ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

TOÁN 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ



2026

Chương trình mới thống nhất SGK

Sưu tầm các bài toán đa dạng giúp học sinh có kĩ năng tư duy và kỹ năng phản xạ đề.

1. Trắc nghiệm nhiều phương án
2. Trắc nghiệm đúng sai
3. Trả lời ngắn
4. Tự luận

MK LÊ MINH KHA - 0399653362

Mục lục

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 3

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 3
§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ 44
§3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 99
§4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ 142
§5. ÔN TẬP CHƯƠNG 1 253

Chương II. BỘ ĐỀ TỔNG ÔN CHƯƠNG 1 394

Chương III. LỜI GIẢI CHI TIẾT BỘ ĐỀ TỔNG ÔN CHƯƠNG 1 448

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Chương I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

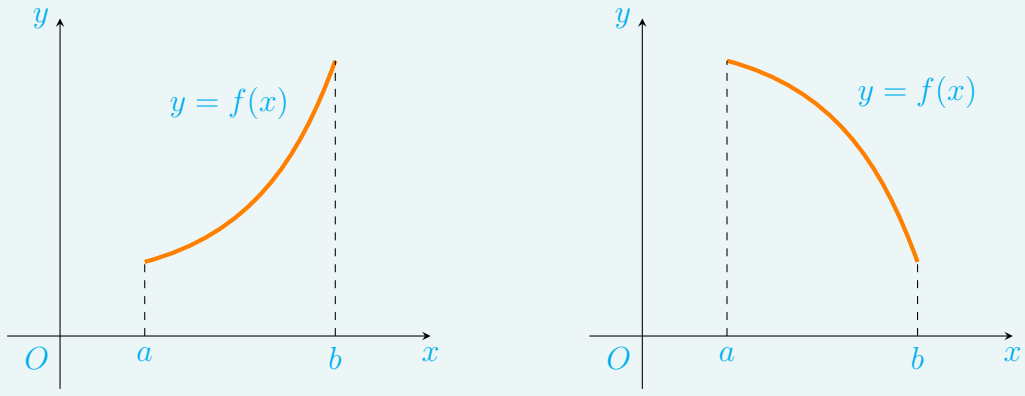
I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a).
Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$. b) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$.

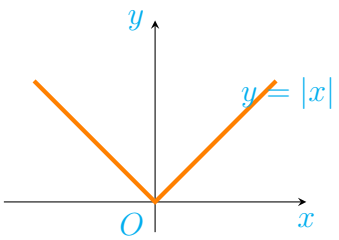
Hình 1.3

Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.

Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Ví dụ 1

Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

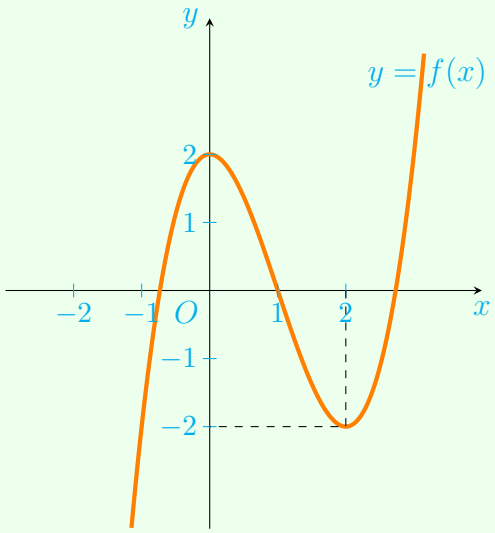


Hình 1.4

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

① Hình 1.5 là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.5

2) Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

- Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.
- Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

3) Định lý.

- *Nếu* $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a;b)$ *và* $f'(x) = 0$ *chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số* $y = f(x)$ *đồng biến trên* $(a;b)$.
- *Nếu* $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a;b)$ *và* $f'(x) = 0$ *chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số* $y = f(x)$ *nghịch biến trên* $(a;b)$.
- *Nếu* $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a;b)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ *không đổi trên* $(a;b)$.

4) Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.
Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \ldots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
Bước 4. Nếu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 2

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

Ví dụ 3

Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$, với mọi $x \neq -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

2 Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2$;

b) $y = \dfrac{-x^2+5x-7}{x-2}$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Bắt đầu từ hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1) Khái niệm cực trị của hàm số

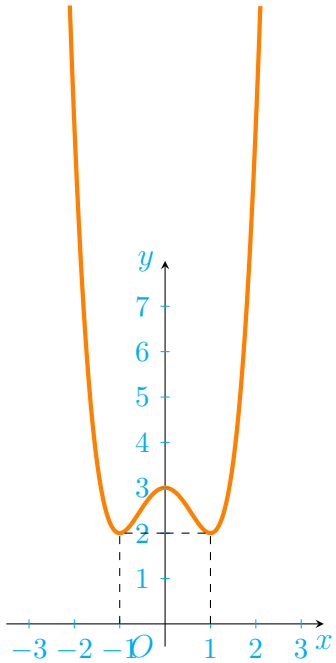
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty, b$ có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực đại* của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực đại của đồ thị hàm số*.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực tiểu của đồ thị hàm số*.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *giá trị cực trị* (hay *cực trị*) của hàm số.

Ví dụ 4

Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.

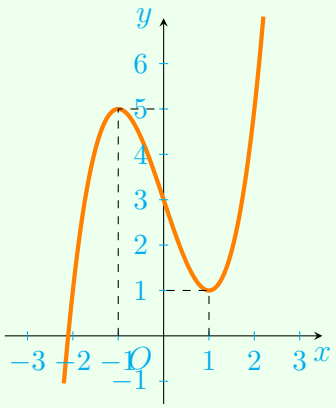


Hình 1.8

Lời giải. Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 3$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

3 Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

.....

.....

.....

.....

.....

2) Cách tìm cực trị của hàm số

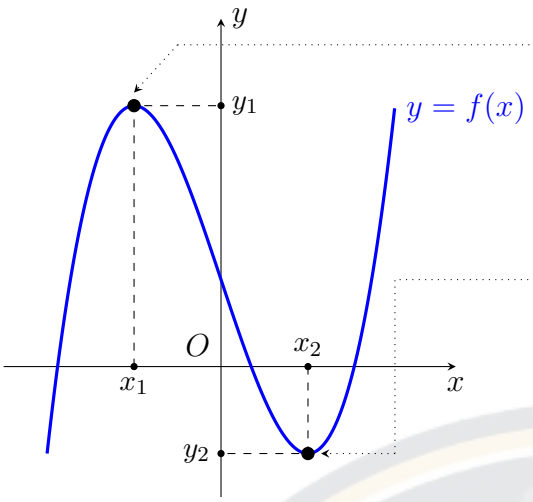
Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại,của hàm số $f(x)$.

Minh họa cực trị bằng bảng biến thiên:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$y_{CĐ}$	↘	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	y_{CT}	↗	



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

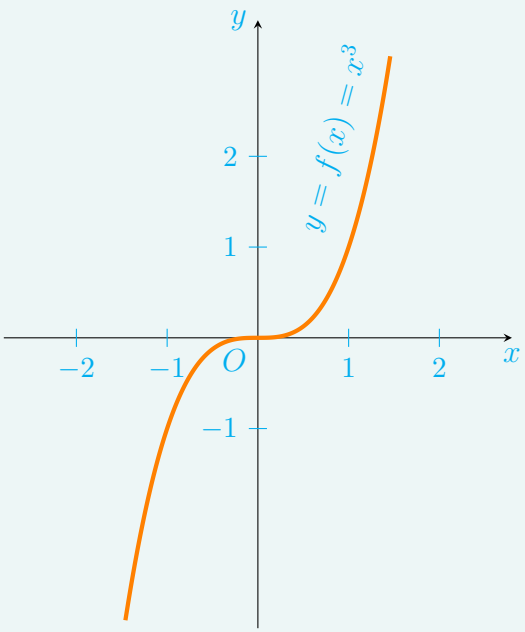
$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

3) Các bước để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.
Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \ldots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Lưu ý. Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 thi không phải là điểm cực trị của hàm số.
Chẳng hạn, hàm số $y = f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.



Hình 1.10

Ví dụ 5

Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	34	↘	30	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{C\text{Đ}} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 30$.

Ví dụ 6

Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{C\text{Đ}} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

Ví dụ 7

Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

4 Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

5 Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức

$$h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2.$$

THẦY KHA DẠY TOÁN · THCS THPT 0399653362 Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

b) $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$.

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$;

b) $y = \dfrac{x^2+x+4}{x-3}$.

Bài 3. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4-x^2}$;

b) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Bài 4. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$;

d) $y = \sqrt{4x-2x^2}$.

Bài 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$;

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$;

c) $y = \dfrac{3-2x}{x+7}$;

d) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$;

e) $y = \sqrt{x^2-1}$;

f) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

g) $y = x + \sqrt{16-x^2}$;

h) $y = x \cdot e^x$;

i) $y = x - \ln x$.

Bài 6. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$;

b) $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$;

c) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$;

d) $y = x + \dfrac{4}{x}$;

e) $y = \sqrt{x^2-2x}$;

f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Bài 7. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, t \geq 0,$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Bài 8. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5\,000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 9. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \leq t \leq 45$). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a-b$ bằng bao nhiêu?

Bài 10. Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm

được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 11. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 – 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0{,}000989t^3 - 0{,}0486t^2 + 0{,}7116t + 1{,}46, \quad 5 \le t \le 19.$$

Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Bài 12. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \dfrac{50}{0{,}01x^2 + 1}$, $0 \le x \le 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

2) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
Ⓑ $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$.
Ⓒ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.
Ⓓ $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

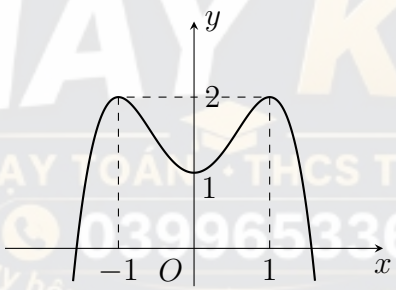
Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-2)$. Ⓒ $(-2;+\infty)$. Ⓓ $(-2;1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

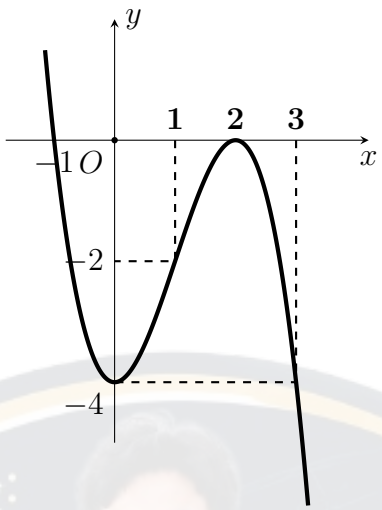


Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$..
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$..
Ⓓ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

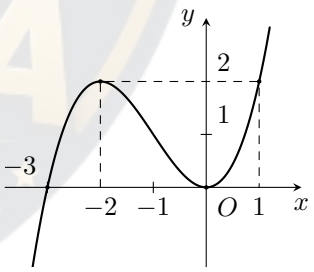
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(-\infty;-3)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(5) > f(4) > f(3)$. Ⓑ $f(-1) > f(0) > f(1)$.
Ⓒ $f(-3) < f(-2) < f(-1)$. Ⓓ $f(0) < f(1) < f(2)$.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số đã cho không có cực trị.
Ⓑ Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
Ⓒ Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
Ⓓ Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(-\infty;-3)$. Ⓓ $(-3;3)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

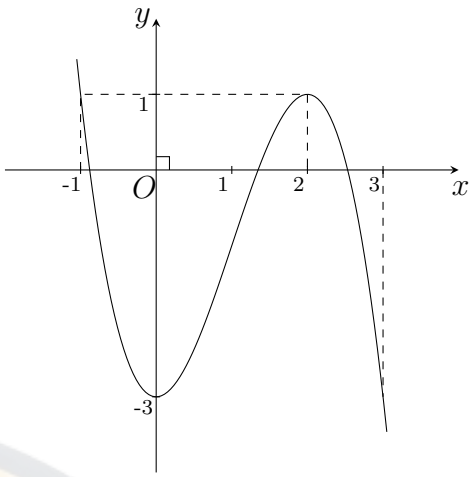
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = 1$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

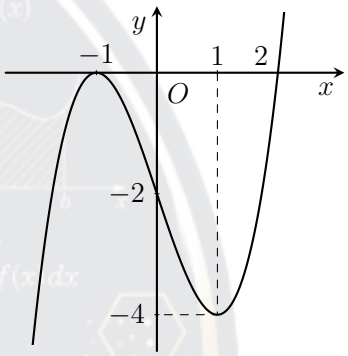


Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-3;1)$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Câu 15. Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(0;2)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là



Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = -1$.

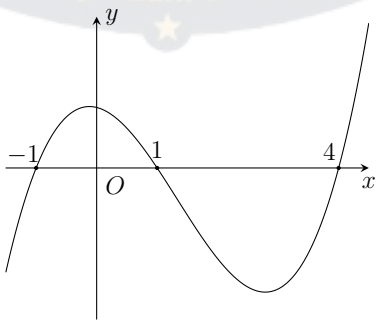
Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 18. Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-4;2)$. Ⓑ $(-\infty;-2)$.
Ⓒ $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-4;-1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;4)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=\dfrac{2025x-2024}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2025)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2025)$.

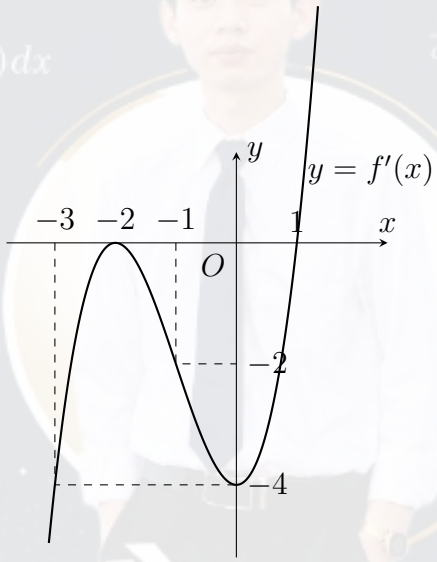
Câu 21. Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-2;3)$. Ⓒ $(-5;-2)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

Câu 22. Hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-2;1)$. Ⓓ $(1;4)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đường cong trong hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên

Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $(-2;0)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Câu 24. Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;5)$. Ⓑ $(-3;+\infty)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-3;5)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu cực tiểu?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 26. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=-x^3+3x+4$

Ⓐ $y_{CT}=2$.. Ⓑ $y_{CT}=1$.. Ⓒ $y_{CT}=6$.. Ⓓ $y_{CT}=-1$..

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-1$.

Câu 29. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

Ⓐ $(2;2)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(0;-2)$. Ⓓ $(0;2)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của $f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

3) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

a) Tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

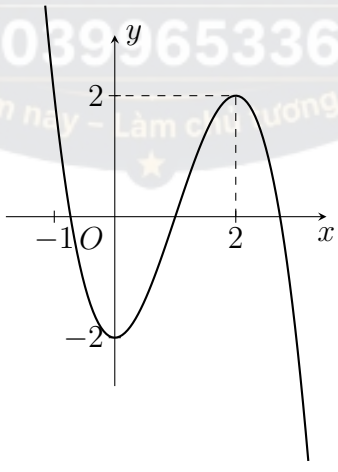
a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$

c) Với mọi $x \in (0;2)$ thì hàm số $y = f(x)$ luôn nhận giá trị dương

d) Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

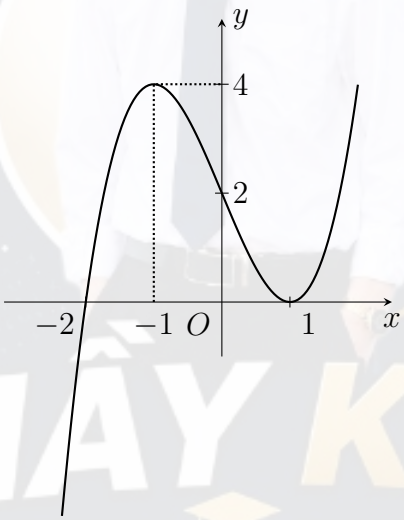
a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \neq 1$

d) Hàm số đã cho không có cực trị

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{CĐ} = 4$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Bài 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Bài 8. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = \dfrac{1}{2}$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	2	↗		↘	
			-1				$-\infty$		$-\infty$

a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

Bài 10. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$, khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

b) Giá trị cực đại của hàm số bằng -2

c) Điểm cực tiểu của hàm số bằng 0

d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x - 2$

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

b) Cực đại của hàm số $f(x)$ là 1

c) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị

d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$

Bài 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$.

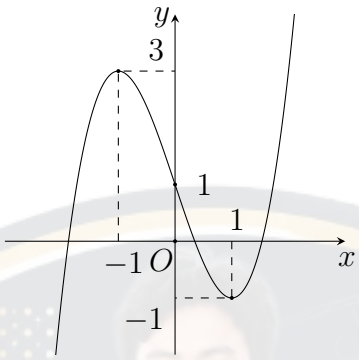
a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1$

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

d) Tổng khoảng cách từ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đến trục hoành bằng 2

Bài 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là 2

c) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị trái dấu

d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $d\colon y=-3x$

Bài 15. Cho hàm số $y=2^{x^2-3x+\frac{13}{4}}$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$

c) Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}}=2$

d) Hàm số có 2 điểm cực trị

4) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Bài 2. Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Bài 3. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB.

Bài 4. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

Bài 5. Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$+$		$-$	0	$-$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Bài 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1;0), x_2 \in (1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

Bài 8. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \le t \le 45$). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a - b$ bằng bao nhiêu?

Bài 9. Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 10. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 − 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0{,}000989t^3 - 0{,}0486t^2 + 0{,}7116t + 1{,}46, \quad 5 \le t \le 19.$$

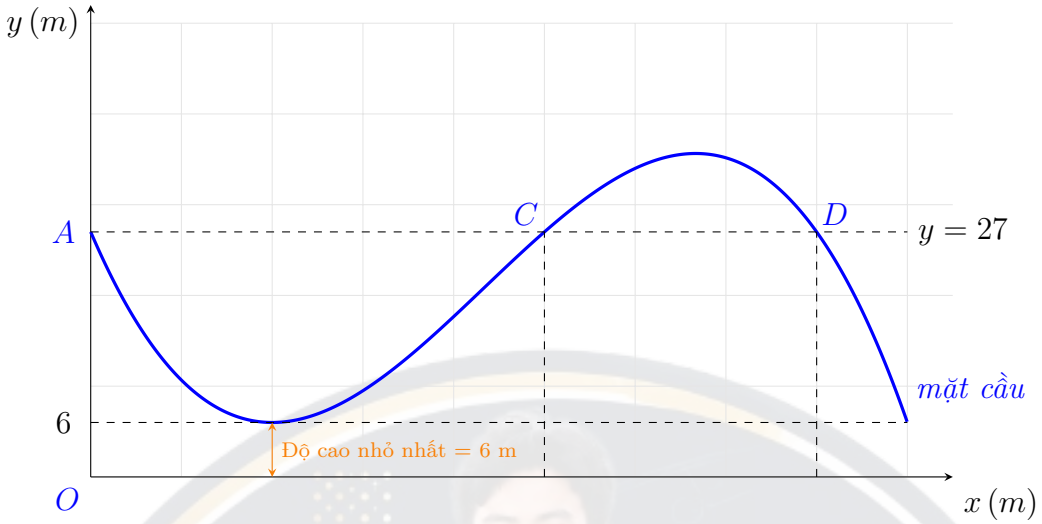
Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Bài 11. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \dfrac{50}{0{,}01x^2 + 1}$, $0 \le x \le 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Bài 12. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\dfrac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12\,000$ (con), $0 \le t \le 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Bài 13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục là mét), mặt cắt dọc của một cầu đi bộ dạng sóng được mô phỏng bằng đồ thị của hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$(0 \le x < 90)$ (tham khảo hình vẽ).



Mặt cầu đi qua ba mốc $A(0;27)$, $C(50;27)$, $D(80;27)$. Độ cao nhỏ nhất (khoảng cách thẳng đứng từ mặt cầu tới mặt đất $y=0$) là 6 m. Hỏi độ cao lớn nhất của mặt cầu so với mặt đất bằng bao nhiêu (đơn vị: mét, làm tròn đến một chữ số thập phân)?

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
Ⓑ $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$.
Ⓒ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.
Ⓓ $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$, ta có $y' = 3x^2 - 2x + 6$.
Vì $\Delta' = 1 - 18 = -17 < 0$ và hệ số $a = 3 > 0$ nên $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy hàm số $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

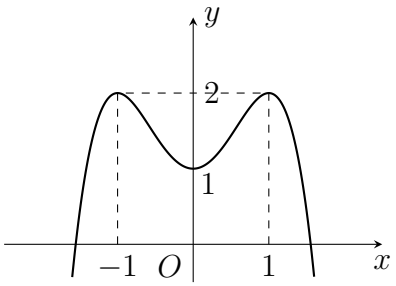
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(2;+\infty)$.
Ⓑ $(-\infty;-2)$.
Ⓒ $(-2;+\infty)$.
Ⓓ $(-2;1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f'(x) \le 0$ trên khoảng $(1;+\infty)$.
Do đó hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$. Vì $(2;+\infty) \subset (1;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch

biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

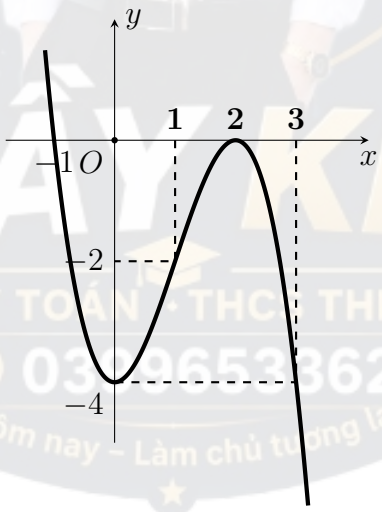
Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số nghịch biến trên các khoảng mà đồ thị đi xuống từ trái sang phải, đó là $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$..
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$..
Ⓓ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{(-1)(-1)-(2)(1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$.
Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên trong khoảng $x\in(0,2)$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
Vì $(0;1)\subset(0;2)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(-\infty;-3)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)<0$ trên các khoảng $(-3;0)$ và $(2;+\infty)$.

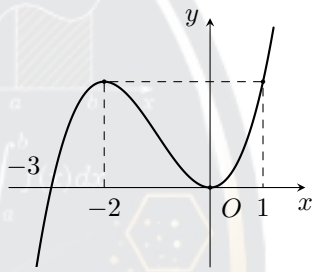
Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(5)>f(4)>f(3)$. Ⓑ $f(-1)>f(0)>f(1)$.
Ⓒ $f(-3)<f(-2)<f(-1)$. Ⓓ $f(0)<f(1)<f(2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=1, x=2$.

Bảng xét dấu $f'(x)$: âm trên $(-\infty;-1)$, dương trên $(-1;1)$, dương trên $(1;2)$, và âm trên $(2;+\infty)$.
Hàm số đồng biến trên $(-1;2)$. Với $0<1<2\in(-1;2)$ ta có $f(0)<f(1)<f(2)$.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực trị tại $x=-2$ và $x=0$.
Hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Khẳng định "Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$" là sai vì trên $(0;1)$ hàm số đồng biến.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, $y'>0$ trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

DẠY TOÁN THCS THPT 0399653362 Làm chủ tương lai ngay hôm nay

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số đã cho không có cực trị.
Ⓑ Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
Ⓒ Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
Ⓓ Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Hướng dẫn giải. Tại x_1, hàm số không xác định nên không đạt cực trị. Tại x_2, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương và hàm số liên tục tại đó, nên x_2 là điểm cực tiểu. Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(-\infty;-3)$. Ⓓ $(-3;3)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, đạo hàm $f'(x) > 0$ trên $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu tại $x = -2$ (từ $+$ sang $-$) và tại $x = 0$ (từ $-$ sang $+$). Tại $x = 2$ đạo hàm không đổi dấu. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

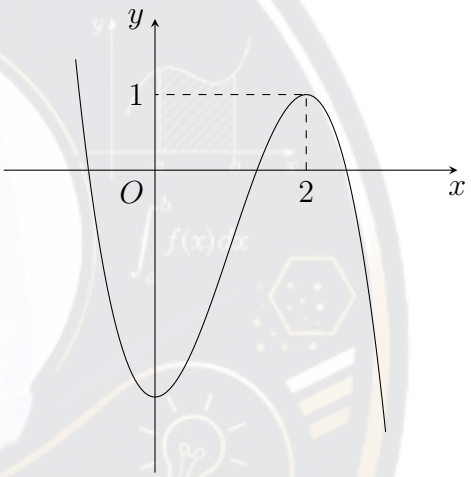
Hàm số đạt cực tiểu tại

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=0$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ với giá trị cực tiểu là $y=1$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-3;1)$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(-1;0)$.



Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên trong khoảng $x\in(0,2)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 15. Hàm số $y=x^3-3x+2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

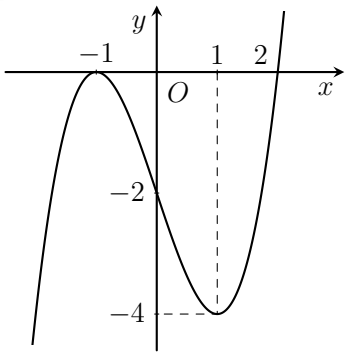
Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(0;2)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=3x^2-3$. $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng xét dấu y' cho thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.



Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x=-1$.

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

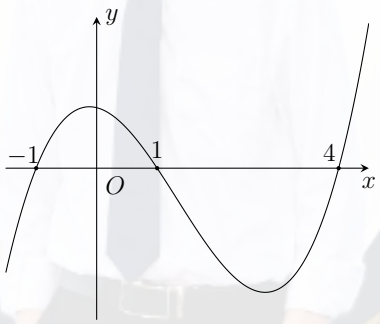
Hướng dẫn giải. $y'=\dfrac{1(1)-(-2)(1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$.
Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 18. Hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-4;2)$. Ⓑ $(-\infty;-2)$.
Ⓒ $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-4;-1)$.

Hướng dẫn giải. $y'=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. $y'=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-4$.
Hàm số nghịch biến trên $(-4;2)\setminus\{-1\}$. Do đó nghịch biến trên khoảng $(-4;-1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;4)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đồng biến khi $f'(x)>0$. Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta thấy $f'(x)>0$ trên các khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=\dfrac{2025x-2024}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2025)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2025)$.

Hướng dẫn giải. $y'=\dfrac{2025+2024}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$.
Hàm số không thể đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ vì khoảng này chứa giá trị $x=-1$ làm hàm số không xác định.

Câu 21. Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-2;3)$. Ⓒ $(-5;-2)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

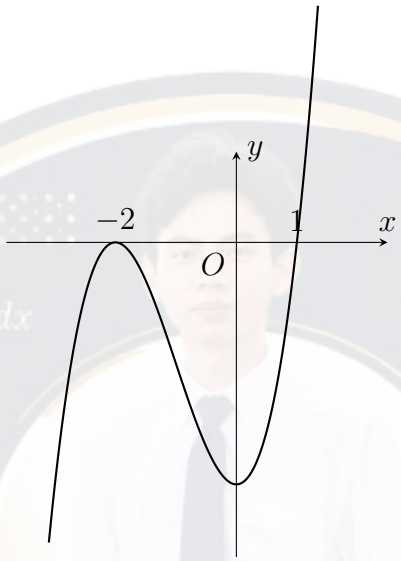
Hướng dẫn giải. $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)$. $y'=0\Leftrightarrow x=0,x=\pm1$.
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Khoảng $(-5;-2)$ là tập con của $(-\infty;-1)$.

Câu 22. Hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-2;1)$. Ⓓ $(1;4)$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $[-2;4]$. $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.
Hàm số đồng biến trên $(-2;1)$ vì $y'>0$ với mọi $x\in(-2;1)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên

Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $(-2;0)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $f(x)$ nghịch biến khi $f'(x)\le 0$. Dựa vào đồ thị, $f'(x)\le 0$ khi $x\le 1$.

Câu 24. Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;5)$. Ⓑ $(-3;+\infty)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-3;5)$.

Hướng dẫn giải. $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. $y'=0\Leftrightarrow x=-1, x=3$.
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu cực tiểu?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (nghiệm kép), $x=3, x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Xét dấu $f'(x)$, ta thấy đạo hàm đổi dấu từ $-$ sang $+$ duy nhất tại một điểm (điểm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$).
Vậy hàm số có 1 cực tiểu.

Câu 26. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=-x^3+3x+4$

Ⓐ $y_{CT}=2$.. Ⓑ $y_{CT}=1$.. Ⓒ $y_{CT}=6$.. Ⓓ $y_{CT}=-1$..

Hướng dẫn giải. $y'=-3x^2+3$. $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.
Tại $x=-1$ là điểm cực tiểu, $y_{CT}=y(-1)=2$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. $f'(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$.

Đạo hàm đổi dấu tại $x=2$ và $x=3$. Tại $x=1$ đạo hàm không đổi dấu. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=2$. Vậy $x=2$ là điểm cực đại.

Câu 29. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

Ⓐ $(2;2)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(0;-2)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải. $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0, x=2$.

Điểm cực tiểu là $x=2\Rightarrow y=-2$. Tọa độ cực tiểu là $(2;-2)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của $f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Chỉ có thừa số $(2x-1)$ là lũy thừa bậc lẻ, đạo hàm chỉ đổi dấu tại $x=1/2$.

Vậy có 1 điểm cực trị.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu từ $-$ sang $+$ tại $x=-3$ và $x=3$. Vậy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

a) Tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm1$.

Bảng xét dấu y':

- Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Vậy: a) Sai; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

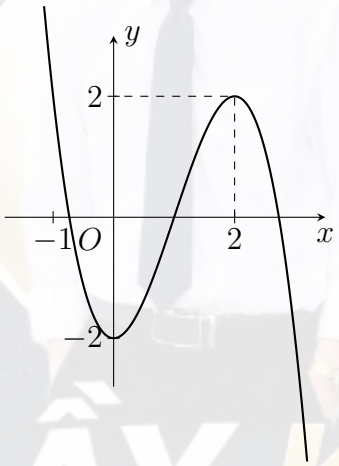
Hướng dẫn giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{1(2)-(-1)(1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0, \forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Vậy: a) Sai; b) Sai; c) Sai (do cách viết tập hợp); d) Sai (hàm đồng biến).

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$

c) Với mọi $x\in(0;2)$ thì hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương

d) Hàm số $y=f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị:

a) Đúng: Đồ thị đi lên trên $(0;2)$.

b) Đúng: Đồ thị đi xuống trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Sai: Tại $x=1$ thì $f(1)=0$.

d) Đúng: $g(x)=f(-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(-x)$. Với $x\in(-2;0)\Rightarrow -x\in(0;2)\Rightarrow f'(-x)>0\Rightarrow g'(x)<0$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$

Hướng dẫn giải. $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

a) Đúng.

b) Đúng: Nghiệm là 0 và 2.

c) Sai: Đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

d) Đúng: Nghịch biến trên $(0; 2) \setminus \{1\}$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

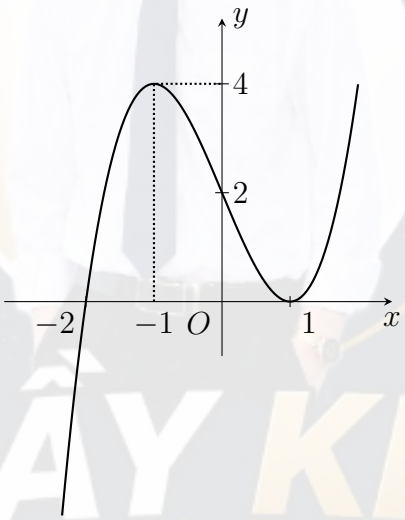
c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \neq 1$

d) Hàm số đã cho không có cực trị

Hướng dẫn giải. $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

a) Đúng. b) Sai. c) Đúng. d) Đúng.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{CĐ} = 4$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Hướng dẫn giải. Đây là đồ thị $f'(x)$. $f'(x) = 0$ tại $x = -2$ (đổi dấu từ $-$ sang $+$) và $x = 1$ (không đổi dấu).

a) Sai. b) Sai. c) Đúng: Đổi dấu từ $-$ sang $+$ nên là cực tiểu. d) Sai.

Bài 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Hướng dẫn giải. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Đạo hàm đổi dấu từ $-$ sang $+$ qua $x = 0$.

Vậy: a) Sai. b) Sai. c) Đúng. d) Sai.

Bài 8. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$.

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. $y' = -2x^3 + 2x = -2x(x^2 - 1)$. Cực trị tại $x = 0, x = \pm 1$.
Tại $x = 0$ là cực tiểu, $y(0) = 1/2$. Tại $x = \pm 1$ là cực đại, $y(\pm 1) = 1$.
Vậy d) Đúng.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\nearrow$		$\searrow$	
			-1				$-\infty$		$-\infty$

a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng. b) Đúng. c) Đúng. d) Sai (tại $x = 0$ hàm không xác định).

Bài 10. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$.

a) Phương trình vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

Hướng dẫn giải. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. $a(t) = 6t - 12$.
Vận tốc tăng khi $a(t) > 0 \Leftrightarrow t > 2$.
Vậy: a) Sai. b) Đúng. c) Sai. d) Sai.

Bài 11. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

b) Giá trị cực đại của hàm số bằng -2

c) Diểm cực tiểu của hàm số bằng 0

d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x - 2$

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ đó, ta có

◈ a) Sai vì $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} \neq \dfrac{x^2-2x}{x+1}$.

