



Chuyên đề:
**SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐỂ TÍNH
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG**

NHÓM TOÁN VD – VDC

I. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Nội dung các dạng toán xoay quanh bài toán ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng với giả thiết bài toán cho bởi đồ thị hàm liên quan.

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa xác định công thức diện tích.

Dạng 2. Dựa vào các điểm đồ thị đi qua xác định hàm số đi đến công thức tính.

Dạng 3. Dựa vào tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Dạng 4. Dựa vào tiếp tuyến của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Dạng 5. Biến đổi đồ thị đưa về tính toán đơn giản.

Dạng 6. Tính diện tích dựa vào việc chia nhỏ hình.

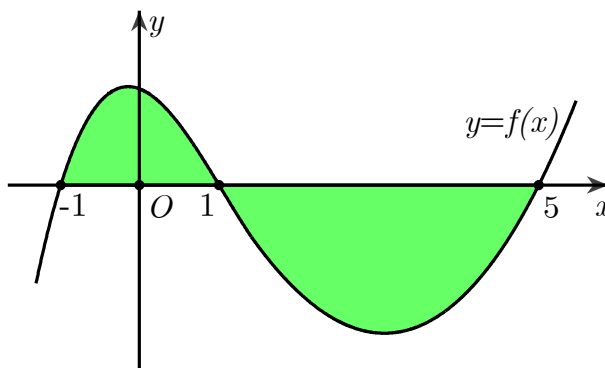
Dạng 7. Toán thực tế với giả thiết có đồ thị hàm liên quan.

NHÓM TOÁNVD – VDC

II. BÀI TẬP MINH HỌA

1) Dạng 1. Sử dụng định nghĩa xác định công thức diện tích.

Câu 1: (Đề THPT QG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

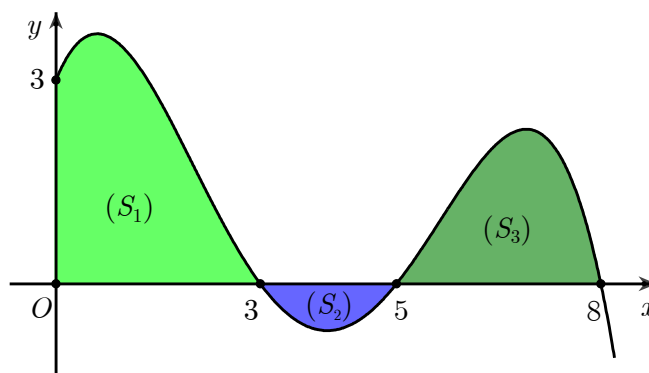
D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 8]$ như hình vẽ.



Biểu thức nào dưới đây có giá trị lớn nhất?

A. $\int_0^1 f(x)dx.$

B. $\int_0^3 f(x)dx.$

C. $\int_0^5 f(x)dx.$

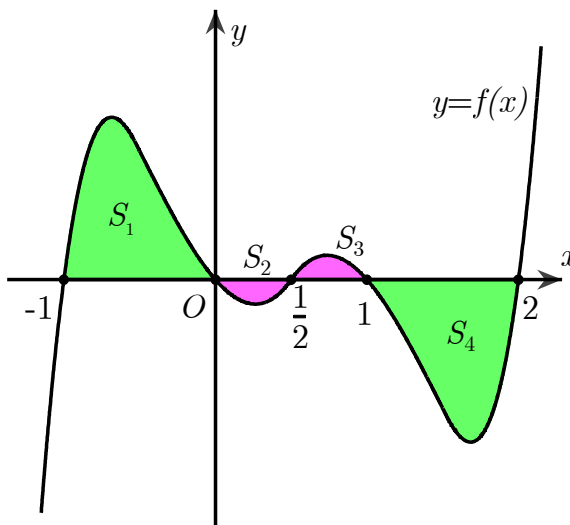
D. $\int_0^8 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn D

Để thấy $S_3 > S_2$. Mà $S_1 = \int_0^3 f(x)$, $S_2 = -\int_3^5 f(x)$, $S_3 = \int_5^8 f(x)$, nên $\int_0^8 f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$ lớn nhất.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 như hình vẽ. Biết $S_1 = S_4 = \frac{2}{3}$; $S_2 = S_3 = \frac{13}{384}$, tích phân $I = \int_{-1}^1 2^x f(2^x) dx$ bằng



A. $I = -\frac{2}{3 \ln 2}$.

B. $I = \frac{47}{64}$.

C. $I = \frac{2}{3}$.

D. $I = -\frac{81}{128 \ln 2}$.

Lời giải

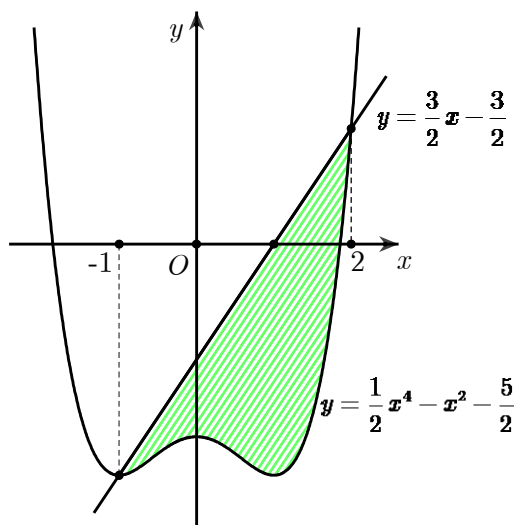
Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2^x \Rightarrow dt = 2^x \ln 2 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t \ln 2}$$

$$\text{Đổi cận: } x = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$I = \int_{-1}^1 2^x f(2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{1/2}^2 f(t) dt = \frac{1}{\ln 2} \left(\int_{1/2}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right) = \frac{1}{\ln 2} (S_3 - S_4) = -\frac{81}{128 \ln 2}.$$

Câu 4: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào sau đây?



A. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right) dx.$

B. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right) dx.$

C. $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right) dx.$

D. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 4 \right) dx.$

Lời giải

Chọn B

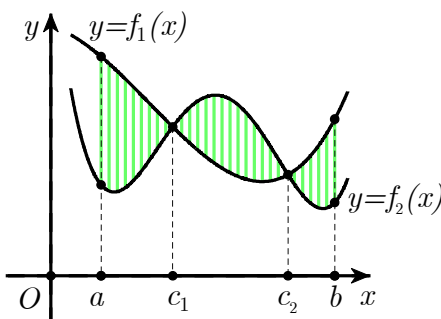
Từ hình vẽ ta thấy phần diện tích hình phẳng cần tính là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm

số: $y = f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$; $y = g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{5}{2}$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$.

Ngoài ra ta thấy đường $y = f(x)$ nằm trên đường $y = g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ nên ta có diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{5}{2} \right) \right] dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right) dx.$$

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx.$

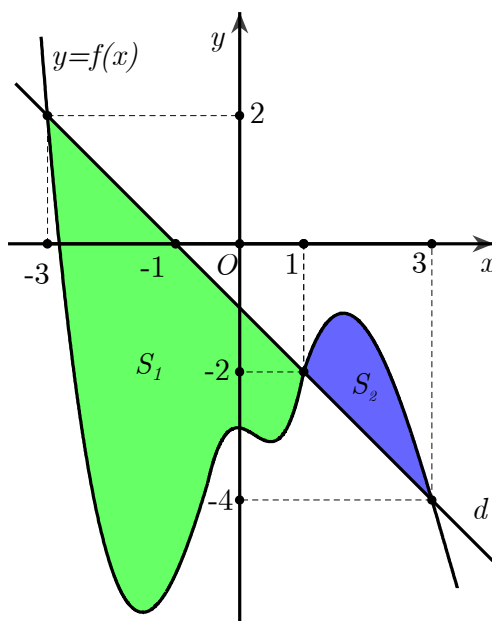
D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1; S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng d lần lượt là $a; b$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(3x) dx$.



A. $-\frac{a}{3} + \frac{b}{3} - 2.$

B. $\frac{a}{3} - \frac{b}{3} - 2.$

C. $-\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 2.$

D. $\frac{a}{3} - \frac{b}{3} + 2.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$

$$\int_{-1}^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx$$

Gọi phương trình của đường thẳng d là $y = g(x)$. Ta có

$$\int_{-3}^1 [g(x) - f(x)] dx = a \Leftrightarrow \int_{-3}^1 g(x) dx - \int_{-3}^1 f(x) dx = a$$

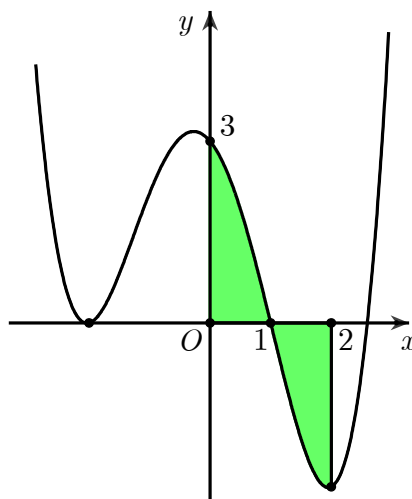
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \int_{-3}^1 f(x) dx = a \Leftrightarrow \int_{-3}^1 f(x) dx = -a$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)] dx = b \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = b \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = b - 6$$

Do đó

$$\int_{-1}^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} (-a + b - 6) = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} - 2.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ (phần tô màu) là



A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$

D. $S = \int_0^2 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^2 |f(x)| dx.$

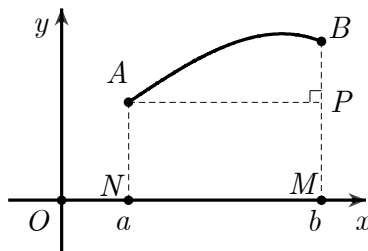
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0, x \in [0; 2]$ có nghiệm duy nhất là $x = 1.$

$$\text{Do đó } S = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [1;2]$.

$$\text{Vậy } S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\int_a^b f'(x) dx$ là diện tích hình thang $ABMN$.

B. $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn BP .

C. $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn MN .

D. $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn cong AB .

Lời giải

Chọn B

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) = BM - PM = BP.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x) = x f(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[0;2]$ như hình vẽ bên. Biết diện tích miền được tô màu là

$$S = \frac{5}{2}. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^4 f(x) dx$$

A. $I = \frac{5}{4}$

B. $I = \frac{5}{2}$

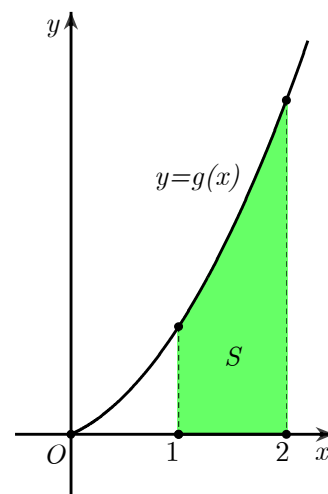
C. $I = 10$

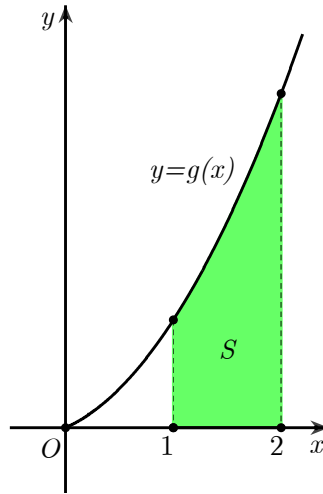
D. $I = 5$

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta thấy $g(x) > 0, \forall x \in [1;2]$.





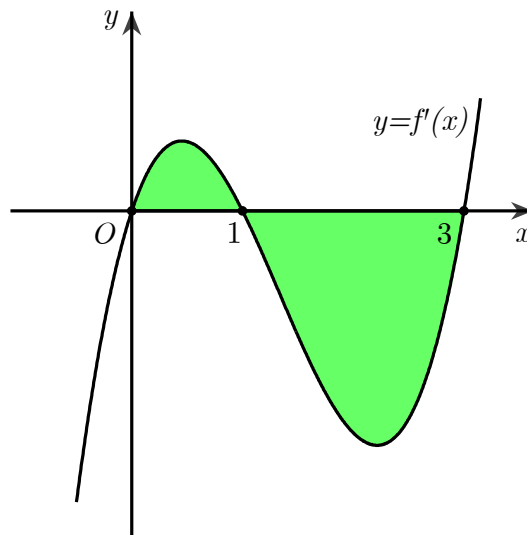
Từ giả thiết ta có $S = I = \int_1^2 |g(x)| dx = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 x f(x^2) dx = \frac{5}{2}$

Đặt $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$. Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, khi $x = 2 \Rightarrow t = 4$

$\Rightarrow \int_1^2 x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = \frac{5}{2} \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = 5 \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = 5 = I$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập số thực. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng

$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)f'(2x) dx = \frac{b}{2}$ và $f(3) = c$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.



A. $a - b + c$.

B. $a + b - c$.

C. $-a + b - c$.

D. $-a - b + c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)f'(2x)dx = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (t+1)f'(t)dt \Leftrightarrow \int_0^1 (t+1)f'(t)dt = b \Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - b$$

$$\text{Ta lại có } a = \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow a = f(1) - f(0) + f(1) - f(3) \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - b = a - b + c.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.

