

SBAI 1.

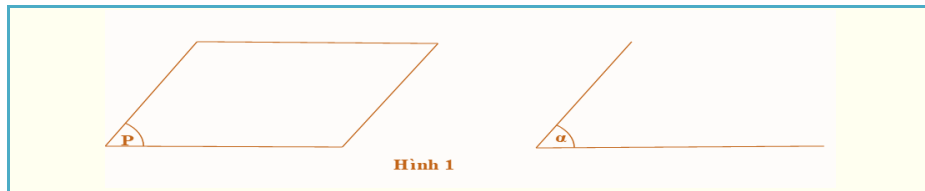
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng:

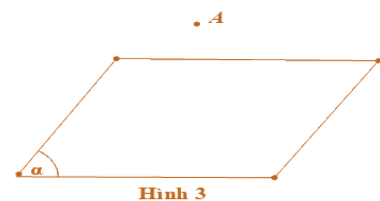
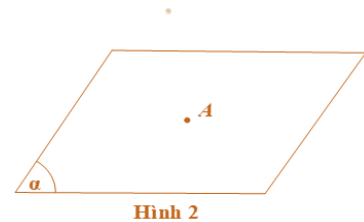
- Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng, mặt sàn nhà,... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.
- Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng đó vào một góc của hình biểu diễn (như hình 1).
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu (). Ví dụ: mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) hoặc viết tắt là $mp(P)$, $mp(Q)$...



2. Điểm thuộc mặt phẳng:

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

- Khi điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta nói A nằm trên (α) hay mặt phẳng (α) chứa A, hay mặt phẳng(α) đi qua điểm A và kí hiệu $A \in (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 2.
- Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (α) ta nói điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α) hay mặt phẳng (α) không chứa điểm A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 3.



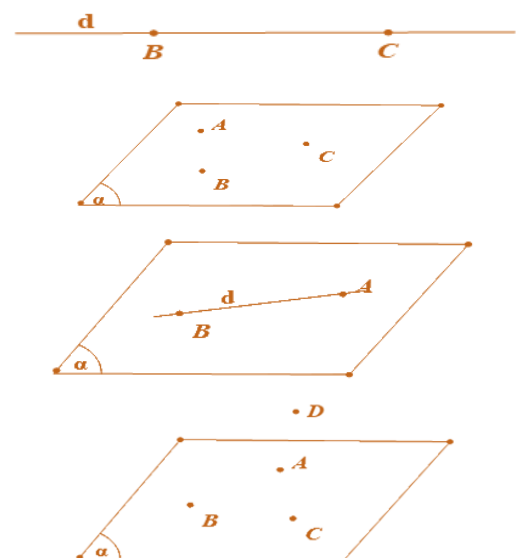
II. CÁC TÍNH CHẤT ĐƯỢC THỪA NHẬN

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

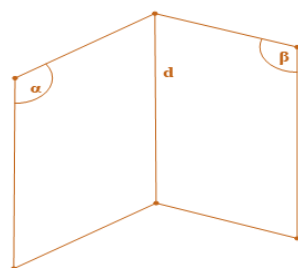
Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
Khi đó bốn điểm đó tạo thành một tứ diện hay một hình chóp tam giác.



Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa .

Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó . Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

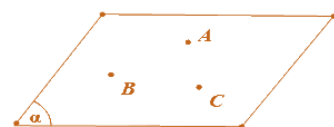


Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẪNG

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

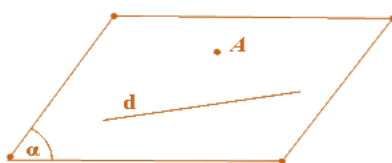
➤ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



➤ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

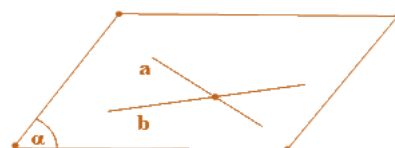
Tức là, với đường thẳng d và điểm A không thuộc d .

Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là $mp(A, d)$ hoặc $mp(d, A)$.



➤ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau:

Khi đó: với hai đường thẳng cắt nhau a và b ta luôn xác định một mặt phẳng và kí hiệu là $mp(a, b)$ hay $(a; b)$.



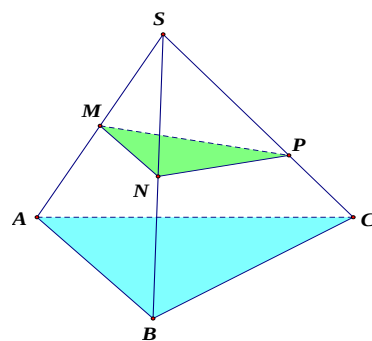
IV. QUY TẮC BIỂU DIỄN VẼ HÌNH KHÔNG GIAN

➤ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

➤ Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau

➤ Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng

➤ Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.



V. HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$.

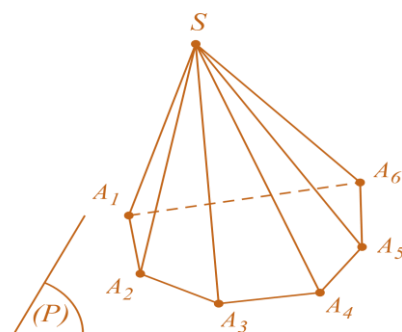
Lấy điểm S nằm ngoài (α) . Lần lượt nối S với các đỉnh

$A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$.

Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn

$SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên...

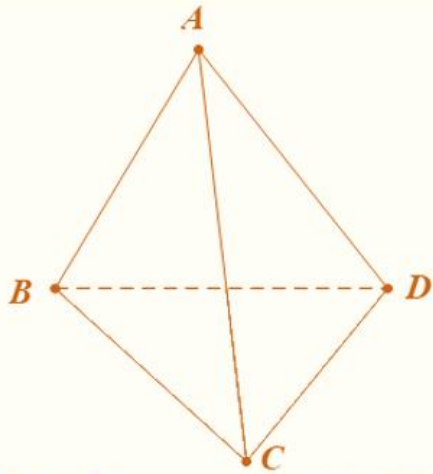


2. Hình Tứ diện

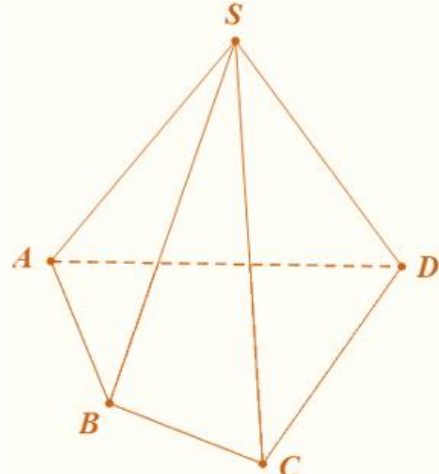
Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

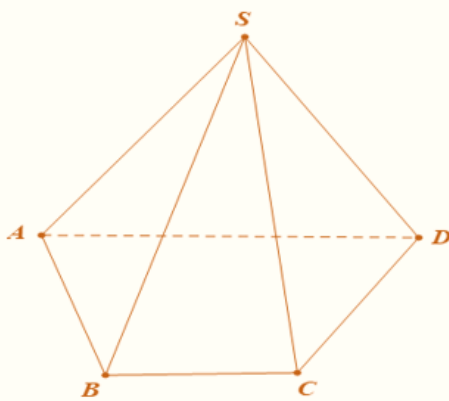
Hình tứ diện có bốn mặt là *các tam giác đều* gọi là hình **tứ diện đều**.



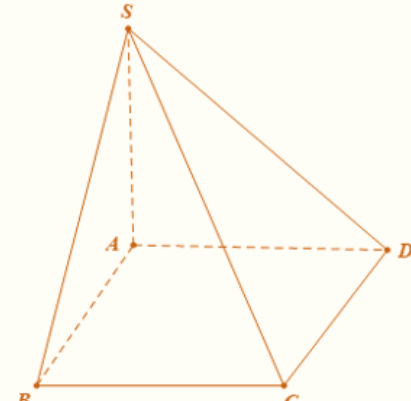
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

Nhận xét:

- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tùy ý cho trước (tam giác cân, đều, vuông...) .
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (Hình vuông ,hình thoi, hình chữ nhật, hình bình hành...)
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài của hai cạnh đáy được bảo toàn.
- Hình elip là hình biểu diễn của hình tròn.