◈ b) Đúng: Giá trị cực đại của hàm số bằng $f(0) = -2$.

◈ c) Sai: Điểm cực tiểu của hàm số bằng $x = 2$.

◈ d) Đúng: Đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số là

$$y = \frac{(x^2-2x)'}{(x-1)'} = 2x - 2.$$

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

b) Cực đại của hàm số $f(x)$ là 1

c) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị

d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

◈ a) Sai: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

◈ b) Đúng: Hàm số đạt giá trị cực đại bằng 1 tại $x = -1$.

- c) Sai: Hàm số chỉ có 2 điểm cực trị.
- d) Sai: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$. Tuy nhiên, trên $(-1;3)$ hàm số không nghịch biến vì bị gián đoạn tại $x=1$.

Bài 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

d) Tổng khoảng cách từ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đến trục hoành bằng 2

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

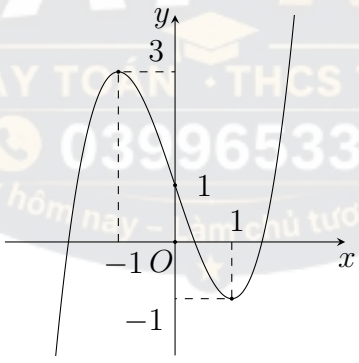
Đạo hàm của hàm số là $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$. $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

- a) Đúng.
- b) Đúng: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$.
- c) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$.
- d) Sai: Hai điểm cực trị là $A(1;5)$ và $B(-3;-3)$. Tổng khoảng cách là $|5|+|-3|=8$.

Bài 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là 2

c) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị trái dấu

d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $y=-3x$

Hướng dẫn giải.

◈ a) Sai: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

◈ b) Đúng: Giá trị cực đại là $y=3$, cực tiểu là $y=-1$. Tổng là $3-1=2$.

◈ c) Đúng: Hàm số có hai giá trị cực trị là 3 (dương) và -1 (âm).

◈ d) Sai: Đường thẳng qua $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$ là $y=-2x+1$.

Bài 15. Cho hàm số $y=2^{x^2-3x+\frac{13}{4}}$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$

c) Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}}=2$

d) Hàm số có 2 điểm cực trị

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x+\frac{13}{4}}\cdot \ln 2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Giá trị cực tiểu $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=2^{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+\frac{13}{4}}=2^1=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

◈ a) Đúng: Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ nên nghịch biến trên $(-1;0)$.

◈ b) Sai: Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ vì $(0;1)\subset\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

◈ c) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu bằng 2 tại $x=\dfrac{3}{2}$.

◈ d) Sai: Hàm số chỉ có 1 điểm cực trị.

3) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Hướng dẫn giải. Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y(0)=5\\x=2\Rightarrow y(2)=1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;5)$, $B(2;1)$.

Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $AB=\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$.

Bài 2. Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết suy ra: $\begin{cases} y'(-1)=3a-2b+c=0 \\ y(-1)=-a+b-c+d=18 \\ y'(3)=27a+6b+c=0 \\ y(3)=27a+9b+3c+d=-16 \end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=18 \\ 27a+6b+c=0 \\ 27a+9b+3c+d=-16 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{17}{16}; b=-\frac{51}{16}; c=-\frac{153}{16}; d=\frac{101}{16} \Rightarrow P=1.$

Bài 3. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có $y'=3x^2-6x-9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1;6)$ và $B(3;-26)$.

Phương trình đường thẳng qua AB là $8x+y+2=0$. Khi đó $d(O;AB)=\frac{2}{\sqrt{65}}$.

Bài 4. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị là $x_1=1-\sqrt{2}; x_2=1+\sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2)$ và $B(1-\sqrt{2};-2-2\sqrt{2})$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2x-4$.

Tọa độ giao điểm của d với hai trục tọa độ là $C(2;0)$ và $D(0;-4)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S=\frac{1}{2}OC\cdot OD=4$.

Bài 5. Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Giả sử $A(0;4), B(-1;3), C(1;3)$. Khi đó $AB=AC=\sqrt{2}$ và $BC=2$.

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A.

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng: $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{AB\cdot AC}{AB+BC+CA}=\frac{2}{2\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Hướng dẫn giải. Ta thấy vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm qua 3 nghiệm $x=-2, x=$

$1, x = 2$ đổi dấu nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Bài 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1;0), x_2 \in (1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

Hướng dẫn giải. Hàm số đa thức bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 nên $a \neq 0$.

Suy ra: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

Áp dụng định lý dấu tam thức bậc 2, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2) \Rightarrow a < 0$.

Vì $x_1 \in (-1;0), x_2 \in (1;2)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases}$ do $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$

Vậy trong các số a, b và c có 1 số âm là a.

Bài 8. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \leq t \leq 45$). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a - b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000 \Rightarrow N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000$.

$N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		10		20		45
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Vậy vi khuẩn tăng trong khoảng thời gian lâu nhất là $(20;45) \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow a - b = -25$.

Bài 9. Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Ta có $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0, +\infty)$.

$\Rightarrow R'(x) = -6x^2 + 18x + 12 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}5616$.

x	0		$\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$R'(x)$		$-$	0	$+$	
$R(x)$	0	$\searrow$	$-14{,}16$	$\nearrow$	$+\infty$

Do vậy số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là

$$3,5616 \cdot 1\,000 = 3\,561{,}6 \text{ hay } 3\,562 \text{ sản phẩm.}$$

Bài 10. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 – 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0{,}000989t^3 - 0{,}0486t^2 + 0{,}7116t + 1{,}46, \quad 5 \le t \le 19.$$

Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Hướng dẫn giải. Ta có $S'(t) = 3 \cdot 0{,}000989t^2 - 2 \cdot 0{,}0486t + 0{,}7116 = 0{,}002967t^2 - 0{,}0972t + 0{,}7116$.
Suy ra

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}002967t^2 - 0{,}0972t + 0{,}7116 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 21{,}72 \text{(loại)} \\ t \approx 11{,}04 \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	5		$11{,}04$		19
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	$3{,}93$	$\nearrow$	$4{,}72$	$\searrow$	$4{,}22$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $S(t)$ đạt cực đại tại $t \approx 11{,}04$.
Vậy vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng 11 tuổi.

Bài 11. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \dfrac{50}{0{,}01x^2+1}$, $0 \le x \le 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Hướng dẫn giải. Doanh thu mà nhà sản xuất đạt được khi bán x nghìn chiếc đồng hồ đeo tay Peget là

$$R(x) = p(x) \cdot x = \frac{50x}{0{,}01x^2+1} \text{với } 0 \le x \le 20.$$

Ta có

$$R'(x) = \frac{50 \cdot (0{,}01x^2+1) - 50x \cdot 0{,}02x}{(0{,}01x^2+1)^2} = \frac{50\,(0{,}01x^2+1-0{,}02x^2)}{(0{,}01x^2+1)^2} = \frac{50\,(1-0{,}01x^2)}{(0{,}01x^2+1)^2}.$$

Suy ra

$$R'(x)=0\Leftrightarrow\frac{50\left(1-0{,}01x^2\right)}{\left(0{,}01x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow 1-0{,}01x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10(\text{nhận})\\x=-10(\text{loại}).\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		10		20
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
$R(x)$	0	↗	250	↘	200

Từ bảng biến thiên, ta thấy $R(t)$ đạt cực đại tại $x=10$.
Vậy để doanh thu $R=px$ đạt cực đại thì nhà sản xuất phải bán 10 nghìn chiếc đồng hồ đeo tay Peget.

Bài 12. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12\,000$ (con), $0\le t\le 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Hướng dẫn giải. Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngay, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.
Ta có $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12\,000\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{1}{100}t^2+2bt+c$.
Ngày 26/09/2024 ứng với $t=270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t=270$. Ta có

$$\begin{cases}f'(270)=0\\f(270)=55\,740\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{100}270^2+540b+c=0\\-\dfrac{1}{300}270^3+b\cdot 270^2+270\cdot c+12\,000=55\,740\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}540\cdot b+c=729\\72\,900\cdot b+270\cdot c=109\,350\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{6}{5}\\c=81.\end{cases}$$

Do đó, hàm số đã cho là $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+\dfrac{6}{5}t^2+81t+12\,000$.
Thử lại $f'(t)=-\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{12}{5}t+81\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=270\\t=-30\ (\text{loại}).\end{array}\right.$

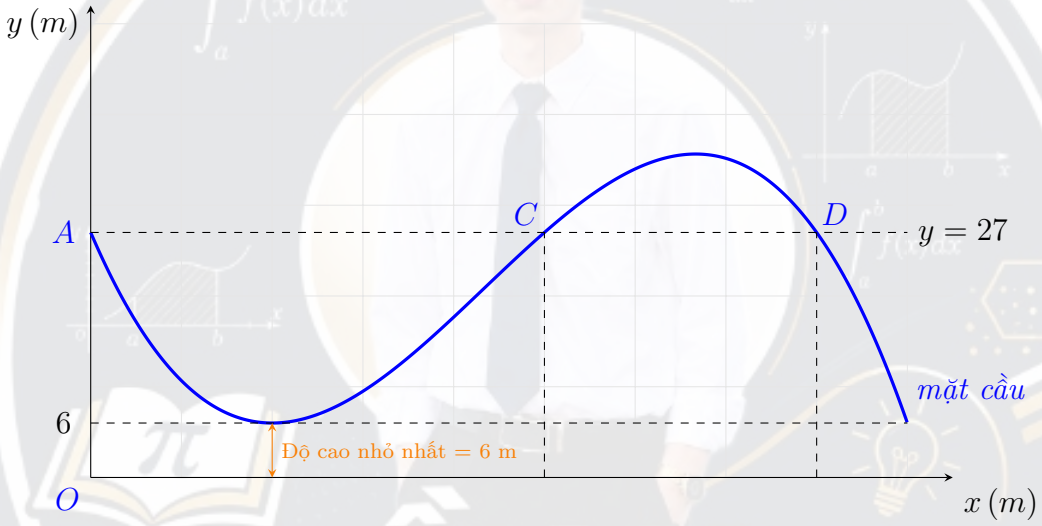
Bảng biến thiên

t	0		270		365
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$55\,740$	↘	

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.
Ngày 25/11/2014 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng

$$f\,(330) = -\frac{1}{300} \cdot 330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12\,000 = 49\,620 \text{ (con)}.$$

Bài 13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục là mét), mặt cắt dọc của một cầu đi bộ dạng sóng được mô phỏng bằng đồ thị của hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(0 \le x < 90)$ (tham khảo hình vẽ).



Mặt cầu đi qua ba mốc $A(0;27)$, $C(50;27)$, $D(80;27)$. Độ cao nhỏ nhất (khoảng cách thẳng đứng từ mặt cầu tới mặt đất $y = 0$) là 6 m. Hỏi độ cao lớn nhất của mặt cầu so với mặt đất bằng bao nhiêu (đơn vị: mét, làm tròn đến một chữ số thập phân)?

Hướng dẫn giải. Vì $f(0) = f(50) = f(80) = 27$ nên tồn tại $k \neq 0$ sao cho

$$f(x) - 27 = kx(x-50)(x-80).$$

Đặt $h(x) = x(x-50)(x-80) = x^3 - 130x^2 + 4\,000x$. Khi đó

$$h'(x) = 3x^2 - 260x + 4\,000 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = \dfrac{200}{3}. \end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta thấy $k < 0$, do đó

$$f_{\min} = f(20) = 27 + k \cdot h(20) \quad \text{và} \quad f_{\max} = f\left(\frac{200}{3}\right) = 27 + k \cdot h\left(\frac{200}{3}\right).$$

Lại có $h(20) = 20 \cdot (-30) \cdot (-60) = 36\,000$. Độ cao nhỏ nhất bằng 6 m dẫn tới

$$27 + k \cdot 36\,000 = 6 \Rightarrow k = -\frac{21}{36\,000} = -\frac{7}{12\,000}.$$

Lại có

$$h\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{200}{3} \cdot \frac{50}{3} \cdot \left(-\frac{40}{3}\right) = -\frac{400\,000}{27}.$$

Suy ra

$$f_{\max} = 27 - \frac{7}{12\,000} \cdot \left(-\frac{400\,000}{27}\right) = 27 + \frac{700}{81} = \frac{2\,887}{81} \approx 35{,}6\,(\text{m}).$$

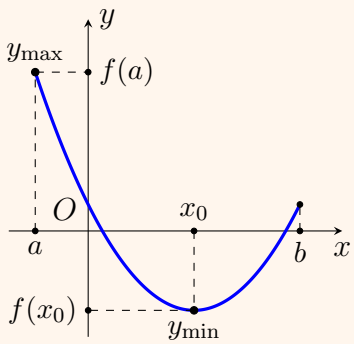
Vậy cao độ lớn nhất (làm tròn một chữ số thập phân) là 35,6m.

§2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

• Số M được gọi là **giá trị lớn nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$. • Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$.



Lưu ý. - Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không chỉ rõ tập D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

- Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

II. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Các bước tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

• *Bước 1.* Tìm các điểm $x_1; x_2; \cdots; x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không tồn tại.

• *Bước 2.* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \cdots; f(x_n); f(b)$.

• *Bước 3.* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2. Khi đó:

$$M = \max_{[a;b]} f(x), \quad m = \min_{[a;b]} f(x).$$

ĐẠI SỐ 0399653362 Học hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Ví dụ 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;4]$.

Lời giải. Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0;4]$);

$$y(0) = 3; \quad y(4) = 195; \quad y(\sqrt{2}) = -1.$$

Do đó: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195$; $\min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

Lời giải. Ta có: $y' = \cos x - \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0;2\pi]$);

$$y(0) = 1; \quad y(2\pi) = 1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \quad y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $\min_{[0;2\pi]} y = y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

(1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:
a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ trên đoạn $[0;2]$; b) $y = (x+1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$.

....

....

....

....

....

(2) Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).
a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

....

....

....

....

....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

b) $y = xe^{-x}$;

c) $y = x \ln x$;

d) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x + 3$ trên đoạn $[-1; 2]$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$;

c) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$;

d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0; 1]$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

d) $y = f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

e) $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$

f) $y = f(x) = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

g) $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định

h) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

i) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$

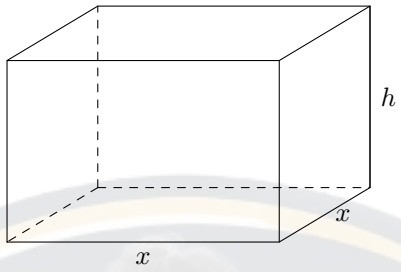
j) $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

k) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

l) $y = x + \dfrac{4}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

Bài 5. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 6. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.

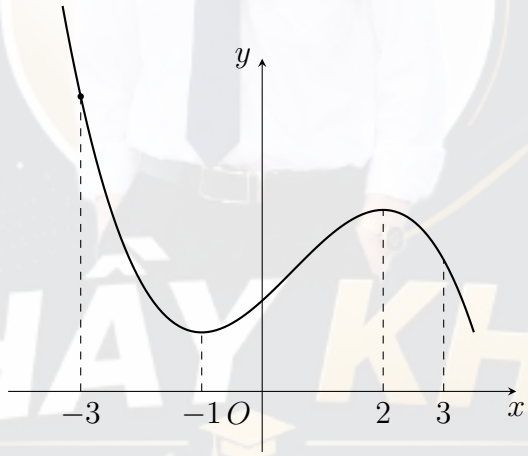


Hình 1.17

Bài 7. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1 000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

2) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

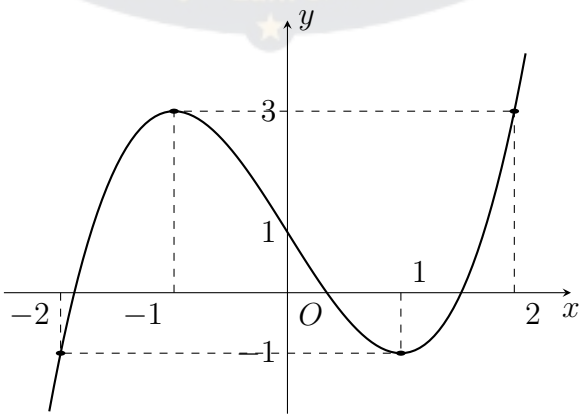
Câu 1. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

Ⓐ $f(2)$. Ⓑ $f(-1)$. Ⓒ $f(-3)$. Ⓓ $f(3)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ

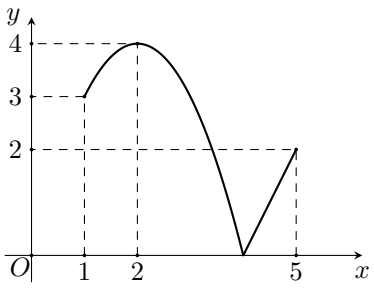


Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 3.

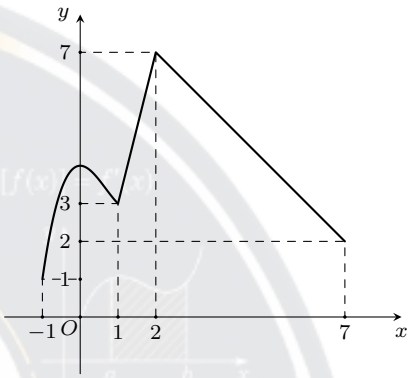
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Ⓐ $x=4$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=5$. Ⓓ $x=1$.



Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1;7]$ và có đồ thị như hình bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;7]$. Giá trị của $M-m$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ -5. Ⓓ 5.



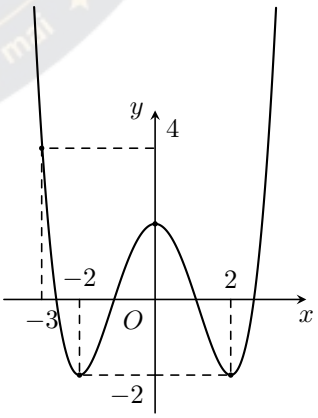
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	5	↘	
			4				$-\infty$

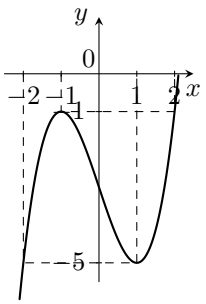
Ⓐ $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$. Ⓑ $y_{\text{CT}}=0$. Ⓒ $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$. Ⓓ $y_{\text{CĐ}}=5$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$ đạt được tại điểm x bằng bao nhiêu?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ 0.

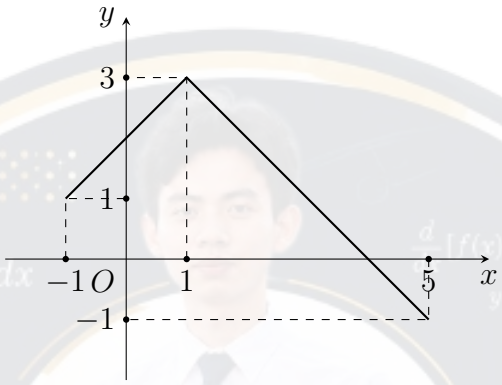


Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



Ⓐ $m = -2; M = 2$.
Ⓑ $m = -5; M = 0$.
Ⓒ $m = -1; M = 0$.
Ⓓ $m = -5; M = -1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ là

Ⓐ $[-1; 5]$.
Ⓑ $[1; 3]$.
Ⓒ $[-1; 3]$.
Ⓓ $[1; 5]$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Trên khoảng $(0; +\infty)$, giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -2.
Ⓑ -1.
Ⓒ 3.
Ⓓ 2.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là

Ⓐ -3.
Ⓑ 3.
Ⓒ $\dfrac{1}{3}$.
Ⓓ 1.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

Ⓐ 4.
Ⓑ $2\sqrt{3}$.
Ⓒ $2\sqrt{5}$.
Ⓓ 0.

Câu 12. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $S = M + m$.

Ⓐ $\frac{7}{3}$.
Ⓑ 1.
Ⓒ $\frac{10}{3}$.
Ⓓ 4.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5; -1]$ bằng

Ⓐ 12.
Ⓑ 18.
Ⓒ -40.
Ⓓ 14.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y = 0$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y = 7$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ $\frac{19}{3}$. Ⓓ $\frac{23}{3}$.

Câu 16. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

Ⓐ $S = 0$. Ⓑ $S = -\frac{3}{2}$. Ⓒ $S = -2$. Ⓓ $S = 4$.

Câu 17. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ là

Ⓐ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{1}{2}; \min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = -1$.

Ⓑ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{6}$.

Ⓒ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = 1$.

Ⓓ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{1}{2}$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ trên $[1;2]$

Ⓐ $\min\limits_{[1;2]} y = 3$. Ⓑ $\min\limits_{[1;2]} y = 2$. Ⓒ $\min\limits_{[1;2]} y = \frac{1}{2}$. Ⓓ $\min\limits_{[1;2]} y = \frac{3}{2}$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ là

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 20. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

Ⓐ -6. Ⓑ $-\frac{9}{4}$. Ⓒ $-\frac{25}{4}$. Ⓓ -5.

Câu 21. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4x + \sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ -2. Ⓓ -4.

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$. Ⓑ $\frac{\pi}{2} + 1$. Ⓒ 1. Ⓓ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Ⓐ -4. Ⓑ $\frac{25}{6}$. Ⓒ -5. Ⓓ -2.

Câu 24. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x + \cos\frac{\pi x}{2}$

trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 0. Ⓓ -4.

Câu 25. Cho hàm số $y=\sin x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\pi]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 26. Gọi M,m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $P=M+m$?

Ⓐ $P=1$. Ⓑ $P=-3$. Ⓒ $P=-\dfrac{13}{3}$. Ⓓ $P=-5$.

Câu 27. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$ là bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ 0.

Câu 28. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t)=6t^2-t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

Ⓐ $t=3$ s. Ⓑ $t=4$ s. Ⓒ $t=2$ s. Ⓓ $t=6$ s.

Câu 29. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+6t^2+t+5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

Ⓐ 13 m/s. Ⓑ 10 m/s. Ⓒ 9 m/s. Ⓓ 12 m/s.

Câu 30. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

Ⓐ 24 mg. Ⓑ 20 mg. Ⓒ 15 mg. Ⓓ 10 mg.

Câu 31. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}\ (\text{con})$$

Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Ⓐ 1008 con. Ⓑ 1012 con. Ⓒ 1005 con. Ⓓ 1020 con.

Câu 32. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ 25 cm^2. Ⓑ $\frac{125}{4}$ cm^2. Ⓒ $\frac{625}{4}$ cm^2. Ⓓ 125 cm^2.

Câu 33. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

Ⓐ $\frac{9}{2}$. Ⓑ $6\sqrt{2}$. Ⓒ 9. Ⓓ $9\sqrt{2}$.

Câu 34. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp.

Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

Ⓐ 3 m. Ⓑ 4 m. Ⓒ 5 m. Ⓓ 2 m.

3) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4		2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	↗	0	↘	-4	↗	10

a) $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$.

b) $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -10$.

c) $\max\limits_{(-4;4)} y = 0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4;4)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$, $x \in (0;+\infty)$.

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

a) Cực đại của hàm số là 4.

b) Cực tiểu của hàm số là 3.

c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.

d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; 5)$ là 150.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 150.

Bài 6. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng.

a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37.000 đồng thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 triệu đồng.

b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39.000 đồng.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

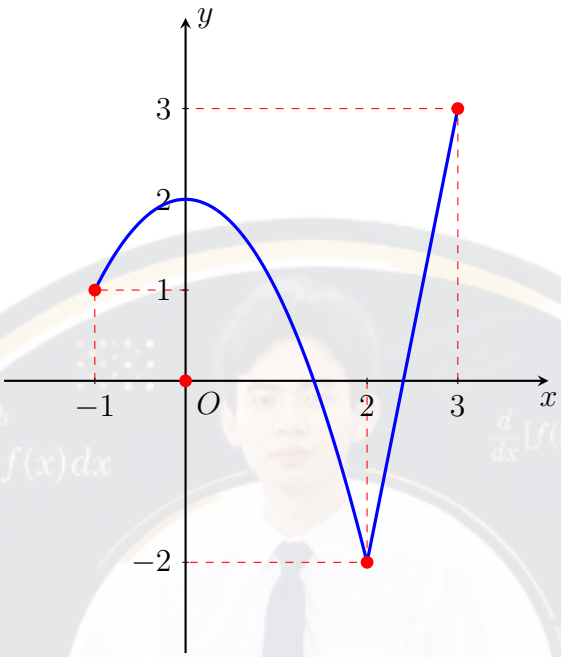
a) $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5$.

b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

c) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-1;1]$ là 7.

d) $\max\limits_{x\in[0;\frac{\pi}{2}]} f(\sin x) = 5$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\max\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = f(3)$.

b) $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = -2$.

c) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;3]$.

d) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(3\sin^2 x - 1) = 2$.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $f(-1)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là $f(3)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là $f(-1)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 3x^2 + 6x - 5$ trên $[0;2]$ là $f(0) - 2$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$.

STT	Khẳng định	Đúng	Sai
a	Hàm số có ba điểm cực trị.		
b	$\min\limits_{x\in(-\infty;2)} f(x) = f(0)$.		
c	$\max\limits_{x\in[0;4]} f(x) = f(3)$.		
d	$\max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.		

Bài 11. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

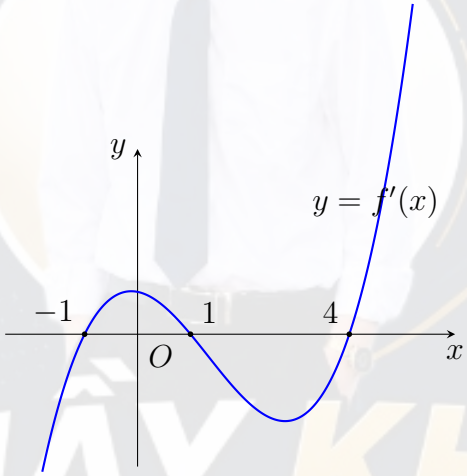
a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 0]$.

c) Trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = 2^{f(x)} + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[3; 4]$ bằng -3. Khi đó $m_0 \in (-5; 0)$.

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

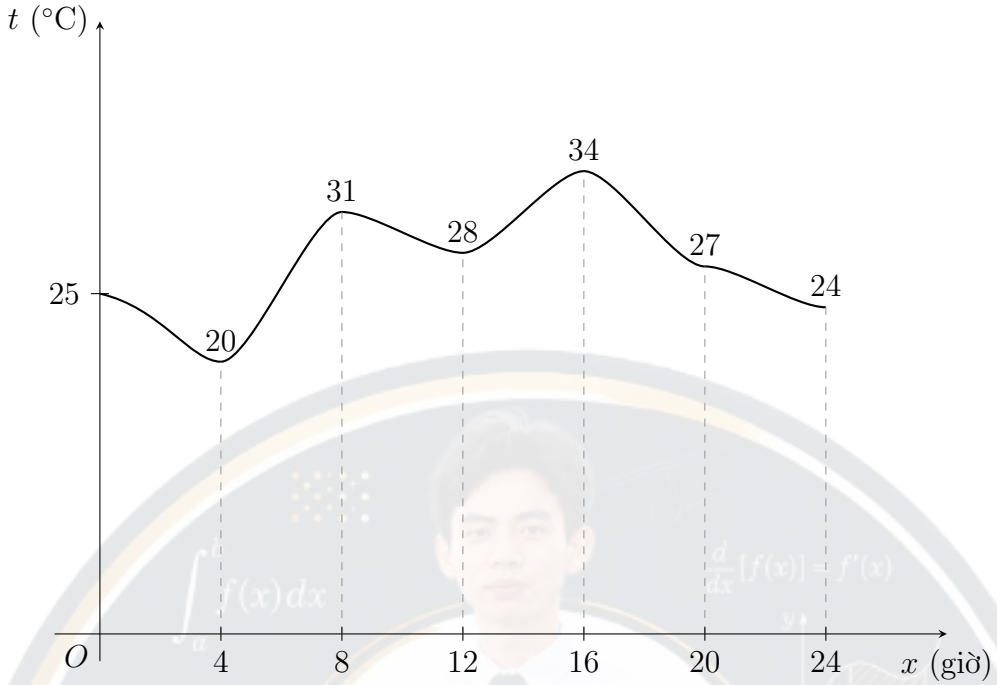
a) Hàm số có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) $f(1) > f(2) > f(4)$.

d) Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$.

Bài 13. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $28°C$.

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$.

c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

Bài 14. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \le t \le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$.

a) Lượng xăng ban đầu trong bình xăng là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít.

c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \le t \le 0,5$.

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Bài 15. Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là 50m^2. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được $1,5$ tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg. Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

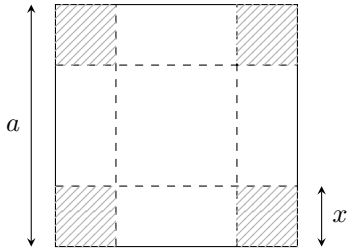
b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

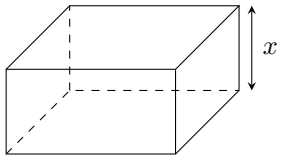
c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg).

d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Bài 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau,

rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.





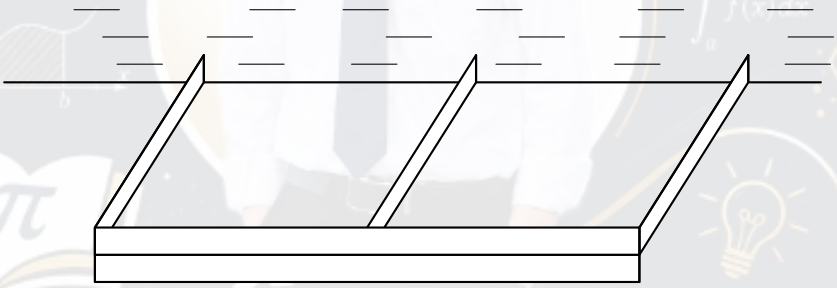
a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\dfrac{a^3}{27}$.

Bài 17. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



a) Số tiền phải làm là: $x \cdot 60000 + y \cdot 3 \cdot 50000 = 15000000$ đồng.

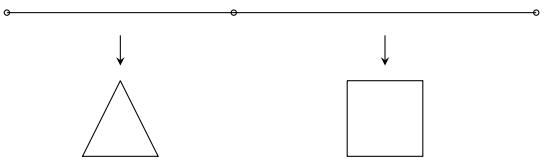
b) Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \dfrac{500 - 5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$.

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250$ (m^2).

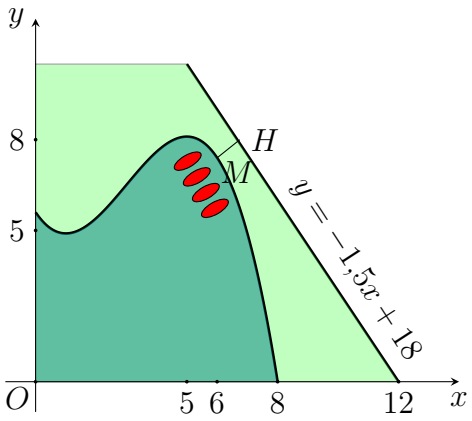
d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50 m.

4) Trả lời ngắn

Bài 1. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



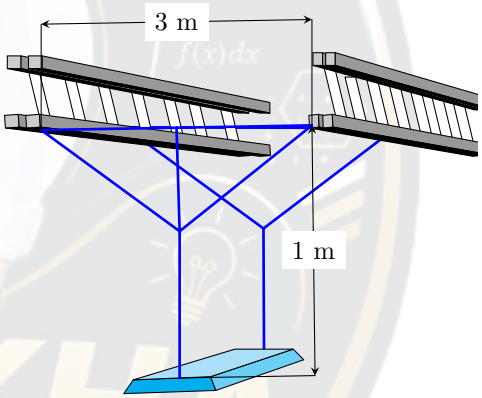
Bài 2. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m (*Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016*).



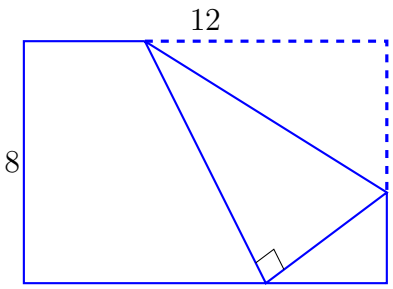
Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1{,}5x + 18$. Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoành độ của điểm để xây dựng bến thuyền này bằng bao nhiêu?

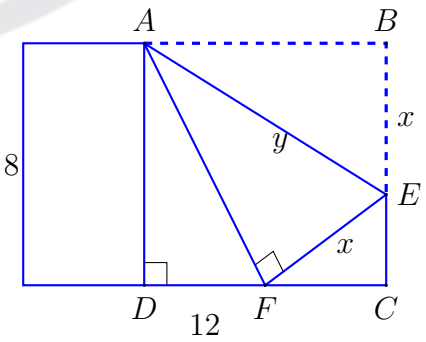
Bài 3. Một trung tâm thương mại bán 2 500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100 000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200 000 đồng cộng thêm 90 000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức $T = 20 \cdot m + 25 \cdot n$.

Bài 4. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a + b + c$.



Bài 5. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 và chiều rộng 8. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ (đỉnh B trùng đỉnh F). Để độ dài nếp gấp AE là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu *(kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)*?



