > 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x) = +\infty.$$

Ví dụ 9

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + m & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq 0, \end{cases}$$

với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$. Tìm m .

Hướng dẫn giải. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + m) = m$.

Theo đề bài, để tồn tại giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$. thì

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \iff m = -1.$$

Ví dụ 10

Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$.

Hướng dẫn giải. Do $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4,$$

trước hết ta phải có $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$, hay $1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + a(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1) + a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1 + a)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = 1 + 1 + a = 2 + a. \end{aligned}$$

Suy ra $2 + a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -3$. Vậy $a = 2, b = -3$.



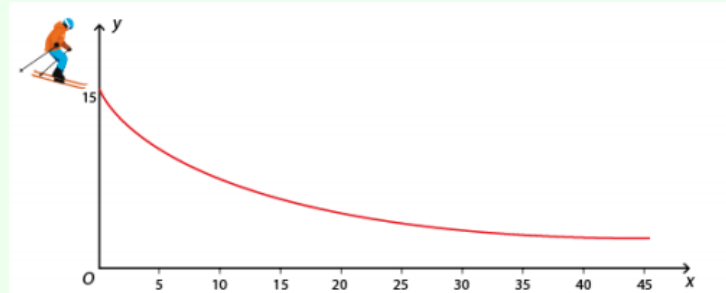
5) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 1}{x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$



6) Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0; 15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thỏa mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{150}{x + 10}$ với $x \geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thỏa mãn các điều kiện dưới đây hay không:

- Có đồ thị đi qua điểm $(0; 15)$.
- Giảm trên $[0; +\infty)$.
- Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tùy ý.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$. (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Phát biểu nào đúng?

- (A) Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (B) Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (C) Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (D) Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow L$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

❖ **Câu 3.** Với c, k là các hằng số và k nguyên dương thì

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = +\infty$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = -\infty$. (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = \pm\infty$.

❖ **Câu 4.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
 (B) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$.
 (C) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
 (D) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Phát biểu nào đúng?

- (A) Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (B) Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (C) Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 (D) Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow L$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

❖ **Câu 6.** Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$.

- (A) $L = -\infty$. (B) $L = 0$. (C) $L = +\infty$. (D) $L = 1$.

❖ **Câu 7.** Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2020}{2x - 1}$.

- (A) $L = -\infty$. (B) $L = 0$. (C) $L = +\infty$. (D) $L = 2019$.

❖ **Câu 8.** Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + 4x - 1]$.

- (A) 6. (B) 5. (C) 11. (D) 9.

❖ **Câu 9.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. (B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

❖ **Câu 10.** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 4}{x - 2}$. (B) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.
(C) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x + 4}{x - 2}$. (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

❖ **Câu 11.** Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 1}{4 - x}$. (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x + 3)$.
(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 1}{4 - x}$.

❖ **Câu 12.** $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x + 1}$ bằng?

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{3}{2}$.

❖ **Câu 13.** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1}$ bằng

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) 0.

❖ **Câu 14.** Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{x - 1}$

- (A) $-\infty$. (B) -2. (C) 0. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 15.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$

- (A) $-\infty$. (B) 2. (C) 0. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 16.** Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$.

- (A) $-\infty$. (B) $-\frac{2}{5}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 17.** Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

- (A) $L = -5$. (B) $L = 0$. (C) $L = -3$. (D) $L = 5$.

❖ **Câu 18.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} + x)$.

- (A) $+\infty$. (B) -1 . (C) $-\infty$. (D) 0 .

❖ **Câu 19.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x + 3}$.

- (A) $+\infty$. (B) -1 . (C) $-\infty$. (D) 1 .

❖ **Câu 20.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|10 - 2x|}{x^2 - 6x + 5}$.

- (A) $+\infty$. (B) 0 . (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x + 4)$. c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$. e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.
b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{10 - 2x^2}$. d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$. f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x + 8}}{x - 1}$.

❖ **Bài 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

❖ **Bài 3.** Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô

tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$). Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

❖ **Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{2x}$. c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$. e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3}{3x^2 + 2x + 5}$. d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$.

❖ **Bài 5.** Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1}$. b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{2x - 4}$. c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3 - x}$.

❖ **Bài 6.** Mỗi giới hạn sau có tồn tại hay không? Nếu có hãy tính giới hạn đó.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$. b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{|x - 2|}$. c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$.

❖ **Bài 7.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ không?

Tại sao?

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{nếu } x > 3 \\ 3x^2 + 1 & \text{nếu } x \leq 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Bài 10. Tìm các giá trị a, b biết rằng

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + b}{x - 2} = 5$. b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x^2 - 3x + 2} = b$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = 3$.

Bài 11. Cho hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$ với m là tham số. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, tìm giá trị m .

Bài 12. Cho hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$ với m là tham số. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, tìm giá trị m .

Bài 13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x^2} - 2}{x^2}$. b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}}$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{x - 1}$.

Bài 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2025$. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x + 1}$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x + 8}$.

Bài 16. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$, cho biết ý nghĩa kết quả tìm được.

Bài 17. Trong hồ có chứa 6 000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

- a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400 + t}$ (gam/lít).
- b) Nồng độ muối như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$?

