

**ĐỀ THI KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2026-2027**

Môn: Toán

Thời gian làm bài 90 phút không kể thời gian giao đề

Đề thi gồm có 05 trang

Họ và tên:

Số báo danh:

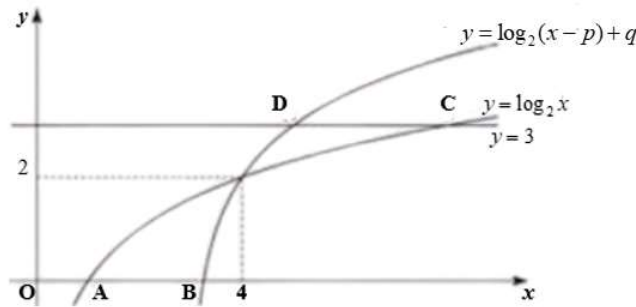
Mã đề 2601

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án A, B, C hoặc D.

Câu 1. Một người gọi điện thoại nhưng quên mất chữ số cuối cùng. Người đó gọi ngẫu nhiên một chữ số, nếu sai thì thử lại chữ số khác (không lặp lại chữ số đã thử). Tính xác suất để người đó gọi đúng số điện thoại trong không quá 2 lần thử.

- A. $\frac{19}{90}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{10}$.

Câu 2. Cho hai đồ thị hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x-p) + q$ cắt nhau tại điểm $(4; 2)$. Gọi A, B lần lượt là giao của đồ thị các hàm số $y = \log_2(x)$, $y = \log_2(x-p) + q$ với trục Ox , và gọi C, D lần lượt là giao của đồ thị các hàm số $y = \log_2(x)$, $y = \log_2(x-p) + q$ với đường thẳng $y = 3$. Giả sử $CD - BA = \frac{3}{4}$ với $0 < p < 4; q > 0$. Tính giá trị của $p + q$.



- A. 26. B. 8. C. 5. D. 27.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD, biết hai mặt phẳng (SBI) , (SCI) cùng vuông góc với đáy và $SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng

- A. 45° . B. 36° . C. 30° . D. 60° .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2-4x+3)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 3)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 5. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Gọi S là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất sao cho số được chọn có tích các chữ số bằng 2520 có dạng $\frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

- A. 2025. B. 2063. C. 2062. D. 2024.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M thuộc cạnh AD, sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Lấy điểm N trên đường thẳng BD' , lấy điểm P trên đường thẳng CC' để M, N, P thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{CP}{PC'}$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$

C. 3.

D. 2.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác MNP có góc $\widehat{NMP}$ tù. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác MNP có phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng đi qua M vuông góc với NP cắt đường tròn (C) tại $E(0; -5)$, $E \neq M$. Biết tam giác MNP có trọng tâm $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và $M(a; b)$. Tính giá trị của $S = 3a^2 + 4b^2 - ab$.

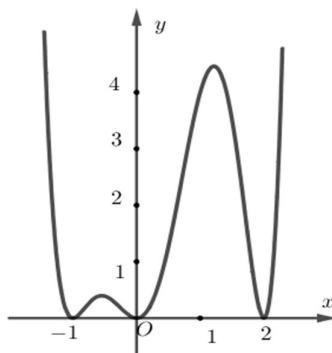
A. $S = 100$.

B. $S = 103$.

C. $S = 75$.

D. $S = 79$.

Câu 8. Cho hai hàm số bậc ba $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$. Hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng



A. 0.

B. -3.

C. -12.

D. $-\frac{32}{9}$.

Câu 9. Phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x + 1} = 0$ có tất cả các nghiệm là

A. $x = \pi + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

B. $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

C. $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D. $x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 10. Nhiệt độ trung bình của 12 tháng tại thành phố Hà Nội từ năm 1961 đến hết năm 1990 (30 năm) được cho trong bảng sau

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)
Tần số	1	3	12	9	5

Mốt của mẫu số liệu trên là

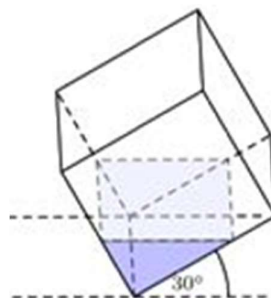
A. 15,7.

B. 17,5.

C. 16,0.

D. 17,0.

Câu 11. Cho hình lập phương có cạnh bằng 24 cm có chứa 3 lít nước. Đặt một cạnh của hình lập phương tiếp xúc với mặt phẳng nằm ngang rồi nghiêng hình lập phương sao cho một mặt chứa cạnh đó hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc 30° . Khi đó diện tích mặt thoáng của nước có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?



A. $(1100 \text{ cm}^2; 1300 \text{ cm}^2)$.

B. $(900 \text{ cm}^2; 1100 \text{ cm}^2)$.

C. $(500 \text{ cm}^2; 700 \text{ cm}^2)$.

D. $(700 \text{ cm}^2; 900 \text{ cm}^2)$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giới hạn của dãy (s_n) với $s_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = 4a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi H là trung điểm của AO . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA . Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

b) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$, khi đó $\tan \alpha = \frac{3}{2}$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

d) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{BSH}$.

Câu 2. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, $(a; b > 0)$ trong đó t là số ngày tính từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên trong tháng ($t = 0$ ứng với ngày thứ Bảy đó).

a) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.

b) Biết lượng chất ô nhiễm cao nhất trong tháng là 50 mg và thấp nhất là 20 mg. Giả sử ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng ($t = 0$). Xét các ngày: Thứ Hai tuần 2, Thứ Tư tuần 3, Thứ Ba tuần 4 và Thứ Sáu tuần 4 của tháng đó; gọi M và m lần lượt là số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất và ít nhất trong các ngày này. Khi đó $M - m < 23$.

c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30; b = 15$. Khi đó có đúng 4 ngày trong tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 mg.

d) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$ mg.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right)$.

a) Tập các giá trị của m để phương trình $f(x) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm phân biệt là $\left(-\infty; \frac{9}{2} \right)$.

b) Khi $m = 0$ thì đạo hàm của $y = f(x)$ trên $(-2; +\infty)$ là $y' = \frac{2x}{(2x^2 + 1)\ln 2} - \frac{1}{(x + 2)\ln 2}$.

c) Khi $m = -1$ thì phương trình $f(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Khi $0 < m < 2\sqrt{2}$ thì tập xác định của hàm số $y = f(2 - x^2)$ là $D = [-2; 2]$.

Câu 4. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2 m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5 m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900 m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may

a) Phân xưởng cần may 252 áo vest và 300 quần âu thì thu được tiền lãi cao nhất (giả sử rằng thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

b) Tiền lãi cao nhất mà phân xưởng thu được là 108 750 000 đồng.

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác

$$\text{d) Hệ bất phương trình thoả mãn điều kiện của bài toán là } \begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

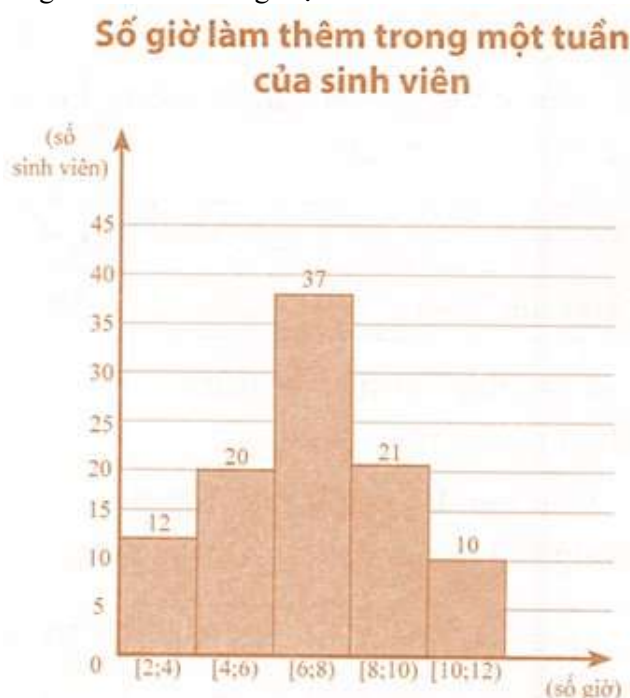
PHẦN III. Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Tô kết quả từ trái qua phải

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2026^x - 2026^{-x} + \ln^{2027} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. Tìm giá trị nguyên của tham số m để

tập nghiệm của bất phương trình: $f\left[\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2^2(2x)\right] + f\left[\sqrt{(m+1)\log_2 x} - (4 + \sqrt{m+1})\sqrt{\log_2^3 x}\right] \leq 0$

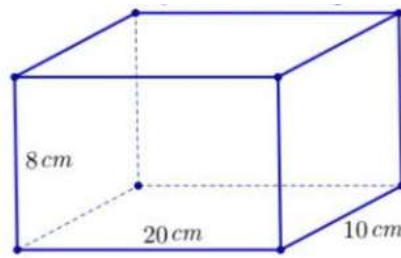
chứa đúng 32 giá trị nguyên.

