

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
b) Tìm m để đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu 2. (1,0 điểm)

- a) Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $\sin \alpha - \cos \alpha$.
b) Tìm số phức z biết rằng $z + 2\bar{z} = 6 + 2i$.

Câu 3. (0,5 điểm) Giải phương trình $2\log_2^2(x-3) + \log_2(x-3) = 1$.

Câu 4. (1,0 điểm) Giải phương trình $2x^3 + 9x^2 - 6x(1 + 2\sqrt{6x-1}) + 2\sqrt{6x-1} + 8 = 0$.

Câu 5. (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^1 (x^2 + x.e^x) dx$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, với $AB = 2a$, $AD = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Câu 7. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có $B(-2; 1)$ và $C(8; 1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r = 3\sqrt{5} - 5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, biết tung độ điểm I là số dương.

Câu 8. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + y - z + 6 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $K(0; 1; 2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa trục Oy và vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 9. (0,5 điểm) Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau được ghi số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp đó, tính xác suất để 5 quả cầu được chọn ra có 3 quả ghi số lẻ và 2 quả ghi số chẵn, trong đó có đúng một quả ghi số chia hết cho 4.

Câu 10. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương $a; b; c$ tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a} + 3bc} + \frac{\sqrt{b^3a}}{2\sqrt{c^3b} + 3ca} + \frac{\sqrt{c^3b}}{2\sqrt{a^3c} + 3ab}.$$

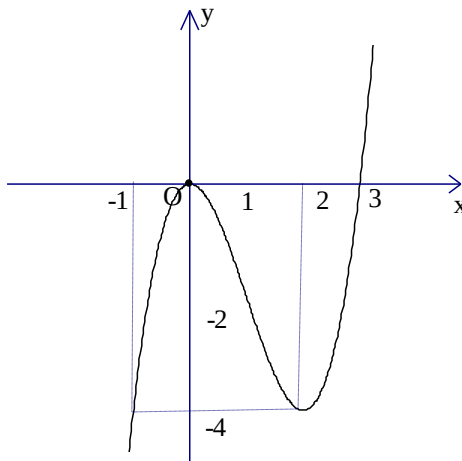
----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

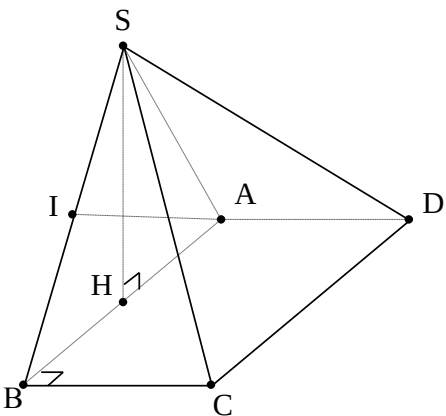
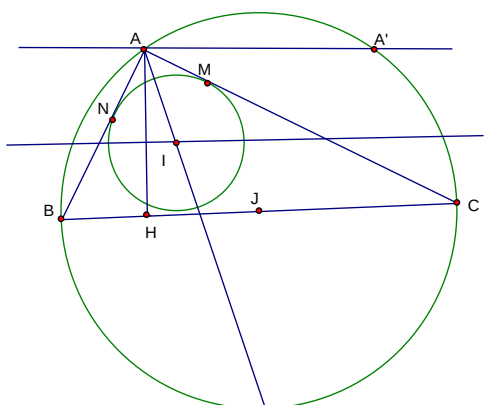
Số báo danh: Phòng thi:

Giám thị 1:

Giám thị 2:

Câu	Nội dung	Điểm																	
Câu 1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)																		
	* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$	0,25																	
	* Sự biến thiên $y' = 3x^2 - 6x$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ;0)$, $(2 ;+\infty)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại : $y(0) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu: $y(2) = -4$.	0,25																	
	Bảng biến thiên	0,25																	
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>0</td><td></td><td>-4</td><td></td></tr></table> $-\infty \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y		0		-4		
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$														
y'	+	0	-	0	+														
y		0		-4															
* Đồ thị :		0,25																	
b) (1,0 điểm)																			
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = mx$ là : $x^3 - 3x^2 = mx$	0,25																		
$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x - m = 0 (*) \end{cases}$	0,25																		
Đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0, tức là:	0,25																		
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$	0,25																		
$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{9}{4} \text{ và } m \neq 0.$	0,25																		