Bài 18. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

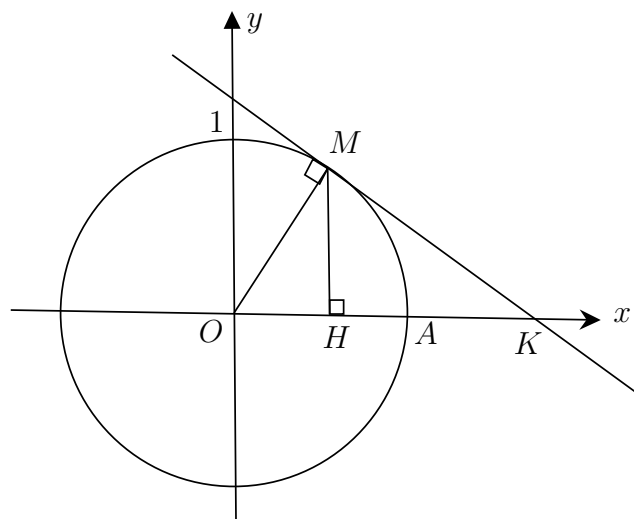
Bài 19. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó $v(\text{m/s})$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 20. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50\,000 + 105x$.

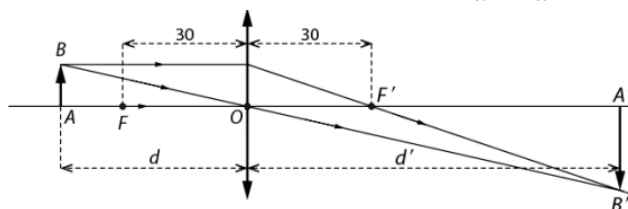
a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài 21. Cho điểm $M(t, \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Bài 22. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng d (cm) > 30 (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ của thấu kính cách quang tâm một khoảng d' (cm) (Hình vẽ). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tính các giới hạn $\lim_{d \rightarrow 30^+} h(d)$, $\lim_{d \rightarrow 30^-} h(d)$, $\lim_{d \rightarrow +\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

◆ **Nhận xét:** Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau:

1. Hàm số xác định tại x_0 .
2. Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



🔔 **LƯU Ý.** Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.



Ví dụ 1



Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $f(x) = 1 - x^2$ tại điểm $x_0 = 3$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 1 \\ -x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

🔗 Hướng dẫn giải.

a) Ta có $f(3) = -8$ và $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (1 - x^2) = 1 - 3^2 = -8$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

b) Ta có $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ nên hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Ta có: $f(1) = -1$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(1) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + 1) = m \cdot 1 + 1 = m + 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$.



① Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

b) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & \text{nếu } x \neq -2 \\ -6 & \text{nếu } x = -2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -2$.

c) $s(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.



② Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x < 2 \\ -x + a & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ với a là tham số. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN



◇ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

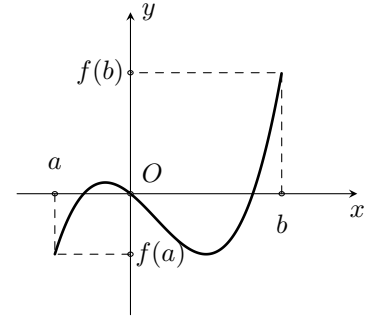
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

◇ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

 Nhận xét:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

 Ví dụ 3

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ trên $[1; 2]$.

 *Hướng dẫn giải.* Với mọi $x \in (1; 2)$ ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} (x-1)} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} (2-x)} \\ &= \sqrt{x_0-1} + \sqrt{2-x_0} = f(x_0). \end{aligned}$$

Do đó $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in [1; 2]$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x)} = 1 = f(1)$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x)} = 1 = f(2)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$.

 Ví dụ 4

Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau:

$$P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases} \quad (k \text{ là một hằng số}).$$

a) Với $k = 0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0; +\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$?

 *Hướng dẫn giải.*

a) Với $k = 0$, hàm số có dạng $P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x & \text{khi } x > 400 \end{cases}$.

◇ Với mọi $x_0 \in (0; 400)$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (4,5x) = 4,5 \lim_{x \rightarrow x_0} x = 4,5x_0 = P(x_0)$$

Vậy hàm số $y = P(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (0; 400)$.

◇ Với mọi $x_0 \in (400; +\infty)$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (4x) = 4 \lim_{x \rightarrow x_0} x = 4x_0 = P(x_0)$$

Vậy hàm số $y = P(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (400; +\infty)$.

◇ $f(400) = 4,5 \cdot 400 = 1800$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} (4x) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 400^+} x = 4 \cdot 400 = 1600$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} (4,5x) = 4,5 \cdot \lim_{x \rightarrow 400^-} x = 4,5 \cdot 400 = 1800$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) \neq \lim_{x \rightarrow 400^+} P(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 400} P(x)$.

Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0 = 400$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên $(0; +\infty)$.

b) Xét hàm số $P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases}$ (k là một hằng số).

Hàm số liên tục trên các khoảng $(0; 400)$ và $(400; +\infty)$. Ta có:

$$f(400) = 4,5 \cdot 400 = 1800$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} (4x + k) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 400^+} x + \lim_{x \rightarrow 400^+} k = 4 \cdot 400 + k = 1600 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} (4,5x) = 4,5 \cdot \lim_{x \rightarrow 400^-} x = 4,5 \cdot 400 = 1800$$

Để hàm số $y = P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = P(x)$ phải liên tục tại điểm $x_0 = 400$. Suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) = f(400) \Leftrightarrow 1600 + k = 1800 \Leftrightarrow k = 200$$

Vậy $k = 200$ thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.



③ Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$.



④ Hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x < 2 \\ -x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

III. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ SƠ CẤP



◇ Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

◇ Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.



Nhận xét: Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là **hàm số sơ cấp**. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.



Ví dụ 5



Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.



Hướng dẫn giải.

Ta có $f(x)$ là hàm căn thức có tập xác định là $\mathcal{D} = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2]$ và $[2; +\infty)$.



Ví dụ 6



Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.



Hướng dẫn giải.

• Với $x \neq 0$ thì hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

• Với $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2$$

Ta có $f(0) = a$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$, do đó

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ hay $a = -2$.



Ví dụ 7



Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(0) \cdot f(-1) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

b) Xét hàm số $f(x) = x - \cos x$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Suy ra $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = x - \cos x = 0$ hay $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

Ví dụ 8



Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 10\,000 & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 10\,000 + (x - 0,7) \cdot 14\,000 & \text{khi } 0,7 < x \leq 20 \\ 280\,200 + (x - 20) \cdot 12\,000 & \text{khi } x > 20 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Hướng dẫn giải.

• Hàm số $T(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

• Hàm số $T(x)$ xác định trên từng khoảng $(0; 0,7)$, $(0,7; 20)$ và $(20; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng đó.

Ta có: $T(0,7) = 10000$.

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} (10000 + (x - 0,7) \cdot 14000) = 10000 + (0,7 - 0,7) \cdot 14000 = 10000$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^-} 10000 = 10000$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0,7^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} T(x) = 10000$ nên $\lim_{x \rightarrow 0,7} T(x) = 10000 = T(0,7)$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0,7$.

Ta có: $T(20) = 10000 + (20 - 0,7) \cdot 14000 = 280200$.

$$\lim_{x \rightarrow 20^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} (280200 + (x - 20) \cdot 12000) = 280200 + (20 - 20) \cdot 12000 = 280200$$

$$\lim_{x \rightarrow 20^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20^-} (10000 + (x - 0,7) \cdot 14000) = 10000 + (20 - 0,7) \cdot 14000 = 280200$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 20^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} T(x) = 280200$ nên $\lim_{x \rightarrow 20} T(x) = 280200 = T(20)$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 20$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.



⑤ Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-8}$.



⑥ Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ ax+b & \text{nếu } 0 < x < 2, \text{ trong đó } a, b \text{ là hai số thực.} \\ 4-x & \text{nếu } 2 \leq x \end{cases}$ Tìm a và b để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.



⑦ Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

IV. TỔNG, HIỆU TÍCH, THƯƠNG CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC



Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- ◇ Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- ◇ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 9



Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$

b) $y = g(x) = \sqrt{3x+6} + \frac{2\sin x}{\sqrt{3-x}}$

a) Ta có $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 3$.

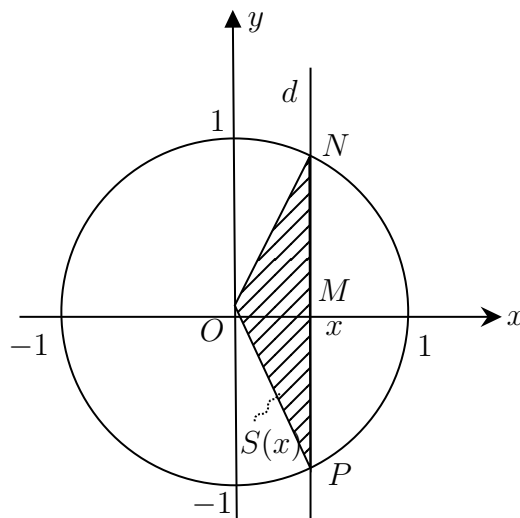
$y = f(x)$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ nên nó liên tục trên các khoảng của tập xác định là $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 3.$

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = [-2; 3)$. Hàm số lượng giác $y = 2\sin x$ và hàm số căn thức $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ đều liên tục trên $[-2; 3)$ nên hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[-2; 3)$.

Ví dụ 10

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) tâm O , bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x ($-1 < x < 1$) và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem hình vẽ).



- Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP .
- Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1; 1)$ không? Giải thích.
- Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x)$.

Hướng dẫn giải.

- Ta có: $(C) : x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Độ dài OM chính là giá trị tuyệt đối của hoành độ của điểm M . Vậy $OM = |x|$.

Độ dài MN chính là giá trị tuyệt đối của tung độ của điểm N .

Vậy $MN = |\sqrt{1-x^2}| = \sqrt{1-x^2}$.

$$S(x) = S_{ONP} = \frac{1}{2} \cdot NP \cdot OM = MN \cdot OM = \sqrt{1-x^2} \cdot |x|.$$

- Xét hàm số $S(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot |x| = \begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ -x\sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1 \leq x < 0 \end{cases}$.

Điều kiện xác định: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Hàm số $S(x)$ có tập xác định là $[-1; 1]$. Vậy hàm số $S(x)$ xác định trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ nên liên tục trên các khoảng đó.