Câu 2. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ bên.

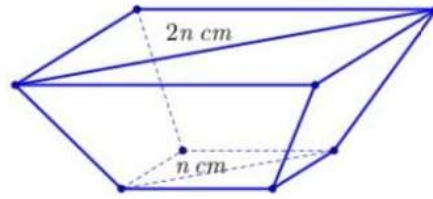


Tìm khoảng tứ phân vị của số liệu đó (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (hình a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm) (hình b). Sau khi đổ, mức nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng bao nhiêu cm^3 (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

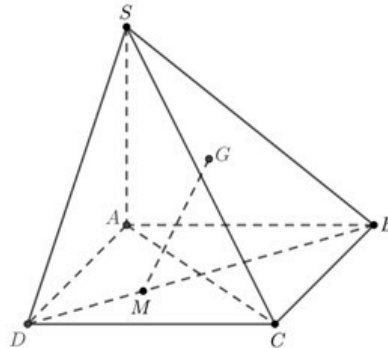


Hình a



Hình b

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 2 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết rằng cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2$ và G là trọng tâm tam giác SAB . Xét M là một điểm di động trên đường thẳng BD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và GM bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 5. Một nhà địa chất đang khảo sát tại điểm A trên sa mạc và cần di chuyển gấp về trạm nghiên cứu ở điểm B cách A một khoảng 90 km. Do địa hình cát đồi hiểm trở, xe chuyên dụng của ông khi chạy trực tiếp trên sa mạc chỉ đạt vận tốc tối đa 30 km/h. Cách đường nối AB một khoảng 20 km có một con đường nhựa thẳng song song với AB , nơi xe có thể tăng tốc lên tới 50 km/h. Để rút ngắn tối đa thời gian di chuyển, nhà địa chất quyết định lái xe qua sa mạc để ra đường nhựa, chạy một đoạn trên đường nhựa rồi mới rẽ qua sa mạc để về B . Hãy tính thời gian di chuyển ngắn nhất của ông từ A đến B (Kết quả tính theo giờ và làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 6. Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6; 6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG
KHẢO SÁT HSG THÀNH PHỐ CẤP CỤM TRƯỜNG LẦN 2 (16/10/2026)

Đề\câu	0000	2601	2602	2603	2604
1	B	B	C	B	C
2	A	C	B	A	C
3	A	D	B	A	A
4	B	D	B	A	B
5	A	B	C	A	B
6	C	C	C	A	B
7	C	B	C	B	B
8	B	C	B	D	C
9	B	B	B	A	B
10	B	B	A	D	A
11	D	C	C	A	D
12	C	B	A	C	A
1a	D	D	D	S	S
1b	D	S	S	D	S
1c	S	D	S	D	D
1d	D	S	D	D	D
2a	D	S	D	S	D
2b	D	S	S	D	D
2c	D	D	D	S	S
2d	S	D	D	D	D
3a	D	D	S	D	D
3b	S	D	D	D	S
3c	S	S	D	S	S
3d	D	S	S	S	D
4a	S	S	S	D	S
4b	D	D	D	S	S
4c	S	D	S	S	D
4d	D	D	D	D	D
1	15	15	15	1606	1606
2	2.87	3,27	0.71	3,27	0.71
3	0.71	1606	0.23	0.71	2.87
4	1606	0.71	1606	15	15
5	0.23	2.87	3,27	2.87	0.23
6	3,27	0.23	2.87	0.23	3,27

**ĐỀ THI KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2026-2027**

Môn: Toán

Thời gian làm bài 90 phút không kể thời gian giao đề

Họ và tên: Số báo danh:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án A, B, C hoặc D.

Câu 1. Phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x + 1} = 0$ có tất cả các nghiệm là

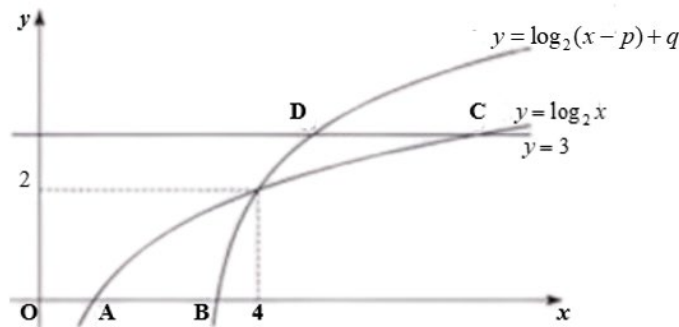
A. $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2. Cho hai đồ thị hàm số $y = \log_2 x, y = \log_2(x-p) + q$ cắt nhau tại điểm $(4; 2)$. Gọi A, B lần lượt là giao của đồ thị các hàm số $y = \log_2(x), y = \log_2(x-p) + q$ với trục Ox , và gọi C, D lần lượt là giao của đồ thị các hàm số $y = \log_2(x), y = \log_2(x-p) + q$ với đường thẳng $y = 3$. Giả sử $CD - BA = \frac{3}{4}$ với $0 < p < 4; q > 0$. Tính giá trị của $p + q$.



A. 5.

B. 8.

C. 27.

D. 26.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giới hạn của dãy (s_n) với $s_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N}^*$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2-4x+3)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

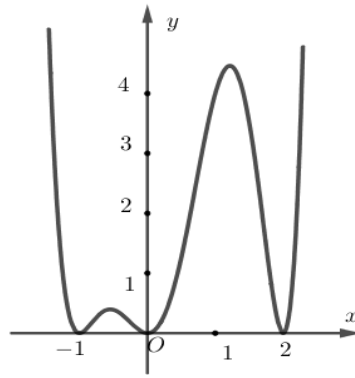
A. $(-\infty; -1).$

B. $(-1; 1).$

C. $(1; 3).$

D. $(-1; 3).$

Câu 5. Cho hai hàm số bậc ba $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$. Hàm số $y = f(x).g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

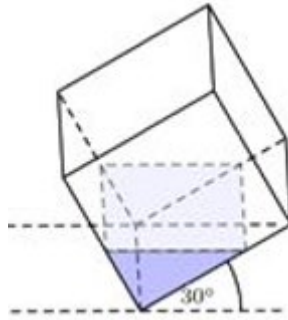


- A.** -12 . **B.** $-\frac{32}{9}$. **C.** -3 . **D.** 0 .

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác MNP có góc $\widehat{NMP}$ tù. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác MNP có phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng đi qua M vuông góc với NP cắt đường tròn (C) tại $E(0; -5)$, $E \neq M$. Biết tam giác MNP có trọng tâm $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và $M(a; b)$. Tính giá trị của $S = 3a^2 + 4b^2 - ab$.

- A.** $S = 79$. **B.** $S = 100$. **C.** $S = 103$. **D.** $S = 75$.

Câu 7. Cho hình lập phương có cạnh bằng 24 cm có chứa 3 lít nước. Đặt một cạnh của hình lập phương tiếp xúc với mặt phẳng nằm ngang rồi nghiêng hình lập phương sao cho một mặt chứa cạnh đó hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc 30° . Khi đó diện tích mặt thoáng của nước có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?



- A.** $(900\text{cm}^2; 1100\text{cm}^2)$. **B.** $(1100\text{cm}^2; 1300\text{cm}^2)$.
C. $(500\text{cm}^2; 700\text{cm}^2)$. **D.** $(700\text{cm}^2; 900\text{cm}^2)$.

Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M thuộc cạnh AD , sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Lấy điểm N trên đường thẳng BD' , lấy điểm P trên đường thẳng CC' để M, N, P thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{CP}{PC'}$.

- A.** 2 . **B.** 3 . **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a, CD = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD , biết hai mặt phẳng $(SBI), (SCI)$ cùng vuông góc với đáy và $SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng

- A.** 30° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 36° .

Câu 10. Một người gọi điện thoại nhưng quên mất chữ số cuối cùng. Người đó gọi ngẫu nhiên một chữ số, nếu sai thì thử lại chữ số khác (không lặp lại chữ số đã thử). Tính xác suất để người đó gọi đúng số điện thoại trong không quá 2 lần thử.

A. $\frac{1}{10}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{19}{90}$.

D. $\frac{2}{9}$.

Câu 11. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Gọi S là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Xác suất sao cho số được chọn có tích các chữ số bằng 2520 có dạng $\frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

A. 2024.

B. 2062.

C. 2025.

D. 2063.

Câu 12. Nhiệt độ trung bình của 12 tháng tại thành phố Hà Nội từ năm 1961 đến hết năm 1990 (30 năm) được cho trong bảng sau

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[12;14)	[14;16)	[16;18)	[18;20)	[20;22)
Tần số	1	3	12	9	5

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 15,7.