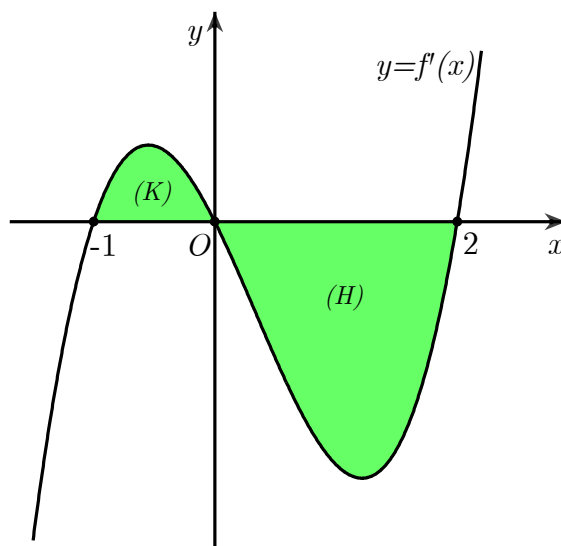
Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{8}{3}$ và $f(-1) = \frac{19}{12}; f(2) = -\frac{2}{3}$. Tính $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f'(2x)dx$.

A. $I = \frac{5}{24}$.

B. $I = \frac{8}{13}$.

C. $I = \frac{4}{13}$.

D. $I = \frac{4}{26}$.



Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f'(2x)dx \xrightarrow[t=2x]{t=2x} I = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(x)dx$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f'(x)dx = \int_{-1}^0 f'(x)dx + \int_0^2 f'(x)dx \Leftrightarrow f(2) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x)dx - \frac{8}{3}$$

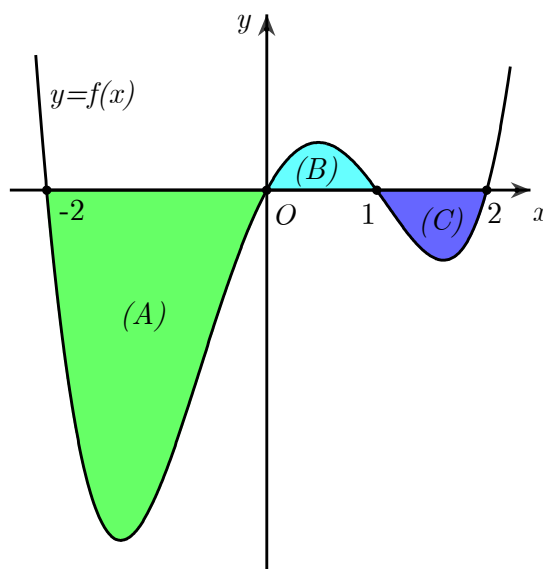
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} - \frac{19}{12} = \int_{-1}^0 f'(x) dx - \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{5}{12}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{5}{24}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng $(A), (B), (C)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng $\frac{124}{15}; \frac{37}{60}; \frac{53}{60}$. Tích phân

$$\int_1^3 (15f(2x-4) + 3x^2 + 5) dx \text{ bằng}$$



A. -28 .

B. $\frac{437}{4}$.

C. 293 .

D. $\frac{158}{15}$.

Lời giải

Chọn A

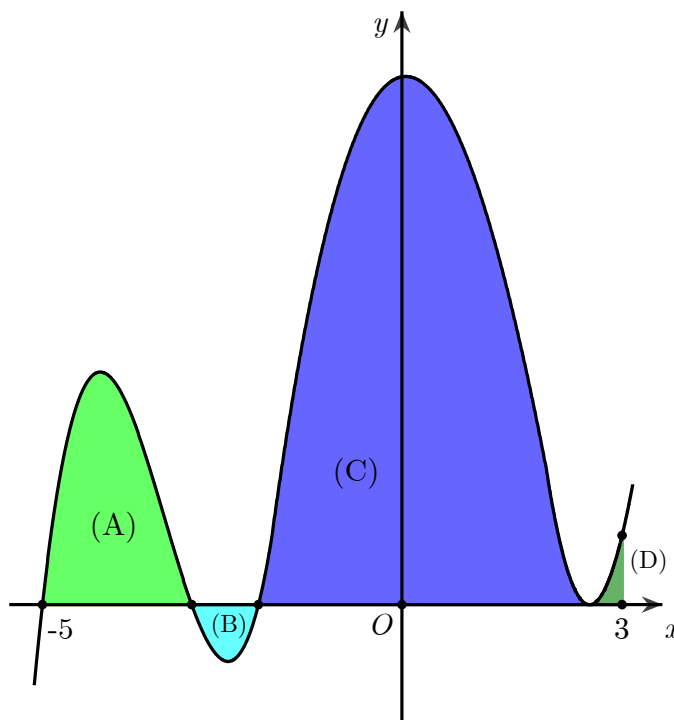
$$\text{Tính } \int_1^3 (15f(2x-4) + 3x^2 + 5) dx = \frac{15}{2} \int_1^3 f(2x-4) d(2x-4) + \int_1^3 (3x^2 + 5) dx$$

$$= \frac{15}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx + 36$$

$$\text{Mà } \frac{15}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{15}{2} \left[\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right] = \frac{15}{2} \left(-\frac{124}{15} + \frac{37}{60} - \frac{53}{60} \right) = -64$$

$$\text{Vậy } \int_1^3 (15f(2x-4) + 3x^2 + 5) dx = -64 + 36 = -28$$

Câu 13: (Đề thi thử THPT QG VTED năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng $(A), (B), (C), (D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6; 3; 12; 2. Tích phân $\int_{-3}^1 (2f(2x+1) + 1) dx$ bằng



A. 27.

B. 25.

C. 17.

D. 21

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Tính } \int_{-3}^1 (2f(2x+1) + 1) dx &= 2 \int_{-3}^1 f(2x+1) dx + \int_{-3}^1 dx = 2 \int_{-3}^1 f(2x+1) \frac{d(2x+1)}{2} + 4 \\ &= \int_{-5}^3 f(x) dx + 4 \end{aligned}$$

Mà $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành

$$\text{Suy ra } \int_{-5}^3 f(x) dx = 6 + 3 + 12 + 2 = 23$$

$$\text{Vậy } \int_{-3}^1 (2f(2x+1) + 1) dx = 23 + 4 = 27$$

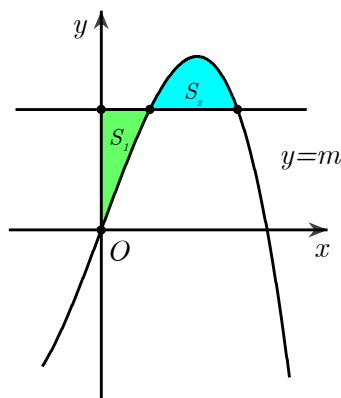
Câu 14: Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng có diện tích S_1, S_2 bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < \frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $1 < m < \frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2} < m < 2$.



Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $8x - 27x^3 = m$. Giả sử như hình vẽ, hoành độ các giao điểm là

$0 < a < b$. Ta có hệ $\begin{cases} 8a - 27a^3 = m \\ 8b - 27b^3 = m \end{cases} (1)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 8x - 27x^3 - m.$$

Khi đó các diện tích

$$S_1 = \int_0^a |f(x)| dx = -\int_0^a f(x) dx = F(0) - F(a); S_2 = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

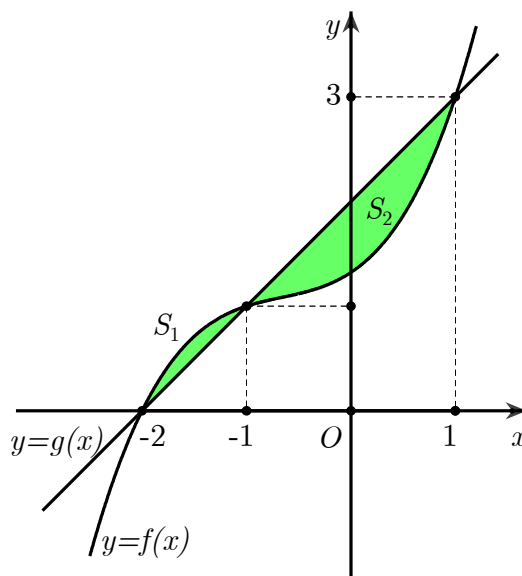
Theo giả thiết thì

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow F(b) - F(0) \Leftrightarrow 4b^2 - \frac{27b^4}{4} - mb = 0.$$

$$\text{Kết hợp với (1), ta được } b = \frac{4}{9} \Rightarrow m = \frac{32}{27}.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = g(x) = ax + b$ lần lượt là m, n . Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^1 f(x) dx.$$



A. $I = m - n + \frac{9}{2}$.

B. $I = n - m + \frac{9}{2}$.

C. $I = m - n + \frac{9}{2}$.

D. $I = n - m + \frac{9}{2}$.

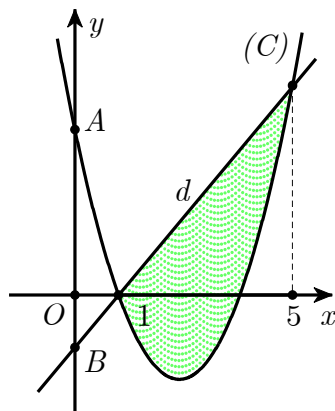
Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx - \int_{-2}^1 g(x)dx + \int_{-2}^1 g(x)dx = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_{-2}^1 g(x)dx \\ &= \int_{-2}^{-1} |f(x) - g(x)|dx - \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|dx + \int_{-2}^1 g(x)dx = m - n + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = m - n + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2) Dạng 2. Dựa vào các điểm đồ thị đi qua xác định hàm số để tính diện tích hình phẳng.

Câu 1: Cho các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = mx + n$ có đồ thị lần lượt là đường cong (C) và đường thẳng d (như hình vẽ). Biết $AB = 5$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d (phần tô màu) là $S = \frac{p}{q}$ (trong đó $p, q \in \mathbb{N}^*$; $(p; q) = 1$). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $p - q = 20$.

B. $p > 11q$.

C. $pq = 69$.

D. $p + q = 35$

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(0; c) \in (C)$, $B(0; n) \in d$ và $AB = 5 \Leftrightarrow c - n = 5$ ($c > n$)

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x + c - n = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x + 5 = 0 (*)$$

Lại có hoành độ giao điểm của (C) và d là $x = 1$ và $x = 5$ nên $(*)$ có dạng $a(x - 1)(x - 5) = 0$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d là

$$S = \int_1^5 |(x - 1)(x - 5)| dx = \int_1^5 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{32}{3}$$

Suy ra $p = 32, q = 3 \Rightarrow p + q = 35$.

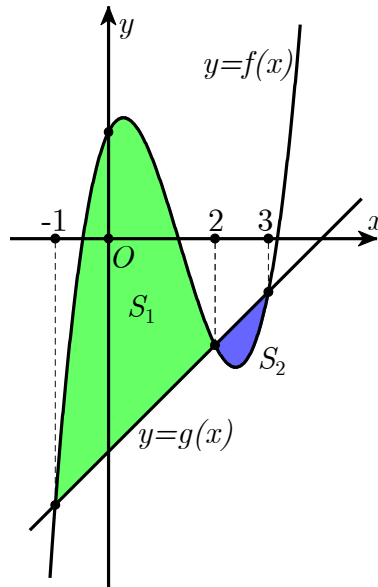
Câu 2: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx + n$ ($a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ $-1; 2; 3$ (tham khảo hình vẽ phía bên dưới); đồng thời diện tích $S_1 = 45$ (phần hình phẳng tô màu xanh). Tính diện tích S_2 (phần hình phẳng tô màu đỏ).

A. $S_2 = \frac{7}{3}$

B. $S_2 = \frac{7}{12}$.

C. $S_2 = \frac{128}{3}$.

D. $S_2 = \frac{7}{6}$.



Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a(x+1)(x-2)(x-3) = 0$

$$\text{Có } S_1 = \int_{-1}^2 a(x+1)(x-2)(x-3) dx = 45 \Leftrightarrow \frac{45}{4}a = 45 \Leftrightarrow a = 4.$$

$$\text{Vậy } S_2 = -\int_2^3 4(x+1)(x-2)(x-3) dx = \frac{7}{3}.$$

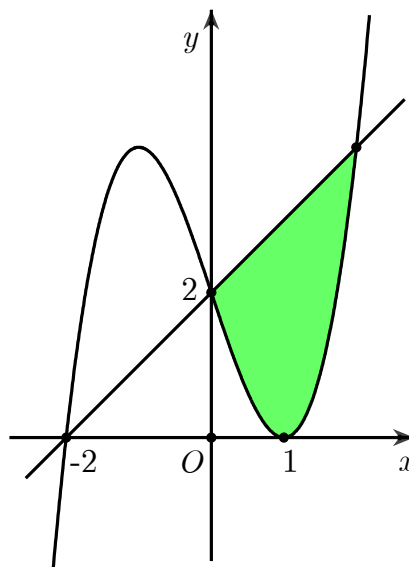
Câu 3: Hình phẳng được tô màu ở trong hình vẽ bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số bậc 3 với một đường thẳng Δ cùng với trục hoành và trục tung. Diện tích hình phẳng đó bằng

A. 4.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 2



Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có:

+ Giao với Oy tại điểm có tung độ bằng 2 $\Rightarrow d = 2$

+ Đi qua điểm $(1; 0) \Rightarrow a + b + c = -2$

+ Đi qua điểm $(-2; 0) \Rightarrow -8a + 4b - 2c = -2 \Rightarrow -4a + 2b - c = -1$

+ Có $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số nên là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Từ đó $a = 1; b = 0; c = -3$

Vậy hàm số bậc ba là: $y = x^3 - 3x + 2$

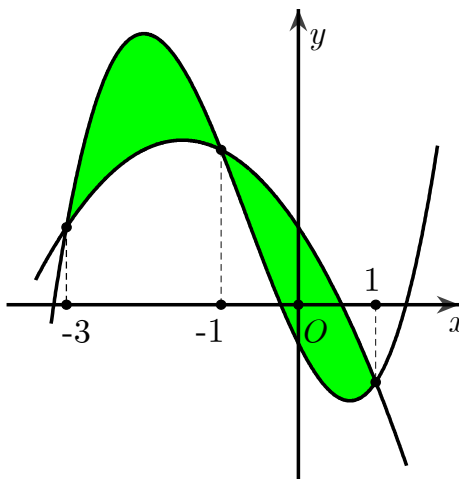
Ta có đường thẳng đi qua hai điểm $(-2; 0); (0; 2)$ là $y = x + 2$

Giao điểm của hai đồ thị là $x = -2; x = 0; x = 2$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn với hai đồ thị trên như hình vẽ là: $S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = 4$

Chọn đáp án **A**.

