

MỘT SỐ ỨNG DỤNG HAY VỀ TỶ SỐ THỂ TÍCH TRONG VIỆC GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Từ khi Bộ Giáo Dục và Đào Tạo chuyển hướng sang thi trắc nghiệm, việc dạy và học môn toán cũng có sự thay đổi để đáp ứng đối với kì thi. Giáo viên phải dạy học sinh hiểu rõ bản chất và cách làm nhanh nhất để đi đến kết quả. Còn học sinh mong muốn mình giải quyết một bài toán với con đường đơn giản nhất và đáp số chính xác nhất. Sau đây tôi xin biên soạn lại một vấn đề rất hay gặp trong các kì thi thử và thi THPTQG, giúp các em học sinh giải quyết rất nhanh các bài toán liên quan đến thể tích khối đa diện..

I. KIẾN THỨC CƠ SỞ.

+) Hai hình chóp có cùng diện tích đáy thì tỷ số thể tích của chúng chính là tỷ số của đường cao và ngược lại.

+) Với khối chóp tam giác ta có tính chất quen thuộc sau.

Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Khi đó ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} (*)$.

Chứng minh.

Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của A, A' trên $mp(SBC)$.

$$V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{6} AH \cdot SB \cdot SC \cdot \sin BSC \quad \text{và}$$

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6} A'H' \cdot SB' \cdot SC' \cdot \sin B'SC'$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Đây là kết quả quen thuộc và nó là bài toán mở đầu cho rất nhiều ứng dụng hay sau này.

\

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT.

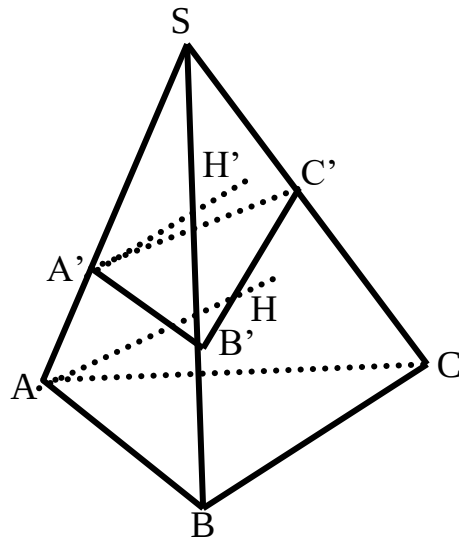
1. Tính chất 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Khi đó ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

Chứng minh.

$$\text{Đặt } V_{S.ABCD} = V \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = V_{S.BAD} = V_{S.BCD} = \frac{V}{2}$$



Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{V_{S.A'B'C'}}{\frac{V}{2}}$ và $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC}$

$$\Rightarrow \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}}{\frac{V}{2}} = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{\frac{V}{2}} \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{V_{S.B'A'D'} + V_{S.B'C'D'}}{\frac{V}{2}} = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{\frac{V}{2}} \quad (2)$$

Từ (1), (2)

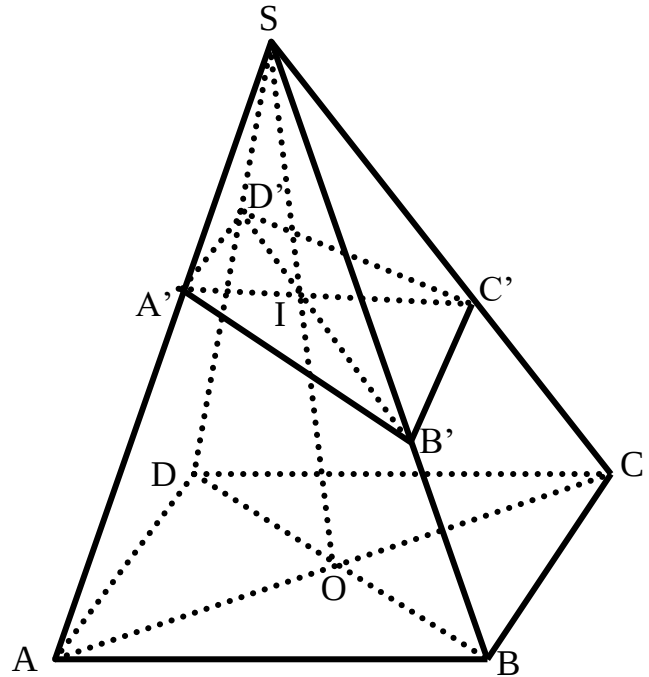
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \\ &= \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \quad (3) \end{aligned}$$

Nhân vào hai vế của (3) với

$$\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'} \quad \text{ta được}$$

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

Suy ra điều phải chứng minh.



Tính chất 1 ta chỉ áp dụng cho chóp có đáy là hình bình hành.

Việc chứng minh **Tính chất 1** như trên là ta đã áp dụng **tính chất (*)**. Tuy nhiên ta có thể chứng minh **Tính chất 1** nhanh gọn như sau :

Gọi O là tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và $(A'B'C'D')$.

Ta có $\frac{S_{SA'I}}{S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SCO}} = \frac{2S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \Leftrightarrow \frac{SA' \cdot SI}{SA \cdot SO} + \frac{SC' \cdot SI}{SC \cdot SO} = 2 \cdot \frac{SA' \cdot SC'}{SA \cdot SC}$. Nhân cả hai vế của đẳng thức sau

cho $\frac{SA \cdot SC \cdot SO}{SA' \cdot SC' \cdot SI}$ ta được $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$. Chứng minh tương tự ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

*) Cách chứng minh này còn cho ta kết quả mạnh hơn là

Kết quả 1 : Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Khi đó ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}.$$

Kết quả trên còn có thể được chứng minh bằng nhiều cách khác nữa. Nó là kết quả rất hay và được ứng dụng nhiều trong hình học không gian.

Tính chất 1 được ứng dụng rất nhiều trong bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện.

Đặt $x = \frac{SA}{SA'}$; $y = \frac{SB}{SB'}$; $z = \frac{SC}{SC'}$; $t = \frac{SD}{SD'}$ ($x, y, z, t > 0$) (**)

Vận dụng **Tính chất (*)** và **Tính chất 1** ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A'D'C'}}{2V_{S.ADC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xyz} + \frac{1}{xtz} \right) = \frac{y+t}{2xyz} = \frac{x+y+z+t}{4xyz} \text{ do } x+z=y+t. \text{ Ta có} \end{aligned}$$

Kết quả 2 : $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+y+z+t}{4xyzt}$ với x, y, z, t được xác định như (**).

Chú ý : Nếu A', B', C', D' lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD thì $x, y, z, t \geq 1$.

Kết quả 2 được áp dụng vào giải quyết các bài toán thể tích khối chóp có đáy là hình bình hành một cách rất nhanh gọn và đơn giản thay cho việc phải chia khối chóp tứ giác loại này thành các khối chóp tam giác để sử dụng **Tính chất (*)**

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB , điểm P thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2PD$. Mặt phẳng (AMP) cắt SC tại N . Tỷ số $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}$

bằng

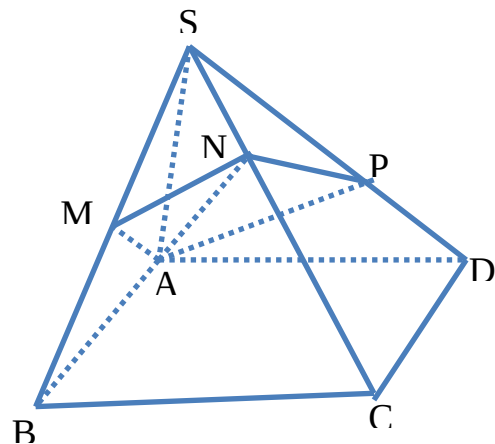
Giải.

Ta có

$$\frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SN} = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SP} \Leftrightarrow 1 + \frac{SC}{SN} = 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SC}{SN} = \frac{5}{2}$$

Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1 + 2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{7}{30}$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V , đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và SC hợp với đáy một góc bằng 30° . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC , cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại E, F, K . Thể tích khối chóp $S.AEFK$ bằng

Giải.

$$\text{Ta có } SA^2 = SE \cdot SB \Rightarrow \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SE}{SB} \Rightarrow \frac{SB}{SE} = \frac{SB^2}{SA^2}$$

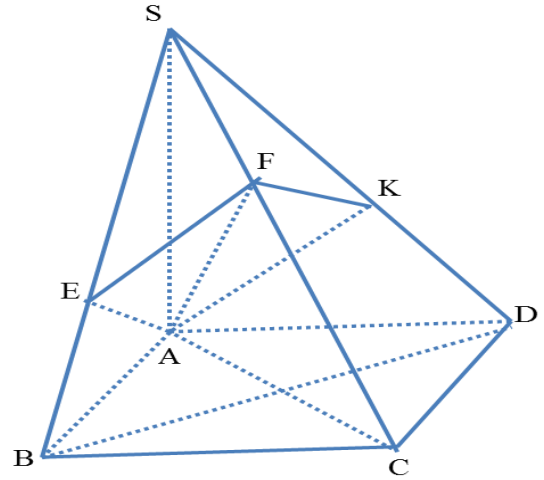
$$\text{Tương tự } \frac{SD}{SK} = \frac{SD^2}{SA^2} \text{ nên } \frac{SB}{SE} = \frac{SD}{SK}$$

$$\text{Mà } \frac{SC}{SF} = \frac{SC^2}{SA^2} = 4$$

(do $\triangle SCA$ vuông tại A , $\angle SCA = 30^\circ$)

$$\text{nên } \frac{SC}{SF} + 1 = \frac{SB}{SE} + \frac{SD}{SK} = 5 \Rightarrow \frac{SB}{SE} = \frac{SD}{SK} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{V_{S.AEFK}}{V_{S.ABCD}} = \frac{10}{4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{1}{10} \Rightarrow V_{S.AEFK} = \frac{V_{S.ABCD}}{10} = \frac{V}{10}.$$



Ví dụ 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và đi qua điểm M trên SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Tính tỷ số $k = \frac{SM}{SC}$.

Giải.

Gọi $N = (P) \cap SC$ ta có $\begin{cases} AB \subset (P) \\ AB \parallel CD \end{cases}$ nên $MN \parallel CD$.

$$\text{Ta có } k = \frac{SM}{SC} \Rightarrow \frac{SC}{SM} = \frac{SD}{SN} = \frac{1}{k}$$

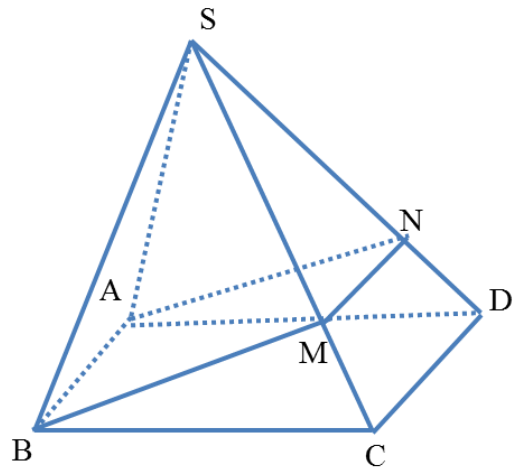
$$\text{Khi đó } \frac{V_{SABMN}}{V_{SABCD}} = \frac{1 + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}}{4 \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I nằm trên SC sao cho $IS = 2IC$. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AI cắt cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Gọi V', V lần lượt là thể tích

khối chóp $S.AMIN$ và $S.ABCD$. Tính giá trị nhỏ nhất của tỉ số thể tích $\frac{V'}{V}$

Giải.



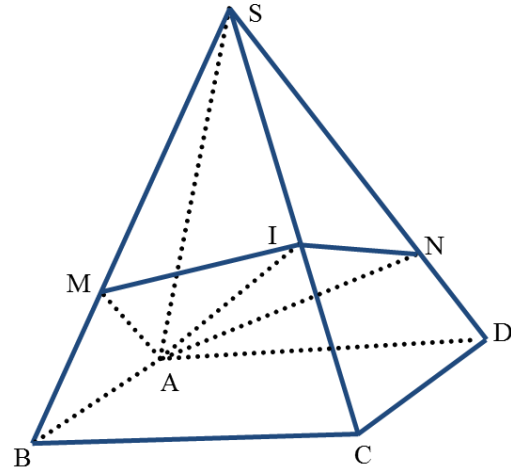
Đặt $\frac{SB}{SM} = x, \frac{SD}{SN} = y \Rightarrow x, y \geq 1$.

Ta có $\Rightarrow x + y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x + y = \frac{5}{2}$

Ta có

$$\frac{V'}{V} = \frac{x + y + 1 + \frac{3}{2}}{4x \cdot y \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{6xy} \geq \frac{5}{6 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2} = \frac{8}{15}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{5}{4}$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua B , trung điểm I của SO và cắt các cạnh SA, SC và SD lần lượt tại M, N và P . Tính GTNN và GTLN của tỷ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$.

Giải.

Đặt $\frac{SA}{SM} = x, \frac{SC}{SN} = y \Rightarrow x, y \geq 1$.

Ta có $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SN} = \frac{SB}{SB} + \frac{SD}{SP} = 2 \cdot \frac{SO}{SI} = 4$

Nên $\frac{SD}{SP} = 3; x + y = 4$. Từ đó

$$\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{8}{4 \cdot x \cdot y \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2}{3xy} = \frac{2}{3x(4-x)}$$

Từ $x + y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - y \leq 3$ vì $y \geq 1$.

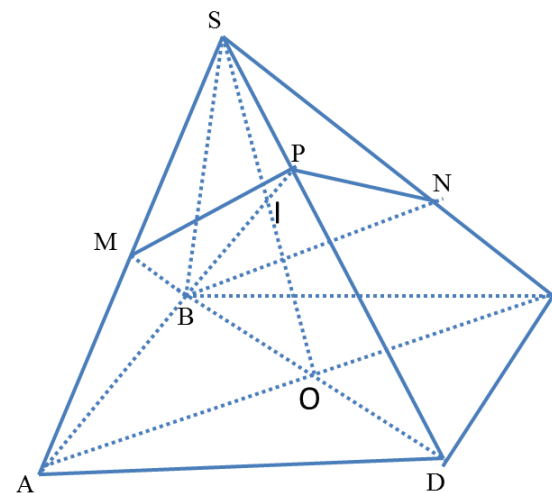
Xét

$$f(x) = \frac{2}{3x(4-x)}, 1 \leq x \leq 3 \quad f'(x) = \frac{2(4-2x)}{[3x(4-x)]^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có $f(1) = f(3) = \frac{2}{9}; f(2) = \frac{1}{6}$.

Vậy $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ đạt GTNN, GTLN lần lượt là $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}$.

Nhận xét. Qua năm ví dụ trên ta thấy sự lợi hại của **Kết quả 2** đem lại. Vừa nhanh, dễ sử dụng mà hiệu quả thì cực tốt. Rất hợp cho học sinh trong việc làm bài trắc nghiệm.



2. Tính chất 2. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh

AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $\frac{AM}{AA_1} = x, \frac{BN}{BB_1} = y, \frac{CP}{CC_1} = z$. Khi đó ta có tỷ số $\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{x+y+z}{3}$.

Chứng minh. Ta có $V_{ABCMNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$, đặt

$$V = V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$\text{dễ thấy } V_{A.BCC_1B_1} = \frac{2V}{3}$$

+ Ta có

$$\frac{V_{M.ABC}}{V} = \frac{\frac{1}{3}d(M;(ABC)).S_{ABC}}{d(A_1;(ABC)).S_{ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d(M;(ABC))}{d(A_1;(ABC))} = \frac{1}{3} \frac{AM}{AA_1} = \frac{1}{3}x$$

$$\text{Suy ra } V_{M.ABC} = \frac{x}{3} \cdot V \quad (1).$$

$$\text{Do } AM \parallel (BCC_1A_1) \Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A.BCPN}$$

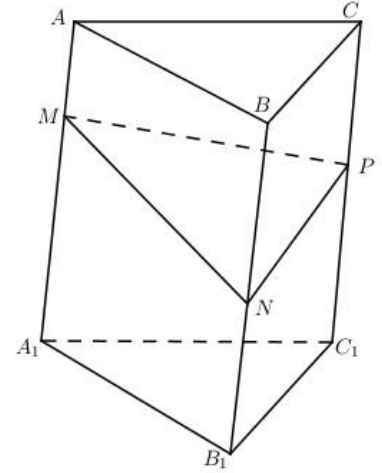
Nên

$$\begin{aligned} \frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC_1B_1}} &= \frac{V_{A.BCPN}}{V_{A.BCC_1B_1}} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC_1B_1}} = \frac{\frac{1}{2}(CP+BN).d(P;BB_1)}{BB_1.d(P;BB_1)} = \frac{yBB_1+zCC_1}{2BB_1} = \frac{y+z}{2}(BB_1=CC_1) \\ \Rightarrow \frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC_1B_1}} &= \frac{y+z}{2} \Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{y+z}{2} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{y+z}{3} \cdot V \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy từ (1),(2) ta có } V_{ABCMNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \frac{x+y+z}{3} \cdot V \Rightarrow \frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{x+y+z}{3}.$$

$$\text{Đặc biệt: } \frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{x}{3}, \quad \frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{y+z}{3}.$$

Ví dụ 6. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = MA', BN = 3NB', CP = 3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP$, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Giải. Ta có

$$MA = MA' \Rightarrow \frac{MA}{AA'} = \frac{1}{2}; BN = 3NB' \Rightarrow \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{4};$$

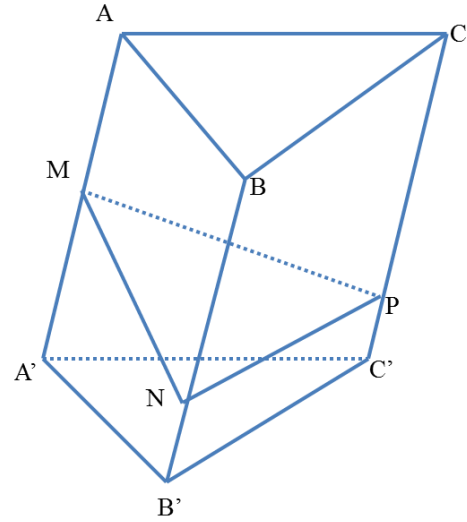
$$CP = 3PC' \Rightarrow \frac{CP}{CC'} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Đặt } V = V_{ABC.A'B'C'}$$

Suy ra

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}V$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2$$



Ví dụ 7. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V , các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', BN = 3NB', CP = x.PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$, tính giá trị của x để $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{5}$.

Giải.

Ta có

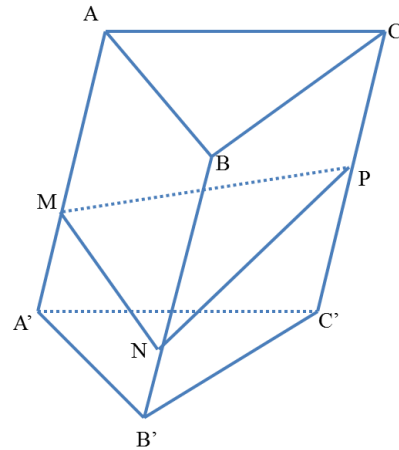
$$MA = 2MA' \Rightarrow \frac{AM}{AA'} = \frac{2}{3}; BN = 3NB' \Rightarrow \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{4};$$

$$CP = xPC' \Rightarrow \frac{CP}{CC'} = \frac{x}{x+1}$$

Suy ra

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{x}{x+1}}{3} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{17}{12} + \frac{x}{x+1} = \frac{9}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{23}{60} \Leftrightarrow x = \frac{23}{37}.$$



Ví dụ 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60cm^3 , các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', BN = 3NB', CP = 4PC'$. Thể tích của khối đa diện $BC.MNP$.

Giải.

Ta có

$$MA = 2MA' \Rightarrow \frac{AM}{AA'} = \frac{2}{3}; BN = 3NB' \Rightarrow \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{4};$$

$$CP = 4PC' \Rightarrow \frac{CP}{CC'} = \frac{4}{5}$$

Nên

$$\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABCA'B'C'}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{3} = \frac{133}{180}$$

$$\Rightarrow V_{ABCMNP} = \frac{133}{180} \cdot 60 = \frac{133}{3}$$

$$\text{Mà } V_{M.ABC} = \frac{1}{3}d(M;(ABC)).S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}d(A';(ABC)).S_{ABC} = \frac{2}{9} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{40}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{BCMNP} = \frac{133}{3} - \frac{40}{3} = 31(\text{cm}^3).$$

Nhận xét. Các bài toán dạng này sẽ xuất hiện nhiều khối không phải là các khối có công thức tính thể tích như chóp hay lăng trụ.. Thay vì việc phải phân chia các khối này thành các khối có công thức tính, nay ta có ngay một kết quả rất nhanh và chính xác.

Ví dụ 9.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Mặt phẳng (α) cắt AA', BB', CC', GG' lần lượt tại M, N, P, I . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 3 \cdot \frac{GI}{GG'}$$

Chứng minh.

Đặt

$$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}, t = \frac{GI}{GG'};$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = V$$

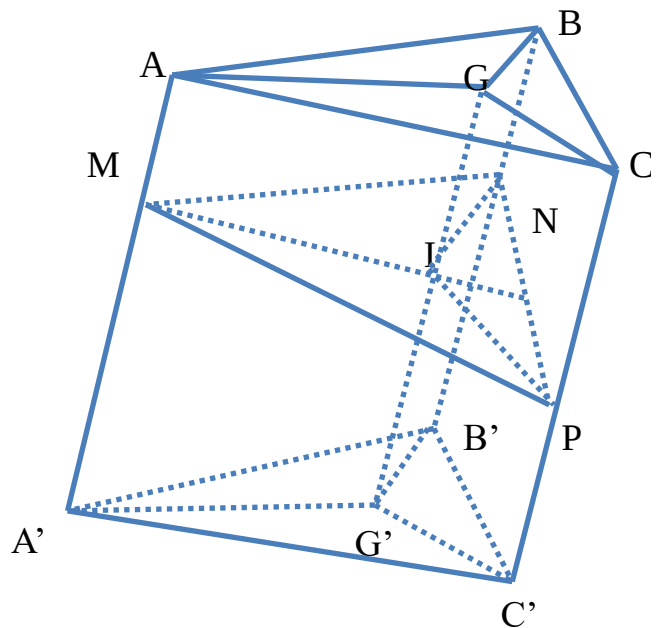
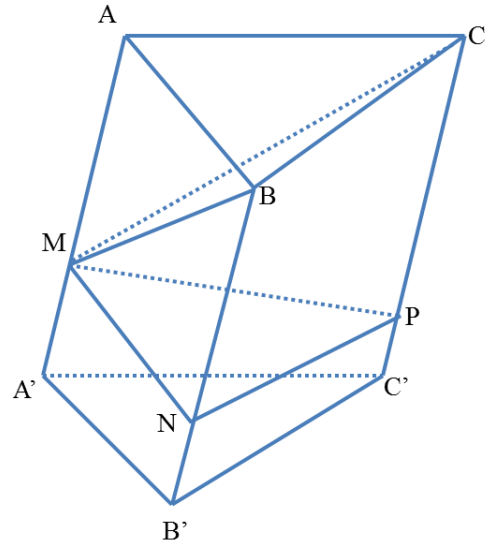
Dễ thấy

$$V_{AGB.A'G'B'} = V_{CGB.C'G'B'} = V_{AGC.A'G'C'} = \frac{V}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{AGBMIN}}{V_{AGB.A'G'B'}} = \frac{x+y+t}{3}. \text{ Tương tự ta có } \frac{V_{CGBPIN}}{V_{CGB.C'G'B'}} = \frac{z+y+t}{3}; \frac{V_{CGAPIN}}{V_{CGA.C'G'A'}} = \frac{z+y+t}{3}$$

Cộng vế với vế cả 3 đẳng thức trên ta được

$$\frac{3V_{ABCMNP}}{V} = \frac{x+y+t}{3} + \frac{z+y+t}{3} + \frac{z+y+t}{3} = \frac{2(x+y+z)}{3} + t$$



Mà $\frac{3V_{ABCMNBP}}{V} = 3 \cdot \frac{x+y+z}{3} = x+y+z$ nên $t = \frac{x+y+z}{3}$. Ta được điều phải chứng minh.

Từ kết quả trên ta có $\frac{V_{ABCMNBP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{GI}{GG'}$.

Nhận xét. Dựa vào kết quả trên ta thấy rằng chỉ cần biết (α) cắt GG' tại vị trí điểm I xác định là ta đã biết (α) chia lăng trụ thành hai phần với tỉ số bao nhiêu rồi.

3. Tính chất 3.

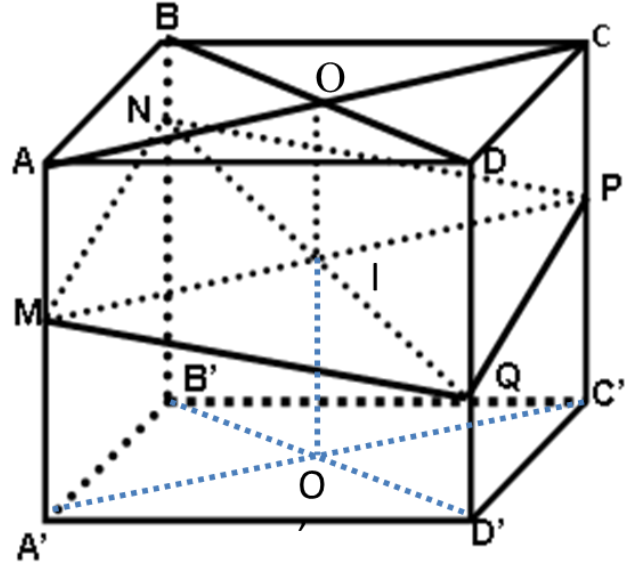
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z, \frac{DQ}{DD'} = t.$$

Khi đó ta có :

a. $x + z = y + t$.

b. $\frac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+z+t}{4} = \frac{x+z}{2} = \frac{y+t}{2}$



Chứng minh.

a. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Gọi I, O lần lượt là tâm của hình bình hành $MNPQ$ và hình vuông $ABCD$. Ta có OI là đường trung bình của hình thang $AMPC$ nên

$$OI = \frac{AM + CP}{2}. \text{ Tương tự } OI = \frac{BN + DQ}{2}, \text{ do đó}$$

$$AM + CP = BN + DQ \Leftrightarrow xAA' + zCC' = yBB' + tDD' \Leftrightarrow x + z = y + t$$

b. Áp dụng **Tính chất 2** ta có

$$\frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABD.A'B'D'}} = \frac{x+y+t}{3} \Leftrightarrow \frac{2V_{ABDMNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+t}{3} \Leftrightarrow \frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+t}{6}$$

$$\text{tương tự } \frac{V_{BCDNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{y+z+t}{6}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{V_{ABDMNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} + \frac{V_{BCDNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+t}{6} + \frac{y+z+t}{6} = \frac{x+y+z+t+y+t}{6} \\ &= \frac{x+y+z+t + \frac{x+y+z+t}{2}}{6} = \frac{x+y+z+t}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý: } \frac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x+y+z+t}{4} = \frac{OI}{OO'}.$$

Nhận xét. Một kết quả tương tự như **Tính chất 2**. Ở lăng trụ là tổng ba tỉ số chia ba, còn hình hộp là chia bốn.

Và cũng chỉ cần biết (α) cắt đoạn thẳng nối hai tâm đáy ở đâu là ta đã tìm được tỷ số hai khối tạo thành do (α) cắt hình hộp. Tuy nhiên, **Tính chất 3** cũng khẳng định chỉ cần biết hai tỷ số ở hai cạnh bên đối diện của hình hộp mà (α) cắt là ta cũng tìm được tỷ số thể tích các khối.

Ví dụ 10. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA, DN = 3ND'$ và $CP = 2C'P$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng bao nhiêu.

Giải.

(MNP) cắt BB' tại Q .

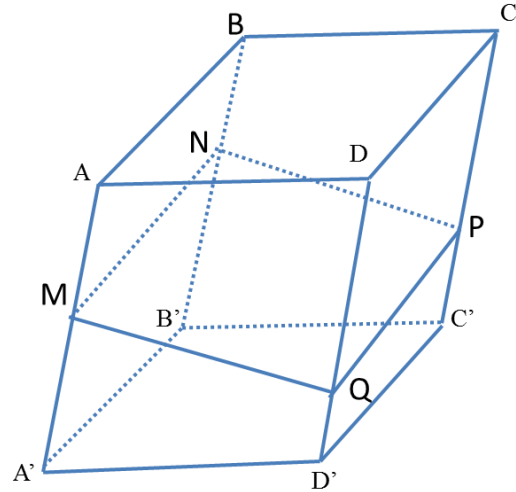
Từ giả thiết ta có $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}; \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$.