B. PHÂN DẠNG VÀ VÍ DỤ MINH HỌA.

Dạng 1. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG

1. Phương pháp.

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ? Ta tìm *hai điểm chung* thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Cách tìm:

- Điểm chung thứ nhất thường dễ tìm.
- Điểm chung còn lại các bạn phải tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng, đồng thời chúng lại thuộc mặt phẳng thứ ba và chúng không song song.
- Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm chung thứ hai.

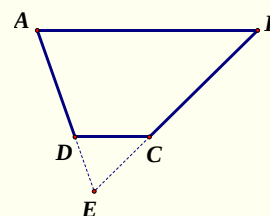
Nhận xét: ta sử dụng các kỹ thuật tìm điểm chung như sau

Kỹ thuật 1: Tính chất cắt ngoài.

- ✦ Đây là hình thang $ABCD$ ($AB // CD$)

Khi đó hai cạnh bên không song song nên cắt nhau tại E .

Tức là $AD \cap BC = E$



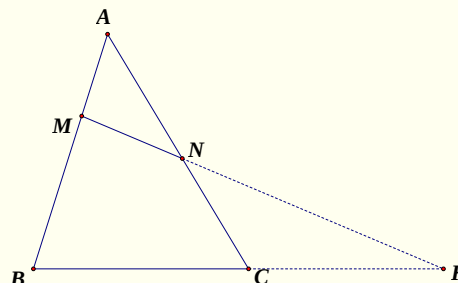
- ➡ Tính chất tỉ lệ trong tam giác.

Cho tam giác ABC .

M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = k_1 AB$

N nằm trên cạnh AC sao cho $AN = k_2 AC$

- ✧ Nếu $k_1 = k_2$ thì $MN \parallel BC$
- ✧ Nếu $k_1 \neq k_2$ thì MN cắt BC tại $K \Rightarrow K$ là giao điểm cần tìm.



- 👉 Hai điểm nằm trên hai cạnh của một đa giác
đáy cắt các cạnh còn lại của đa giác.

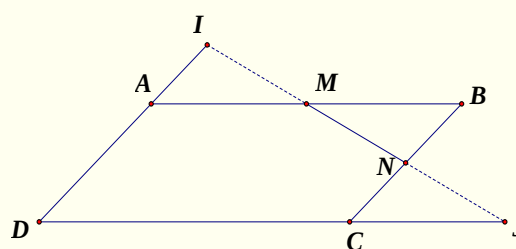
Cho tứ giác $ABCD$.

M nằm trên cạnh AB .

N nằm trên cạnh AC .

Khi đó: kéo dài đường thẳng MN thì

- ✧ MN cắt đường thẳng AD tại I .
- ✧ MN cắt đường thẳng DC tại J .



2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của :

- a). Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).
- b). Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).
- c). Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có AB song song CD . Gọi I là giao điểm của AD và BC . Lấy M thuộc cạnh SC . Tìm giao tuyến của :

- a). $mp(SAC)$ và $mp(SBD)$. b). $mp(SAD)$ và $mp(SBC)$. c). $mp(ADM)$ và $mp(SBC)$.

Lời giải

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2MB$, N là trung điểm cạnh AC . Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của :

- a). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (BCD) .
b). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ABD) .
c). Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ACD) .

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 4. Cho tứ diện $S.ABC$. Lấy điểm E là trung điểm trên đoạn SA và F không phải là trung điểm của đoạn SB và điểm G trọng tâm góc ABC . Tìm giao tuyến của:

a). (EFG) và (SBC) .

b). (EFG) và (SGC) .

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC .

- Tìm giao tuyến của 2 mp (IBC) và mp (JAD) .
- Lấy điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mp (IBC) và mp (DMN) .

Lời giải

Ví dụ 6. Cho tứ diện $S.ABC$. Lấy $M \in SB, N \in AC, I \in SC$ sao cho MI không song song với BC , NI không song song với SA . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt (ABC) và (SAB)

[illegible]

d). M_p (MNP) và m_p (SCD).

[illegible]

Kỹ thuật 2: Tính chất cắt trong.

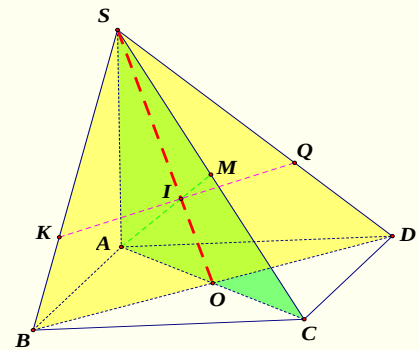
1. Phương pháp

Kỹ thuật này thường sử dụng đối với các mặt phẳng nằm bên trong của khối chóp là $(SAC), (SBD)$... để sử dụng thành thạo kỹ thuật này ta luôn làm như sau:

Bước 1: tìm giao điểm O của mặt đáy.

Bước 2: Nối đường thẳng SO sẽ cắt các đường thẳng nằm bên trong các mặt phẳng $(SAC), (SBD)$.

Ví dụ như: AM cắt SO tại I hay KQ cắt SO tại I .



2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 9. Cho tứ diện $S.ABC$, gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA .

- Tìm giao tuyến SH của 2 mặt phẳng (SCD) và (SAE) .
- Tìm giao tuyến CI của 2 mặt phẳng (SCD) và (BFC) .
- SH và CI có cắt nhau không? Nếu có, gọi giao điểm đó là O Chứng minh $IH \parallel SC$
- Tính tỉ số $\frac{OH}{OS}$.

Lời giải

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm $G; H$ lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB; \triangle SCD$. Tìm giao tuyến của:

a). (SGH) và $(ABCD)$.

b). (SGH) và (SAC) .

c). (BGH) và (SAC) .

d). (BGH) và (SCD) .

Lời giải

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm M và G lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$. $N \in SG$ và điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$. Tìm giao tuyến của:

- (MNP) và $(ABCD)$.
- (MNP) và (SAC) .
- (MNP) và (SCD) .

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABC$; gọi $H; K$ lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB; \triangle SBC$. M là trung điểm AC ; $I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Tìm giao tuyến của:

- a).** (IHK) và (ABC). **b).** (IHM) và (SBC).

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 13. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy $I \in AB$, J là điểm trong tam giác BCD , K là điểm trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện.

Lời giải

[illegible]

c). (ADG') và (SBC) .

Ví dụ 15. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm $M \in AB; N \in CD$. Điểm G nằm trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của:

a). (MCD) và (NAB) .

b). (GMN) và (ACD) .

Lời giải

[illegible][illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- A.** 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Câu 4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho.

A. 10.

B. 12.

C. 8.

D. 14.

Lời giải.

Câu 5. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Ba điểm phân biệt.

B. Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau.

D. Bốn điểm phân biệt.

Lời giải.

Câu 6. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.

B. Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .

C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.

D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .

Lời giải.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

- A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
- B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng ..

Lời giải.

Câu 9. Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. 3 đường thẳng trên đồng quy.
- B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.
- C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.
- D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải.

Câu 10. Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:

- A. Tam giác.
- B. Tứ giác.
- C. Ngũ giác.
- D. Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau sai?

- A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).
- D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

- A.** AM (M là trung điểm của AB). **B.** AN (N là trung điểm của CD).
C. AH (H là hình chiếu của B trên CD). **D.** AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I , thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- A.** (BCD) và (DEF) . **B.** (BCD) và (ABC) . **C.** (BCD) và (AEF) . **D.** (BCD) và (ABD) .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

- A.** đường thẳng MN . **C.** đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
B. đường thẳng AM . **D.** đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD . B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
 C. SG (G là trung điểm AB). D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $IJCD$ là hình thang. B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.
 C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$. D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI (I là giao điểm của AC và BM). B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
C. SO (O là giao điểm của AC và BD). D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải.