Câu 4: (Đề THPT QG 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5

B. $\frac{9}{2}$

C. 8

D. 4

Lời giải

Chọn D

Từ giao điểm hai đồ thị ta có $f(x) - g(x) = a(x + 3)(x + 1)(x - 1)$.

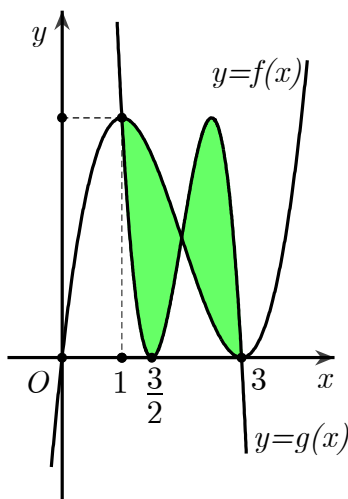
Suy ra $a(x + 3)(x + 1)(x - 1) = ax^3 + (b - d)x^2 + (c - d)x - \frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do đó $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)(x + 1)(x - 1)$.

Diện tích bằng $S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4.$

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = f(dx + e)$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 4,5.

B. 4,25.

C. 3,63.

D. 3,67.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị suy ra $f(x) = a(x-3)^2 \cdot x$ và $f(1) = 4 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2 x$$

$g(x)$ là hàm số bậc ba nên $g(x) = m(x - \frac{3}{2})^2(x-3)$ và $g(1) = 4 \Rightarrow m = -8$

$$\Rightarrow g(x) = -8(x - \frac{3}{2})^2(x-3)$$

$$\text{Vậy } S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{9}{2} = 4,5$$

Câu 6: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ và $g(x) = dx^2 + ex - 1$ với $a; b; c; d; e$ là các số thực. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$.

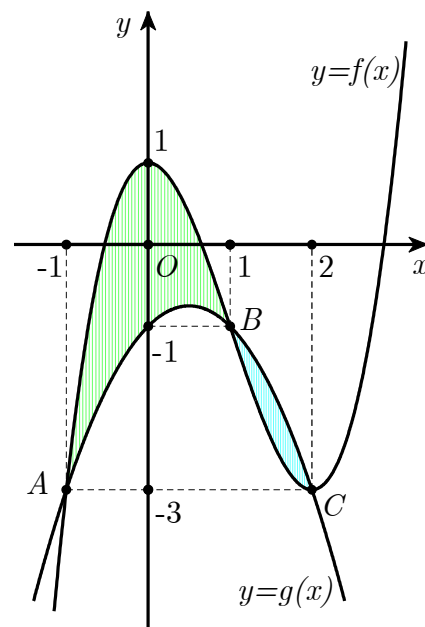
B. $\frac{27}{12}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có

$$f(x) - g(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + 1) - (dx^2 + ex - 1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + 2$$

Vì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ có ba nghiệm là $-1; 1; 2$.

Kết hợp với điều kiện giả thiết suy ra $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$.

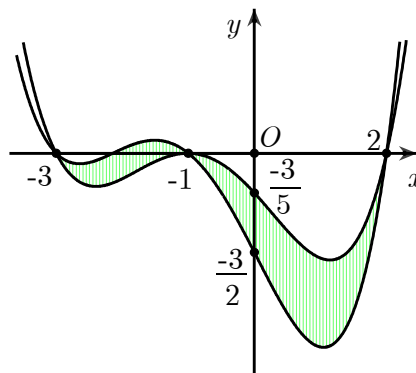
Đồng nhất hệ số tự do hai dạng biểu thức $f(x) - g(x)$ ta được $2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) - g(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$$S = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx = \frac{37}{12}.$$

Câu 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11.

B. 2,45.

C. 3,21.

D. 2,95

Lời giải

Chọn A

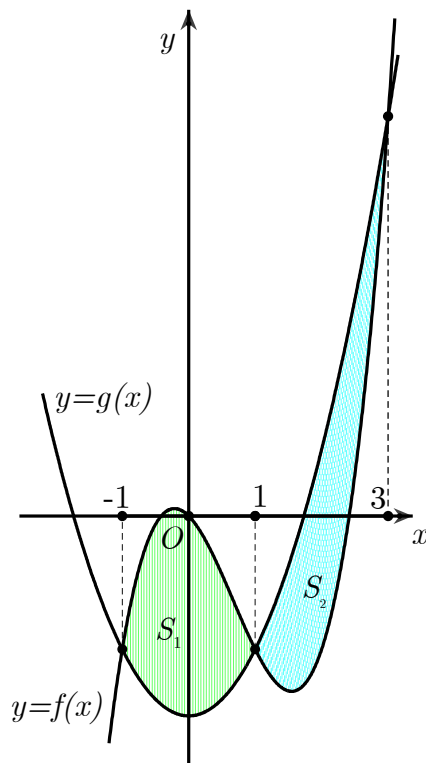
Tại điểm có hoành độ $x = -3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.

$$\text{Có } f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-2).$$

$$\text{Mà } f(0) - g(0) = \frac{-3}{5} - \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{10} \Rightarrow a \cdot 9 \cdot 1 \cdot (-2) = \frac{9}{10} \Rightarrow a = \frac{-1}{20}.$$

$$\text{Vì vậy } S_{(H)} = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| = \int_{-3}^2 \left| -\frac{1}{20}(x+3)^2(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{3733}{1200} \approx 3,11.$$

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng phần diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số bằng 4. Tính phần diện tích S_2 giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.



A. $S_2 = 4$.

B. $S_2 = 2$.

C. $S_2 = 1$.

D. $S_2 = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hai hàm số ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1, 1, 3$ nên $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-3)$ và $a > 0$.

Mặt khác diện tích $S_1 = 4 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 a(x+1)(x-1)(x-3)dx = 4 \Leftrightarrow a = 4$

Từ đó suy ra $S_2 = \int_1^3 (g(x) - f(x))dx = -\int_1^3 4(x+1)(x-1)(x-3)dx = 4$

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x)dx$ bằng

A. $m - n + p + \frac{211}{45}$.

B. $m - n + p + \frac{208}{45}$.

C. $m - n + p + \frac{24}{5}$.

D. $m - n + p + \frac{26}{5}$.

Lời giải

Chọn B

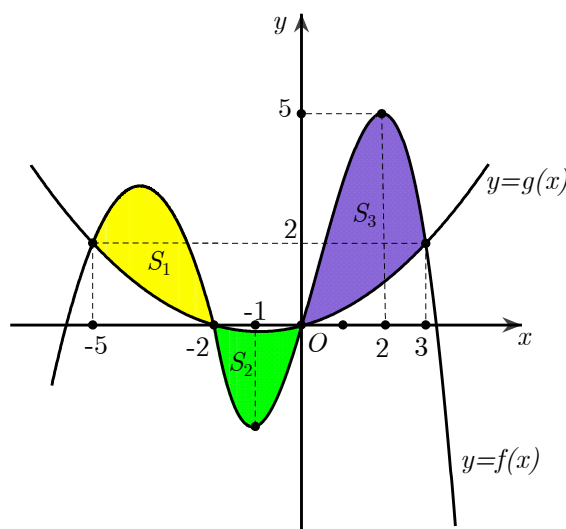
Đồ thị hàm $y = g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(-2;0), B(3;2)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \\ 9a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{15} \\ b = \frac{4}{15} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{4}{15}x.$$

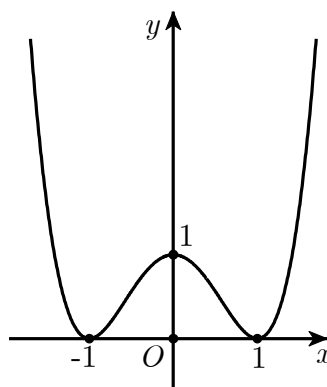
$$m - n + p = \int_{-5}^{-2} [f(x) - g(x)] dx - \int_{-2}^0 [g(x) - f(x)] dx + \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_{-5}^3 f(x) dx - \int_{-5}^3 g(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^3 f(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^3 g(x) dx = m - n + p + \frac{208}{45}$$



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích gần bằng số nào sau đây?

A. 34,8 .

B. 60 .

C. 63,5

D. 72,3

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho có đồ thị đối xứng nhau qua trục tung nên nó là hàm số chẵn. Lại có hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên hàm số đã cho là hàm trùng phương. Do đó

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0.$$

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;0), (0;1)$ và có điểm cực tiểu $(1;0)$, điểm cực đại

$$(0;1) \text{ nên ta có hệ } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Với $a = 1, b = -2, c = 1$ ta có $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$ thỏa $f''(0) < 0, f''(1) > 0$ nên các giá trị $a = 1, b = -2, c = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$:

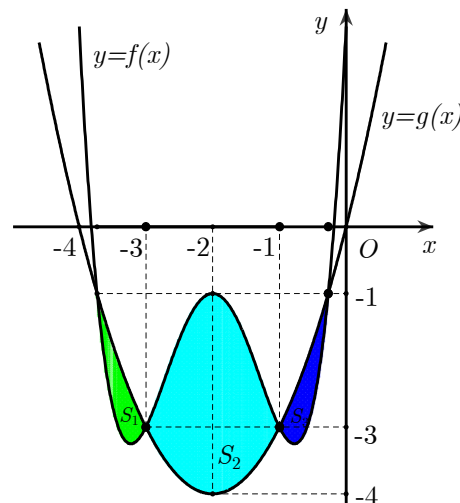
$$x^4 - 2x^2 + 1 = 4x^3 - 4x \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 4x(x^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2+\sqrt{5}} |f(x) - f'(x)| dx = \int_{-1}^{2+\sqrt{5}} |x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1| dx \\ &= \left| \int_{-1}^{2-\sqrt{5}} (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1) dx \right| + \left| \int_{2-\sqrt{5}}^1 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1) dx \right| + \\ &\quad + \left| \int_1^{2+\sqrt{5}} (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1) dx \right| \approx 63,52 \end{aligned}$$

3) Dạng 3. Dựa vào tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 20x + 3$ và hàm số $y = g(x) = a(x+2)^2 + b$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường cong $y = g(x)$ lần lượt là m, n, p . Tính $M = a - b + m - p + n$.



A. $M = \frac{2456}{15}$.

B. $M = \frac{2531}{15}$.

C. $M = \frac{2411}{15}$.

D. $M = \frac{2501}{15}$.

Lời giải

Chọn B

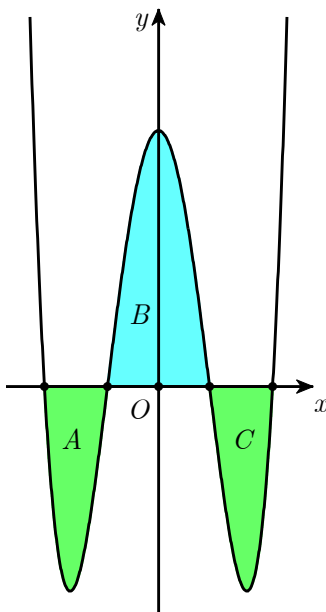
Đồ thị hàm $y = g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(-2;-4)$ nên

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow g(x) = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x.$$

Nhận xét đồ thị hai hàm số nhận đường thẳng $x = -2$ là trục đối xứng nên $m = p \Rightarrow m - p = 0$.

$$\text{Do đó, } a - b + n = 5 + \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx = 5 + \int_{-3}^{-1} (x^4 + 8x^3 + 20x^2 - 24x + 3) dx = \frac{2531}{15}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 + bx^2 + 5$ (*) có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng $(A), (B), (C)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số (*) và trục hoành. Biết $S_1 + S_3 = S_2$. Giá trị của S_2 là



A. $\frac{32}{5}$.

B. 16.

C. 5.

D. $\frac{19}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số (*) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Rightarrow b < 0$

Gọi $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ là nghiệm dương của phương trình $x^4 + bx^2 + 5 = 0$. Ta có $t_2^4 + bt_2^2 + 5 = 0$ (1)

Vì đồ thị hàm số (*) nhận trục tung làm trục đối xứng nên $S_1 + S_3 = S_2 \Leftrightarrow \frac{S_2}{2} = S_3$

$$\text{Do đó } \int_0^{t_1} (x^4 + bx^2 + 5)dx = - \int_{t_1}^{t_2} (x^4 + bx^2 + 5)dx \Leftrightarrow \int_0^{t_2} (x^4 + bx^2 + 5)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}t_2^5 + \frac{1}{3}bt_2^3 + 5t_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}t_2^4 + \frac{1}{3}bt_2^2 + 5 = 0 \quad (2)$$

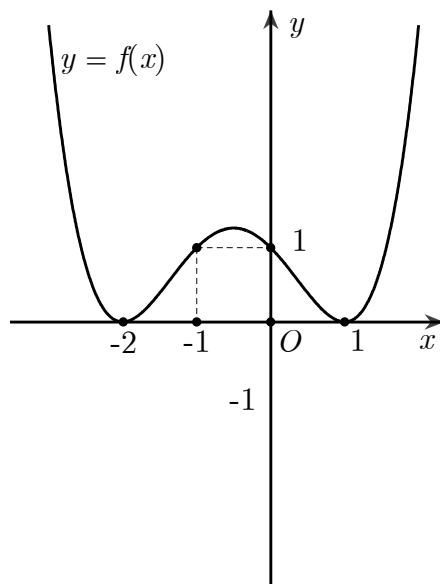
Từ (1) và (2) suy ra $b^2 = 36 \Rightarrow b = -6$ (vì $b < 0$) và $t_1 = 1$

$$\text{Vậy } S_2 = 2 \int_0^1 (x^4 - 6x^2 + 5)dx = \frac{32}{5} \text{ suy ra } \mathbf{Chọn A}$$

4) Dạng 4. Dựa vào tiếp tuyến của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Câu 1: (Đề HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$.