Do đó

$$\frac{V_{ABCDMPNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMPNQ} = \frac{7}{12} \cdot 2110 = \frac{7385}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{A'B'C'D'MNPQ} = 2110 - \frac{7385}{6} = \frac{5275}{6}$$

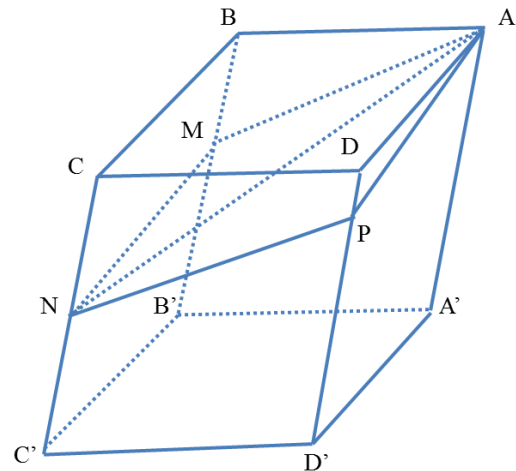


Ví dụ 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC' . Mặt phẳng (α) đi qua AN , cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại M, P . (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tính tỷ số $\frac{V_2}{V_1}$

Từ giả thiết ta có

$$\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{AN}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Nên } \frac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNPA'B'C'D'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 3$$



Kết luận. Việc áp dụng các tính chất trên vào lớp các bài toán thể tích tương ứng rất là hữu ích. Nó làm cho việc giải toán trắc nghiệm của các em học sinh nhanh gọn và nhẹ nhàng hơn nhiều so với việc giải truyền thống. Hy vọng nó sẽ giúp các em đạt kết quả cao nhất trong các kỳ thi sắp tới.

III. MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG.

TỶ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

(ĐỀ SỐ 01)

A. LÝ THUYẾT

1. Một số kiến thức cần biết

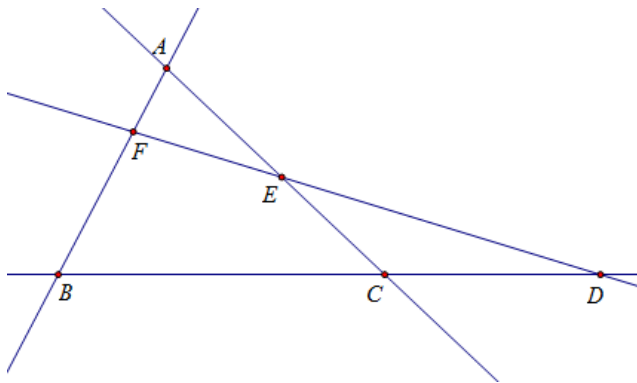
Kiến thức cần nhớ đối với khối lăng trụ tam giác và khối hộp

$$V_{A'ABC} = \frac{V}{3}, V_{A'.BCC'B'} = \frac{2V}{3}$$

$$V_{A'ABD} = \frac{V}{6}, V_{BDA'C'} = \frac{V}{3}$$

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH có $\frac{BH}{BC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \frac{CH}{CB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

Định lý menelaus: Ba điểm D, E, F lần lượt nằm trên 3 đường thẳng chứa 3 cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC , khi đó A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$



Công thức 1: Hai khối chóp có chung đỉnh và chung mặt đáy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$

Hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$ có chung đỉnh và hai mặt đáy cùng nằm trên một mặt phẳng,

ta có $\frac{V_{S.A_1A_2...A_n}}{V_{S.B_1B_2...B_n}} = \frac{S_{A_1A_2...A_n}}{S_{B_1B_2...B_n}}$

Ví dụ 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và V' là thể tích khối chóp $S.MNP$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Gọi V' là thể tích khối chóp $S.MNPQ$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4}$.

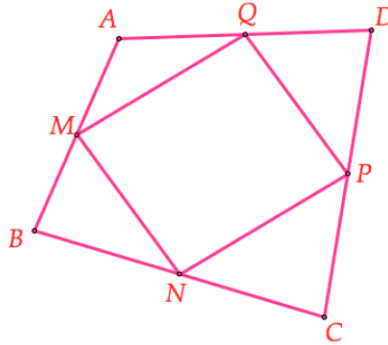
B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I . Các điểm P, Q lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $PIQ = 90^\circ$ (P, Q không phải là đỉnh của hình vuông). Tính thể tích của khối chóp tứ giác $S.APIQ$.

A. $\frac{V}{2}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{4}$.

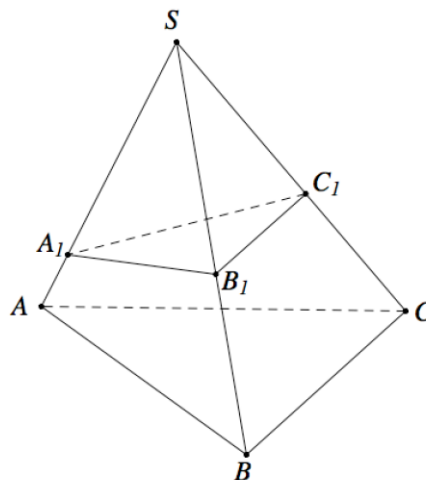
D. $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{V_{S.APIQ}}{V} = \frac{S_{APIQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.APIQ} = \frac{V}{4}$. Chọn đáp án C.

Công thức 2 : Công thức Simson (tỷ số thể tích) Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SB, SC ta có : $\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC}$.



Ví dụ 4: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tám mặt có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện $ABCD$. Tính tỷ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$.

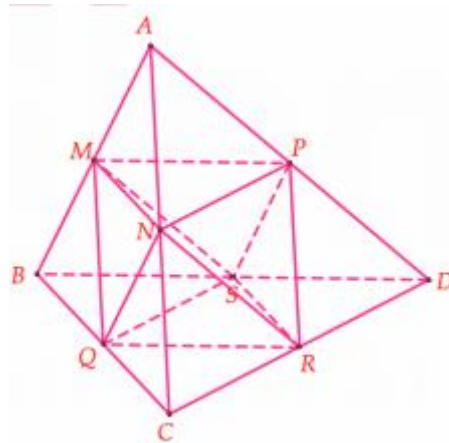
C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

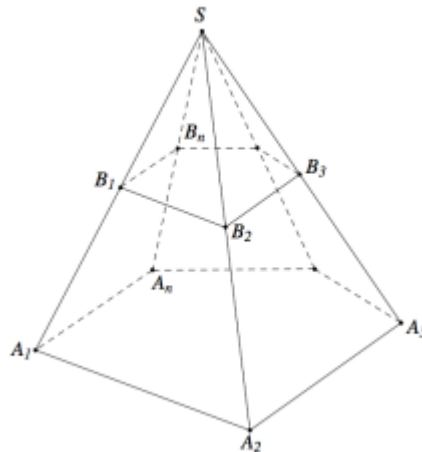
Ta có: $V_{A.MNP} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot V = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V = \frac{V}{8}$.



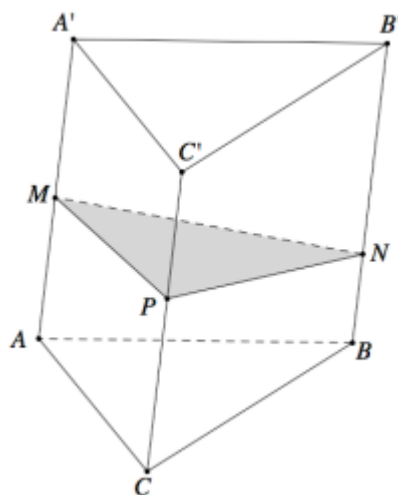
Tương tự ta có: $V_{B.MSQ} = \frac{V}{8}; V_{C.NQR} = \frac{V}{8}; V_{D.PSR} = \frac{V}{8}$.

Do đó, $V' = V - 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Công thức 3: Cắt khối chóp bởi mặt phẳng song song với đáy sao cho $\frac{SB_1}{SA_1} = k$ thì $\frac{V_{SB_1B_2...B_n}}{V_{SA_1A_2...A_n}} = k^3$ (Đây là trường hợp đặc biệt cho hai khối đa diện đồng dạng theo tỷ số k).



Công thức 4: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$ lần lượt tại $M; N; P$ sao cho $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Ta có $V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.



Ví dụ 5: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$ có thể tích V . Các điểm $M; N$ lần lượt thuộc các cạnh $BB'; CC'$ sao cho $\frac{MB}{BB'} = \frac{1}{2}x, \frac{NC}{CC'} = \frac{1}{4}$. Thể tích của khối chóp tứ giác $V_{A.BMNC}$ là?

A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{3V}{8}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{4}$.

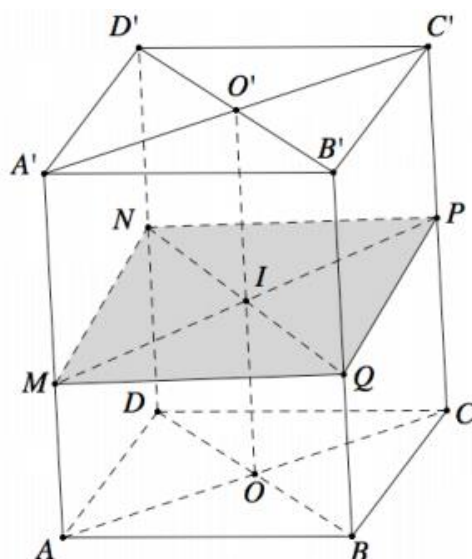
Lời giải

Chọn D

Ta có $V_{A.BMNC} = \frac{x+y+z}{3}V = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0}{3}V = \frac{V}{4}$. Chọn đáp án D.

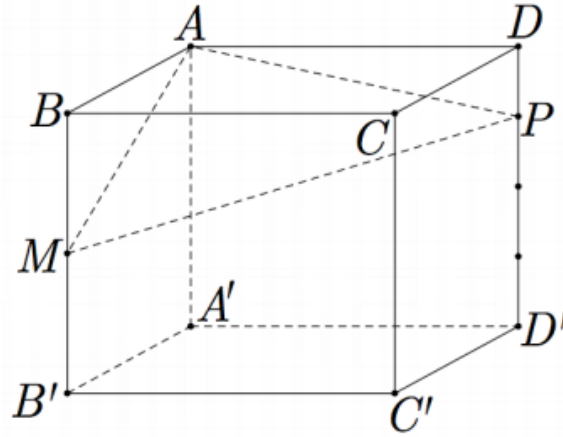
Công thức 5: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

$\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z, \frac{DQ}{DD'} = t$ ta có $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{4}V_{ABCD.A'B'C'D'}$ và $x+z = y+t$.



Chứng minh: Xem bài giảng:

Ví dụ 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Thể tích khối đa diện $AMNPQBCD$ bằng.



A. $2a^3$.

B. $3a^3$.

C. $\frac{11}{3}a^3$.

D. $\frac{9}{4}a^3$.

Lời giải

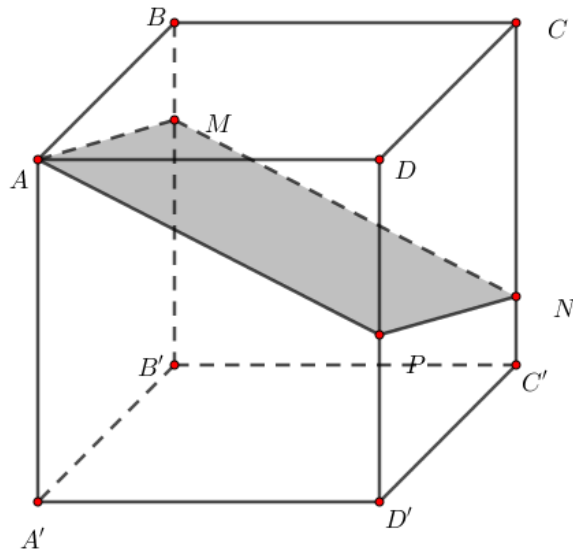
Chọn B

Thể tích khối lập phương $V_0 = 8a^3$. Có $x = \frac{AA'}{AA'} = 0, y = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2}, z = \frac{CN}{CC'}, t = \frac{DP}{DD'} = \frac{1}{4}$ và

$$x + z = y + t \Leftrightarrow 0 + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Khi đó } V_{AMNPBCD} = \frac{x + y + z + t}{4} V_0 = \frac{0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{4} \cdot 8a^3 = 3a^3. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Ví dụ 7: Người ta cần cắt một khối hộp lập phương thành hai khối đa diện bởi mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{CN}{CC'}$.



A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = \frac{2}{3}$.

C. $k = \frac{3}{4}$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

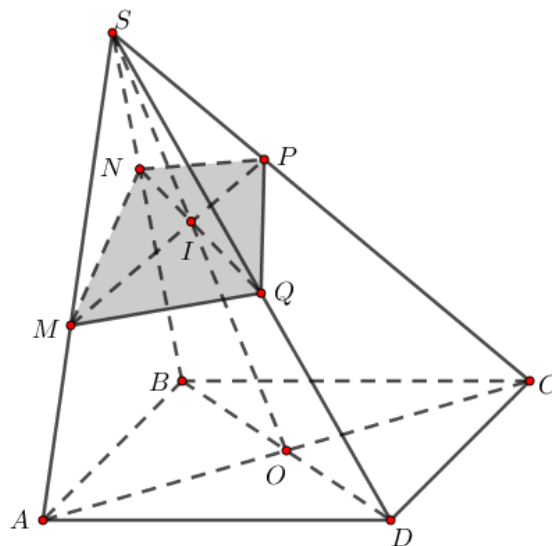
Chọn B

Gọi V' là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B và V là thể tích khối lập phương.

Theo giả thiết, ta có $V' = \frac{1}{3}V$ và $V' = \frac{\frac{AA'}{AA'} + \frac{CN}{CC'}}{2}V = \frac{0+k}{2}V = \frac{1}{3}V \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

Công thức 6: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\frac{SM}{SA} = x; \frac{SN}{SB} = y; \frac{SP}{SC} = z; \frac{SQ}{SD} = t$. Ta có $V_{S.MNPQ} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD}$

và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$.



Công thức 7: Hai khối đa diện đồng dạng với tỷ số k có $\frac{V_1}{V_2} = k^3$.

Ví dụ 8: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có bốn đỉnh là trọng tâm các mặt bên của khối tứ diện $ABCD$. Tính tỷ số $\frac{V'}{V}$

A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các mặt $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$; Ta có

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{1}{3}. \text{ Khối tứ diện } A'B'C'D' \text{ đồng dạng với khối tứ diện } ABCD \text{ theo tỷ số } k = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V}{V'} = k^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Công thức 8: So sánh bằng công thức thể tích khối chóp

Ví dụ 9: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB và V' là thể tích khối tứ diện $AMNP$. Tính tỷ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{81}$.

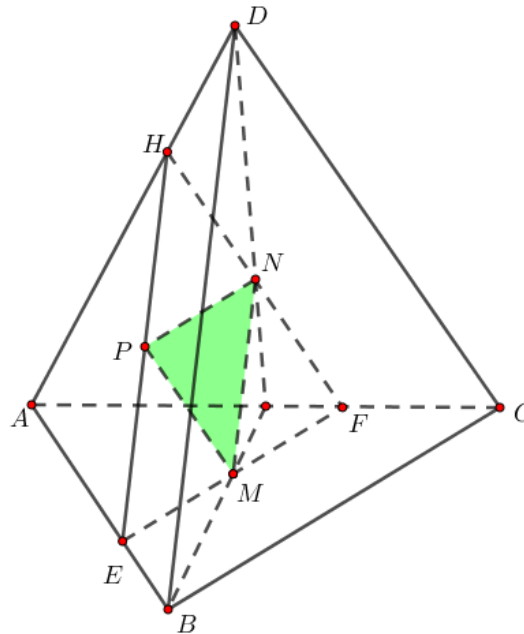
B. $\frac{V'}{V} = \frac{6}{81}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có mặt phẳng (MNP) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến EF, FH và HE do vậy thiết diện là tam giác EFH . Ta dễ có $(MNP) \parallel (BCD)$ và $d(A; (MNP)) = \frac{2}{3} d(A; (BCD))$

$$\text{Ta cũng có } S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{EFH} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{BCD} = \frac{1}{9} S_{BCD}$$

$$\text{Do đó } V_{AMNP} = \frac{1}{3} d(A; (MNP)) \cdot S_{MNP} = \frac{2}{81} d(A; (BCD)) \cdot S_{BCD} = \frac{6}{81} V_{ABCD}.$$

Ví dụ 10: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích V khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}.$

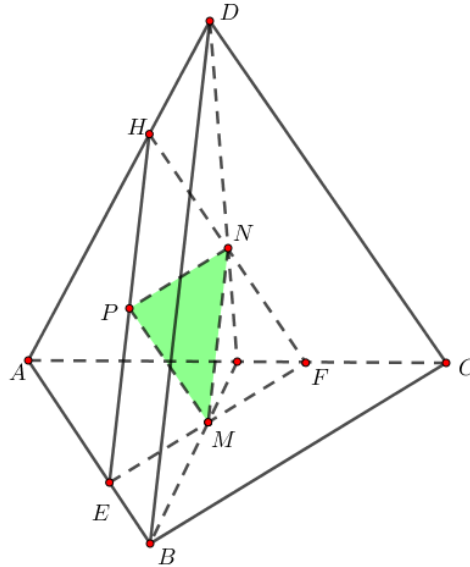
B. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{81}.$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{144}.$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{162}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có mặt phẳng (MNP) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến EF, FH và HE do vậy thiết diện là tam giác EFH . Ta dễ có $(MNP) \parallel (BCD)$ và $d(A; (MNP)) = \frac{2}{3} d(A; (BCD))$

$$\text{Ta cũng có } S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{EFH} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{BCD} = \frac{1}{9} S_{BCD}$$

$$\text{Do đó } V_{AMNP} = \frac{1}{3} d(A; (MNP)) \cdot S_{MNP} = \frac{2}{81} d(A; (BCD)) \cdot S_{BCD} = \frac{6}{81} V_{ABCD} = \frac{6}{81} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{\sqrt{2}a^3}{162}.$$

Ví dụ 11: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Gọi V' là thể tích khối tứ diện $S.MNPQ$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{81}.$

B. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{9}.$

C. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}.$

D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}.$

Lời giải

Chọn D

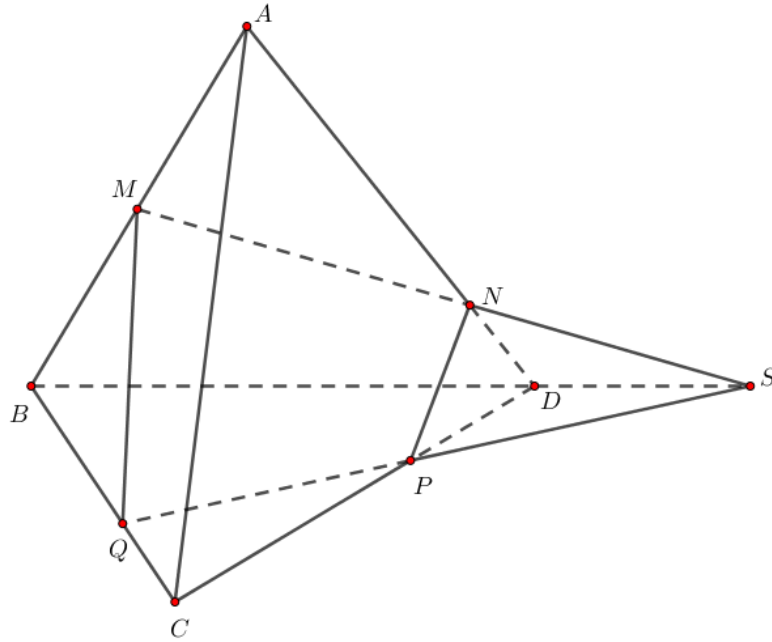
Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có diện tích đáy là S , chiều cao h ta có $V = \frac{Sh}{3}.$

Mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại E, F, G, H ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{EFGH}$ và

$$S_{EFGH} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S \text{ và } d(S, (MNPQ)) = \frac{2}{3} d(S, (ABCD)) = \frac{2}{3} h.$$

$$\text{Do đó } V' = \frac{1}{3} d(S, (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 S \cdot \frac{2}{3} h = \frac{4Sh}{3 \cdot 27} = \frac{4V}{27} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{4}{27}.$$

Công thức 9: Định lí Meneleus trong không gian $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QB}{QC} = 1.$



B. ĐỀ THI

Câu 1. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P là các điểm thỏa mãn $\overline{AB} = 4\overline{AM}$, $\overline{AD} = 3\overline{AN}$, $\overline{AA'} = 2\overline{AP}$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

A. $\frac{V}{6}.$

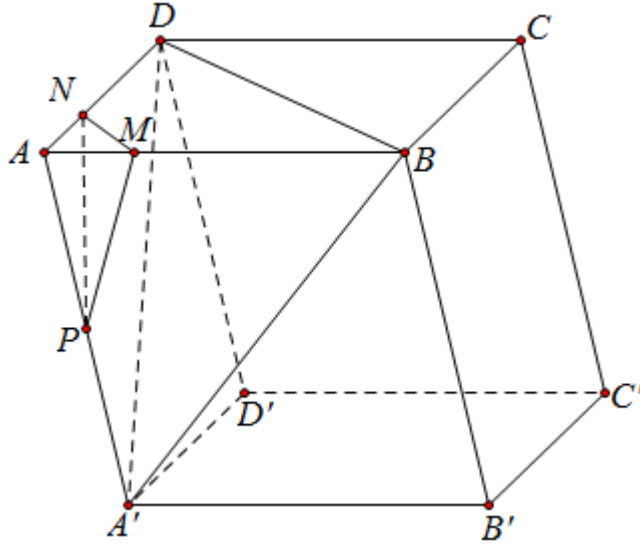
B. $\frac{V}{144}.$

C. $\frac{V}{72}.$

D. $\frac{V}{48}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{AMNP} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} \cdot \frac{AP}{AA'} \cdot V_{ABDA'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{ABDA'} = \frac{1}{24} \cdot V_{A'BDA} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{V}{72}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD . Cho biết $AB = 4a, AC = 6a, AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 7a^3$.

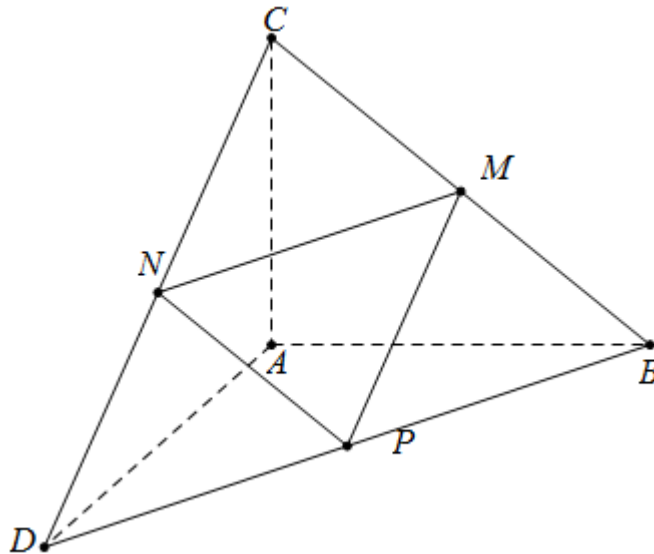
B. $V = 28a^3$.

C. $V = 14a^3$.

D. $V = 21a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{A.MNP} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot d(A, (MNP)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{BCD} \cdot d(A, (MNP)) = \frac{1}{4} V_{ABCD}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 7a^3$.

Câu 3. Cho khối chóp $S.ABC$, các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC và không trùng với S . Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3} \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$.

B. $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$.

C. $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$.

D. $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3} \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$.

Lời giải

Chọn B

Câu hỏi lý thuyết.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}$.

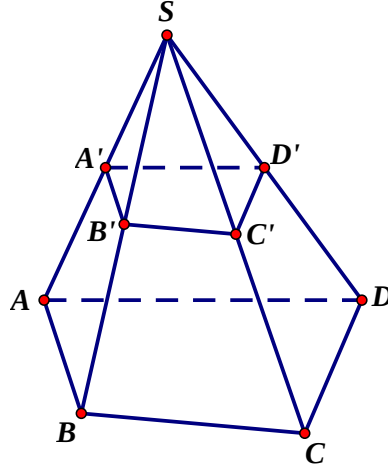
B. $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

D. $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy hai khối đa diện $S.MNPQ$ và $S.ABCD$ đồng dạng theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các góc tại đỉnh A vuông; $AB = 6a, AC = 9a, AD = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 8a^3$.

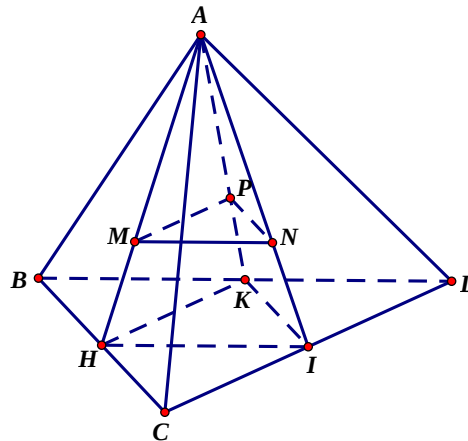
B. $V = 4a^3$.

C. $V = 6a^3$.

D. $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, I, K lần lượt là trọng tâm các cạnh BC, CD, DB . Ta thấy khai khối đa diện $AMNP$ và $AHIK$

đồng dạng theo tỉ số $\frac{2}{3}$ nên $\frac{V_{AMNP}}{V_{AHIK}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{8}{27} V_{AHIK}$.

Ta có $\frac{V_{AHIK}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{HIK}}{S_{BCD}} = \frac{1}{4}$ (do hai khối chóp có chung đường cao kẻ từ A)

$$\Rightarrow V_{AIHK} = \frac{1}{4} V_{ABCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{2}{27} V_{ABCD}.$$

$$\text{Mà } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} 6a \cdot 9a \cdot 3a = 27a^3.$$

$$\text{Vậy } V_{AMNP} = \frac{2}{27} 27a^3 = 2a^3.$$

Câu 6. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và các điểm M, N, P là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $V_{AMNP} = \frac{V}{24}$.

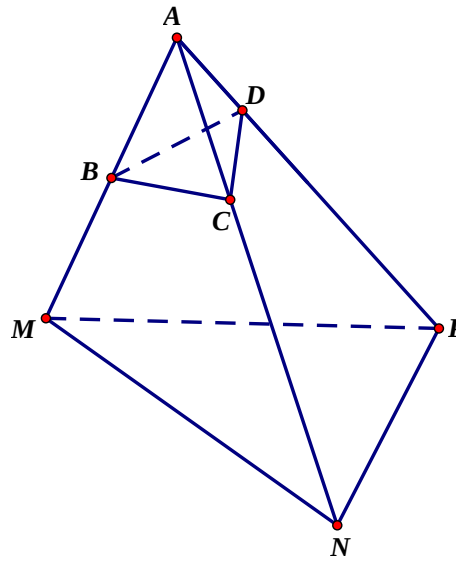
B. $V_{AMNP} = 8V$.

C. $V_{AMNP} = 24V$.

D. $V_{AMNP} = \frac{V}{8}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \frac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \Rightarrow V_{AMNP} = 24V.$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Điểm I thuộc cạnh SB sao cho $SI = \frac{1}{3} SB$. Thể tích khối tứ diện $SAIC$ bằng

A. $\frac{2a^3}{9}$.

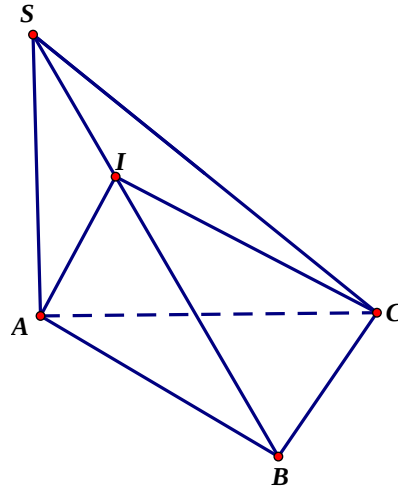
B. $\frac{a^3}{9}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



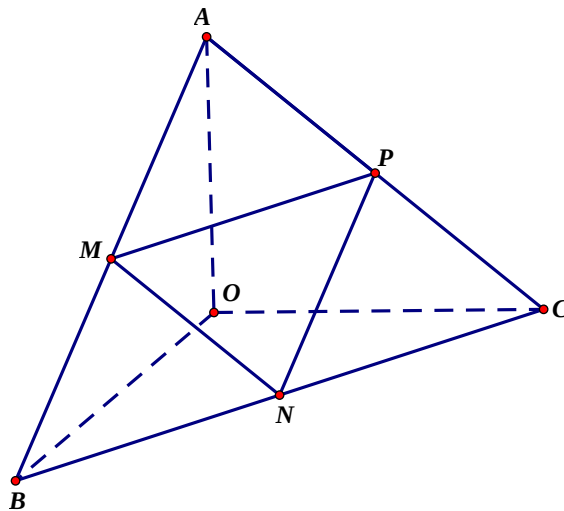
Ta có $V_{SAIC} = \frac{SI}{SB} \cdot V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{9} SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^3}{9}$.

Câu 8. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=a$ và đôi một vuông góc. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . Tính thể tích V của khối tứ diện $OMNP$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$ B. $V = \frac{a^3}{24}$ C. $V = \frac{a^3}{6}$ D. $V = \frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V_{OMNP} = \frac{1}{3} d(O; (MNP)) \cdot S_{MNP} = \frac{1}{3} d(O; (ABC)) \cdot \frac{1}{4} S_{ABC}$

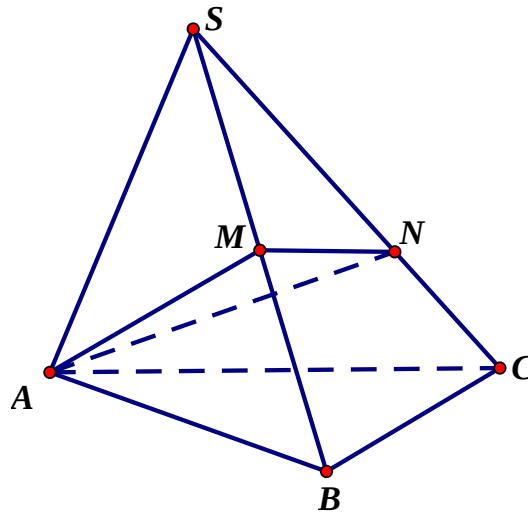
$= \frac{1}{4} V_{OABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{a^3}{24}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm cạnh SB và điểm N trên cạnh SC sao $NS=2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BMNC$

A. $V=15$. B. $V=5$. C. $V=30$ D. $V=10$.

Lời giải

Chọn D



Ta có
$$\begin{cases} \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5.9 = 10 \end{cases}$$

Câu 10. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 3EB$. Tính thể tích của khối tứ diện $EBCD$.