Câu 18. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

- A. IK . B. BC . C. AK . D. DK .

Lời giải.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Trên cạnh SB lấy điểm M . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC)

- A. SI . B. AE (E là giao điểm của DM và SI).
C. DM . D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD . Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD . Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

- A. KI . B. KJ . C. MI . D. MH .

Lời giải.

Dạng 2. TÌM GIAO ĐIỂM CỦA HAI MẶT PHẪNG

1. Phương pháp:

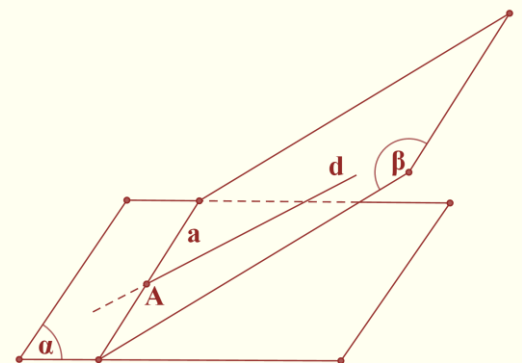
Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) , có hai cách làm như sau:

Cách 1:

- Những bài đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α) .
- Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của d và mặt phẳng (α) .

Cách 2:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d , sao cho dễ dàng tìm giao tuyến với mặt phẳng (P) .
- Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.



Nhận xét: vẫn sử dụng kỹ thuật cắt trong và cắt ngoài.

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J là trung điểm $SA; SB$. Lấy điểm M tùy ý trên SD . Tìm giao điểm của:

- ## Lời giải

[illegible]

Ví dụ 17. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD . Gọi O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD .

- | | |
|---|---|
| a). Tìm giao tuyến của (BCD) và (OMN) . | b). Tìm giao điểm của BD và (OMN) . |
| c). Tìm giao điểm của BC và (OMN) . | d). Tìm giao điểm của MN và (ABO) . |
| e). Tìm giao điểm của AO và (BMN) . | |

Lời giải

b). Tìm các giao điểm của $mp(IJK)$ với SD và SC .

[illegible]

Ví dụ 19. Cho tứ diện $S.ABC$. Lấy điểm M trên cạnh SA . Lấy N, P lần lượt nằm trong các tam giác SBC và ABC .

- Tìm giao điểm của MN với (ABC)
- Tìm giao điểm của (MNP) với AB ; SB ; AC ; SC .
- Tìm giao điểm của NP với (SAB) , (SAC) .

Lời giải

[illegible]

 **Ví dụ 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là trung điểm SB ; N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của:

- a). MN và $(ABCD)$.
b). MN và (SAC) .
c). SC và (AMN) .
d). SA và (CMN) .

Lời giải

[illegible]

 **Ví dụ 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SD .

- a). Tìm giao điểm I của BM với $\text{mp}(SAC)$. Chứng minh: $BI = 2IM$.
- b). Tìm giao điểm E của SA với $\text{mp}(BCM)$. Chứng minh E là trung điểm của SA .

Lời giải

[illegible]

b). Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC .

a). Tìm giao điểm Q của SC và (MNP) . b). Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

Tel: 0935.660.880

Ví dụ 27. Cho tứ diện $OABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB và AB .

Trên cạnh OC lấy điểm Q sao cho $OQ > QC$

- Tìm $E = BC \cap (MNQ)$
- Tìm $F = CP \cap (MNQ)$
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , tìm giao điểm K của đường thẳng BG với mặt phẳng (MNQ) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD .

- Tìm giao điểm E của SA với mặt phẳng (OMG)
- Tìm giao điểm F của AD với mặt phẳng (OMG)
- Tìm giao điểm K của GM với $(ABCD)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .
Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trong tam giác SAB, SAD .

- Tìm giao điểm E của MN với mặt phẳng $(ABCD)$
- Tìm giao điểm F của AB với mặt phẳng (OMN)
- Tìm giao điểm H của SA với mặt phẳng (OMN)
- Tìm giao điểm K của CD với mặt phẳng (OMN)

Lời giải

Ví dụ 30. Cho tứ diện $S.ABC$; lấy điểm M là trung điểm SA ; lấy điểm N là trọng tâm $\triangle SBC$; P nằm trong $\triangle ABC$. Tìm giao điểm

- I của MN với (ABC) . Tứ giác $ABIC$ là hình gì?
- SB và (MNP) .
- SC và (MNP) .
- NP và (SAB) .

Lời giải

Ví dụ 32. Cho tứ diện $S.ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

- Tìm giao điểm E của CD với $mp(IJK)$. Chứng minh rằng: $DE = DC$.
- Tìm giao điểm F của AD với $mp(IJK)$. CMR: $FA = 2FD$.
- Chứng minh: $FK \parallel IJ$
- Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD .
Tìm giao điểm của MN với $mp(IJK)$.

Lời giải

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

- a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC) .
- b). Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\frac{EN}{EM}$.
- c). Tìm giao điểm K của đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN) .

Gọi J giao điểm của AK và SO , tính $\frac{JK}{JA}$.

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và không có cặp cạnh đối nào song song. Lấy điểm M trên cạnh SC và điểm N trên cạnh SD .

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (NBC) .

b). Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP .

B. CD và MN .

C. CD và MP .

D. CD và AP .

Lời giải.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- A. điểm F .
 B. giao điểm của đường thẳng EG và AF .
 C. giao điểm của đường thẳng EG và AC .
 D. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Lời giải.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{IA} = -2\vec{IM}$.
 B. $\vec{IA} = -3\vec{IM}$.
 C. $\vec{IA} = 2\vec{IM}$.
 D. $IA = 2,5IM$.

Lời giải.

Câu 24. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

- A. giao điểm của SD và AB .
 B. giao điểm của SD và AM .
 C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).
 D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải.

[illegible]

Câu 25. Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với IK (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** E nằm ngoài đoạn BC về phía B .
B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C .
C. E nằm trong đoạn BC .
D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B$, $E \neq C$.

Lời giải.

[illegible]

DẠNG 3. Thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

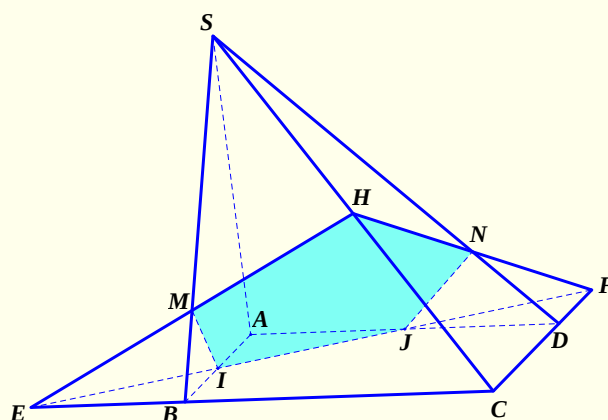
1. Định nghĩa.

Thiết diện (**mặt cắt**) là phần chung của mặt phẳng (P) và hình (H) .

Xác định thiết diện là **xác định giao tuyến của mp (P) với các mặt của hình (H)** .

Ta thường làm các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm giao tuyến đầu tiên (d_1) của mặt phẳng (P) với một mặt phẳng (α) thuộc hình (H) bằng cách **từ một điểm có chung sẵn** ta suy ra giao tuyến (d_1) .
- **Bước 2:** Sau đó ta kéo dài giao tuyến (d_1) vừa tìm được cắt các cạnh khác của hình (H) , từ đó ta tìm được các giao tuyến $(d_2), (d_3), (d_4)...$ tiếp theo.
- **Bước 3:** Nối các giao tuyến $(d_1), (d_2), (d_3), (d_4)...$ lại với nhau tạo thành đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này khép kín thành một thiết diện cần tìm.