Ta có: $S(0) = 0 \cdot \sqrt{1-0^2} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\sqrt{1-x^2} = 0 \cdot \sqrt{1-0^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x\sqrt{1-x^2}) = -0 \cdot \sqrt{1-0^2} = 0$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.

Vậy hàm số $S(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Vậy hàm số $S(x)$ liên tục trên $(-1; 1)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x\sqrt{1-x^2}) = 1 \cdot \sqrt{1-1^2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x\sqrt{1-x^2}) = -1 \cdot \sqrt{1-(-1)^2} = 0$$



8 Xét tính liên tục của hàm số:

a) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 3 - x$.

c) $y = h(x) = x + \tan x$.

b) $y = g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \cos x$.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ Câu 1. Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

❖ Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x = 2$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Khi đó, phải gán thêm giá trị $f(2)$ bằng bao nhiêu?

- (A) -4 . (B) -1 . (C) 1 . (D) 4 .

❖ Câu 3. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- (A) $y = x + \frac{1}{x}$. (B) $y = \sqrt{2-x}$.
 (C) $y = \frac{2x+1}{x-7}$. (D) $y = x + 7$.

❖ Câu 4. Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}$ liên tục trên

- (A) $(3; 10)$. (B) $[-3; 4]$. (C) $[-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 4]$.

❖ Câu 5. Hàm số nào dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = |x|$. (B) $y = \frac{x}{x-1}$.
 (C) $y = \sin x$. (D) $y = \frac{x}{|x|+1}$.

❖ **Câu 6.** Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \sqrt{x-5}$.

(B) $g(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$.

(C) $h(x) = \cot x + 3$.

(D) $k(x) = \frac{x^2+3}{2-x}$.

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x+2}$. Khi đó, hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng nào dưới đây?

(A) $(1; 2)$.

(B) $(-\infty; 2)$.

(C) $(1; +\infty)$.

(D) $(1; 3)$.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

(B) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

(C) Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.

(D) Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.

❖ **Câu 9.** Hàm số $y = \frac{1}{x^2-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

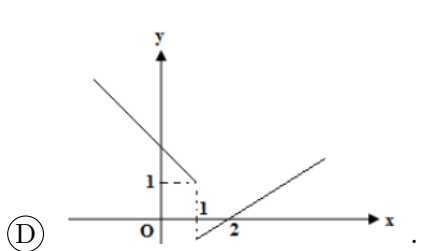
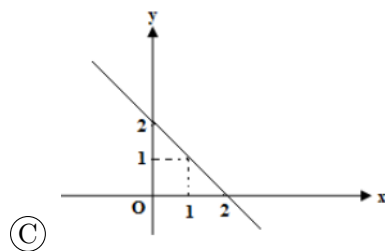
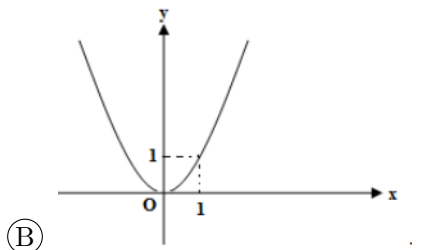
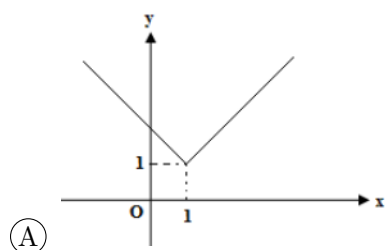
(A) $x = 1$.

(B) $x = 0$.

(C) $x = 2$.

(D) $x = -1$.

❖ **Câu 10.** Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x = 1$?



❖ **Câu 11.** Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(0; 5)$?

(A) $y = \frac{3x-2}{x-3}$.

(B) $y = \frac{x+1}{x+2}$.

(C) $y = \frac{5x+1}{x-4}$.

(D) $y = \frac{1}{x^2-1}$.

❖ **Câu 12.** Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 2$?

(A) $y = \frac{1}{x-2}$.

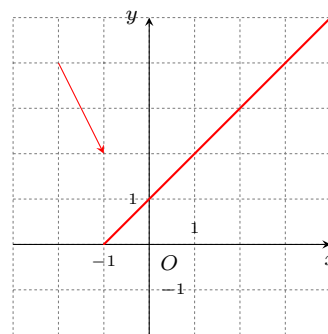
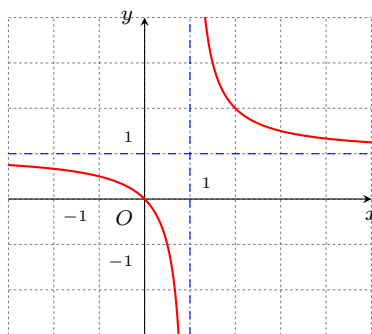
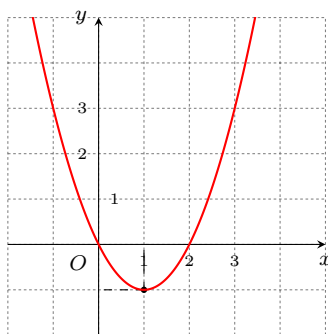
(B) $y = \sin x$.

(C) $y = x^4$.

(D) $y = \tan x$.