A. $\frac{V}{3}$

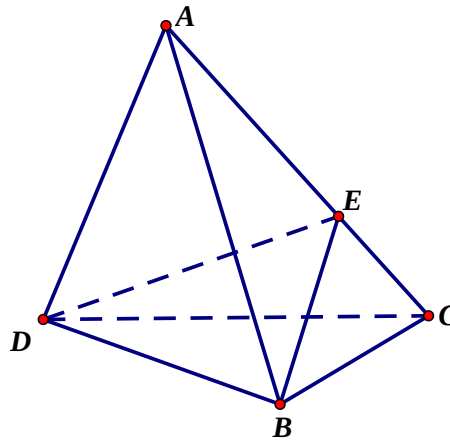
B. $\frac{V}{4}$

C. $\frac{V}{2}$

D. $\frac{V}{5}$

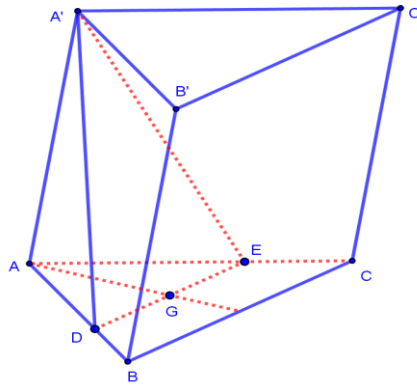
Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{AECD} = \frac{AE}{AB} \cdot V_{ABCD} = \frac{3}{4} V \Rightarrow V_{EBCD} = \left(1 - \frac{3}{4}\right) V = \frac{V}{4}$.

Câu 11. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại D , E . Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích (số bé chia số lớn) của chúng.



A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{23}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{4}{27}$.

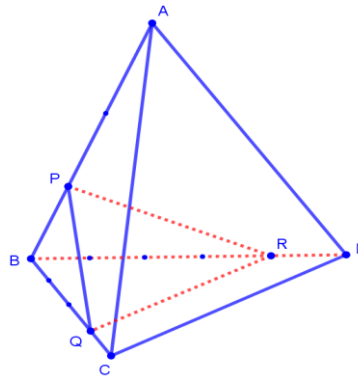
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{V_{A'.ADE}}{V_{A'.ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \end{cases} \Rightarrow V_{A'.ADE} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{27}}{1 - \frac{4}{27}} = \frac{4}{23}.$$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Xét điểm P thuộc cạnh AB , điểm Q thuộc cạnh BC và điểm R thuộc cạnh BD sao cho $\frac{PA}{PB} = 2$, $\frac{QB}{BC} = 3$, $\frac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$.



A. $\frac{V}{5}$.

B. $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{V}{3}$.

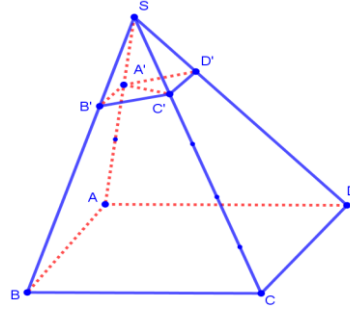
D. $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}} = \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow V_{B.PQR} = \frac{1}{5} V.$$

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A' , C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại B' , D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?



A. $\frac{1}{60}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{4}{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\frac{SB}{SB'} = x, \frac{SD}{SD'} = y$

Ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow x + y = 8$.

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{15x} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{15x} V_{S.ABC} = \frac{1}{30x} V_{S.ABCD}$.

Ta có $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{15y} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{15y} V_{S.ADC} = \frac{1}{30y} V_{S.ABCD}$.

Ta có $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Ta có $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{1}{60}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\frac{1}{60}$ khi $x = y = 4$.

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

A. $\frac{4}{105}$.

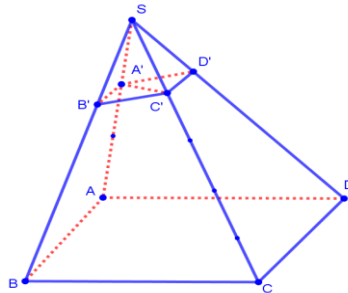
B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{4}{15}$.

D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\frac{SB}{SB'} = x, \frac{SD}{SD'} = y$

$$\text{Ta có } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{15x} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{15x} V_{S.ABC} = \frac{1}{30x} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{15y} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{15y} V_{S.ADC} = \frac{1}{30y} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Ta có } k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{4}{15xy} = \frac{4}{15x(8-x)} = \frac{4}{15(-x^2 + 8x)}.$$

$$\text{Ta có } 1 \leq x, y < 8 \Rightarrow 8 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 7.$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 8x$ trên đoạn $[1; 7]$.

$$f'(x) = -2x + 8; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 7] \\ x = 4 \in [1; 7] \end{cases}$$

$$\text{Tính } f(1) = 7; f(7) = 7; f(4) = 32.$$

k đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\min f(x) = 7 \Rightarrow k_{\max} = \frac{4}{15 \cdot 7} = \frac{4}{105}.$$

Câu 15. Cho tứ diện đều có chiều cao h , ở ba góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích của khối đa diện đều ban đầu. Tìm x .

A. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}.$

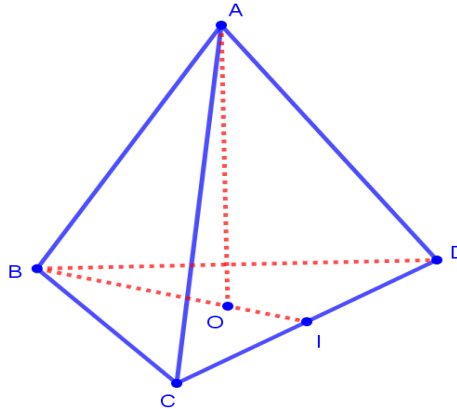
B. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}.$

C. $x = \frac{h}{\sqrt[4]{4}}.$

D. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a .

$$\text{Ta có } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}h}{2}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{h^3 \sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao } x \text{ được cắt ra là } V = 3 \cdot \frac{x^3 \sqrt{3}}{8} = \frac{x^3 3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Ta có } \frac{x^3 3\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} \frac{h^3 \sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow x^3 = \frac{h^3}{6} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}.$$

Câu 16. Cho tứ diện đều có chiều cao h , ở bốn góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối đa diện ban đầu. Tìm x .

A. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{4}}$.

B. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{16}}$.

C. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{12}}$.

D. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a , ta có $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}}h$.

Thể tích của khối tứ diện ban đầu là $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}h\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{h^3}{8}$.

Do đó tổng thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $\frac{3x^3}{8}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{3x^3}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^3}{8} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{12}}$.

Câu 17. Mặt phẳng đi qua trọng tâm của một tứ diện, song song với một mặt của tứ diện và chia khối tứ diện đã cho thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (số bé chia số lớn) của hai phần đó.

A. $\frac{2}{3}$.

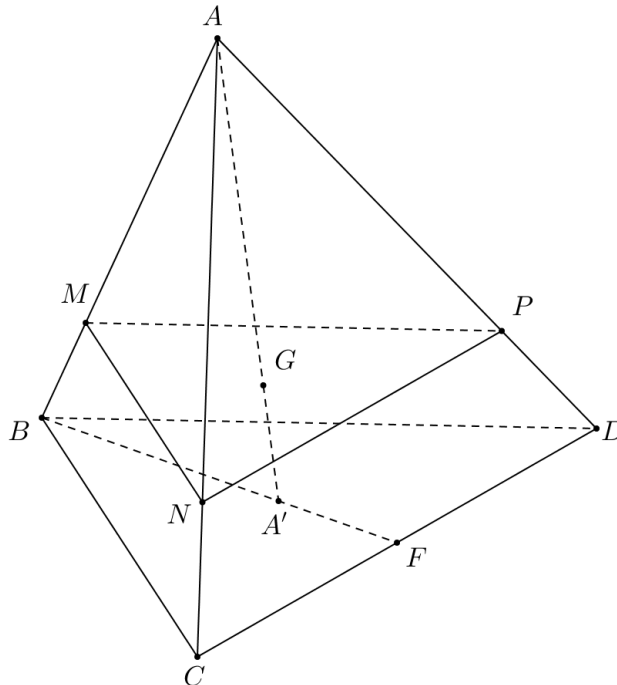
B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{27}{37}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, A' là trọng tâm tam giác BCD .

Giả sử mặt phẳng qua G song song với (BCD) cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AP}{AD} = \frac{AG}{AA'} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Do đó } S_{MNP} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 S_{BCD} \text{ và } d(A, (MNP)) = \frac{3}{4} d(A, (BCD)).$$

$$\text{Suy ra } V_{AMNP} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) V_{ABCD} = \frac{27}{64} V_{ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{27/64}{1-27/64} = \frac{27}{37}.$$

Câu 18. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm E thuộc cạnh BB' sao cho $BE = \frac{BB'}{4}$, điểm F thuộc cạnh DD' sao cho $DF = \frac{3DD'}{4}$. Mặt phẳng qua ba điểm A, E, F chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số hai phần ấy.

A. 2.

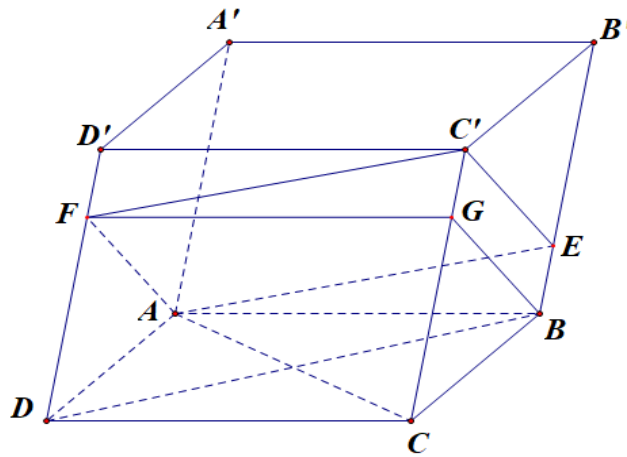
B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy thiết diện của (AEF) và hình hộp là tứ giác $AFC'E$.

$$\text{Ta có } V_{ABCD.AFC'E} = \frac{x+y+z+t}{4} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$\text{trong đó } x = \frac{0}{AA'} = 0; y = \frac{BE}{BB'} = \frac{1}{4}; z = \frac{CC'}{CC'} = 1; t = \frac{DF}{DD'} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{ABCD.AFC'E} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Vậy tỉ lệ thể tích của hai khối là 1.

Câu 19. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4a$; $AD = 6a$; $AA' = 7a$. Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AA'}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 168a^3$.

B. $V = 672a^3$.

C. $V = 336a^3$.

D. $V = 1008a^3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có tứ diện } AMNP \text{ vuông tại } A \text{ nên } V = \frac{1}{6} AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{1}{6} \cdot 4a \cdot 6a \cdot 7a = 28a^3.$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) chứa AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

A. $\frac{2}{27}$.

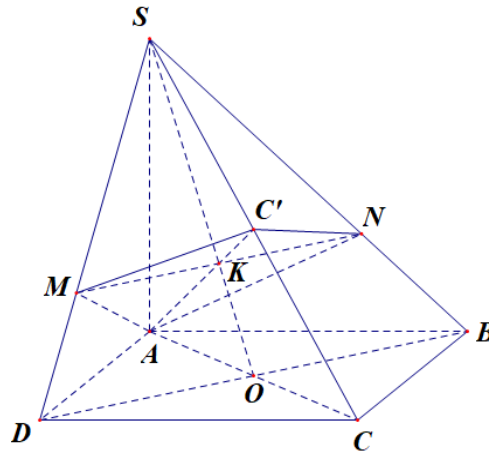
B. $\frac{4}{27}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{SA'}{SA} = 1; x = \frac{SB'}{SB}; \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}; y = \frac{SD'}{SD}$. Ta có $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$

Có $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} xy$.

$3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow m \geq \frac{1}{9}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của m bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = \frac{SA'}{SA} = 1; y = \frac{SB'}{SB}; z = \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}; t = \frac{SD'}{SD}$. Ta có

$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + 2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = 3$.

Mà $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} yt$.

$\frac{1}{y} = 3 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow y = \frac{t}{3t-1}, \left(\frac{1}{3} < t \leq 1\right) \Rightarrow m = f(t) = \frac{t^2}{4(3t-1)} \leq \max_{\left(\frac{1}{3}, 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

Câu 22. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Tính thể tích khối tứ diện $AB'CD'$.

A. $\frac{3V}{4}$.

B. $\frac{V}{6}$.

C. $\frac{V}{3}$.

D. $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } V_{AB'CD'} = V - (V_{A.A'B'D'} + V_{C.C'B'D'} + V_{B'.ACB} + V_{D'.ADC}) = V - 4 \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$

Câu 23. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD'}$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

- A.** $8V$. **B.** $4V$. **C.** $6V$. **D.** $18V$.

Lời giải

Chọn A

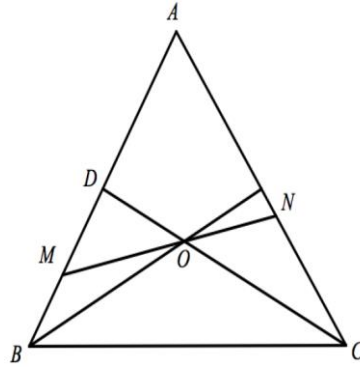
$$\text{Ta có } V_{AMNP} = \frac{AM}{AC} \cdot \frac{AN}{AB'} \cdot \frac{AP}{AD'} \cdot V_{ACB'D'} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{V}{3} = 8V.$$

Câu 24. Cho khối tứ diện đều $S.ABC$ cạnh bằng a . Mặt phẳng (P) đi qua S và trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Đặt $m = \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $x = \frac{AM}{AB}$, $y = \frac{AN}{AC}$, $(x, y \in [0;1])$. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm cạnh BC , giả sử $AM > AD$. Ta có

$$m = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = xy.$$

Áp dụng định lý Meneleus cho tam giác ACD ta có

$$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{NA}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{xa - \frac{a}{2}}{xa} \cdot 2 \cdot \frac{ya}{a - ya} = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)y = x(1 - y) \Leftrightarrow 3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow m = xy \geq \frac{4}{9}.$$

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SP} = 3\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{SN} = k\overrightarrow{SB}$. Biết $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{6}$. Tìm k .

- A.** $k = \frac{1}{36}$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = \frac{1}{6}$. **D.** $k = 36$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = 6k = \frac{1}{6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{36}$.

Câu 26. Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, DB . Biết thể tích của khối bát diện đều $MQNPSR$ bằng $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Tính độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

A. 2 cm.

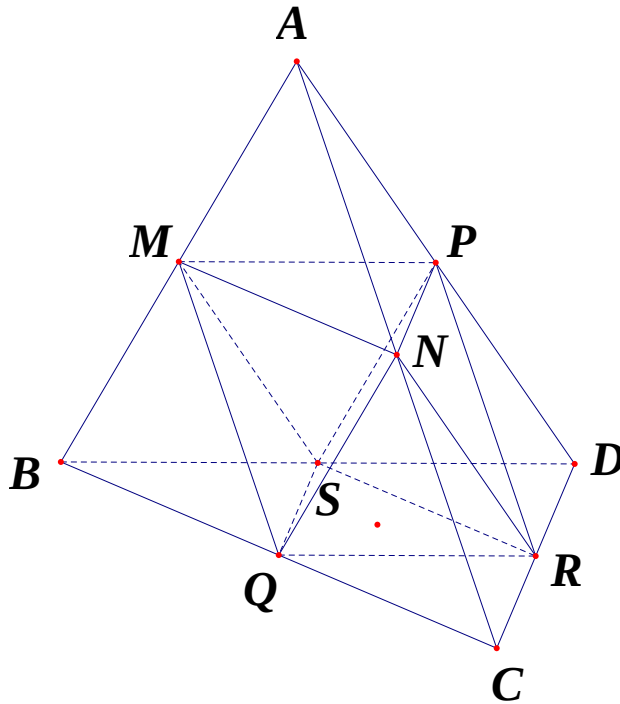
B. 3 cm.

C. 6 cm.

D. $\sqrt[3]{2}$ cm.

Lời giải

Chọn C



Gọi $V = V_{A.BCD}$

Ta có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{8}V$

Tương tự $V_{B.MQS} = \frac{1}{8}V$; $V_{C.NQR} = \frac{1}{8}V$; $V_{D.PRS} = \frac{1}{8}V$

$V_{MQNPSR} = V - V_{A.MNP} - V_{B.MQS} - V_{C.NQR} - V_{D.PRS} = V - 4 \cdot \frac{1}{8}V = \frac{V}{2}$

Theo giả thiết $V_{MQNPSR} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{V}{2} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow V = 18\sqrt{2}$.

Đặt độ dài cạnh của tứ diện là a , ta có: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 6$

Vậy $a = 6 \text{ cm}$.

Câu 27. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC : $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}, \frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN , song song với AD chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V

A. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$.

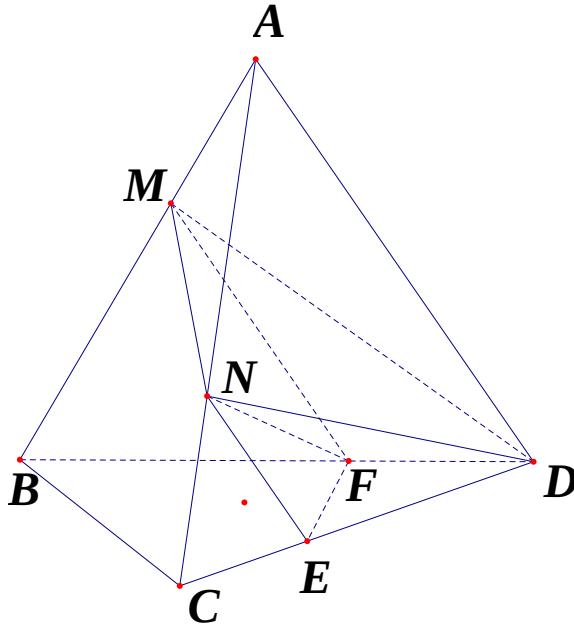
B. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$.

D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AD // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = NE // AD \left(E \in CD, \frac{DE}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \right)$

$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ AD // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MF // AD \left(F \in BD, \frac{DF}{DB} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \right).$

Như vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác $MNEF$.

$\frac{V_{A.MND}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{A.MND} = \frac{2}{9} V_{A.BCD}.$ (1)

$\frac{V_{D.MNF}}{V_{D.MNB}} = \frac{DF}{DB} = \frac{1}{3}; \frac{V_{D.MNB}}{V_{D.ABC}} = \frac{S_{MNB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AMN} - S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - \frac{2}{9}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}$
 $\Rightarrow V_{D.MNF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} V_{A.BCD} = \frac{4}{27} V_{A.BCD}.$ (2)

$\frac{V_{D.EFN}}{V_{D.CBN}} = \frac{DE}{DC} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}; \frac{V_{D.CBN}}{V_{D.CBA}} = \frac{S_{CBN}}{S_{CBA}} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{D.EFN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} V_{A.BCD} = \frac{2}{27} V_{A.BCD}.$ (3)

Cộng (1), (2), (3) theo về ta được:

$$V_{A.MND} + V_{D.MNF} + V_{D.EFN} = \frac{2}{9}V_{A.BCD} + \frac{4}{27}V_{A.BCD} + \frac{2}{27}V_{A.BCD}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{12}{27}V_{A.BCD} = \frac{12}{27} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{108}.$$

Câu 28. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm thuộc tia đối của tia DB sao cho $\frac{BE}{BD} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$

A. $k = \frac{6}{5}$.

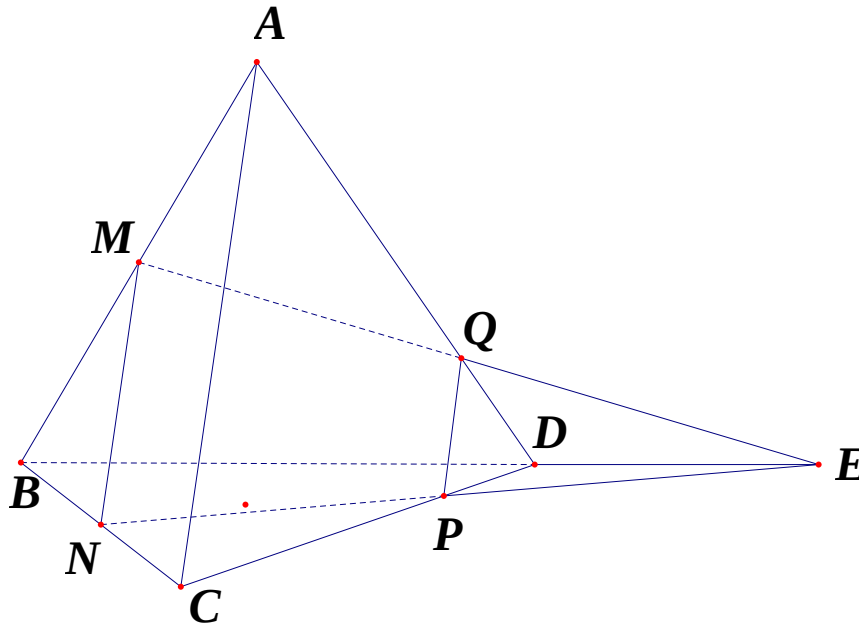
B. $k = 6$.

C. $k = 4$.

D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\begin{cases} P = EN \cap CD \\ Q = EM \cap AD \end{cases}$ suy ra thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (MNE) là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM}$ (1)

Theo giả thiết: $\frac{BE}{BD} = k \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{k-1}{k}$; (1.1)

Ta thấy: $\begin{cases} MN // AC \\ (EMN) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ // MN // AC \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN}$ (1.2)

Xét $\triangle EAB$ có EM là trung tuyến $\Rightarrow \frac{EB}{ED} + 1 = 2 \frac{EM}{EQ} \Rightarrow \frac{EM}{EQ} = \frac{\frac{k}{k-1} + 1}{2} = \frac{2k-1}{2k-2} \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{2k-2}{2k-1}$ (1.3)

Thay (1.1) (1.2) (1.3) vào (1):

$$\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1} \right)^2 \Rightarrow \frac{V}{V_{E.BNM}} = 1 - \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1} \right)^2 = \frac{8k^2 - 11k + 4}{k(2k-1)^2}. (2)$$

Lại có:

$$\frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \frac{d(E, (BMN)) \cdot S_{BMN}}{d(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{EB}{DB} \cdot \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{k}{4} \quad (2.1)$$

$$\text{Từ (2) và (2.1) suy ra } \frac{V}{V_{A.BCD}} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{k(2k-1)^2} \cdot \frac{k}{4} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2}$$

$$\text{Nhu vậy } \frac{\frac{11\sqrt{2}a^3}{12}}{\frac{294}{\sqrt{2}a^3}} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow \frac{22}{49} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow 40k^2 - 187k + 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = \frac{27}{40} \end{cases}$$

Vậy $k = 4$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$. Gọi $(\alpha), (\beta)$ là các mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua M, N . Khi đó hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ chia khối chóp đã cho thành 3 phần. Nếu phần trên có thể tích bằng 10 dm^3 thì thể tích của hai phần còn lại lần lượt là

A. 80 dm^3 và 190 dm^3 .

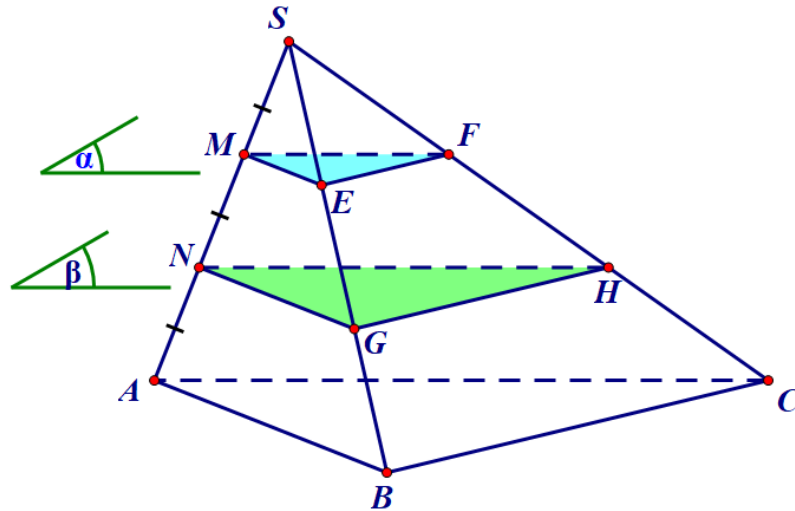
B. 70 dm^3 và 190 dm^3 .

C. 70 dm^3 và 200 dm^3 .

D. 80 dm^3 và 180 dm^3 .

Lời giải

Chọn B



Gọi $E = (\alpha) \cap SB, F = (\alpha) \cap SC, G = (\beta) \cap SB, H = (\beta) \cap SC$ thì theo đề ta có:

$$\bullet V_{S.MEF} = 10 \text{ dm}^3$$

$$\bullet \frac{V_{S.MEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 27V_{S.MEF} = 270 \text{ dm}^3.$$

$$\bullet \frac{V_{S.MEF}}{V_{S.NGH}} = \frac{SM}{SN} \cdot \frac{SE}{SG} \cdot \frac{SF}{SH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.NGH} = 8V_{S.MEF} = 80 \text{ dm}^3.$$

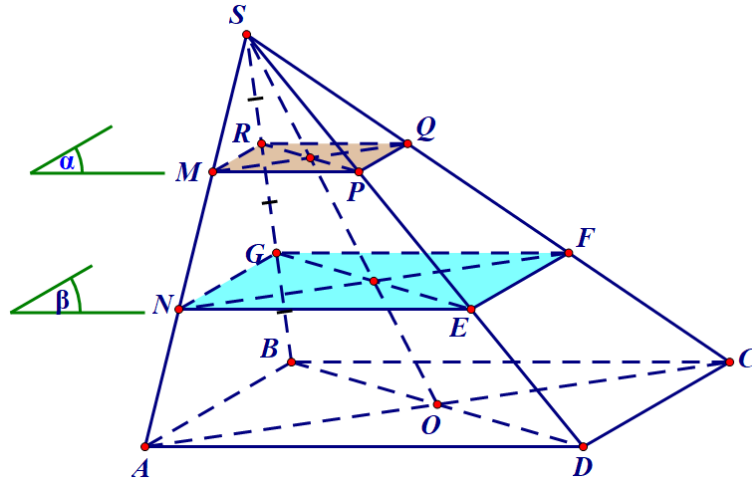
$$\text{Do đó } V_{NGHMEF} = V_{S.NGH} - V_{S.MEF} = 70 \text{ dm}^3, V_{NGHABC} = V_{S.ABC} - V_{S.NGH} = 270 - 80 = 190 \text{ dm}^3.$$

Vậy thể tích của hai khối đa diện còn lại lần lượt là 70 dm^3 và 190 dm^3 .

- Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$. Hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với $(ABCD)$ và lần lượt đi qua M, N chia khối chóp đã cho thành ba phần. Nếu phần trên có thể tích bằng 10 dm^3 thì phần ở giữa có thể tích là
- A.** 70 dm^3 . **B.** 80 dm^3 . **C.** 180 dm^3 . **D.** 190 dm^3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi $P = (\alpha) \cap SD$, $Q = (\alpha) \cap SC$, $R = (\alpha) \cap SB$, $E = (\beta) \cap SD$, $F = (\beta) \cap SC$, $G = (\beta) \cap SB$ thì theo đề ta có:

• $V_{S.MPQR} = 10 \text{ dm}^3$

• $V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF}$,

$$\frac{V_{S.NEF}}{V_{S.MPQ}} = \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SE}{SP} \cdot \frac{SF}{SQ} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow V_{S.NEF} = 8V_{S.MPQ},$$

$$\frac{V_{S.NGF}}{V_{S.MRQ}} = \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SG}{SR} \cdot \frac{SF}{SQ} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow V_{S.NGF} = 8V_{S.MRQ}$$

$$\Rightarrow V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF} = 8V_{S.MPQ} + 8V_{S.MRQ} = 8(V_{S.MPQ} + V_{S.MRQ}) = 8V_{S.MPQR} = 80 \text{ dm}^3.$$

Vậy thể tích của khối chóp cắt $NEFG.MPQR$ là $V = V_{S.NEFG} - V_{S.MPQR} = 80 - 10 = 70 \text{ dm}^3$.

- Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2}a$. Giả sử E thuộc cạnh SC sao cho $SE = 2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SF = \frac{1}{3}FD$. Thể tích khối đa diện $SABEF$ bằng:

A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}$.

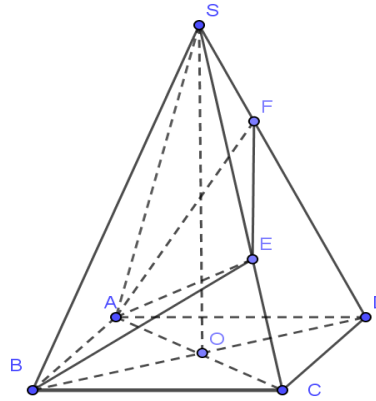
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2}a$ nên hình chiếu vuông góc hạ từ đỉnh S xuống đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, tức là trùng với điểm $O = AC \cap BD$.