2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 36. Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi K, N trung điểm SA và BC . M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

a). Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (KMN) .

b). Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 37. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M sao cho KM không song song với BD . Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) trong hai trường hợp

- a). M ở giữa C và D .
- b). M ở ngoài C và D .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 38. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và CD . Trên tia đối của tia DS lấy điểm E . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 39. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC . Giả sử AD và BC không song song.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

Lời giải

Ví dụ 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC . Trong tam giác BCD lấy điểm M sao cho hai đường thẳng KM và CD cắt nhau. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) .

Lời giải

Ví dụ 41. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Tính diện tích thiết diện của tứ diện với (MNP) .

Lời giải

Ví dụ 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SD và OC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SAC) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (MNP) .
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

Ví dụ 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng với D qua C , K là điểm đối xứng với D qua B . Tính diện tích thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) .

Lời giải

 Ví dụ 44. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .

- Tìm giao điểm của MN với (SAC) .
- Tìm giao điểm của SC với (AMN) .
- Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .

Lời giải

Ví dụ 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD .

- Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .
- Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

Lời giải

Ví dụ 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm $\triangle SAD$

- Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I ở trên đường thẳng CD và $IC = 2ID$.
- Tìm giao điểm J của (OMG) với AD . Tính $\frac{JA}{JD}$.
- Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Tính $\frac{KA}{KS}$.
- Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp.

Lời giải

Ví dụ 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC .

- Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.
 - Tìm giao điểm của SA và (MNP) .
 - Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) .
- Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD .

Lời giải

Ví dụ 48. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .

b). Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .

c). Gọi N là trung điểm của AD , tìm thiết diện tạo bởi $mp(MNP)$ và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

- A. Tam giác MNE .
- B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
- C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

- A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.
- B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK \parallel MN$.
- C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.
- D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải.

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ($a > 0$). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

- A.** a^2 . **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải.

[illegible]

Câu 29. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

[illegible]

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

- A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Câu 31. (THPT Chuyên Trần Phú 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD . E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là

- A.** Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

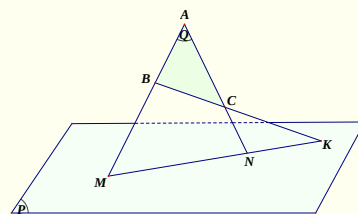
Lời giải

DANG 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy.

1. Phương pháp .

1.1 Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng:

- Ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) .
- Rồi suy ra ba điểm A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.



1.2 Chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Ta tìm giao điểm của hai đường thẳng trong ba đường thẳng đã cho, rồi chứng minh giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ ba. Cụ thể như sau:

Chứng minh 3 đường thẳng $(a), (b), (c)$ đồng quy tại một điểm.

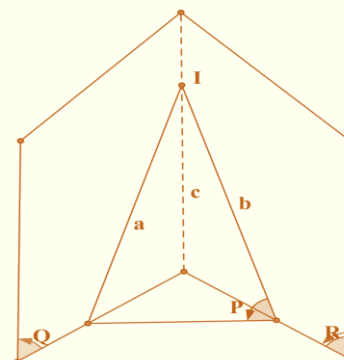
- ✦ Chọn một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (a) và (b) .

Gọi $\{I\} = a \cap b$.

- ✦ Tìm một mặt phẳng(Q) chứa đường thẳng (a), tìm một mặt phẳng (R) chứa đường thẳng (b) , sao cho

$$c = (Q) \cap (R) \Rightarrow I \in (c) \quad .$$

- ✦ Vậy 3 đường thẳng $(a), (b), (c)$ đồng quy tại điểm I .



$$\left\{ \begin{array}{l} a, b \subset mp(P) \\ a \cap b = \{I\} \\ mp(P) \cap mp(Q) = a \Rightarrow a \cap b \cap c = \{I\}. \\ mp(P) \cap mp(R) = b \\ mp(Q) \cap mp(R) = c \end{array} \right.$$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 49. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M; N; P$ lần lượt là các điểm thuộc cạnh $AB; AC; BD$. $MN \cap BC = I$; $MP \cap AD = J$; $NJ \cap IP = K$. Chứng minh $C; D; K$ thẳng hàng.

Lời giải

[illegible]

 **Ví dụ 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC .

Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

- b). Cho AN cắt DM tại I . Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 51.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD .

Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .

- a). Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
b). Chứng minh: SO, AM, BN đồng quy.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 52. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi $E; F; H$ lần lượt là các điểm thuộc cạnh $SA; SB; SC$.

- Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.
- $AC \cap BD = O; EH \cap FK = I$. Chứng minh: S, I, O thẳng hàng.
- $AD \cap BC = M; EK \cap FH = N$. Chứng minh: S, M, N thẳng hàng.
- $AB \cap CD = P; EF \cap HK = Q$. Chứng minh: A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải

Ví dụ 53. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB .

- Tìm giao tuyến của hai mp(SBI) và (SAC). Tìm giao điểm K của IJ và mp(SAC).
- Tìm giao tuyến của hai mp(SBD) và (SAC). Tìm giao điểm L của DJ và mp(SAC).
- Cho AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M . Chứng minh rằng: A, K, L, M thẳng hàng.

Lời giải

Ví dụ 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E, AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .
- Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) .
- Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.
- Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.

Lời giải

This image shows a full page of blank primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed for handwriting practice. Each set consists of three lines: a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line. These sets are repeated down the entire page, providing ample space for practicing letter formation and alignment. The paper is otherwise completely blank, with no text or other markings.

Ví dụ 55. Cho tứ diện $S.ABC$ với I trung điểm của SA , J là trung điểm của BC . Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC .

- Xác định giao điểm P của MC và $mp(SAB)$.
- Tìm giao tuyến của $mp(SMP)$ và $mp(ABC)$.
- Tìm giao điểm E của MN và $mp(ABC)$.
- Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

- a). Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (MNP) .
b). Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP) .
c). Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD .
Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

- Tìm giao tuyến của (BMN) với các mp $(SAB), (SBC)$
- Tìm $I = SO \cap (BMN), K = SD \cap (BMN)$
- Tìm $E = AD \cap (BMN), F = CD \cap (BMN)$
- Chứng minh rằng: B, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Ví dụ 58. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD .

- Tìm giao điểm I của BN và (SAC)
- Tìm giao điểm J của MN và (SAC)
- Chứng minh: I, J, C thẳng hàng.
- Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

Lời giải

Ví dụ 59. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB . Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC, JB = 3JD$.

- 1). Tìm giao điểm E của AD và (IJK) .
- 2). Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .
- 3). Gọi O là giao điểm của d với CD . Chứng minh I, O, E thẳng hàng.
- d). Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}, \frac{OC}{OD}$.

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC , $O = AC \cap BD$.

- Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD) .
- Tìm giao điểm P của DN và (SAB) .
- Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh 3 điểm S, K, O thẳng hàng. Tính $\frac{KS}{KO}$.

Lời giải

[illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A.** I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Lời giải.

Câu 33. Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh lần lượt tại . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. K, I, J . B. M, I, J . C. N, I, J . D. M, K, J .

Lời giải.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$. B. A, J, M thẳng hàng.
C. J là trung điểm của AM . D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I , EG cắt AD tại H . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

- A.** CD, EF, EG . **B.** CD, IG, HF . **C.** AB, IG, HF . **D.** AC, IG, BD .

Lời giải.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.
B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.
C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

SBAI 2.