B. 16,0.

C. 17,5.

D. 17,0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may

a) Hệ bất phương trình thoả mãn điều kiện của bài toán là
$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác

c) Phân xưởng cần may 252 áo vest và 300 quần âu thì thu được tiền lãi cao nhất (giả sử rằng thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

d) Tiền lãi cao nhất mà phân xưởng thu được là 108750000 đồng.

Câu 2. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một

thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, ($a, b > 0$) trong đó

t là số ngày tính từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên trong tháng ($t = 0$ ứng với ngày thứ Bảy đó).

a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$ mg.

b) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.

c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30; b = 15$. Khi đó có đúng 4 ngày trong tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 mg.

d) Biết lượng chất ô nhiễm cao nhất trong tháng là 50 mg và thấp nhất là 20 mg. Giả sử ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng ($t = 0$). Xét các ngày: Thứ Hai tuần 2, Thứ Tư tuần 3, Thứ Ba tuần 4 và Thứ Sáu tuần 4 của tháng đó; gọi M và m lần lượt là số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất và ít nhất trong các ngày này. Khi đó $M - m < 23$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right)$.

a) Khi $m = 0$ thì đạo hàm của $y = f(x)$ trên $(-2; +\infty)$ là $y' = \frac{2x}{(2x^2 + 1)\ln 2} - \frac{1}{(x + 2)\ln 2}$.

b) Khi $m = -1$ thì phương trình $f(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Khi $0 < m < 2\sqrt{2}$ thì tập xác định của hàm số $y = f(2 - x^2)$ là $D = [-2; 2]$.

d) Tập các giá trị của m để phương trình $f(x) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm phân biệt là $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = 4a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi H là trung điểm của AO . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

a) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{BSH}$.

b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

c) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$, khi đó $\tan \alpha = \frac{3}{2}$.

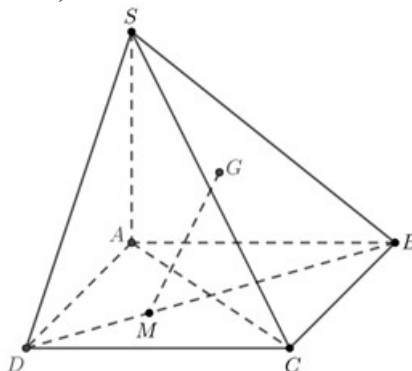
d) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA . Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

PHẦN III. Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Tô kết quả từ trái qua phải

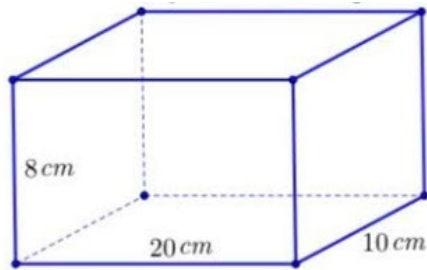
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2026^x - 2026^{-x} + \ln^{2027} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. Tìm giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $f\left[\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2^2(2x)\right] + f\left[\sqrt{(m+1)\log_2 x} - (4 + \sqrt{m+1})\sqrt{\log_2^3 x}\right] \leq 0$ chứa đúng 32 giá trị nguyên.

Câu 2. Một nhà địa chất đang khảo sát tại điểm A trên sa mạc và cần di chuyển gấp về trạm nghiên cứu ở điểm B cách A một khoảng 90 km. Do địa hình cát đồi hiểm trở, xe chuyên dụng của ông khi chạy trực tiếp trên sa mạc chỉ đạt vận tốc tối đa 30 km/h. Cách đường nối AB một khoảng 20 km có một con đường nhựa thẳng song song với AB , nơi xe có thể tăng tốc lên tới 50 km/h. Để rút ngắn tối đa thời gian di chuyển, nhà địa chất quyết định lái xe qua sa mạc để ra đường nhựa, chạy một đoạn trên đường nhựa rồi mới rẽ qua sa mạc để về B . Hãy tính thời gian di chuyển ngắn nhất của ông từ A đến B (kết quả tính theo giờ và làm tròn đến hàng phần trăm).

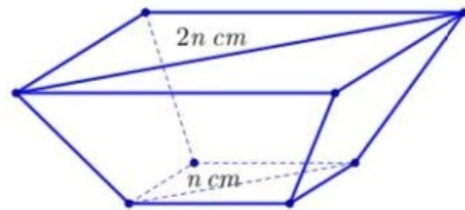
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 2 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết rằng cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2$ và G là trọng tâm tam giác SAB . Xét M là một điểm di động trên đường thẳng BD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và GM bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 4. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm , chiều rộng 10 cm , chiều cao 8 cm (hình a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài $n(\text{cm})$, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n(\text{cm})$ (hình b). Sau khi đổ, mức nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng bao nhiêu cm^3 (Kết quả chính xác đến hàng đơn vị)?



Hình a

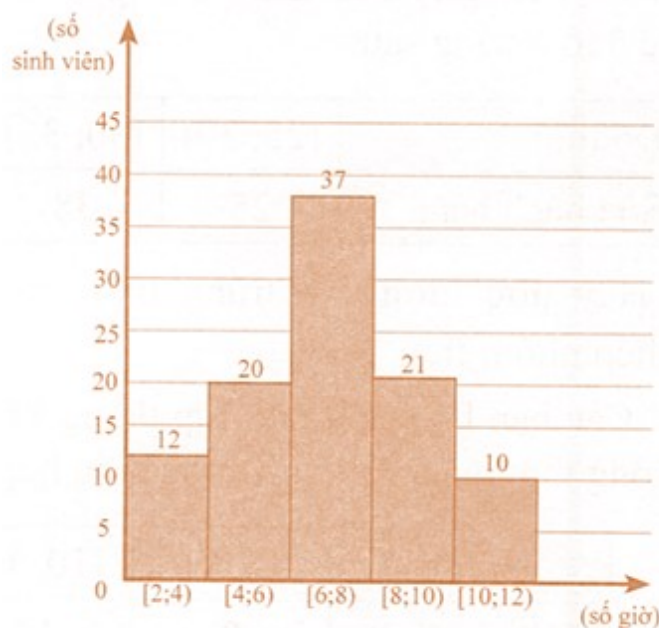


Hình b

Câu 5. Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6; 6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

Câu 6. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ bên.

Số giờ làm thêm trong một tuần của sinh viên



Tìm khoảng tứ phân vị của số liệu đó (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

-----HẾT-----

**ĐỀ THI KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2026-2027**

Môn: Toán

Thời gian làm bài 90 phút không kể thời gian giao đề

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án A, B, C hoặc D.

Câu 1. Phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x + 1} = 0$ có tất cả các nghiệm là

A. $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + n2\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$

Phương trình đã cho tương đương

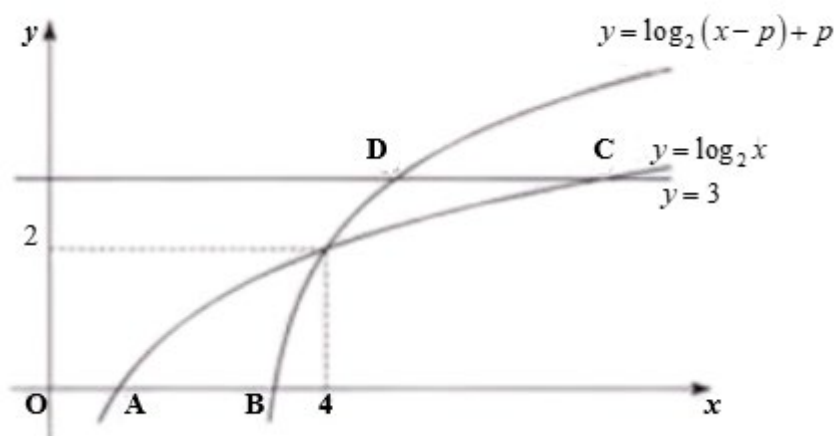
$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện xác định suy ra $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2. Cho hai đồ thị hàm số $y = \log_2 x, y = \log_2(x-p) + q$ cắt nhau tại điểm $(4; 2)$. Gọi A, B lần lượt là giao của $y = \log_2(x), y = \log_2(x-p) + q$ với trục Ox , và gọi C, D lần lượt là giao của

$y = \log_2(x), y = \log_2(x-p) + q$ với đường thẳng $y = 3$. Giả sử $CD - BA = \frac{3}{4}$ với $0 < p < 4; q > 0$.

Tính giá trị của $p + q$.



A. 5.

B. 8.

C. 27.

D. 26.

Lời giải

Giao với trục Ox :

Với $y = \log_2 x$ ta có $y = 0 \Rightarrow x = 1$. Vậy $A(1; 0)$.