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Ta có:

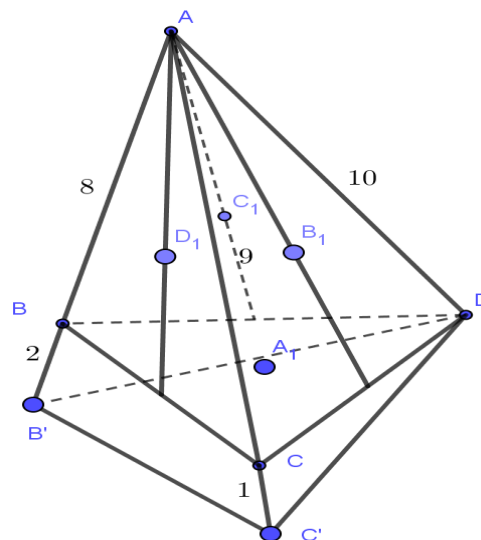
$$V_{S.ABEF} = V_{S.ABE} + V_{S.AEF} = \frac{SE}{SC} \cdot V_{SABC} + \frac{SE}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} \cdot V_{SACD} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6} \right) = \frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $BAC = CAD = DAB = 60^\circ$, $AB = 8(\text{cm})$, $AC = 9(\text{cm})$, $AD = 10(\text{cm})$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC . Tính thể tích V của khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$:

A. $V = 20\sqrt{2}(\text{cm}^3)$. **B.** $V = \frac{20\sqrt{2}}{3}(\text{cm}^3)$. **C.** $V = \frac{20\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^3)$. **D.** $V = 60\sqrt{2}(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn C



Lấy các điểm B', C' lần lượt trên các tia AB, AC sao cho $AB' = AC' = AD' = 10$.

$$\text{Khi đó: } V_{ABCD} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot V_{A.B'C'D'} = \frac{18}{25} V_{A.B'C'D'}$$

Trong đó $AB'C'D'$ là tứ diện đều cạnh $a = 10\text{cm}$, do đó thể tích của nó là

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \text{cm}^3.$$

Vì vậy $V_{ABCD} = 60\sqrt{2}$ và hai khối tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$ đồng dạng theo tỉ số $\frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó: } V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{27} V_{ABCD} = \frac{20\sqrt{2}}{9} (\text{cm}^3).$$

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$.

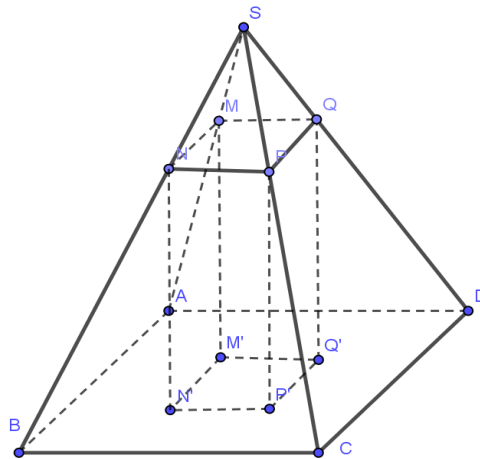
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{SM}{SA} = x$

$$\text{Và } \frac{d(M, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \Rightarrow d(M, (ABCD)) = (1 - x)h.$$

$$\text{Vì vậy } V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.d(M, (ABCD)) = x^2.(1 - x)h.AB.AD = 3x^2(1 - x)V$$

$$\text{Theo BDT Co-si, ta có: } x^2(1 - x) = \frac{1}{2}x.x.(2 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

$$\text{Do đó, } V_{MNPQ.M'N'P'Q'} \leq \frac{4}{9}V.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$.

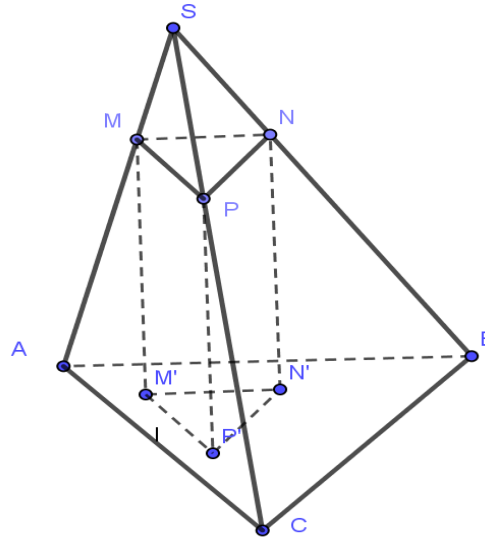
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = x$

Và $\frac{d(M, (ABC))}{d(S, (ABC))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \Rightarrow d(M, (ABC)) = (1 - x)h$.

Vì vậy $V_{MNP.M'N'P'} = S_{MNP} \cdot d(M, (ABCD)) = x^2 \cdot (1 - x)h \cdot S_{ABC} = 3x^2(1 - x)V$

Theo BDT Co-si, ta có: $x^2(1 - x) = \frac{1}{2}x \cdot x \cdot (2 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$.

Do đó, $V_{MNP.M'N'P'} \leq \frac{4}{9}V$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng (P) song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

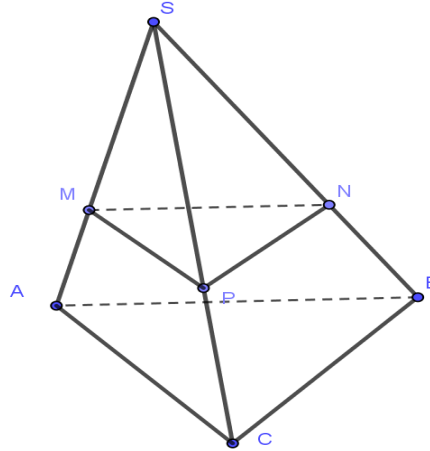
B. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.



Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x$

Và $V_{S.MNP} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} V_{S.ABC} = x^3 \cdot V_{S.ABC}$ Theo giả thiết, $V_{S.MNP} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$ nên

$x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a , một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có diện tích bằng nhau.

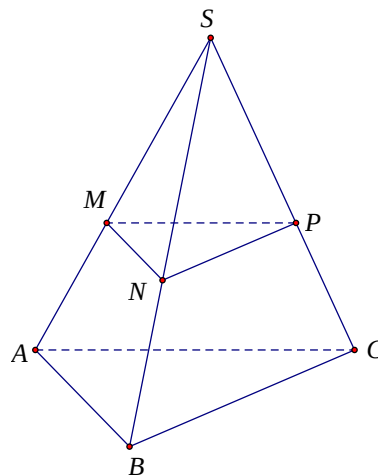
A. $S_{MNP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$.

B. $S_{MNP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}$.

C. $S_{MNP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$.

D. $S_{MNP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}$.

Lời giải



Chọn D

Mặt phẳng (P) song song với (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P .

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x > 0$.

Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = x^3 > 0$.

Theo giả thiết: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vì tam giác ABC đều cạnh a nên tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

$$\text{Vậy } S_{MNP} = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}.$$

Câu 37. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

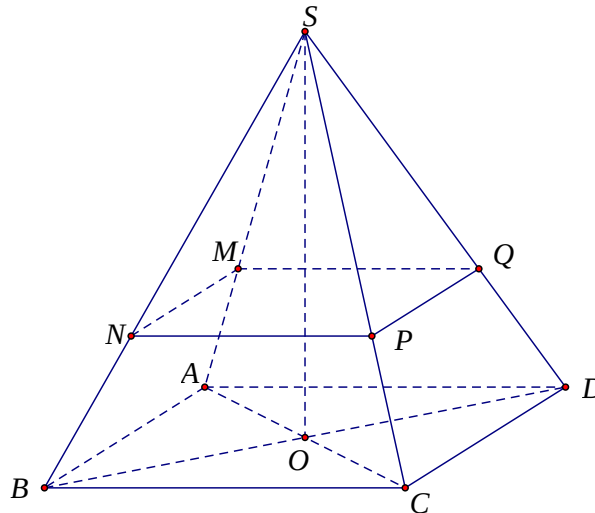
A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

B. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $\frac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải



Chọn D

Giả sử cắt viên đá khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ theo mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với $(ABCD)$ như hình vẽ.

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = x > 0$.

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNP} + V_{S.MPQ}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}.$$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$. Vậy $S_{MNPQ} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)^2 = \frac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích của khối chóp $AGBC$.

A. $V = 3$.

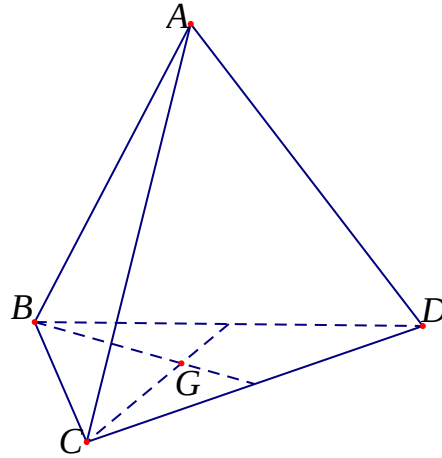
B. $V = 4$.

C. $V = 6$.

D. $V = 5$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \frac{V_{A.GBC}}{V_{A.BCD}} = \frac{S_{GBC}}{S_{BCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{A.GBC} = \frac{1}{3} V_{A.BCD} = 4.$$

Câu 39. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = a\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$.

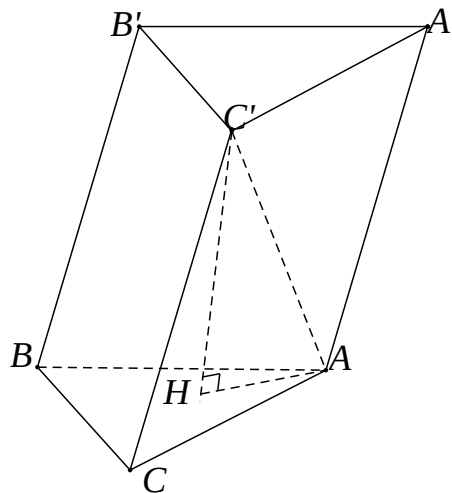
B. $V = \frac{16}{3}$.

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 = 4 \text{ và } d(C', (ABC)) = C'H = AC' \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó, } V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.4.2\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 54, gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{27}{2}$.

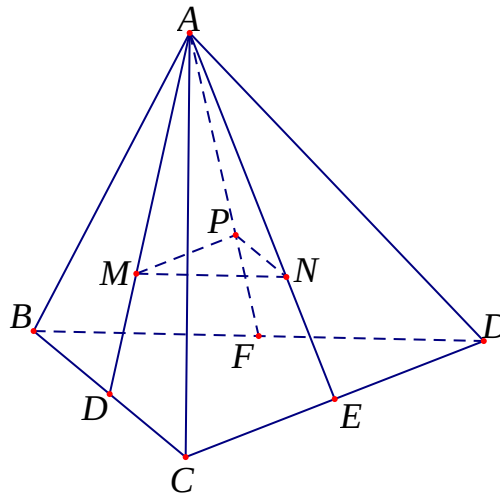
B. $V = 4$.

C. $V = 9$.

D. $V = 16$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DB .

$$\text{Ta có } V_{AMNP} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_{ADEF} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{2}{27}V_{ABCD} = \frac{2}{27}.54 = 4.$$

Câu 41. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 6 và góc nhọn bằng 45° , cạnh bên của hình hộp bằng 10 và tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích khối đa diện $ABCDD'B'$.

A. $V = 180$.

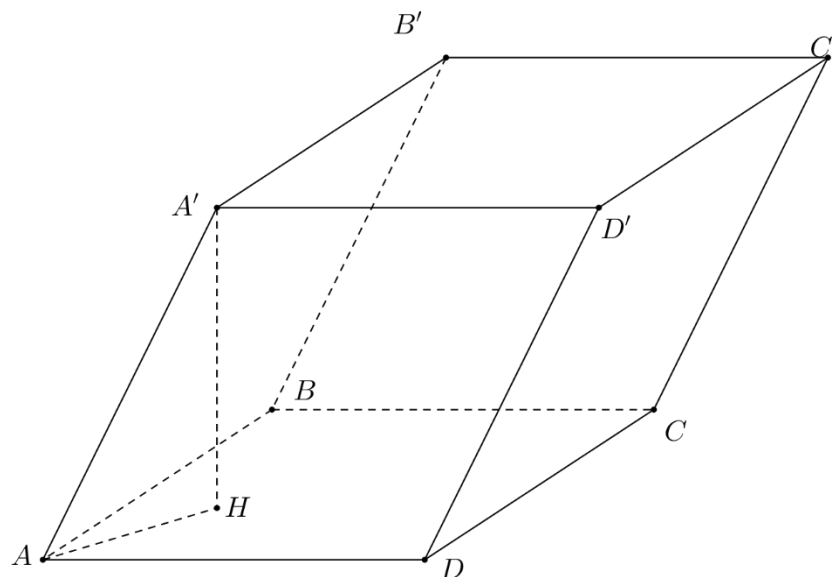
B. $V = 60$.

C. $V = 90$.

D. $V = 120$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $A'H$ là đường cao của hình hộp

Khi đó $(AA'; (ABCD)) = A'H = 45^\circ \Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$.

$$S_{ABCD} = 6^2 \cdot \sin 45^\circ = 18\sqrt{2}$$

$$\text{Nên } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 180.$$

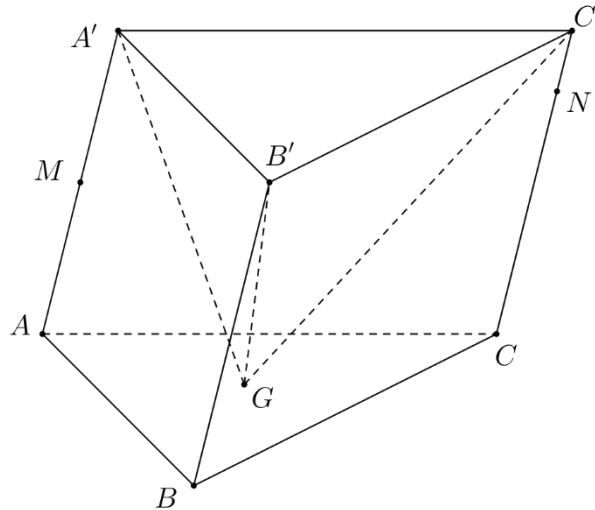
$$V_{ABCD D'B'} = V_{A.BDD'B'} + V_{C.BDD'B'} = \frac{2}{3} \cdot V_{ABD.A'B'D'} + \frac{2}{3} \cdot V_{BCD.B'C'D'} = \frac{2}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 120.$$

Câu 42. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA', NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. **B. Khối $GA'B'C'$.** **C. Khối $ABB'C'$.** **D. Khối $BB'MN$.**

Lời giải

Chọn A



Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có $G \in (ABC)$ nên $V_{G.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.

$$V_{BB'MN} = V_{M.BB'N} = V_{A.BB'N} = \frac{1}{2} \cdot V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V.$$

$$V_{ABB'C'} = \frac{1}{2}V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V.$$

$$\text{Ta có } \frac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \frac{CN}{CC'} = \frac{4}{5} \text{ nên } V_{A'BCN} = \frac{4}{5}V_{A'BCC'} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}V_{A'BCC'B'} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{4}{15}V$$

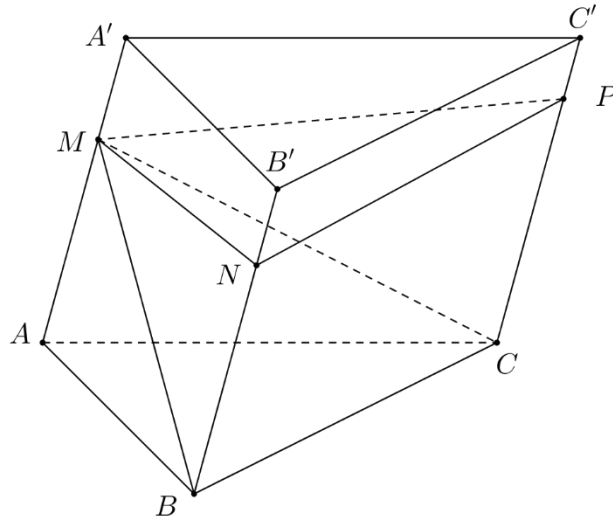
Vậy khối tứ diện $A'BCN$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 43. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $MA = 2MA', NB = 3NB', PC = 4PC'$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNP$.

A. 40. **B. 30.** **C. 31.** **D. $\frac{85}{3}$.**

Lời giải

Chọn C



Gọi d là khoảng cách giữa BB' và CC' .

$$\text{Ta có } S_{BCPN} = \frac{1}{2}(CP + BN).d = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}BB' + \frac{4}{5}CC' \right).d = \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{20}BB'.d = \frac{31}{40}S_{BCC'B'}.$$

$$\text{Do đó } V_{BCMNP} = V_{M.BCPN} = \frac{31}{40}V_{M.BCC'B'} = \frac{31}{40} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{31}{40} \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 = 31.$$

Câu 44. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC và E đối xứng với điểm B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

A. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

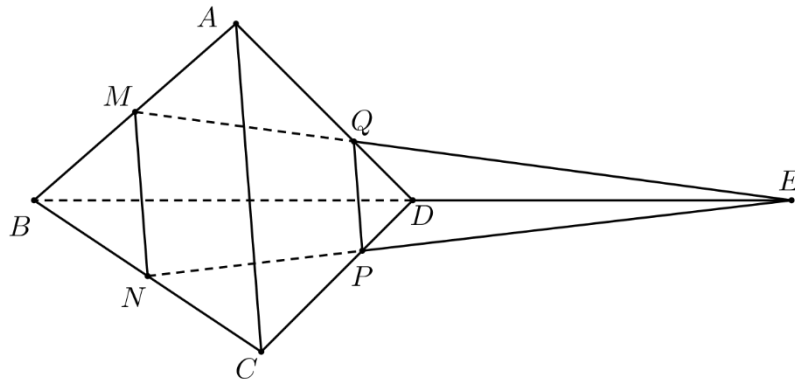
B. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $P = CD \cap NE$, $Q = AD \cap ME$, khi đó (MNE) chia hình chóp là hai khối đa diện gồm $ACMNPQ$ và $BMNDQP$.

Dễ dàng chứng minh được P , Q lần lượt là trọng tâm tam giác EBC và EAB . Khi đó:

$$\frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } V_{E.DQP} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot V_{E.BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} V_{E.BMN} = \frac{2}{9} V_{E.BMN}$$

$$\Rightarrow V_{BMNDQP} = V_{E.BMN} - V_{E.DQP} = \frac{7}{9} V_{E.BMN}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \quad \frac{d(E; (ABC))}{d(D; (ABC))} = \frac{EB}{DB} = 2$$

$$\text{Nên } \frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \frac{d(E;(ABC)) \cdot S_{\triangle BMN}}{d(D;(ABC)) \cdot S_{\triangle ABC}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } V_{BMNDQP} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{D.ABC} = \frac{7}{18} \cdot V_{D.ABC}$$

$$\Rightarrow V = V_{ACMNPQ} = V_{D.ABC} - V_{DMBDQP} = \frac{11}{18} \cdot V_{D.ABC} = \frac{11}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}.$$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Kí hiệu M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, CD sao cho $MA = MB, ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

A. $V = 40$.

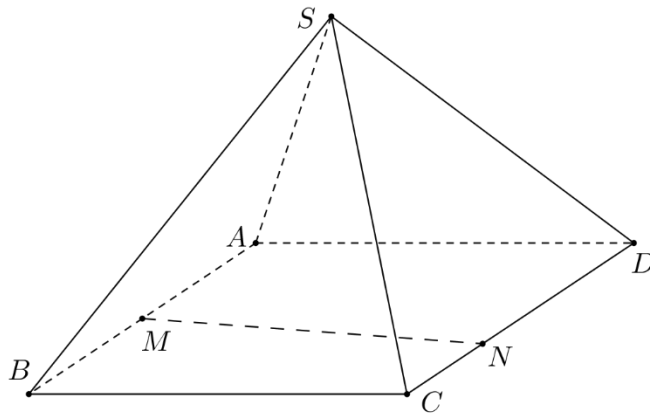
B. $V = 8$.

C. $V = 20$.

D. $V = 28$.

Lời giải

Chọn C



Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD .

$$\text{Ta có } S_{MBCN} = \frac{1}{2} (BM + CN) \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} AB + \frac{1}{3} CD \right) \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot AB \cdot d = \frac{5}{12} \cdot S_{ABCD}.$$

$$\text{Nên } V_{S.MBCN} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} = \frac{5}{12} \cdot 48 = 20.$$

Câu 46. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm I , các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tính thể tích của phần khối hộp nằm ngoài khối nón $I.MNPQ$.

A. $\frac{11V}{12}$.

B. $\frac{5V}{6}$.

C. $\frac{3V}{4}$.

D. $\frac{7V}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{AMQ} = \frac{1}{4} S_{ABD} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \left(1 - \frac{4}{8} \right) S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ và h là chiều cao của hình chóp đã cho.

$$\text{Vì vậy } V_{I.MNPQ} = \frac{1}{3} S_{MNPQ} \cdot d(I, (ABCD)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{h}{2} = \frac{V}{12}.$$

$$\text{Vậy Thể tích cần tính là } \frac{11V}{12}.$$

Câu 47. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Kí hiệu S' là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$.

A. $\frac{5V}{9}$.

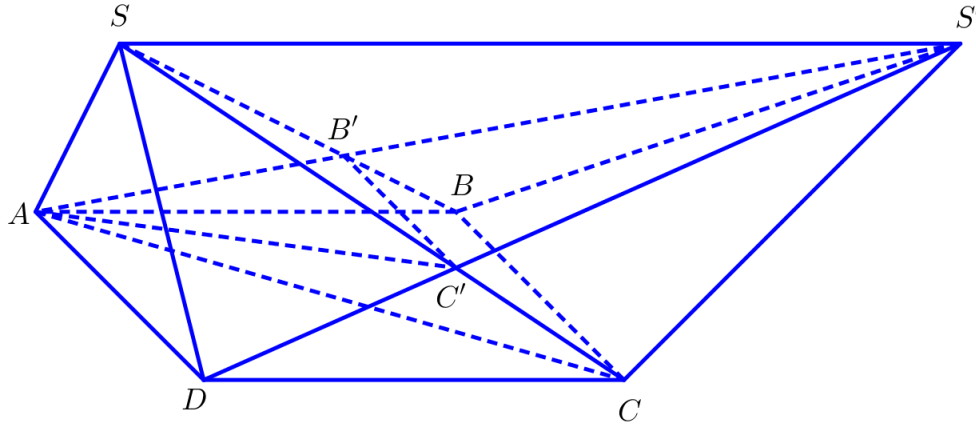
B. $\frac{4V}{9}$.

C. $\frac{V}{3}$.

D. $\frac{V}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $CD \parallel AB \parallel SS'$ do đó $S'D \cap SC = C'$, $S'A \cap SB = B'$.

Vì $B'C' \parallel BC$ và $\frac{B'B}{B'S} = \frac{AB}{SS'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$.

Phần chung của hai khối chóp là $ABCD.B'C'$.

Ta có $V_{ABCD.B'C'} = V - V_{S.ADC'B'} = V - (V_{S.AB'C'} + V_{S.ADC'})$ và theo công thức tỷ số thể tích ta có

$$V_{S.AB'C'} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_{S.ABC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{2}{9} V \text{ và } V_{S.ADC'} = \frac{2}{3} V_{S.ADC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{3} V.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ADC'B'} = \frac{2}{9} V + \frac{1}{3} V = \frac{5}{9} V \Rightarrow V_{ABCD.B'C'} = \frac{4}{9} V.$$

Câu 48. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\frac{1}{2}V$.

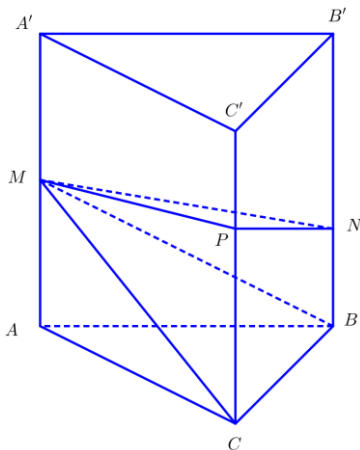
B. $\frac{7}{16}V$.

C. $\frac{7}{18}V$.

D. $\frac{11}{18}V$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$

$$\text{Trong đó } V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} V$$

$$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} V_{M.BCC'B'} = \frac{BP + CN}{BB' + CC'} V_{A.BCC'B'} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{1+1} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) V = \frac{1}{2} V.$$

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\frac{2}{3}V$.

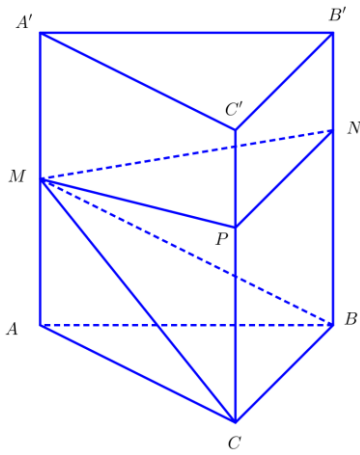
B. $\frac{9}{16}V$.

C. $\frac{20}{27}V$.

D. $\frac{11}{18}V$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$

Trong đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} V$

$$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} V_{M.BCC'B'} = \frac{BP + CN}{BB' + CC'} V_{A.BCC'B'} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{4}{9} V.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{9} \right) V = \frac{11}{18} V.$$

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Biết thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{1}{2}V$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x + y + z = 1$.

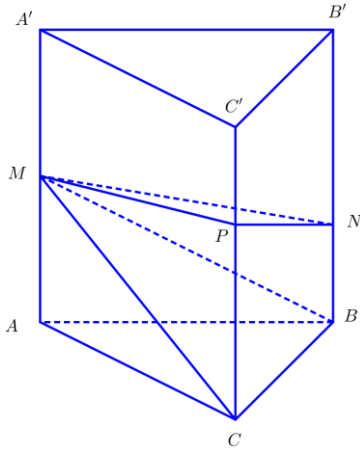
B. $x + y + z = 2$.

C. $x + y + z = \frac{3}{2}$.

D. $x + y + z = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$

Trong đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{x}{3} V$

$$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} V_{M.BCC'B'} = \frac{BP + CN}{BB' + CC'} V_{A.BCC'B'} = \frac{y + z}{1 + 1} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{y + z}{3} V.$$

Khi đó $V_{ABC.MNP} = \frac{x + y + z}{3} V.$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow \frac{x + y + z}{3} V = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow x + y + z = \frac{3}{2}.$$

Câu 51. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1, OB = 2, OC = 3$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh O xuống các cạnh BC, CA, AB . Thể tích khối tứ diện $ODEF$ bằng

A. $\frac{36}{325}.$

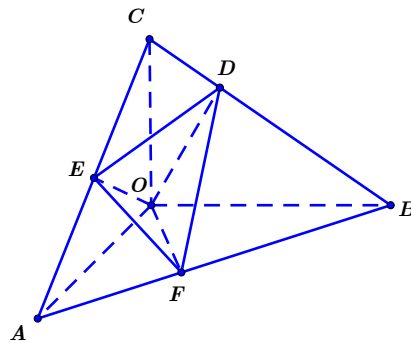
B. $\frac{276}{325}.$

C. $\frac{289}{325}.$

D. $\frac{49}{325}.$

Lời giải

Chọn A



*Ta có

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CO^2}{CA^2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{10}, \frac{CD}{CB} = \frac{CO^2}{CB^2} = \frac{9}{13} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{4}{13}, \frac{AF}{AB} = \frac{AO^2}{AB^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{BF}{BA} = \frac{4}{5}.$$

* Ta có thể tích khối tứ diện $OABC : V_0 = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = 1.$

$$* V_{A.OEF} = \frac{AO}{AO} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB} V_0 = \frac{1}{50} V_0, V_{C.OED} = \frac{CO}{CO} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CD}{CB} V_0 = \frac{81}{130} V_0, V_{B.ODF} = \frac{BO}{BO} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BF}{BA} V_0 = \frac{16}{65} V_0.$$

$$\text{Vậy } V_{ODEF} = \left(1 - \frac{1}{50} - \frac{81}{130} - \frac{16}{65} \right) V_0 = \frac{36}{325} V_0 = \frac{36}{325}.$$

Câu 52. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

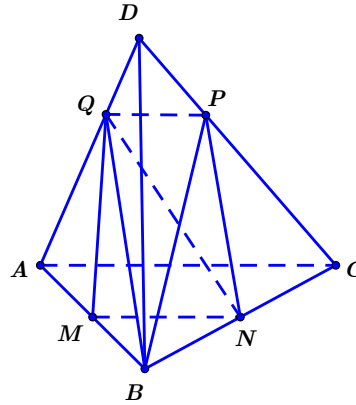
B. $\frac{23\sqrt{2}}{432}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{48}$.

D. $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Lời giải

Chọn B



*Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN \parallel AC$. Ta chia khối đa diện thành các khối tứ diện $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

*Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

*Ta có $V_{D.PQB} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} V_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_0 = \frac{4}{9} V_0$.

Và $V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} V_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} V_0 = \frac{1}{12} V_0$.

Và $V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ADC}} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} V_0 = \frac{1}{9} V_0$.

Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right) V_0 = \frac{23}{36} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}}{432}$.