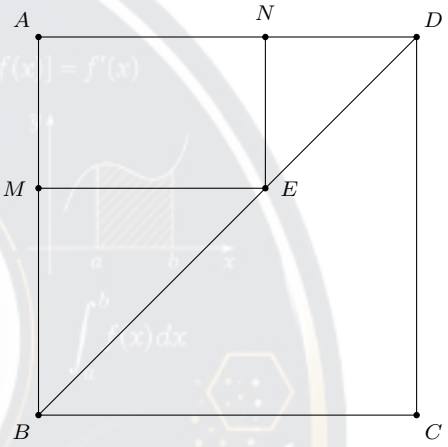


Bài 6. Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc

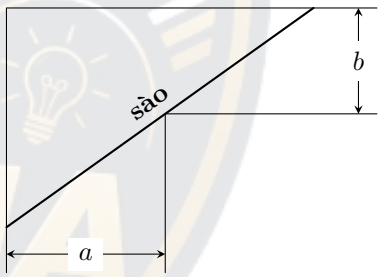
là $C_b(x) = 0{,}00\,001x^2$ (triệu đồng). Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là $C_v(x) = 0{,}00\,003(x-200)^3$ (triệu đồng). Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) đạt được nhiều nhất là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 7. Một công ty sản xuất đồ điện tử nhận được đơn đặt hàng sản xuất 5 000 chiếc tai nghe không dây. Công ty này sở hữu một số dây chuyền sản xuất tự động. Mỗi dây chuyền có thể sản xuất 25 chiếc tai nghe trong một giờ. Chi phí thiết lập(cài đặt, lập trình) mỗi dây chuyền là 150 nghìn đồng. Chi phí này chỉ trả một lần cho mỗi dây chuyền được sử dụng. Khi đã được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát của một kỹ thuật viên. Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát là 200 nghìn đồng mỗi giờ(tính cho toàn bộ quá trình sản xuất). Công ty nên sử dụng bao nhiêu dây chuyền sản xuất để tổng chi phí(chi phí thiết lập và chi phí giám sát) cho việc hoàn thành đơn hàng là thấp nhất?

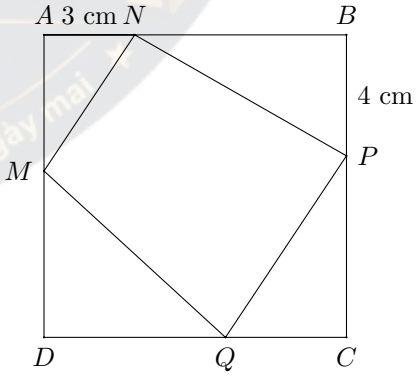
Bài 8. Bác An muốn xây một chiếc bể bơi cho trẻ em trong mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có diện tích 144 m^2. Biết bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có hai đỉnh đối diện của đáy là A và E, với E thuộc đường chéo BD; độ sâu của bể bơi không đổi bằng 1,5 m (tham khảo hình vẽ). Chi phí lát gạch cho nền bể là 1 000 000 VNĐ/m^2 và chi phí lát gạch cho thành bể là 500 000 VNĐ/m^2. Hỏi khi diện tích đáy bể đạt giá trị lớn nhất thì chi phí phải bỏ ra để lát gạch cho nền và thành bể bơi này là bao nhiêu triệu đồng?



Bài 9. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi que sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

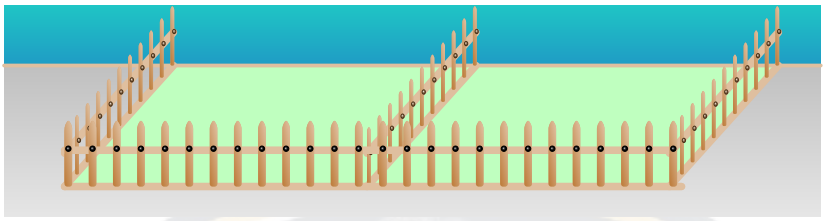


Bài 10. Một tấm bia hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 cm. Bạn An muốn tạo thành 1 hình thang $MNPQ$ $(MN//PQ)$ biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AD, AB, BC, CD như hình minh hoạ sao cho đoạn $AN = 3$ cm, $BP = 4$ cm. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ nhỏ nhất bạn An có thể tạo được (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).



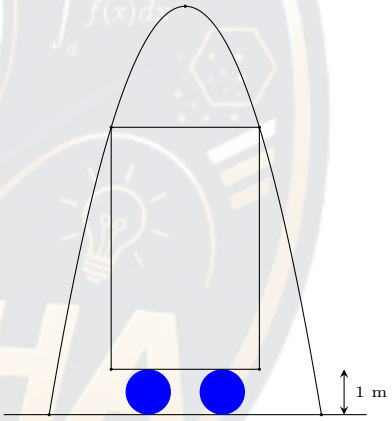
Bài 11. Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B. Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là $L_A(x) = -x^2 + 12x$. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là $L_B(y) = -y^2 + 20y$. Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

Bài 12. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

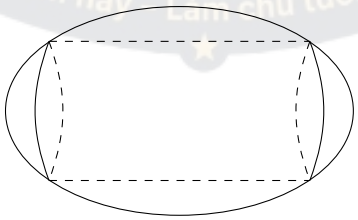


Bài 13. Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Công ty cần tính toán để tối ưu hóa tốc độ vận chuyển hàng hóa của xe. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian $\dfrac{x}{60-x}$ giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là 1,2 giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

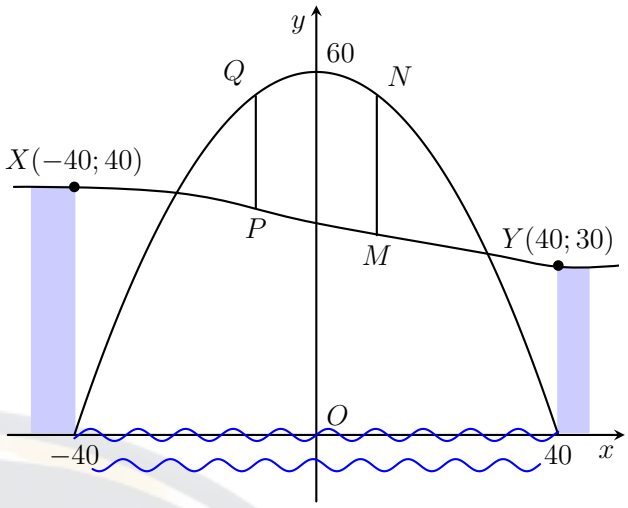
Bài 14. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Bài 15. Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm. Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v... Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 16. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình $y = \dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35$. Khung vòm của cầu là một Parabol có đỉnh tại $(0, 60)$ và chân tại hai điểm có hoành độ $x = -40$ và $x = 40$ trên trục hoành.

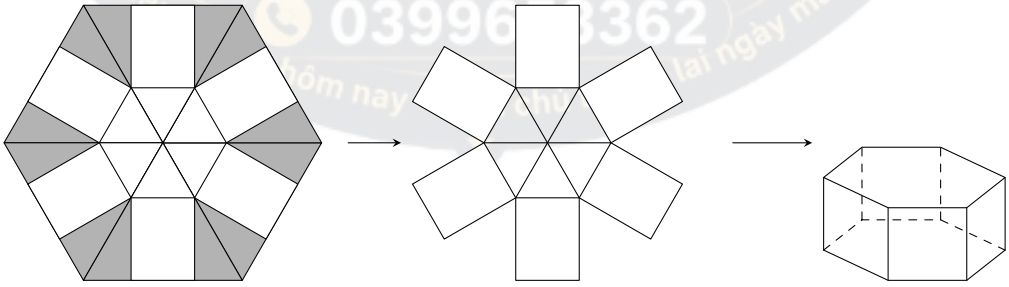


Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Bài 17. Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x, $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\dfrac{a^3}{b}$. Hỏi giá trị của b bằng bao nhiêu?

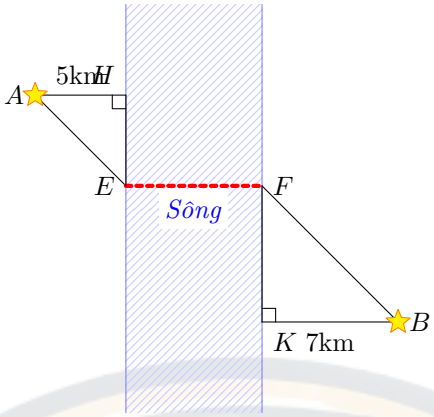


Bài 18. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



Bài 19. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất

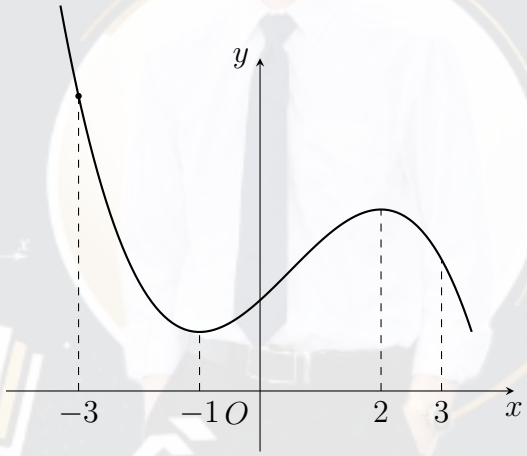
(đi theo đường $AEFB$)? (Kết quả làm tròn đến km)



IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:

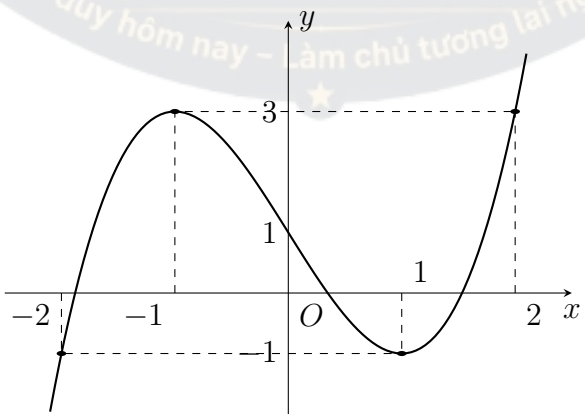


Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

Ⓐ $f(2)$. Ⓑ $f(-1)$. Ⓒ $f(-3)$. Ⓓ $f(3)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số trên đoạn $[-3;3]$, ta thấy điểm cao nhất của đồ thị có hoành độ là $x=-3$. Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn này là $f(-3)$. Chọn đáp án C.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ

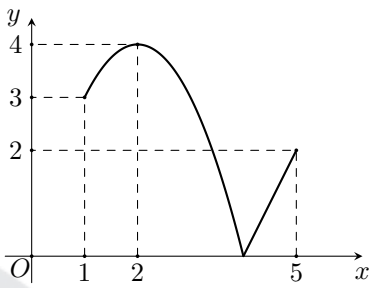


Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-2;2]$, điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ là $y=-1$. Giá trị này đạt được khi $x=-2$ hoặc $x=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1. Chọn đáp án B.

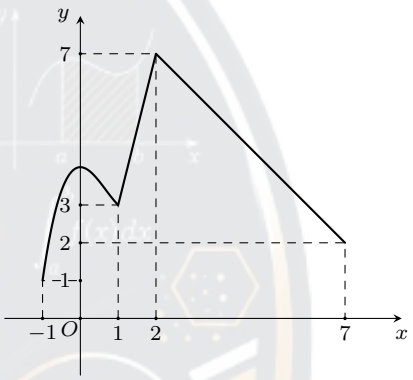
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm



Ⓐ $x=4$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=5$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, trên đoạn $[1;5]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại $x=2$. Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1;7]$ và có đồ thị như hình bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;7]$. Giá trị của $M-m$ bằng



Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ -5. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị trên đoạn $[0;7]$, giá trị lớn nhất $M=7$ (tại $x=2$) và giá trị nhỏ nhất $m=2$ (tại $x=7$). Do đó $M-m=7-2=5$. Chọn đáp án D.

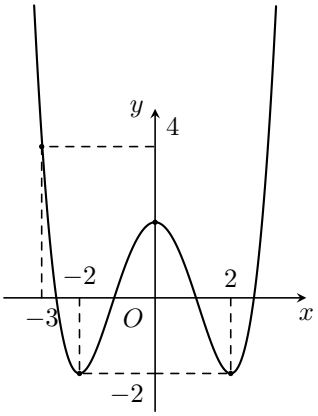
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	5	↘	
			4				$-\infty$

Ⓐ $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$. Ⓑ $y_{\text{CT}}=0$. Ⓒ $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$. Ⓓ $y_{\text{CĐ}}=5$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, tại điểm $x=1$ hàm số đổi dấu từ dương sang âm nên đây là điểm cực đại. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}}=5$. Chọn đáp án D.

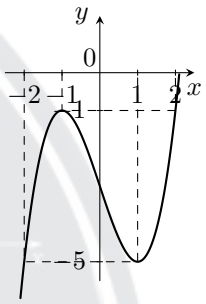
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$ đạt được tại điểm x bằng bao nhiêu?



Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-3;2]$, tung độ cao nhất của đồ thị là $y = 4$, đạt được tại hoành độ $x = -3$. Chọn đáp án C.

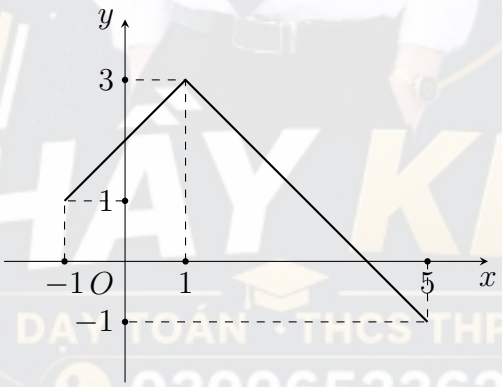
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



Ⓐ $m = -2; M = 2$. Ⓑ $m = -5; M = 0$.
Ⓒ $m = -1; M = 0$. Ⓓ $m = -5; M = -1$.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-2;2]$, điểm thấp nhất có tung độ $y = -5$ và điểm cao nhất có tung độ $y = -1$. Vậy $m = -5, M = -1$. Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ là

Ⓐ $[-1;5]$. Ⓑ $[1;3]$. Ⓒ $[-1;3]$. Ⓓ $[1;5]$.

Hướng dẫn giải. Tập giá trị là tập hợp các giá trị tung độ của đồ thị. Trên đoạn $[-1;5]$, tung độ chạy từ -1 đến 3. Vậy tập giá trị là $[-1;3]$. Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Trên khoảng $(0;+\infty)$, giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -2. Ⓑ -1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số đạt cực đại tại $x=2$ với giá trị $f(2)=3$. Đây cũng là giá trị lớn nhất trên khoảng này. Chọn đáp án C.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ là

Ⓐ -3. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên $[0;2]$.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}>0, \forall x\in[0;2]$. Hàm số đồng biến nên giá trị lớn nhất là $f(2)=\dfrac{2(2)-3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$. Chọn đáp án C.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ $2\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{5}$. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Hàm số có đạo hàm $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$. $y'=0\Leftrightarrow x=0$. Tính $y(0)=4, y(-2)=y(2)=2\sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{3}$. Chọn đáp án B.

Câu 12. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S=M+m$.

Ⓐ $\frac{7}{3}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\frac{10}{3}$. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Dễ thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Tính các giá trị: $y(0)=1$; $y(1)=\dfrac{7}{3}$; $y(3)=1$; $y(4)=\dfrac{7}{3}$.

Vậy $M=\max\limits_{[0;4]}y=\dfrac{7}{3}$ và $m=\min\limits_{[0;4]}y=1$.

Suy ra $S=M+m=\dfrac{7}{3}+1=\dfrac{10}{3}$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2+10$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 18. Ⓒ -40. Ⓓ 14.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-5;-1]$ hàm số đã cho liên tục và có $y'=3x^2+6x$.

Giải $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Vì $x=0\notin[-5;-1]$ nên ta chỉ xét $x=-2$.

Ta có: $y(-5)=-40$; $y(-2)=14$; $y(-1)=12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-5;-1]$ bằng 14.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y = 0$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y = 7$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{array}\right.$.

Tính các giá trị tại biên: $y(2) = 7$; $y(4) = 57$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y = y(2) = 7$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ $\frac{19}{3}$. Ⓓ $\frac{23}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = \left(\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{array}\right.$.

Lại có $f(2) = 7$; $f(4) = \frac{19}{3}$; $f(3) = 6$. So sánh các giá trị, ta thấy $f(2) > f(4) > f(3)$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là 7.

Câu 16. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

Ⓐ $S = 0$. Ⓑ $S = -\frac{3}{2}$. Ⓒ $S = -2$. Ⓓ $S = 4$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$.

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Tính các giá trị tại biên: $f(0) = -1$; $f(3) = \frac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Vậy $M = -\dfrac{1}{2}$ và $m = -1$. Suy ra $S = 2M - m = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = 0$.

Câu 17. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ là

Ⓐ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = -1$.

Ⓑ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{\pi}{6}$.

Ⓒ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = 1$.

Ⓓ $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x) = x + \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x \sin x = 1 - \sin 2x$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Do $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{4}$.

Ta có $f(0)=1$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ nên: $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$ và $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{4}]} f(x)=1$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+2}{x}$ trên $[1;2]$

Ⓐ $\min\limits_{[1;2]} y=3$. Ⓑ $\min\limits_{[1;2]} y=2$. Ⓒ $\min\limits_{[1;2]} y=\frac{1}{2}$. Ⓓ $\min\limits_{[1;2]} y=\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=-\dfrac{2}{x^2}<0, \forall x\neq 0$ nên hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ nghịch biến trên $[1;2]$.

Do đó $\min\limits_{[1;2]} y=y(2)=\dfrac{2+2}{2}=2$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ là

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D=[3;5]$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=\sqrt{5-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=5-x\\x-3>0\\5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=5-x\\x>3\\x<5\end{cases}\Leftrightarrow$ $x=4$.

Ta có: $f(3)=f(5)=\sqrt{2}$; $f(4)=2$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 20. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

Ⓐ -6. Ⓑ $-\dfrac{9}{4}$. Ⓒ $-\dfrac{25}{4}$. Ⓓ -5.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x+3)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$.

Đạo hàm $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\in[-2;1]\\x=5\notin[-2;1]\end{cases}$.

Khi đó $f(-2)=-\dfrac{5}{4}$; $f(1)=-5$; $f(-1)=-1\Rightarrow\begin{cases}M=-1\\m=-5\end{cases}$. Suy ra $M+m=-6$.

Câu 21. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4x+\sin^2\pi x$ trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ -2. Ⓓ -4.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x)=4+2\pi\sin\pi x\cos\pi x=4+\pi\sin 2\pi x$.

Do $-1\leq\sin 2\pi x\leq 1\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in[-1;2]$.

Vậy $m+M=f(-1)+f(2)=-4+\sin^2(-\pi)+8+\sin^2(2\pi)=4$.

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\cos^2 x$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$. Ⓑ $\frac{\pi}{2}+1$. Ⓒ 1. Ⓓ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $y=f(x)=x+\cos^2 x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$y'=f'(x)=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$.

$y'=0\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó $f(0)=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$.

Ⓐ -4. Ⓑ $\frac{25}{6}$. Ⓒ -5. Ⓓ -2.

✍ *Hướng dẫn giải.* Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$.

$f'(x)=\dfrac{-x^2+4}{x^2}=0\Leftrightarrow -x^2+4=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\notin\left[\frac{3}{2};4\right] \\ x=2\in\left[\frac{3}{2};4\right]\end{cases}$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{6}$; $f(2)=-4$; $f(4)=-5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2};4\right]$ là -4.

Câu 24. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x+\cos\dfrac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $m+M$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 0. Ⓓ -4.

✍ *Hướng dẫn giải.* Khi đó $m+M=f(-2)+f(2)=-4-1+4-1=-2$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\sin x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\pi]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $y=\sin x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}=\sin x\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(2\sin x+\sin 2x)$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=-\pi+k2\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$.

Xét trên khoảng $(0;\pi)$ ta có nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}$; $y(0)=0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $y(\pi)=0$.

Vậy $\max\limits_{[0;\pi]} y=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 26. Gọi M, m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $P=M+m$?

Ⓐ $P=1$. Ⓑ $P=-3$. Ⓒ $P=-\frac{13}{3}$. Ⓓ $P=-5$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét trên $[-2;0]$ hàm số xác định và liên tục.

Đạo hàm $y' = \dfrac{2x(x-1)-x^2-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \in [-2;0] \\ x=3 \end{cases}$.

Khi đó $y(-2) = -\dfrac{7}{3}, y(0) = -3, y(-1) = -2$.

Vậy $m = \min_{[-2;0]} y = -3, M = \max_{[-2;0]} y = -2 \Rightarrow P = m + M = -5$.

Câu 27. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2+3x+4}$ là bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = [-1;4]$. Ta có $y' = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+4}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó $y(-1) = 0; y(4) = 0; y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$. Vậy $\max_{[-1;4]} y = \dfrac{5}{2}$.

Câu 28. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

Ⓐ $t = 3$ s. Ⓑ $t = 4$ s. Ⓒ $t = 2$ s. Ⓓ $t = 6$ s.

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$; $v'(t) = 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$ giây.

Câu 29. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

Ⓐ 13 m/s. Ⓑ 10 m/s. Ⓒ 9 m/s. Ⓓ 12 m/s.

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ trên đoạn $[0;3]$.

$v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Tính các giá trị: $v(0) = 1; v(2) = 13; v(3) = 10$.

So sánh các giá trị ta suy ra $\max\limits_{[0;3]} v(t) = 13$.

Câu 30. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

Ⓐ 24 mg. Ⓑ 20 mg. Ⓒ 15 mg. Ⓓ 10 mg.

Hướng dẫn giải. Bài toán trở thành tìm $x \in [0;30]$ để hàm số $G(x) = 0,025x^2(30-x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $G(x) = 0,025(30x^2 - x^3) \Rightarrow G'(x) = 0,025(60x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=20 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		30
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	100	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[0;30]} G(x) = G(20) = 100$.

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20 mg.

Câu 31. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)}$$

Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Ⓐ 1008 con. Ⓑ 1012 con. Ⓒ 1005 con. Ⓓ 1020 con.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ có $N'(t) = \frac{100\cdot\left(100+t^2\right)-100t\cdot 2t}{\left(100+t^2\right)^2} = \frac{100\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$.

Khi đó với $t > 0$ thì $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	1000	↗	1005	↘	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 32. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ 25 cm^2. Ⓑ $\frac{125}{4}$ cm^2. Ⓒ $\frac{625}{4}$ cm^2. Ⓓ 125 cm^2.

Hướng dẫn giải. Gọi một cạnh góc vuông là x $(0 < x < 5)$ thì cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25 - x^2}$.

Như vậy, diện tích $S = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$. Đặt $f(x) = 25x^2 - x^4$.

Ta có $f'(x) = 50x - 4x^3$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vì vậy $\max\limits_{(0;5)} f(x) = f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{625}{4}$.

Vậy tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng $\frac{625}{4}$ cm^2.

Câu 33. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra

một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

Ⓐ $\frac{9}{2}$. Ⓑ $6\sqrt{2}$. Ⓒ 9. Ⓓ $9\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Đặt $OQ = x, (0 < x < 3) \Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$.
Ta có $S_{MNPQ} = PQ \cdot MQ = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2} \le 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$.
Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

Ⓐ 3 m. Ⓑ 4 m. Ⓒ 5 m. Ⓓ 2 m.

Hướng dẫn giải. Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x, $(0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5)$.
Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$.
Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$.
Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0; 5)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{20}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 5)$ như sau:

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	max	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2 m.

2) trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4		2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-10	↗	0	↘	-4	↗	10

a) $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$.

b) $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -10$.

c) $\max\limits_{(-4;4)} y = 0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, ta thấy hàm số không có GTLN, NN trên $(-4;4)$.

a) Sai: $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$ và $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$.

b) Sai: $\max\limits_{(-4;4)} y = 10$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -10$.

c) Sai: $\max\limits_{(-4;4)} y = 0$ và $\min\limits_{(-4;4)} y = -4$.

d) Đúng: Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4;4)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$, $x \in (0;+\infty)$.

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = x + \dfrac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}, x \in (0;+\infty)$:

x	0		2		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

a) Đúng: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

b) Sai: Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

c) Sai: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Sai: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Hướng dẫn giải. a) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1);(0;1)$.

b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$.

c) Đúng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$.

d) Đúng: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ là $f(0)+f(1) = -1+(-2) = -3$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

a) Cực đại của hàm số là 4.

b) Cực tiểu của hàm số là 3.

c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.

d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Cực đại của hàm số là 4.

b) Đúng: Cực tiểu của hàm số là 3.

c) Đúng: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.

d) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;5)$ là 150.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ là 150.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = 4x - \dfrac{500}{x^2} = \dfrac{4x^3-500}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow$ **a) Đúng**.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - THCS THPT
0399653362
Kiến tạo tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

Bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ **b) Sai**.

- Trên $(0;5)$, hàm số luôn nghịch biến và $f(x) > 150 \Rightarrow$ không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(0;5) \Rightarrow$ **c) Sai**.

- Trên $(0;+\infty)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là 150 tại $x = 5 \Rightarrow$ **d) Đúng**.

Bài 6. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng.

a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37.000 đồng thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 triệu đồng.

b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39.000 đồng.

Hướng dẫn giải. Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ (chiếc).

Lúc đầu bán với giá 30 nghìn đồng, mỗi chiếc khăn lãi 12 nghìn đồng. Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Tổng lợi nhuận một tháng thu được là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) = -100x^2 + 1800x + 36000$ (nghìn đồng) $\Rightarrow$ **b) Đúng**.

Xét hàm số trên $(0;30)$, ta có: $f'(x) = -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$.

- Với $x = 9$, giá bán mới là $30 + 9 = 39$ nghìn đồng $\Rightarrow$ **d) Đúng**.

- Số khăn giảm đi là $100 \times 9 = 900$ chiếc $\Rightarrow$ **c) Sai**.

- Với giá bán 37.000 đồng $\Rightarrow x = 7$, $f(7) = -100(7)^2 + 1800(7) + 36000 = 43.700$ (nghìn đồng) $= 43,7$ triệu $\Rightarrow$ **a) Sai**.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 5$.

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 2$.

c) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-1;1]$ là 7.

d) $\max\limits_{x\in[0;\frac{\pi}{2}]} f(\sin x) = 5$.

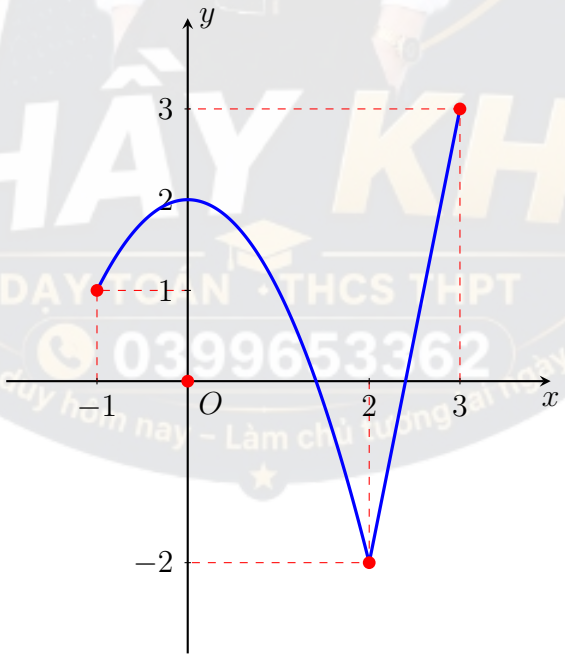
Hướng dẫn giải. a) **Đúng**. Trên $\mathbb{R}$, giá trị lớn nhất của hàm số là 5 (tại $x=-1$).

b) **Sai**. Trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) **Đúng**. Trên $[-1;1]$, GTLN là 5 (tại $x=-1$), GTNN là 2 (tại $x=0$). Tổng là $5+2=7$.

d) **Sai**. Với $x\in[0;\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x\in[0;1]$. Khi $t=\sin x\in[0;1]$, quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(t)$ có giá trị lớn nhất là $f(1)=3$. Vậy max $=3$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\max\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = f(3)$.

b) $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = -2$.

c) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;3]$.

d) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(3\sin^2 x-1)=2$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng**. GTLN trên đoạn $[-1;3]$ là 3, đạt được tại $x=3$.

b) **Đúng**. GTNN trên đoạn $[-1;3]$ là -2, đạt được tại $x=2$.

c) **Sai**. Trên đoạn $[-1;2]$, GTLN là 2 (tại $x=0$), GTNN là -2 (tại $x=2$). Vậy tập giá trị là $[-2;2]$.

d) **Đúng**. Đặt $t=3\sin^2 x-1$. Vì $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow -1\le t\le 2$. GTLN của $f(t)$ trên đoạn $[-1;2]$ là 2 (tại $t=0$).

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $f(-1)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là $f(3)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=f(2x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là $f(-1)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x^2-2x)-3x^2+6x-5$ trên $[0;2]$ là $f(0)-2$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng. Vì trên đoạn $[-1;2]$, ta có $f'(x)\le 0$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;2]$. Do đó $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$.

b) Sai. Căn cứ bảng xét dấu, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$. Trên đoạn $[-1;3]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(2)$.

c) Sai. Ta có $h'(x)=2f'(2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-1\\2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1/2\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $h(x)$ trên $[-1;1]$:

x	-1		$-1/2$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$

Vậy giá trị lớn nhất là $h(-1/2)=f(-1)$. (Lưu ý: Khẳng định c ghi max là $f(-1)$ nhưng tại $x=-1$, giá trị là $h(-1)=f(-2)$ không phải giá trị lớn nhất).

d) Đúng. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)-6x+6=(2x-2)[f'(x^2-2x)-3]$.

Với $x\in[0;2]\Rightarrow x^2-2x\in[-1;0]$. Trên $[-1;0]$, $f'(x^2-2x)\le 0\Rightarrow f'(x^2-2x)-3<0$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. Ta có BBT:

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$

Giá trị lớn nhất là $g(1)=f(1^2-2\cdot 1)-3(1)^2+6(1)-5=f(-1)-2$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x(x-2)^2(x-3), \forall x\in\mathbb{R}$.

STT	Khẳng định	Đúng	Sai
a	Hàm số có ba điểm cực trị.		
b	$\min\limits_{x\in(-\infty;2)} f(x)=f(0)$.		
c	$\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=f(3)$.		
d	$\max f(e^x+e^{-x})=f(3)$.		

Hướng dẫn giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Trong đó $x=2$ là nghiệm bội chẵn.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

a) Sai. Hàm số chỉ có 2 điểm cực trị (tại $x=0$ và $x=3$).

b) Đúng. Từ BBT trên khoảng $(-\infty;2)$, hàm số đạt GTNN tại $x=0$.

c) Đúng. Trên đoạn $[0;4]$, dựa vào BBT, giá trị lớn nhất là $f(3)$.

d) Đúng. Đặt $t=e^x+e^{-x}$. Theo BĐT Cô-si: $e^x+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$. Suy ra $t\in[2;+\infty)$.

Trên $[2;+\infty)$, dựa vào BBT, hàm số $f(t)$ đạt GTLN tại $t=3$. Vậy $\max f(e^x+e^{-x})=f(3)$.

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)=\log_2(x^2-3x+2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(2;+\infty)$.

b) Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;0]$.

c) Trên đoạn $[-1;0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x)=2^{f(x)}+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn

$[3;4]$ bằng -3. Khi đó $m_0 \in (-5;0)$.

Hướng dẫn giải.

a) Sai. TXĐ: $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Trên $(2;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2(x^2-3x+2)=+\infty$ nên không có GTLN.

b) Đúng. Vì $[-1;0]\subset D$ và hàm số liên tục trên $[-1;0]$ nên luôn tồn tại GTLN và GTNN.

c) Đúng. $f'(x)=\dfrac{2x-3}{(x^2-3x+2)\ln 2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=3/2\notin[-1;0]$.

$f(-1)=\log_2(6)$; $f(0)=\log_2(2)=1$.

Vì $f(-1)>f(0)$ nên $\min\limits_{[-1;0]} f(x)=1$.

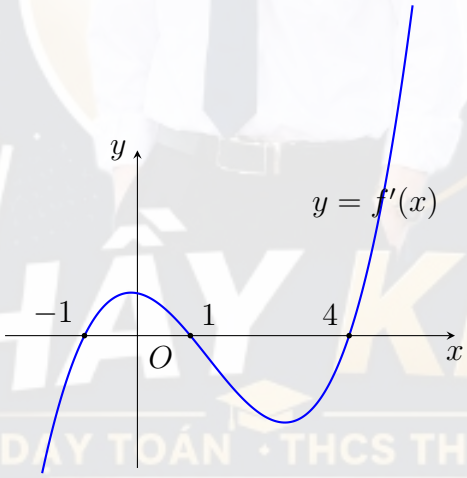
d) Sai. $g(x)=2^{\log_2(x^2-3x+2)}+m=x^2-3x+2+m$.

Xét trên $[3;4]$, $g'(x)=2x-3=0\Leftrightarrow x=3/2\notin[3;4]$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[3;4]$ nên $\min\limits_{[3;4]} g(x)=g(3)=3^2-3(3)+2+m=2+m$.

Theo đề bài: $2+m=-3\Leftrightarrow m=-5$. Vậy $m_0=-5\notin(-5;0)$.

Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) $f(1)>f(2)>f(4)$.