B. $\frac{107}{5}$.

C. $\frac{13}{5}$.

D. $\frac{127}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết đi đến $f(x) = a(x+2)^2(x-1)^2$.

Vì đồ thị đi qua điểm $A(0;1)$ nên $a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$

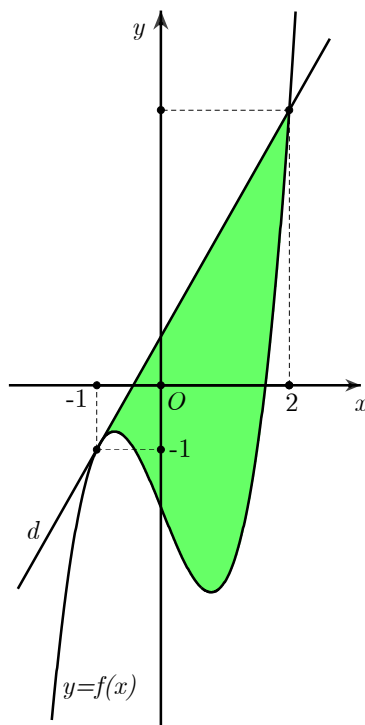
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(x+2)^2 = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1).$$

$$\text{Phương trình } f(x) = f'(x) \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x^2+x-2-4x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$ và $f'(x)$ là:

$$S = -\int_{-2}^4 \left[\frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1) \right] dx = \frac{107}{5}.$$

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d qua hai điểm A, B trên hình vẽ là tiếp tuyến của (C) tại A . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) bằng:



A. 6,75

B. 4,5

C. 8,45

D. 4,75

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d: y = mx + n$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tại điểm có hoành độ $x = -1; x = 2$ trong đó tại điểm có hoành độ $x = -1$ là điểm tiếp xúc của hai đường.

Vì vậy $(x^3 + ax^2 + bx + c) - (mx + n) = (x + 1)^2(x - 2)$.

Diện tích hình phẳng cần tính bằng:

$$S = \int_{-1}^2 |(x^3 + ax^2 + bx + c) - (mx + n)| dx = \int_{-1}^2 |(x + 1)^2(x - 2)| dx = 6,75.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A có hoành độ bằng -1 cắt (C) tại B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (C) (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{25}{4}$.

C. $\frac{27}{4}$.

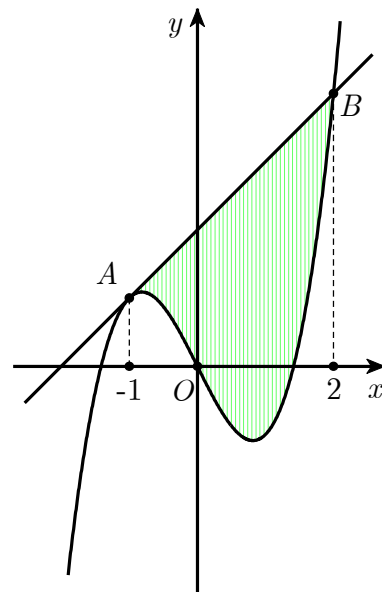
D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A(-1; a - b + c - 1)$

và $y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'(-1) = 3 - 2a + b$.



Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại $A : y = (3 - 2a + b)(x + 1) + a - b + c - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (3 - 2a + b)(x + 1) + a - b + c - 1 \quad (1).$$

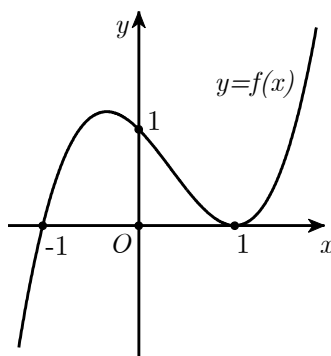
Phương trình (1) có nghiệm $x = -1; x = 2$

$$\Leftrightarrow 4a + 2b + c + 8 = 3(3 - 2a + b) + a - b + c - 1 \Leftrightarrow 9a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Suy ra $(C) : y = x^3 + bx + c$ và $d : y = (3 + b)(x + 1) - b + c - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng là : } S &= \int_{-1}^2 \left[(3 + b)(x + 1) - b + c - 1 - (x^3 + bx + c) \right] dx \\ &= \int_{-1}^2 (3x - x^3 + 2) dx = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình của đồ thị (C) có dạng $y = f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)$.

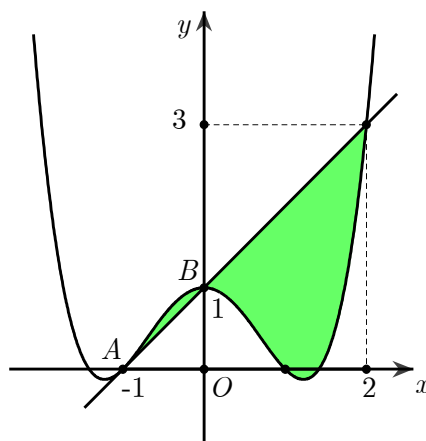
(C) qua $A(0; 1)$ nên $a = 1$.

Suy ra $(C) : y = f(x) = (x - 1)^2(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm

$$S = \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$. Tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ (đồ thị như hình vẽ).



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{20}$.

C. $\frac{1}{10}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(-1;0)$ có dạng $y = (-4a - 2b)(x + 1)$.

Do tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 nên phương trình $ax^4 + bx^2 + c = (-4a - 2b)(x + 1)$ nhận ba nghiệm là: $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} c = -a - b \\ b = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = -3a \end{cases}.$$

Vậy $(C): y = ax^4 - 3ax^2 + 2a = a(x^4 - 3x^2 + 2)$ và $\Delta: y = 2a(x + 1)$.

Bài cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ nên:

$$\int_0^2 |2a(x + 1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)| dx = \frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (2a(x + 1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)) dx = \frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^2 (-x^4 + 3x^2 + 2x) dx = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a \left(\frac{-x^5}{5} + x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a \cdot \frac{28}{5} = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a = 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ là:

$$S = \int_{-1}^0 |a(x^4 - 3x^2 + 2) - 2a(x + 1)| dx = \int_{-1}^0 (2x^4 - 6x^2 - 4x) dx = 2 \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - 2x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{2}{5}.$$

Cách 2:

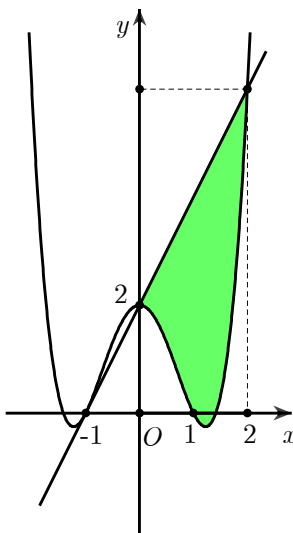
Giả sử đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến với (C) tại $A(0; -1)$ nên $c = -1$ và $m = -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $ax^4 + bx^2 - kx = 0 \Leftrightarrow a(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2) = 0$ (do phương trình trên có 3 nghiệm như bài toán đã cho).

Theo bài ta có phương trình $a \int_0^2 \left| (x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2) \right| dx = \frac{56}{5} \Rightarrow a = 2$.

Từ đó ta được $S = \int_{-1}^0 [2(x^4 - 3x^2 + 2) - 4(x+1)] dx = \int_{-1}^0 (2x^4 - 6x^2 - 4x) dx = \frac{2}{5}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{1}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow d: y = (-4a - 2b)(x + 1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a - 2b)(x + 1) = ax^4 + bx^2 + c(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x = 0, x = 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 2b = c \\ -12a - 6b = 16a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 0(2) \\ 28a + 10b + c = 0(3) \end{cases}$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\frac{28}{5} = \int_0^2 [(-4a - 2b)(x + 1) - ax^4 - bx^2 - c] dx$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{5} = 4(-4a - 2b) - \frac{32}{5}a - \frac{8}{3}b - 2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a + \frac{32}{3}b + 2c = -\frac{28}{5}(4).$$

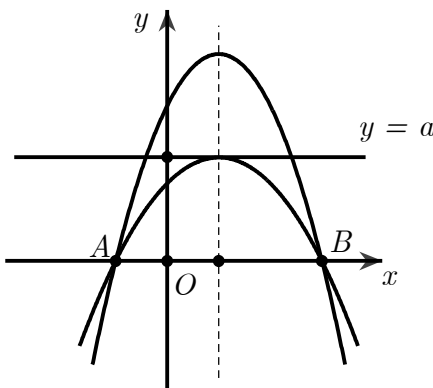
Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

Khi đó, $(C): y = x^4 - 3x^2 + 2$, $d: y = 2(x + 1)$.

$$\text{Diện tích cần tìm là } S = \int_{-1}^0 [x^4 - 3x^2 + 2 - 2(x + 1)] dx = \int_{-1}^0 (x^4 - 3x^2 - 2x) dx = \frac{1}{5}.$$

5) Dạng 5. Biến đổi đồ thị đưa về tính toán đơn giản.

Câu 1: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$ (đồ thị như hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



A. $T = 99$.

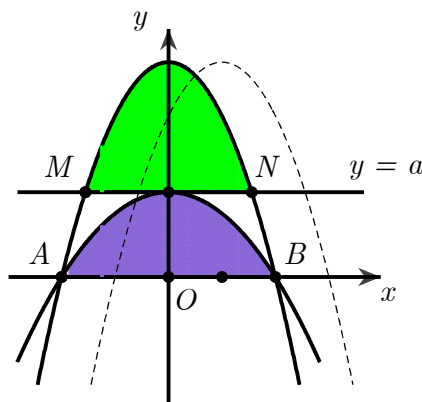
B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Chọn B.



Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị. Khi đó, phương

trình các parabol mới là $(P_1): y = -x^2 + 4$, $(P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB = 4$.

Gọi M, N là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$.

Ta có

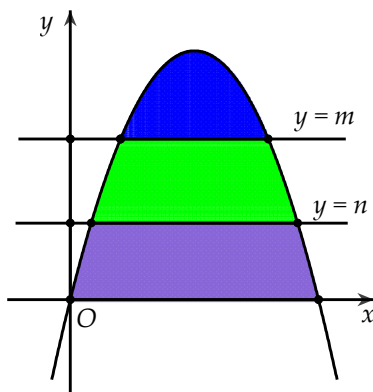
$$S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}.$$

$$S_2 = 2 \int_0^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}.$$

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$.

Vậy $T = 64$.

Câu 2: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng



A. $T = \frac{320}{9}$.

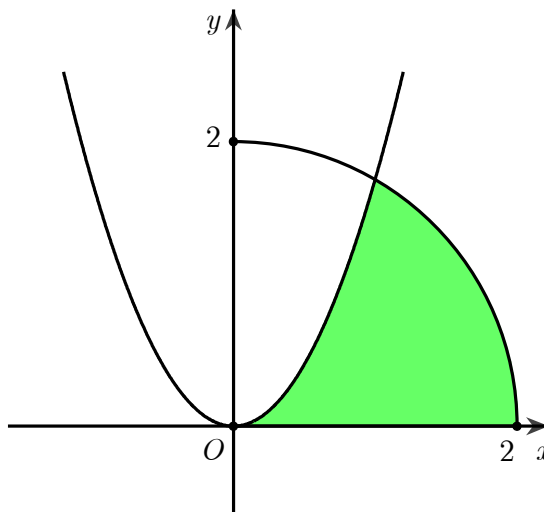
B. $T = \frac{512}{15}$.

C. $T = 405$.

D. $T = \frac{75}{2}$.

6) Dạng 6. Tính diện tích dựa vào việc chia nhỏ hình

Câu 1: (Đề tham khảo THPT QG 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3x^2}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3x^2} = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1$ với $0 \leq x \leq 2$ nên ta có $x = 1$

Ta có diện tích $S = \int_0^1 \sqrt{3x^2} dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$

Câu 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-1)^3$, $y = 3x-1$. Đường cong

$y = 2^{2-x}$ chia S thành hai phần có diện tích là S_1, S_2 (trong đó S_1 nằm trên trục hoành). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9 \ln 4}{4}$.