Với $y = \log_2(x-p) + q$ và $y = 0$ ta có $\log_2(x-p) = -q \Rightarrow x-p = 2^{-q}$. Vậy $B(p+2^{-q}; 0)$.

Do đó: $BA = x_B - x_A = (p+2^{-q}) - 1 = p+2^{-q} - 1$

Giao với trục $y = 3$:

Với $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$. Vậy $C(8; 3)$

Với $\log_2(x - p) + q = 3 \Rightarrow \log_2(x - p) = 3 - q \Rightarrow x - p = 2^{3-q}$. Vậy $D(p + 2^{3-q}; 3)$.

Do đó: $CD = x_C - x_D = 8 - (p + 2^{3-q}) = 8 - p - 2^{3-q}$.

Điều kiện $CD - AB = \frac{3}{4}$ cho

$$(8 - p - 2^{3-q}) - (p + 2^{-q} - 1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{33}{4} - 2p = 2^{3-q} + 2^{-q}. (*)$$

Từ điểm chung $(4; 2)$ của hai đồ thị:

$$\log_2(4 - p) + q = 2 \Rightarrow 4 - p = 2^{2-q}$$

Ta biểu diễn $2^{3-q} + 2^{-q}$ qua 2^{2-q} :

$$2^{3-q} = 2 \cdot 2^{2-q}, 2^{-q} = \frac{1}{4} \cdot 2^{2-q}$$

$$\text{Suy ra: } 2^{3-q} + 2^{-q} = \left(2 + \frac{1}{4}\right) 2^{2-q} = \frac{9}{4} \cdot 2^{2-q} = \frac{9}{4}(4 - p).$$

$$\text{Thay vào phương trình ở } (*): \frac{33}{4} - 2p = \frac{9}{4}(4 - p).$$

$$\text{Nhân cả hai vế cho } 4: 33 - 8p = 36 - 9p \Rightarrow p = 3.$$

$$\text{Thay } p = 3 \text{ vào } 4 - p = 2^{2-q} \text{ được } q = 2.$$

$$\text{Vậy } p + q = 3 + 2 = 5.$$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn của dãy (s_n)

với $s_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N}^*$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2$.

Xét tính đơn điệu của dãy (u_n) . Từ hệ thức $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ ta suy ra được

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 > 0$, vậy dãy số (u_n) tăng.

Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (*) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Thay n bởi 1, 2, 3, ..., n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra: $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.

Do dãy (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, nên (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Rightarrow a \geq 2$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1, \text{ vô lý.}$$

2) Dãy không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

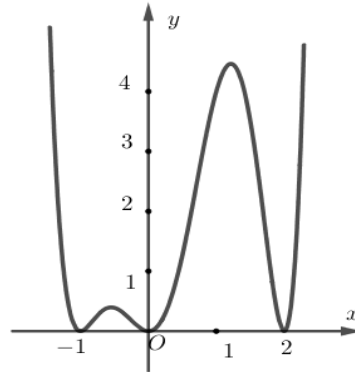
Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u_n} \right) = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$f'(x) = (3-x)(1-x)^2(x+1)^3(x^2-4x+3)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 5. Cho hai hàm số bậc ba $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$. Hàm số $y = f(x).g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng



- A. -12. B. $-\frac{32}{9}$. C. -3. D. 0.

Lời giải

Dựa vào giả thiết và đồ thị hàm số $y = f(x).g(x)$ ta có

$$y = f(x).g(x) = [x(x+1)(x-2)]^2 \text{ và } y' = 2x(x+1)(x-2)(3x^2-2x-2)$$

Vì $f(x), g(x)$ là các hàm số bậc ba nên các hàm số này có chỉ có thể có các nghiệm $x = -1; x = 0; x = 2$. Ta có $y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Vì $g'(x) = x^2 + 2mx + n$ và $y = g(x)$ có điểm cực đại $x = 0$ nên $g'(x) = x(x+2m)$, suy ra $2m > 0$.

$$\text{Do đó, } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{3}x^2(x-2) \Rightarrow f(x) = 3(x+1)^2(x-2) \\ g(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2 \Rightarrow f(x) = 3x^2(x+1) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{3}x^2(x-2) \\ f(x) = 3(x+1)^2(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = x\left(x - \frac{4}{3}\right) \\ f'(x) = 9(x^2-1) \end{cases}$$

Khi đó, $f(0) = -6; f(1) = -12; f(3) = 48$. Do đó $\min_{[0;3]} f(x) = -12$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2 \\ f(x) = 3x^2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = x(x-2) \\ f'(x) = 3x(3x+2) \end{cases}$$

Khi đó, $f(0) = 0; f(3) = 108$. Suy ra $\min_{[0;3]} f(x) = 0$.

họn đáp án nhỏ nhất. Vậy $\min_{[0;3]} f(x) = -12$.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác MNP có góc $\widehat{NMP}$ tù. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác MNP có phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng đi qua M vuông góc với NP cắt đường tròn (C) tại $E(0, -5)$, $E \neq M$. Biết tam giác MNP có trọng tâm $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và $M(a; b)$. Tính giá trị của $S = 3a^2 + 4b^2 - ab$.

A. $S = 79$.

B. $S = 100$.

C. $S = 103$.

D. $S = 75$.

Lời giải

Gọi H là trực tâm tam giác MNP . Ta có $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 3\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right) = (-4; 7) \Rightarrow H(-4; 7)$

Điểm M thuộc đường tròn (C) , nên: $a^2 + b^2 = 25$ (1)

Phương trình đường thẳng $HE: 3x + y + 5 = 0$. Vì $M \in HE \Rightarrow 3a + b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = -3a - 5$ thay

vào (1): $a^2 + (-3a - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow M(0; -5)$.

Loại trường hợp này vì trùng với điểm $E(0; -5)$ (đề bài cho $E \neq M$).

• **Trường hợp 2:** $a = -3 \Rightarrow b = -3(-3) - 5 = 4 \Rightarrow M(-3; 4)$.

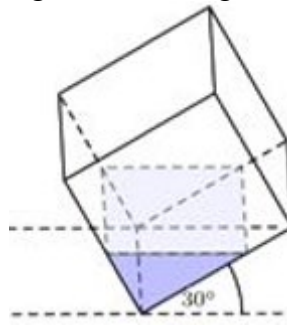
Kiểm tra điều kiện góc $\widehat{NMP}$ tù:

○ Với $M(-3; 4)$ và $H(-4; 7)$, tâm $O(0; 0)$, ta có H nằm ngoài đường tròn (C) do

$OH^2 = (-4)^2 + 7^2 = 65 > 25$. Khi góc $\widehat{NMP}$ tù, trực tâm H nằm ngoài tam giác MNP và thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó, $a = -3$ và $b = 4$. $S = 3a^2 + 4b^2 - ab = 103$

Câu 7. Cho hình lập phương có cạnh bằng 24 cm có chứa 3 lít nước. Ta để một cạnh tiếp xúc với mặt đất nằm ngang và nghiêng hình lập phương sao cho một mặt của nó làm với mặt phẳng nằm ngang một góc bằng 30° . Khi đó diện tích mặt thoáng của nước có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?



A. $(900 \text{ cm}^2; 1100 \text{ cm}^2)$. B. $(1100 \text{ cm}^2; 1300 \text{ cm}^2)$.

C. $(500 \text{ cm}^2; 700 \text{ cm}^2)$. D. $(700 \text{ cm}^2; 900 \text{ cm}^2)$.

Lời giải

Ta coi phần nước trong hình lập phương khi nghiêng là khối lăng trụ đáy tam giác vuông. Theo giả thiết, ta có góc nhọn tam giác vuông bằng 30° .

Gọi x là độ dài cạnh huyền tam giác đáy của khối lăng trụ.

Ta có $S_{\text{day}} = \frac{3 \cdot 1000}{24} = 125 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Mặt khác $S_{\text{day}} = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$ suy ra $x = \sqrt{\frac{1000}{\sqrt{3}}}.$

Diện tích mặt thoáng của nước có giá trị $\sqrt{\frac{1000}{\sqrt{3}}} \cdot 24 \approx 576,675 \text{ cm}^2 \in (500 \text{ cm}^2; 700 \text{ cm}^2)$.

Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M trên AD , sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Lấy điểm N trên đường thẳng BD' , lấy điểm P trên đường thẳng CC' để M, N, P thẳng hàng. Khi đó tỉ số $\frac{CP}{PC'}$ bằng?

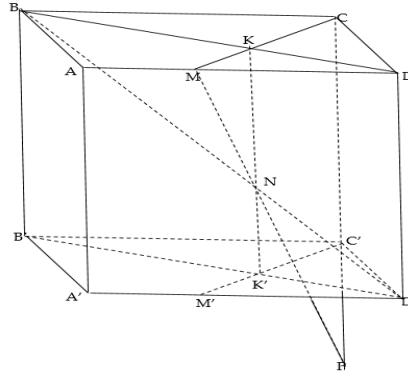
A. 2.