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$

Khi đó $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;4)$ và $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(4;+\infty)$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn luyện hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

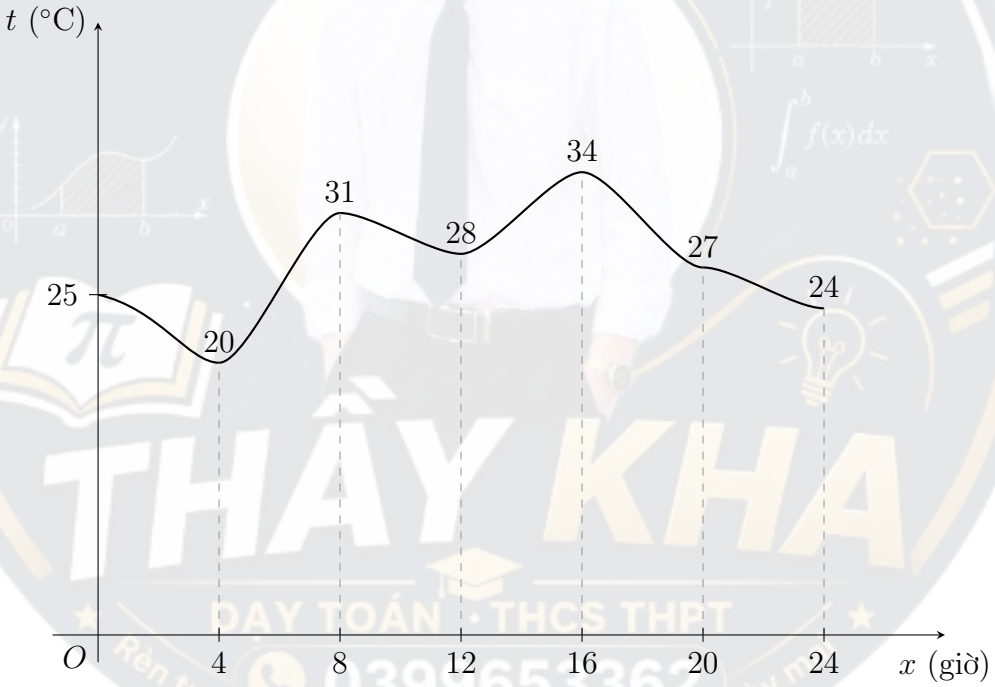
a) **Sai:** Hàm số có ba điểm cực trị.

b) **Sai:** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$.

c) **Đúng:** Vì trên khoảng $(1;4)$ hàm số nghịch biến nên $1 < 2 < 4 \Rightarrow f(1) > f(2) > f(4)$.

d) **Đúng:** Trên đoạn $[1;4]$ hàm số nghịch biến nên giá trị lớn nhất đạt được tại đầu mút trái, tức là $f(1)$.

Bài 13. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $28°C$.

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$.

c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

Hướng dẫn giải. a) **Sai:** Nhìn vào đồ thị, điểm cao nhất có tung độ là 34, vậy nhiệt độ cao nhất là $34°C$.

b) **Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ là 20, ứng với $20°C$.

c) **Đúng:** Giá trị cực đại $34°C$ đạt được tại hoành độ $x = 16$.

d) **Đúng:** Giá trị cực tiểu $20°C$ đạt được tại hoành độ $x = 4$.

Bài 14. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \le t \le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$.

a) Lượng xăng ban đầu trong bình xăng là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít.

c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \le t \le 0,5$.

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Hướng dẫn giải. a) **Sai:** Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 300(0^2 - 0^3) + 4 = 4$ lít.

b) **Đúng:** Xét $V(t)$ trên $[0; 0,5]$. $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$.

$V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(2 - 3t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2/3$ (loại vì $2/3 > 0,5$).

Trên $[0; 0,5]$, $V'(t) > 0$ nên hàm số đồng biến. Giá trị lớn nhất là $V(0,5) = 300(0,5^2 - 0,5^3) + 4 = 41,5$ lít.

c) **Sai:** Đạo hàm của hàm hằng bằng 0, nên $V'(t) = [300(t^2 - t^3) + 4]' = 300(2t - 3t^2)$.

d) **Đúng:** Xét tốc độ tăng thể tích $f(t) = V'(t) = 300(2t - 3t^2)$ trên $[0; 0,5]$.

$f'(t) = 300(2 - 6t)$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1/3 \in [0; 0,5]$.

So sánh các giá trị: $f(0) = 0$; $f(1/3) = 300(2/3 - 3/9) = 100$; $f(0,5) = 300(1 - 3/4) = 75$.

Bài 15. Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là 50m^2. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được $1,5$ tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg. Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg).

d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai:** Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50 \cdot 20 = 1000$ con.

b) **Đúng:** Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là: $\dfrac{1500}{1000} = 1,5$ (kg).

c) **Sai:** Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (con), $(x > 0)$.

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con). Suy ra giảm 1 con thì mỗi con tăng thêm $0,5 : 8 = 0,0625$ (kg/con).

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

d) **Sai:** Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

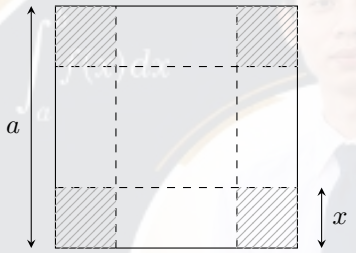
Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61$. Cho $F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$.

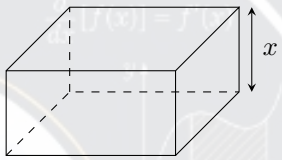
Bảng biến thiên:

x	0		488		1000
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$F(max)$	↘	

Vậy ông Thanh phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

Bài 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.





a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\dfrac{a^3}{27}$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$ với $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x \cdot 2(a-2x) \cdot (-2) = (a-2x)(a-2x-4x) = (a-2x)(a-6x)$.

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a/2 \text{ (loại)} \\ x = a/6 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$a/6$		$a/2$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\dfrac{2a^3}{27}$	↘	0

Vậy $\max_{(0;a/2)} V(x) = V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \dfrac{2a^3}{27}$.

- a) **Sai:** $x = a/6$ mới làm cho thể tích lớn nhất.
- b) **Đúng:** Thể tích lớn nhất khi $x = a/6$.
- c) **Đúng:** Giá trị thể tích lớn nhất là $2a^3/27$.
- d) **Sai:** Kết quả đúng là $2a^3/27$.

Bài 17. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



a) Số tiền phải làm là: $x \cdot 60000 + y \cdot 3 \cdot 50000 = 15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \dfrac{500 - 5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$.

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250$ (m^2).

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50 m.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai:** Tổng số tiền chi trả cho vật liệu là chi phí của 3 đoạn hàng rào độ dài x và 1 đoạn hàng rào độ dài y:

$$x \cdot 3 \cdot 50000 + y \cdot 60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow 15x + 6y = 1500 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}.$$

b) **Đúng:** Diện tích khu đất là: $S = x \cdot y = x \cdot \dfrac{500 - 5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$.

c) **Đúng:** Xét hàm số $S(x) = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$ trên $(0; 100)$.

Ta có: $S'(x) = 250 - 5x$. Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

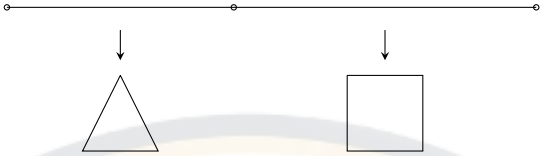
x	0		50		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↗	6250	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, diện tích lớn nhất là 6250 m^2 tại $x = 50$.

d) **Đúng:** Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250$ (m^2) khi $x = 50$ (m).

3) Trả lời ngắn

Bài 1. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



Hướng dẫn giải. Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m). Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{6-3x}{4}$.

Tổng diện tích khi đó là $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\dfrac{6-3x}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 36x + 36\right)]$.

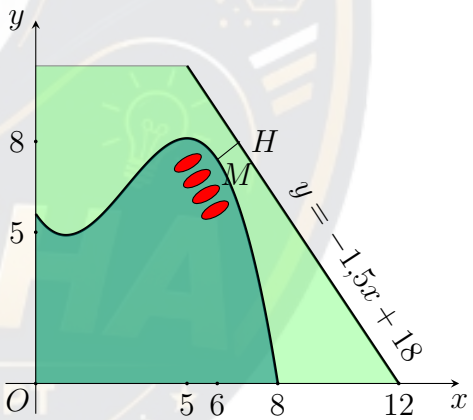
Xét hàm số $f(x) = \left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 36x + 36, x \in (0;6)$.

Ta có $f(x)$ là tam thức bậc 2 có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0;6)$ và $a > 0$.

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\dfrac{b}{2a}\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Bài 2. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m (*Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016*).



Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1{,}5x + 18$. Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoành độ của điểm để xây dựng bến thuyền này bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Xét điểm $M\left(x;f(x)\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \le x \le 8$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(x;f(x)\right)$ đến đường thẳng $y = -1{,}5x + 18 \Leftrightarrow -1{,}5x - y + 18 = 0$ là

$$MH = \frac{\left|-1{,}5x - \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18\right|}{\sqrt{(-1{,}5)^2 + 1}} = \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3{,}25}}.$$

Ta khảo sát hàm số $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \le x \le 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=6.$$

Bảng biến thiên

x	0		6		8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	124	↘	16	↗	60

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có $h(x)>0$ với $0\le x\le 8$;

$$\min_{[0;8]} h(x)=h(6)=16 \text{ tại } x=6.$$

Do đó, $\min MH=\min\limits_{[0;8]}\dfrac{|x^3-9x^2+124|}{10\sqrt{3{,}25}}=\dfrac{1}{10\sqrt{3{,}25}}\cdot\min\limits_{[0;8]}h(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{3{,}25}}\cdot 16\approx 0{,}8875$ và đạt được tại $x=6$.

Bài 3. Một trung tâm thương mại bán 2 500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100 000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200 000 đồng cộng thêm 90 000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức $T=20\cdot m+25\cdot n$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm thương mại đặt mỗi lần $(x>0)$.

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm thương mại là $\dfrac{2\,500}{x}$.

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là $\dfrac{2\,500}{x}(200\,000+90\,000x)$ (đồng).

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\dfrac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng $50\,000x$ (đồng/năm).

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có $F(x)=$ Chi phí đặt hàng + Chi phí lưu kho.

$$F(x)=\frac{2\,500}{x}\cdot(200\,000+90\,000x)+50\,000x$$

$$F(x)=\frac{500\,000\,000}{x}+225\,000\,000+50\,000x.$$

Bài toán trở thành tìm $x>0$ để $F(x)$ nhỏ nhất, $F'(x)=-\dfrac{500\,000\,000}{x^2}+50\,000$.

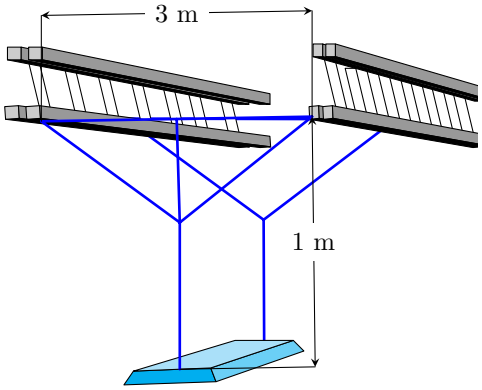
$$F'(x)=0\Rightarrow -\frac{500\,000\,000}{x^2}+50\,000=0\Rightarrow x=100.$$

x	0		100		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	$F_{\min}$	↗	

Vậy trung tâm phải đặt hàng $\dfrac{2\,500}{100}=25$ lần, mỗi lần là $x=100$ cái ti vi.

Ta có $m=100$, $n=25$, do đó $T=20\cdot m+25\cdot n=2\,625$.

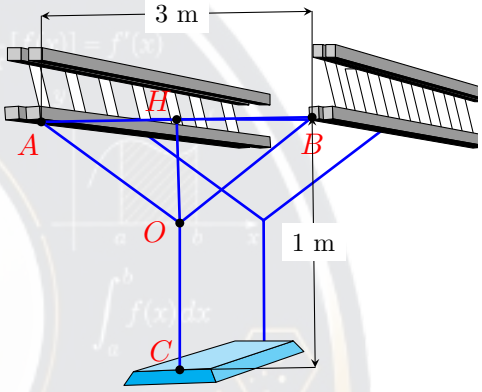
Bài 4. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a+b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a+b+c$.



Hướng dẫn giải.

Bài 4. Đặt $OH=x$ $(0\le x\le 1)$.

Khi đó $OA=OB=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+x^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+x^2}$ và $OC=1-x$.



Tổng độ dài của dây xích là

$$L(x)=2(OA+OB+OC)=2\left(2\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}+1-x\right).$$

Ta có $L'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{\dfrac{9}{4}+x^2}}-2.$

Suy ra $L'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{4x}{\sqrt{\dfrac{9}{4}+x^2}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{9}{4}+x^2}=2x\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Bảng biến thiên

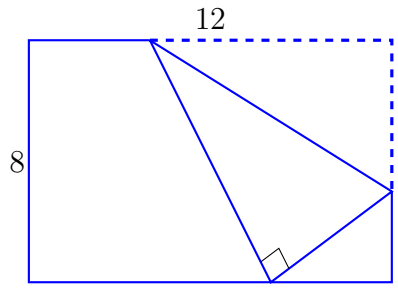
x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$	8	↘	$2+3\sqrt{3}$	↗	$2\sqrt{13}$

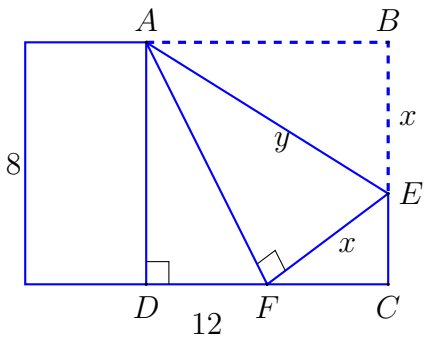
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+3\sqrt{3}.$$

Suy ra $a=2$, $b=3$ và $c=3$ do đó $a+b+c=2+3+3=8$.

Bài 5. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 và chiều rộng 8. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ (đỉnh B trùng đỉnh F). Để độ dài nếp gấp AE là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu *(kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)*?





Hướng dẫn giải. Đặt $BE = x\,(0 < x < 8)$, $EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64}$.

Ta có $\triangle ADF \sim \triangle FCE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{CF}{AD} \Rightarrow AF = \dfrac{EF \cdot AD}{CF} = \dfrac{8x}{\sqrt{16x-64}}$.

$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\dfrac{64x^2}{16x-64} + x^2} = \sqrt{\dfrac{16x^3}{16x-64}}$.

Gọi $f(x) = \dfrac{16x^3}{16x-64}$ $(x \in (0;8)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{48x^2(16x-64) - 16 \cdot 16x^3}{(16x-64)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 512x^3 - 3\,072x^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 6. \end{array}\right.$

x	0		6		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	108	↗	

Vậy $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$.

Bài 6. Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc là $C_b(x) = 0{,}00\,001x^2$ (triệu đồng). Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là $C_v(x) = 0{,}00\,003(x-200)^3$ (triệu đồng). Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) đạt được nhiều nhất là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị tiền tệ sang triệu đồng:

- Giá bán: 0,06 triệu đồng/lít.
- Chi phí nguyên vật liệu: 0,035 triệu đồng/lít.
- Chi phí nhân công: 1 triệu đồng.

Doanh thu: $R(x) = 0{,}06x$. Tổng chi phí $C(x)$ phụ thuộc vào sản lượng x:

- Nếu $0 \le x \le 200$:

$$C(x) = 1 + 0{,}035x + 0{,}00\,001x^2$$

Hàm lợi nhuận: $L(x) = R(x) - C(x) = -0{,}00\,001x^2 + 0{,}025x - 1$.

Hàm số này đồng biến trên $[0;200]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x = 200$:

$$L(200) = -0{,}00\,001(200)^2 + 0{,}025(200) - 1 = -0{,}4 + 5 - 1 = 3{,}6 \text{ (triệu đồng)}.$$

◈ Nếu $200 < x \leq 300$:

$$C(x) = 1 + 0{,}035x + 0{,}00\,001x^2 + 0{,}00\,003(x - 200)^3$$

Hàm lợi nhuận:

$$\begin{aligned} L(x) &= 0{,}06x - \left(1 + 0{,}035x + 0{,}00\,001x^2 + 0{,}00\,003(x - 200)^3\right) \\ &= -0{,}00\,003(x - 200)^3 - 0{,}00\,001x^2 + 0{,}025x - 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow L'(x) = -0{,}00\,009(x - 200)^2 - 0{,}00\,002x + 0{,}025.$

Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow -9(x - 200)^2 - 2x + 2500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 215{,}16 \\ x \approx 184{,}61 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		$184{,}61$		$215{,}16$		$+\infty$
$L'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy trên khoảng $200 < x \leq 300$ thì giá trị lợi nhuận cực đại đạt tại $x \approx 215{,}16$:

$$L(215{,}16) \approx 3{,}81 \text{ (triệu đồng)}.$$

So sánh hai trường hợp ta được lợi nhuận lớn nhất là 3,81 triệu đồng.

Bài 7. Một công ty sản xuất đồ điện tử nhận được đơn đặt hàng sản xuất 5 000 chiếc tai nghe không dây. Công ty này sở hữu một số dây chuyền sản xuất tự động. Mỗi dây chuyền có thể sản xuất 25 chiếc tai nghe trong một giờ. Chi phí thiết lập(cài đặt, lập trình) mỗi dây chuyền là 150 nghìn đồng. Chi phí này chỉ trả một lần cho mỗi dây chuyền được sử dụng. Khi đã được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát của một kỹ thuật viên. Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát là 200 nghìn đồng mỗi giờ(tính cho toàn bộ quá trình sản xuất). Công ty nên sử dụng bao nhiêu dây chuyền sản xuất để tổng chi phí(chi phí thiết lập và chi phí giám sát) cho việc hoàn thành đơn hàng là thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số dây chuyền sản xuất cần sử dụng($x \in \mathbb{N}^*$).

Số lượng tai nghe mỗi dây chuyền sản xuất trong một giờ là 25 (chiếc).

Tổng công suất sản xuất của x dây chuyền trong một giờ là $25x$ (chiếc).

Thời gian để hoàn thành 5 000 chiếc tai nghe là

$$t = \frac{5\,000}{25x} = \frac{200}{x} \text{ (giờ)}.$$

Chi phí thiết lập cho x dây chuyền là $150x$(nghìn đồng).

Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát trong thời gian t là $200 \cdot \dfrac{200}{x} = \dfrac{40\,000}{x}$(nghìn đồng).

Tổng chi phí sản xuất là

$$C(x) = 150x + \frac{40\,000}{x} \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = 150x + \dfrac{40\,000}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 150 - \dfrac{40\,000}{x^2}$.

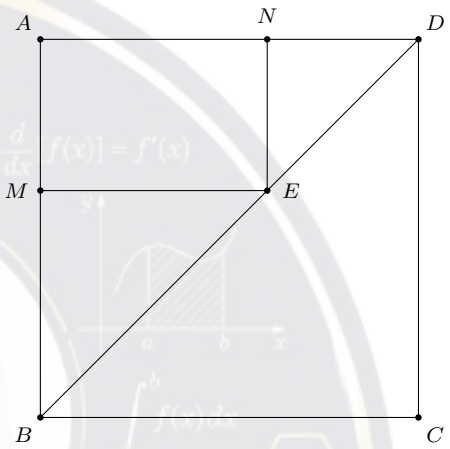
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 150x^2 = 40\,000 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{40\,000}{150} = \dfrac{800}{3}$.

Suy ra $x = \sqrt{\dfrac{800}{3}} = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$. Ta có bảng biến thiên

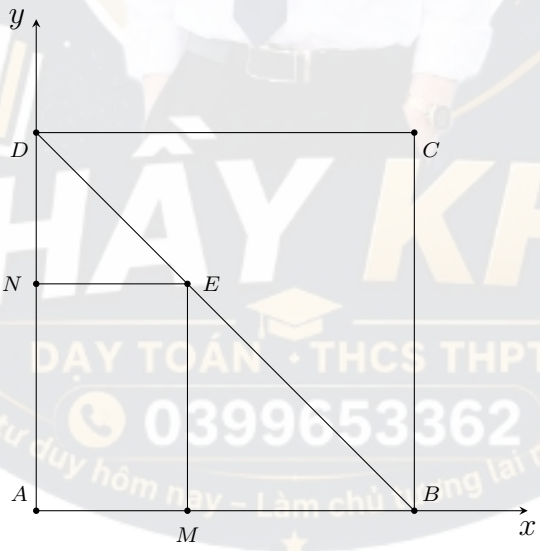
x	0		$\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2000\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 dây chuyền sản xuất để chi phí thấp nhất.

Bài 8. Bác An muốn xây một chiếc bể bơi cho trẻ em trong mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có diện tích 144 m^2. Biết bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có hai đỉnh đối diện của đáy là A và E, với E thuộc đường chéo BD; độ sâu của bể bơi không đổi bằng 1,5 m (tham khảo hình vẽ). Chi phí lát gạch cho nền bể là 1 000 000 VNĐ/m^2 và chi phí lát gạch cho thành bể là 500 000 VNĐ/m^2. Hỏi khi diện tích đáy bể đạt giá trị lớn nhất thì chi phí phải bỏ ra để lát gạch cho nền và thành bể bơi này là bao nhiêu triệu đồng?



Hướng dẫn giải.



Diện tích mảnh vườn hình vuông $ABCD$ là 144 m^2 nên $AB = 12$ m.
Chọn hệ trục như hình vẽ.
Ta có $A(0;0)$, $B(12;0)$, $D(0;12)$, $C(12;12)$.
Khi đó đường chéo BD có phương trình $x + y = 12$.
Gọi $E(x; 12-x)$ với $0 < x < 12$ là một điểm thuộc BD.
Đáy bể bơi là hình chữ nhật $AEMN$ có hai cạnh song song với các trục tọa độ nên $AM = x$, $AN = 12 - x$.
Diện tích đáy bể là $S(x) = AM \cdot AN = x(12-x) = 12x - x^2$.
Ta có $S(x) = -x^2 + 12x$ là tam thức bậc hai đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{12}{2} = 6$.

Suy ra $S_{\max} = 6 \cdot 6 = 36$ (m^2).
Vậy khi diện tích đáy bể lớn nhất thì đáy bể là hình vuông cạnh 6 m.
Độ sâu của bể là $h = 1{,}5$ m.
Chi phí lát nền bể

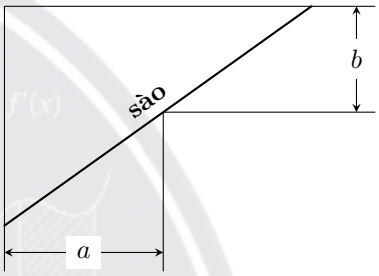
$$S_{\text{nền}} = 36 \text{ m}^2, \qquad C_{\text{nền}} = 36 \cdot 1\,000\,000 = 36\,000\,000 \text{ (VNĐ)}.$$

Chi phí lát thành bể
Chu vi đáy $P = 4 \cdot 6 = 24$ m.
Diện tích thành bể là $S_{\text{thành}} = P \cdot h = 24 \cdot 1{,}5 = 36$ m^2.
Chi phí

$$C_{\text{thành}} = 36 \cdot 500\,000 = 18\,000\,000 \text{ (VNĐ)}.$$

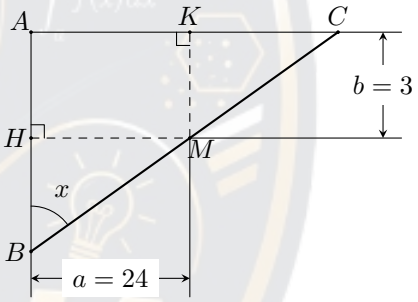
Tổng chi phí là $C = 36\,000\,000 + 18\,000\,000 = 54\,000\,000$ (VNĐ)$= 54$ triệu đồng.

Bài 9. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi que sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Hướng dẫn giải.

Bài 9. Gọi B, C là hai đầu thanh sào chạm vào cạnh hành lang, M là điểm góc trong.
Độ dài sào là $L = BM + MC$.
Kẻ $MH \perp AB$ tại H ($MH = a = 24$) và $MK \perp AC$ tại K ($MK = b = 3$).
Đặt $\widehat{MBH} = x$ với $x \in (0^\circ; 90^\circ)$.



Trong $\triangle BHM$ vuông tại H, ta có $BM = \dfrac{MH}{\sin x} = \dfrac{24}{\sin x}$.
Vì $MK // BH \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{MBH} = x$ (đồng vị).
Trong $\triangle MKC$ vuông tại K, ta có $MC = \dfrac{MK}{\cos x} = \dfrac{3}{\cos x}$.
Độ dài thanh sào là $L(x) = \dfrac{24}{\sin x} + \dfrac{3}{\cos x}$.
Đạo hàm theo biến x là $L'(x) = -\dfrac{24\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{3\sin x}{\cos^2 x}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & L'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sin^3(x) = 24\cos^3(x) \\ \Leftrightarrow\ & \tan^3(x) = 8 \\ \Leftrightarrow\ & \tan(x) = 2. \end{aligned}$$

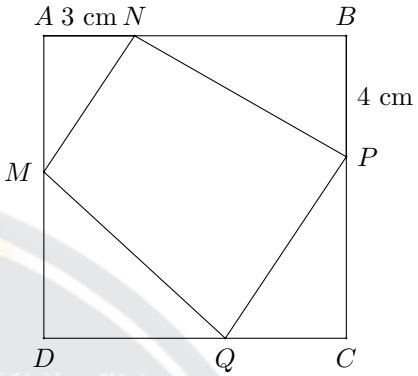
Khi $\tan(x) = 2$, ta có $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Giá trị nhỏ nhất của L là

$$L_{min} = \frac{24}{\frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 15\sqrt{5} \approx 33{,}5.$$

Vậy độ dài tối thiểu của thanh sào là 33,5.

Bài 10. Một tấm bia hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 cm. Bạn An muốn tạo thành 1 hình thang $MNPQ$ $(MN//PQ)$ biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AD, AB, BC, CD như hình minh hoạ sao cho đoạn $AN = 3$ cm, $BP = 4$ cm. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ nhỏ nhất bạn An có thể tạo được (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).



Hướng dẫn giải. Đặt hệ trục toạ độ với $A(0;10)$, $B(10;10)$, $C(10;0)$, $D(0;0)$.

Khi đó $N(3;10)$, $P(10;6)$, đặt $M(0;m)$ với $0 \le m \le 10$ và $Q(q;0)$ với $0 \le q \le 10$.

Điều kiện $MN//PQ$ cho $\frac{10-m}{3} = \frac{-6}{q-10}$ nên $(10-m)(q-10) = -18$, suy ra $q = 10 - \frac{18}{10-m}$.

Do $q \ge 0$ nên $m \le 8{,}2$.

Diện tích tứ giác $MNPQ$ là

$$S(m) = S_{ABCD} - (S_{AMN} + S_{BNP} + S_{CPQ} + S_{DMQ}) = \frac{7m^2 - 194m + 1312}{2(10-m)} \text{ với } 0 \le m \le 8{,}2.$$

Ta có $S'(m) = 0 \Leftrightarrow 7m^2 - 140m + 628 = 0 \Rightarrow m = \frac{70 - 6\sqrt{14}}{7}$.

Ta có $S(0) = 65{,}6$, $S\left(\frac{70-6\sqrt{14}}{7}\right) \approx 49{,}4$, $S(8{,}2) = 53{,}3$.

Khi đó $S_{\min} \approx 49{,}4$.

Bài 11. Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B. Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là $L_A(x) = -x^2 + 12x$. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là $L_B(y) = -y^2 + 20y$. Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

Hướng dẫn giải. Số vốn còn lại để đầu tư vào hai dự án A và B là $20 - 4 = 16$ (tỷ đồng).

Gọi x (tỷ đồng) là số vốn đầu tư vào dự án A.

Khi đó, số vốn đầu tư vào dự án B là $16 - x$ (tỷ đồng).

Điều kiện $0 \le x \le 16$.

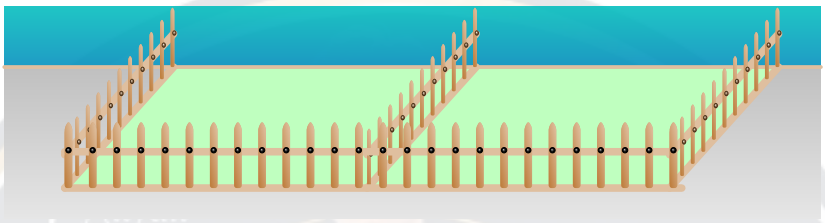
Tổng lợi nhuận kỳ vọng của tập đoàn là:

$$\begin{aligned} L(x) &= L_A(x) + L_B(16-x) \\ &= (-x^2 + 12x) + [-(16-x)^2 + 20(16-x)] \\ &= -x^2 + 12x - (256 - 32x + x^2) + 320 - 20x \\ &= -2x^2 + 24x + 64. \end{aligned}$$

Ta có $L'(x) = -4x + 24$.

Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \in [0; 16]$.
Mà $L(0) = 64$, $L(16) = -64$, $L(6) = 136$.
Khi đó lợi nhuận lớn nhất là 136 tỷ đồng khi $x = 6$.
Vậy tập đoàn nên phân bổ cho dự án A số vốn là 6 tỷ đồng.

Bài 12. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hướng dẫn giải. Gọi x (m) là chiều dài của mặt hàng rào song song với bờ sông.
Chi phí làm mặt hàng rào song song với bờ sông là $60\,000x$.
Chi phí làm ba mặt hàng rào song song với nhau là $15\,000\,000 - 60\,000x$.
Chiều dài của một mặt hàng rào song song với nhau là $\dfrac{15\,000\,000 - 60000x}{3 \cdot 50\,000} = \dfrac{-2x + 500}{5}$.
Diện tích của khu đất là $S(x) = x\left(\dfrac{-2x + 500}{5}\right) = -\dfrac{2}{5}x^2 + 100x$ $(0 < x < 250)$.
Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{2}{5}x^2 + 100x$ trên khoảng $(0; 250)$.
$f'(x) = -\dfrac{4}{5}x + 100$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 125$.
Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; 250)$

x	0		125		250
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$6\,250$	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;250)} f(x) = f(125) = 6\,250$.
Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất 6 250 m^2. Với chiều dài mặt hàng rào song song với bờ sông là 125 m và chiều dài ba mặt song song là 50 m.

Bài 13. Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Công ty cần tính toán để tối ưu hóa tốc độ vận chuyển hàng hóa của xe. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian $\dfrac{x}{60 - x}$ giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là 1,2 giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

Hướng dẫn giải. Giả sử mỗi chuyến vận chuyển x tấn hàng hóa, điều kiện $0 < x \leq 50$.

Tổng thời gian vận chuyển của mỗi chuyến là $T(x) = \dfrac{x}{60-x} + \dfrac{3}{60}x + 1{,}2 = \dfrac{-x^2+56x+1440}{20(60-x)}$ (giờ).

Khối lượng hàng hóa vận chuyển trung bình mỗi giờ là

$$m(x) = \frac{x}{T(x)} = \frac{20x\cdot(60-x)}{-x^2+56x+1440}.$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{20(4x^2-2880x+86400)}{(-x^2+56x+1440)^2}.$$

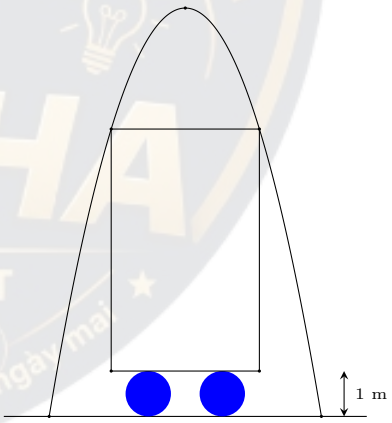
$$\Leftrightarrow m'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x \approx 31{,}4 & \text{(thoản mãn)} \\ x \approx 688{,}6 & \text{(loại).}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$31{,}4$		50
$m'(x)$		$+$	0	$-$	
$m(x)$	0	↗	$8{,}12$	↘	$5{,}75$

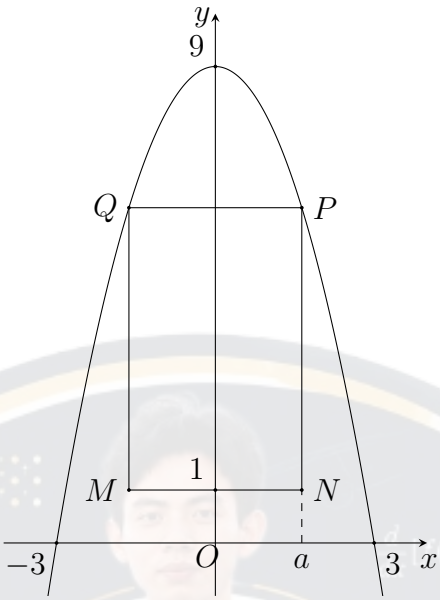
Từ bảng biến thiên để khối lượng hàng hóa vận chuyển trung bình mỗi giờ là lớn nhất thì mỗi xe nên vận chuyển 31,4 tấn hàng.

Bài 14. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

✍ *Hướng dẫn giải.*



Trong hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -x^2 + 9$. Xe chở hàng có thể đi qua được cổng nếu điểm P thuộc parabol với hoành độ điểm P bằng a, $a \in (0;3)$. Khi đó tung độ của điểm P bằng $-a^2 + 9$ và $\begin{cases} MN = 2a \\ NP = -a^2 + 9 - 1 = -a^2 + 8 \end{cases}$.

Diện tích của hình chữ nhật là $S = MN \cdot NP = 2a \cdot (-a^2 + 8) = -2a^3 + 16a$.

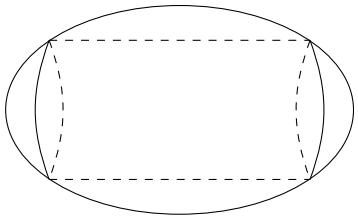
Ta có: $S' = -6a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Do $a \in (0;3)$ nên $a = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $S(a) = -2a^3 + 16a$.