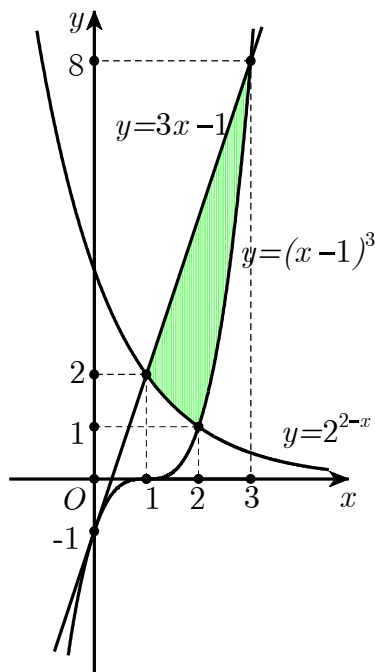
B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9 \ln 4}{4} - 1$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9 \ln 2}{4} - 1$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9 \ln 2}{4}$

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = (x - 1)^3$, $y = 3x - 1$ là:

$$(x - 1)^3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do vậy } S = \int_0^3 [3x - 1 - (x - 1)^3] dx = \frac{27}{4}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = (x - 1)^3$, $y = 2^{2-x}$ là:

$$(x - 1)^3 = 2^{2-x} \quad (1).$$

Dễ thấy $x = 2$ là nghiệm của (1) đồng thời hàm số $y = (x - 1)^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = 2^{2-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = 3x - 1$, $y = 2^{2-x}$ là:

$$3x - 1 = 2^{2-x} \quad (2).$$

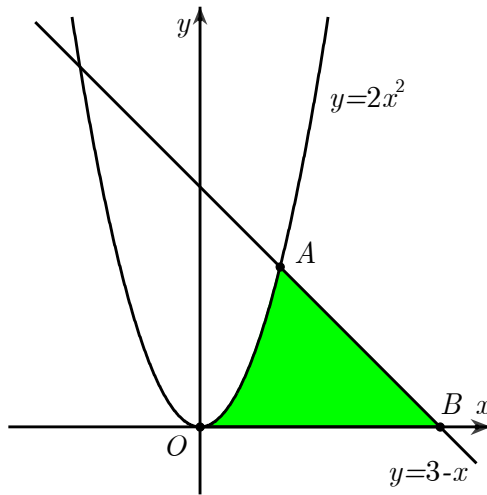
Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của (2) đồng thời hàm số $y = 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = 2^{2-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên (2) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

$$\text{Ta có } S_1 = \int_0^2 (3x - 1 - 2^{2-x}) dx + \int_2^3 [3x - 1 - (x - 1)^3] dx = \frac{27}{4} - \frac{3}{\ln 4}.$$

$$S_2 = S - S_1 = \frac{3}{\ln 4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{27}{4} - \frac{3}{\ln 4}}{\frac{3}{\ln 4}} = \frac{9 \ln 4}{4} - 1.$$

Câu 3: Gọi tam giác cong (OAB) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (OAB) bằng



A. $\frac{8}{3}$.

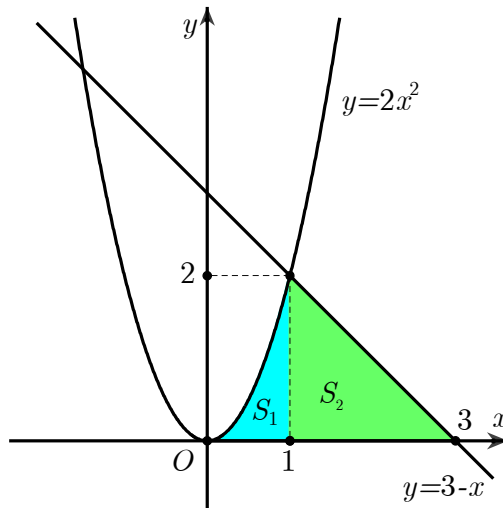
B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3 - x$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm $A(1; 3)$ và $(d) \cap Ox = B(3; 0)$.

$$\text{Khi đó } S_{(OAB)} = S_1 + S_2 = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^3 (3 - x) dx = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

Câu 4: Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 2^x$, $y = -x + 3$ và $y = 1$ là:

A. $S = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$.

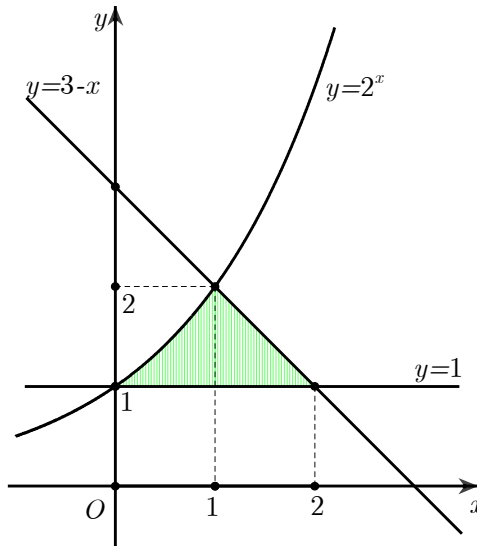
B. $S = \frac{1}{\ln 2} + 1$.

C. $S = \frac{47}{50}$.

D. $S = \frac{1}{\ln 2} + 3$.

Lời giải

Chọn A



Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường. Ta có:

* $2^x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$

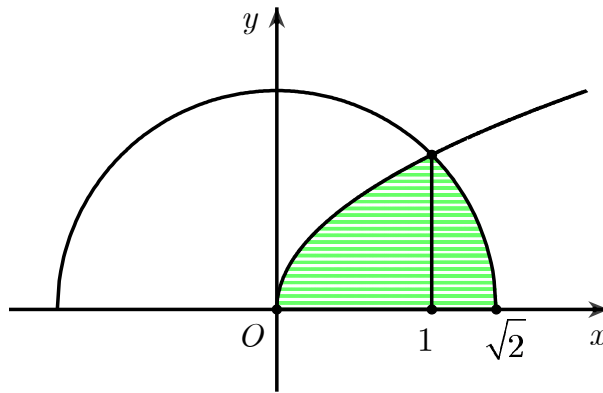
* $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

* $-x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Diện tích cần tìm là:

$$S = \int_0^1 (2^x - 1) dx + \int_1^2 (-x + 3 - 1) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$$

Câu 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{x}$, nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq \sqrt{2}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{3\pi + 1}{12}$.

B. $\frac{3\pi + 2}{12}$.

C. $\frac{4\pi + 1}{6}$.

D. $\frac{4\pi + 2}{12}$.

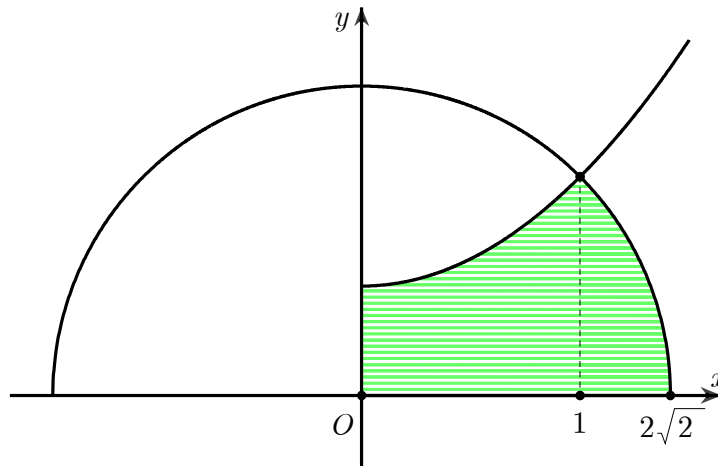
Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Do đó $S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \frac{3\pi + 2}{12}$.

Câu 6: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (với $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{8-x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{3\pi + 14}{6}$.

B. $\frac{2\pi + 2}{3}$.

C. $\frac{3\pi + 4}{6}$.

D. $\frac{3\pi + 2}{3}$.

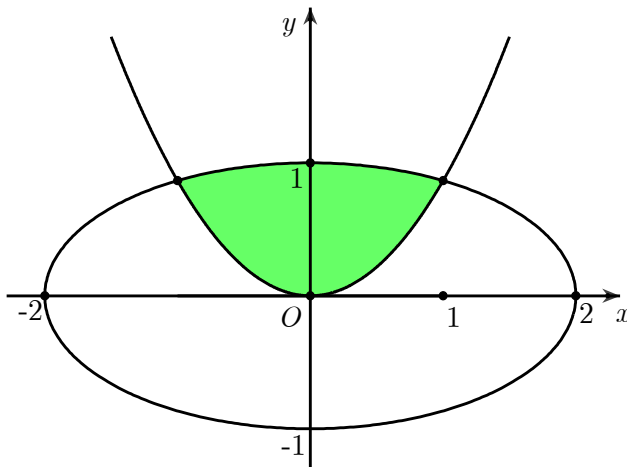
Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{8-x^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 24x^2 - 112 = 0 \\ 0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

$$\text{Do đó } S = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \frac{3\pi + 2}{3}.$$

Câu 7: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của Elip và Parabol là

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là

$$S_{(H)} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

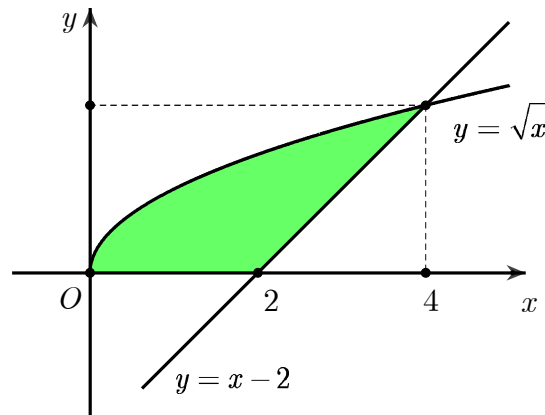
Xét $I = \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx$, đặt $x = 2 \sin t$ ta được

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } S_{(H)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow P = a + b + c = 9.$$

Câu 8: Tính diện tích S của hình phẳng (phần tô màu) trong hình sau



A. $S = \frac{8}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Lời giải

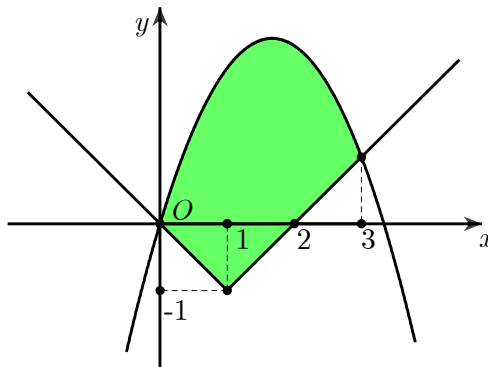
Chọn B

Dựa vào hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{10}{3}.$$

Câu 9: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình

$$y = \frac{10}{3}x - x^2, y = \begin{cases} -x & \text{ khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}. \text{ Diện tích của } (H) \text{ bằng?}$$



A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx.$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{27}$; $y = \frac{27}{x}$ bằng

A. $27 \ln 2$.

B. $27 \ln 3$.

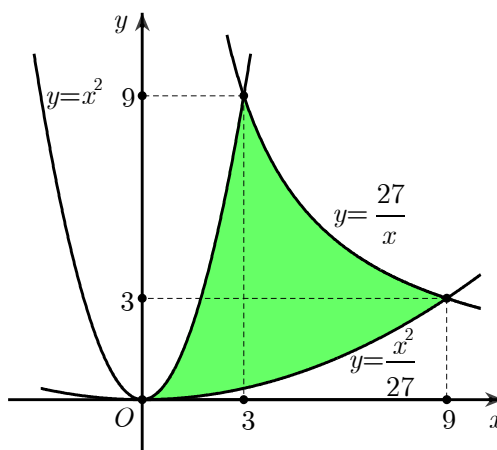
C. $28 \ln 3$.

D. $29 \ln 3$.

Lời giải

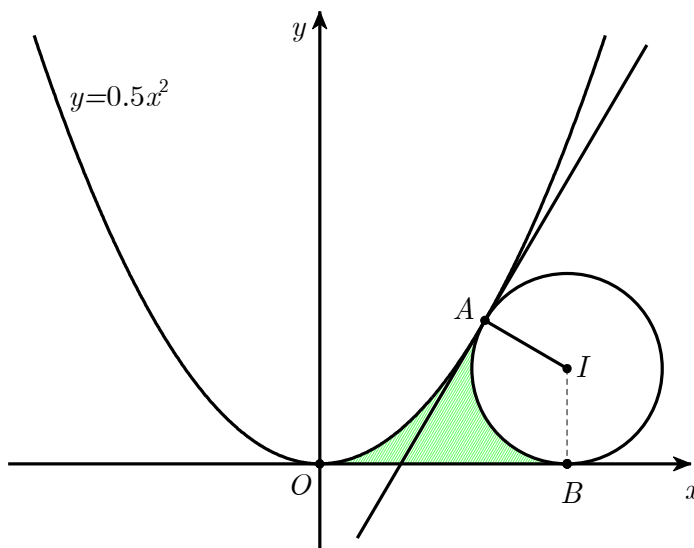
Chọn B

Xét các pthđgđ $x^2 = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0$; $x^2 = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = 3$; $\frac{x^2}{27} = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = 9$.



$$\text{Suy ra } S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx = 27 \ln 3.$$

Câu 11: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường tròn (C) có bán kính bằng 1 tiếp xúc với trục hoành đồng thời có chung một điểm A duy nhất với (P) . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) , (C) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) bằng:



A. $\frac{27\sqrt{3} - 8\pi}{24}$

B. $\frac{9\sqrt{3} + 9 - 4\pi}{12}$

C. $\frac{29\sqrt{3} - 9\pi}{24}$

D. $\frac{3\sqrt{3} + 2 - \pi}{3}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(b;1)$ là tâm của đường tròn (C) ($b > 0$); $A\left(a; \frac{1}{2}a^2\right)$ là tiếp điểm của (P) và (C) ($a > 0$).