B. 3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$

Lời giải



Trong $(ABCD)$ có $MC \cap BD = K$.

Lấy điểm M' trên $A'D'$, sao cho $\frac{A'M'}{M'D'} = \frac{1}{2}$ và $M'C' \cap B'D' = K'$

$$\Rightarrow KK' = (MCC') \cap (BDD'B')$$

Trong $(BDD'B')$ có $KK' \cap BD' = N$

$$\Rightarrow P = MN \cap CC'$$

$$\text{Do } KK' \parallel DD' \Rightarrow \frac{KN}{DD'} = \frac{KB}{BD} = \frac{KB}{BC + MD} = \frac{3}{5} \Rightarrow KN = \frac{3}{5} CC'$$

$$\text{Lại có } KK' \parallel CC' \Rightarrow \frac{KN}{CP} = \frac{KM}{MC} = \frac{2}{5} \Rightarrow KN = \frac{2}{5} (PC' + CC')$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} CC' = \frac{2}{5} (PC' + CC') \Leftrightarrow PC' = \frac{1}{2} CC' \Rightarrow \frac{CP}{PC'} = 3$$

Câu 9. Cho hàm số $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a, CD = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD , biết hai mặt phẳng $(SBI), (SCI)$ cùng vuông góc với đáy và $SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng

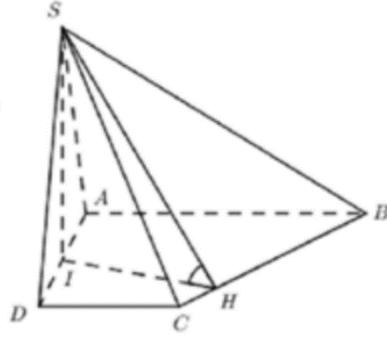
A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 36° .

Lời giải

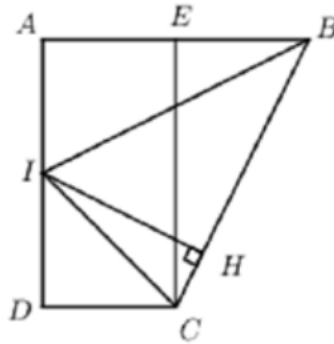


Ta có
$$\begin{cases} (SBI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Kẻ $IH \perp CD$ tại H ta có
$$\begin{cases} BC \perp IH \\ BC \perp SI \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SIH) \Leftrightarrow BC \perp SH$$

Lại có
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SH \\ BC \perp IH \end{cases}$$
 suy ra góc $\widehat{SHI}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện

$[S, BC, A]$



Ta có
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AD = 3a^2.$$

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow EC = AD = 2a \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Lại có
$$S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{ABI} - S_{CID} = 3a^2 - \frac{1}{2}a.2a - \frac{1}{2}a.a = \frac{3}{2}a^2$$

Mà
$$S_{IBC} = \frac{1}{2}IH.BC \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Do đó,
$$\tan \widehat{SHI} = \frac{SI}{IH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHI} = 60^\circ$$

Câu 10. Một người gọi điện thoại nhưng quên mất chữ số cuối. Tính xác suất để người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần.

A. $\frac{1}{10}.$

B. $\frac{1}{5}.$

C. $\frac{19}{90}.$

D. $\frac{2}{9}.$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10 = 10.$

Để người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần ta có 2 trường hợp:

TH1: Người đó gọi đúng ở lần thứ nhất.

TH2: Người đó gọi đúng ở lần thứ hai.

Gọi A_1 : "người đó gọi đúng ở lần thứ nhất" $\Rightarrow$ xác suất người đó gọi đúng là $P(A_1) = \frac{1}{10}$

và xác suất người đó gọi không đúng là $P(\overline{A_1}) = \frac{9}{10}$.

Gọi A_2 : "người đó gọi đúng ở lần thứ hai" $\Rightarrow$ xác suất người đó gọi đúng là $P(A_2) = \frac{1}{9}$.

Gọi A : "người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần" ta có

$$A = A_1 \cup \overline{A_1}A_2 \Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Câu 11. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Gọi S là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Xác suất sao cho số được chọn có tích các chữ số bằng 2520 có dạng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

A. 2024.

B. 2062.

C. 2025.

D. 2063.

Lời giải

Để có $n(S) = 8^5 \Rightarrow n(\Omega) = C_{8^5}^1$.

Gọi B là biến cố sao cho số được chọn có tích các chữ số bằng 2520.

Phân tích $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Ta xem số tự nhiên có 5 chữ số là bộ gồm số. Do vậy ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: bộ số $(5, 7, 8, 3, 3)$ có $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Trường hợp 2: bộ số $(5, 7, 4, 6, 3)$ có $5! = 120$ số.

Trường hợp 3: bộ số $(5, 7, 2, 6, 6)$ có $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Suy ra $n(B) = 60 + 120 + 60 = 240$ số.

Suy ra $P(B) = \frac{240}{32768} = \frac{15}{2048}$. Vậy $a + b = 2063$.

Câu 12. Nhiệt độ trung bình của 12 tháng tại thành phố Hà Nội từ năm 1961 đến hết năm 1990 (30 năm) được cho trong bảng sau

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[12;14)	[14;16)	[16;18)	[18;20)	[20;22)
Tần số	1	3	12	9	5

Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 15,7.

B. 16,0.

C. 17,5.

D. 17,0.

Lời giải

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[16;18)$.

Nên ta có $u_m = 16, n_{m-1} = 3, n_m = 12, n_{m+1} = 9, u_{m+1} - u_m = 18 - 16 = 2$.

Mốt của mẫu số liệu trên là $M_0 = 16 + \frac{12 - 3}{(12 - 3) + (12 - 9)} \cdot 2 = 17,5$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số áo vest và quần âu phân xưởng cần may

a) Hệ phương trình thoả mãn điều kiện của bài toán là
$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác

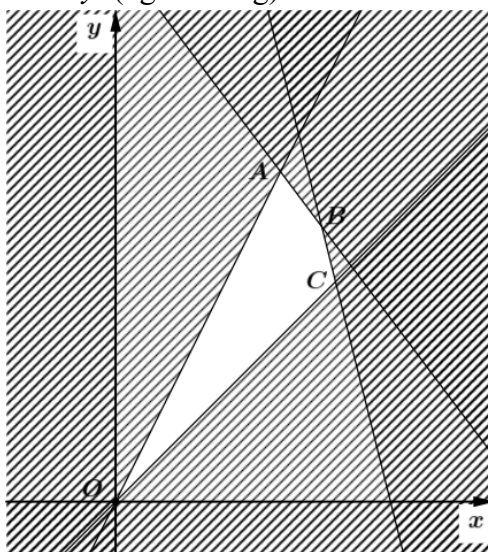
c) Phân xưởng cần may 225 áo vest và 300 quần âu thì thu được tiền lãi cao nhất (giả sử rằng thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

d) Tiền lãi cao nhất mà phân xưởng thu được là 108750000 đồng.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện ($x \geq 0, y \geq 0; x, y \in \mathbb{Z}$)

Tiền lãi thu được $T = 350x + 100y$ (nghìn đồng).



Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 900 \\ 20x + 5y \leq 6000 \\ x \leq y \leq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0), A(180;360), B(225;300); C(240;240)$

c) Đúng: Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 225, y = 300$ ứng với toạ độ đỉnh $B(225;300)$

d) Đúng: Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì phân xưởng cần may 225 chiếc áo vest và 300 quần âu.

Câu 2. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, ($a; b > 0$) trong đó t là số ngày tính từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên trong tháng ($t = 0$ ứng với ngày thứ Bảy đó).

a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$ mg.

b) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.

c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30; b = 15$. Khi đó có đúng 4 ngày trong tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 mg.

d) Biết lượng chất ô nhiễm cao nhất trong tháng là 50 mg và thấp nhất là 20 mg. Giả sử ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng ($t = 0$). Xét các ngày: Thứ Hai tuần 2, Thứ Tư tuần 3, Thứ Ba tuần 4 và Thứ Sáu tuần 4 của tháng đó; gọi M và m lần lượt là số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất và ít nhất trong các ngày này. Khi đó $M - m < 23$.

Lời giải

Chọn (a) Đúng | (b) Sai | (c) Sai | (d) đúng.

(a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$.

$$\text{Ta có } a - b \leq a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \leq a + b \text{ nên suy ra } \text{Max} P(t) = \text{Max} \{ |a - b|; |a + b| \} = a + b$$

(do $a; b > 0$).

(b) Chu kỳ $T=7$ ngày nghĩa là cứ trôi qua đúng 7 ngày, chuỗi biến động của "con sóng" ô nhiễm sẽ lặp lại y hệt chu kỳ trước đó.