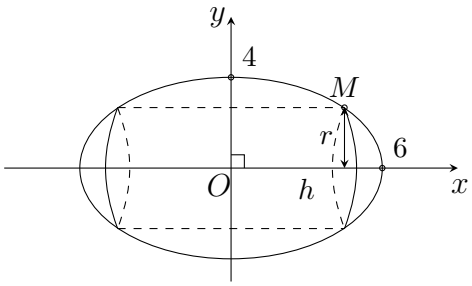
a	0		$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$		3
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$S\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	↘	

Khi đó $S_{\max} = S\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 17,4\,(m^2)$.

Bài 15. Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm. Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v... Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.



Gắn elip lên hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, elip có $2a = 12 \Rightarrow a = 6$; $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Phương trình chính tắc elip (E): $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Đặt chiều cao và bán kính đáy hình trụ nội tiếp elip là h, r thì điểm tiếp xúc $M\left(\dfrac{h}{2}; r\right)$ với $0 < h < 12$; $0 < r < 4$.

Điểm M thuộc (E): $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \dfrac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{36} + \dfrac{r^2}{16} = 1$

Hay $\dfrac{h^2}{144} + \dfrac{r^2}{16} = 1 \Rightarrow r^2 = 16\left(1 - \dfrac{h^2}{144}\right)$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi 16\left(1 - \dfrac{h^2}{144}\right) \cdot h = \pi\left(16h - \dfrac{h^3}{9}\right)$.

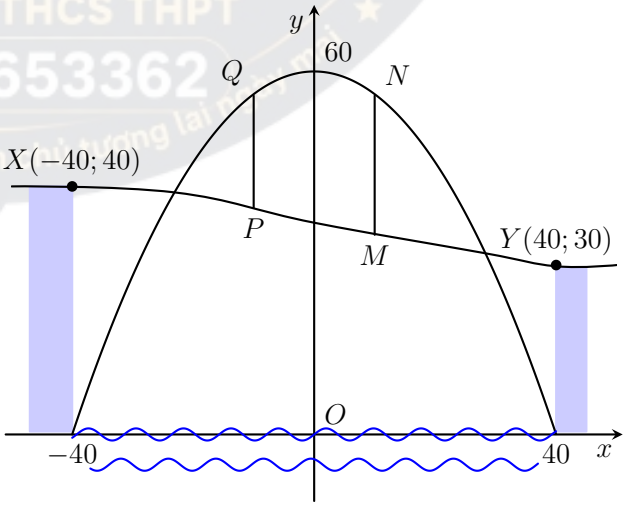
Ta có $V' = \pi\left(16 - \dfrac{h^2}{3}\right)$; $V' = 0 \Rightarrow 16 - \dfrac{h^2}{3} = 0 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \in (0; 12)$.

h	0		$4\sqrt{3}$		12
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$V(4\sqrt{3})$	↘	

Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

$$V_{\max} = V(4\sqrt{3}) = \pi\left(16 \cdot 4\sqrt{3} - \frac{(4\sqrt{3})^3}{9}\right) \approx 232\,(\text{cm}^3).$$

Bài 16. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình $y = \dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35$. Khung vòm của cầu là một Parabol có đỉnh tại $(0, 60)$ và chân tại hai điểm có hoành độ $x = -40$ và $x = 40$ trên trục hoành.



Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy;

MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Theo bài ra ta có phương trình của Parabol là $y = 60 - \dfrac{3}{80}x^2$.

Giao điểm của parabol và đồ thị đường cong $y = \dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35 = 60 - \dfrac{3}{80}x^2$.

Phương trình trên có hai nghiệm trong khoảng $(-40; 40)$ là $x_1 = -23{,}71$, $x_2 = 27{,}99$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là

$d = 60 - \dfrac{3}{80}x^2 - \left(\dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35\right)$ với $x \in (-23{,}71; 27{,}99)$

Xét $d' = -\dfrac{3}{40}x - \dfrac{3x^2}{25600} + \dfrac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}49$.

Bảng biến thiên:

x	$-23{,}71$		$2{,}49$		$27{,}99$
d'		$+$	0	$-$	
d	0	↗	$25{,}23$	↘	0

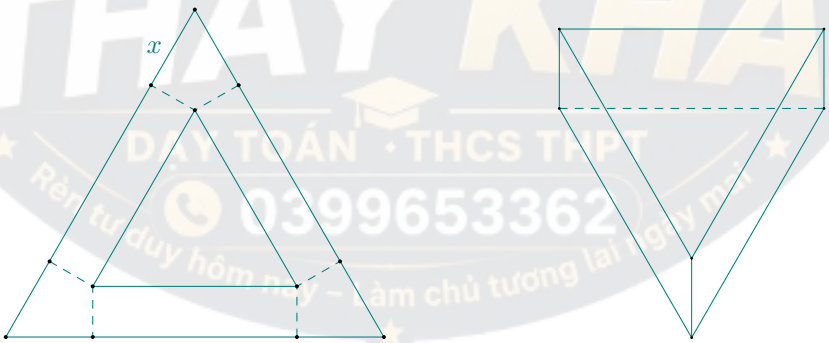
Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2{,}49$ nên $MN = d\,(2{,}49) \approx 25{,}23$.

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy nên P có hoành độ $-2,49$.

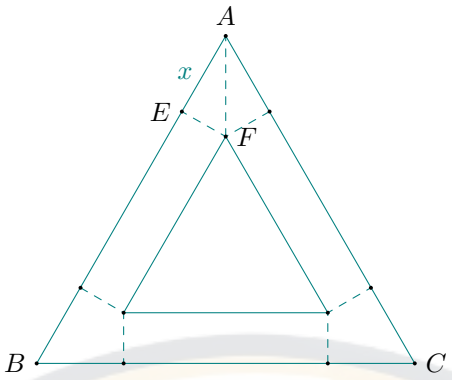
Suy ra $PQ = d(-2{,}49) \approx 24{,}3$.

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Bài 17. Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x, $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\dfrac{a^3}{b}$. Hỏi giá trị của b bằng bao nhiêu?



✍ *Hướng dẫn giải.*



Tam giác AEF vuông tại E có $EF = AE \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Ta có EF cũng là đường cao của hình lăng trụ tam giác đều được tạo thành.

Lại có, đáy của hình lăng trụ được tạo thành là tam giác đều có cạnh bằng $a - 2x$.

Suy ra $S_{\text{đáy}} = \dfrac{(a-2x)^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = \dfrac{(a-2x)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = \dfrac{(a-2x)^2 x}{4}$ $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

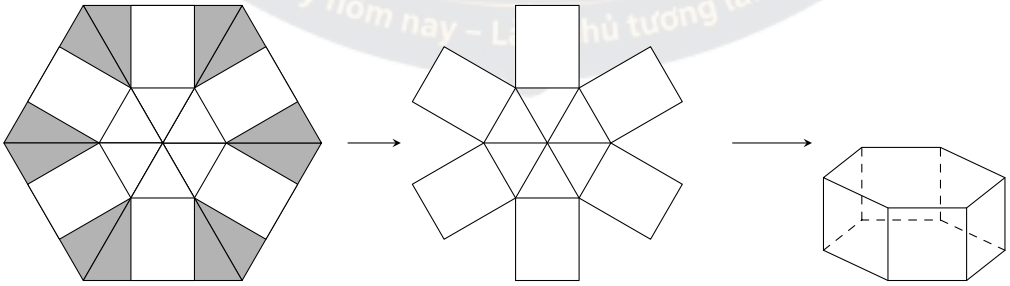
Ta có $V' = \dfrac{1}{4}(a-2x)(a-6x)$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{a}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$\dfrac{a^3}{54}$	↘	0

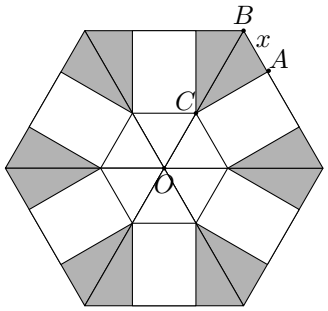
Vậy thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\dfrac{a^3}{54}$. Nên $b = 54$.

Bài 18. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



✍ *Hướng dẫn giải.*

Lăng trụ có diện tích đáy bằng



$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{OC^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (OB - BC)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(OB - \frac{x}{\cos \widehat{ABC}} \right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}(90 - 2x)^2 \\ &= 6\sqrt{3}(45 - x)^2. \end{aligned}$$

Chiều cao $h = AC = x \cdot \tan \widehat{ABC} = x\sqrt{3}$.

Thể tích lăng trụ $V = Sh = 18x(45 - x)^2 = 18\left(x^3 - 90x^2 + 45^2\right)$.

Xét hàm số $V = 18\left(x^3 - 90x^2 + 45^2\right)$ với $x > 0$.

Đạo hàm $V' = 18\left(3x^2 - 180x + 45^2\right)$.

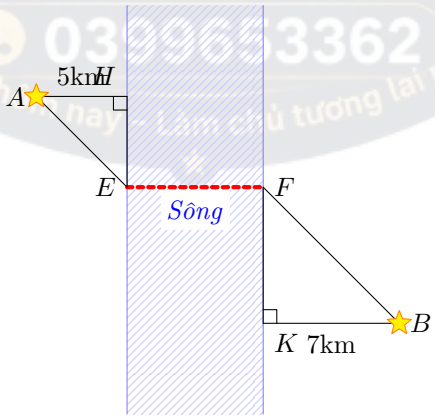
Khi đó $V' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \Rightarrow y = 243\,000 \\ x = 45 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		15		45
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	0	↗	$243\,000$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận $x = 15$.

Bài 19. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (Kết quả làm tròn đến km)



Hướng dẫn giải. Đặt $HE = x$ và $FK = y$ $(x, y > 0)$. Theo giả thiết $HE + KF = 24 \Rightarrow x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$.

Áp dụng định lý Pytago trong các tam giác vuông AHE và BKF:

$AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = \sqrt{25 + x^2}$
$BF = \sqrt{BK^2 + FK^2} = \sqrt{49 + y^2} = \sqrt{49 + (24 - x)^2}$
Vì độ dài cầu EF không đổi, quãng đường $AE + EF + FB$ ngắn nhất khi $AE + BF$ ngắn nhất.
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(24 - x)^2 + 49}$ trên khoảng $(0; 24)$.
Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \dfrac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 49}}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \dfrac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 49}} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2 + 25} = \dfrac{(24 - x)^2}{(24 - x)^2 + 49}$
$\Leftrightarrow 49x^2 = 25(24 - x)^2 \Leftrightarrow 7x = 5(24 - x) \Leftrightarrow 12x = 120 \Leftrightarrow x = 10.$
Khi $x = 10$ thì $y = 14$.
Khoảng cách từ cây cầu đến thành phố B là độ dài đoạn BF:
$BF = \sqrt{49 + 14^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \approx 15,65$ km.
Làm tròn đến hàng đơn vị ta được 16km.

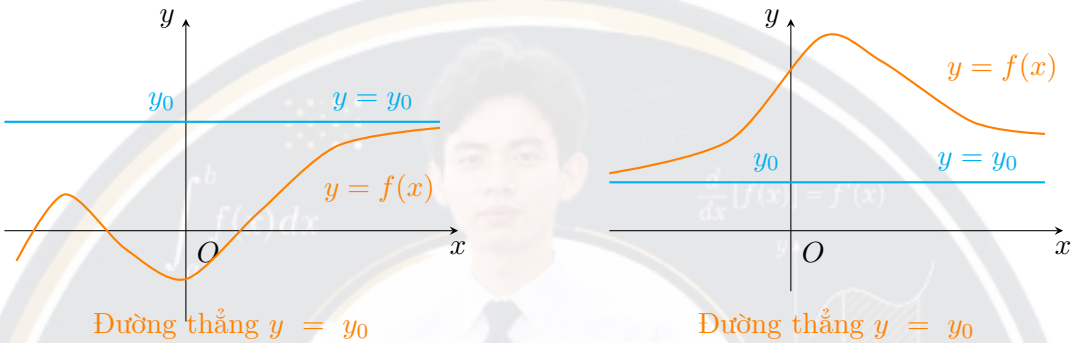
THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

§3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một ***đường tiệm cận ngang*** (hay ***tiệm cận ngang***) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 2.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 1.20

Ví dụ 1

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Ví dụ 2

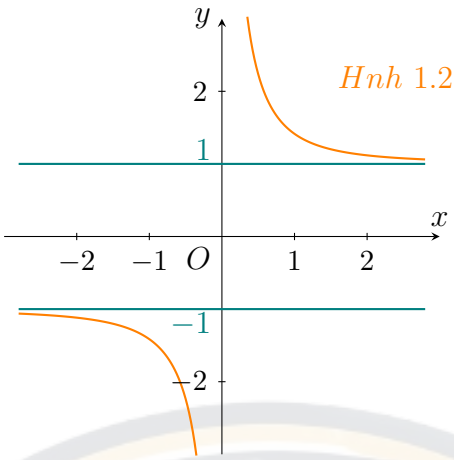
Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = -1.$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.



Hình 1.21

1 Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

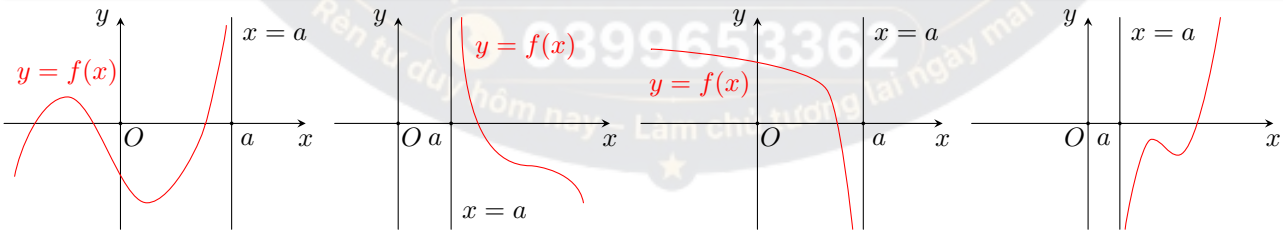
. . . . . .

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$



Hình 1

Ví dụ 3

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$.

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{3-x}{x+2} = +\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Ví dụ 4

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$.

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

2 Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$.

....

....

....

....

....

3 Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100-p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \le p < 100.$$

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

....

....

....

....

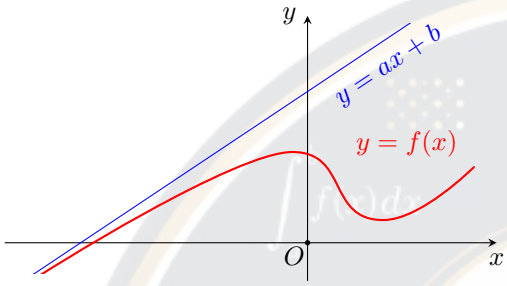
....

III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

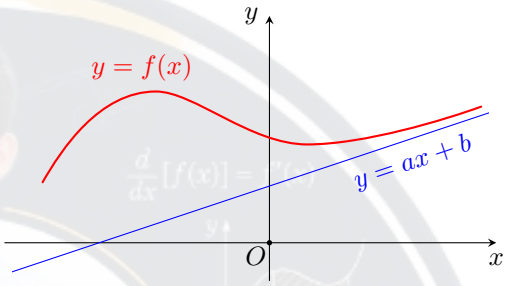
Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới:



a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$



a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

NHẬN XÉT. Các bước tìm TCX y = ax + b: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

1. Tính $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$.
2. Tính $a = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$.

Ví dụ 5

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Lời giải. Ta có:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

4. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{1 - x}$.

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

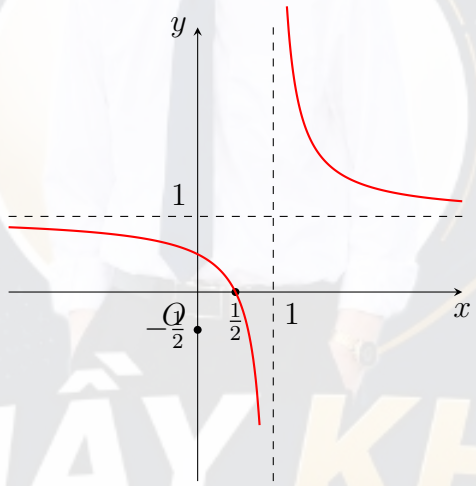
Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$
			-4				

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

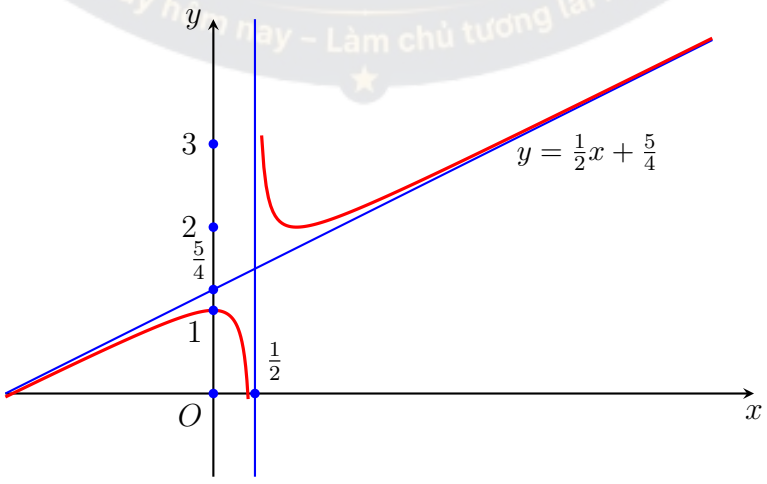
Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ có đồ thị như sau:



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

Ⓐ $x=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $y=2x-1$. Ⓒ $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $x=1$.

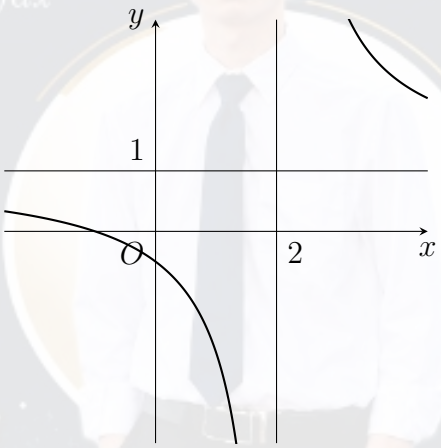
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=3$ và $x=-3$.
Ⓑ Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
Ⓒ Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
Ⓓ Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=3$ và $y=-3$.

Câu 5. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{5x-16}$?

Ⓐ $y=\dfrac{1}{5}$. Ⓑ $x=\dfrac{1}{5}$. Ⓒ $y=\dfrac{16}{5}$. Ⓓ $x=\dfrac{16}{5}$.

Câu 6. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là:

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=1$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

Ⓐ $y=x^2$. Ⓑ $y=x^3-3x+4$.
Ⓒ $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên với các giới hạn sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	2
		$-\infty$			

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.
Ⓑ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
Ⓒ Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$.

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

Ⓐ $y = 3$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $y = 2$.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x^2 - x + 1}{3x + 2}$ là đường thẳng

Ⓐ $x = \dfrac{2}{3}$. Ⓑ $x = \dfrac{4}{3}$. Ⓒ $x = -\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $x = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 11. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ là

Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $y = -2$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $x = -1$.

B

Câu 12. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{2x-2}$ là

Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

A

Câu 13. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x+1}$ là

Ⓐ $y = -1$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $y = 2x - 1$. Ⓓ $y = 2x + 1$.

Câu 14. hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ là

Ⓐ $y = x$. Ⓑ $y = x - 1$. Ⓒ $y = x + 1$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	‖	↘	
		$-\infty$	‖	$+\infty$	-1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
Ⓑ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$.
Ⓒ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 1$.
Ⓓ Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x+1}$.

Ⓐ Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
Ⓑ Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x - 3$.
Ⓒ Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên .
Ⓓ Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 3$.

Câu 17. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{x^2-1}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
Ⓑ Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
Ⓒ Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
Ⓓ Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Ⓑ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Ⓒ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Ⓓ Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y	-2	↘	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ | $-\infty$	↗	2

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[2;9)$ và có $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to9^-} f(x) = -\infty$. Tìm khẳng định đúng.

Ⓐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$.
Ⓑ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
Ⓒ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
Ⓓ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

Ⓐ $y = -\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x = -\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $y = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 23. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$ là

Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $y = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng:

Ⓐ $y=x$. Ⓑ $y=x-1$. Ⓒ $y=2x-1$. Ⓓ $y=x+1$.

Câu 25. Đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax+b)=a$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax+b)=b$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)-(ax+b))=0$.

Câu 26. Cho hàm số $y=2x-1+\dfrac{1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là:

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $y=x-2$. Ⓒ $y=x-1$. Ⓓ $y=2x-1$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	3	↘	‖	↘	
		$-\infty$	‖	$+\infty$	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $y=-1$. Ⓒ $y=-2$. Ⓓ $x=-2$.

Câu 28. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 29. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-2$.

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình: $x=3$ và $x=4$.

d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{x-1}$.

a) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x-1$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

c) Đường thẳng $d: y=x-1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

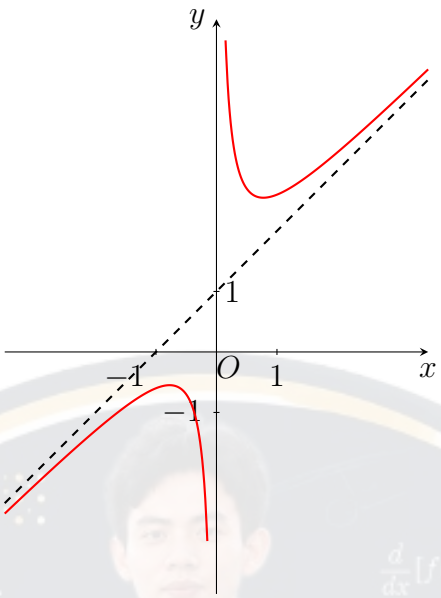
b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) Giả sử đường thẳng $(d_m): y=mx-m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời tam giác ABC vuông tại đỉnh $C(-2;0)$. Khi đó, tổng tất cả các giá trị của tham số m tìm được bằng 9.

DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



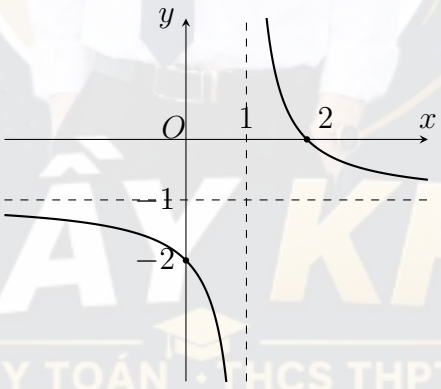
a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị là hình bên dưới



Các mệnh đề:

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -1$.

d) Tổng $a + b + c = 5$.

Bài 8. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \dfrac{1}{3}$.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l.

Bài 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Bài 11. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$ có đồ thị là (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1; 1)$ làm tâm đối xứng.

c) Đường thẳng d: $y = x - 1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Bài 12. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) Giả sử đường thẳng $y = mx - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác ABC vuông tại $C(-2; 0)$. Khi đó tổng các giá trị m tìm được bằng 9.

Bài 13. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

c) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$.

Bài 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

b) Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x - 1$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Bài 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

b) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 4$.

3) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Tính giá trị $a + b$.

Bài 2. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới. Khi đó, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận là bao nhiêu?

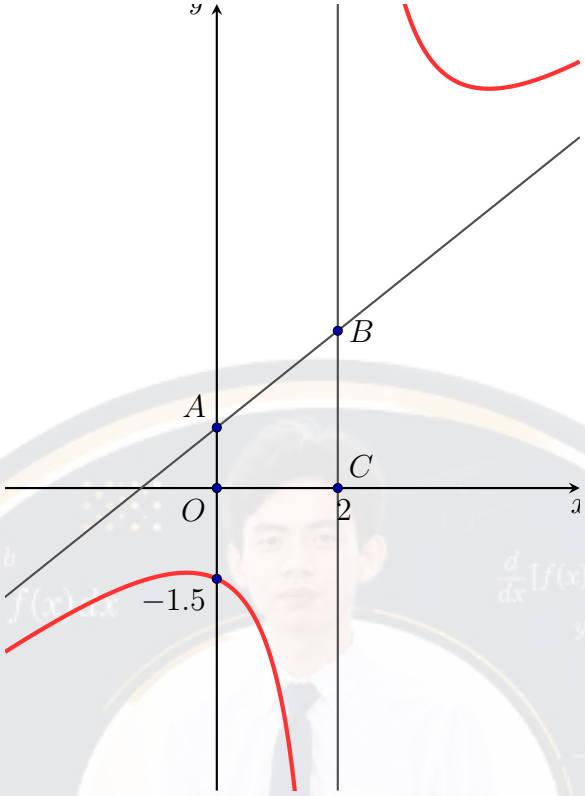
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$. Tính $a + b$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S.



Bài 5. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng (4000 đồng). $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

Bài 6. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \dfrac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 7. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \dfrac{50x}{x + 4} (x \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Bài 8. Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi tiêm t giây là $P(t)\left(\dfrac{mg}{ml}\right)$. Với $P(t)$ cho bởi công thức $P(t) = \sqrt{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05} - 0{,}3t$. Nồng độ thuốc tồn dư, tức nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn khi tiêm là bao nhiêu?

Bài 9. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tìm a.

Bài 10. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi

công thức: $S(t) = 200\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

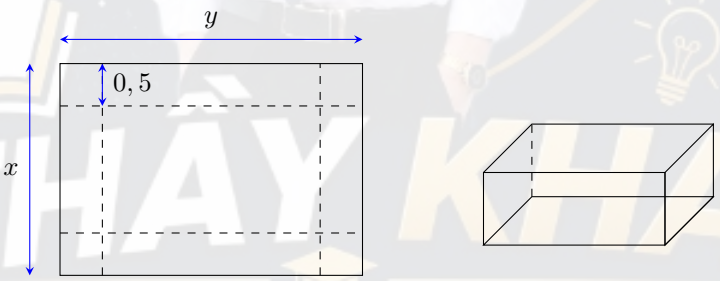
Bài 11. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 1m^3. Chiều cao của bể là 5dm, các kích thước khác là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 12. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $P(x)$ (mét) là biểu thức tính chu vi của mảnh vườn. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài 13. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24$ (m^2). Gọi $x(\text{m})$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

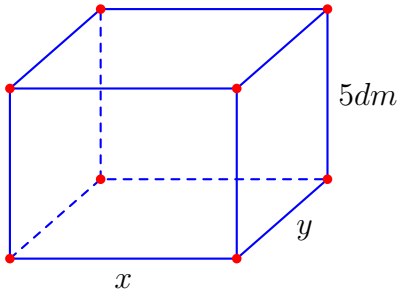
Bài 14. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

Bài 15. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m), y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Bài 16. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bài 17. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m), y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Bài 18. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số

$f(t) = \dfrac{20t+5}{t+2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 19. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Bài 20. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax+b$, coi $x \in [0;+\infty)$. Tính $T = a+2b$.

Bài 21. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0;+\infty)$.

Bài 22. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Bài 23. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$.

V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

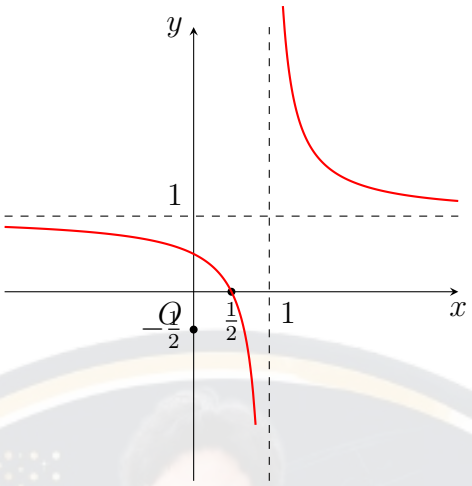
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
		-4					

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên không có tiệm cận ngang ở hướng này. Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang. Chọn D.

Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

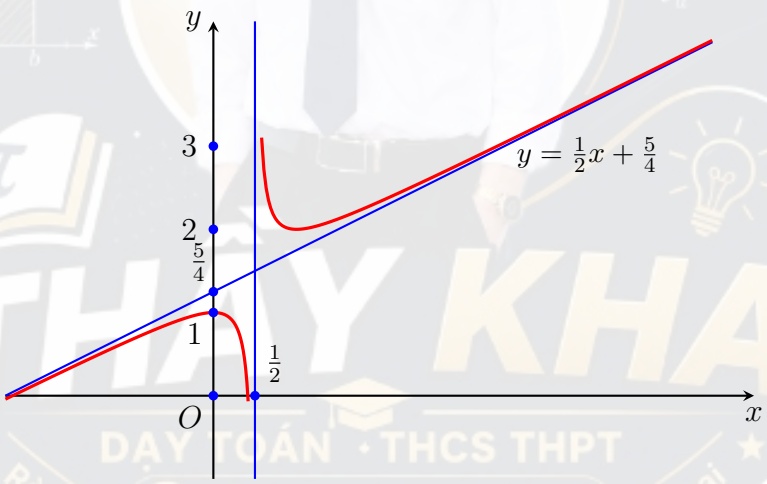


Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = 2$.

Hướng dẫn giải. Từ hình vẽ, đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng đi qua điểm có hoành độ bằng 1 trên trục Ox và song song với trục Oy. Do đó phương trình tiệm cận đứng là $x = 1$. Chọn A.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ có đồ thị như sau:



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

Ⓐ $x = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $y = 2x - 1$. Ⓒ $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$. Ⓓ $x = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị và đề bài, đường tiệm cận xiên là đường thẳng không song song với các trục tọa độ mà đồ thị hàm số tiến sát tới. Từ đồ thị ta thấy đường thẳng đó có phương trình $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$. Chọn C.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.
Ⓑ Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
Ⓒ Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Ⓓ Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=3$ và $y=-3$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$ thì đường thẳng $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Theo giả thiết, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ nên $y=3$ là một tiệm cận ngang.

Và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ nên $y=-3$ là một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=3$ và $y=-3$. Chọn đáp án D.

Câu 5. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{5x-16}$?

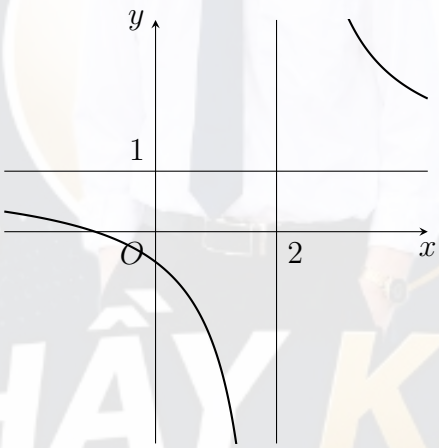
Ⓐ $y=\dfrac{1}{5}$. Ⓑ $x=\dfrac{1}{5}$. Ⓒ $y=\dfrac{16}{5}$. Ⓓ $x=\dfrac{16}{5}$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{16}{5}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{5x-16}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{5-\dfrac{16}{x}}=\dfrac{1}{5}$.

Vậy đường thẳng $y=\dfrac{1}{5}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Chọn đáp án A.

Câu 6. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là:

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy khi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$, giá trị của hàm số tiến sát về đường thẳng $y=1$. Do đó, đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=1$. Chọn đáp án C.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

Ⓐ $y=x^2$. Ⓑ $y=x^3-3x+4$.
Ⓒ $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đa thức bậc hai và ba không có tiệm cận nên loại phương án $y=x^2$ và $y=x^3-3x+4$.

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ chỉ có tiệm cận đứng và ngang nên loại phương án $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0,\ \lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có tiệm cận xiên $y=x$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên với các giới hạn sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	‖	↘	$+\infty$
		$-\infty$	‖	2	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.
Ⓑ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
Ⓒ Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y=2$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=2$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

Ⓐ $y=3$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $y=2$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}y=-\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=2$.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x^2-x+1}{3x+2}$ là đường thẳng

Ⓐ $x=\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $x=\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $x=-\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $x=-\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^-}y=-\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 11. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ là

Ⓐ $x=-2$. Ⓑ $y=-2$. Ⓒ $y=-1$. Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{3}{x}-2\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-2}{1+\dfrac{1}{x}}=-2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{3}{x}-2\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-2}{1+\dfrac{1}{x}}=-2.$

Do đó, đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y=-2$. B

Câu 12. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{2x-2}$ là

(A) $y=2$. (B) $x=2$. (C) $x=1$. (D) $y=1$.

Hướng dẫn giải. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{2}{x}}=2.$$

Vậy đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. A

Câu 13. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-2}{x+1}$ là

(A) $y=-1$. (B) $y=2$. (C) $y=2x-1$. (D) $y=2x+1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{2x^2+x-2}{x+1}=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$ nên đường tiệm cận xiên có phương trình $y=2x-1$.

Câu 14. hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ là

(A) $y=x$. (B) $y=x-1$. (C) $y=x+1$. (D) $y=2x-1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$, ta có

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-(x+1))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$$

Vậy đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	‖	↘	-1
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.
(C) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.
(D) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = -1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}$.

(A) Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
(B) Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x - 3$.
(C) Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên .
(D) Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 1} = x - 3 + \dfrac{3}{x + 1}$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 3$.

Câu 17. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{x^2 - 1}$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
(D) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa đường tiệm cận ngang ta có

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ là một đường tiệm cận ngang.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
(B) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
(C) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
(D) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và

có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$-$		$-$		$-$		$-$		
y	-2	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\quad 2$

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, suy ra đường thẳng $y = -2$ là một tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, suy ra đường thẳng $y = 2$ là một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang. Chọn đáp án C.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[2; 9)$ và có $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to9^-} f(x) = -\infty$. Tìm khẳng định đúng.

Ⓐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$.
Ⓑ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
Ⓒ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
Ⓓ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào định nghĩa:

- Vì $\lim\limits_{x\to9^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 9$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Tập xác định của hàm số là $[2; 9)$, không chứa vô cực nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

Ⓐ $y = -\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x = -\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $y = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $x = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{x+1}{2x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{x+1}{2x-1} = -\infty$.

Vậy đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Chọn đáp án D.

Câu 23. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$ là

Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $y = -\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}=-\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Chọn đáp án B.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng:

Ⓐ $y=x$. Ⓑ $y=x-1$. Ⓒ $y=2x-1$. Ⓓ $y=x+1$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\dfrac{(x^2+2x+1)+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$.

Vậy tiệm cận xiên là đường thẳng: $y=x+1$. Chọn đáp án D.

Câu 25. Đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax+b)=a$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax+b)=b$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)-(ax+b))=0$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa đường tiệm cận xiên: Đường thẳng $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$. Chọn đáp án B.

Câu 26. Cho hàm số $y=2x-1+\dfrac{1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là:

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $y=x-2$. Ⓒ $y=x-1$. Ⓓ $y=2x-1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(2x-1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ nên đường thẳng $y=2x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Chọn đáp án D.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	3	↘	‖ $+\infty$	↘	3
		$-\infty$	‖		

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $y=-1$. Ⓒ $y=-2$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta thấy $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-2$ là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. D

Câu 28. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to (-1)^{\pm}}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to (-1)^{\pm}}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to (-1)^{\pm}}\dfrac{x-2}{x+1}=\mp\infty.$

Hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$. B

Câu 29. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)}{(x+1)\sqrt{x-1}}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=0.$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$. B

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$.

- Vì $\lim\limits_{x\to +\infty}y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}y=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Vì $\lim\limits_{x\to 3^+}y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-}y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ nên đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2. A

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-2$.

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình: $x=3$ và $x=4$.

d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Hướng dẫn giải. a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=3$, $y=4$.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-2$. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-2$. $\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình: $x=3$ và $x=4$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=3$, $y=4$.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-2$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=3$, $y=4$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{x-1}$.

a) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Hướng dẫn giải. a) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{9}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Do không tồn tại các giới hạn khi $x\to1^+$, $x\to1^-$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

c) Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{9}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = -2$ nên đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang. $\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Tập xác định $D = \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Do không tồn tại các giới hạn khi $x \to 1^+$, $x \to 1^-$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=2, y=-2$.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x-1$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn giải. a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-2x+3}{x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x-1$.

Ta có: $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1} = x-1+\dfrac{2}{x-1}$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = 0\end{cases}$ nên $\Delta: y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

d) Đường tiệm cận xiên cắt các trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

Gọi $\begin{cases}\Delta \cap Ox = A(1;0) \\ \Delta \cap Oy = B(0;-1)\end{cases}$. Lúc đó: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}|x_A| \cdot |y_B| = \dfrac{1}{2}|1| \cdot |-1| = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

c) Đường thẳng $d: y=x-1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Hướng dẫn giải. a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2}=+\infty$ nên đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

Đồ thị (C) nhận giao điểm 2 đường tiệm cận là $x=2$ và $y=1$ làm tâm đối xứng. Dẫn đến $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C).

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

c) Độ dài giao điểm của d và (C) bằng $4\sqrt{5}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+2}{x-2}=x-1 \quad (x\neq 2)\Leftrightarrow x+2=(x-1)(x-2)\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\Rightarrow y=-1 \\ x=4\Rightarrow y=3 \end{cases}$.

Từ đó ta có giao điểm $A(0;-1), B(4;3)$. Độ dài $AB=\sqrt{(4-0)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

d) Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất bằng 4.

Ta có $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;1+\dfrac{4}{x_0-2}\right)$.

Khoảng cách đến tiệm cận đứng: $d_1=|x_0-2|$.

Khoảng cách đến tiệm cận ngang: $d_2=|y_0-1|=\left|\dfrac{4}{x_0-2}\right|$.

Áp dụng BĐT Cô-si: $d_1+d_2=|x_0-2|+\dfrac{4}{|x_0-2|}\geq 2\sqrt{|x_0-2|\cdot\dfrac{4}{|x_0-2|}}=4$.

Dấu "=" xảy ra khi $|x_0-2|^2=4\Leftrightarrow x_0=4$ hoặc $x_0=0$.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) Giả sử đường thẳng $(d_m): y = mx - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời tam giác ABC vuông tại đỉnh $C(-2;0)$. Khi đó, tổng tất cả các giá trị của tham số m tìm được bằng 9.

Hướng dẫn giải. a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Ta có $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = x + 3 + \dfrac{2}{x - 1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [y - (x + 3)] = 0$ nên $y = x + 3$ là tiệm cận xiên.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

$y = x + 3 + \dfrac{2}{x - 1}$ nguyên khi $(x - 1)$ là ước của 2.

Ta có $x - 1 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow x \in \{2, 0, 3, -1\}$.

Tương ứng ta có 4 điểm: $(2;7), (0;1), (3;7), (-1;1)$.

$\Rightarrow$ **Chọn ĐÚNG.**

d) Tổng các giá trị của m bằng 9.

Phương trình hoành độ giao điểm: $mx - m = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$.

Điều kiện có 2 nghiệm phân biệt khác 1: $m > -1$ và $m \neq 1$.

Tam giác ABC vuông tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(x_2 + 2) + m^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$.

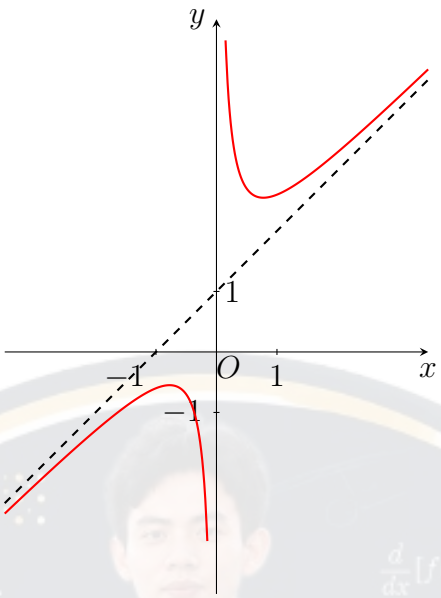
Thay định lý Vi-et ta được phương trình: $-2m^2 + 9m + 1 = 0$.

Tổng các giá trị $m_1 + m_2 = \dfrac{9}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn SAI.**

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

Hướng dẫn giải.

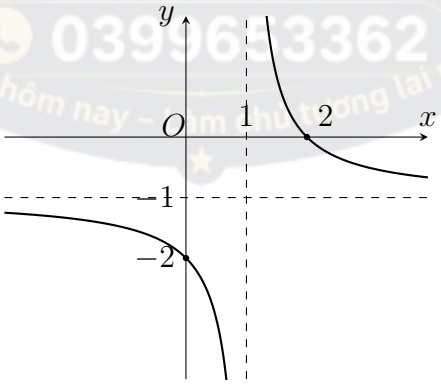
a) Sai. Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 0$.

b) Sai. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

c) Đúng. Vì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ và $(-1; 0)$ nên tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Sai.

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị là hình bên dưới



Các mệnh đề:

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.

d) Tổng $a+b+c=5$.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn SAI.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Chọn ĐÚNG.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.

Chọn ĐÚNG.

d) Tổng $a+b+c=5$.

Vì hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-1$ nên ta suy ra hàm số có dạng: $y=\dfrac{-x+b}{x-1}$

Hàm số đi qua điểm $(2;0)$ nên thay $x=2, y=0$ vào $y=\dfrac{-x+b}{x-1}$, ta được:

$\dfrac{-2+b}{2-1}=0\Leftrightarrow b=2$

Vậy $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$

Suy ra $a+b+c=(-1)+2+1=2$

Chọn SAI.

Bài 8. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\geq 0$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=5$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{3}$.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}=\dfrac{45t^2+5-15t}{9t^2+1}=\dfrac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}$

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{45-\dfrac{15}{t}+\dfrac{5}{t^2}}{9+\dfrac{1}{t^2}}=\frac{45-0+0}{9+0}=5$$

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=5$ và không có tiệm cận xiên. Chọn SAI.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=5$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=5 \Rightarrow y=5$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn ĐÚNG.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{t\to\frac{1}{3}} y(t)=\lim_{t\to\frac{1}{3}}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\frac{45\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-15\cdot\frac{1}{3}+5}{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn SAI.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l. Ta nhận thấy $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=5$ điều này chứng tỏ rằng khi thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l. Chọn ĐÚNG.

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.

Hướng dẫn giải. a) Hàm số có hai tiệm cận.

Ta có $y=x-4+\dfrac{10}{x+2}$. $\lim\limits_{x\to-2} y=\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x+2}=0$ nên $y=x-4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Chọn ĐÚNG.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$. Giao điểm của hai tiệm cận thỏa mãn: $\begin{cases}x=-2\\y=x-4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}\Rightarrow I(-2;-6)$.

Chọn ĐÚNG.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$. Chọn SAI.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.

Ta có tiệm cận xiên: $\Delta: y=x-4$, thay $M(0;-4)$ vào Δ: $0-4=-4$.

Nên M nằm trên tiệm cận xiên. Chọn ĐÚNG.

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x-1$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn giải. a) Đúng. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

b) Sai. Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

c) Đúng. Ta có $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}$. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ nên đường thẳng $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

d) Sai. Tiệm cận xiên là $\Delta\colon y=x-1$. Giao điểm với Ox là $A(1;0)$; giao điểm với Oy là $B(0;-1)$.

Diện tích $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot|1|\cdot|-1|=\dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

b) Đồ thị (C) nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

c) Đường thẳng $d\colon y=x-1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Hướng dẫn giải. a) Đúng. Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=2$.

b) Sai. Đồ thị nhận giao điểm 2 đường tiệm cận là $x=2$ và $y=1$ làm tâm đối xứng, tức là $I(2;1)$.

c) Sai. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+2}{x-2}=x-1\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-1\\x=4\Rightarrow y=3.\end{array}\right.$

Ta có $A(0;-1)$, $B(4;3)$, suy ra $AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

d) Đúng. Với $M\left(x_0;1+\dfrac{4}{x_0-2}\right)\in(C)$, tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận là $d=|x_0-2|+\dfrac{4}{|x_0-2|}\geq 2\sqrt{4}=4$.

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

b) Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) Giả sử đường thẳng $y = mx - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác ABC vuông tại $C(-2;0)$. Khi đó tổng các giá trị m tìm được bằng 9.

Hướng dẫn giải. a) Đúng. Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Sai. Ta có $y = x + 3 + \dfrac{2}{x-1}$, suy ra tiệm cận xiên là $y = x + 3$.

c) Đúng. $M(x;y) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x-1)$ là ước của $2 \Rightarrow x - 1 \in \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow 4$ điểm.

d) Sai. Phương trình hoành độ giao điểm dẫn đến phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$. Sử dụng điều kiện vuông góc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, ta tìm được tổng các giá trị m bằng $\dfrac{9}{2}$.

Bài 13. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

c) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$.

Hướng dẫn giải. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-6	↘ $-\infty$

a) Sai. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

b) Sai. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ (không dùng ký hiệu $\cup$).

c) Đúng. Ta có $y = -2x + \dfrac{2}{-x+1}$, suy ra tiệm cận xiên là $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$.

d) Sai. Giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$ là $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = -7$.

Bài 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

b) Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x - 1$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = x - 1 + \dfrac{9}{x+1}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4. \end{array}\right.$

a) Đúng. Vì $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$.

b) Đúng. Vì $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(x-1)]=0$.

c) Đúng. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

d) Sai. Trên khoảng $(-4;-1)$, đạo hàm $y'<0$ nên hàm số nghịch biến.

Bài 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$.

b) Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(4;+\infty)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=4$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng. $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$.

b) Đúng. Chia đa thức ta được $y=x+1+\dfrac{4}{x-2}$.

c) Sai. Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(4;+\infty)$, nghịch biến trên $(0;2)$ và $(2;4)$.

d) Sai. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

3) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Tính giá trị $a+b$.

Hướng dẫn giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3-0}{1+0}=3\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $a+b=3+(-1)=2$.

Bài 2. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới. Khi đó, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận là bao nhiêu?

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Hướng dẫn giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-2$ và đường

tiệm cận ngang là $y = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận bao gồm một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải.

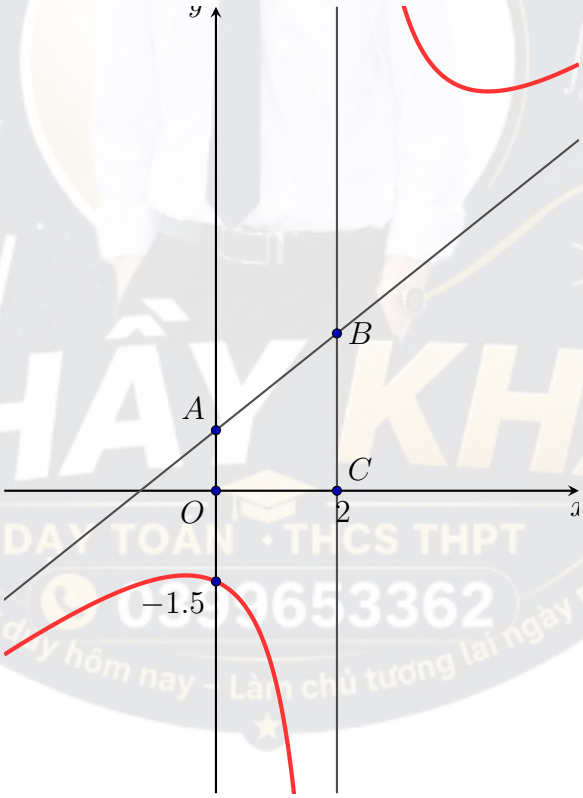
Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} = x - 2 + \dfrac{1}{x - 3}$.

Do đó $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x - 3} \right) = 0$.

Suy ra đường thẳng $\Delta : y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1.$$

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S.



Hướng dẫn giải.

Ta thấy $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $2^2 + 3 \neq 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $d_1 : x = 2$.

Ta có $y = x + 2 + \dfrac{7}{x - 2}$ nên $d_2 : y = x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C).

Đường thẳng $d_2 : y = x + 2$ cắt trục Oy tại $A(0; 2)$.

Đường thẳng $d_1 : x = 2$ cắt $d_2 : y = x + 2$ tại $B(2; 4)$.

Đường thẳng $d_1 : x = 2$ cắt trục Ox tại $C(2;0)$.

Do đó hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông $OABC$.

$$\Rightarrow S_{OABC} = \frac{(OA+BC)\cdot OC}{2} = \frac{(2+4)\cdot 2}{2} = 6.$$

Bài 5. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng (4000 đồng). $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, ta có:

$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 - 2000x + 10^8 + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$ (đồng).

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{x^2 + 2000x + 10^8}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x\to+\infty}[M(x) - (x+2000)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + 2000 + \frac{10^8}{x} - (x+2000)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{10^8}{x} = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $M(x) = x + 2000 + \dfrac{10^8}{x}$ có 1 tiệm cận xiên là $y = x + 2000$.

Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = x + 2000$.

Suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2000. \end{cases}$

Vậy $P = 68a + 3b + 800 = 68\cdot 1 + 3\cdot 2000 + 800 = 6868$.

Bài 6. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \dfrac{20t+5}{t+2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20t+5}{t+2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20+\frac{5}{t}}{1+\frac{2}{t}} = 20.$

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Bài 7. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \dfrac{50x}{x+4}(x \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x}{x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50}{1+\frac{4}{x}} = 50$. Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Bài 8. Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi tiêm t giây là $P(t)\left(\dfrac{mg}{ml}\right)$. Với

$P(t)$ cho bởi công thức $P(t) = \sqrt{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05} - 0{,}3t$. Nồng độ thuốc tồn dư, tức nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn khi tiêm là bao nhiêu?

✍ *Hướng dẫn giải.* Do đề bài cho nồng độ thuốc trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn nên $t \to +\infty$.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} P(t) &= \lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05} - 0{,}3t\right) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05 - (0{,}3t)^2}{\sqrt{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05} + 0{,}3t} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{0{,}018t + 0{,}05}{\sqrt{0{,}09t^2 + 0{,}018t + 0{,}05} + 0{,}3t} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t\left(0{,}018 + \dfrac{0{,}05}{t}\right)}{t\left(\sqrt{0{,}09 + \dfrac{0{,}018}{t} + \dfrac{0{,}05}{t^2}} + 0{,}3\right)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{0{,}018 + \dfrac{0{,}05}{t}}{\sqrt{0{,}09 + \dfrac{0{,}018}{t} + \dfrac{0{,}05}{t^2}} + 0{,}3} = \frac{0{,}018}{\sqrt{0{,}09} + 0{,}3} = 0{,}03.
\end{aligned}$$

Vậy nồng độ thuốc tồn dư trong cơ thể bệnh nhân là $0{,}03\ \left(\dfrac{\text{mg}}{\text{ml}}\right)$.

Bài 9. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tìm a.

✍ *Hướng dẫn giải.* Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20 \cdot 15t = 300t$ (gam).

Thế tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1\,000 + 20t$ (lít).

Do đó nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \dfrac{300t}{1\,000 + 20t} = \dfrac{30t}{100 + 2t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{30t}{100 + 2t} = \dfrac{30}{2} = 15$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = 15$.

Vậy $a = 15$.

Bài 10. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} S(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{2+t}\right) = 200 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{400}{3}$. Suy ra $a = 400$, $b = 3$.

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$.

Bài 11. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 1m^3. Chiều cao của bể là 5dm, các kích thước khác là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x>0$ và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Hướng dẫn giải. Do thể tích của bể là 1m^3 nên $0{,}5xy=1\Leftrightarrow xy=2$.

Diện tích toàn phần của bể là $S(x)=xy+2\cdot 0{,}5\cdot x+2\cdot 0{,}5\cdot y=2+x+\dfrac{2}{x}$, với $(x>0)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(S(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y=x+2\Rightarrow a=1;b=2$.

Vậy $P=a^2+b^2=5$.

Bài 12. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144\ \text{m}^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $P(x)$ (mét) là biểu thức tính chu vi của mảnh vườn. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $P(x)$.

Hướng dẫn giải. Ta có độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$ nên độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là $\dfrac{144}{x}(m)$.

Vậy chu vi của mảnh vườn là $P(x)=2\left(x+\dfrac{144}{x}\right)=2x+\dfrac{72}{x}$.

- Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x+\dfrac{72}{x}\right)=+\infty$.

  Tương tự, $\lim\limits_{x\to0^-}P(x)=-\infty$.

  Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

- Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[P(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{72}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[P(x)-2x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{72}{x}=0.\end{cases}$

  Vậy đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x$.

Bài 13. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S=24$ (m^2). Gọi $x(\text{m})$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang $(x>0)$.

Ta có độ dài đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h=\dfrac{2S}{x+2x}=\dfrac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2+\left(\dfrac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x)=x+\dfrac{16}{x}+2x+\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}=3x+\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}+\dfrac{16}{x}$ (tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$).

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x+\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}+\dfrac{16}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[3+\sqrt{1+\dfrac{256}{x^4}}+\dfrac{16}{x^2}\right]=+\infty$ nên

đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 0^+} P(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left[3x^2+\sqrt{x^4+256}+16\right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

$$\lim_{x\to+\infty}(P(x)-4x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}}-x+\frac{16}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{256}{x^2\sqrt{x^2+\dfrac{256}{x^2}}+x}+\frac{16}{x^2}\right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

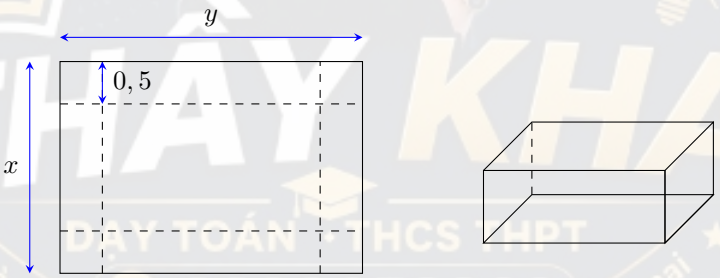
Bài 14. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 200\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{2+t}\right) = 200\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{400}{3} \Rightarrow a = 400; b = 3.$

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$.

Bài 15. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m), y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Hướng dẫn giải.

Do tấm tôn có diện tích bằng $4m^2$ nên $xy = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{x}$.

Thùng có chiều cao là $0,5m$ và các kích thước còn lại của thùng là: $x-1$ và $y-1$.

Thể tích của thùng là $V(x) = 0,5\cdot(x-1)(y-1) = \dfrac{1}{2}(x-1)\left(\dfrac{4}{x}-1\right) = \dfrac{(x-1)(4-x)}{2x}$.

Suy ra: $y = \dfrac{1}{V(x)} = \dfrac{2x}{(x-1)(4-x)}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$ đường

thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{V(x)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{V(x)}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)}=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=4$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Bài 16. Cho hàm số $f(x)=2x-\sqrt{x^2-3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Hướng dẫn giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $D=(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

Ta có:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x+\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=\frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow y=x+\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

Mặt khác:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=3.$$

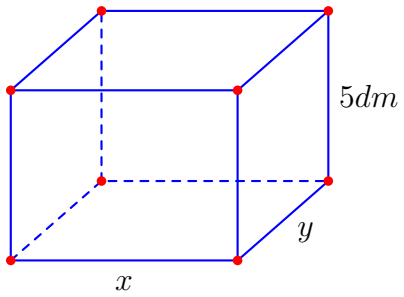
$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-3x}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2-3x}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-3x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-\sqrt{x^2-3x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=-\frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow y=3x-\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận xiên.

Bài 17. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m), y(m)$ với $x>0$ và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.



Hướng dẫn giải.

Đổi $5dm = 0,5m$.

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{x}$.

Diện tích toàn phần của bể (không nắp) là:

$$S(x) = xy + 2 \cdot 0,5 \cdot x + 2 \cdot 0,5 \cdot y = 2 + x + \frac{2}{x}, \quad (x > 0)$$

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} (S(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2$.

Từ đó ta có $a = 1; b = 2$.

Vậy $P = a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Bài 18. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \dfrac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Hướng dẫn giải.

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20t + 5}{t + 2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20 + \dfrac{5}{t}}{1 + \dfrac{2}{t}} = 20$.

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Bài 19. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} \dfrac{400x + 10}{100 - x} = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Bài 20. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$, coi $x \in [0; +\infty)$. Tính $T = a + 2b$.

Hướng dẫn giải.

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \dfrac{25}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{25}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

$\Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow T = a + 2b = 2 + 2(1) = 4$.

Bài 21. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối

trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20t$ (lít).

Khi đó $f(t) = \dfrac{500t}{6000+20t} = \dfrac{25t}{300+t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{25t}{300+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{25}{\dfrac{300}{t}+1} = 25.$$

Vậy đường thẳng $y = 25$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Bài 22. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$). Ta có đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \dfrac{2S}{x+2x} = \dfrac{48}{3x} = \dfrac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\dfrac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x) = x + \dfrac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} = 3x + \dfrac{16}{x} + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}}$ (tập xác định $D = (0;+\infty)$).

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + \dfrac{16}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[3 + \sqrt{1 + \dfrac{256}{x^4}} + \dfrac{16}{x^2}\right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to0^+} P(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left[3x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + \dfrac{16}{x}\right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy.

$$\lim_{x\to+\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\dfrac{256}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x}\right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Bài 23. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$.

Hướng dẫn giải.

Theo giả thiết, ta có:

$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$.

$M(x) = \dfrac{T(x)}{x} = x + 2000 + \dfrac{10^8}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(M(x) - (x + 2000)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10^8}{x} = 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = x + 2000$.

$\Rightarrow a = 1, b = 2000$.

Vậy $T = 25a + b = 25(1) + 2000 = 2025$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

§4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

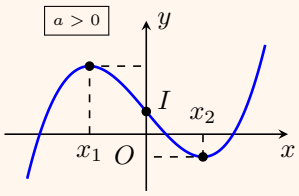
I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

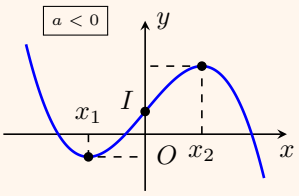
1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
   - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
   - Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
   - Tìm cực trị của hàm số.
   - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
   - Lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

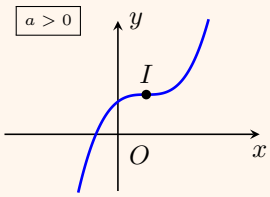
II. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

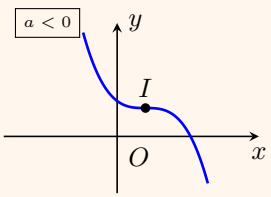
- TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



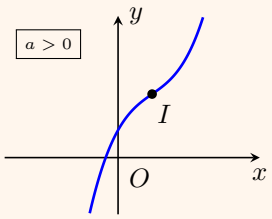


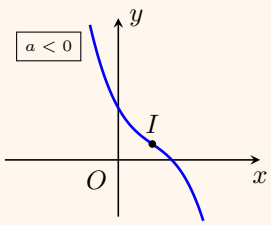
- TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.





- TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.





① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \le 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

② Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$$

④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị, nó chính là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

⑤ Đồ thị không có tiệm cận.

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải. 1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Trên khoảng $(0;2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 0$.
- Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty.$$

◈ Bảng biến thiên:

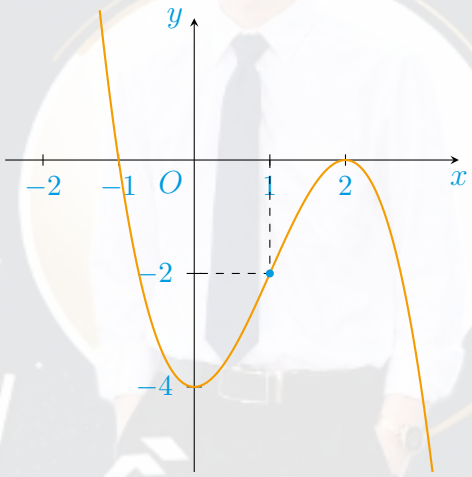
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

3. Đồ thị:

◈ Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-4)$.

◈ Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1;0)$ và $(2;0)$.

◈ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1;-2)$.



Hình 1.28

Ví dụ 2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=x^3-2x^2+2x-1$.

Lời giải. 1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

◈ Ta có: $y'=3x^2-4x+2$. Vậy $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

◈ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

◈ Hàm số không có cực trị.

◈ Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty.$$

◈ Bảng biến thiên:

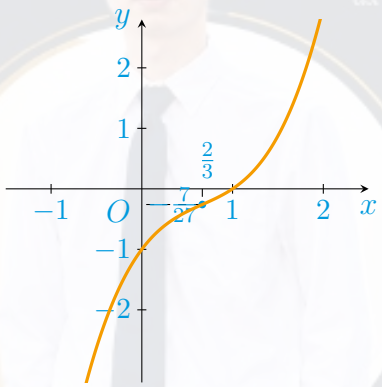
x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. Đồ thị (H.1.29):

◈ Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-1)$.

◈ Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$.
Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1;0)$.

◈ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{27}\right)$.



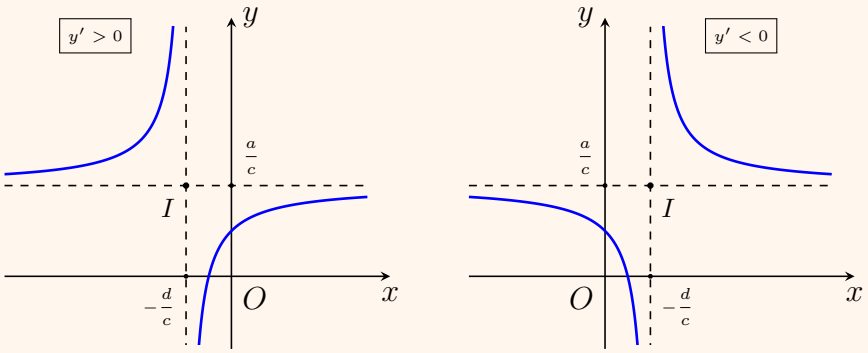
1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2-5x$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Tiên tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

III. KHẢO SÁT VÀ VẼ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

1) Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



Nhận xét.

- Tâm đối xứng là giao điểm I của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, nghĩa là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$;
- Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó.

Ví dụ 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Lời giải.

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty;$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1.$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

◈ Bảng biến thiên:

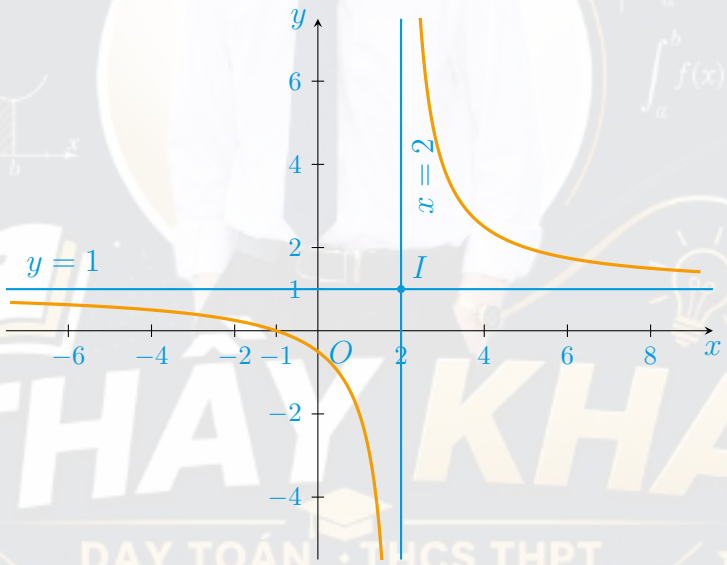
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	‖	↘	1
			$-\infty$		

3. Đồ thị (H.1.30):

◈ Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$.

◈ Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

◈ Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Hình 1.30

Đồ thị của hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

2 Một bể chứa ban đầu có 200 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 40 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hoà tan).

a) Tính thể tích nước và khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút. Từ đó tính

nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút.

b) Coi nồng độ chất khử trùng là hàm số $f(t)$ với $t \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Hãy giải thích tại sao nồng độ chất khử trùng tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

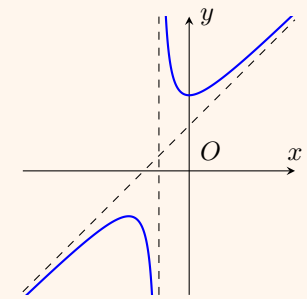
.....

.....

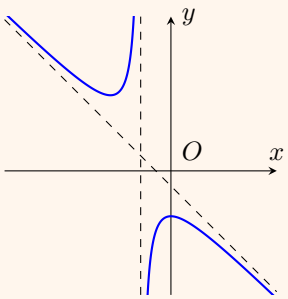
.....

2) Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

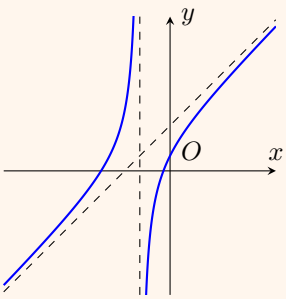
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c}{(mx+n)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



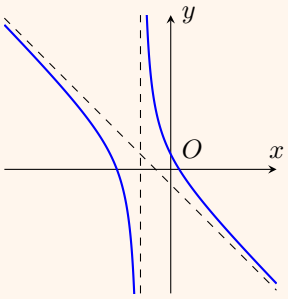
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

Ví dụ 4

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Lời giải. 1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên: Viết $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

  Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

  Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CĐ} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty$;

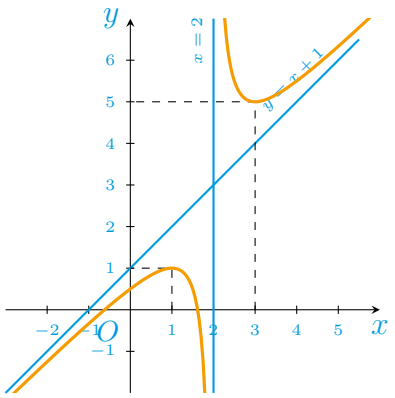
  $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty$.
- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^+} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$;

  $\lim\limits_{x\to+\infty} [y - (x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [y - (x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

  Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

◈ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$



Hình 1.31

3. Đồ thị (H.1.31):

◈ Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

◈ Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

◈ Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

3 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x-2}$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362

IV. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

1) Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

– Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

– Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.

– Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

– Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

– Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

Ví dụ 5

Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (*theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).
Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{24,5}{2\cdot(-4,9)} = 2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).
Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 6

Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \dfrac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải. Ta có: $P'(t) = \dfrac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}$, $t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+1} = 20 \\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \dfrac{15}{b+1} = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \dfrac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{25}{\dfrac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Ví dụ 7

Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải.

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14\,300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là:
$C(201) - C(200) = 1\,004\,372,625 - 990\,000 = 14\,372,625$ (nghìn đồng).

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

4 Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Bài toán tối ưu hóa đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là hàm cầu (hay hàm giá) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là

$$R(x) = x \cdot p(x)$$

và $R(x)$ được gọi là *hàm doanh thu*. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là *hàm doanh thu biên* và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

và $P(x)$ được gọi là *hàm lợi nhuận*. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

Ví dụ 8

Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo xentimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải. Đổi 1 lít $= 1\,000$ cm^3.