Phương trình tiếp tuyến chung của (P) và (C) : $\Delta: y = ax - \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow ax - y - \frac{1}{2}a^2 = 0$.

Tiếp tuyến Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; a)$. $\vec{IA} = \left(a - b; \frac{1}{2}a^2 - 1\right)$.

Ta có $IA \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{IA} = 0 \Leftrightarrow a - b + a\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a^3$.

Hơn nữa

$$\begin{aligned} IA^2 = 1 &\Leftrightarrow (a - b)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}a^3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}a^4(a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Phần tô đậm trong hình vẽ là hình giới hạn bởi nhánh bên phải parabol (P) ($x > 0$), nửa bên trái đường

tròn (C) $\left(x < \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và trục hoành.

Ta có: $(C): \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-(y-1)^2}$ (vì $x < \frac{3\sqrt{3}}{2}$)

$(P): y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2y}$ (vì $x > 0$).

Vậy diện tích phần tô đậm: $S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-(y-1)^2} - \sqrt{2y} \right) dy = \frac{27\sqrt{3} - 8\pi}{24}$.

Câu 12: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có bán kính bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$ tiếp xúc với hai nhánh của (P) (như hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) (phần tô đậm trong hình) gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 5,12.

B. 7,06.

C. 8,74.

D. 6,03.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(0; b)$ là tâm của đường tròn (C) ($b > 0$); $A(a; a^2)$ là tiếp điểm nhánh bên phải của (P) và (C) ($a > 0$).

Phương trình tiếp tuyến chung của (P) và (C) : $\Delta: y = 2ax - a^2 \Leftrightarrow 2ax - y - a^2 = 0$.

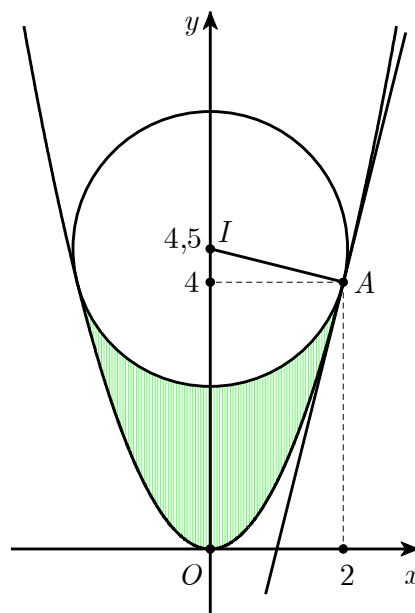
Tiếp tuyến Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2a)$. $\vec{IA} = (a; a^2 - b)$.

Ta có $IA \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{IA} = 0 \Leftrightarrow a + 2a(a^2 - b) = 0 \Leftrightarrow b = a^2 + \frac{1}{2}$.

Hơn nữa $IA^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow a^2 + (a^2 - b)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = \frac{9}{2}$.

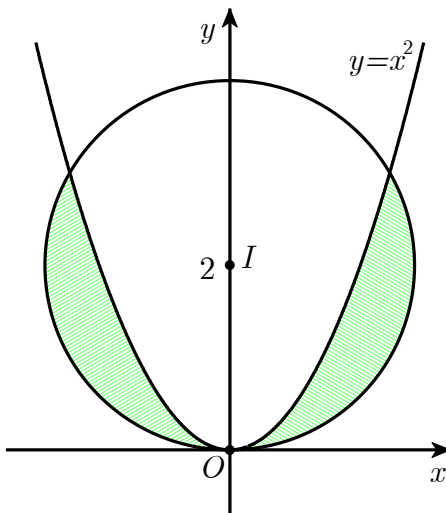
Phần tô đậm trong hình vẽ là hình giới hạn bởi parabol (P) và nửa bên dưới đường tròn (C) $\left(y < \frac{9}{2}\right)$.

Ta có $(C): x^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{17}{4} - x^2}$ (vì $y < \frac{9}{2}$)



Vậy diện tích phần tô đậm $S = 2 \int_0^2 \left(\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{17}{4} - x^2} - x^2 \right) dx \approx 6,03$.

Câu 13: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có bán kính bằng 2 tiếp xúc với (P) tại gốc tọa độ (như hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) (phần tô đậm trong hình) bằng:



A. $\frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.

B. $\frac{4\pi}{3} - 3\sqrt{3}$.

C. $\frac{8\pi}{3} - 5\sqrt{3}$.

D. $\frac{8\pi}{3} - 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Vì tính đối xứng, ta chỉ cần tính phần tô màu phía bên phải trục Oy ($x \geq 0$).

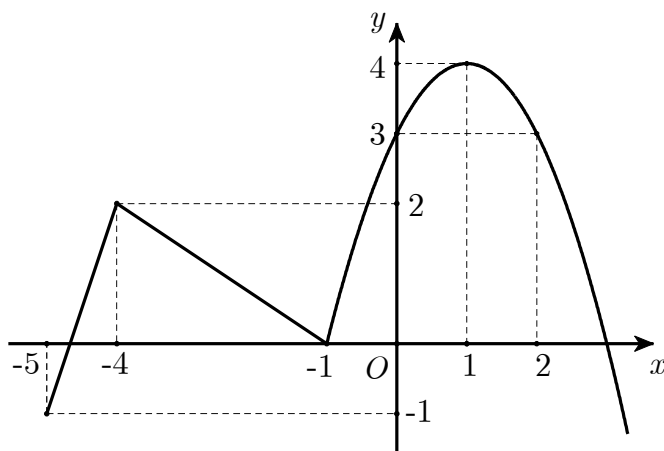
Qua hình vẽ, ta thấy: (C) có tâm $I(0;2) \Rightarrow (C): x^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - (y-2)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) :

$$x^2 + (x^2 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Khi đó diện tích phần tô màu $S = 2 \int_0^3 \left(\sqrt{4 - (y-2)^2} - \sqrt{y} \right) dy = \frac{1}{3} (8\pi - 9\sqrt{3})$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

A. $\frac{109}{3}$.

B. 33.

C. $\frac{35}{3}$.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; 4)$ và đi qua điểm $(2; 3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 3.$$

Do $f(0) = 0$ nên $2f(-5) + 3f(2) = 2[f(-5) - f(-1)] + 2[f(-1) - f(0)] + 3[f(2) - f(0)]$

$$\begin{aligned} &= -2 \int_{-5}^{-1} f'(x) dx - 2 \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx + 3 \int_0^2 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ &= -2S_1 - 2 \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx + 3 \int_0^2 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{-2 \cdot 7}{2} - 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{22}{3} = \frac{35}{3}. \end{aligned}$$

Trong đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng

$$x = -5, x = -1 \text{ và ta có: } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{11}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{2}.$$

Cách 2.

$$\text{Ta tính được: } f'(x) = \begin{cases} 3x + 14, & -5 \leq x \leq -4 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-4) - f(-5) = \int_{-5}^{-4} f'(x) dx = \int_{-5}^{-4} (3x + 14) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow f(-4) - f(-5) = \frac{1}{2}. (1)$$

$$f(-1) - f(-4) = \int_{-4}^{-1} f'(x) dx = \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx = 3 \Rightarrow f(-1) - f(-4) = 3. (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow f(-1) - f(-5) = \frac{7}{2}. (3)$$

$$f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{5}{3} \Rightarrow f(0) - f(-1) = \frac{5}{3}. (4)$$

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{22}{3} \Rightarrow f(2) - f(0) = \frac{22}{3}. (5)$$

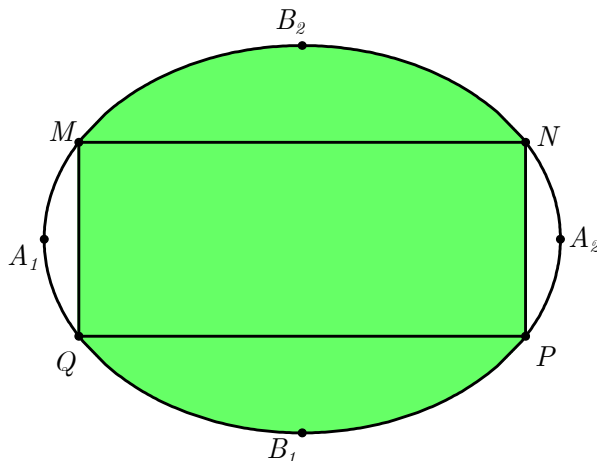
$$\text{Mà } f(0) = 0. (6)$$

$$\text{Từ (3),(4),(5),(6) } \Rightarrow f(-1) = -\frac{5}{3}, f(2) = \frac{22}{3}, f(-5) = -\frac{31}{6}$$

$$\text{Do đó: } 2f(-5) + 3f(2) = \frac{35}{3}.$$

7) Dạng 7. Toán thực tế với giả thiết có đồ thị hàm liên quan.

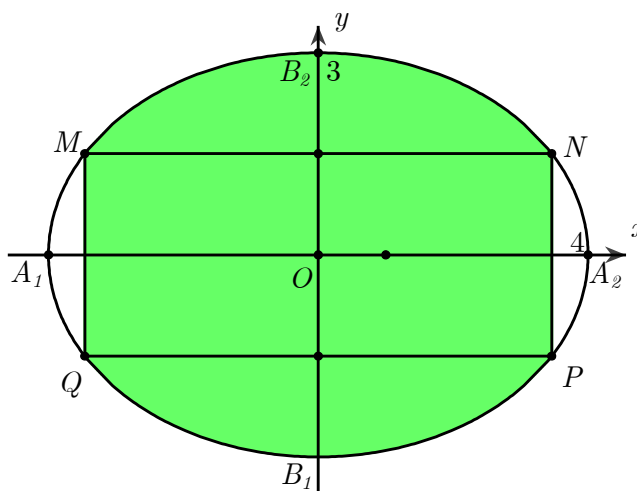
Câu 1: (Đề tham khảo THPT QG 2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 VNĐ / m^2 và phần còn lại 100.000 VNĐ / m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$?



- A. 5.526.000 đồng. B. 5.782.000 đồng. C. 7.322.000 đồng. D. 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

$$\text{Ta có } S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16 - x^2} dx = 3 \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = 4 \sin t \text{ ta tính được } S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Suy ra $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \simeq 7.322.000 \text{ (đồng)}.$$

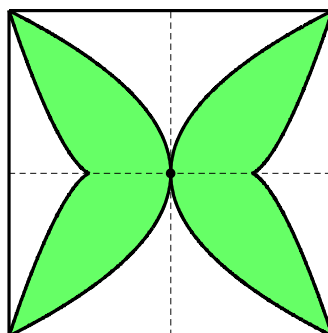
Câu 2: Sàn của một viện bảo tàng mỹ thuật được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh 40 (cm) như hình bên. Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $y^2 = 2x$ và $4(|x| - 1)^3 = y^2$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Diện tích được tô đậm gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 506 (cm²)

B. 747 (cm²)

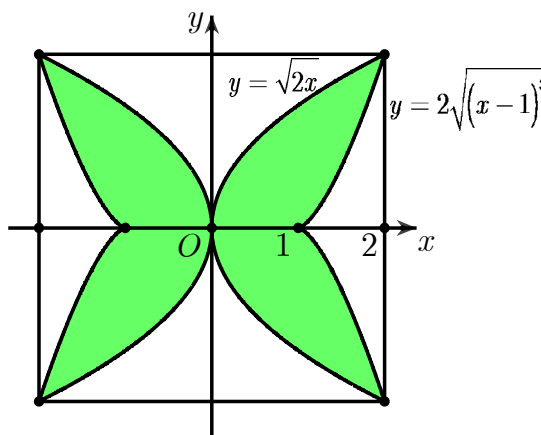
C. 507 (cm²)

D. 746 (cm²)



Lời giải

Chọn B

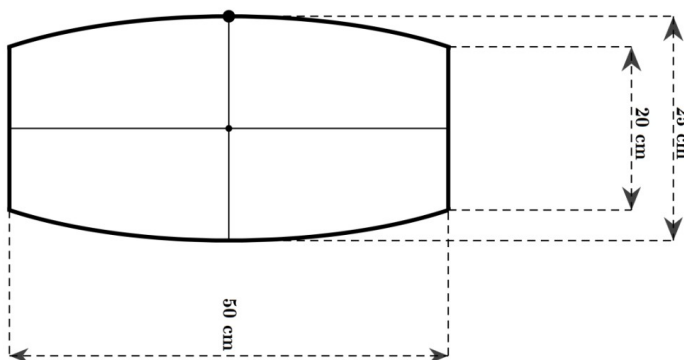


Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Diện tích phần tô đậm là

$$S = 4 \left[\int_0^1 (\sqrt{2x} - 0) dx + \int_1^2 (\sqrt{2x} - 2\sqrt{(x-1)^3}) dx \right] = \frac{112}{15} \text{ (dm}^2\text{)} \approx 747 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 3: (Đề thi thử THPT QG Bắc Ninh lần 2 năm 2017) Một xưởng sản xuất gỗ muốn thiết kế những có hình dạng là một phần của hình elip có kích thước giống hình bên. Biết miếng gỗ dày 2cm . Thể tích miếng gỗ đã cho tính theo cm^3 nằm trong khoảng nào?