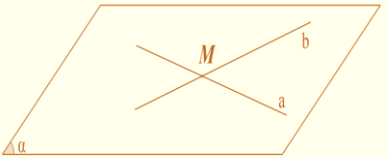
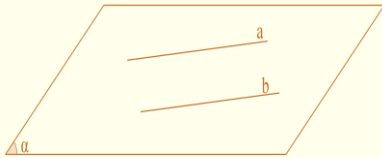
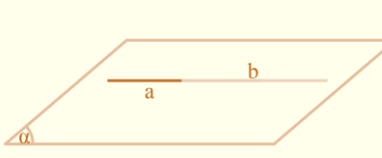
HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A-LÝ THUYẾT

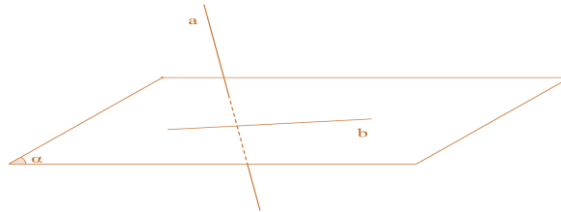
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Các trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b :

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa cả a và b , khi đó theo kết quả trong hình học phẳng ta có ba khả năng sau:

a và b cắt nhau tại điểm M , ta kí hiệu $a \cap b = \{M\}$.	a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a // b$.	a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.
		

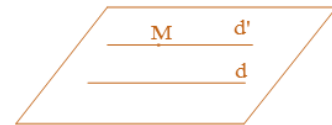
Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b , khi đó ta nói a và b là hai đường thẳng chéo nhau.



2. Tính chất

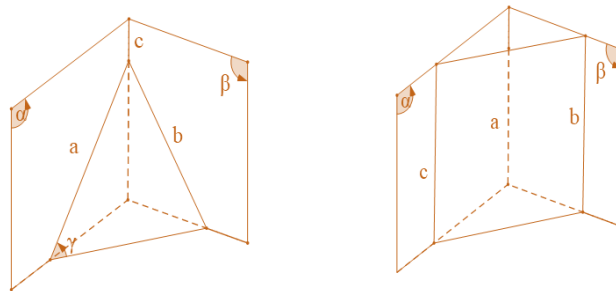
2.1. Định lí 1:(tiên đềƠ-clit)

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



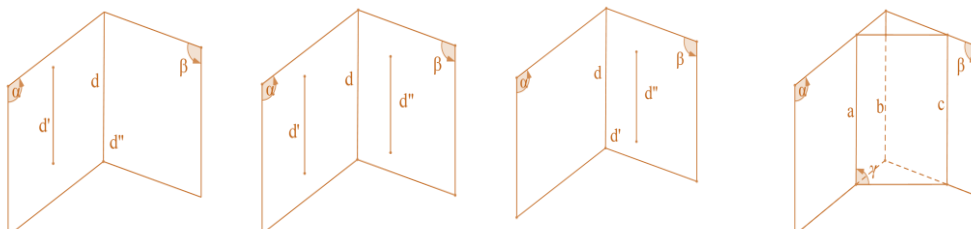
2.2. Định lí 2:

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



2.3. Hệ quả:

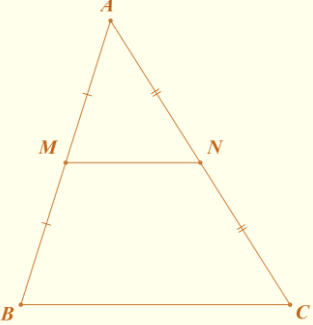
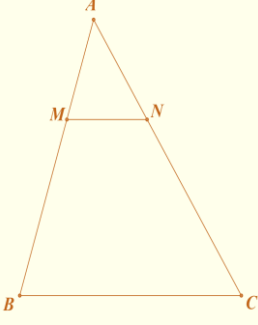
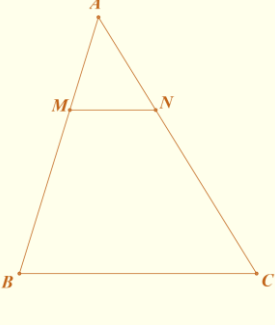
Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



2.4. Định lý 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

2.5 . Kiến thức bổ trợ.

Định lý đường trung bình	Định lý Ta - Lét	Định lý Ta - Lét đảo
Dấu hiệu: cho trung điểm Tam giác: Nếu $\begin{cases} MA = MB \\ NA = NC \end{cases} \Rightarrow MN // BC$	Dấu hiệu: cho tỉ số, trọng tâm. Tam giác: Nếu $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ thì $MN // BC$	Dấu hiệu: cho song song suy ra tỉ số, trọng tâm Tam giác: Nếu $MN // BC$ thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
		

B. PHÂN DẠNG VÀ VÍ DỤ MINH HỌA.

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

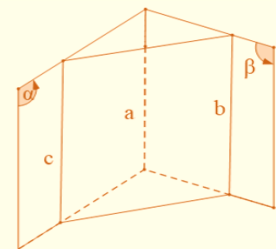
1. Phương pháp.

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể sử dụng một trong các cách sau

- **Cách 1.** Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (tính chất đường trung bình, định lý Talet đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba,...)
- **Cách 2.** Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- **Cách 3.** Áp dụng định lý về giao tuyến song song.

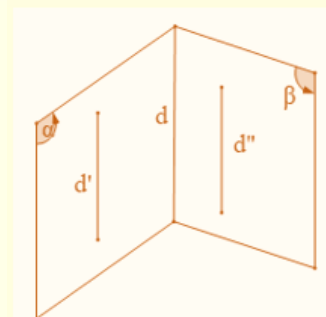
Định lý 2:

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Định lý 3:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

a). Chứng minh MN song song với CD .

b). Gọi P là giao điểm của SC và (ADN) và $I = AN \cap DP$. Chứng minh $SI // CD$

Lời giải.

Bài tập 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chứng minh $IJ \parallel CD$.

Lời giải.

Bài tập 3. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, BC lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4}$. Qua N kẻ đường thẳng song song với CA cắt AB tại P . Chứng minh $MP \parallel SB$.

Lời giải.

Lời giải.

Lời giải

b). Giả sử AM cắt BP tại E ; CQ cắt DN tại F . Chứng minh $EF \parallel MN$ và tính EF theo a, b .

[illegible]

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC và SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q .

- a). Giả sử $MN \cap PQ = I$ và $AB \cap CD = E$. Chứng minh I, E, S thẳng hàng.
b). Giả sử $(IBC) \cap (IAD) = \Delta$ và $\Delta \subset (\alpha)$. Chứng minh $MQ \parallel NP \parallel BC \parallel AD$.

Lời giải

Bài tập 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Chứng minh $MN \parallel A'C$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

- A. Tam giác MNE .
- B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
- C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.
- D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

.....

.....

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
- B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
- C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải.

.....

.....

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải.

.....

.....

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
- D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải.

Câu 5. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A. Có thể song song hoặc cắt nhau.
- B. Cắt nhau.
- C. Song song với nhau.
- D. Chéo nhau.

Lời giải.

Câu 6. Cho ba mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1; (\beta) \cap (\gamma) = d_2; (\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :

- A. Đôi một cắt nhau.
- B. Đôi một song song.
- C. Đồng quy.
- D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải.

Câu 7. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :

- A. Trùng nhau hoặc chéo nhau.
- B. Cắt nhau hoặc chéo nhau.
- C. Chéo nhau hoặc song song.
- D. Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải.

Câu 8. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$.

Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.
- B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
- C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.
- D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Lời giải.

Câu 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b . Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b ?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Câu 10. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. IJ song song với CD . B. IJ song song với AB .
C. IJ chéo CD . D. IJ cắt AB .

Lời giải.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- A. MP và RT . B. MQ và RT . C. MN và RT . D. PQ và RT .

Lời giải.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. EF . B. DC . C. AD . D. AB .

Lời giải.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

- A. $MP \parallel NQ$. B. $MP \equiv NQ$. C. MP cắt NQ . D. MP, NQ chéo nhau.

Lời giải.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1.. Phương pháp.

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ngoài phương pháp “Tìm hai điểm **chung**”, ta sử dụng định lý về giao tuyến như sau

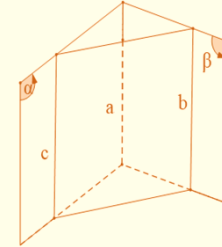
Bước 1. Chỉ ra hai mặt phẳng (α) và (β) lần lượt chứa hai đường thẳng **song song** a và b .

Bước 2. Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

Bước 3. Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a \parallel b$.