Nhưng ngay trong lòng 1 chu kỳ 7 ngày đó, đồ thị có tính đối xứng. Mức ô nhiễm sẽ đi từ mức trung bình, lên đỉnh điểm, rồi lại giảm xuống mức trung bình, trước khi chạm đáy.

Ví dụ thực tế: Giả sử mức ô nhiễm đang tăng lên vào Thứ Hai, đạt mức cao nhất vào Thứ Tư, sau đó bắt đầu giảm dần. Trong quá trình giảm, nó sẽ đi qua các mốc cũ. Do đó, mức ô nhiễm của ngày Thứ Năm (đang giảm) hoàn toàn có thể bằng đúng mức ô nhiễm của ngày Thứ Ba (lúc đang tăng).

Như vậy, trong ví dụ trên, từ Thứ Ba đến Thứ Năm chỉ cách nhau 2 ngày, nhưng mức độ ô nhiễm đã bằng nhau. Vì khoảng thời gian giữa 2 ngày có cùng mức độ ô nhiễm có thể nhỏ hơn 7 ngày (chứ không bắt buộc phải chờ hết 1 chu kỳ 7 ngày), nên khẳng định "bằng nhau sau ít nhất 7 ngày" là một khẳng định Sai.

(c) Với quy ước $t = 0$ cho thứ Bảy tuần đầu, khi $a = 30, b = 15$ tìm số ngày trong tháng Một thỏa $P(t) = 37,5$.

$$\text{Xét phương trình } \left| 30 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right| = 37,5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \\ \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} + 7k \\ t = 6 + 7k \end{cases} \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t \leq 31} t \in \{6; 13; 20; 27\}$$

Vì ta đã chọn $t=0$ ứng với ngày 1 của tháng, nên các giá trị t trên tương ứng các ngày thực của tháng: $t+1 \in \{7; 14; 21; 28\}$. Vậy có 4 ngày.

(d) $\square$ Hệ $\begin{cases} a+b=50 \\ a-b=20 \end{cases} \Rightarrow a=35, b=15.$

$\square$ Quy đổi ngày: Ngày thứ 7 tuần 1 là $t=0$.

- Thứ Hai tuần 2: $t=2 \Rightarrow P(2) \approx 22,61$.
- Thứ Tư tuần 3: $t=11 \Rightarrow P(11) \approx 46,00$.
- Thứ Ba tuần 4: $t=17 \Rightarrow P(17) \approx 33,88$.
- Thứ Sáu tuần 4: $t=20 \Rightarrow P(20) = 42,5$.

$\square$ Giá trị lớn nhất $M \approx 46,00$, nhỏ nhất $m \approx 22,61 \Rightarrow M - m \approx 23,39 > 23$. Khẳng định $M - m < 23$ là SAI.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right)$.

a) Khi $m=0$ thì đạo hàm của $y = f(x)$ trên $(-2; +\infty)$ là $y' = \frac{2x}{(2x^2 + 1)\ln 2} - \frac{1}{(x + 2)\ln 2}$.

b) Khi $m=-1$ thì phương trình $f(x)=1$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Khi $0 < m < 2\sqrt{2}$ thì tập xác định của hàm số $y = f(2 - x^2)$ là $D = [-2; 2]$.

d) Tập các giá trị của m để phương trình $f(x) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm phân biệt là $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

a) Khi $m=0$ thì ta có $y = f(x) = \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) = \frac{1}{2} \log_2 (2x^2 + 1) - \log_2 (x + 2)$.

Do đó, $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{(2x^2 + 1)\ln 2} - \frac{1}{(x + 2)\ln 2} = \frac{2x}{(2x^2 + 1)\ln 2} - \frac{1}{(x + 2)\ln 2}$.

Vậy a) **đúng**.

b) Khi $m=-1$ thì phương trình $f(x)=1$ trở thành $\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{x + 2} \right) = 1$.

Khi đó $\sqrt{2x^2 - x + 1} = 2 \cdot (x + 2)$, $(x > -2)$ hay $2x^2 + 17x + 15 = 0$, $(x > -2)$. Suy ra $x = -1$.

Vậy b) **sai**.

c) Khi $0 < m < 2\sqrt{2}$ thì $2x^2 + mx + 1$ có $\Delta = m^2 - 4 < 0$ nên $2x^2 + mx + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y = f(2 - x^2)$ xác định khi $2 - x^2 + 2 > 0$ hay $4 - x^2 > 0$. Suy ra $-2 < x < 2$.

Vậy c) **sai**.

d) Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 + mx + 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

Ta có $\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$

nên $\log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 + \log_2 (x + 2)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$,

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases}$

Do $h(x) = x^2 + (m - 4)x - 3$ là tam thức bậc hai nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{4-m}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(\frac{4-m}{2})$	$+\infty$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$h(x) = x^2 + (m - 4)x - 3 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2 .

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -2 < \frac{4-m}{2} \\ h\left(\frac{4-m}{2}\right) < 0 < 9 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \\ \left(\frac{4-m}{2}\right)^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}.$$

Vậy $m \in \left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán..

Vậy d) **đúng**.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = 4a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi H là trung điểm của AO . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$.

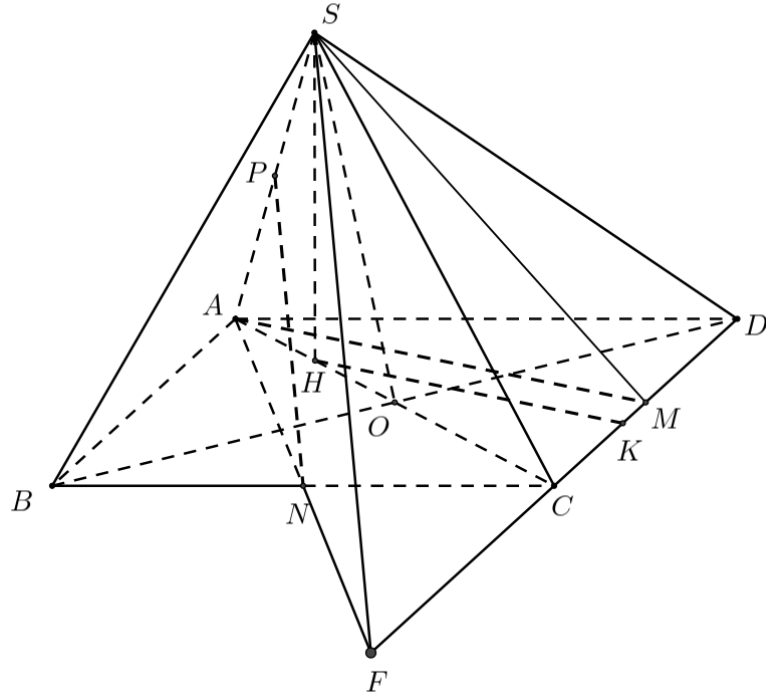
a) Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{BSH}$.

b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $8a^3$.

c) Gọi α là số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$, khi đó $\tan \alpha = \frac{3}{2}$.

d) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ba cạnh CD, BC và SA . Khoảng cách giữa hai đường thẳng PN và SM bằng $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải



(a) Mệnh đề sai vì

Do $SH \perp (ABCD)$, $BO \subset (ABCD)$ nên $BO \perp SH$.

$$\left. \begin{array}{l} BO \perp SH \\ \text{Ta có } BO \perp AC \\ SH, AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow BO \perp (SAC).$$

Khi đó SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{BSO}$.

(b) Mệnh đề đúng, vì:

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = 4a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 8a^2 \sqrt{3}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 8a^2 \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = 8a^3$.

(c) Mệnh đề sai, vì

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $HK \perp CD$ tại K .

Do $SH \perp (ABCD)$, $CD \subset (ABCD)$ nên $CD \perp SH$.

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp SH \\ \text{Ta có } CD \perp HK \\ SH, HK \subset (SHK) \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHK).$$

Suy ra $CD \perp SK$.

Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ là $\widehat{SKH}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AM \perp CD$ tại M .

Tam giác ACD có $AD = DC$ và $\widehat{CAD} = 60^\circ$ nên tam giác ACD đều.

Do đó M là trung điểm CD .

Ta có $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác ACM có $AM \parallel HK$ nên

$$\frac{HK}{AM} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4} AM = \frac{3}{4} \cdot 2a\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SHK có $\tan \widehat{SKH} = \tan \alpha = \frac{SH}{HK} = a\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

(d) Mệnh đề đúng, vì

Gọi $AN \cap CD = F$.