A. (2340; 2350).

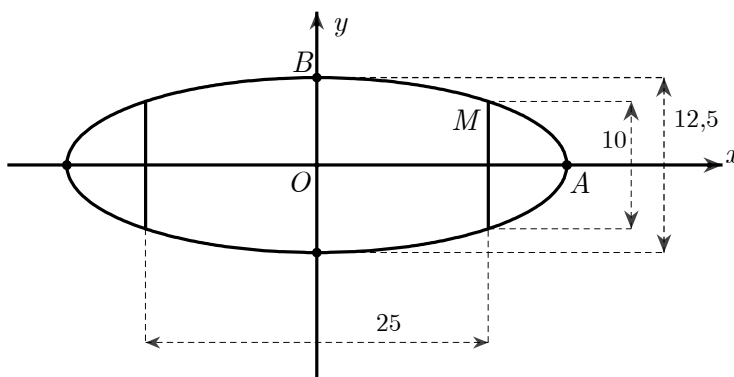
B. (1170; 1180).

C. (2240; 2250).

D. (1200; 1210).

Lời giải

Chọn A



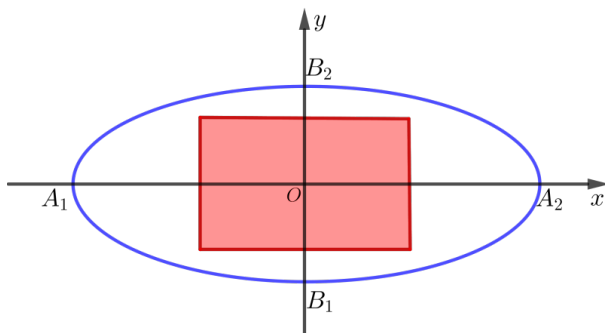
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, khi đó Elip đi qua các điểm $B(0; 12,5)$, $M(25; 10)$ ta có

$$\frac{25^2}{a^2} + \frac{100}{12,5^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{25^3}{9}$$

Ta được phương trình Elip: $\frac{x^2}{\frac{25^3}{9}} + \frac{y^2}{12,5^2} = 1 \Rightarrow y = 12,5 \sqrt{1 - \frac{x^2}{\frac{25^3}{9}}}$

Diện tích bề mặt miếng là $S = 4 \int_0^{25} 12,5 \sqrt{1 - \frac{x^2}{\frac{25^3}{9}}} dx \approx 23,406 \Rightarrow V \approx 2340,6$

Câu 4: Một mặt bàn hình elip có chiều dài là 120cm , chiều rộng là 60cm . Anh Phụng muốn gắn đá hoa cương và dán gạch tranh trên mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương bên ngoài và điểm nhấn bên trong là bộ tranh gồm 2 miếng gạch với kích thước mỗi miếng là $25\text{cm} \times 40\text{cm}$). Biết rằng đá hoa cương có giá và bộ tranh gạch có giá 300.000 VNĐ/bộ. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương và dán gạch tranh theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 519.000 đồng.

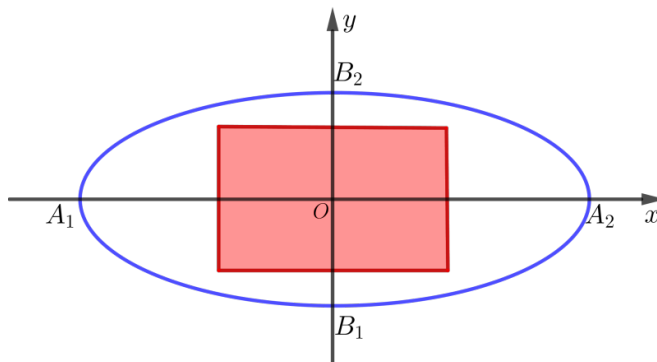
B. 610.000 đồng.

C. 639.000 đồng.

D. 279.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 1,2 = 2a \\ B_1B_2 = 0,6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{0,36} + \frac{y^2}{0,09} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{0,36 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip là:

$$S_{(E)} = 4 \int_0^{0,6} \frac{1}{2} \sqrt{0,36 - x^2} dx = 2 \int_0^{0,6} \sqrt{0,36 - x^2} dx = 0,18\pi (m^2).$$

Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần đá hoa cương và bộ tranh

$$\text{Ta có } S_2 = 2 \times 0,25 \times 0,4 = 0,2 (m^2)$$

$$\text{Suy ra } S_1 = S_{(E)} - S_2 = 0,18\pi - 0,2 (m^2).$$

Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (0,18\pi - 0,2) \cdot 600000 + 300000 \simeq 519.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 5: Một mặt bàn hình elip có chiều dài là $120cm$, chiều rộng là $60cm$. Anh Hải muốn gắn đá hoa cương cho mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương trắng và phần đá hoa cương màu vàng), biết rằng phần màu vàng cũng là elip có chiều dài $100cm$ và chiều rộng là $40cm$. Biết rằng đá hoa cương màu trắng có giá $600.000 \text{ VNĐ} / m^2$ và đá hoa cương màu trắng có giá $650.000 \text{ VNĐ} / m^2$. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 355.000 đồng.

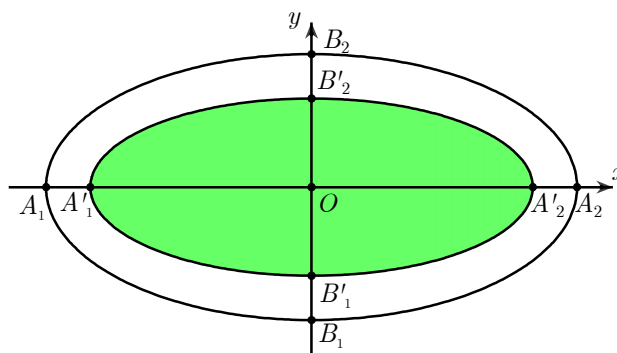
B. 339.000 đồng.

C. 368.000 đồng.

D. 353.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 1,2 = 2a \\ B_1B_2 = 0,6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,3 \end{cases} \Rightarrow (E_L): \frac{x^2}{0,36} + \frac{y^2}{0,09} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{0,36 - x^2}$$

Suy ra diện tích của hình elip lớn là:

$$S_{(E_L)} = 4 \int_0^{0,6} \frac{1}{2} \sqrt{0,36 - x^2} dx = 2 \int_0^{0,6} \sqrt{0,36 - x^2} dx = 0,18\pi (m^2).$$

$$\text{Với } \begin{cases} A'_1A'_2 = 1 = 2a \\ B'_1B'_2 = 0,4 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = 0,2 \end{cases} \Rightarrow (E_N): \frac{x^2}{0,25} + \frac{y^2}{0,04} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{2}{5}\sqrt{0,25 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip nhỏ là:

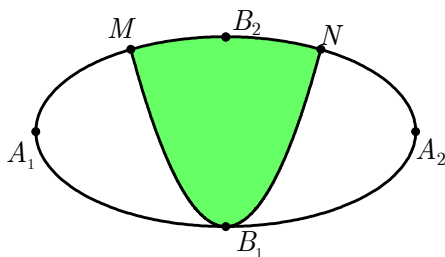
$$S_{(E_N)} = 4 \int_0^{0,5} \frac{2}{5} \sqrt{0,25 - x^2} dx = \frac{8}{5} \int_0^{0,5} \sqrt{0,25 - x^2} dx = 0,1\pi (m^2).$$

Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần gỗ hoa cương màu trắng và phần gỗ hoa cương màu vàng. Ta có $S_2 = S_{(E_N)} = 0,1\pi (m^2)$.

Suy ra $S_1 = S_{(E_L)} - S_{(E_N)} = 0,18\pi + 0,1\pi = 0,08\pi$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = 0,08\pi \cdot 600000 + 0,1\pi \cdot 650000 \simeq 355.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 6: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.

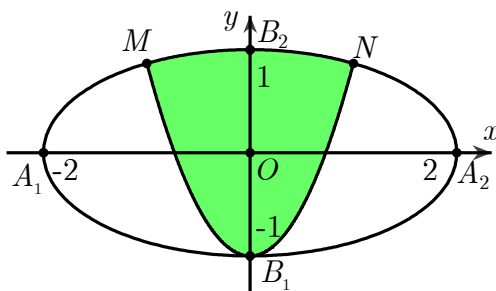


Người ta chia elip bởi Parabol có đỉnh B_1 , trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N . Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/ m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/ m^2 . Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m$, $B_1B_2 = 2m$, $MN = 2m$.

- A.** 2.431.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



+ Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của A_1A_2 . Tọa độ các đỉnh $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.

+ Phương trình đường Elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

+ Ta có $M\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$.

+ Parabol (P) có đỉnh $B_1(0;-1)$ và trục đối xứng là Ox nên (P) có phương trình

$$y = ax^2 - 1, (a > 0). (P) \text{ đi qua } M, N \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\Rightarrow (P) \text{ có phương trình } y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 - 1.$$

+ Diện tích phần tô đậm

$$S_1 = 2 \cdot \int_0^1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 + 1 \right] dx = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + 2$$

Đặt $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) + 2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}$$

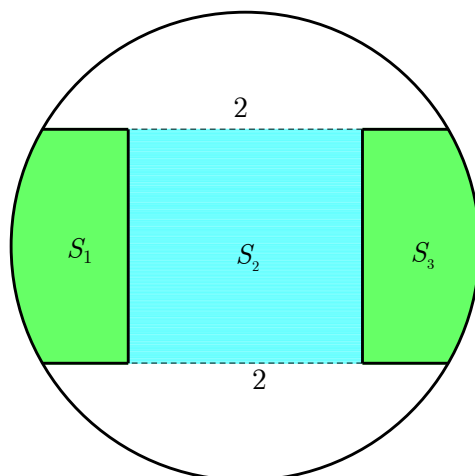
$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \left(2t + \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3}.$$

+ Diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 2\pi$.

$$\Rightarrow \text{Diện tích phần còn lại } S_2 = S - S_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{4}{3}.$$

+ Kinh phí sử dụng là: $200000S_1 + 500000S_2 \approx 2431000$ (đồng).

Câu 7: Một người định xây một hòn non bộ bằng cách vẽ một đường tròn bán kính $2m$ trên mặt đất sau đó lấy tâm đường tròn làm tâm của một hình vuông cạnh $2m$ như hình vẽ. Phần S_1 (tất cả phần màu trắng) xây thành bể để xếp hòn non bộ và thả cá, phần S_2, S_3 để trồng hoa. Tính diện tích trồng hoa.



A. $3,65m^2$

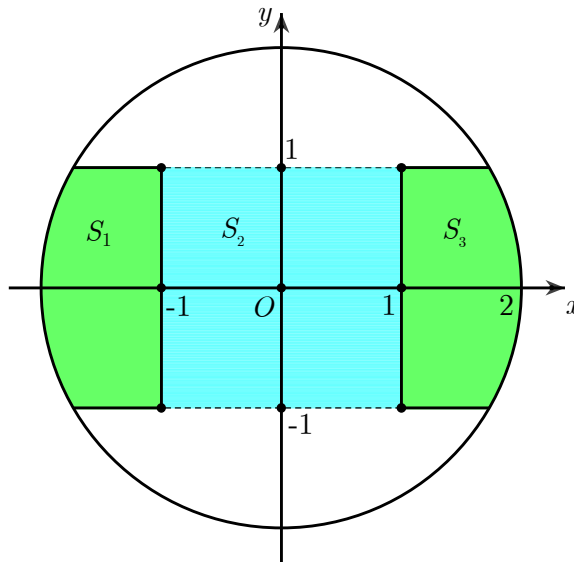
B. $3,56m^2$

C. $4,65m^2$

D. $4,56m^2$

Lời giải

Chọn A



Chọn gốc tọa độ trùng với tâm đường tròn, khi đó phương trình đường tròn tâm O bán kính 2 là.

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Diện tích của hình tròn là $4\pi (m^2)$

Diện tích hình vuông là $4 (m^2)$

Các cạnh của hình vuông nằm trên các đường thẳng $y = \pm 1, x = \pm 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường tròn và đường thẳng $y = 1$ là.

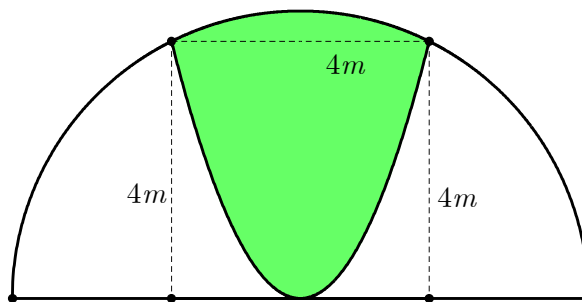
$$\sqrt{4 - x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Diện tích phần bề ngoài hình vuông là $2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - x^2} - 1) dx$

$$\Rightarrow S_1 = 4 + 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - x^2} - 1) dx$$

Diện tích phần trồng hoa $S_2 + S_3 = 4\pi - S_1 \approx 3,65 (m^2)$.