Câu 53. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 10cm. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 8\text{cm}, AN = 9\text{cm}$. Thể tích khối tứ diện $AMND$ bằng

A. $V = \frac{250\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

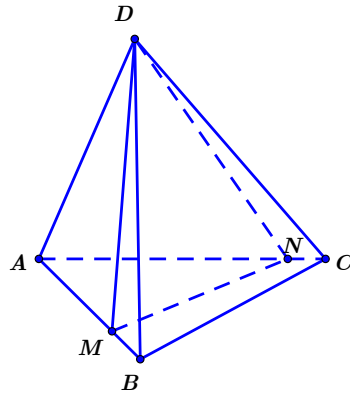
B. $V = 60\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

C. $V = 180\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

D. $V = 250\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

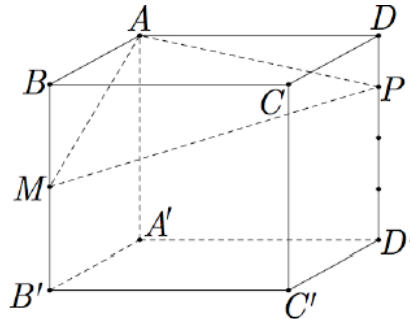
Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{AMND} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot V_{ABCD} = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10^3 \sqrt{2}}{12} = 60\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Câu 54. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng



A. $V = 2a^3$.

B. $V = 3a^3$.

C. $V = \frac{11}{3}a^3$.

D. $V = \frac{9}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn B

*Thể tích khối lập phương $V_0 = 8a^3$. Ta có $x = \frac{AA'}{AA'} = 0$; $y = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2}$; $z = \frac{CN}{CC'}$; $t = \frac{DP}{DD'} = \frac{1}{4}$.

*Ta có $x + z = y + t$ và $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_0} = \frac{1}{4}(x + y + z + t) = \frac{1}{2}(y + t) = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{AMNPBCD} = \frac{3}{8}V_0 = 3a^3$.

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Điểm P trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng

A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$.

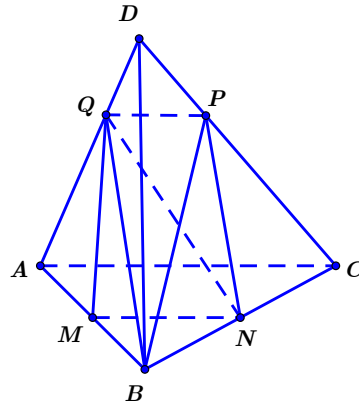
B. $\frac{\sqrt{2}}{27}$.

C. $\frac{5\sqrt{2}}{108}$.

D. $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải

Chọn D



*Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN$. Ta chia khối đa diện thành các khối tứ diện

$$V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}.$$

*Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

$$\text{Ta có } V_{D.PQB} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} V_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$\text{Và } V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} V_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} V_0 = \frac{1}{6} V_0.$$

$$\text{Và } V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ADC}} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$\text{Vậy } V_{BMNPQD} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) V_0 = \frac{7}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{7\sqrt{2}}{216}.$$

Câu 56. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60^\circ$, $BSC = 90^\circ$, $CSA = 120^\circ$. Gọi M, N lần là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}$.

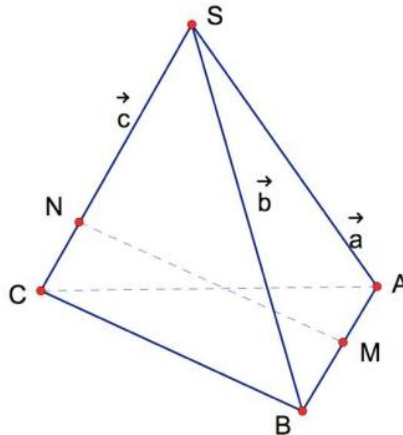
B. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$.

C. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có thể tích của khối chóp } S.ABC \text{ là } V_0 = \frac{a^3}{6} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

Đặt $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB} = m$ ($0 \leq m \leq 1$), ta có

$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{a^2}{2}.$$

Theo đẳng thức trên ta có sự biểu diễn vector

$$\overrightarrow{SN} = (1-m)\vec{c}, \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + m\overrightarrow{AB} = \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = (1-m)\vec{c} - [\vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a})] = (m-1)\vec{a} - m\vec{b} + (1-m)\vec{c}.$$

$$\text{Do đó } MN^2 = ((m-1)\vec{a} - m\vec{b} + (1-m)\vec{c})^2 = (3m^2 - 5m + 3)a^2 \geq \frac{11a^2}{12}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } m = \frac{5}{6} \Rightarrow V = \frac{SN}{SC} V_{SAMC} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{AM}{AB} V_0 = m(m-1)V_0 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{5\sqrt{2}a^3}{432}.$$

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = 3a$ vuông góc với đáy. Mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Thể tích khối đa diện $SAMNP$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$.

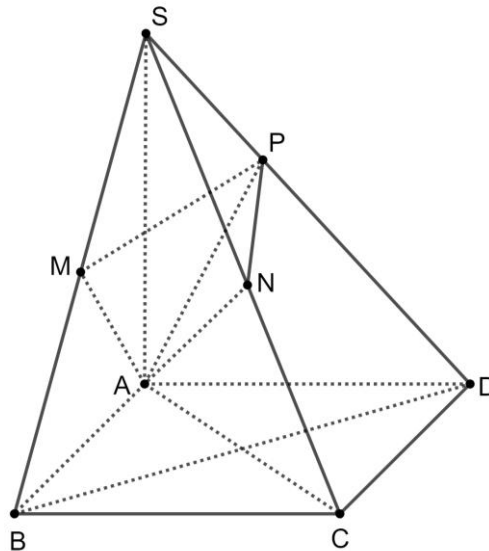
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Có $SB \perp AM$, $SC \perp AN$, $SD \perp AP$ và

$$x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}, z = \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{5}, t = \frac{SP}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{20}.$$

Câu 58. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$.

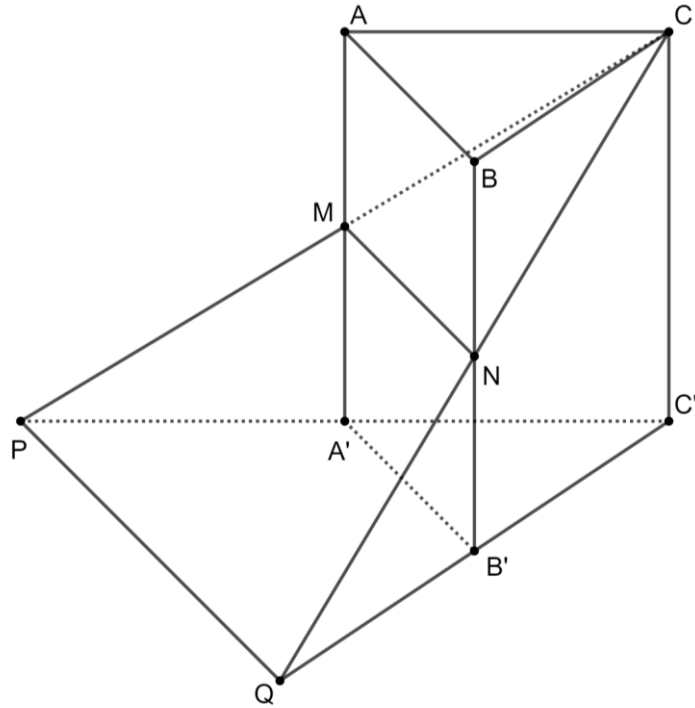
C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D





Ta có A' là trung điểm của PC' ; B' là trung điểm của QC' . Do đó

$$V_{C.C'PQ} = \frac{S_{CPQ}}{S_{CA'B'}} V_{C.A'B'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = 4 \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Mặt khác } V_{A'B'C'.MNC} = \frac{\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B'} + \frac{C'C}{C'C}}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 59. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh S .

A. $V = \frac{15\sqrt{2}a^3}{144}.$

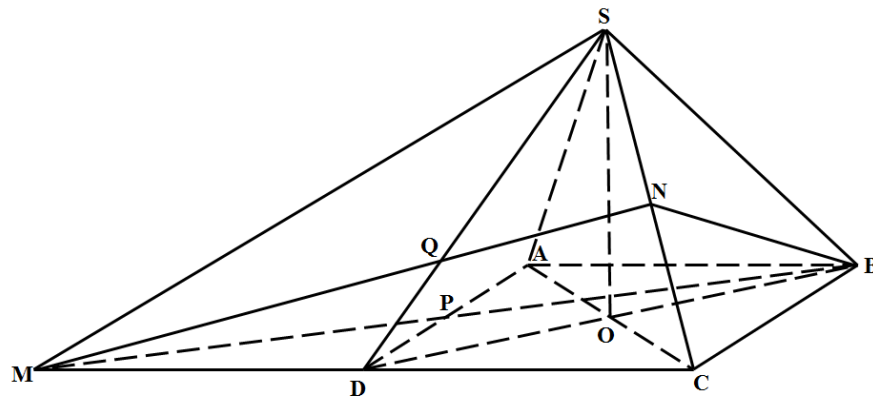
B. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{72}.$

C. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{144}.$

D. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{144}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $P = MB \cap AD$ và $Q = SD \cap MN$ suy ra Q là trọng tâm của

$$\text{tam giác } SMC \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d(Q, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{1}{3}.$$

Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S là $SABPQN$.

$$\text{Ta có } d(S, (ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AB^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Có } V_{N.BCM} = \frac{1}{3} d(N, (ABCD)) \cdot S_{BCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{MD \cdot BC}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Lại có } V_{Q.DMP} = \frac{1}{3} d(Q, (DMP)) \cdot S_{DMP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{MD \cdot PA}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}.$$

$$\text{Mà } V_{SABPQN} = V_{S.ABCD} + V_{Q.DMP} - V_{N.BCM} \Rightarrow V_{SABPQN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} + \frac{a^3\sqrt{2}}{72} - \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{72}.$$

Câu 60. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích V . Gọi M, N, P, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, SA . Tính thể tích khối chóp $H.MNP$.

A. $\frac{1}{12}V$.

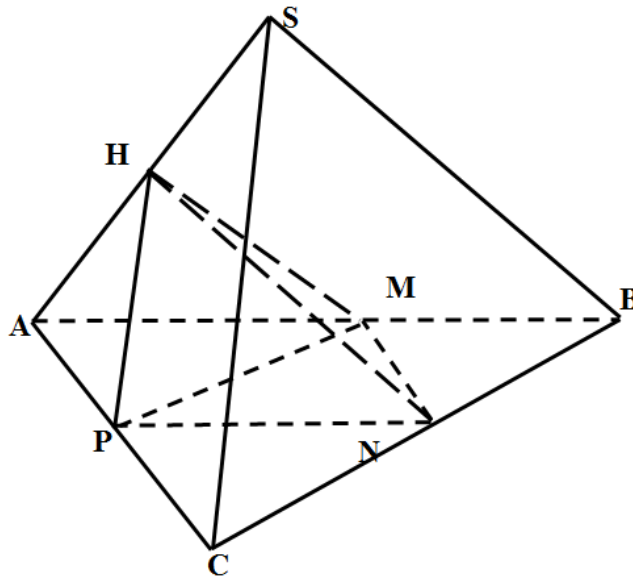
B. $\frac{1}{24}V$.

C. $\frac{1}{8}V$.

D. $\frac{3}{8}V$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } V = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC}.$$

$$\text{Lại có } V_{H.MNP} = \frac{1}{3} d(H, (MNP)) \cdot S_{MNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABC)) \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} d(S, (ABC)) S_{ABC} \right) = \frac{1}{8} V.$$

TỶ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

(ĐỀ SỐ 02)

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA, SB lần lượt tại D, E . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$.

A. $\frac{4a^3}{9}$.

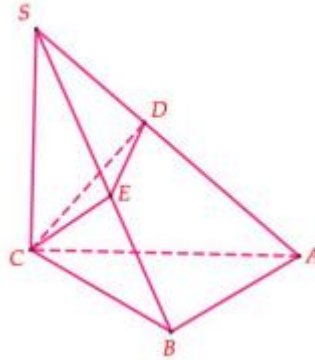
B. $\frac{8a^3}{27}$.

C. $\frac{2a^3}{9}$.

D. $\frac{16a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Lại có $\frac{V_{S.DEC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{SC^2}{SA^2} \cdot \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 2a^2} \cdot \frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2} = \frac{1}{3}$.

Do đó $V_{S.DEC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{9}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA, SB lần lượt tại D, E . Tính thể tích khối đa diện $ABCDE$.

A. $\frac{4a^3}{9}$.

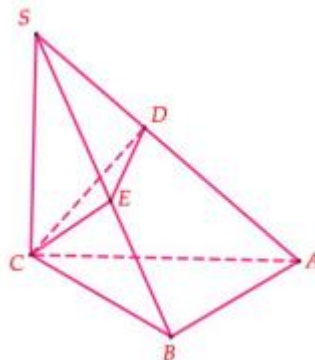
B. $\frac{8a^3}{27}$.

C. $\frac{2a^3}{9}$.

D. $\frac{19a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{S.DEC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{SC^2}{SA^2} \cdot \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 2a^2} \cdot \frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.DEC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{9}. \text{ Suy ra } V_{ABCDE} = V_{S.ABC} - V_{S.DEC} = \frac{2a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{4a^3}{9}.$$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, K, J . Tính thể tích khối chóp $S.AHKJ$.

A. $\frac{4a^3}{27}$.

B. $\frac{8a^3}{27}$.

C. $\frac{8a^3}{9}$.

D. $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{4a^3}{3} \text{ và } AH \perp SB, AK \perp SC, AJ \perp SD \text{ và } x = \frac{SA}{SB} = 1,$$

$$y = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}, z = \frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{2}, t = \frac{SJ}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.AHKJ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4} \cdot xyzt \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.AHKJ} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{9}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi với O là giao điểm của AC và BD . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $O.MNPQ$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. 8.

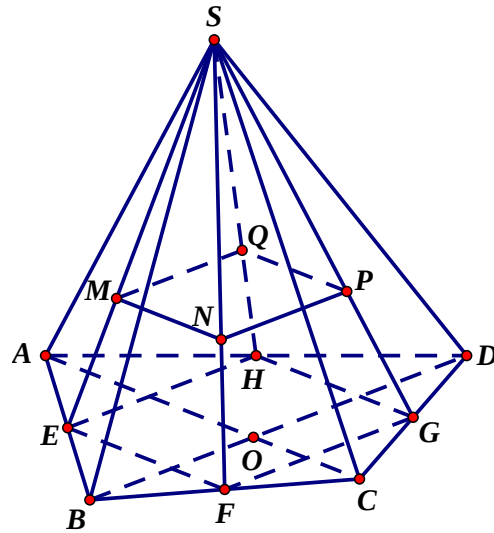
B. $\frac{27}{4}$.

C. $\frac{27}{2}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

Ta có $S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{EFGH} = \frac{4}{9} S_{EFGH}$ (do hai tứ giác $MNPQ$ và $EFGH$ đồng dạng theo tỉ số $\frac{2}{3}$).

Mà $S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{2}{9} S_{ABCD}$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{d(S, (ABCD))}{d(O, (MNPQ))} \cdot \frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}} = 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$.

Câu 5. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BB', CC' sao cho $\frac{MB}{BB'} = \frac{1}{2}; \frac{NC}{CC'} = \frac{1}{4}$. Thể tích khối chóp tứ giác $A.BMNC$ là

A. $\frac{V}{3}$.

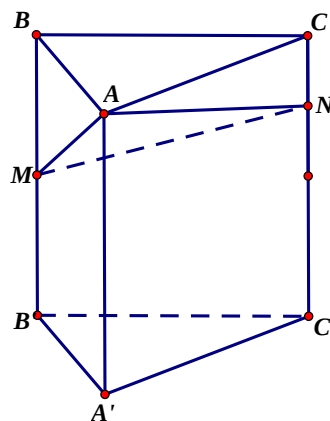
B. $\frac{3V}{8}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{4}$.

Lời giải

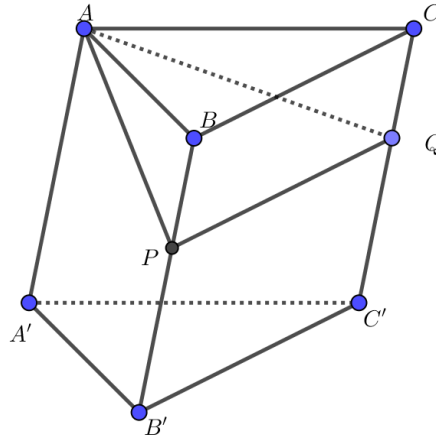
Chọn D



Ta có $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AA'}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CN}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

Vậy $V_{ABCMN} = \frac{V}{4}$.

- Câu 6.** Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng qua điểm A và điểm P thuộc cạnh BB' đồng thời song song cạnh BC , chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{PB}{PB'}$



A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 4

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\frac{BP}{BB'} = x$, Do $PQ \parallel BC$ nên $\frac{BP}{BB'} = \frac{CQ}{CC'} = x$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{ABCQP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{BP}{BB'} + \frac{CQ}{CC'} \right) = \frac{1}{3} (x + x) = \frac{2x}{3}$.

Mà giả thiết cho $V_{ABCQP} = V_{APQA'B'C'}$ nên suy ra $\frac{V_{ABCQP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

Suy ra $\frac{BP}{BB'} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{BP}{BP + PB'} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4BP = 3BP + 3PB' \Leftrightarrow PB = 3PB' \Leftrightarrow \frac{PB}{PB'} = 3$

- Câu 7.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng qua D , điểm Q thuộc cạnh AA' , điểm R thuộc cạnh CC' sao cho $\frac{QA}{QA'} = \frac{1}{3}$, $\frac{RC}{RC'} = 3$ chia khối hộp thành hai phần. Tính thể tích của phần chứa mặt đáy $(ABCD)$.

A. $\frac{V}{3}$.

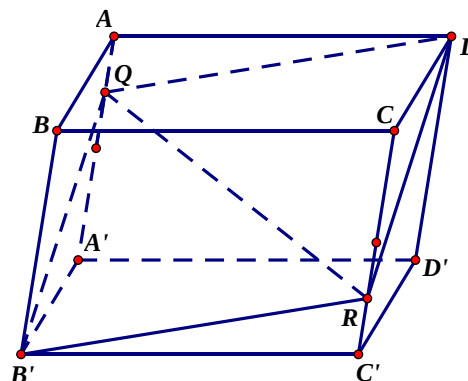
B. $\frac{2V}{3}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là khối hộp nên chứng minh được: $\triangle ADQ = \triangle C'B'R(c-g-c)$.

Suy ra: $DQ = RB'$.

Chứng minh tương tự ta có: $\triangle A'B'Q = \triangle CDR(c-g-c) \Rightarrow B'Q = DR$.

Do đó: tứ giác $B'QDR$ là hình bình hành.

Nên $QD // B'R \Rightarrow B' \in (DQR)$.

Ta có: $\frac{AQ}{AA'} + \frac{CR}{CC'} = \frac{BB'}{BB'} + \frac{DD}{DD'}$ hay: $\frac{1}{4} + \frac{CR}{CC'} = 1 + 0$

Suy ra: $\frac{CR}{CC'} = \frac{3}{4}$.

Mặt phẳng (DQR) chia khối hộp thành $ABCD.QB'R$ và $DQB'R.A'C'D'$.

Áp dụng công thức tính nhanh tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{ABCD.QB'R}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AQ}{AA'} + \frac{BB'}{BB'} + \frac{CR}{CC'} + \frac{DD}{DD'} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} + 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{ABCD.QB'R}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{ABCD.QB'R} = \frac{1}{2}V.$$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A, M, P cắt cạnh SC tại N với M, P là các điểm thuộc SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối đa diện $ABCD.MNP$.

A. $\frac{23}{30}V$.

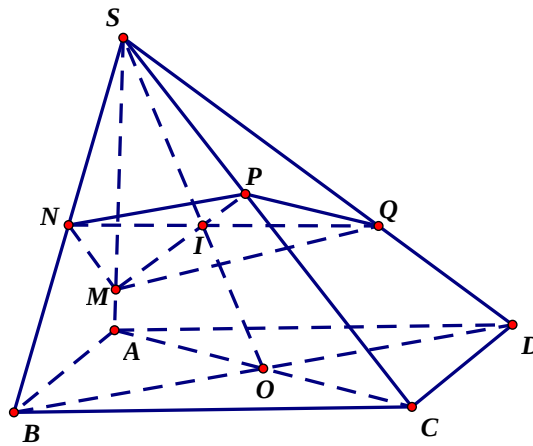
B. $\frac{7}{30}V$.

C. $\frac{14}{15}V$.

D. $\frac{1}{15}V$.

Lời giải

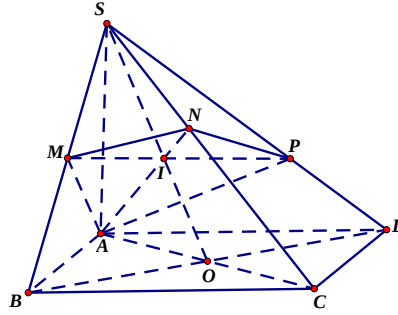
Chọn A



Ta có công thức cho bài toán tổng quát: cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q như hình vẽ.

Đặt: $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z, \frac{SQ}{SD} = t$. Khi đó ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$.

Áp dụng vào bài toán ta có:



(AMNP) là mặt phẳng cắt nên: $\frac{SA}{SA} = 1, \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{SC} = x, \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\frac{1}{1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

Khi đó: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}; \frac{V_{SANP}}{V_{SACD}} = 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Nên: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SANP}}{V_{SACD}} = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$ hay: $\frac{V_{S.AMNP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{7}{30}$.

Do đó: $\frac{V_{AMNP.BCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{23}{30}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua ba điểm M, N, P cắt cạnh DD' tại Q . Tính thể tích của khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

A. $\frac{7}{12}V$.

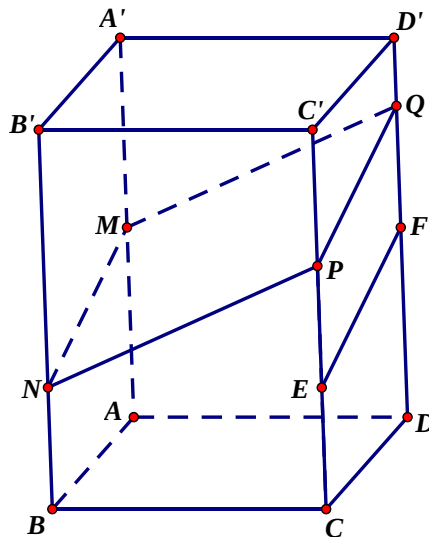
B. $\frac{7}{8}V$.

C. $\frac{11}{12}V$.

D. $\frac{5}{12}V$.

Lời giải

Chọn A



Công thức tính nhanh: ta có: $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$.

Suy ra: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{DQ}{DD'} \Rightarrow \frac{DQ}{DD'} = \frac{5}{6}$.

Do đó tỉ số thể tích: $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{12}$.

Vậy: $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{7}{12} V$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P, Q trên các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Mặt phẳng (α) qua ba điểm M, N, P cắt cạnh DD' tại Q sao cho $\frac{DQ}{DD'} = t$. Tính thể tích của khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

A. $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{3(x+y+z+t)}{4} V$.

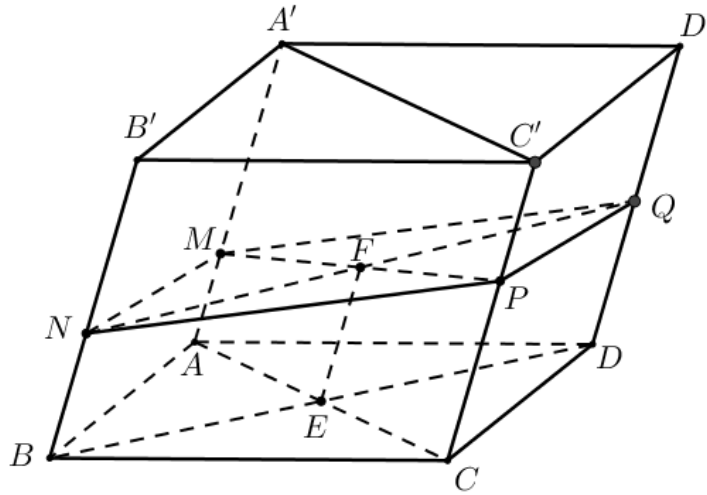
B. $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{3(x+y+z+t)}{8} V$.

C. $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{8} V$.

D. $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{4} V$.

Chọn D

Lời giải



Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AC và BD ; MP và NQ .

Khi đó $AMPC, BNQD$ là các hình thang nên $BN + DQ = AM + CP = 2EF$ hay có $x + z = y + t$.

Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{N.ABC} + V_{N.ACMP} = \frac{y}{3} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{x+z}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{y}{6} V + \frac{x+z}{6} V = \frac{x+y+z}{6} V$.

Tương tự ta có $V_{ACD.MPQ} = \frac{x+z+t}{6} V$.

Do đó $V_{ABCD.MNPQ} = V_{ABCC.MNP} + V_{ACD.MPQ} = \frac{x+y+z}{6} V + \frac{x+z+t}{6} V = \frac{2x+2z+y+t}{6} V$.

$= \frac{4x+4z+2y+2t}{12} V = \frac{3x+3z+(x+z)+2y+2t}{12} V = \frac{3x+3z+(y+t)+2y+2t}{12} V$.

$= \frac{3x+3z+3y+3t}{12} V = \frac{x+y+z+t}{4} V$.

Vậy $V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{4} V$.

Câu 11. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 4a$ và $BAD = 60^\circ$, $A'D = A'B = 120^\circ$. Biết tất cả các cạnh của khối hộp bằng nhau. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

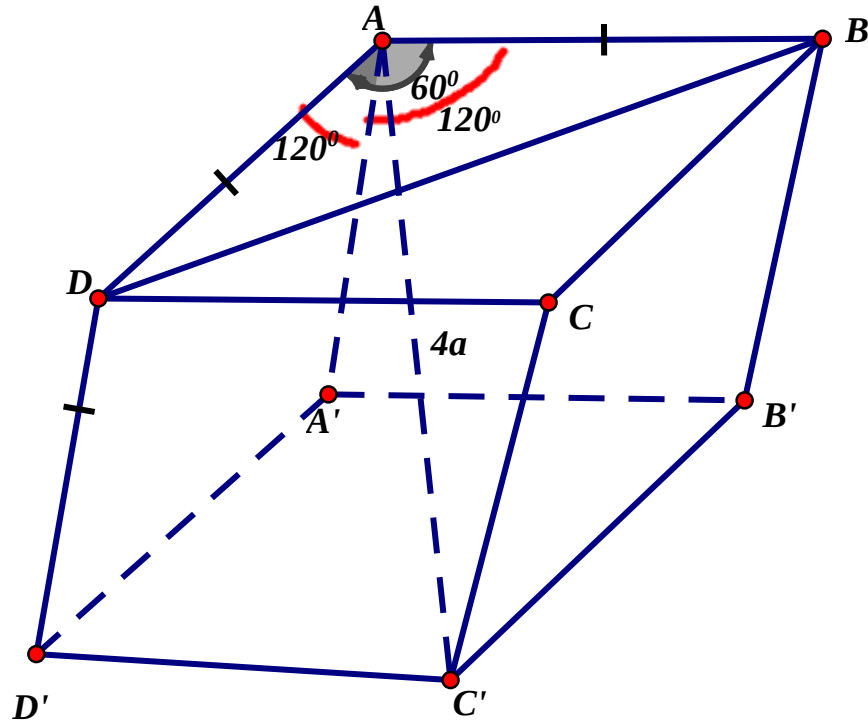
A. $V = \frac{8}{3}a^3$.

B. $V = \frac{32}{3}a^3$.

C. $V = 16a^3$.

D. $V = 32a^3$.

Lời giải



Chọn C

Gọi x là độ dài cạnh của khối hộp. Theo qui tắc hình hộp ta có

$$\begin{aligned} AC' &= \sqrt{AC'^2} = \sqrt{(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'})^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2 + 2(\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD} \cdot \overline{AA'} + \overline{AA'} \cdot \overline{AB})} \\ &= \sqrt{3x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)} = \sqrt{2x^2} = 4a \Rightarrow x = 2\sqrt{2}a. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } V = 6.V_{A.A'BD} = x^3 \sqrt{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{x^3}{\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}a)^3}{\sqrt{2}} = 16a^3$$

Câu 12. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có ABD là tam giác đều cạnh a . Các mặt phẳng $(ADD'A')$, $(ABB'A')$, $(A'BD)$ cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng 60° và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng đáy nằm khác phía với điểm A so với đường thẳng BD . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

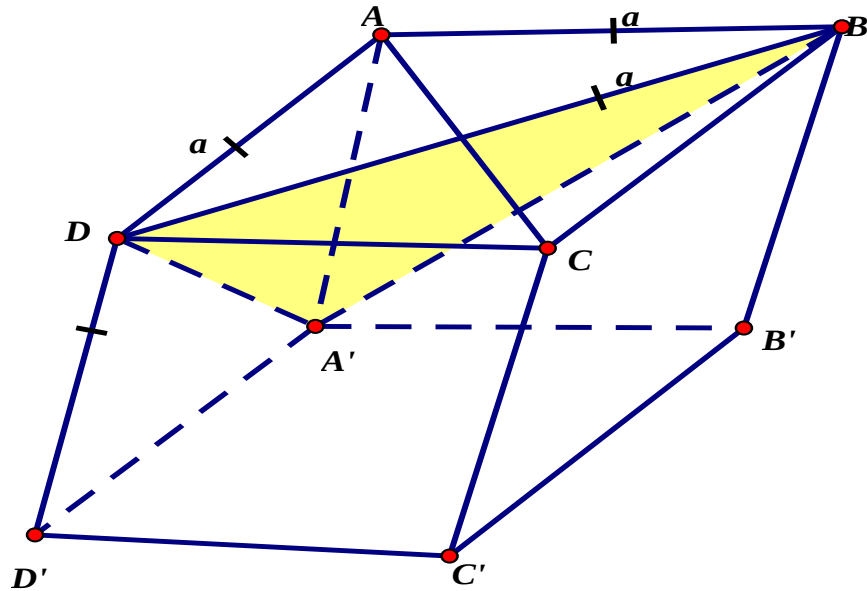
A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn A

$$\text{Ta có } V = 6.V_{A.A'BD} = \frac{6p(p-b)(p-c)\tan\alpha}{3} = 2\frac{3a}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng qua A và trung điểm N cạnh SC các cạnh SB , SD lần lượt tại M , P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{8}$.