Suy ra $PN \parallel SF$

Do đó

$$\begin{aligned} d(PN, SM) &= d(PN, (SFD)) = d(P, (SFD)) = \frac{1}{2} d(A, (SFD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot d(H, (SFD)) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{27a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Tô kết quả từ trái qua phải

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2026^x - 2026^{-x} + \ln^{2027} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$. Tìm giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình :

$$f \left[\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2^2(2x) \right] + f \left[\sqrt{(m+1) \log_2 x} - (4 + \sqrt{m+1}) \sqrt{\log_2^3 x} \right] \leq 0 \text{ chứa đúng 32 giá trị nguyên.}$$

Lời giải

Bước 1: Khảo sát tính chất hàm đặc trưng $y = f(x)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

1. Tính chất lẻ: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $f(-x) = 2026^{-x} - 2026^x + \ln^{2027} \left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = -f(x)$

Suy ra $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

2. Tính đơn điệu:

$$f'(x) = 2026^x \ln 2026 + 2026^{-x} \ln 2026 + 2027 \ln^{2026} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bước 2: Biến đổi bất phương trình

Bất phương trình đã cho có dạng: $f(u) + f(v) \leq 0$.

Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(v) = -f(-v)$, bất phương trình trở thành: $f(u) \leq -f(v) \Leftrightarrow f(u) \leq f(-v)$

Vì $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên: $u \leq -v \Leftrightarrow u + v \leq 0$

Với:

- $u = \sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2^2(2x)$
- $v = \sqrt{(m+1) \log_2 x} - (4 + \sqrt{m+1}) \sqrt{\log_2^3 x}$

Biến đổi biểu thức u và v

- Điều kiện: $x \geq 1$ và $m \geq -1$.
- Đặt $t = \sqrt{\log_2 x} \geq 0 \Rightarrow \log_2 x = t^2$.

Khi đó:

- $u = \sqrt{\log_2 x} \cdot [\log_2(2x)]^2 = t \cdot (1 + t^2)^2 = t(1 + 2t^2 + t^4) = t^5 + 2t^3 + t$
- $v = \sqrt{(m+1) \log_2 x} - (4 + \sqrt{m+1}) \sqrt{\log_2^3 x} = \sqrt{m+1} \cdot t - (4 + \sqrt{m+1}) t^3$

2. Giải bất phương trình $u + v \leq 0 \Rightarrow (t^5 + 2t^3 + t) + [\sqrt{m+1} \cdot t - (4 + \sqrt{m+1}) t^3] \leq 0$

$$\Leftrightarrow t^5 - (2 + \sqrt{m+1}) t^3 + (1 + \sqrt{m+1}) t \leq 0 \Leftrightarrow t \left[t^4 - (2 + \sqrt{m+1}) t^2 + (1 + \sqrt{m+1}) \right] \leq 0$$

Vì $t \geq 0$:

- Với $t = 0 \Rightarrow x = 1$ (1 nghiệm nguyên).
- Với $t > 0$, bất phương trình trở thành:

$$t^4 - (2 + \sqrt{m+1})t^2 + (1 + \sqrt{m+1}) \leq 0$$

Đặt $A = t^2 = \log_2 x \geq 0$, phương trình bậc hai có dạng:

$$A^2 - (2 + \sqrt{m+1})A + (1 + \sqrt{m+1}) \leq 0 \Leftrightarrow (A-1)(A-(1+\sqrt{m+1})) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A \leq 1 + \sqrt{m+1}$$

Thay $A = \log_2 x : 1 \leq \log_2 x \leq 1 + \sqrt{m+1} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 2^{1+\sqrt{m+1}}$

Kết hợp với trường hợp $t = 0 \Rightarrow x = 1$, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{1\} \cup [2; 2^{1+\sqrt{m+1}}]$

3. Tìm giá trị nguyên của tham số m

Tập nghiệm $S = \{1\} \cup [2; 2^{1+\sqrt{m+1}}]$ chứa các giá trị nguyên $\{1; 2; 3; \dots\}$.

Để tập nghiệm chứa đúng 32 giá trị nguyên, các giá trị nguyên đó phải là $\{1; 2; 3; \dots; 32\}$.

Do đó, đầu biên trên phải thỏa mãn: $32 \leq 2^{1+\sqrt{m+1}} < 33 \Leftrightarrow 5 \leq 1 + \sqrt{m+1} < \log_2 33 \approx 5.044$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \sqrt{m+1} < 4.044 \Leftrightarrow 15 \leq m < 15.357$$

Vì m là số nguyên, ta thu được duy nhất: $m = 15$

Câu 2. Một nhà địa chất đang khảo sát tại điểm A trên sa mạc và cần di chuyển gấp về trạm nghiên cứu ở điểm B cách A một khoảng 90 km. Do địa hình cát đồi hiểm trở, xe chuyên dụng của ông khi chạy trực tiếp trên sa mạc chỉ đạt vận tốc tối đa 30 km/h. Cách đường nối AB một khoảng 20 km có một con đường nhựa thẳng song song với AB , nơi xe có thể tăng tốc lên tới 50 km/h. Để rút ngắn tối đa thời gian di chuyển, nhà địa chất quyết định lái xe qua sa mạc để ra đường nhựa, chạy một đoạn trên đường nhựa rồi mới rẽ qua sa mạc để về B . Hãy tính thời gian di chuyển ngắn nhất của ông từ A đến B (Kết quả tính theo giờ và làm tròn đến hàng phần trăm).

A.2.87

Lời giải

Ta có thể mô tả bài toán trên bằng hình vẽ sau:



Như đã phân tích ở trên, nếu đi trực tiếp từ A đến B trên sa mạc với vận tốc và khoảng cách hiện có thì nhà địa chất học không thể đến đúng thời gian quy định

Vì vậy cần thiết phải chia quãng đường đi được thành 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song)

Giai đoạn 2: đi từ C đến D (một quãng đường nào đó trên đường nhựa)

Giai đoạn 3: đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B bằng qua sa mạc).

Goi H, K, C, D là các điểm như hình vẽ.

Khi đó gọi $HC = x$ ($0 < x < 90$) và $DK = y$ ($0 < y < 90$)

$$\text{Quãng đường đi từ } A \text{ đến } C \text{ là } AC = \sqrt{400 + x^2} \Rightarrow t_1 = \frac{AC}{v_{\text{sahara}}} = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{30}$$

$$\text{Quãng đường đi từ } D \text{ đến } B \text{ là } DB = \sqrt{400 + y^2} \Rightarrow t_2 = \frac{DB}{v_{\text{sahara}}} = \frac{\sqrt{400 + y^2}}{30}$$

$$\text{Và quãng đường đi } C \text{ đến } D \text{ là } CD = 90 - (x + y) \Rightarrow t_3 = \frac{CD}{v_{\text{street}}} = \frac{90 - (x + y)}{50}$$

Vậy tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $T = t_1 + t_2 + t_3$

$$\Rightarrow T(x; y) = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{30} + \frac{\sqrt{400 + y^2}}{30} + \frac{90 - (x + y)}{50}$$

Đây là một biểu thức có dạng đối xứng 2 biến x, y và ta cần tìm $\min T(x; y)$

$$\text{Ta có } T(x; y) = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{30} + \frac{45 - x}{50} + \frac{\sqrt{400 + y^2}}{30} + \frac{45 - y}{50} = f(x) + f(y)$$

$$\text{Khi đó ta xét } f(u) = \frac{\sqrt{400 + u^2}}{30} + \frac{45 - u}{50}, 0 < u < 90$$

$$\text{Xét } f'(u) = \frac{u}{30\sqrt{400 + u^2}} - \frac{1}{50}, f'(u) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{400 + u^2} = \frac{5u}{3} > 0 \Leftrightarrow u = 15$$

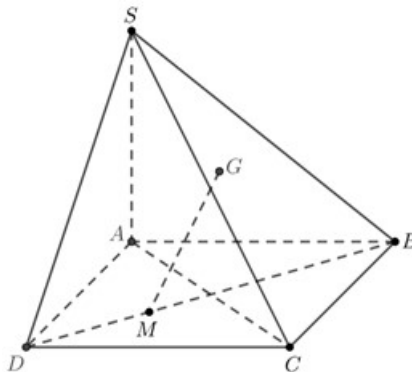
$$\text{Lập bảng biến thiên ta có } \min_{u \in (0; 90)} f(u) = f(15) = \frac{43}{30}$$

$$\text{Do đó ta có } T(x; y) = f(x) + f(y) \geq \frac{43}{30} + \frac{43}{30} = \frac{43}{15} \approx 2,87$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 15$.