Tự luận

Bài 1. Trong các hàm số có đồ thị ở Hình a, b, c hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số
 $f(x) = x^2 - 2x$

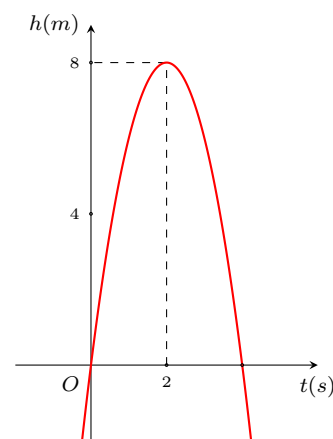
b) Đồ thị hàm số
 $g(x) = \frac{x}{x-1}$

c) Đồ thị hàm số
 $h(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x < -1 \\ x+1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Bài 2. Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.



Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{nếu } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$

- a) Với $a = 0$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 4$.
 b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$.
 c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Bài 6. Xét tính liên tục của các hàm số sau

- a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$. c) $h(x) = \cos x + \tan x$. e) $l(x) = x^4 - x^2 + \frac{6}{x-1}$.
 b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$. d) $k(x) = x^2 + \sin x$. f) $m(x) = \frac{2x}{x-3} + \frac{x-1}{x+4}$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 8. Cho hai hàm số $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{khi } x < 1 \\ x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ -x^2 + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } |x| < 2 \\ x(2-x) & \text{khi } |x| \geq 2 \end{cases}$

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 10. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } x \leq 1 \\ ax + b & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 5 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ Tìm giá trị của các tham số

a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. Chứng minh rằng phương trình:

- a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.
 b) $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Bài 12. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau: $C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Bài 13. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Bài 14. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

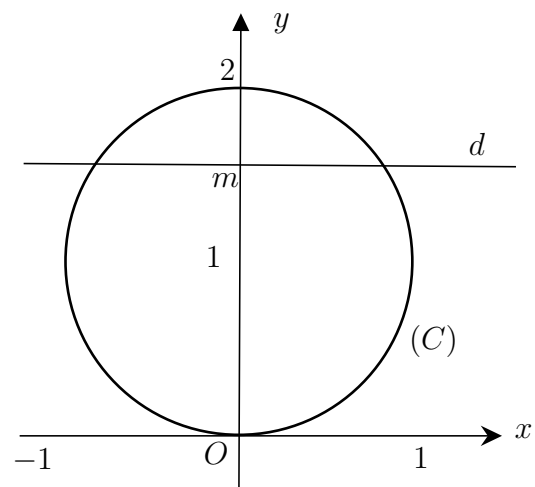
- Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.
- Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Bài 15. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

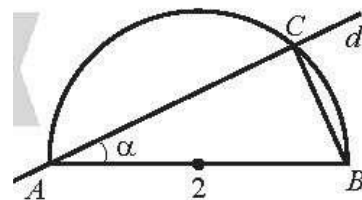
Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

- Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.
- Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m , gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d : y = mx$ với đường tròn (C) . Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Bài 17. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc có số đo $\widehat{CAB} = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.

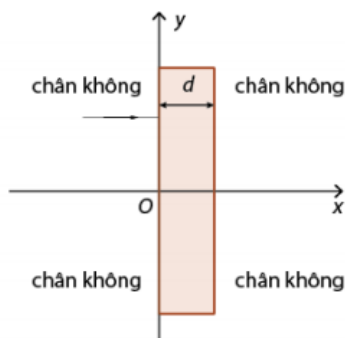


Bài 18. Trong Vật lí, tỉ số giữa tốc độ c của ánh sáng trong chân không và tốc độ v của ánh sáng trong một môi trường được gọi là chiết suất của môi trường đó. Chiết suất của một môi trường đồng nhất là không đổi. Ngày nay, với công nghệ nano, người ta tạo ra được các bản thủy tinh mà chiết suất của nó thay đổi theo một phương nào đó.

Xét sự truyền của ánh sáng vào bản thủy tinh dọc theo trục Ox như Hình dưới. Biết chiết suất của bản thủy tinh này thay đổi theo hoành độ x cho bởi:

$$n(x) = \frac{a}{a-x} \quad \text{với } 0 \leq x \leq d$$

trong đó a là một hằng số có giá trị lớn hơn bề dày d của bản thủy tinh.



a) Chứng minh rằng tốc độ của ánh sáng cho bởi:

$$v(x) = \begin{cases} c & \text{nếu } x < 0 \\ c \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{nếu } 0 \leq x \leq d \\ c & \text{nếu } x > d \end{cases}$$

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = v(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

4 ÔN TẬP CHƯƠNG 3



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

❖ **Câu 1.** Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
 (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.
 (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
 (D) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim c = c$.

❖ **Câu 2.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^2}$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là:

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. (B) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. (D) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

❖ **Câu 4.** Cho $\lim u_n = 3, \lim v_n = +\infty$. Khi đó $\lim \frac{v_n}{u_n}$ bằng

- (A) 3. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

❖ **Câu 5.** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 1 - \frac{2}{n}, v_n = 4 + \frac{2}{n+2}$. Tính $\lim (u_n + \sqrt{v_n})$.

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 2.

❖ **Câu 6.** Khẳng định nào **sai**?

- (A) $\lim \left(-\frac{2025}{2026} \right)^n = 0$. (B) $\lim (\sqrt{3})^n = +\infty$.
 (C) $\lim \left(\frac{5}{3} \right)^n = 0$. (D) $\lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$.