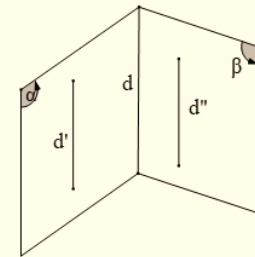
Định lý 2:

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Định lý 3:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



2. Bài tập minh họa.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của:

a). Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b). Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB , AC lần lượt lấy M , N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BD ; G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNG) .

Lời giải

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC .

- Tìm giao điểm N của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) . Tứ giác $ABMN$ là hình gì?
- Gọi $I = AN \cap BM$. Chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định khi M chạy trên cạnh SC

Lời giải

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , N là trung điểm SG . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SCD) .

Lời giải

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, AC và P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $BP = 3AP$.

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

b). Gọi E, F là hai điểm nằm trong hai tam giác SAD và SBC . Tìm giao điểm của đường thẳng EF với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- | | |
|--|--|
| A. d qua S và song song với BC . | B. d qua S và song song với DC . |
| C. d qua S và song song với AB . | D. d qua S và song song với BD . |

Lời giải.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| A. qua I và song song với AB . | B. qua J và song song với BD . |
| C. qua G và song song với CD . | D. qua G và song song với BC . |

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi (ACI) lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB .

Giao tuyến của (SAB) và S , $SB = 8$. là

- A. SC .
- B. đường thẳng qua S và song song với AB .
- C. đường thẳng qua G và song song với DC .
- D. đường thẳng qua G và cắt BC .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Thiết diện chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

1. Phương pháp.

Để tìm thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

- Cắt ngoài, cắt trong.
- Sử dụng hệ quả hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Sử dụng định lý ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc song song

2. Ví dụ minh họa.

Bài tập 15. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng $6a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC . Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$.

- a). Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) .

Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

- b). Tính diện tích thiết diện theo a .

Lời giải

.....

Bài tập 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh BC và BD ; E là một điểm thuộc cạnh AD (E khác A và D).

- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJE).
- Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.
- Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và vị trí điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

Lời giải

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác đều. Cho $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB ; M là điểm trên cạnh AD . Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N .

- Chứng minh $HKNM$ là hình thang cân.
- Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$), tính diện tích tứ giác $HKNM$ theo a và x . Tìm x để diện tích đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Bài tập 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Mặt bên SAB là tam giác đều, góc $SAD = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC .

- Tìm giao điểm I của Dx với mặt phẳng (SAB) .
- Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AIC) . Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC ; G là trọng tâm của tam giác SAB .

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) .

b). Tìm điều kiện của AB và CD để thiết diện của $IN \parallel (ABC)$ và hình chóp là một hình bình hành.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (T) là hình chữ nhật.
- B. (T) là tam giác.
- C. (T) là hình thoi.
- D. (T) là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:

- A. $6\sqrt{2}$.
- B. $8\sqrt{2}$.
- C. $10\sqrt{2}$.
- D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật. C. Hình vuông. D. Hình thoi.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Chọn khẳng định đúng ?

- A. $AD = 3DS$. B. $AD = 2DS$. C. $AS = 3DS$. D. $AS = DS$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD . B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .
 C. A_1 là trực tâm tam giác BCD . D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

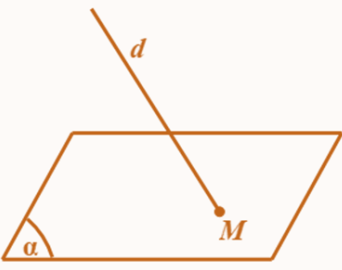
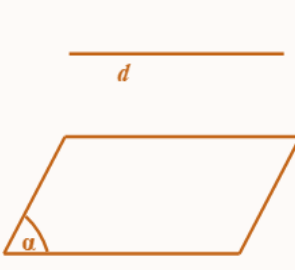
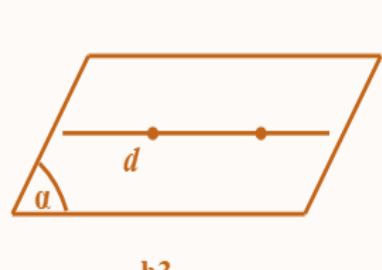
SBÀI 3.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

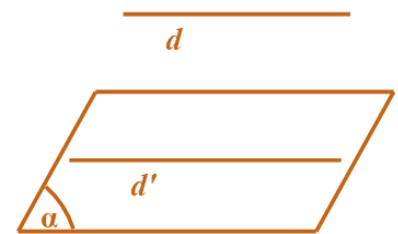
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) , ta có ba vị trí tương đối giữa chúng là:

d và (α) cắt nhau tại điểm M	d song song với (α)	d nằm trong (α)
Kí hiệu $\{M\} = d \cap (\alpha)$ hoặc đơn giản kí hiệu $M = d \cap (\alpha)$	Kí hiệu $d \parallel (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \parallel d$	Kí hiệu $d \subset (\alpha)$ (h3)
		
h1	h2	h3

2. Các định lí và tính chất.

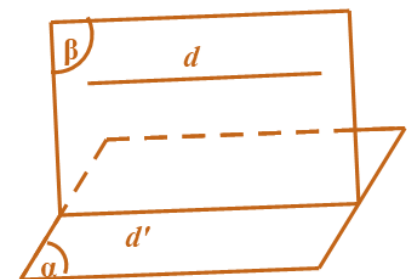
Tính chất 1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \Rightarrow d \parallel (\alpha) \\ d' \subset (\alpha) \end{cases}$



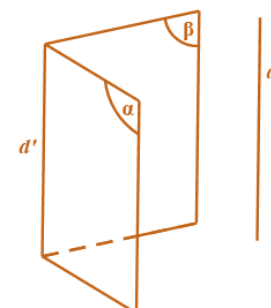
Tính chất 2. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' \parallel d$.

Vậy $\begin{cases} d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \Rightarrow d' \parallel d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$

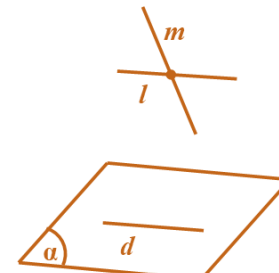


Tính chất 3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Vậy $\begin{cases} (\alpha) \parallel d \\ (\beta) \parallel d \Rightarrow d' \parallel d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$



Tính chất 4. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$.

a). Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N . Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.

b). Chứng minh $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$.

a). Chứng minh $MN \parallel (ABCD)$. b). $SD \parallel (MNP)$. c). $NP \parallel (SCD)$.

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB .

- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng : (ABM) và (SCD) ; (SMN) và (ABC) .
- Chứng minh $MN \parallel (ABC)$.
- Gọi d là giao tuyến của (SCD) và (ABM) còn I, J lần lượt là các giao điểm của d với SD, SC . Chứng minh $IN \parallel (ABC)$.
- Tìm các giao điểm P, Q của MC với (SAB) , AN với (SCD) .
Chứng minh S, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.

[illegible]

[illegible]

Bài tập 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. I, G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , ACC' và $A'B'C'$. Chứng minh

- a). $IG \parallel (ABC')$.
b). $GK \parallel (BB'C'C)$.

Lời giải.

[illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // b, b // (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a // (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$. C. a cắt (α) . D. $a // (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải.

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a // b$. B. a, b chéo nhau.
C. $a // b$ hoặc a, b chéo nhau. D. a, b cắt nhau.

Lời giải.

Câu 4. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $b // (\alpha)$ thì $b // a$.
B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
C. Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$.
D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Lời giải.

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a // (\alpha)$ và $b // (\alpha)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. a và b không có điểm chung.
B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
D. a và b chéo nhau.

Lời giải.

Câu 6. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
- B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
- C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
- D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải.

Câu 7. Cho $d // (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khi đó:

- A. $d // d'$.
- B. d cắt d' .
- C. d và d' chéo nhau.
- D. $d \equiv d'$.

Lời giải.

Câu 8. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. Vô số.