Câu 8: Nhà ông An có một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}(m)$. Ông An muốn thiết kế khuôn viên một phần để lát gạch Ý (phần tô đậm) và hai phần còn lại để trồng hoa Nhật Bản (phần không tô màu). Phần tô đậm có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn, cách nhau một khoảng bằng 4 (m). Biết các kích thước cho như hình vẽ, kinh phí để trồng hoa Nhật Bản là 150.000 đồng / m^2 và kinh phí để lát gạch Ý là 250.000 đồng / m^2 . Hỏi kinh phí ông An để làm công trình đó gần nhất với kết quả nào sau đây?



A. 5.916.400 đồng

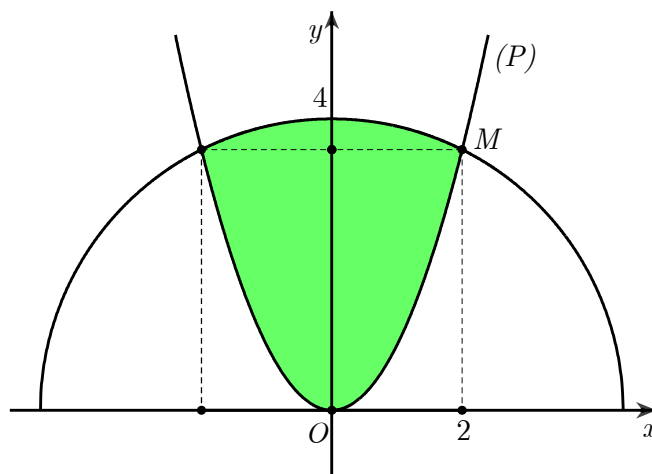
B. 5.906.400 đồng

C. 5.609.400 đồng

D. 5.906.500 đồng

Lời giải

Chọn B



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}$$

Phương trình Parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) đi qua điểm $M(2; 4)$ nên $4 = a.(2)^2 \Leftrightarrow a = 1$

Gọi S_1 là phần diện tích của hình phẳng hạn bởi (P) là nửa đường tròn (phần tô màu).

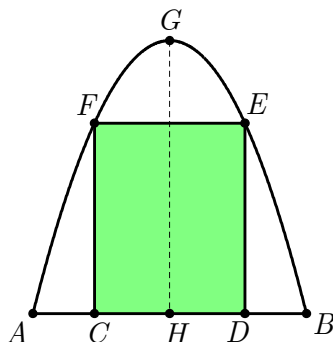
Diện tích phần lát gạch Ý của khuôn viên là: $S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2).dx \approx 11,940$

Phần diện tích trồng cỏ Nhật Bản của khuôn viên là:

$$S_2 = \frac{1}{2} S_{\text{hình tròn}} - S_1 = \frac{1}{2} \pi (2\sqrt{5})^2 - \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2).dx \approx 19,476$$

Vậy số tiền cần có là: $T = 250.000.S_1 + 150.000.S_2 \approx 5.906.400$ (đồng)

Câu 9: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật CDEF tô đậm giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trồng xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 .



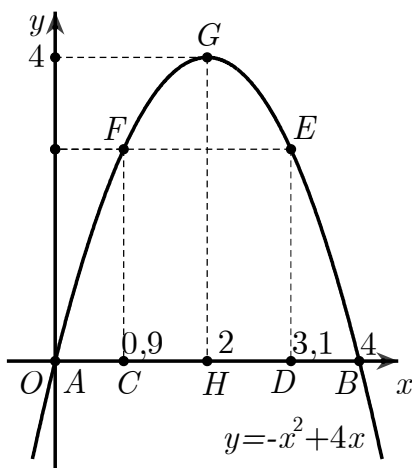
Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A.** 11445000 (đồng). **B.** 7368000 (đồng). **C.** 4077000 (đồng). **D.** 11370000 (đồng)

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2; 4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Gọi phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 2^2a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Nên phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$

$$\text{Diện tích của cả công là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \approx 10,67(m^2)$$

$$\text{Do vậy chiều cao } CF = DE = f(0,9) = 2,79(m)$$

$$CD = 4 - 2.0,9 = 2,2(m)$$

$$\text{Diện tích hai cánh công là } S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \approx 6,14(m^2)$$

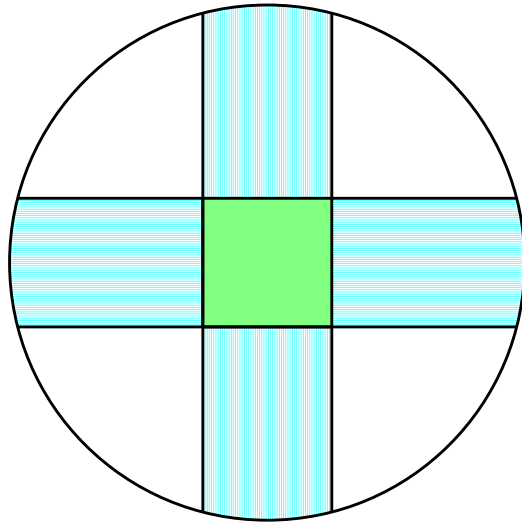
$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = 10,67 - 6,14 = 4,53(m^2)$$

$$\text{Nên tiền là hai cánh công là } 6,14.1200000 = 7368000(\text{đ})$$

$$\text{và tiền làm phần xiên hoa là } 4,53.900000 = 4077000(\text{đ}).$$

Vậy tổng chi phí là 11445000 đồng.

Câu 10: Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa. Phần gạch xọc dùng để trồng cỏ. Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2 , giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2 , mỗi cây cọ giá 150.000 đ . Hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 13.265.000 đồng.

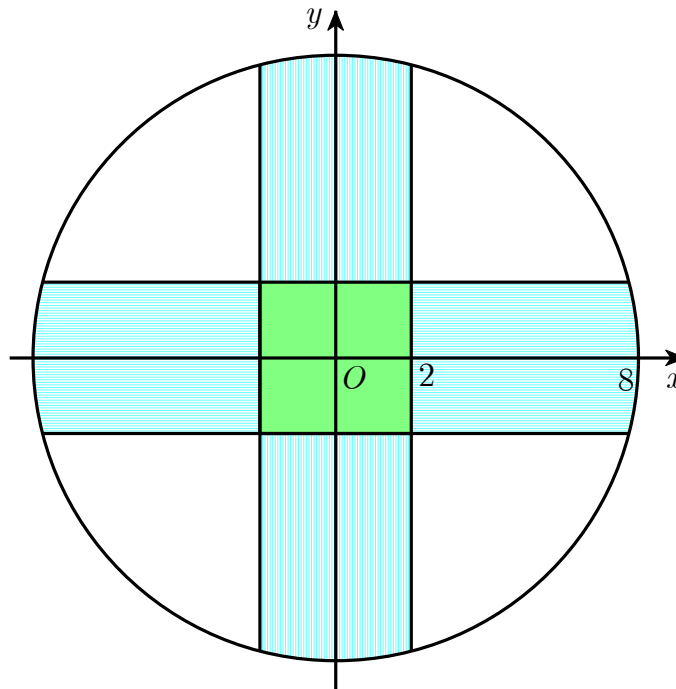
B. 12.218.000 đồng.

C. 14.465.000 đồng.

D. 14.865.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với tâm hình tròn, suy ra phương trình

đường tròn là: $x^2 + y^2 = 64$.

+ Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16 \text{ (m}^2\text{)}$.

⇒ Số tiền để trồng hoa là: $T_1 = 16 \times 200.000 = 3.200.000$ (đồng).

+ Diện tích trồng cỏ là: $S = 4 \int_{-2}^2 (\sqrt{64 - x^2} - 2) dx \approx 94,654 \text{ (m}^2\text{)}.$

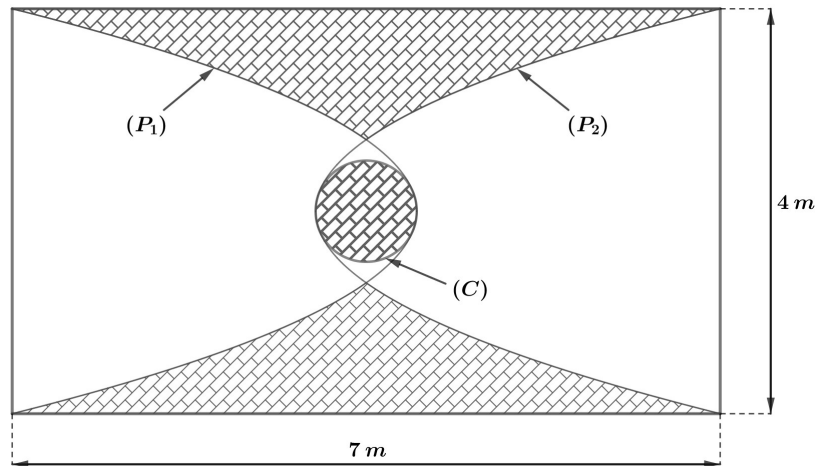
⇒ Số tiền trồng cỏ là: $T_2 = 94,654 \times 100.000 = 9.465.000$ (đồng).

+ Số tiền trồng 4 cây cọ là: $T_3 = 150.000 \times 4 = 600.000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa là:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 13.265.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 11: Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật như hình dưới đây, trong đó (P_1) , (P_2) là các parabol giống nhau, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol tại chính các đỉnh của các parabol ấy. Tính và làm tròn đến hai chữ số thập phân diện tích phần lát gạch của mảnh sân trong trường hợp diện tích hình tròn bao bởi (C) lớn nhất.



A. 8,39.

B. 10,12.

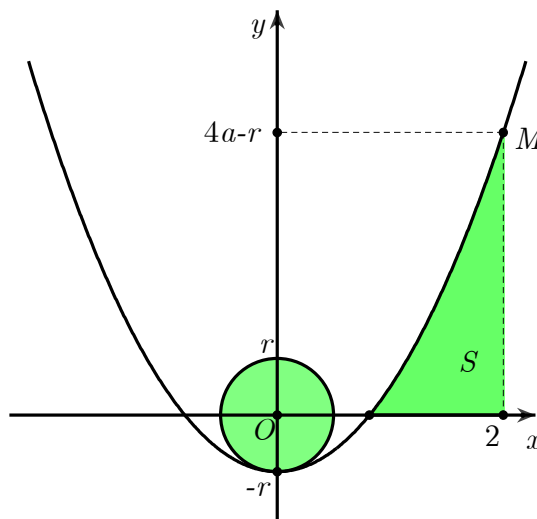
C. 9,18.

D. 11,45.

Lời giải

Chọn A

Đặt (C) và (P_1) vào mặt phẳng Oxy sao cho (C) có tâm là O và bán kính là r ($r > 0$) như hình dưới đây:



Lúc này ta có $(C): x^2 + y^2 = r^2$, $(P): y = ax^2 - r$ ($a > 0$).

Do (C) và (P_1) có duy nhất một điểm chung là đỉnh của (P_1) nên hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = ax^2 - r \end{cases}$

có duy nhất một nghiệm là $(0; -r)$ (*)

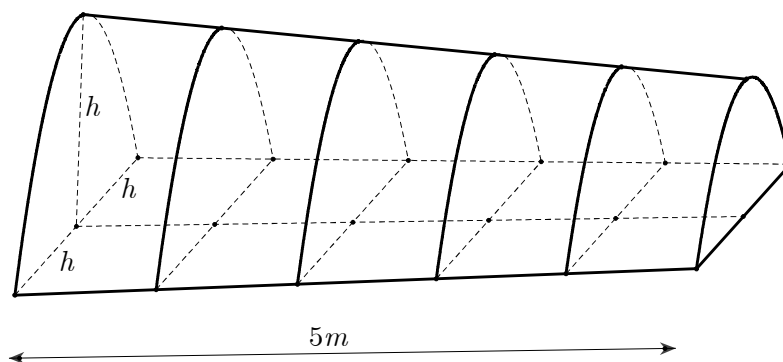
$$\text{Do } \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = ax^2 - r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (a^2x^4 - 2arx^2 + r^2) = r^2 \\ y = ax^2 - r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = \frac{2ar-1}{a^2} \text{ nên (*)} \Leftrightarrow r \leq \frac{1}{2a}. \end{cases}$$

$$\text{Do } M\left(2; \frac{7}{2}\right) \in (P_1) \text{ nên } a = \frac{2r+7}{8}. \text{ Tức } \begin{cases} r \leq \frac{1}{2a} \\ a = \frac{2r+7}{8} \end{cases}. \text{ Từ đây tìm được } \begin{cases} r \leq \frac{1}{2} \\ a = \frac{2r+7}{8} \end{cases}.$$

$$\text{Do hình tròn có diện tích lớn nhất nên } \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}. \text{ Lúc này } (P_1) \text{ cắt tia } Ox \text{ tại điểm có hoành độ } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Diện tích cần tính là } \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4S = \frac{\pi}{4} + 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) dx \approx 8,39.$$

Câu 12: Cho một mô hình 3 - D mô phỏng một đường hầm. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol như hình vẽ. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29.

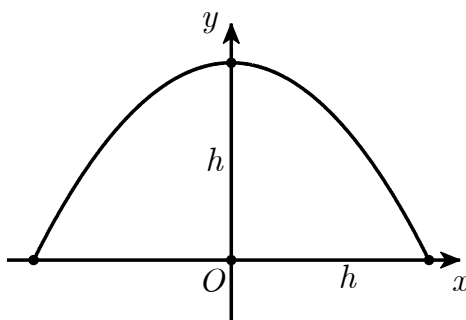
B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên. Parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + h, (a < 0)$

Ta có $B(h; 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x \Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888 \Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3)$$