❖ **Câu 7.** $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x-4}{x-2}$ bằng

- (A) 4. (B) -4. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 8.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x+x^2}{x}$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

❖ **Câu 9.** Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

- (A) $M = 5$. (B) $M = 2$. (C) $M = -6$. (D) $M = 3$.

❖ **Câu 10.** Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 1)$ bằng

- (A) -11 . (B) 12 . (C) 5 . (D) 0 .

❖ **Câu 11.** Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$ là

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1 . (D) 0 .

❖ **Câu 12.** Biểu diễn dưới dạng phân số của số $1, (7)$ là

- (A) $\frac{7}{9}$. (B) $\frac{10}{9}$. (C) $\frac{10}{3}$. (D) $\frac{16}{9}$.

❖ **Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

- (A) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = b$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = b$.

❖ **Câu 14.** Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục tại điểm $x = 0$?

- (A) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$. (B) $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$.
 (C) $y = \cot x$. (D) $y = \sqrt{2x^2 - 1}$.

❖ **Câu 15.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

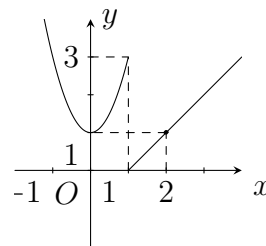
- (A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.
 (B) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$.
 (C) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(a; b)$.
 (D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên $[a; b]$.

❖ **Câu 16.** Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \cos \frac{3}{x}$. (B) $y = \cot 3x$. (C) $y = \frac{1-x}{x^2+4}$. (D) $y = \sqrt{x+2}$.

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây, trên khoảng $(-2; 3)$ hàm số gián đoạn tại điểm nào?

- (A) $x = 0$. (B) $x = 1$. (C) $x = 2$. (D) $x = 3$.



❖ **Câu 18.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & , \text{ khi } x > 1 \\ 2x + 1 & , \text{ khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.
 (B) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.
 (C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

❖ **Câu 19.** Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \cos \frac{3}{x}$. (B) $y = \cot 3x$. (C) $y = \frac{1 - x}{x^2 + 4}$. (D) $y = \sqrt{x + 2}$.

❖ **Câu 20.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào?

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-3; 3)$. (C) $(-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 3)$.

❖ **Câu 21.** Cho hàm số $y = \frac{x + 4}{x - 3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số liên tục tại $x = 3$.
 (B) Hàm số liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.
 (C) Hàm số liên tục tại $x = 2$ và $x = 3$.
 (D) Hàm số liên tục trên $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

❖ **Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{ khi } x > 1 \\ n & \text{ khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

- (A) $n = 1, m = 0$. (B) $n = 0, m = 1$.
 (C) $n = m = 1$. (D) $n = -1, m = 0$.

❖ **Câu 23.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x + 1}{5x - 1}$.

- (A) 0. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) -1.

❖ **Câu 24.** Tính $\lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $-\frac{3}{2}$. (D) 0.

❖ **Câu 25.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

- (A) $(\sqrt{2})^n$. (B) $(-1, 101)^n$. (C) $(0, 919)^n$. (D) $(1, 001)^n$.

❖ **Câu 26.** Tính $\lim(\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n)$.

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

❖ **Câu 27.** Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

- (A) 0. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) 1.

❖ **Câu 28.** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- (A) $\lim \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$. (B) $\lim \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3}$.
(C) $\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$. (D) $\lim \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$.

❖ **Câu 29.** Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) -1.

❖ **Câu 30.** Tính tổng $S = -\frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots + (-1)^n \frac{2}{3^n} + \dots$.

- (A) $S = \frac{1}{2}$. (B) $S = -\frac{1}{2}$. (C) $S = -3$. (D) $S = 3$.

❖ **Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 1} = 3$. (B) $\lim_{x \rightarrow 1} = 0$.
(C) $\lim_{x \rightarrow 1} = -3$. (D) Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1}$.

❖ **Câu 32.** Cho $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|}$. Khi đó, giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ là

- (A) 0. (B) -1.
(C) 1. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 33.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = m + 1$. Biết giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow 1$ tồn tại. Giá trị của m là

- (A) $m = 1$. (B) $m = -1$.
(C) $m = 3$. (D) Không tồn tại m .

❖ **Câu 34.** Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \leq 1 \\ 2x + b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$. Giá trị của $a - b$ bằng

- (A) -1 . (B) 0 . (C) 1 . (D) 3 .

❖ **Câu 35.** Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ là

- (A) $+\infty$. (B) Không tồn tại.
(C) 2 . (D) 0 .

❖ **Câu 36.** Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{x}$ là

- (A) $+\infty$. (B) 0 .
(C) -2 . (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 37.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } -1 < x \leq 1 \\ 1-x & \text{nếu } x \leq -1 \text{ hoặc } x > 1 \end{cases}$. Mệnh đề đúng là

- (A) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$.
(B) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1; 1)$.
(C) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1; 1]$.
(D) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

❖ **Câu 38.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$ với m là tham số. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi

- (A) $m = 0$. (B) $m = 3$. (C) $m = -1$. (D) $m = 1$.

❖ **Câu 39.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}$. Hàm số này liên tục trên

- (A) $(1; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1]$.