Gọi r (cm) là bán kính đáy của hình trụ, h (cm) là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là $1\,000$ cm^3 nên ta có: $1\,000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \dfrac{1\,000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}, r > 0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2\,000}{r^2}; S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

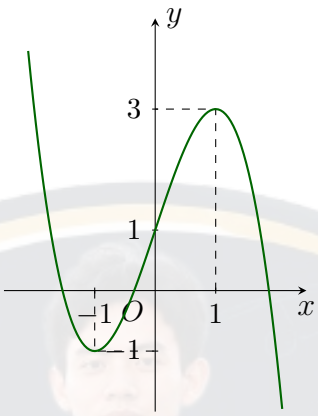
Khi đó: $h = \dfrac{1\,000}{\pi r^2} = \dfrac{1\,000}{\pi\sqrt[3]{\frac{250\,000}{\pi^2}}} = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$.

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao $h = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84$ (cm).

V. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

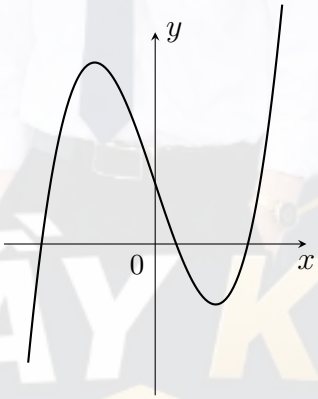
1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?



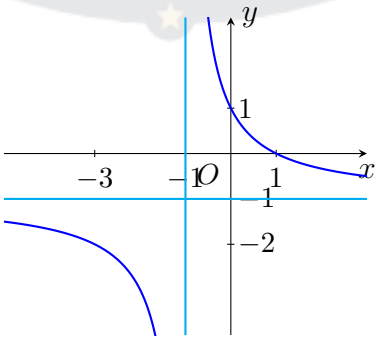
(A) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
(B) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.
(C) $y=-x^3+3x+1$.
(D) $y=x^3-3x+1$.

Câu 2. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



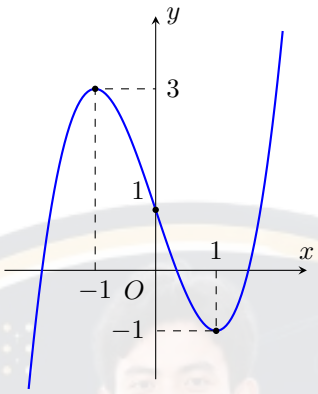
(A) $y=x^3-3x+1$.
(B) $y=-x^3+3x+1$.
(C) $y=x^4-x^2+1$.
(D) $y=-x^2+x-1$.

Câu 3. Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



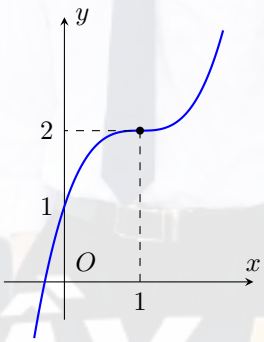
Ⓐ $y=\dfrac{-x}{x+1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.

Câu 4. Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y=x^3-3x+1$.
Ⓑ $y=x^3-3x^2+1$.
Ⓒ $y=-x^3-3x-1$.
Ⓓ $y=-x^3+3x+1$.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào?



Ⓐ $y=x^3-3x+1$.
Ⓑ $y=-x^3+3x^2+1$.
Ⓒ $y=x^3-3x^2+3x+1$.
Ⓓ $y=-x^3-3x^2-1$.

Câu 6. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$		-1

Ⓐ $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

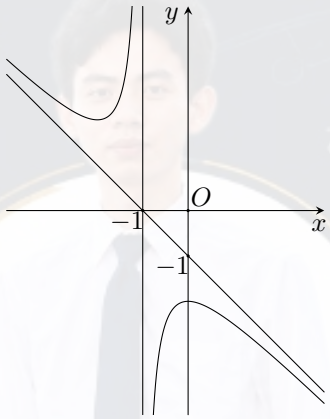
Câu 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Ⓓ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

Câu 9. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Ⓐ $y = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x - 1}{-x - 3}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x + 5}{-x + 3}$.

Ⓓ $y = \dfrac{1}{x - 3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây?

Ⓐ $y=x^3-3x^2+2$.
Ⓑ $y=-x^3+3x^2+2$.
Ⓒ $y=x^4+3x^2+2$.
Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 11. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-20	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

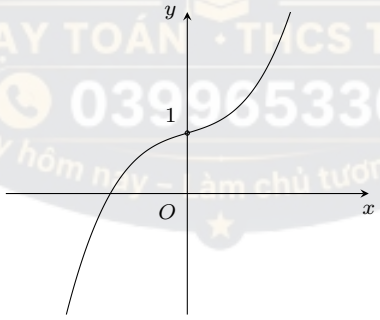
Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Câu 12. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

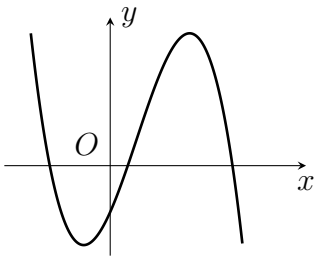
Câu 13. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{3}x+1$.
Ⓑ $y=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x+1$.
Ⓒ $y=\dfrac{1}{4}x^4+x^2+1$.
Ⓓ $y=-x^3+x^2-x+1$.

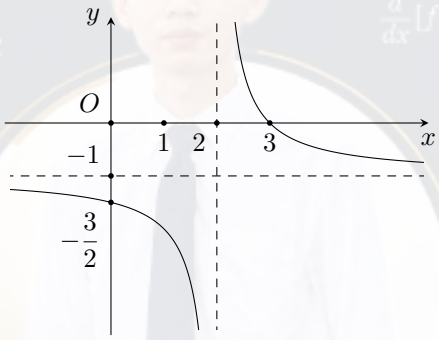
Câu 14. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây

đúng?



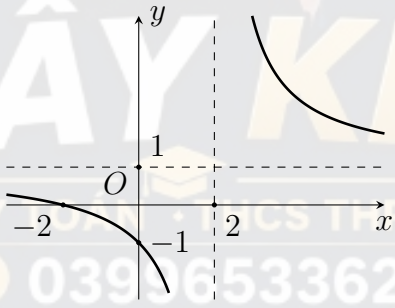
Ⓐ $a<0, b<0, c<0, d>0$.
Ⓑ $a<0, b>0, c<0, d>0$.
Ⓒ $a<0, b>0, c>0, d<0$.
Ⓓ $a<0, b<0, c>0, d<0$.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng



Ⓐ -3.
Ⓑ 5.
Ⓒ -4.
Ⓓ 3.

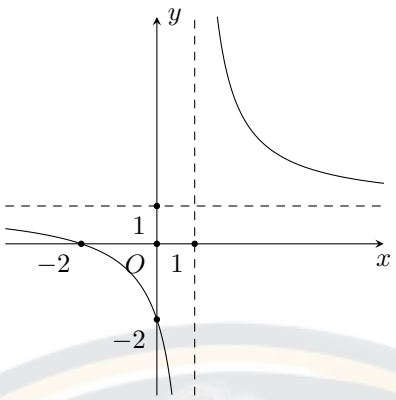
Câu 16. Hãy xác định a, b để hàm số $y=\dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?



Ⓐ $a=1, b=-2$.
Ⓑ $a=b=2$.
Ⓒ $a=-1, b=-2$.
Ⓓ $a=b=-2$.

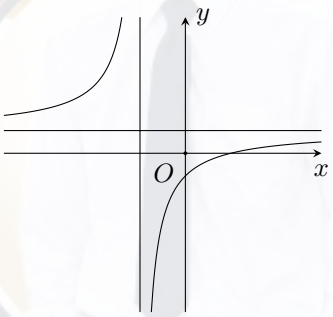
THẦY KHA
DẠY KÈM : THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?



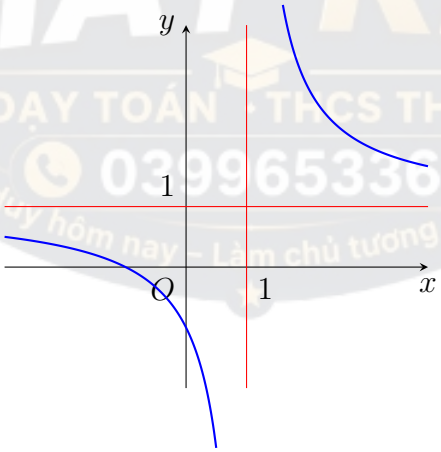
(A) $a<0, b<0$. (B) $0<b<a$. (C) $b<0<a$. (D) $a<b<0$.

Câu 18. Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ac\neq 0, ad-cb\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



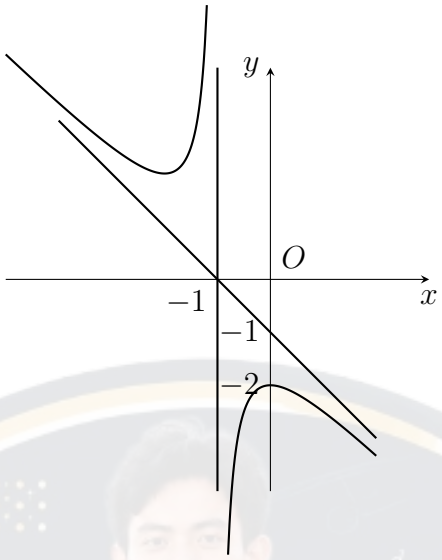
(A) $ad>0$ và $ab<0$. (B) $bd<0$ và $ab>0$.
(C) $ad<0$ và $ab<0$. (D) $ad>0$ và $bd>0$.

Câu 19. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. (B) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.
(C) $y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$. (D) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 20. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số:



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-6}{x-1}$ đi qua điểm nào trong các điểm cho dưới đây?

Ⓐ $M(2;2)$.
Ⓑ $N(2;-2)$.
Ⓒ $P(-1;3)$.
Ⓓ $Q(4;1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ $(-3;-8)$.
Ⓑ $(-3;8)$.
Ⓒ $(1;0)$.
Ⓓ $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 23. Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p=\dfrac{60}{1+0,2x}, 12>x\geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu?

Ⓐ 15 (nghìn đồng).
Ⓑ 18 (nghìn đồng).
Ⓒ 19 (nghìn đồng).
Ⓓ 20 (nghìn đồng).

Câu 24. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x chiếc bánh kem là: $C(x)=10000+20x-\dfrac{1}{4}x^2+0,001x^3$. Chi phí sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ chi phí biên là bao nhiêu?

Ⓐ 250 (nghìn đồng).
Ⓑ 450 (nghìn đồng).
Ⓒ 520 (nghìn đồng).
Ⓓ 300 (nghìn đồng).

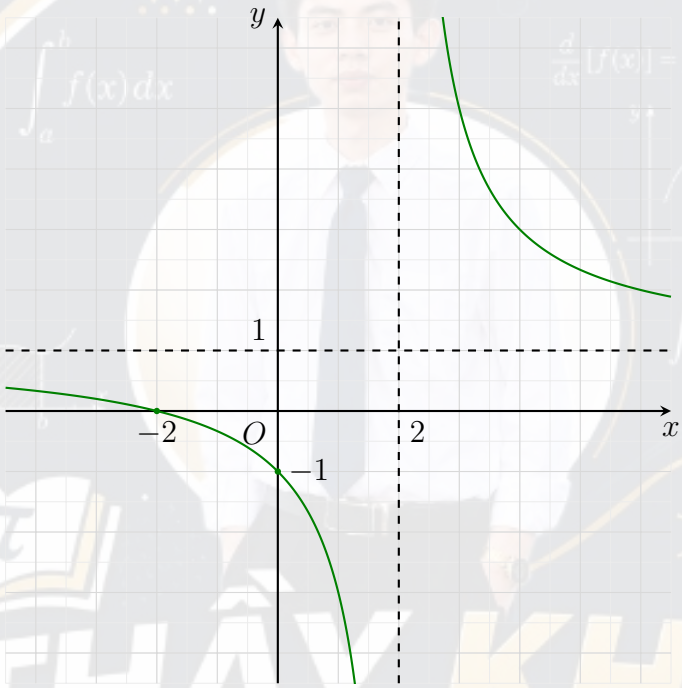
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

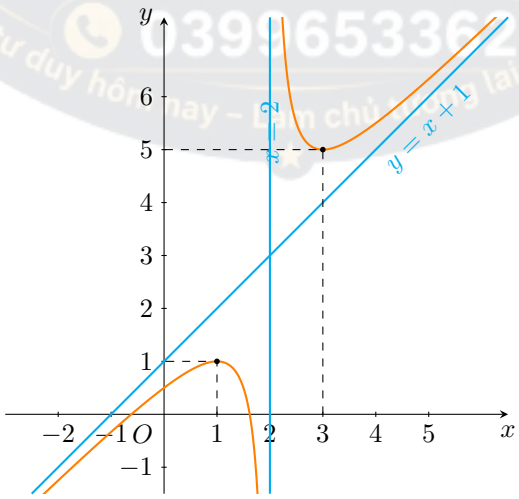
Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
Ⓒ $y = x^4 + 3x^2 + 2$.
Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 26. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.
Ⓑ $y = \dfrac{2x+4}{x-2}$.
Ⓒ $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau

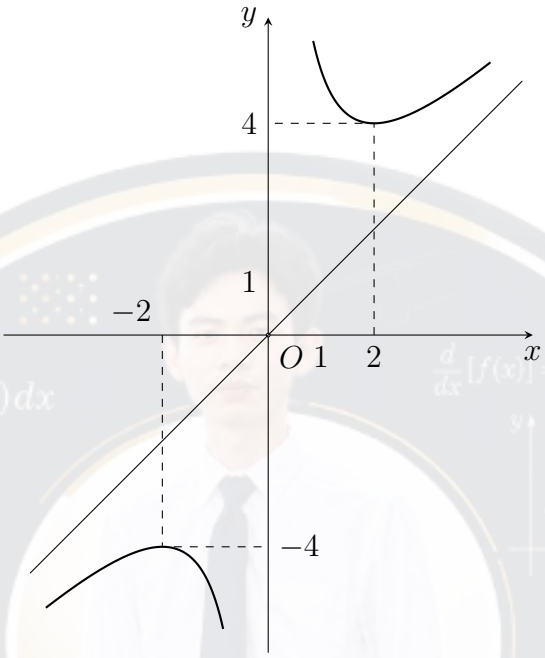


Khẳng định nào sau đây **SAI**?

» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
Ⓑ Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.
Ⓓ Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Câu 28. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

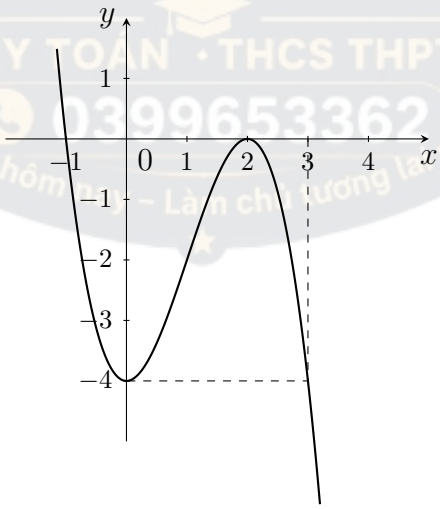


Ⓐ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.
Ⓑ $y = x^4 - 2x^2$.
Ⓒ $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.
Ⓓ $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

Ⓐ $(2;0)$.
Ⓑ $(0;2)$.
Ⓒ $(4;0)$.
Ⓓ $(0;4)$.

Câu 30. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{x-1}{x}$.
Ⓑ $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Ⓒ $y=-x^3+3x-4$. Ⓓ $y=-x^3+3x^2-4$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ và $y=2x-7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 8. Ⓓ 11.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 33. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

C

Câu 34. Cho hàm số $y=2x^3-7x^2+3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^3-5x^2+(3-m)x+2m$ (với $m\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

Ⓐ -6. Ⓑ -10. Ⓒ -8. Ⓓ -5.

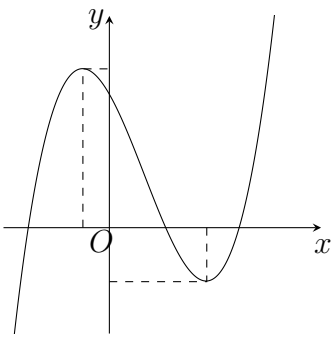
A

Câu 35. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

Ⓐ 2 250 000. Ⓑ 2 350 000. Ⓒ 2 450 000. Ⓓ 2 550 000.

A

Câu 36. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. Ⓑ $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.
Ⓒ $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. Ⓓ $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.

C

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực

của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<3$.

Ⓐ $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2} \\ m\neq 0. \end{cases}$ Ⓑ $m<1$. Ⓒ $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}<m<1$.

A

Câu 38. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi phòng thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Ⓐ 480 ngàn. Ⓑ 50 ngàn. Ⓒ 450 ngàn. Ⓓ 80 ngàn.

C

Câu 39. Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 là

Ⓐ $y+y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Ⓑ $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x+x_0)$.
Ⓒ $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Ⓓ $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x_0-x)$.

C

Câu 40. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P=12I-0{,}5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Ⓐ 72. Ⓑ 12. Ⓒ $-\dfrac{1}{192}$. Ⓓ $\dfrac{23}{2}$.

A

Câu 41. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t)=45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

Ⓐ 25. Ⓑ 30. Ⓒ 20. Ⓓ 15.

D

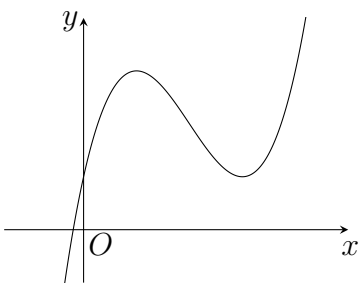
Câu 42. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Ⓐ 14. Ⓑ 13. Ⓒ 12. Ⓓ 11.

C

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$. Ⓑ $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.
Ⓒ $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$. Ⓓ $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.



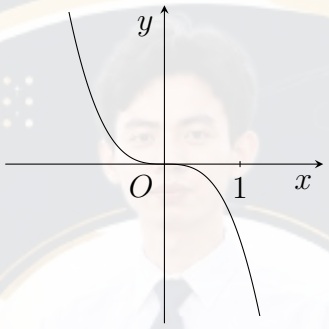
B

Câu 44. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28°C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị °C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0{,}008t^3 - 0{,}16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Ⓐ 27,832°C. Ⓑ 18,4°C. Ⓒ 26,2°C. Ⓓ 25,312°C.

B

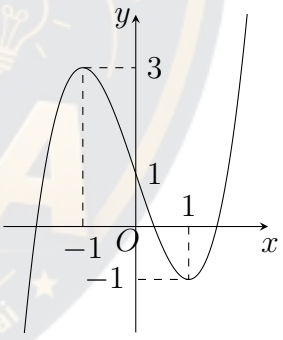
Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Ⓑ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Ⓒ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
Ⓓ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

D

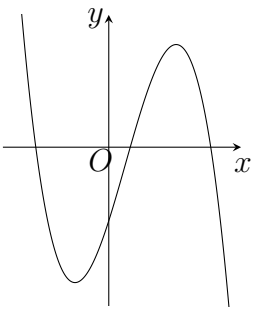
Câu 46. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. Ⓓ $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

A

Câu 47. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. Ⓑ $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. Ⓓ $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

A

Câu 48. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362

Ⓐ $m \geq -3$. Ⓑ $m > -2$. Ⓒ $m > -3$. Ⓓ $m \geq -2$.

B

Câu 49. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

Ⓐ $t = 10(h)$. Ⓑ $t = 14(h)$. Ⓒ $t = 15(h)$. Ⓓ $t = 22(h)$.

A

Câu 50. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$, $(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
Ⓑ Tốc độ bơm luôn giảm.
Ⓒ Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
Ⓓ Cả ba đáp án đều sai.

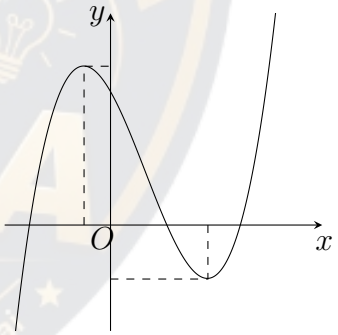
D

Câu 51. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0{,}25x^2(30 - x)$ trong đó x mg và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

Ⓐ 15 mg. Ⓑ 30 mg. Ⓒ 40 mg. Ⓓ 20 mg.

D

Câu 52. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. Ⓓ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

A

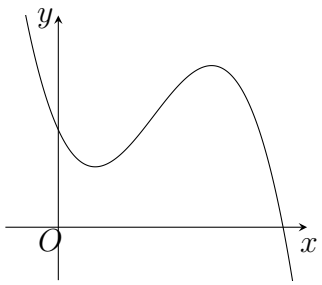
Câu 53. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.

Ⓐ 30. Ⓑ 40. Ⓒ 50. Ⓓ 60.

B

THẦY KHA · DẠY TOÁN · THCS THPT · 0399653362

Câu 54. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?



(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

D

Câu 55. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất?

(A) 29 triệu VNĐ. (B) 27,5 triệu VNĐ.
(C) 29,5 triệu VNĐ. (D) 27 triệu VNĐ.

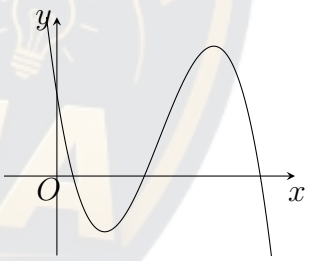
C

Câu 56. Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

(A) 1 375 000. (B) 3 781 250. (C) 2 500 000. (D) 3 000 000.

A

Câu 57. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. (B) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (D) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

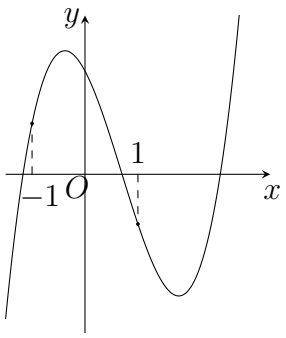
D

Câu 58. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 289 m/s. (B) 105 m/s. (C) 111 m/s. (D) 487 m/s.

B

Câu 59. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



Ⓐ $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
Ⓒ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D

Câu 60. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50 000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5 000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30 000 đồng.

Ⓐ 44 000 đồng. Ⓑ 43 000 đồng. Ⓒ 42 000 đồng. Ⓓ 41 000 đồng.

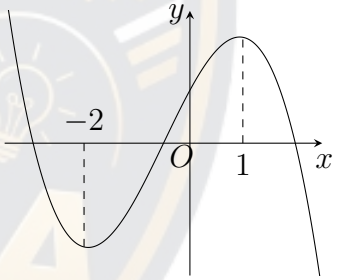
C

Câu 61. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \dfrac{1}{6}t^3$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Ⓐ $t = 2$. Ⓑ $t = 0{,}5$. Ⓒ $t = 2{,}5$. Ⓓ $t = 1$.

A

Câu 62. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



Ⓐ $ab > 0, bc < 0, cd < 0$. Ⓑ $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.
Ⓒ $ab > 0, bc > 0, cd > 0$. Ⓓ $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

B

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó:

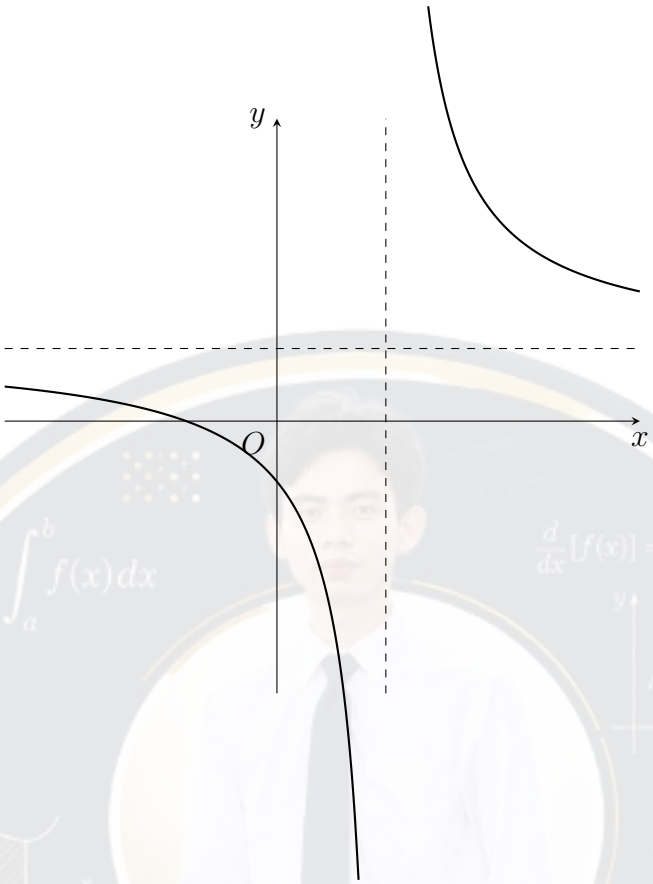
a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.

c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax - 1}{bx + c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{2}$

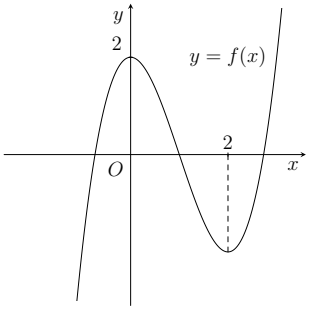
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \dfrac{1}{2}$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.

d) $\left[\begin{array}{l} b > \dfrac{2}{3} \\ b < 0. \end{array}\right.$

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình.



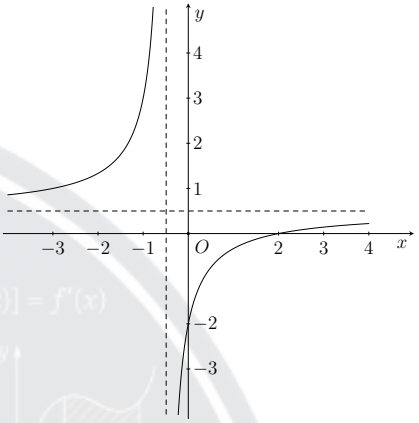
a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2

b) Giá trị b bằng 0

c) Giá trị $c = -2$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$.



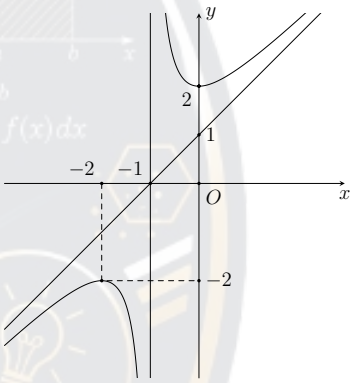
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

c) Các đường tiệm cận của hàm số là $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình vẽ bên



a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

b) Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x + 1$

c) Gọi A, B là hai cực trị của hàm số đã cho, diện tích tam giác OAB bằng 8 (với O là gốc toạ độ)

d) Một trục đối xứng của đồ thị đã cho là $d\colon y = (x+1)\tan\dfrac{3\pi}{8}$

Bài 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$

Bài 8. Cho hàm số $\mathrm{f}(x) = 2x + \dfrac{2}{x-1}$.

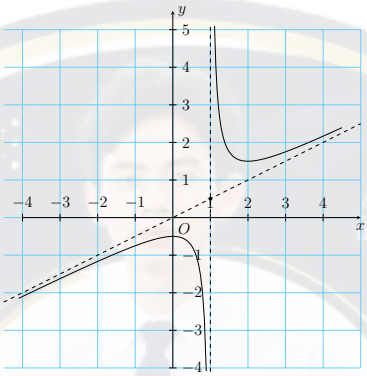
a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b) Phương trình $\mathrm{f}'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là 0 và 2.

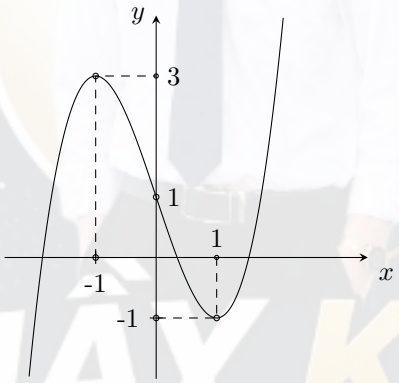
c) Hàm số đã cho có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$	$-$	$+$			
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

d) Hàm số đã cho có đồ thị như sau



Bài 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



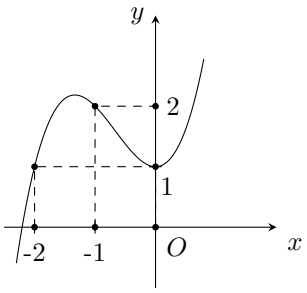
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0;1)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a - b + c + d = -1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Bài 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



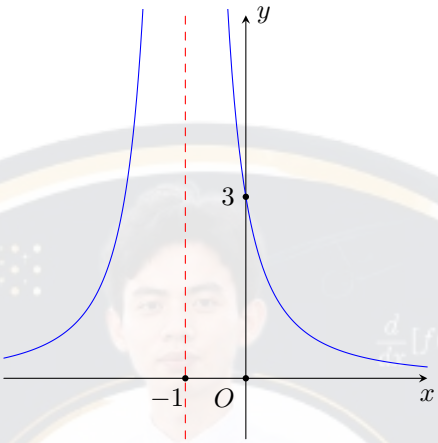
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a+3b+c=9$

Bài 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên.



Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.

a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

a) $a>0$

b) Tâm đối xứng I của đồ thị (C) có tung độ bằng 2

c) $y=f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

d) Gọi A,B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) và M,N là giao điểm của đồ thị (C) với trục Ox $(x_M<2<x_N)$. Khi đó các điểm A,B,M,N không cùng nằm trên một đường tròn

Bài 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C).