Lời giải.

Câu 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
- B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (M là điểm cho trước).
- D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

Lời giải.

Câu 10. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
- B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
- C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
- D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $MN // mp(ABCD)$. **B.** $MN // mp(SAB)$. **C.** $MN // mp(SCD)$. **D.** $MN // mp(SBC)$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:
A. MN nằm trên $mp(ABCD)$. **B.** MN cắt $mp(ABCD)$.
C. MN song song $mp(ABCD)$. **D.** MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $MN // (BCD)$. **B.** $GQ // (BCD)$.
C. MN cắt (BCD) . **D.** Q thuộc mặt phẳng (CDP) .

Lời giải.

[illegible]

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai

A. $OO_1 \parallel (BEC)$.
B. $OO_1 \parallel (AFD)$.
C. $OO_1 \parallel (EFM)$.
D. MO_1 cắt (BEC) .

Lời giải.

[illegible]

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S . **B.** M, P, R, S . **C.** M, R, S, N . **D.** M, N, P, Q .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

DẠNG 2. DƯNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

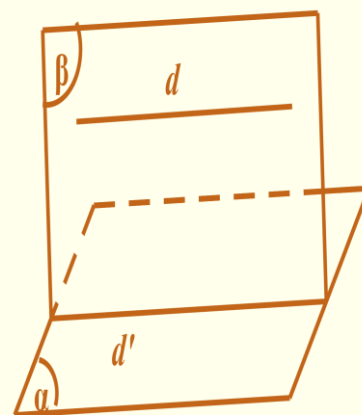
1. Phương pháp:

Ta sử dụng hai định lý sau.

✦ **Định lý 1.** Thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau

✦ **Định lý 2.** Thiết diện của mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng (*một điểm*) và song song với một đường thẳng. Cụ thể

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \parallel d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d' \parallel d, M \in d'$$



Trong quá trình thực hành, ta tiến hành các bước:

❖ **Bước 1.** Nhận dạng là cho một mặt phẳng (α) chứa một điểm M hay hai điểm M, N và song song với đường thẳng d .

✧ **Bước 2.** Ta phải đi tìm một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và chứa điểm M hoặc N (*điểm chung*).

✧ **Bước 3.** Suy ra giao tuyến là đường thẳng đi qua M hoặc N và song song với đường thẳng d .

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua O , song song với AB và SC .

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD , (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA .

a). Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) .

b). Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

[illegible]

Lời giải.

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên hai cạnh SB và CD , (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với SC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α)

Lời giải.

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x$ ($0 < x < a$), (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB .

a). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) .

b). Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 12. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC , sao cho $MA = PC = x$, ($0 < x < a$). Một mặt phẳng qua MP song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

- a). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.
b). Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

a). $OO' \parallel (BCD)$ là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$.

b). $OO' \parallel (CBD)$ và $OO' \parallel (ACD)$ là $BC = BD$ và $AC = AD$.

Lời giải.

Chứng minh A, K, J nằm trên một đường thẳng song song với EF .

Tel: 0935.660.880

Lời giải.

[illegible]

a). Tứ giác $ABMN$ là hình gì?
b). Chứng minh giao điểm I của AM và BN luôn thuộc một đường thẳng cố định.
c). Chứng minh giao điểm K của AN và BM luôn thuộc một đường thẳng cố định và $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK}$ không đổi.

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

a). Chứng minh $AB' \parallel (A'IC)$.

b). M là một điểm thuộc cạnh $A'C'$, $AM \cap A'C = P, B'M \cap A'I = Q$.

Chứng minh $PQ \parallel AB'$. Tìm vị trí của M để $S_{\Delta A'PQ} = \frac{2}{9} S_{\Delta A'CI}$.

Lời giải.

b). Tính diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi (MIJ).

[illegible]

D. Thiết diện là hình chữ nhật.

Tel: 0935.660.880

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

- A. $\frac{400}{9}$. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD . Thiết diện của (P) và hình chóp là

- A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình chữ nhật. D. Hình tam giác.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD . M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD . (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

- A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình chữ nhật. D. Hình vuông

Lời giải.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC thỏa $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB . Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

- A. Hình thang. B. Hình bình hành. C. Hình tam giác. D. Tam giác đều.

Lời giải.

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Lời giải

[illegible]

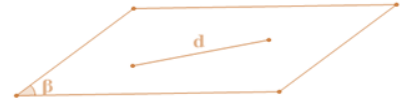
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB .

- Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.
- Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$.
- Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD là S .

Lời giải

[illegible]

Định lý 2: Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (β) có một và chỉ một mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng đã cho.



3. Một số Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) .

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.

Hệ quả 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) .

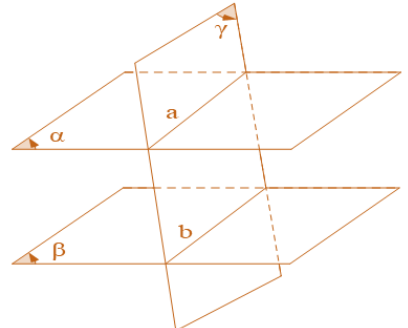
Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng qua A song song với (α) .



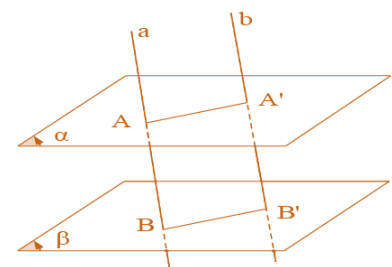
$$\text{Vậy } \begin{cases} A \notin (\alpha), A \in (\beta) \\ A \in d \\ d \parallel (\alpha) \\ (\beta) \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \subset (\beta).$$

Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

$$\text{Vậy } \begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\delta) \cap (\alpha) = a \end{cases} \Rightarrow (\delta) \cap (\beta) = b \parallel a.$$



Hệ quả 4: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.



3. Định lý Ta-lét (Thales)

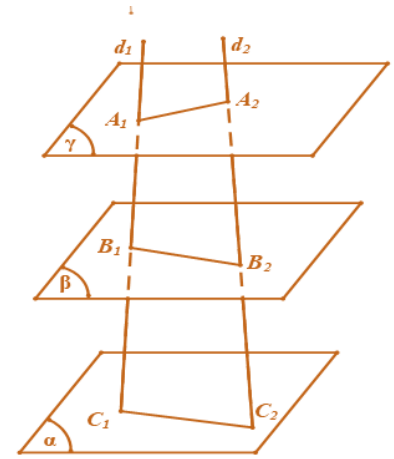
3.1. Định lý Ta-lét (Thales) thuận: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\chi) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\chi) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\chi) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}.$$

3.2. Định lí Ta-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1 , các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.



4. Hình lăng trụ và hình chóp cụt.

4.1. Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α') .

Trên (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$.

Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

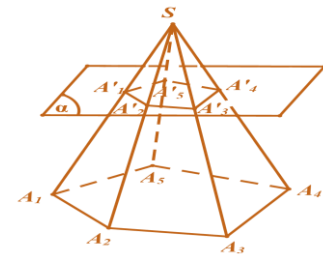
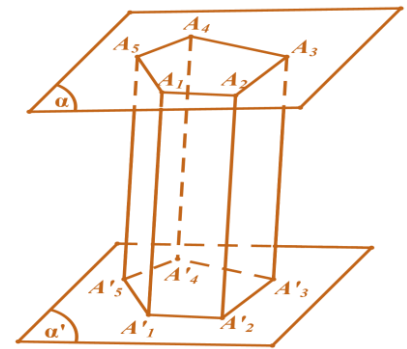
Lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

4.2. Hình chóp cụt.

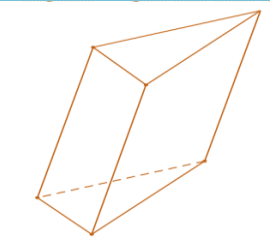
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Một mặt phẳng không đi qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh bên $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

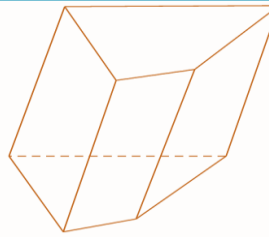
Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1, A'_2A'_3A_3A_2, ..., A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$.