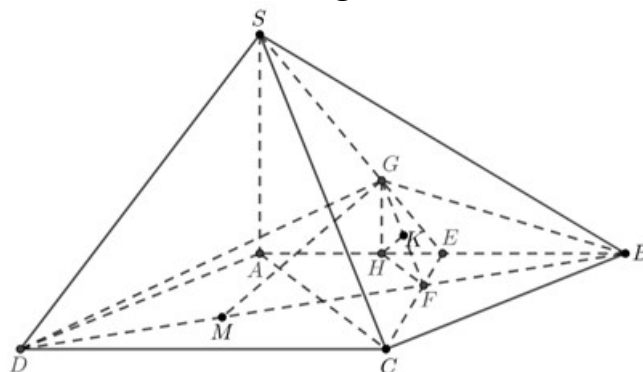
Đáp án: 2,87

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 2 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết rằng cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2$ và G là trọng tâm tam giác SAB . Xét M là một điểm di động trên đường thẳng BD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và GM bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)



A.0.71

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AB , F là giao điểm của CE và BD . Khi đó F là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có $\frac{EG}{ES} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{3}$ nên $GF \parallel SC$, do đó $SC \parallel (GBD)$ hay $d(SC, GM) = d(C, (GBD))$ (1)

Dựng $GH \parallel SA$ ($H \in AB$), ta có $GH \perp (ABCD)$.

Mặt khác, $d(C, (GBD)) = \frac{CF}{EF} \cdot d(E, (GBD)) = 2d(E, (GBD))$, (2)

và $d(E, (GBD)) = \frac{EB}{HB} \cdot d(H, (GBD)) = \frac{3}{4} \cdot d(H, (GBD))$ (3)

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\frac{BF}{BO} = \frac{BH}{BA} = \frac{2}{3}$ nên $HF \parallel AO$, suy ra $HF \perp BD$, do đó $(GHF) \perp BD$.

Hạ $HK \perp GF$, suy ra $HK \perp (GBD)$ hay $d(H, (GBD)) = HK$.

Tam giác GHF vuông tại H , lại có

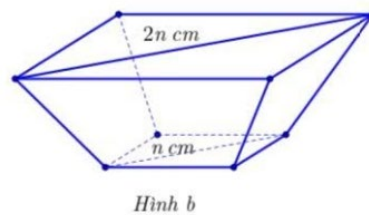
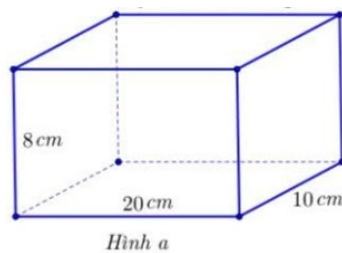
$HF = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AC = \frac{2}{3}$ (tam giác ABC đều có cạnh bằng 2)

$GH = \frac{1}{3} SA = \frac{2}{3}$

nên tam giác GHF vuông cân tại H , do đó $HK = \frac{HF}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (4)

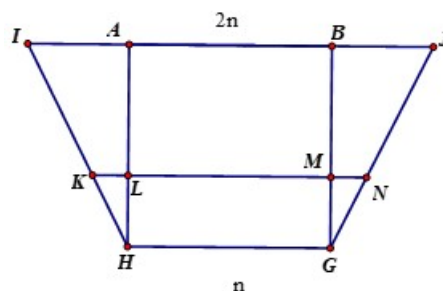
Từ (1), (2), (3), (4) ta có $d(SC, GM) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm , chiều rộng 10 cm , chiều cao 8 cm (hình a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài $n(\text{ cm})$, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n(\text{ cm})$ (hình b). Sau khi đổ, mức nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng bao nhiêu cm^3 (Kết quả chính xác đến hàng đơn vị)?



A.1606

Lời giải



Thể tích nước chuyển từ khay thứ nhất sang khay thứ hai là $V = \frac{1}{4} 8.20.10 = 400 \text{ cm}^3$.

$$\text{Có } \frac{KL}{AI} = \frac{HL}{HA} = \frac{2}{5} \Rightarrow KL = \frac{2}{5} AI = \frac{2}{5} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{5} \text{ suy ra } KN = 2 \frac{n}{5} + n = \frac{7n}{5}.$$

$$\text{Diện tích đáy nhỏ là } B_1 = \frac{1}{2} HG^2 = \frac{1}{2} n^2; \text{ diện tích đáy lớn là } B_2' = \frac{1}{2} JI^2 = \frac{1}{2} (2n)^2 = 2n^2.$$

$$\text{Diện tích mặt nước } B_2 = \frac{1}{2} KN^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7n}{5} \right)^2 = \frac{49}{50} n^2$$

Gọi V là thể tích nước ở khay thứ hai, V' là thể tích khay thứ hai ta có

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} h (B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})}{\frac{1}{3} h' (B_1 + B_2' + \sqrt{B_1 B_2'})} = \frac{2}{5} \cdot \frac{0.5n^2 + 0.98n^2 + 0.7n^2}{0.5n^2 + 2n^2 + n^2} = \frac{218}{875} \Rightarrow V' = \frac{875}{218} \cdot 400 \approx 1606 \text{ cm}^3.$$

Câu 5. Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6; 6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

A.0.23

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 10^3$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

$$\text{Ta có: } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}.$$

$$\text{Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là } A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

***) Trường hợp 1:**

Nếu $a < 0$ thì A là điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ y_A > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-5; -4; -3; -2; -1\} \\ b \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \\ c \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \end{cases} \Rightarrow \text{có } 5.5.5 = 125 \text{ (cách).}$$

***) Trường hợp 2:**

Nếu $a > 0$ thì B, C là hai điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ y_B > 0 \\ y_C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ \frac{b^2}{4a} < c \end{cases}.$$

Suy ra được $c > 0$ và $4a \in \{4; 8; 12; 16; 20\}$.

Ta có các khả năng sau:

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 1, \quad b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -2 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

$$b = -3 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 3 \text{ (cách).}$$

$$b = -4 \Rightarrow a \in \{5\} \Rightarrow \text{có } 1 \text{ (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, \quad b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -3 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

$$b = -4 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 3 \text{ (cách).}$$

$$b = -5 \Rightarrow a \in \{4; 5\} \Rightarrow \text{có } 2 \text{ (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, \quad b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -4 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

$$b = -5 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 3 \text{ (cách).}$$

$$\text{Với } c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, \quad b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -4 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

$$b = -5 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

$$\text{Với } c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, \quad b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -4 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 5 \text{ (cách).}$$

$$b = -5 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có } 4 \text{ (cách).}$$

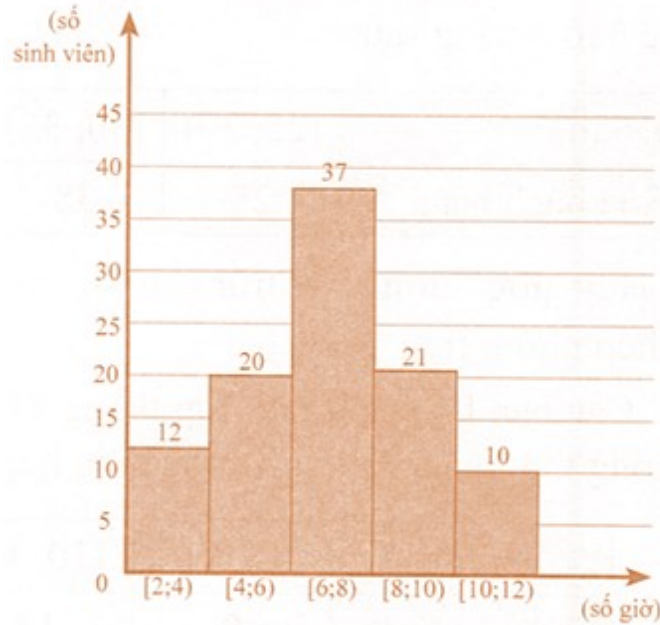
Trong trường hợp này có 101 (cách).

Suy ra có tất cả $125 + 101 = 226$ (cách).

$$\text{Vậy xác suất là } \frac{226}{1000} = \frac{113}{500}.$$

Câu 6. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ bên.

Số giờ làm thêm trong một tuần của sinh viên



Tìm khoảng tứ phân vị của số liệu đó (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).
A.3.27

Lời giải

Cao Thắng

Trả lời: 3,27

Từ mẫu số liệu ghép nhóm, ta có bảng thống kê số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên như sau:

Số giờ làm thêm	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)
Số giờ làm thêm đại diện	3	5	7	9	11
Số sinh viên	12	20	37	21	10

Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51})$.

Do x_{50} và x_{51} thuộc nhóm [6;8) nên $Q_2 = 6 + \frac{\frac{2 \cdot 100}{4} - 32}{37} \cdot (8 - 6) \approx 6,97$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm [4;6)

nên $Q_1 = 4 + \frac{\frac{1 \cdot 100}{4} - 12}{20} \cdot (6 - 4) = 5,3$.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76})$. Do x_{75} và x_{76} thuộc nhóm [8;10)

nên $Q_3 = 8 + \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - 69}{21} \cdot (10 - 8) \approx 8,57$.

Khoảng tứ phân vị là $\Delta Q = 3,27$