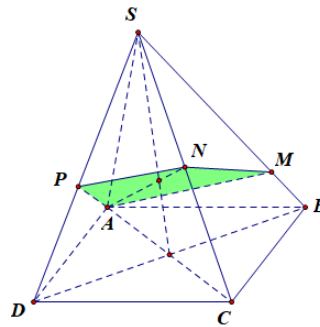
B. $\frac{3V}{8}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $x = \frac{SA}{SA} = 1$; $y = \frac{SM}{SB}$; $z = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$; $t = \frac{SP}{SD}$. Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + 2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = 3.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMNP} = \frac{1}{4}xyzt\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)V = \frac{1}{4}(3+3)yt.1.\frac{1}{2}V = \frac{3}{4}ytV.$$

$$\text{Mà } yt = \frac{y+t}{3} \geq \frac{2\sqrt{yt}}{3} \Rightarrow yt \geq \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMNP} \geq \frac{V}{3}.$$

Câu 14. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Mặt phẳng qua A , M là trung điểm cạnh CC' cắt các cạnh BB' , DD' lần lượt tại P , Q . Tính thể tích khối của khối đa diện $ABCD.PMQ$.

A. $\frac{3V}{4}$.

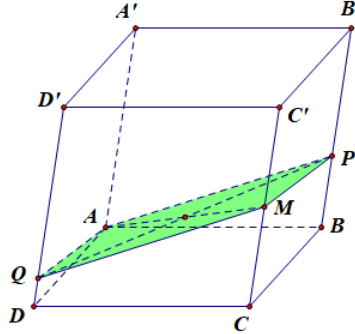
B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $x = \frac{AA'}{AA'} = 0$, $y = \frac{BP}{BB'}$, $z = \frac{CM}{CC'} = \frac{1}{2}$, $t = \frac{DQ}{DD'}$ và $x + z = y + t = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.PMQ} = \frac{x+t+z+t}{4}V = \frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4}V = \frac{V}{4}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = BSC = CSA = 30^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt hai cạnh SB , SC lần lượt tại B' , C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C'$, $S.ABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

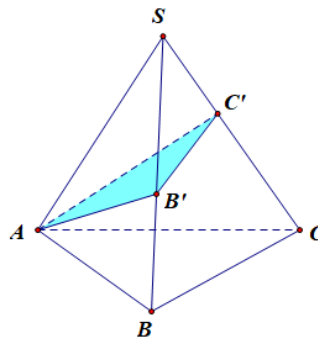
B. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3} - 1$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = 4 - 2\sqrt{3}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $x = \frac{SB'}{SB}$; $y = \frac{SC'}{SC}$. Ta có $\frac{V_1}{V_2} = xy$.

Theo định lý hàm cosin ta được

$$AB' = \sqrt{a^2 + a^2x^2 - \sqrt{3}a^2x}; AC' = \sqrt{a^2 + a^2y^2 - \sqrt{3}a^2y}; B'C' = \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 - \sqrt{3}a^2xy}.$$

Khi đó chu vi của $\triangle AB'C'$ là

$$\begin{aligned} 2p &= \sqrt{a^2 + a^2x^2 - \sqrt{3}a^2x} + \sqrt{a^2 + a^2y^2 - \sqrt{3}a^2y} + \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 - \sqrt{3}a^2xy} \\ &= a \left[\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{y^2 - \sqrt{3}y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right] \\
 &\geq a \left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right] \\
 &= a \left[\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right] = a \cdot f(x) \geq a \cdot f(\sqrt{3}-1) = a\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Dấu bằng đặt tại $x = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2} - y}$; $x = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3}-1$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = (\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = 30^\circ, BSC = CSA = 60^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) qua A cắt SB, SC lần lượt tại B', C' sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AB'C', S.ABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 3\sqrt{3}-5$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = 4-2\sqrt{3}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{3}-2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = \frac{SB'}{SB}, y = \frac{SC'}{SC}$, ta có $\frac{V_1}{V_2} = xy$ và theo định lí hàm số cosin ta có:

$$AB' = \sqrt{a^2 + a^2x^2 - \sqrt{3}a^2x}, AC' = \sqrt{a^2 + a^2y^2 - a^2y}, B'C' = \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 - a^2xy}.$$

Khi đó chu vi tam giác là:

$$\begin{aligned}
 2p &= \sqrt{a^2 + a^2x^2 - \sqrt{3}a^2x} + \sqrt{a^2 + a^2y^2 - a^2y} + \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 - a^2xy} \\
 &= a \left[\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} \right]
 \end{aligned}$$

$$= a \left[\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} \right]$$

$$\geq a \left[\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} \right]$$

$$= af(x) \geq af\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Dấu "=" đặt tại $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $x = \frac{\frac{1}{2}x - y}{y - \frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, y = 2 - \sqrt{3}$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot (2-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD thỏa mãn $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BD} = \frac{2}{3}$. Gọi S là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNP) . Tính thể tích khối tứ diện $AMNS$.

A. $\frac{2}{3}V$.

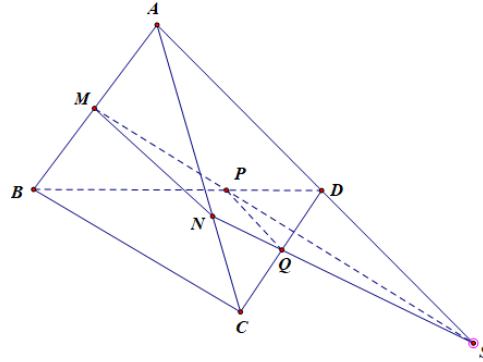
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{3}{4}V$.

D. $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (ABD) gọi $S = MP \cap AD$. Trong mặt phẳng (ACD) gọi $Q = SN \cap CD$

Ta có $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot \frac{SD}{SA} = 1 \Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{1}{2}$.

Do đó $V_{A.MNS} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AS}{AD} V = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2V = \frac{2}{3}V$

Chọn A.

Câu 18. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6, SB = 2, SC = 4, AB = 2\sqrt{10}$ và $ASB = 90^\circ, BSC = 60^\circ, ASC = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) qua B và trung điểm N của SC , vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{9}$.

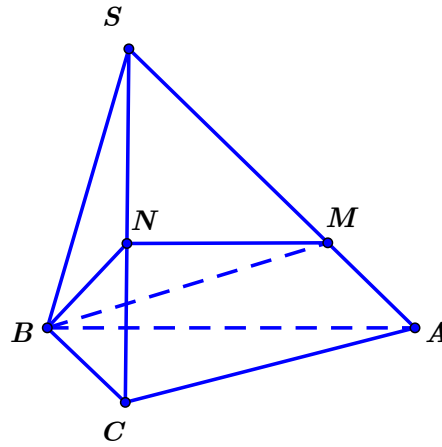
B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



*Đặt $k = \frac{SM}{SA}$ ta có $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}k$.

Các góc $ASB = 90^\circ, BSC = 60^\circ, ASC = 120^\circ$.

Đặt $\vec{SA} = \vec{a}, \vec{SB} = \vec{b}, \vec{SC} = \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 4 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{c} \cdot \vec{b} = 4, \vec{a} \cdot \vec{c} = -12 \end{cases}$.

Vì $(BMN) \perp (SAC)$ nên kẻ $BH \perp MN$ ($H \in MN$) $\Rightarrow BH \perp (SAC)$ và ta có biểu diễn vectơ cho ba điểm M, H, N thẳng hàng:

$$\vec{BH} = x\vec{BM} + (1-x)\vec{BN} = x(\vec{SM} - \vec{SB}) + (1-x)(\vec{SN} - \vec{SB}) = kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c}.$$

Giải điều kiện vuông góc ta có

$$\begin{cases} \vec{BH} \cdot \vec{SA} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \left(kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c} \right) = 0 \\ \vec{c} \cdot \left(kx\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}\vec{c} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36kx - 0 - 6(1-x) = 0 \\ -12kx - 4 + 8(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMN$ và V_2 là thể tích khối chóp $ABCNM$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

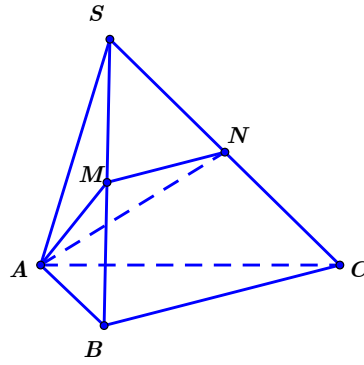
B. $\frac{V_1}{V_2} = 3$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



*Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4}V; V_2 = V - V_1 = \frac{3}{4}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}.$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AHK$ và V_2 là thể tích khối chóp $ABCKH$. Biết $\frac{V_1}{V_2} = \frac{81}{19}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

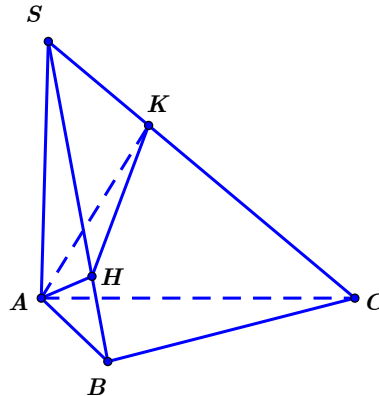
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$

C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{81}{19} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{81}{81+19} = \frac{81}{100}.$

Mặt khác $\frac{V_1}{V} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^4}{(SA^2 + a^2)^2} = \frac{81}{100} \Rightarrow SA = 3a.$

Vì vậy $V = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là một tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC . Biết $\frac{V_{S.AHB}}{V_{S.ABC}} = \frac{16}{19}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

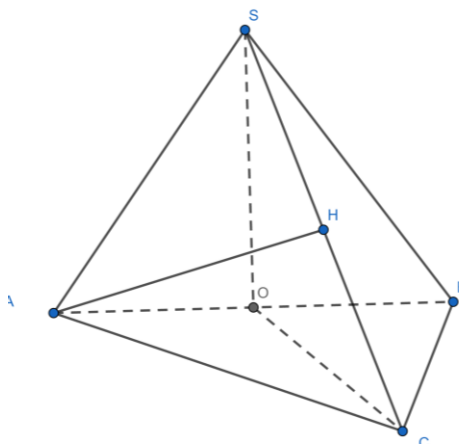
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm AB , ta có $SO \perp (ABC)$ và $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHB) \Rightarrow SC \perp OH$.

Suy ra: $\frac{V_1}{V} = \frac{SH}{SC} = \frac{SO^2}{SC^2} = \frac{SO^2}{SO^2 + OC^2} = \frac{SO^2}{SO^2 + \frac{3}{4}} = \frac{16}{9} \Rightarrow SO = 2$.

Vì vậy: $V = \frac{1}{3} SO \cdot dt(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}, \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại điểm Q . Tính thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

A. $\frac{5}{63}V$.

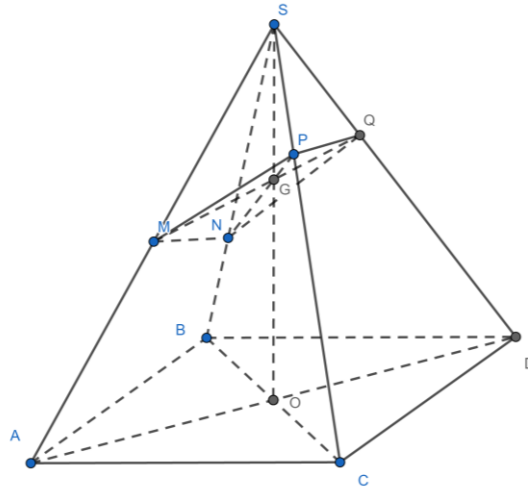
B. $\frac{10}{63}V$.

C. $\frac{53}{63}V$.

D. $\frac{58}{63}V$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $x = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}, y = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}, z = \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}, t = \frac{SQ}{SD}$.

Ta có tỷ số: $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SQ} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow t = \frac{2}{7}$.

Vậy $V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.PMQ} = xyz \frac{1}{2}V + ztx \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}xz(y+t)V = \frac{5}{63}V$

Suy ra $V_{ABCD.MNPQ} = \left(1 - \frac{5}{63}\right)V = \frac{58V}{63}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{3}{4}$. Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và qua M chia khối chóp thành hai khối đa diện. Nếu thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là 100 dm^2 thì thể tích của khối đa diện còn lại là?

A. $\frac{324}{7}(\text{dm}^3)$.

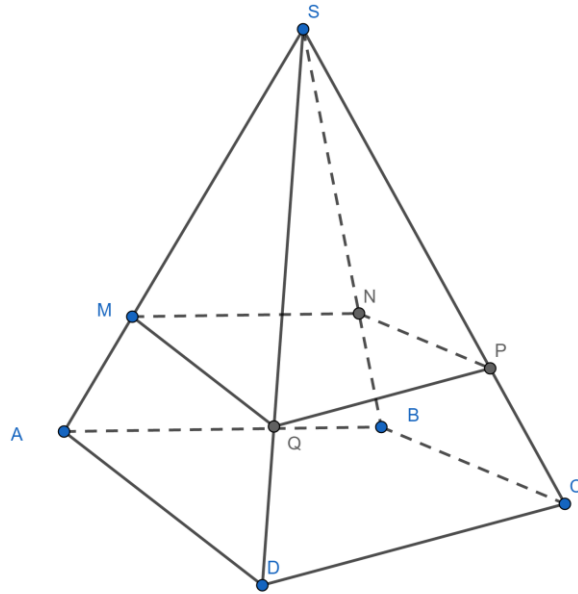
B. $\frac{2700}{37}(\text{dm}^3)$.

C. $\frac{3700}{27}(\text{dm}^3)$.

D. $\frac{2025}{64}(\text{dm}^3)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) và các cạnh SB, SC, SD .

Ta có: $dt(MNPQ) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 dt(ABCD) = \frac{9}{16} dt(ABCD)$ và $kc(S, MNPQ) = \frac{3}{4} kc(S, ABCD)$.

Suy ra: $V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3} kc(S, MNPQ) dt(MNPQ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} dt(ANBCD) \cdot \frac{3}{4} kc(S, ABCD) = \frac{27}{64} V_{S.ABCD}$.

Vậy: $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{27}{64-27} = \frac{27}{37} \Rightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{27}{37} \cdot 100 = \frac{2700}{37} (dm^3)$.

Câu 24. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a, AD = a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt M, N, P . Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$.

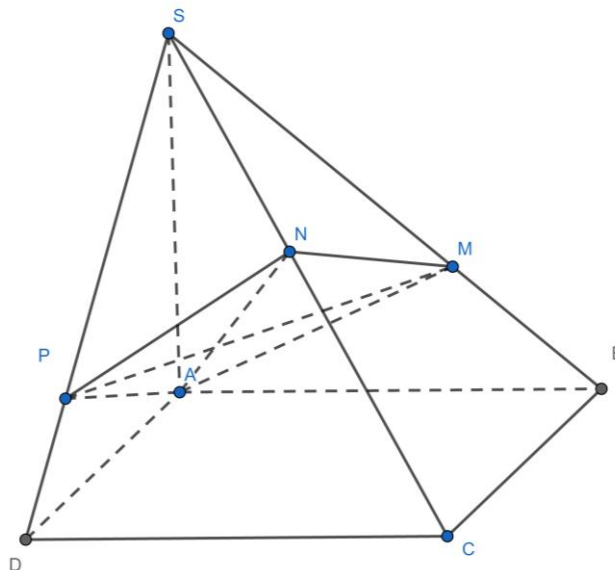
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{40}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{10}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{30}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM, SC \perp AN, SC \perp AP$.

Mặt khác: $CB \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp CB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$.

Tương tự $AP \perp SD$.

Thể tích khối chóp ban đầu là $V = \frac{1}{3} \sqrt{3} a^2 a = \frac{\sqrt{3} a^3}{3}$.

Tính các tỷ số: $x = \frac{SA}{SA} = 1; y = \frac{SM}{SB} \left(\frac{SA}{SB} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2} = \frac{1}{4};$

$z = \frac{SN}{SC} = \left(\frac{SA}{SC} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + 3a^2 + a^2} = \frac{1}{5}; t = \frac{SP}{SD} = \left(\frac{SA}{SD} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}.$

Vậy $V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V = \frac{\sqrt{3} a^3}{40}.$

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và có đáy là hình bình hành. Điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k \overrightarrow{DC} (k > 0)$. Biết thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là $\frac{7}{25} V$. Tìm

k .

A. $k = 9$.

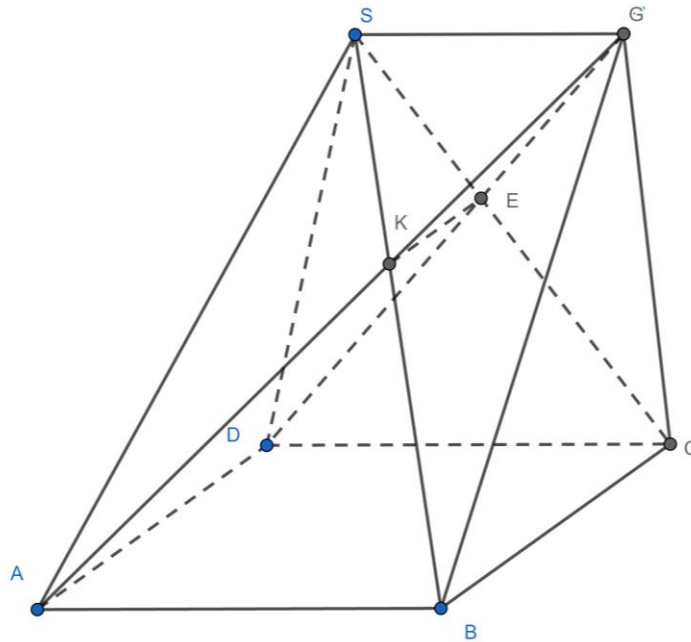
B. $k = 6$.

C. $k = 11$.

D. $k = 4$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AB // CD // SS' \Rightarrow B' = S'A \cap SB, C' = S'D \cap SC$.

Theo Ta lét ta có: $\frac{B'S}{B'B} = \frac{C'S}{C'D} = \frac{SS'}{DC} = k \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{k}{k+1}.$

Suy ra ta có: $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SB'}{SB} = \frac{k}{k+1}, z = \frac{SC'}{SC} = \frac{k}{k+1}, t = \frac{SD}{SD} = 1.$

$$\text{Vậy ta có: } V_{SABC'B'} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{\frac{k}{k+1}} \right) V = \frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2} V.$$

Suy ra thể tích phần chung là:

$$V' = V - V_{S.ADC'B'} = \left(1 - \frac{k^2(2k+1)}{2k(k+1)^2} \right) V = \frac{7}{25} V \Leftrightarrow k = 4.$$

Câu 26. Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là các hình thoi cạnh a , các góc xuất phát từ đỉnh A đều bằng 60° . Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$

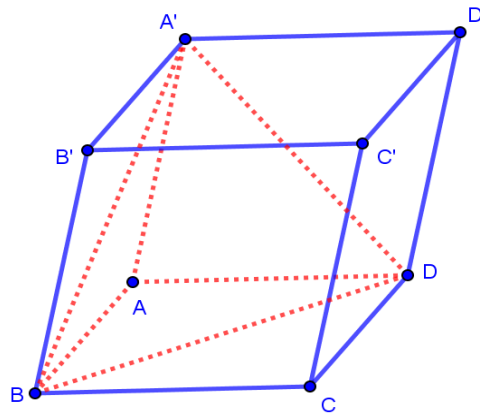
B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} AB = AD = AA' = a \\ \cos BAD = \cos A'AD = \cos A'AB = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $V = 6V_{A'.ABD} = a^3 \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$

Câu 27. Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là các hình thoi cạnh a , các góc $BAD = 60^\circ$, $A'AB = A'AD = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$

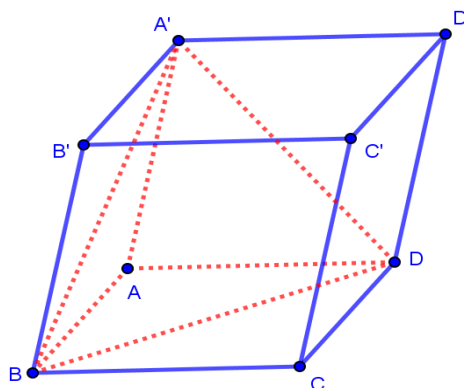
B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có
$$\begin{cases} AB = AD = AA' = a \\ \cos BAD = \frac{1}{2}; \cos A'AD = \cos A'AB = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có
$$V = 6V_{A'.ABD} = a^3 \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$$

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' và $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Gọi V', V lần lượt là thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$

A. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{9}$.

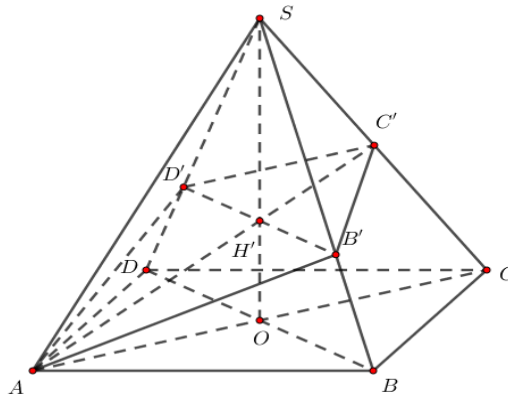
B. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{9}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$

Ta kẻ $AC' \perp SC$ tại C' , gọi $H' = AC' \cap SO$.

Theo giả thiết $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow BD \parallel (P)$

Vậy $(P) \cap (SBD) = B'D' \parallel BD$ và $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SO} \Rightarrow H'$ là trọng tâm tam giác SBD do đó C' là trung điểm cạnh SC

Vậy ta có $x = \frac{SA}{SA'} = 1, y = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}, z = \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}, t = \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}$

Do đó $\frac{V'}{V} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{3}.$

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' và $AB = a; \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.AB'C'D'$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

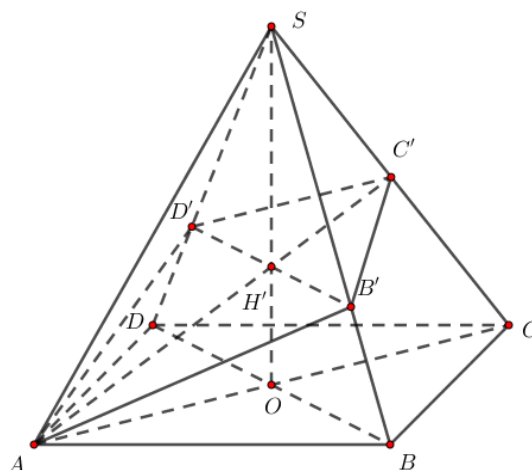
B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{27}$.

C. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{27}$.

D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{9}$.

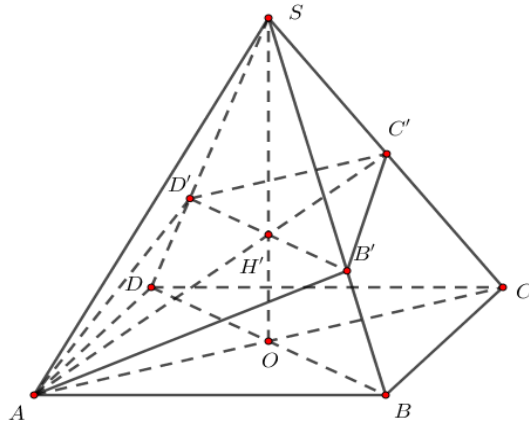
Lời giải

Chọn A



Chọn B





Gọi $O = AC \cap BD$; $H' = AC' \cap SO$.

Với $x = \frac{SA}{SA'} = 1, y = \frac{SM}{SB} \in [0;1], z = \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}, t = \frac{SN}{SD}$

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + 2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{y}{3y-1} \left(\frac{1}{3} < y < 1 \right)$

Do đó $V_{SAMNP} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V = \frac{3y^2}{4(3y-1)} V$.

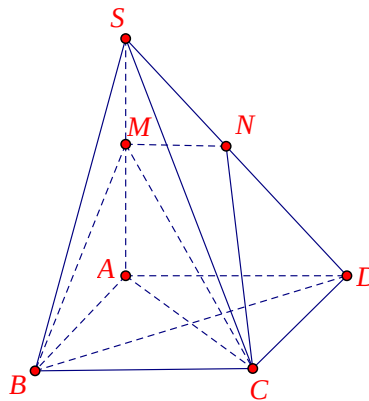
Theo giả thiết ta có phương trình $\frac{3y^2}{4(3y-1)} V = \frac{27}{56} V \Leftrightarrow y = \frac{3}{7} \left(\frac{1}{3} < y < 1 \right)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = b$ và cạnh bên $SA = c$ vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ ($0 < x < c$). Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $x = \frac{(3-\sqrt{2})c}{2}$. B. $x = \frac{(2-\sqrt{3})ab}{2c}$. C. $x = \frac{(3-\sqrt{5})c}{2}$. D. $x = \frac{(\sqrt{5}-1)ab}{2c}$.

Lời giải

Chọn C



Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại N . Khi đó (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông $MNCB$ tại M và B .

Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{c-x}{c} \Rightarrow \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{c-x}{c}$

$\Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{c-x}{2c} V_{S.ABCD}$.

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \left(\frac{c-x}{c} \right)^2$$

$$\Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{(c-x)^2}{2c^2} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.MNBC} = \left(\frac{c-x}{2c} + \frac{(c-x)^2}{2c^2} \right) V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2 - cx + (c-x)^2}{2c^2} \right) V_{S.ABCD}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \frac{c^2 - cx + (c-x)^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3cx + c^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{(3-\sqrt{5})c}{2}.$$

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh $A'B', BB', DD'$. Mặt phẳng (MNP) cắt AA' tại I . Biết thể tích khối tứ diện $IANP$ là V . Tính thể tích khối hộp.

A. $6V$.

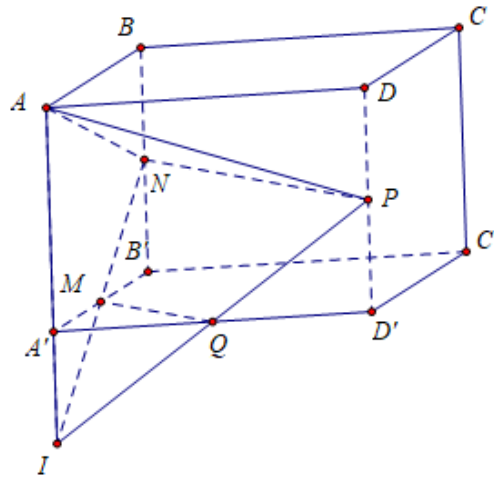
B. $12V$.

C. $4V$.

D. $2V$.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (MNP) cắt $A'D'$ tại Q theo tính chất giao tuyến ta có $MQ // NP$. Do đó $IA' = BN$ và M, Q lần lượt là trung điểm các đoạn IN, IP

$$\text{Khi đó: } V_{IA'MQ} = \frac{IA'}{IA} \cdot \frac{IM}{IN} \cdot \frac{IQ}{IP} \cdot V \Leftrightarrow V_{IA'MQ} = \frac{1}{12} V.$$

$$\text{Ta có: } V_{IA'MQ} = \frac{1}{3} \cdot d(I, (A'B'C'D')) \cdot S_{A'MQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(A', (ABCD)) \cdot \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{48} \cdot V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{1}{48} \cdot V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{12} V \Leftrightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V.$$

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là hình hộp chữ nhật có bốn đỉnh là bốn trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và bốn đỉnh còn lại nằm trong đáy $ABCD$. Biết thể tích khối hộp H là V . Tính thể tích của khối hộp đã cho.

A. $\frac{4V}{3}$.

B. $2V$.

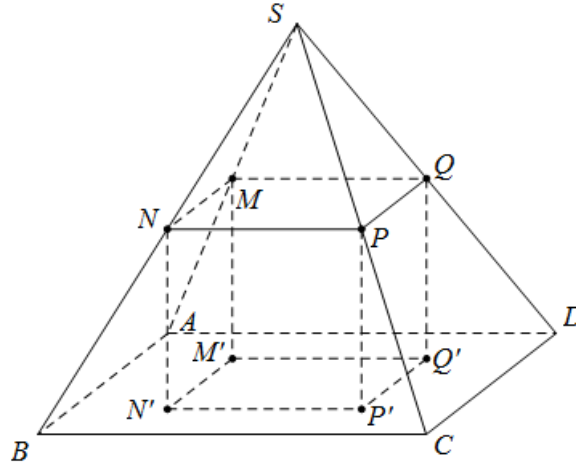
C. $\frac{8V}{3}$.