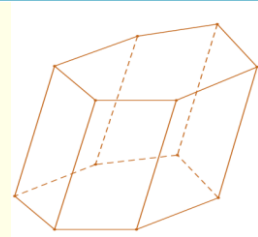
Người ta gọi tên hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy



Hình lăng trụ tam giác



Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

Nhận xét:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

- Tìm giao tuyến của hai mp $(A'B'C')$ và (ABC) .
- Chứng minh rằng $CB' \parallel (AHC')$.

Lời giải

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.

1. Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng song song ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

- **Hướng 1:** Chứng minh trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

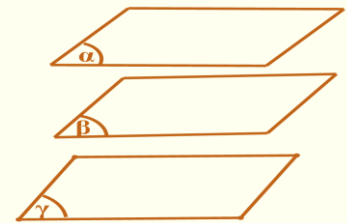
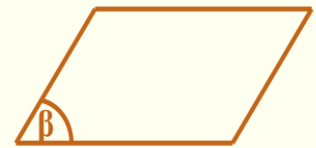
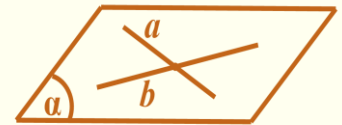
$$\text{Vậy } \begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

- **Hướng 2:** Chứng minh hai mặt phẳng đó cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

$$\text{Vậy } \begin{cases} (\alpha) \parallel (\gamma) \\ (\beta) \parallel (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Nhớ.

- Đường trung bình (cho trung điểm)
- Định lý Ta-Lét (cho tỉ lệ, trọng tâm)
- Sử dụng định lý hai mặt phẳng chứa hai đường song song.



2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB .
Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$ và $(MOR) \parallel (SCD)$.

Lời giải.

[illegible]

Lời giải

[illegible]

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Các tam giác SAD và ABC cùng cân tại A . Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Lời giải

Bài tập 4. Cho các hình bình hành $ABCD, ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau có chung cạnh AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD và BC ; I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE . Chứng minh $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Lời giải

b). $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features horizontal dashed lines spaced evenly down the page. Vertical dotted lines divide the page into three main sections: a narrow left margin, a wide central writing area, and a narrow right margin. The entire page is white with no text or other markings.

b). $(MNKH) \parallel (DEF)$.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Bài tập 7.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC' . Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB)$.

Lời giải

a). Chứng minh rằng $(A'BD) \parallel (CB'D')$.

Lời giải

[illegible]

Lời giải.

[illegible]

Câu 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).
- B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
- C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
- D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Lời giải.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .
- C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D. Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Lời giải.

Câu 4. Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β) .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Câu 5. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q) . Gọi I là trung điểm của MN . Chọn khẳng định đúng.

A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P) .

D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P) .

Lời giải.

Câu 6. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ?

A. $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.

B. $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.

C. $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

D. $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Lời giải.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.
- B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.
- C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D. Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải.

Câu 8. Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
- B. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.
- C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.
- D. a và b chéo nhau.

Lời giải.

Câu 9. Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.
- C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D. Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Lời giải.

Câu 10. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. p và q cắt nhau.
- B. p và q chéo nhau.
- C. p và q song song.
- D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (NOM) cắt (OPM) .
 B. $(MON) // (SBC)$.
 C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.
 D. $(NMP) // (SBD)$.

Lời giải.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.
 B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
 C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.
 D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải.

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
 B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
 C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
 D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một song song.
- B. Các cạnh bên của hình chóp cắt là các hình thang.
- C. Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.
- D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Lời giải.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Trong hình chóp cắt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- B. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.
- C. Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.
- D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

Lời giải.

Câu 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\Delta \parallel AB$.
- B. $\Delta \parallel AC$.
- C. $\Delta \parallel BC$.
- D. $\Delta \parallel AA'$.

Lời giải.

Câu 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (AHC') .
- B. $(AA'H)$.
- C. (HAB) .
- D. $(HA'C)$.

Lời giải.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. CB' . B. BB' . C. BC . D. BA' .

Lời giải.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$. B. $AA_1 // (BCC_1)$.
C. $AB // (A_1B_1C_1)$. D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải.

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $ABCD$ là hình bình hành.
B. Các đường thẳng A_1C , AC_1 , DB_1 , D_1B đồng quy.
C. $(ADD_1A_1) // (BCC_1B_1)$.
D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $(AA'B'B) // (DD'C'C)$.

B. $(BA'D') // (ADC')$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành.

D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải.

DẠNG 2. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp khi biết (α) đi qua điểm $M, N...$ và song song với một mặt phẳng (β) cho trước.

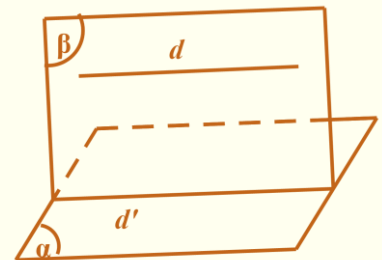
1. Phương pháp:

Xác định thiết diện ta sử dụng các tính chất sau.

➤ **Phương pháp 1:** Chuyển về định lý một đường thẳng song song với một mặt phẳng:

Khi $(\alpha) // (\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng nằm trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với

đường thẳng (§3). Vậy
$$\begin{cases} d // (\alpha) \\ d \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' // d$$



3. Bài tập minh họa.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

a). Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b). Gọi Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN) .

c). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD) .

Lời giải.

Lời giải

[illegible]

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$. Mặt phẳng (α) di động và song song với (SAB) đồng thời cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q .

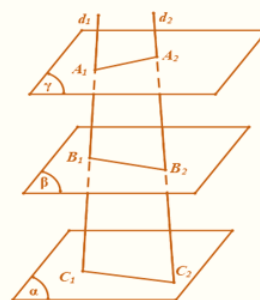
a). Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b). Đặt $x = AM$, với $0 < x < a$. Tìm x để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải

DẠNG 3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT.

Định lí Thales từng được ứng dụng nhiều trong các bài toán tỉ số hay các bài toán chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng cố định.



Bài tập 14. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD thỏa

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}.$$

- a). Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- b). Cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .
- c). Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

[illegible]

Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

- b).** Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

[illegible]

DẠNG 4. CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CÙNG NẪM TRÊN MỘT MẶT PHẪNG(ĐỒNG PHẪNG)

1. Phương pháp:

- Để chứng minh các đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng ta chứng minh các đường thẳng đó cùng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng.
- Để chứng minh 4 điểm đồng phẳng ta chứng minh các điểm đó thuộc các đường thẳng mà các đường thẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng nào đó.
- Ngoài ra sử dụng định lý Menelaus trong không gian để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.

1. Định lý Menelaus

- Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA của tứ diện $ABCD$ (M, N, P, Q khác với A, B, C, D) thì M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 16. Chứng minh định lý Menelaus.

Lời giải.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB, SAC, SBC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.

Bài tập 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (M, N, P, Q khác với các đỉnh của tứ diện) sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC}$ và $\frac{NB}{NC} = \frac{QA}{QD}$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải.

Lời giải.

Lời giải.

Lời giải.

Lời giải.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một $mp(P)$ song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

- A. Hình hình hành. B. Tam giác cân. C. Tam giác vuông. D. Tam giác đều.

Lời giải.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $BAC = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{16}{9}$. B. $\frac{14}{9}$. C. $\frac{25}{9}$. D. 1.

Lời giải.

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. 2. D. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

[illegible]

A. $5\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{5}$. C. 12. D. 13.

[illegible]

Câu 29. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây không sai?

A. (T) là hình chữ nhật.

B. (T) là hình bình hành.

C. (T) là hình thoi.

D. (T) là hình vuông.

Lời giải.

Câu 30. Cho hình chóp cắt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.