❖ **Câu 40.** Cho phương trình $x^7 + x^5 = 1$. Mệnh đề đúng là

- (A) Phương trình có nghiệm âm.
(B) Phương trình có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.
(C) Phương trình có nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.
(D) Phương trình vô nghiệm.

2 Trắc nghiệm đúng sai

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^3 + 27} & \text{nếu } x \neq -3 \\ a - \frac{11}{9} & \text{nếu } x = -3 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.		
B $f(-3) = a - \frac{11}{9}$.		
C $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 + 27}$.		
D Có 23 giá trị nguyên của $a \in (0; 25)$ để hàm số gián đoạn tại $x = -3$.		

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + 2m & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x + 7} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$, m là tham số.

Phát biểu	Đ	S
A Khi $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$.		
B $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.		
C $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$.		
D Tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ khi $m = -3$.		

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(3; +\infty)$.		
B Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.		
C Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.		
D Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$; $\frac{a}{b}$ tối giản thì $a^2 + b^2 = 25$.		

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} & \text{khi } x < -2 \\ x + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$, a, b là tham số.

Phát biểu	Đ	S
A $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$.		
B $f(-2) = 1$.		
C Khi hàm số có giới hạn tại $x = 2$ thì $3a - 12b = 12$.		
D Khi $a = 2, b = 0$, hàm số không liên tục tại $x = -2$.		

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.		
B Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.		
C Với $a = 3$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.		
D $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.		

❖ **Câu 6.** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.		
B $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x + 1}{x - 2} = -\infty$.		
C $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)(4 - 5x)}{-x^2 + 7x + 8} = 10$.		
D Hàm số $f(x) = \tan 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.		

❖ **Câu 7.** Xét tính đúng, sai các mệnh đề sau:

Phát biểu	Đ	S
A Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.		
B Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.		
C Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.		
D $\lim q^n = 0, q < 1$.		

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.		
B Hàm số có giới hạn tại $x = 1$.		
C $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.		
D Hàm số có giới hạn tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.		

❖ **Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$.		
B $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4}$.		
C $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3}{4}$.		
D Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.		

❖ **Câu 10.** Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$.

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)] = -\infty$.			C $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.		
B $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)] = -\infty$.			D $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{f(x)-3} = 1$.		

❖ **Câu 11.** Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 600 + 500x$.

Phát biểu	Đ	S
A Chi phí để sản xuất 1 sản phẩm là 1100 đồng.		
B Chi phí để sản xuất 10 sản phẩm là 560 000 đồng.		

C Công ty sản xuất 20 sản phẩm thì chi phí trung bình của mỗi sản phẩm là 530 000 đồng .		
D Nếu công ty sản xuất được số sản phẩm tăng lên rất nhiều thì chi phí trung bình của mỗi sản phẩm giảm dần về mức 500 000 đồng .		

❖ **Câu 12.** Trong hồ có chứa 10 mét khối nước ngọt (có nồng độ muối xem như bằng 0). Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 40 gam/lít vào hồ với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng, nồng độ muối trong dung dịch được tính bằng công thức $C = \frac{m}{V}$.

Phát biểu	Đ	S
A Sau thời gian t (phút), lượng nước biển được bơm vào hồ là $20t$ (lít). .		
B Khối lượng muối bơm vào hồ sau thời gian t (phút) là $m(t) = 40t$ (gam) .		
C Nồng độ muối trong hồ sau thời gian t (phút) là $C(t) = \frac{800t}{10000 + 20t}$.		
D Khi thời gian t (phút) càng lớn, nồng độ muối trong hồ sẽ càng cao nhưng không vượt quá 400 (gam/lít) .		

❖ **Câu 13.** Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 7 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x + 1}$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		
B $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$.		
C Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		
D Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		

3 Tự luận

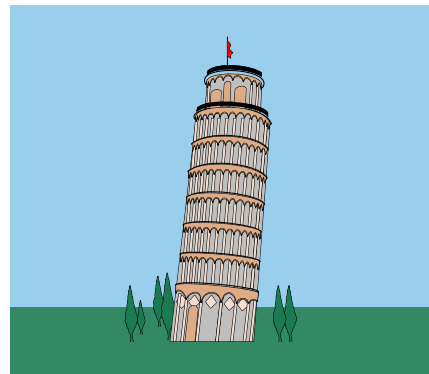
❖ **Bài 1.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)(1 - 2x) \dots (1 - 2018x)$.

❖ **Bài 2.** Tìm a là số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3} + a^2 + 3a \right) = 0$.

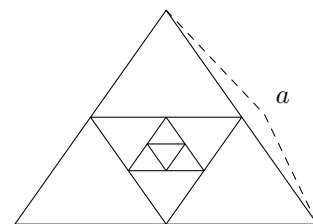
❖ **Bài 3.** Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{ax^3 + 4x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + bx + 1} - 2x - 4) = 3$ với a, b là các số thực. Tính $S = 2a + 54b$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{x}$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Bài 5. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Bài 6. Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình bên). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$. Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