D. $6V$.

Lời giải

Chọn C





Gọi các điểm như hình vẽ.

$$\text{Ta có } V = S_{M'N'P'Q'} \cdot MM' = \frac{1}{4} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} \cdot d(S, (ABCD)) = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{8}{3} V.$$

Câu 34. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Hai mặt phẳng (ACB') và $(BA'C')$ chia khối lăng trụ đã cho thành bốn phần. Tính thể tích của phần có thể tích lớn nhất

A. $\frac{V}{2}$.

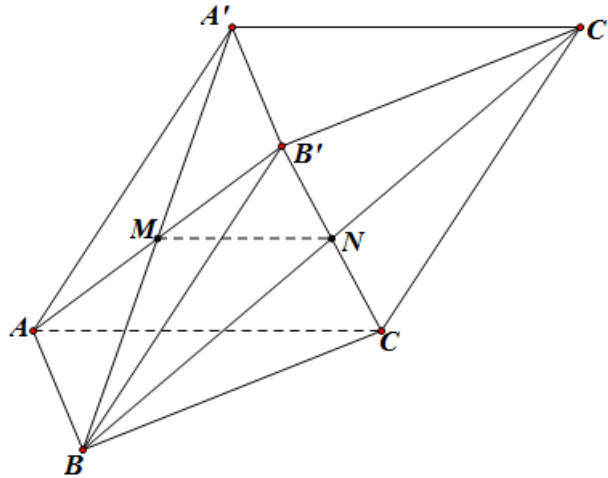
B. $\frac{3V}{5}$.

C. $\frac{5V}{12}$.

D. $\frac{2V}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Hai mặt phẳng (ACB') và $(BA'C')$ chia khối lăng trụ thành các khối $B'MBN$, $MNCC'A'A$, $MNBCA$, $MNB'C'A'$.

$$\text{Trong đó } \frac{V_{B'MBN}}{V_{B'ABC}} = \frac{B'M}{B'A} \cdot \frac{B'B}{B'B} \cdot \frac{B'N}{B'C} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{B'MBN} = \frac{1}{4} V_{B'ABC} = \frac{1}{12} V.$$

$$\text{Suy ra } V_{MNCC'A'A} = V_{B'ABC} - V_{B'MBN} = \frac{3}{4} V_{B'ABC} = \frac{1}{4} V.$$

$$\text{Tương tự, } V_{MNB'A'C'} = V_{BA'B'C'} - V_{BMNB'} = \frac{1}{3} V - \frac{1}{12} V = \frac{1}{4} V.$$

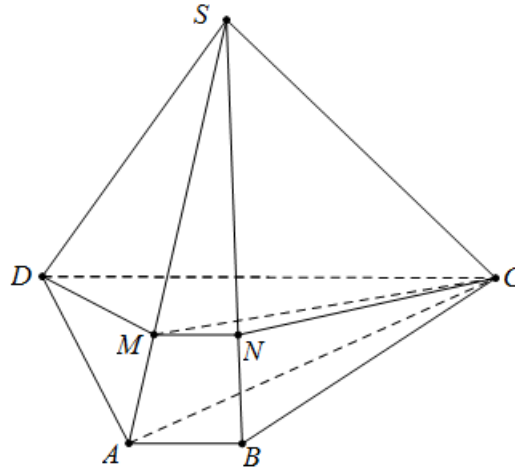
$$\text{Do đó } V_{MNCC'A'A} = V - V_{B'MBN} - V_{MNCC'A'A} - V_{MNB'A'C'} = \left(1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) V = \frac{5}{12} V.$$

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $CD = 4AB$. Gọi M là một điểm trên cạnh SA sao cho $0 < AM < SA$. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ sao cho mặt phẳng (CDM) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

- A. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. B. $\frac{SM}{SA} = \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$. C. $\frac{SM}{SA} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$. D. $\frac{SM}{SA} = \frac{-4 + \sqrt{23}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Từ M kẻ đường thẳng song song với AB , cắt SB tại N . Khi đó mặt phẳng (CDM) chia khối chóp thành hai khối đa diện $S.CMND, CMNDBA$.

Đặt $x = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}, 0 < x < 1$.

Ta có $\frac{V_{S.ADC}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} = 4 \Rightarrow V_{S.ADC} = \frac{4}{5}V_{S.ABCD}, V_{S.ABC} = \frac{1}{5}V_{S.ABCD}$.

Mặt khác $\frac{V_{SMCD}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow V_{SMCD} = \frac{4x}{5}V_{S.ABCD}$.

$\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = x^2 \Rightarrow V_{SMNC} = \frac{x^2}{5}V_{S.ABC}$.

Vậy $V_{SMNCD} = \left(\frac{4x}{5} + \frac{x^2}{5} \right) V_{S.ABCD} = \frac{V_{S.ABCD}}{2}$.

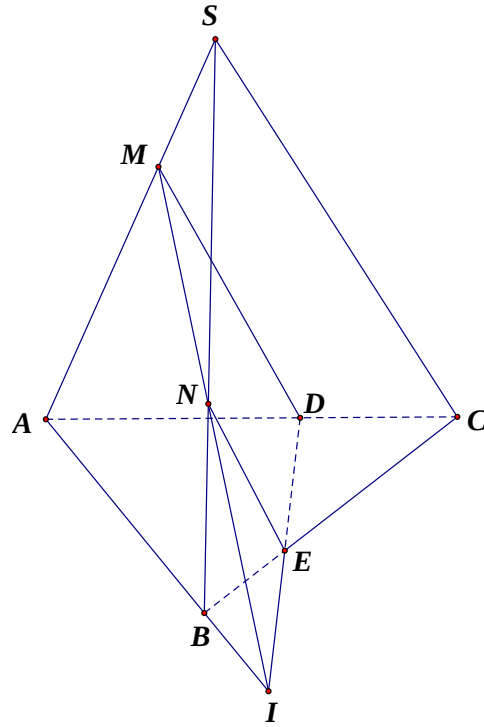
Suy ra $\frac{4x + x^2}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{26}}{2}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích V . Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích của khối đa diện có thể tích lớn hơn.

- A. $\frac{5V}{6}$. B. $\frac{5V}{8}$. C. $\frac{5V}{9}$. D. $\frac{7V}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Kéo dài MN cắt AB tại I . Kẻ $MD \parallel SC$, ID cắt BC tại E .

Ta có tứ giác $MNED$ là thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Trong tam giác SAB ta có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{IA}{IB} = 4$.

Do đó $\frac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow V_{A.MDI} = \frac{16}{27}V$.

Mặt khác $\frac{V_{IBNE}}{V_{I.AMD}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{ID} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{I.BNE} = \frac{1}{16}V_{A.MDI} = \frac{1}{27}V$.

Do đó $V_{AMD.BNE} = \left(\frac{16}{27} - \frac{1}{27} \right)V = \frac{5}{9}V$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SB} = x$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tìm x .

A. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{3}$.

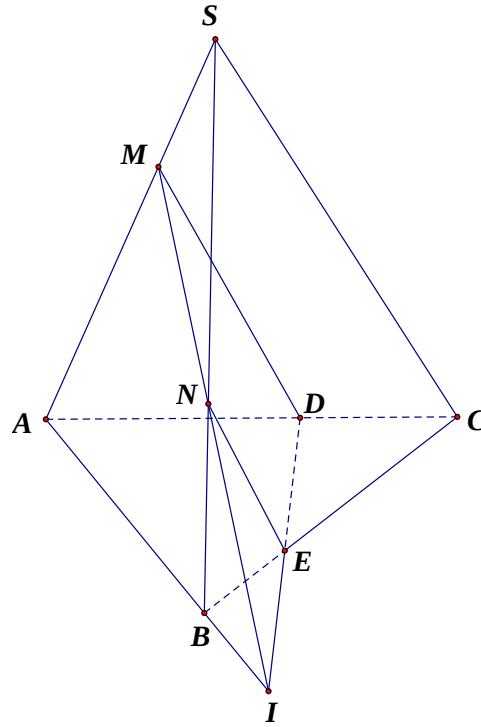
B. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{6}$.

C. $x = \frac{4 - \sqrt{5}}{6}$.

D. $x = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$.

Lời giải

Chọn B.



Kéo dài MN cắt AB tại I . Kẻ $MD \parallel SC$, ID cắt BC tại E .

Ta có tứ giác $MNED$ là thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Trong tam giác SAB ta có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{2x}{1-x}$.

Do đó $\frac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{1-x} \Rightarrow V_{A.MDI} = \frac{8x}{9(3x-1)} V$.

Trong tam giác AMI có $\frac{SM}{SA} \cdot \frac{NI}{NM} \cdot \frac{BA}{BI} = 1 \Rightarrow \frac{NI}{NM} = \frac{3(1-x)}{3x-1}$.

Do đó $\frac{V_{IBNE}}{V_{I.AMD}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{ID} = \frac{1-x}{2x} \cdot \left[\frac{3(1-x)}{2} \right]^2 \Rightarrow V_{I.BNE} = \frac{(1-x)^3}{3x-1} V$.

Suy ra $V_{AMD.BNE} = \left[\frac{8x}{9(3x-1)} - \frac{(1-x)^3}{3x-1} \right] V = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow \frac{8x}{9(3x-1)} - \frac{(1-x)^3}{3x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8-\sqrt{10}}{6}$

Câu 38. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'C', C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương thành hai phần. Tính thể tích của phần có thể tích nhỏ hơn.

A. $\frac{3V}{8}$.

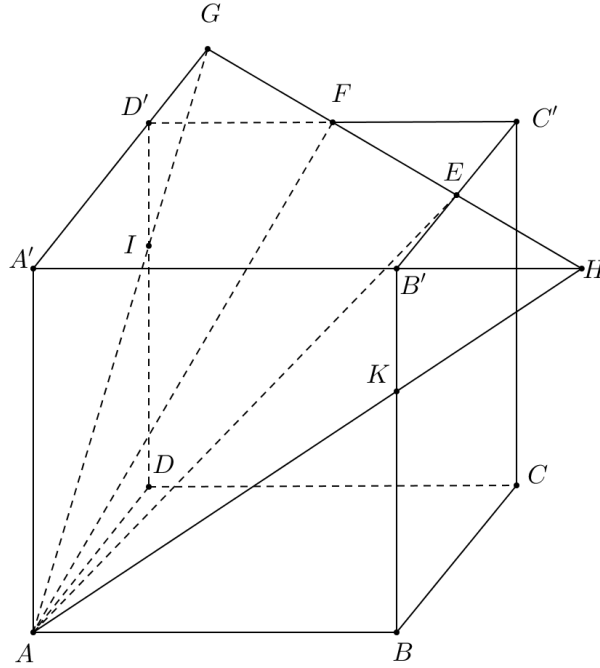
B. $\frac{25V}{72}$.

C. $\frac{5V}{16}$.

D. $\frac{9V}{32}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có: $D'G = \frac{1}{2}D'A'$, $B'H = \frac{1}{2}B'A'$, $B'K = \frac{1}{3}B'B$, $D'I = \frac{1}{3}D'D$.

Và $S_{A'HG} = \frac{9}{8}S_{A'B'C'D'} \Rightarrow V_{AGHA'} = \frac{3}{8}V$.

Mà $V_{EB'HK} = V_{GFD'I} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}V = \frac{1}{72}V \Rightarrow V_{A'IFEB'KD'} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{36}\right)V = \frac{25}{72}V$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Gọi $V' = V_{S.AMN}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$.

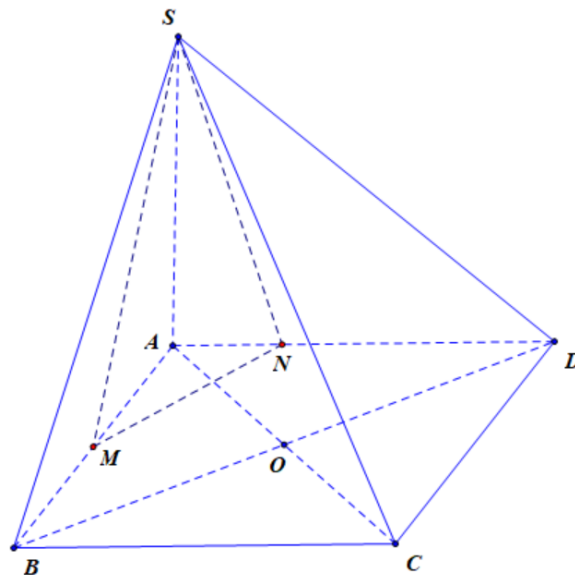
B. $\frac{1}{6}V$.

C. $\frac{1}{8}V$.

D. $\frac{1}{3}V$.

Lời giải

Chọn A.



$$\text{Đặt } \frac{AM}{AB} = x, \frac{AN}{AD} = y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{2x}{4x-1}.$$

Có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2} xy \Rightarrow V' = \frac{1}{2} xyV = \frac{x^2}{4x-1} \cdot V = \frac{V}{16} \left(4x-1 + \frac{1}{4x-1} + 2 \right) \geq \frac{V}{4}.$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy có đáy $ABCD$ là hình bình hành và thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AD sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Gọi $V' = V_{S.MBCDN}$. Tìm giá trị lớn nhất của V' .

A. $\frac{1}{4}V$.

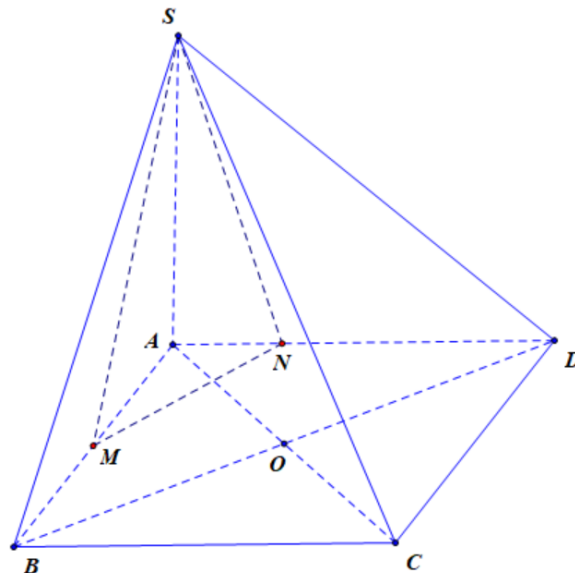
B. $\frac{2}{3}V$.

C. $\frac{3}{4}V$.

D. $\frac{1}{3}V$.

Lời giải

Chọn C.



$$\text{Đặt } \frac{AM}{AB} = x, \frac{AN}{AD} = y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{2x}{4x-1}.$$

Có

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.MBCDN}}{V_{S.ABCD}} &= 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = 1 - \frac{1}{2} xy \Rightarrow V' = \left(1 - \frac{1}{2} xy \right) V = \left(1 - \frac{x^2}{4x-1} \right) V \\ &= V - \frac{V}{16} \left(4x-1 + \frac{1}{4x-1} + 2 \right) \leq \frac{3V}{4}. \end{aligned}$$

Câu 41. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V

A. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$.

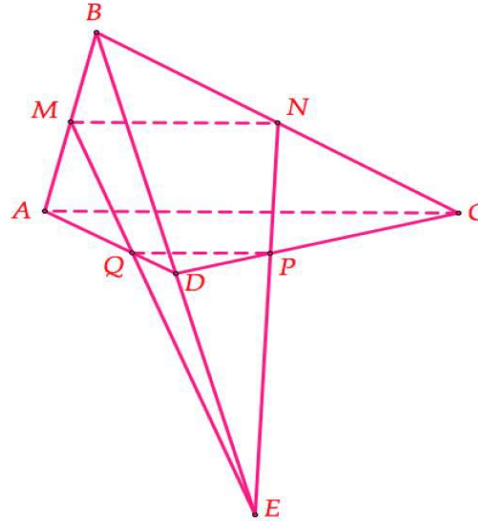
C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải

Chọn D





Ta có $V_0 = V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Để thấy P, Q là trọng tâm các tam giác $BEC, ABE \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{V_{E.QPD}}{V_{E.BMN}} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EP}{EN} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{BMQPN} = \frac{7}{9} V_{E.BMN}$$

Mà $V_{E.BMN} = V_{M.BEN} = \frac{1}{3} d(M, (BEN)) \cdot S_{\triangle BEN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(A, (BCD)) \cdot S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} V_{A.BCD}$

$$\Rightarrow V_{BMQPN} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2} V_0 = \frac{7}{18} V_0 \Rightarrow V_{AMNCPQ} = \frac{11}{18} V_0 = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}.$$

Câu 42. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}, \frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN , song song với AD chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V

A. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$.

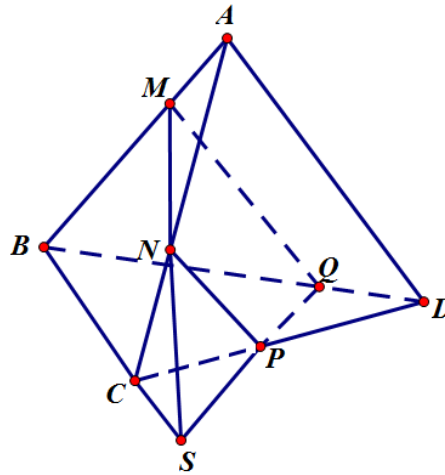
B. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$.

D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_0 = V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Để thấy BC, MN, PQ đồng quy tại S

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ABC$ với M, N, P thẳng hàng, suy ra $\frac{SC}{SB} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.CNP}}{V_{S.BMQ}} = \frac{SC}{SB} \cdot \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SP}{SQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{BMQPN} = \frac{15}{16} V_{S.BMQ}$$

Mà $V_{S.BMQ} = \frac{BS}{BC} \cdot \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BQ}{BD} \cdot V_{A.BCD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} V_{A.BCD} = \frac{16}{27} V_{A.BCD}$

$$\Rightarrow V_{BMQPN} = \frac{15}{16} \cdot \frac{16}{27} V_0 = \frac{5}{9} V_0 \Rightarrow V_{ADQPNM} = \frac{4}{9} V_0 = \frac{4\sqrt{2}a^3}{108}.$$

Câu 43. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm thuộc tia đối của tia DB sao cho $\frac{BE}{BD} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện

$ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

A. $k = \frac{6}{5}$.

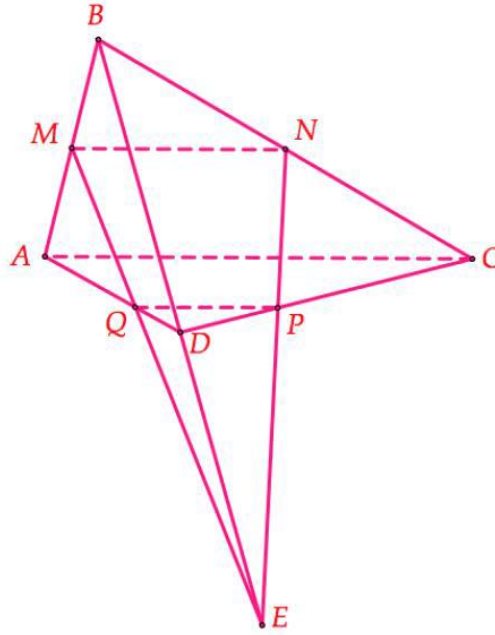
B. $k = 6$.

C. $k = 4$.

D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$ là $V_0 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

$$V_{BMNE} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BE}{BD} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k V_0 = \frac{k}{4} V_0.$$

Theo Thales ta có

$$\frac{EP}{EN} = \frac{EQ}{EM} = \frac{k-1}{(k-1)+\frac{1}{2}} = \frac{2(k-1)}{2k-1} \Rightarrow V_{EDPQ} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{ED}{EB} \cdot \frac{ED}{EB} V_{BMNE} = \frac{4(k-1)^2}{(2k-1)^2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{4} V_0$$

$$\text{Do đó } V_{BMNPDQ} = \frac{k}{4} V_0 - \frac{4(k-1)^2}{(2k-1)^2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{4} V_0 = \frac{k}{4} V_0 \left(1 - \frac{4(k-1)^3}{k(2k-1)^2} \right).$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } V_{B.MNPDQ} = \frac{22}{49} V_0 \Leftrightarrow \frac{k}{4} V_0 \left(1 - \frac{4(k-1)^3}{k(2k-1)^2} \right) = \frac{22}{49} V_0 \Leftrightarrow k = 4.$$

Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$

A. $\frac{2}{3}V$.

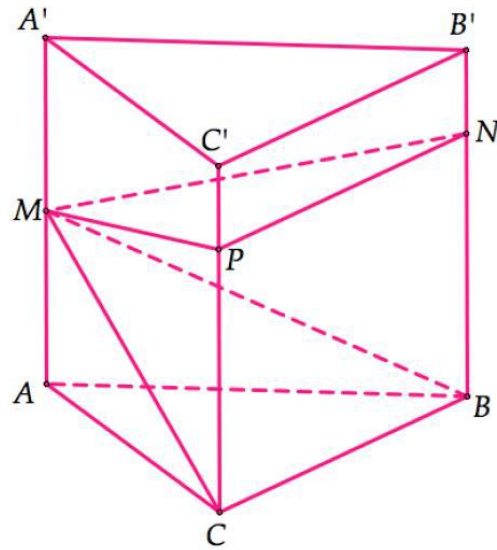
B. $\frac{9}{16}V$.

C. $\frac{20}{27}V$.

D. $\frac{11}{18}V$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

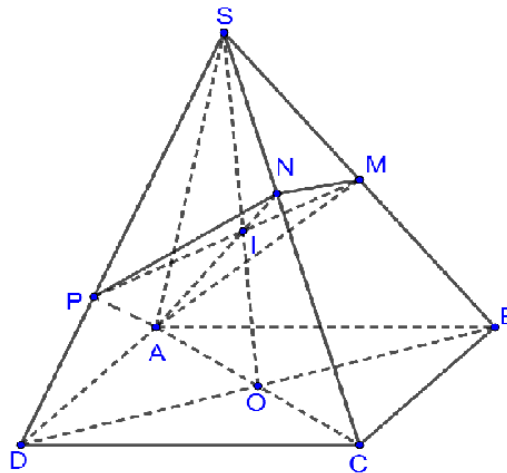
Trong đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} V$.

$$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} \cdot V_{M.BCC'B'} = \frac{BP + CN}{BB' + CC'} V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{4}{9} V.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{9} \right) V = \frac{11}{18} V.$$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích V . Gọi M là trung điểm của SB , P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V .

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30} V$. **B.** $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30} V$. **C.** $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5} V$. **D.** $\frac{7}{30} V$.



Lời giải

Chọn A

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Gọi $I = MP \cap SO \Rightarrow N = AI \cap SC$.

Ta có

$$\frac{1}{3} = \frac{SP}{SD} \cdot \frac{SM}{SB} = \frac{S_{\Delta SPM}}{S_{\Delta SDB}} = \frac{S_{\Delta SPI} + S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SDB}} = \frac{S_{\Delta SPI}}{2S_{\Delta SDO}} + \frac{S_{\Delta SMI}}{2S_{\Delta SBO}} = \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SP}{SD} + \frac{SM}{SB} \right) = \frac{7}{12} \cdot \frac{SI}{SO}.$$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{7}.$$

Suy ra

$$\frac{SN}{SC} = \frac{S_{\Delta SAN}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{S_{\Delta SAI} + S_{\Delta SNI}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{S_{\Delta SAI}}{2S_{\Delta SAO}} + \frac{S_{\Delta SNI}}{2S_{\Delta SAO}} = \frac{SI}{2SO} + \frac{SI}{2SO} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{SN}{SC}.$$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{2}{5}.$$

Suy ra $\frac{V_{SAMNP}}{V} = \frac{V_{SAMP} + V_{SMNP}}{V} = \frac{V_{SAMP}}{2V_{SABD}} + \frac{V_{SMNP}}{V_{SBCPD}} = \frac{SA \cdot SM \cdot SP}{2SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{2SB \cdot SC \cdot SD} = \frac{7}{30}.$

$$\Rightarrow V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30} V.$$

Câu 46. Cho khối chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Tính thể tích V của khối chóp $S.BNP$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{36}.$

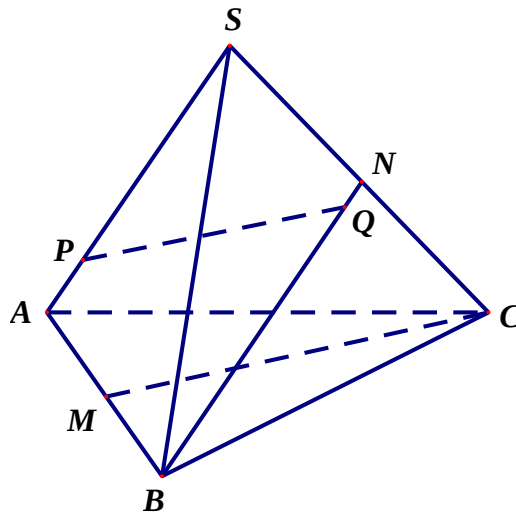
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}.$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}.$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{9}.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

và $\begin{cases} \overrightarrow{SP} = k\overrightarrow{SA} = k\vec{a} \\ \overrightarrow{SQ} = m\overrightarrow{SN} + (1-m)\overrightarrow{SB} = \frac{m}{2}\vec{c} + (1-m)\vec{b} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SP} = -k\vec{a} + (1-m)\vec{b} + \frac{m}{2}\vec{c} \end{cases}$

Theo giả thiết bài toán ta có hai véc tơ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CM}$ cùng phương, ta có:

$$-k\vec{a} + (1-m)\vec{b} + \frac{m}{2}\vec{c} = n\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \Leftrightarrow \frac{-k}{\frac{1}{2}} = \frac{1-m}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{m}{2}}{-1} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}; k = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó: } V = \frac{SP}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 47. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi, $AC' = 6a$,

$BAD = A'AD = A'AB = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = 6\sqrt{2}a^3$.

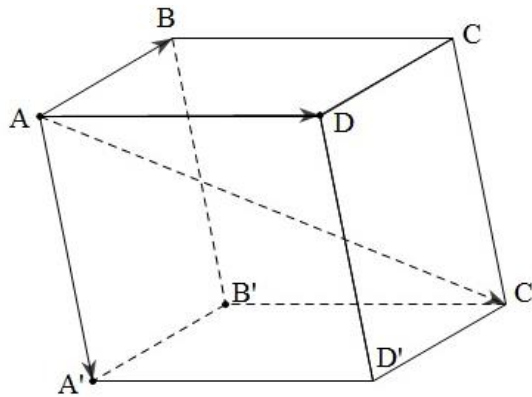
B. $V = 3\sqrt{2}a^3$.

C. $V = 2\sqrt{3}a^3$.

D. $V = 6\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Đặt cạnh của hình hộp là x .

$AB = AD$, $BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAD$ là tam giác đều $BD = AB = AD = x$.

Tương tự ta có $A'D = A'B = A'A = x$. Do đó tứ diện $ABDA'$ là tứ diện đều cạnh bằng x .

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AC' &= \sqrt{AC'^2} = \sqrt{(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA'} + \vec{AD} \cdot \vec{AA'})} \\ &= \sqrt{3x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)} = x\sqrt{6} = 6a \Leftrightarrow x = \sqrt{6}a. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } V = 6V_{A'.ABD} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}a)^3}{12} = 6\sqrt{3}a^3.$$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V , đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) đi qua A , điểm M thuộc cạnh SB thỏa mãn $SM = 2MB$ và trọng tâm G của tam giác SAC cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại N, P . Tính thể tích của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{2V}{3}$.

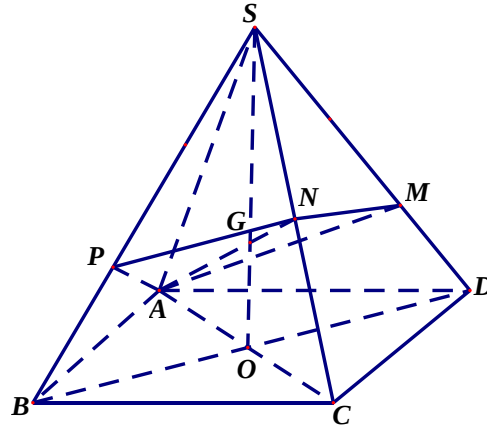
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{2V}{9}$.

D. $\frac{4V}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có AG cắt SC tại trung điểm N của SC .

Với $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}, z = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}, t = \frac{SP}{SD}$ ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$.

Do đó: $V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \cdot V = \frac{V}{3}$. Chọn B.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V , đáy là hình bình hành tâm O . Mặt phẳng (α) đi qua A , trung điểm I của SO cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{V}{18}$.