Câu 2 (1 điểm)	a) Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$ $\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	0.25
	Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin \alpha < \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha < 0$ nên chọn $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.25
	b) •Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$ Khi đó: $z + 2\bar{z} = 6 + 2i \Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = 6 + 2i$	0.25
	$\Leftrightarrow a + bi + 2a - 2bi = 6 + 2i$ $\Leftrightarrow 3a - bi = 6 + 2i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - 2i$	0.25
Câu 3 0.5 điểm	$2\log_2^2(x-3) + \log_2(x-3) = 1$; điều kiện $x > 3$ Đặt $t = \log_2(x-3)$ khi đó phương trình trở thành: $2t^2 + t - 1 = 0$ $\Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = \frac{1}{2}$	0.25
	Với $t = -1$ thì $\log_2(x-3) = -1 \Leftrightarrow x-3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ (thỏa điều kiện) Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\log_2(x-3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2}$ (thỏa điều kiện) Phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{7}{2}; x = 3 + \sqrt{2}$	0,25
Câu 4 (1,0 điểm)	Giải phương trình: $2x^3 + 9x^2 - 6x(1 + 2\sqrt{6x-1}) + 2\sqrt{6x-1} + 8 = 0$ (1)	
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{6}$ (*) (1) $\Leftrightarrow 2x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = 2(6x-1)\sqrt{6x-1}$ (2)	0,25
	Đặt $y = \sqrt{6x-1}$, $y \geq 0$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = 2y^3 \\ 18x - 3 = 3y^2 \end{cases}$ Suy ra: $2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 = 2y^3 + 3y^2$ $\Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 = 2y^3 + 3y^2$ (3)	0,25
	Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t^2$, với $t \geq 0$. $f'(t) = 6t^2 + 6t > 0$, $\forall t > 0$ và $f(t)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. $x \geq \frac{1}{6} \Rightarrow x+1 > 0$ (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$	0,25
	Từ đó: $\sqrt{6x-1} = x+1$ $\Leftrightarrow 6x-1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$ (thỏa (*)) Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm: $x = 2 + \sqrt{2}$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.	0,25

Câu 5 (1,0 điểm)	$I = \int_0^1 (x^2 + x.e^x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x e^x dx$	0.25
	Tính $I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	0.25
	Và $I_2 = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$	0.25
	Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3}$	0.25
Câu 6 (1,0 điểm)	 * Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tam giác SBC đều cạnh a nên: SH $\perp$ AB $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB; SH \subset (SAB) \end{cases}$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$	0,25
	SH = $a\sqrt{3}$ Thể tích khối chóp S.ABCD là: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$	0,25
	AD // BC $\Rightarrow$ AD // (SBC) $\Rightarrow$ d(D,(SBC))=d(A,(SBC))	0,25
	Gọi I là trung điểm cạnh SB. CM: AI $\perp$ (SBC). $\Rightarrow$ d(D,(SBC))=AI= $a\sqrt{3}$	0,25
Câu 7 1 điểm		
	Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Ta có BC = 10. Gọi M, N là các tiếp điểm trên AB, AC ta có p = BC + AM Mà AM = r nên $p = BC + r = 10 + 3\sqrt{5} - 5 = 3\sqrt{5} + 5$. Ta có S = pr = 20	0.25
	Gọi AH = h ta có S = $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = 20 \Rightarrow h = 4$ Do $r = 3\sqrt{5} - 5$ nên tâm I nằm trên đường thẳng song song BC, cách BC một khoảng bằng r, mà $y_I > 0$ nên I nằm trên đường $y = 3\sqrt{5} - 4$ và điểm A nằm trên đường $y = 5$ Gọi J là trung điểm BC $\Rightarrow J(3;1)$ và JA = $\frac{1}{2}$ BC nên A(0 ;5) hoặc A'(6;5).	0.25