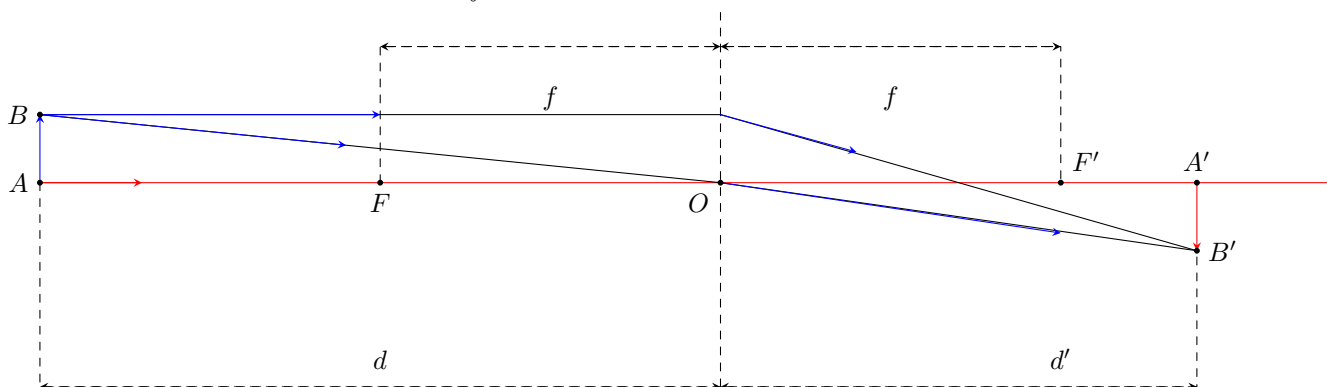


Bài 7. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \dots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \dots$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.

Bài 8. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Bài 9. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C , mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k .

Bài 10. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

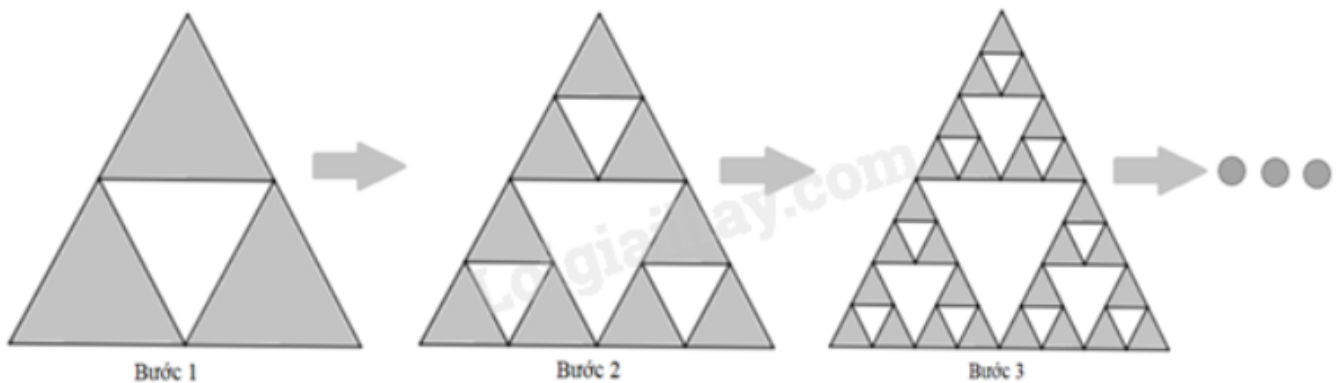
a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

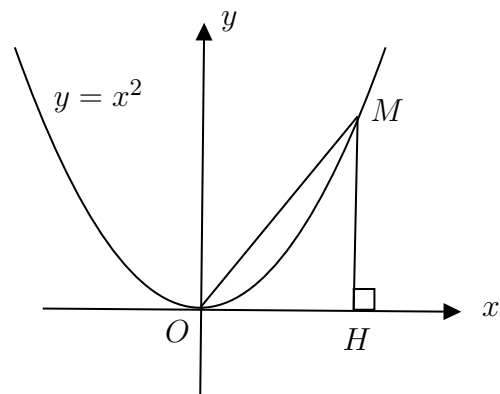
Bài 11. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước sau:

- ☞ Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).
- ☞ Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

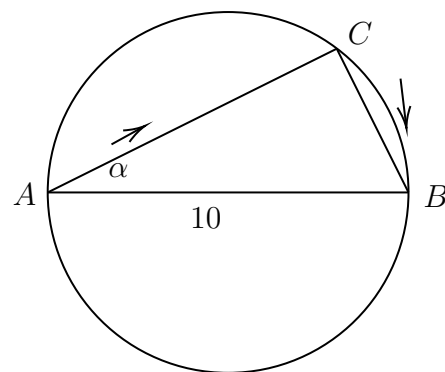
Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Bài 12. Cho M thay đổi trên parabol $y = x^2$; H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành. Gọi x là hoành độ của điểm M . Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} (OM - MH)$.

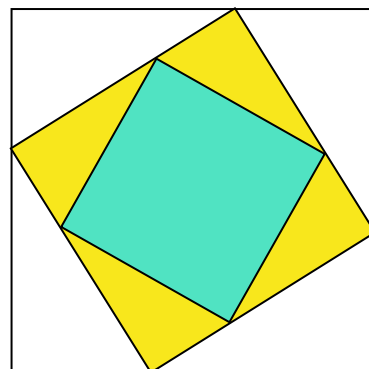


Bài 13. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10$ m, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình vẽ). Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.



- Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).
- Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.
- Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Bài 14. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2 . Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3 .



Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$. Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n .

- Tính s_n .
- Tính tổng $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$