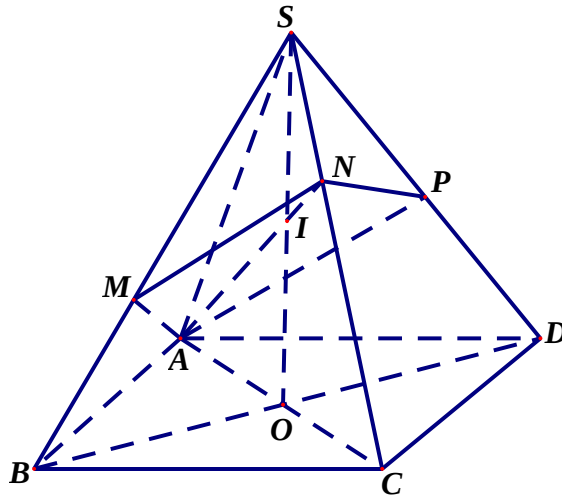
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{3V}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Với $x = \frac{SA}{SA} = 1, y = \frac{SM}{SB}, z = \frac{SN}{SC}, t = \frac{SP}{SD}$ ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$ và xét tam giác SAC ta có :

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) \Rightarrow \frac{SO}{SI} \cdot \overrightarrow{SI} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{SA} + \frac{SC}{SN} \cdot \overrightarrow{SN} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{SA} + \frac{1}{z} \overrightarrow{SN} \right).$$

Mặt khác ba điểm A, I, N thẳng hàng nên $\frac{1}{4} + \frac{1}{4z} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó : } \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 4 \Rightarrow y = \frac{t}{4t-1}.$$

$$\text{Vì vậy } V_{S.AMNP} = \frac{xyzt}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V = f(t) = \frac{2t^2}{3(4t-1)} V \geq \min_{\left[\frac{1}{4}; 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{V}{6}.$$

Dấu bằng đạt tại $t = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. Tức là mặt phẳng (α) đi qua trung điểm các cạnh SB, SD .

Chọn C.

Câu 50. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F . Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{30}$.

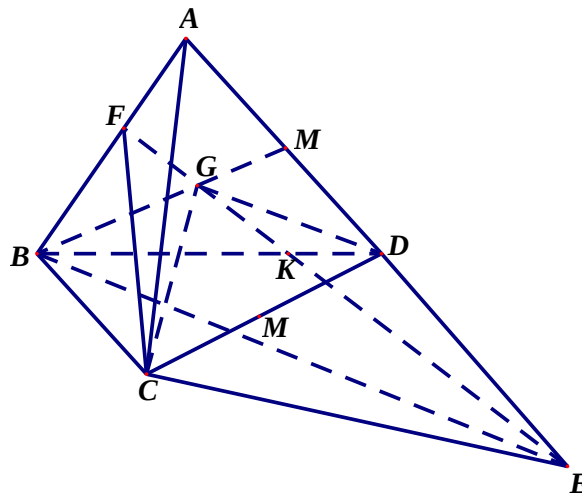
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{60}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{40}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow CG \perp (ABD)$.

Do đó : $F = EG \cap AB \Rightarrow (CEF)$ là mặt phẳng cần dựng.

$$\text{Ta có : } \frac{MG}{MB} = \frac{MD}{ME} = \frac{1}{3} \Rightarrow GD \parallel BE \Rightarrow \frac{KD}{KB} = \frac{KG}{KE} = \frac{GD}{BE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KB}{KD} = 3.$$

$$\text{Vì } F, K, E \text{ thẳng hàng nên ta có : } \frac{FA}{FB} \cdot \frac{KB}{KD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{FA}{FB} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow V = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot V_{ABCD} = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 51. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C', C'A', A'B'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh là A, B, C, M, N, P bằng

A. $21\sqrt{3}$.

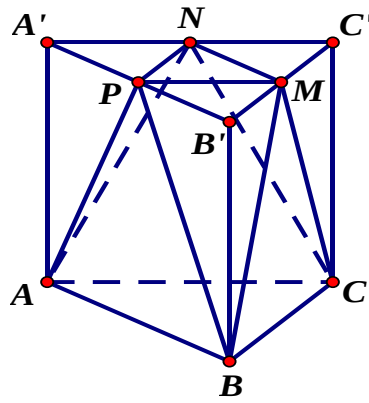
B. $12\sqrt{3}$.

C. $24\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 32\sqrt{3}$

Các hình chóp $A.A'NP, B.B'MP, C.C'MN$ các hình chóp bằng nhau và có đáy là tam giác đều có cạnh bằng 2 $\Rightarrow S_{A'NP} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, chiều cao bằng 8.

$\Rightarrow$ thể tích $V_{A.A'NP} = \frac{1}{3}S_{A'NP} \cdot 8 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{ABCMNP} = V_{ABCA'B'C'} - 3V_{A.A'NP} = 32\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. **Chọn C**

Câu 52. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là 8 đáy là tam giác đều cạnh 6. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}$.

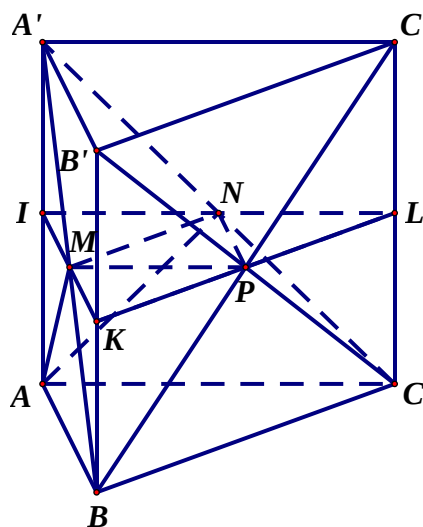
B. $21\sqrt{3}$.

C. $30\sqrt{3}$.

D. $36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 72\sqrt{3}$

Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' . Từ đó ta có:

$$V_{ABCMNP} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.KMP} - V_{A.IMN} - V_{C.LPN} - V_{A'B'C'.IKL}$$

Trong đó $V_{A'B'C'.IKL} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} = 36\sqrt{3}$

$$\frac{V_{B.KMP}}{V_{B.B'A'C'}} = \frac{BK}{BB'} \cdot \frac{BM}{BA'} \cdot \frac{BP}{BC'} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{B.KMP} = \frac{1}{8} V_{B.B'A'C'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{24} \cdot 72\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Mà $V_{B.KMP} = V_{A.IMN} = V_{C.LPN}$

$$\Rightarrow V_{ABCMNP} = 72\sqrt{3} - 3 \cdot 3\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 27\sqrt{3}. \text{ Chọn A}$$

Câu 53. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = \frac{1}{2}AA', BN = \frac{2}{3}BB', CP = \frac{1}{6}CC'$. Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ bằng

A. $\frac{2V}{5}$.

B. $\frac{4V}{9}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{5V}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Có $x = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, y = \frac{BN}{BB'} = \frac{2}{3}, z = \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABC.MNP} = \frac{xyz}{3} V = \frac{4}{9} V$. Chọn đáp án B

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SB, SD sao cho $MS = MB, ND = 2NS$. Mặt phẳng CMN chia khối chóp đã cho thành hai phần, thể tích của phần có thể tích nhỏ hơn bằng

A. $\frac{2}{25}$.

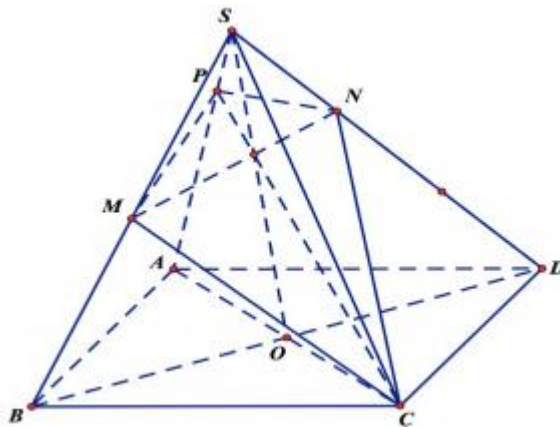
B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{3}{25}$.

D. $\frac{5}{48}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $x = \frac{SC}{SC} = 1$; $y = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$; $z = \frac{SP}{SA}$; $t = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}$ và

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} = 2 + 3 \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}.$$

Khi đó $V_{S,CMPN} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S,ABCD} = \frac{5}{48}$. Chọn đáp án **D**.

Câu 55. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, E lần lượt là các điểm nằm trên cạnh $A'B', A'C', AB$ sao cho $MA' = 3MB', NC' = NA', EB = 3EA$. Mặt phẳng MNE cắt AC tại F . Thể tích khối đa diện lồi $BEFCC'MNB'$ bằng

- A.** $\frac{59}{72}V$. **B.** $\frac{5}{24}V$. **C.** $\frac{3}{8}V$. **D.** $\frac{41}{72}V$.

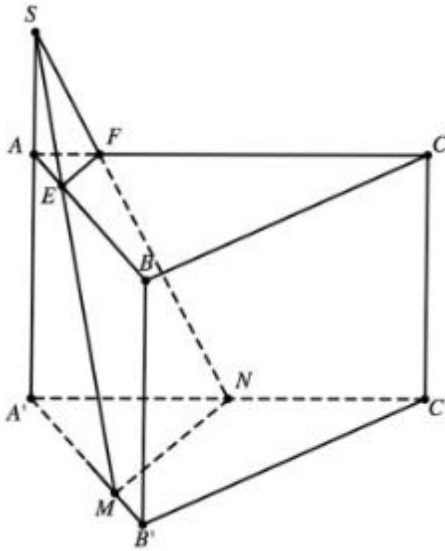
Lời giải

Chọn A

Gọi S, h lần
đã

Có

dạng



lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ
cho

$MNE \cap ABC = EF // MN$ và $\triangle AEF$ đồng

với $\triangle A'MN$ theo tỷ số $k = \frac{AE}{A'M} = \frac{1}{3}$. Do đó

$$S_{A'MN} = \frac{A'M}{A'B'} \cdot \frac{A'N}{A'C'} S_{ACB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot S = \frac{3S}{8}; S_{AEF} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 S_{A'MN} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3S}{8} = \frac{S}{24}$$

Do đó áp dụng công thức thể tích khối chóp cắt ta có

$$V_{AEF.A'MN} = \frac{h}{3} S_{AEF} + \sqrt{S_{AEF} \cdot S_{A'MN}} + S_{A'MN} = \frac{h}{3} \left(\frac{S}{24} + \sqrt{\frac{S}{24} \cdot \frac{3S}{8}} + \frac{3S}{8} \right) = \frac{13}{72} \cdot S \cdot h = \frac{13}{72} V.$$

Vì vậy $V_{BEFCC'MNB'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{AEF.A'MN} = \left(1 - \frac{13}{72} \right) V = \frac{59}{72} V$. Chọn đáp án **A**.

Câu 56. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V . Mặt phẳng P song song với đáy cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F . Gọi D_1, E_1, F_1 tương ứng là hình chiếu vuông góc của D, E, F lên mp ABC (tham khảo hình vẽ). Khối đa diện $DEF.D_1E_1F_1$ có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{V}{6}$.

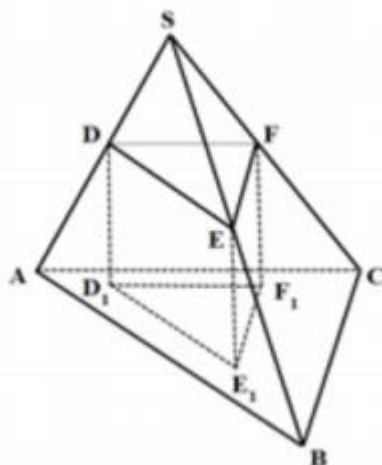
B. $\frac{V}{12}$.

C. $\frac{4V}{9}$.

D. $\frac{2V}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $x = \frac{SD}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SC}$ $0 \leq x \leq 1$; ta cũng có $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = x \Rightarrow S_{DEF} = x^2 S_{ABC}$.

Và $\frac{d_{D, ABC}}{d_{S, ABC}} = \frac{AD}{AS} = \frac{AS - SD}{AS} = 1 - x \Rightarrow d_{D, ABC} = (1 - x) d_{S, ABC}$.

Vì vậy $V_{DEF.D_1E_1F_1} = S_{DEF} \cdot d_{D, ABC} = x^2 S_{ABC} \cdot (1 - x) d_{S, ABC} = x^2 (1 - x) \cdot 3V$

$= \frac{3V}{2} \cdot x \cdot x \cdot (2 - 2x) \leq \frac{3V}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4V}{9}$.

Dấu bằng đạt tại $x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Chọn đáp án **C**.

Câu 57. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = AB = 2a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Khối chóp $S.AHK$ có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

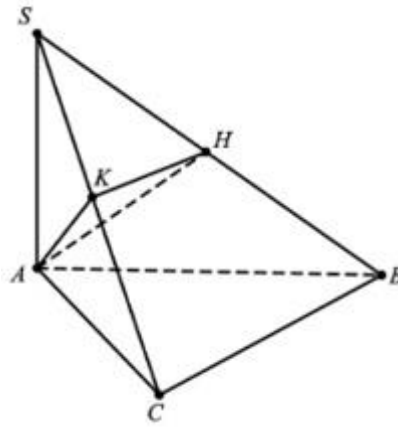
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Đặt } CA = x \Rightarrow CB = \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{4a^2 - x^2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} x \sqrt{4a^2 - x^2}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} ax \sqrt{4a^2 - x^2}.$$

Ta có

$$V_{S.AHK} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} V_{S.ABC} = \left(\frac{SA}{SB} \right)^2 \cdot \left(\frac{SA}{SC} \right)^2 V_{S.ABC} = \frac{4a^2}{8a^2} \cdot \frac{4a^2}{4a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{3} ax \sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{2a^3 x \sqrt{4a^2 - x^2}}{3(4a^2 + x^2)}.$$

$$\text{Dùng bất đẳng thức AM-GM có: } 4a^2 + x^2 = 4a^2 - x^2 + 2x^2 \geq 2\sqrt{4a^2 - x^2} \cdot 2x^2 = 2\sqrt{2}x\sqrt{4a^2 - x^2}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.AHK} \leq \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

Câu 58. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA', BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'B'MNPQ$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

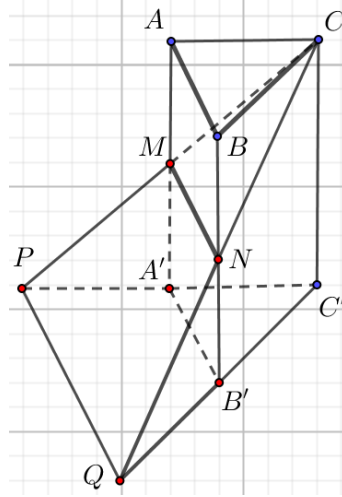
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



* Ta có: $V_{A'B'MNPQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CMNA'B'C'}$ (1).

* Dễ thấy A', B' lần lượt là trung điểm $C'P, C'Q$ nên $S_{\Delta C'PQ} = 4S_{\Delta A'B'C'}$. Do đó

$$V_{C.C'PQ} = 4V_{C.C'A'B'} = \frac{4}{3}V_{A'B'C'.ABC} = \frac{4}{3} \quad (2).$$

* Vì $S_{\Delta ABNM} = S_{\Delta A'B'NM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABB'A'}$ nên $V_{C.ABNM} = \frac{1}{2}V_{C'.A'B'BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}V_{A'B'C'.ABC} = \frac{1}{3}$

$$\text{Suy ra } V_{CMNC'A'B'} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{C.ABNM} = \frac{2}{3} \quad (3).$$

* Từ (1), (2) và (3), ta được: $V_{A'B'MNPQ} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng α qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{15}$.

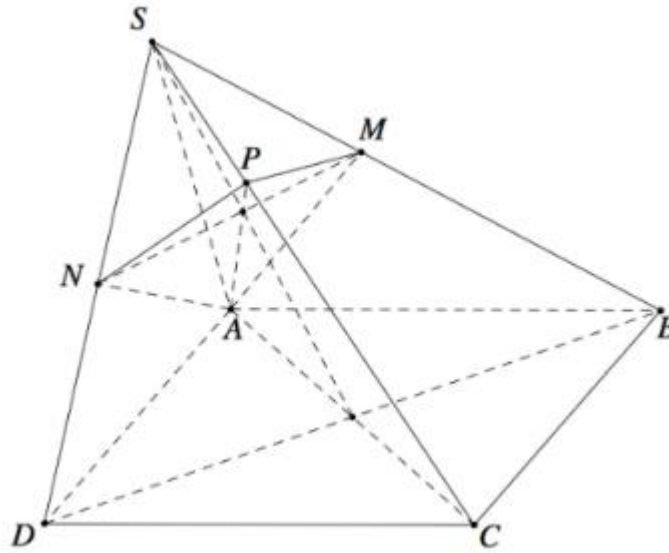
B. $\frac{1}{25}$.

C. $\frac{3}{25}$.

D. $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $x = \frac{SA}{SD} = 1$; $y = \frac{SM}{SB}$; $z = \frac{SP}{SC} = \frac{1}{5}$; $t = \frac{SN}{SD}$ $0 < y, t \leq 1$

Khi đó, $\frac{1}{y} + \frac{1}{t} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6 \Rightarrow y = \frac{t}{6t-1} \left(\frac{1}{6} < t \leq 1 \right)$

Chứng minh: $V_1 = V_{S.AMPN} = \frac{1}{4}xyzt \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD}$

Ta có:

$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = xyz \Rightarrow V_{S.AMP} = xyz \cdot V_{S.ABC} = xyz \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} xyz V$$

$$\frac{V_{S.APN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = xzt \Rightarrow V_{S.APN} = xzt \cdot V_{S.ACD} = xzt \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} xzt V$$

$$\Rightarrow V_{S.AMPN} = V_{S.AMP} + V_{S.APN} = \frac{1}{2} xyz + xzt \quad V = \frac{1}{2} xyzt \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{y} \right) (*)$$

Mặt khác:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = xyt \Rightarrow V_{S.AMN} = xyt \cdot V_{S.ABD} = xyt \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} xyt V$$

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} = ytz \Rightarrow V_{S.MNP} = yzt \cdot V_{S.BDC} = yzt \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} yzt V$$

$$\Rightarrow V_{S.AMPN} = V_{S.AMN} + V_{S.MNP} = \frac{1}{2} xyt + yzt \quad V = \frac{1}{2} xyzt \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) (**)$$

Cộng hai vế của (*) và (**), ta có:

$$2V_{S.AMPN} = \frac{1}{2}xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.AMPN} = \frac{1}{4}xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} \text{ (đpcm)}$$

Ta có: $V_1 = V_{S.AMPN} = \frac{1}{4}xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} = \frac{3}{5}ytV \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{3}{5}yt = \frac{3t^2}{5(6t-1)}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^2}{5(6t-1)}$ trên $\left(\frac{1}{6}; 1\right]$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{3(6t^2 - 2t)}{5(6t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \notin \left(\frac{1}{6}; 1\right] \\ t=\frac{1}{3} \in \left(\frac{1}{6}; 1\right] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$		0	
$f(t)$		$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$

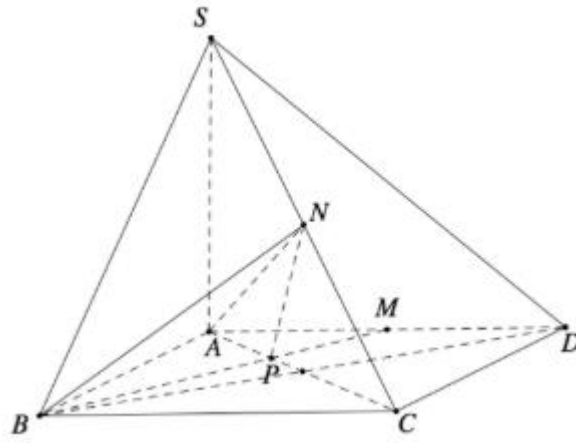
Vậy $\max_{t \in \left(\frac{1}{6}; 1\right]} f(t) = f(1) = \frac{3}{25}$

Câu 60. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và SC ; đường thẳng BM cắt AC tại P . Thể tích của khối tứ diện $ABNP$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABD có P là trọng tâm $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABCD}$

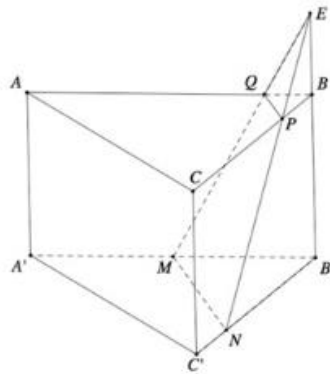
$$\Rightarrow V_{ABNP} = \frac{1}{3}d_{N, ABP} \cdot S_{\triangle ABP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d_{S, ABCD} \cdot \frac{1}{6} \cdot S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{12}V_{S.ABCD} = \frac{1}{12}$$

Câu 61. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm cạnh $A'B'$; các điểm N, P thỏa mãn $\overrightarrow{B'N} = \frac{3}{4}\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Đường thẳng NP cắt BB' tại E ; đường thẳng ME cắt AB tại Q . Thể tích khối đa diện $ACPQA'C'NM$ bằng:

- A. 55. B. 59. C. 52. D. 56.

Lời giải

Chọn B



Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_0 = Sh = 72$. Ta có $\frac{EP}{EN} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EB}{EB'} = \frac{BP}{B'N} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{3}{4}B'C'} = \frac{1}{3}$;

$$\text{Do đó } S_{B'MN} = \frac{B'M}{B'A'} \cdot \frac{B'N}{B'C'} S_{B'A'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3}{8} S; S_{BQP} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{B'MN} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8} S = \frac{1}{24} S.$$

Vì vậy khối chóp cụt $BQP.B'MN$ có thể tích là:

$$V_{BQP.B'MN} = \frac{h}{3} S_{B'MN} + S_{BQP} + \sqrt{S_{B'MN} S_{BQP}} = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{8} S + \frac{1}{24} S + \sqrt{\frac{3}{8} S \frac{1}{24} S} \right) = \frac{13}{72} Sh = 13.$$

Do đó: $V_{ACPQA'C'NM} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 72 - 13 = 59$. Chọn đáp án **B**.

Cách 2: Dùng tỉ số thể tích có:

$$V_{E.B'MN} = \frac{1}{3} S_{B'MN} \cdot d_{E, B'MN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} S \cdot \frac{3}{2} h = \frac{3}{16} V_0$$

$$V_{E.BQP} = \frac{EB}{EB'} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EP}{EN} V_{E.B'MN} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{16} Sh = \frac{1}{144} V_0$$

$$V_{BQP.B'MN} = V_{E.B'MN} - V_{E.BQP} = \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{144} \right) V_0 = \frac{13}{72} V_0 = 13$$

Vì vậy $V_{ACPQA'C'NM} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 72 - 13 = 59$. Chọn đáp án B

Câu 62. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Các mặt phẳng ABC' và $A'B'C$ chia khối lăng trụ đã cho thành 4 khối đa diện. Kí hiệu H_1, H_2 lần lượt là các khối đa diện có thể tích lớn nhất, nhỏ nhất. Giá trị của $\frac{V_{H_1}}{V_{H_2}}$ bằng:

A. 4.

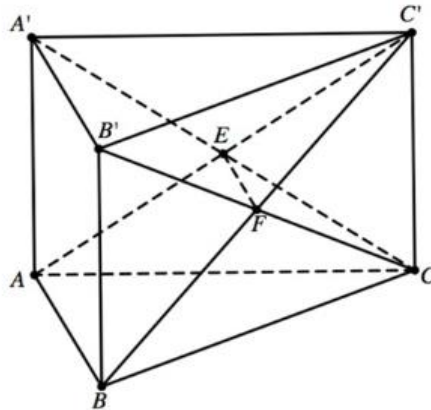
B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C



Gọi $E = AC' \cap A'C$; $F = BC' \cap B'C$ có 4 khối đa diện cần tìm là:

$ABCE$; $ABB'A'EF$; $A'B'C'EF$; $CEFC'$.

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

ta có $V_{C.A'B'C'} = \frac{V}{3}$; $V_{ABB'A'C} = \frac{2V}{3}$.

Theo công thức tỉ số thể tích có:

$$V_{CEFC'} = \frac{CE}{CA'} \cdot \frac{CF}{CB'} V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{3} = \frac{V}{12}$$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'EF} = V_{C.A'B'C'} - V_{CEFC'} = \frac{V}{3} - \frac{V}{12} = \frac{V}{4}.$$

Và với $x = \frac{CA}{CA'} = 1$; $y = \frac{CB}{CB'} = 1$; $z = \frac{CF}{CB'} = \frac{1}{2}$; $t = \frac{CE}{CA'} = \frac{1}{2}$

theo công thức tính nhanh tỉ số thể tích có :

$$V_{C.ABEF} = \frac{1}{4} xyzt \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \cdot V_{ABB'A'C} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+1+2+2) \cdot \frac{2V}{3} = \frac{V}{4}.$$

Suy ra: $V_{ABB'A'EF} = V_{ABB'A'C} - V_{C.ABEF} = \frac{2V}{3} - \frac{V}{4} = \frac{5V}{12} \Rightarrow V_{H_1} = \frac{5V}{12}$; $V_{H_2} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{V_{H_1}}{V_{H_2}} = 5.$

Chọn đáp án **C**.

Câu 63. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành thể tích bằng 1. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B ; N là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng MDN chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S bằng:

A. $\frac{1}{6}.$

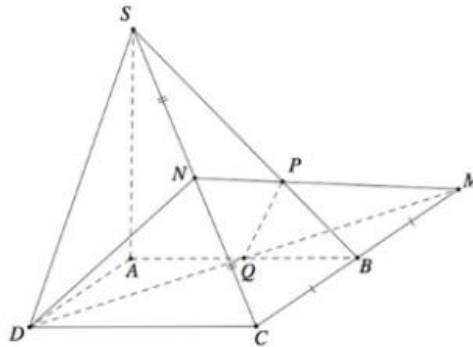
B. $\frac{5}{8}.$

C. $\frac{12}{19}.$

D. $\frac{7}{12}.$

Lời giải

Chọn D



- Gọi $P = MN \cap SB \Rightarrow P$ là trọng tâm của $\triangle SCM$ vì là giao của hai đường trung tuyến SB , MN .
- Gọi $Q = MD \cap AB \Rightarrow Q$ là trung điểm của MD .
- Ta có:

$$\begin{aligned} V_{BCDQNP} &= V_{M.CDN} - V_{M.BQP} = V_{M.CDN} - \frac{MB}{MC} \cdot \frac{MQ}{MD} \cdot \frac{MP}{MN} V_{M.CDN} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) V_{M.CDN} = \frac{5}{6} V_{M.CDN} \end{aligned}$$

- Mặt khác :



$$V_{M.CDN} = V_{N.MCD} = \frac{S_{MCD}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d N, ABCD}{d S, ABCD} V_{S.ABCD}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} CD \cdot CM}{CD \cdot CB} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}$$

- Vậy $V_{BCDQNP} = \frac{5}{12} \Rightarrow V_{SANPQD} = V_{S.ABCD} - V_{BCDQNP} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. Chọn đáp án **D**.

Câu 64. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đường cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P ; đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, P, Q, C' bằng

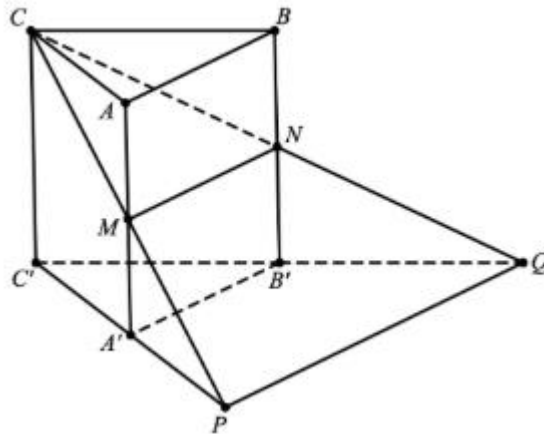
- A.** $120\sqrt{3}$. **B.** $140\sqrt{3}$. **C.** $168\sqrt{3}$. **D.** $192\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{AC}{PA'} = \frac{MA}{MA'} = 1 \Rightarrow PA' = AC = A'C' \Rightarrow A'$ là trung điểm PC' . Tương tự B' là trung điểm QC' . Khối chóp cắt $ABC.PQC'$ có chiều $h = 8$, diện tích đáy

$$S_1 = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}, S_2 = S_{PQC'} = 4.S_1 = 36\sqrt{3}.$$



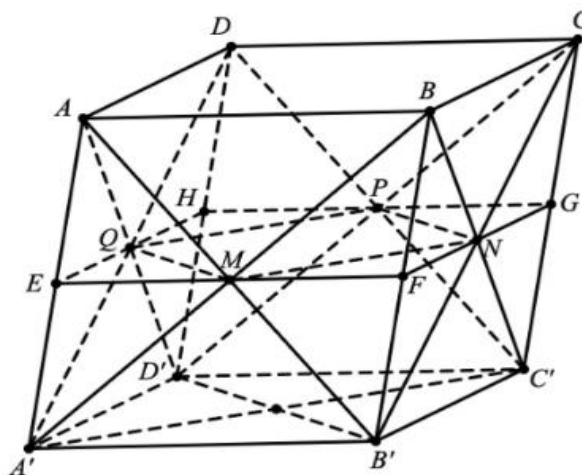
Do đó $V_{ABC.PQC'} = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{8}{3} (9\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \cdot 36\sqrt{3}}) = 168\sqrt{3}$. **Vậy chọn C**

Câu 65. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng 8 và đáy là hình vuông cạnh bằng 6. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q bằng

- A.** 108. **B.** 168. **C.** 96. **D.** 120.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối hộp đã cho $V = 6^2 \cdot 8 = 288$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'

Ta có $V_{ACBDMNPQ} = V_{ABCDGH} - V_{A.MNQ} + V_{B.MFN} + V_{C.NGP} + V_{D.PHQ}$

$$\begin{aligned} V_{ABCDGH} &= \frac{1}{2}V, V_{A.MNQ} = V_{B.MFN} = V_{C.NGP} = V_{D.PHQ} \\ &= \frac{DH}{DD'} \cdot \frac{DP}{DC'} \cdot \frac{DQ}{DA'} \cdot V_{D.D'C'A'} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{48}V \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{ACBDMNPQ} = \frac{1}{2}V - \left(\frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V \right) = \frac{5}{12}V = 120$$

Vậy chọn D