	Ta xét $A(0;5)$ Ta có phtr AB: $2x - y + 5 = 0$; phtr AC: $x + 2y - 10 = 0$ Phtr phân giác trong AI: $3x + y - 5 = 0$. Ta có I là giao điểm của phân giác AI và đường $y = 3\sqrt{5} - 4$ nên tọa độ tâm $I(-\sqrt{5} + 3; 3\sqrt{5} - 4)$	0.25
	Với $A'(6;5)$ ta có $I'(\sqrt{5} - 3; 3\sqrt{5} - 4)$	0.25
Câu 8 1 điểm	* Bán kính mặt cầu $R = d(K; (P)) = \frac{5}{\sqrt{6}}$	0.25
	Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{25}{6}$	0.25
	* Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm; Trục Oy có vec tơ chỉ phương $\vec{j} = (0; 1; 0)$ Mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -1)$ Mặt phẳng (Q) có vec tơ pháp tuyến là: $\vec{n}_Q = [\vec{n}, \vec{j}] = (1; 0; 2)$	0.25
	Mặt phẳng (Q) còn qua gốc O nên có phương trình là: $x + 2z = 0$.	0.25
Câu 9 0.5 điểm	Không gian mẫu Ω là tập hợp các cách chọn 5 quả cầu từ 20 quả cầu: Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^5 = 15504$.	0.25
	Gọi A là biến cố chọn được 5 quả cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trong 20 số từ 1 đến 20 có 10 số lẻ, 5 số chẵn chia hết cho 4 và 5 số chẵn không chia hết cho 4. Do đó $n(A) = C_{10}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = 3000$ Vậy Xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3000}{15504} = \frac{125}{646}$	0.25
Câu 10 1 điểm	$P = \frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a} + 3bc} + \frac{\sqrt{b^3a}}{2\sqrt{c^3b} + 3ca} + \frac{\sqrt{c^3b}}{2\sqrt{a^3c} + 3ab}$ Với a ; b; c dương	0.25
	Ta có $\frac{\sqrt{a^3c}}{2\sqrt{b^3a} + 3bc} = \frac{a\sqrt{ac}}{b(2\sqrt{ba} + 3c)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{2\sqrt{\frac{b}{c}} + 3\sqrt{\frac{c}{a}}}$	
	Tương tự $\frac{\sqrt{b^3a}}{2\sqrt{c^3b} + 3ca} = \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2}{2\sqrt{\frac{c}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{b}}} \quad \frac{\sqrt{c^3b}}{2\sqrt{a^3c} + 3ab} = \frac{\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2}{2\sqrt{\frac{a}{b}} + 3\sqrt{\frac{b}{c}}}$ Do đó đặt: $x = \sqrt{\frac{a}{b}}; y = \sqrt{\frac{b}{c}}; z = \sqrt{\frac{c}{a}}; (x; y; z > 0)$ khi đó $xyz = 1$ Khi đó $P = \frac{x^2}{2y + 3z} + \frac{y^2}{2z + 3x} + \frac{z^2}{2x + 3y}$	0.25
	Ta có $\frac{x^2}{2y + 3z} + \frac{2y + 3z}{25} + \frac{y^2}{2z + 3x} + \frac{2z + 3x}{25} + \frac{z^2}{2x + 3y} + \frac{2x + 3y}{25} \geq \frac{2}{5}(x + y + z)$	0.25
	Nên $P = \frac{x^2}{2y + 3z} + \frac{y^2}{2z + 3x} + \frac{z^2}{2x + 3y} \geq \frac{1}{5}(x + y + z) \geq \frac{3}{5}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{5}$ Vậy $P_{\min} = \frac{3}{5}$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.	0.25

Chú ý: Những cách giải khác đáp án, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa. Tùy theo thang điểm của đáp mà giám khảo cho điểm tương ứng.