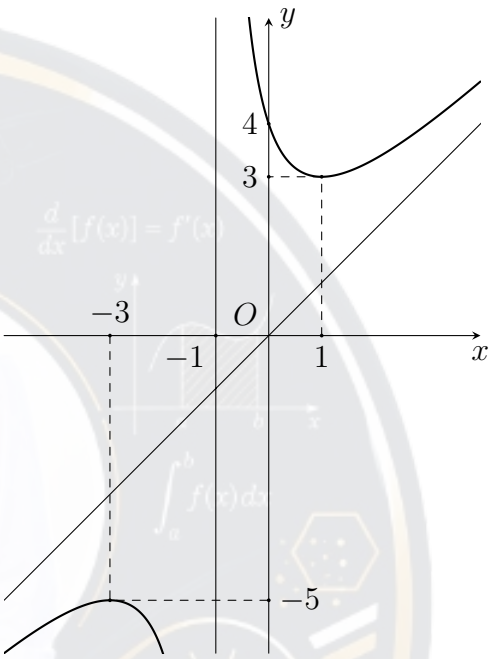
a) Hàm số đã cho có đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

b) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ $(-2; -1)$

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng, 1 đường tiệm cận ngang và 1 đường tiệm cận xiên

Bài 15. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O và điểm $(1; 1)$. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau



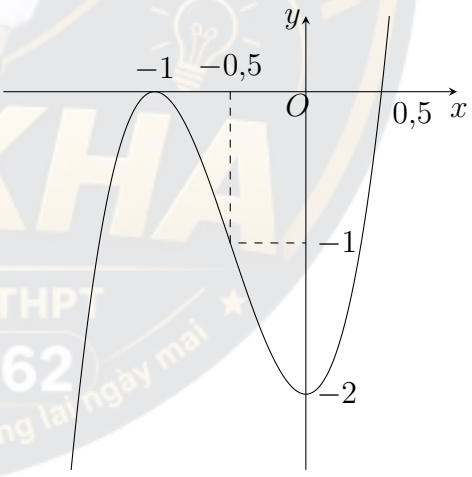
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$

c) Phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x$

d) $a + b + c + d = 7$

Bài 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

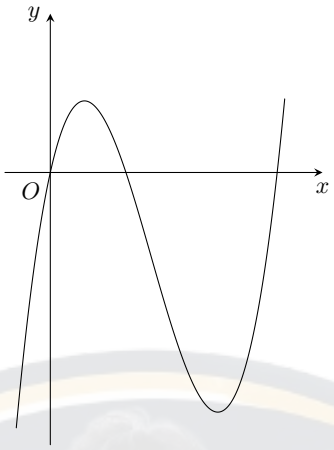
b) Tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ bằng -2

c) $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm có hoành độ $x = 0$

d) $3a + 2b + c - d = 25$

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 17. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên



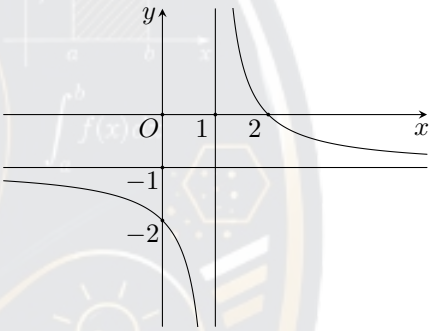
a) Hệ số a là số âm $(a < 0)$

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm

c) Hàm số có 3 cực trị

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + 1}$ có đồ thị (C) là đường cong như hình vẽ bên.



a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = -1$

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

c) $c = -1$

d) Tổng $a + b + c = -2$

Bài 19. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$		13	↘	
			-3			$-\infty$			$-\infty$

c) Tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số lần lượt là là $x = 2$, $y = 2x + 1$

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $4\sqrt{17}$

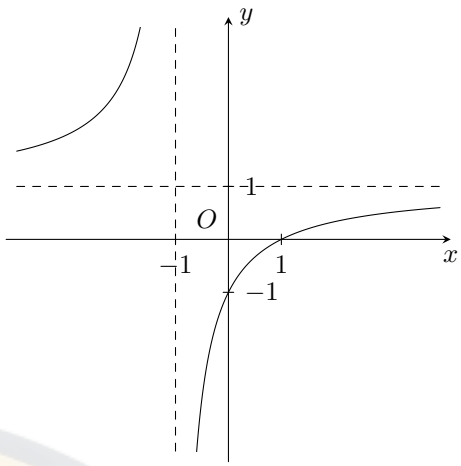
Bài 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Đạo hàm hàm số là $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y = 1$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $(1; -1)$

d) Đồ thị (C) là hình vẽ như hình bên



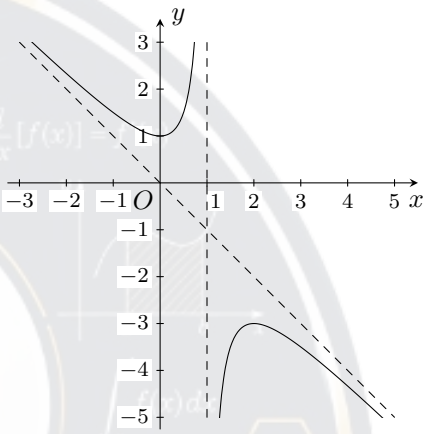
Bài 21. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$

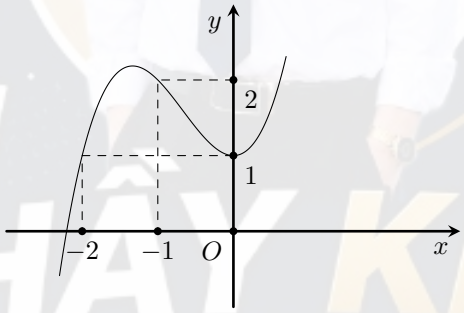
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng -3

d) Hàm số có đồ thị như hình vẽ bên



Bài 22. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

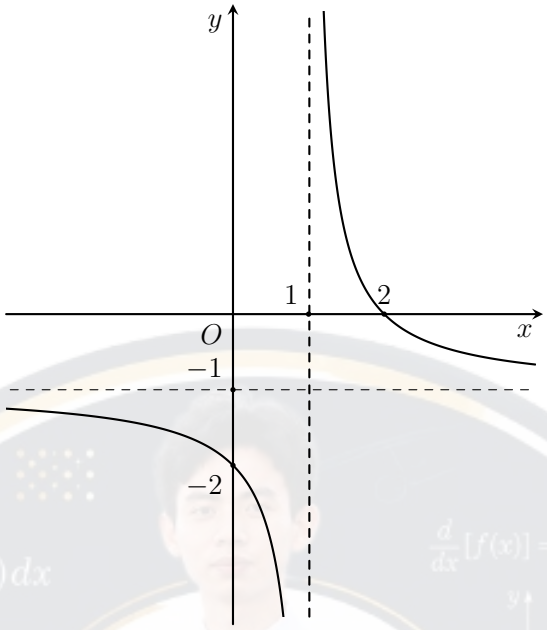
b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

c) Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có toạ độ $(0; 1)$

d) Trong 4 số a, b, c, d có 3 số dương

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 23. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+1}$ với a, b, $c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



a) Đạo hàm của hàm số $f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = -1$

d) Tổng $a + b + c = 5$

Bài 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

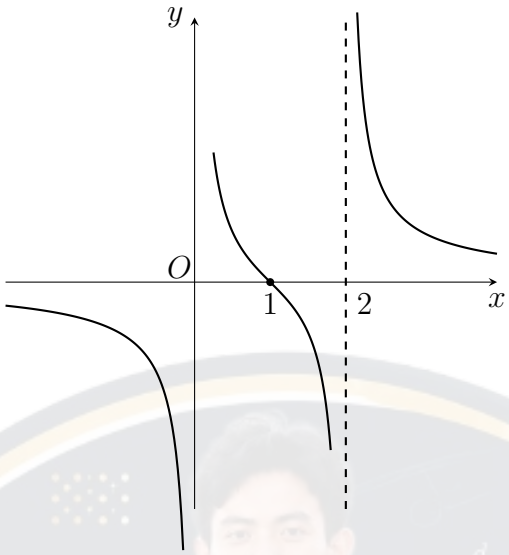
a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang

c) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng

d) Hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

Bài 25. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

c) Dồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang

d) Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Bài 26. Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1 970 được ước tính bởi công thức

$$f(t)=\frac{26t+10}{t+5} \quad (f(t) \text{ tính bằng nghìn người})$$

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1 980 là 18 nghìn người

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1 995 là 23 nghìn người

c) Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1 998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Bài 27. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2 023 được ước tính bởi công thức: $N(t)=100e^{0,012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0 \le t \le 50$.

a) Dân số của quốc gia vào năm 2 030 là 108,763 (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2 035 là 125,488 (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến t xác định trên đoạn $[0;50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;50]$

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2 040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm

Bài 28. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3, t \ge 0$.

a) Hàm gia tốc của vật là $a=y'$.

b) Hàm vận tốc của vật là $v(t)=3t^2-12$.

c) Tại thời điểm $t=1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.

d) Trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$ thì quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Bài 29. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

d) Bên A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 30. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Bài 31. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Bài 32. Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.

b) Khi thả 10 con tôm giống/m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8$ kg/m^2.

c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/m^2.

d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con/m^2.

Bài 33. Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \ge 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t.

a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.

c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.

d) Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Bài 34. Ông M mua tặng vợ món quà đặt trong chiếc hộp chữ nhật thể tích 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, độ dày lớp mạ không đổi. Gọi h và x lần lượt là chiều cao và cạnh đáy.

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x > 4$ thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

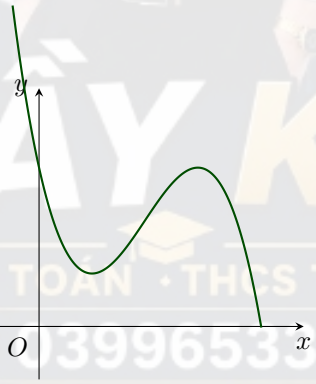
3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{5x^2 - 6x + 9}{x - 1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (T). Số giao điểm của (C) với (T) là?

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x + 3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

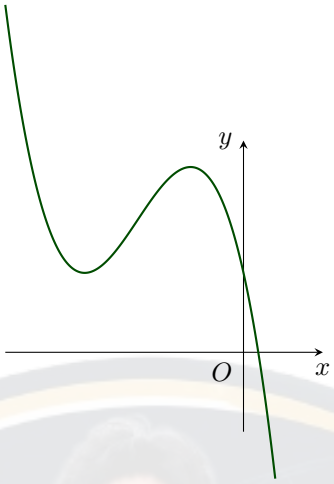
Bài 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

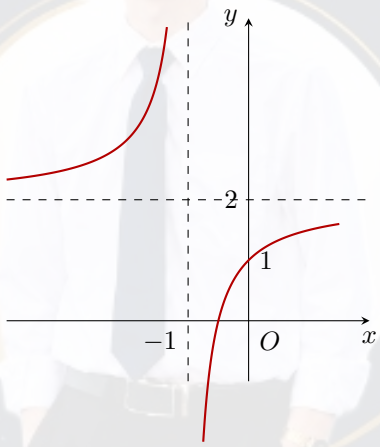
Bài 5. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{x + d}$ $(ad - b \neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi điểm $M(a; b)$, $a < 0$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất khi đó $a + b$ bằng

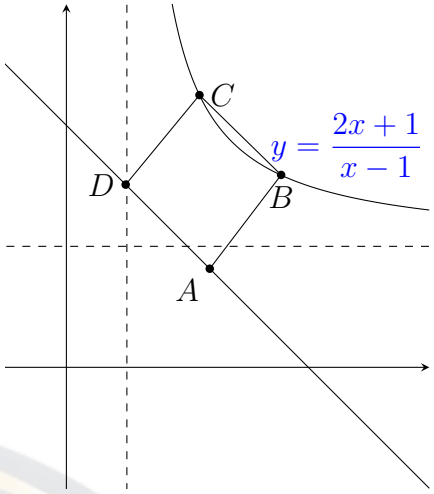
Bài 8. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 - mx + 1}{x - 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^2 - mx + 1}{x - 1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Bài 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2c+1$	↘	$-a$	↗	$+\infty$

Tìm $S = a + b + c + d$.

Bài 10. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d)\colon y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).

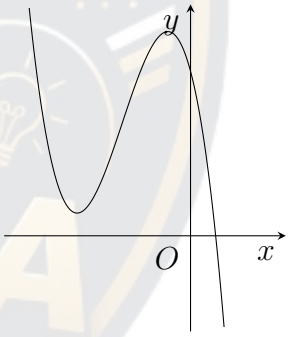


Bài 11. Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d\colon y = mx + m + 8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d)\colon y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm giá trị của tham số m.

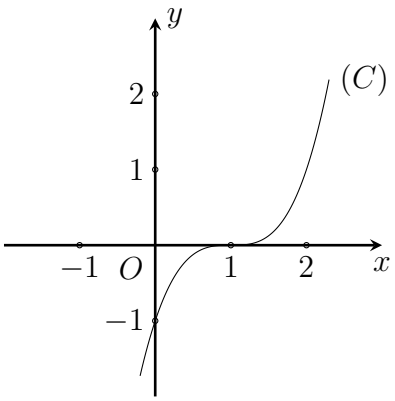
Bài 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S = \left(-\dfrac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

Bài 14. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



Bài 15. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3 875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km).

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khi đó $f(5)$ bằng



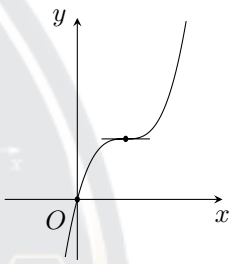
» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

Bài 17. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m $(m>0)$ cắt đồ thị $(C)\colon y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm giá trị của tham số m.

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ (C) và đường thẳng $(d)\colon y=x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

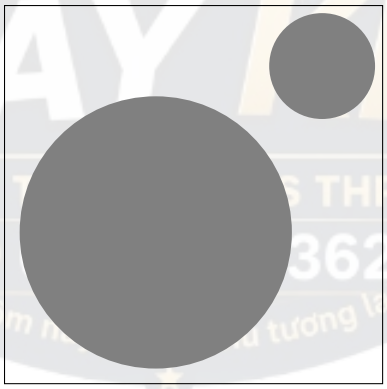
Bài 19. Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x)=\dfrac{95x^2+120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Bài 20. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+c^2+b+1$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 21. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Bài 22. Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi k, $(k\le 1)$ là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Bài 23. Ông A dự định sử dụng hết 5,5m^2 kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 24. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 25. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy

in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10,000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10.000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30.000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

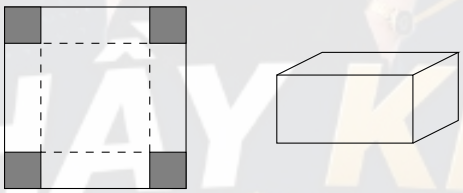
Bài 26. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \le x \le 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Hãy tính lợi nhuận tối đa đó.

Bài 27. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số: $P(t) = \dfrac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \le t \le 10$. Trong đó t là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

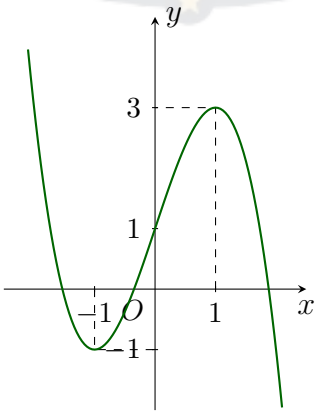
Bài 28. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



VI. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?

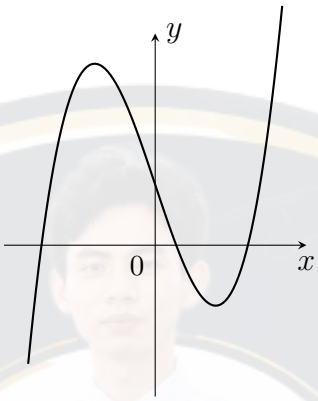


» Sưu tầm và Biên soạn: Lê Minh Kha 0399653362

Ⓐ $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=-x^3+3x+1$.
Ⓓ $y=x^3-3x+1$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đồ thị trên là đồ thị hàm bậc 3 có $a<0$. Suy ra chọn đáp án C.

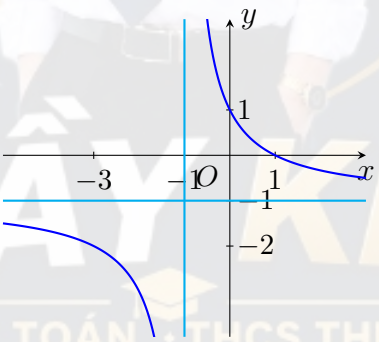
Câu 2. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y=x^3-3x+1$.
Ⓑ $y=-x^3+3x+1$.
Ⓒ $y=x^4-x^2+1$.
Ⓓ $y=-x^2+x-1$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ đồ thị ta thấy: đây là dạng đồ thị hàm bậc ba và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, ta chọn A.

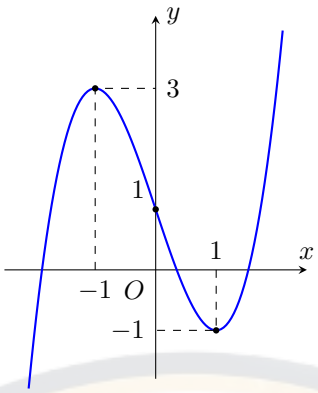
Câu 3. Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{-x}{x+1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$; có đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$ đi qua điểm $(1;0)$.

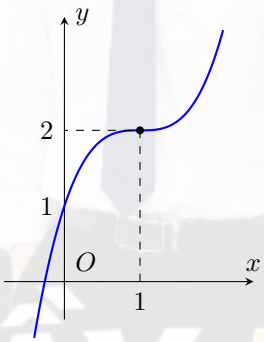
Câu 4. Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = -x^3 - 3x - 1$.
Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 1$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.
Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$.
Hàm số có hai cực trị $x = \pm 1$ nên hàm số thỏa đề là $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
Ⓓ $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải. Nhìn dạng đồ thị thấy $a > 0$, suy ra loại B, D.
Mặt khác hàm số không có cực trị nên loại A. Vậy đồ thị là của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Câu 6. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$		↘ -1

Ⓐ $y = \dfrac{x+3}{x-1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{-x-2}{x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Hướng dẫn giải. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$. Suy ra loại đáp án A.

Nhìn vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Xét $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$ có $ad-bc=1+2=3>0$ (loại B).

Xét $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$ có $ad-bc=1+3=4>0$ (loại D).

Xét $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ có $ad-bc=1-3=-2<0$ (thỏa mãn). Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	$-\infty$

Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số âm?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị nên bậc của đa thức phải lớn hơn 2.

Vậy $a\neq 0$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty\Rightarrow a<0$.

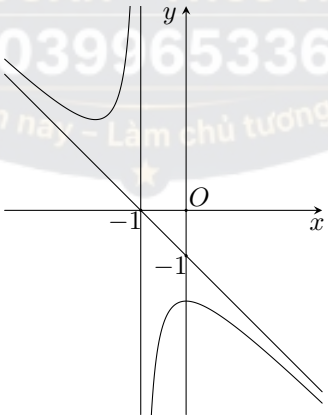
Từ bảng biến thiên ta có $d=y(0)>y(-1)=0\Rightarrow d>0$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm là -1 và 2 nên: $\begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}=-1+2=1>0\\ \dfrac{c}{3a}=(-1).2=-2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b>0\\c>0\end{cases}$

(vì $a<0$).

Vậy chỉ có 1 số âm là a.

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị ta thấy đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-1$ nên loại hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Từ đồ thị suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên chỉ có hàm số thỏa mãn là $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$.

Câu 9. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Ⓐ $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. Ⓑ $y=\dfrac{x-1}{-x-3}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$. Ⓓ $y=\dfrac{1}{x-3}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=3$ và đường thẳng $y=-1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Vậy ta nhận hàm số $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây?

Ⓐ $y=x^3-3x^2+2$. Ⓑ $y=-x^3+3x^2+2$.

Ⓒ $y=x^4+3x^2+2$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Hướng dẫn giải. Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x^2+2$ thỏa mãn.

Câu 11. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-20	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có tiệm cận đứng là $x=-4$. Đồ thị đi qua các điểm cực trị $(-9;-20)$ và $(1;0)$. Kiểm tra các phương án ta thấy $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$ thỏa mãn.

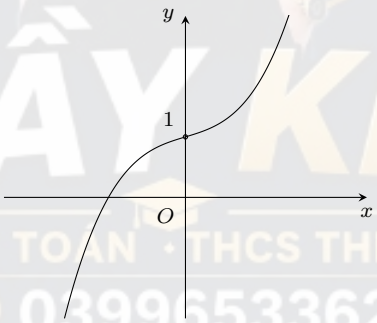
Câu 12. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$ và luôn đồng biến trên từng khoảng xác định. Kiểm tra đạo hàm của các hàm số, ta thấy $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$ thỏa mãn.

Câu 13. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



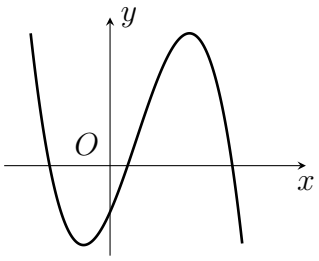
Ⓐ $y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{3}x+1$.
Ⓑ $y=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x+1$.
Ⓒ $y=\dfrac{1}{4}x^4+x^2+1$.
Ⓓ $y=-x^3+x^2-x+1$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc ba.
Theo đồ thị hàm số ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số $a>0$.
Mặt khác hàm số $y=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x+1$ có $y'=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}$.
Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Suy ra hàm số có hai điểm cực trị nên loại.
Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{3}x+1$.

Câu 14. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

đúng?



Ⓐ $a<0, b<0, c<0, d>0$.
Ⓑ $a<0, b>0, c<0, d>0$.
Ⓒ $a<0, b>0, c>0, d<0$.
Ⓓ $a<0, b<0, c>0, d<0$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a<0$.

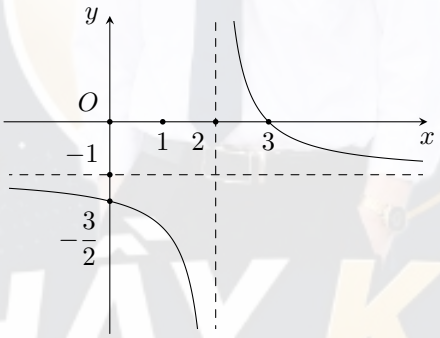
Dựa vào vị trí điểm cực đại và điểm cực tiểu, suy ra $x_{\text{CT}}+x_{\text{CĐ}}>0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a}>0 \Rightarrow b>0$.

Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên $x_{\text{CT}}\cdot x_{\text{CĐ}}<0 \Rightarrow \dfrac{c}{a}<0 \Rightarrow c>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Vậy $a<0, b>0, c>0, d>0$. (Lưu ý: Đề bài gốc ghi $d<0$ ở đáp án True, nhưng giải thích ghi $d>0$).

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R}; c\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng



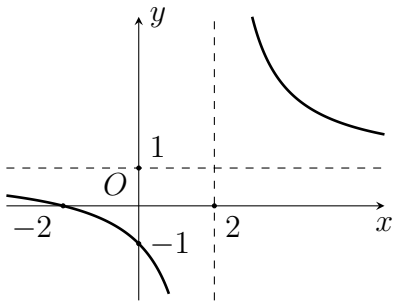
Ⓐ -3.
Ⓑ 5.
Ⓒ -4.
Ⓓ 3.

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có:

- Đường tiệm cận đứng $x=2$, suy ra $-\dfrac{2}{c}=2 \Leftrightarrow c=-1$.
- Đường tiệm cận ngang $y=-1$, suy ra $\dfrac{a}{c}=-1 \Leftrightarrow a=-c=1$.
- Giao điểm với trục Oy tại điểm $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra $-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b=3$.

Vậy $a+b+c=1+3-1=3$.

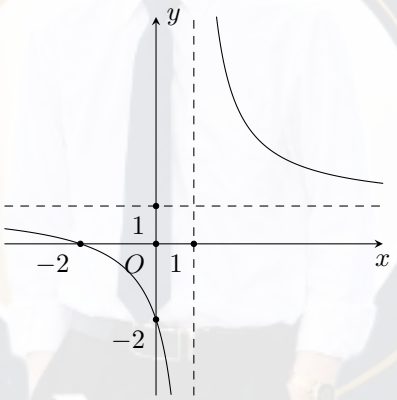
Câu 16. Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?



Ⓐ $a = 1, b = -2$.
Ⓑ $a = b = 2$.
Ⓒ $a = -1, b = -2$.
Ⓓ $a = b = -2$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$ nên $2 - a(-2) = 0 \Rightarrow a = -1$.

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?



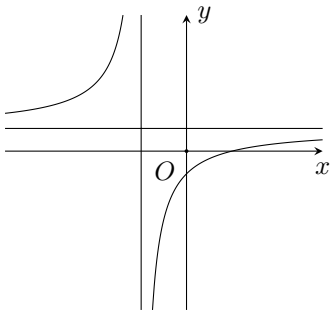
Ⓐ $a < 0, b < 0$.
Ⓑ $0 < b < a$.
Ⓒ $b < 0 < a$.
Ⓓ $a < b < 0$.

Hướng dẫn giải. Hàm số có dạng $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$.

- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.
- Đồ thị đi qua $(-2; 0) \Rightarrow -2a - b = 0 \Rightarrow b = -2a = -2$.

Suy ra $b < 0 < a$.

Câu 18. Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $ad > 0$ và $ab < 0$.
Ⓑ $bd < 0$ và $ab > 0$.
Ⓒ $ad < 0$ và $ab < 0$.
Ⓓ $ad > 0$ và $bd > 0$.

Hướng dẫn giải.

◈ Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.

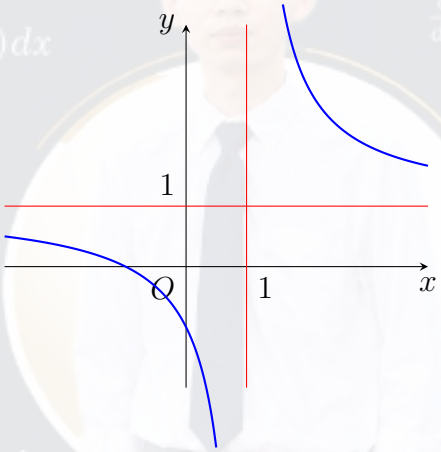
◈ Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$.

◈ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$. (1)

◈ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ad > 0$.

Câu 19. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{-2x+1}{x-1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

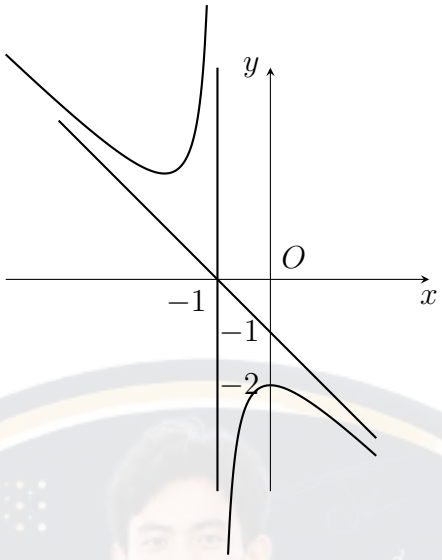
Hướng dẫn giải. Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, nên loại A, B.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ nên loại C.

Kiểm tra giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 20. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số:



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị hàm số ta có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=-x-1$.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}=-x-1-\dfrac{1}{x+1}$.

Khi $x\to\infty$, $y\approx -x-1$ (tiệm cận xiên). Tiệm cận đứng là nghiệm của mẫu: $-x-1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-6}{x-1}$ đi qua điểm nào trong các điểm cho dưới đây?

Ⓐ $M(2;2)$. Ⓑ $N(2;-2)$. Ⓒ $P(-1;3)$. Ⓓ $Q(4;1)$.

Hướng dẫn giải. Thay tọa độ điểm $M(2;2)$ vào hàm số:

Với $x=2$ ta có $y=\dfrac{2^2+2\cdot 2-6}{2-1}=\dfrac{4+4-6}{1}=2$.

Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;2)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ $(-3;-8)$. Ⓑ $(-3;8)$. Ⓒ $(1;0)$. Ⓓ $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x\neq -1$.

Ta có $y'=\dfrac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$.

Vậy tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1; 0)$.

Câu 23. Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \dfrac{60}{1 + 0,2x}, 12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu?

Ⓐ 15 (nghìn đồng). Ⓑ 18 (nghìn đồng).
Ⓒ 19 (nghìn đồng). Ⓓ 20 (nghìn đồng).

Hướng dẫn giải. Với $x = 10$ đơn vị sản phẩm, ta thay vào công thức tính giá bán p:

$$p = \frac{60}{1 + 0,2 \cdot 10} = \frac{60}{1 + 2} = \frac{60}{3} = 20 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Câu 24. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x chiếc bánh kem là: $C(x) = 10000 + 20x - \dfrac{1}{4}x^2 + 0,001x^3$. Chi phí sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ chi phí biên là bao nhiêu?

Ⓐ 250 (nghìn đồng). Ⓑ 450 (nghìn đồng).
Ⓒ 520 (nghìn đồng). Ⓓ 300 (nghìn đồng).

Hướng dẫn giải. Chi phí biên tại mức sản xuất x sản phẩm là $C'(x)$.

Ta có $C'(x) = 20 - \dfrac{1}{2}x + 0,003x^2$.

Chi phí biên để sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ $C'(500)$:

$C'(500) = 20 - \dfrac{1}{2} \cdot 500 + 0,003 \cdot 500^2 = 20 - 250 + 750 = 520$ (trăm nghìn đồng).

Đổi đơn vị: $5,2$ trăm nghìn đồng tương ứng với 520 nghìn đồng.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

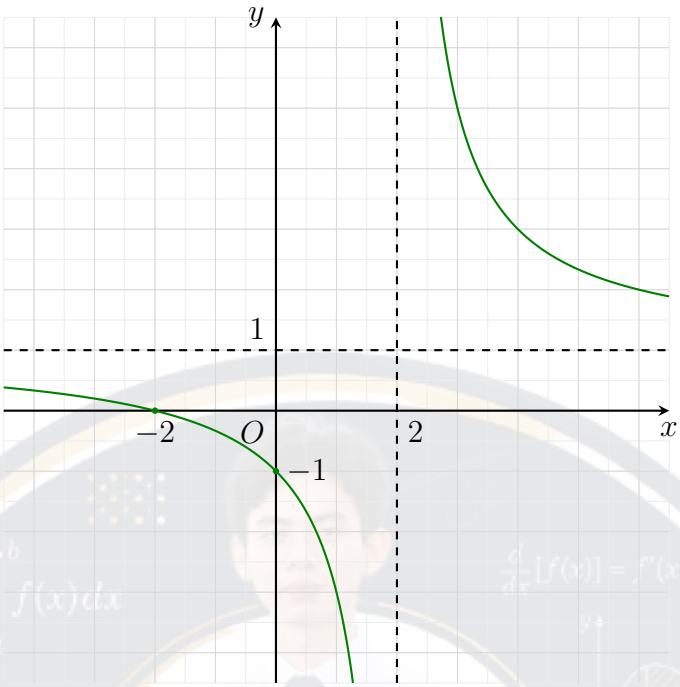
Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
Ⓒ $y = x^4 + 3x^2 + 2$. Ⓓ $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$.

Hướng dẫn giải. Đây là dáng điệu của hàm số bậc 3 nên ta loại $y = x^4 + 3x^2 + 2$ và $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty$ nên đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Câu 26. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. Ⓑ $y=\dfrac{2x+4}{x-2}$. Ⓒ $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. Ⓓ $y=\dfrac{x+2}{x-2}$.

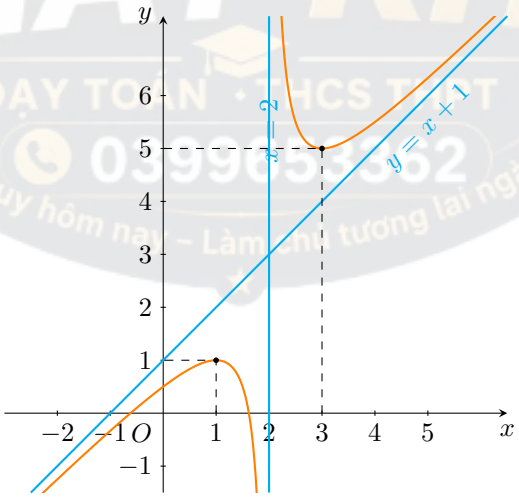
Hướng dẫn giải. +) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là $x=-2$. Loại A.

+) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y=2$. Loại B.

+) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Loại C.

+) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y=1$, tiệm cận đứng $x=2$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Khẳng định nào sau đây **SAI**?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$.
Ⓑ Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=x+1$.
Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$.

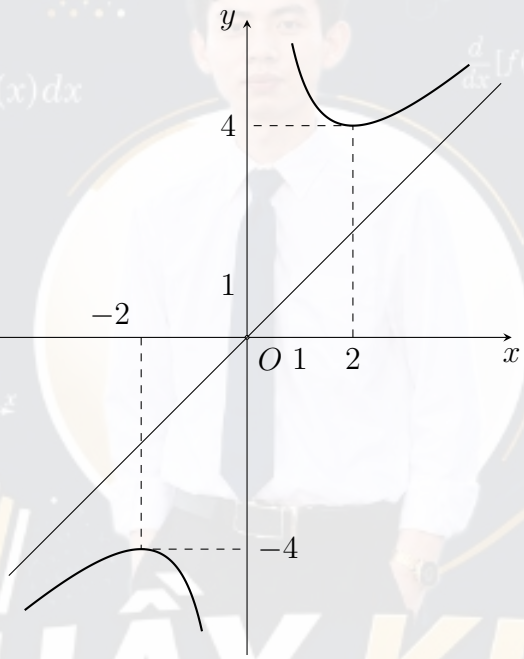
Ⓓ Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Căn cứ vào đồ thị ta có:

- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.
- Nhánh bên phải đi lên vô cùng khi $x\to+\infty$ và nhánh bên trái đi xuống vô cùng khi $x\to-\infty$, do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$.
- Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ khác 0. Điểm $A(0;1)$ nằm trên trục Oy (giao điểm của đường tiệm cận xiên với trục tung), không phải là giao điểm của đồ thị với trục Ox.

Vậy khẳng định **D** là khẳng định sai.

Câu 28. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Ⓑ $y=x^4-2x^2$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

Ⓓ $y=x^3-3x^2$.

Hướng dẫn giải. +) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ không có tiệm cận xiên. Loại A.

+) Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ là đồ thị hàm bậc bốn, không có tiệm cận. Loại B.

+) Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ là đồ thị hàm bậc ba, không có tiệm cận. Loại D.

+) Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}$:

- Tiệm cận đứng là trục Oy ($x=0$).
- Tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.
- Tại $x=2$ thì $y=4$ (điểm cực tiểu).
- Tại $x=-2$ thì $y=-4$ (điểm cực đại).

Các đặc điểm này hoàn toàn khớp với đồ thị đã cho. Vậy chọn đáp án C.

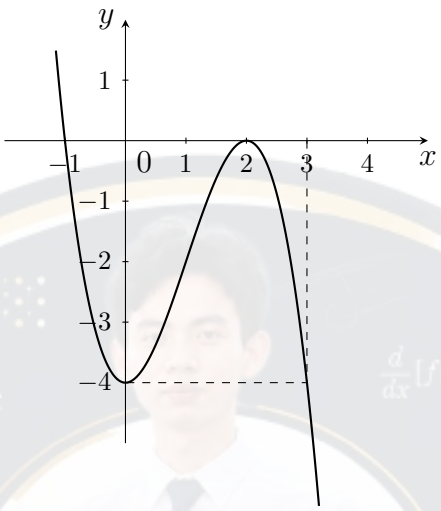
Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

Ⓐ $(2;0)$. Ⓑ $(0;2)$. Ⓒ $(4;0)$. Ⓓ $(0;4)$.

Hướng dẫn giải. Cho $x=0$, ta được $y=\dfrac{2\cdot 0-4}{0-1}=\dfrac{-4}{-1}=4$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục Oy là $(0;4)$.

Câu 30. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y=\dfrac{x-1}{x}$. Ⓑ $y=x^3+3x^2-4$.

Ⓒ $y=-x^3+3x-4$. Ⓓ $y=-x^3+3x^2-4$.

Hướng dẫn giải. +) Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$ không xác định tại $x=0$, trong khi đồ thị cắt trục tung tại $(0;-4)$. Loại A.

+) Đồ thị hàm số có nhánh cuối cùng đi xuống nên hệ số $a<0$. Loại B.

+) Xét hàm số $y=-x^3+3x-4\Rightarrow y'=-3x^2+3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$. Hàm số có hai điểm cực trị $x=\pm 1$, không khớp với đồ thị. Loại C.

+) Xét hàm số $y=-x^3+3x^2-4$:

◈ Có $y'=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

◈ Tại $x=0\Rightarrow y=-4$ (điểm cực tiểu).

◈ Tại $x=2\Rightarrow y=0$ (điểm cực đại).

Các đặc điểm này hoàn toàn khớp với đồ thị. Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ và $y=2x-7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 8. Ⓓ 11.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1}=2x-7\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x^2+2x-1=(2x-7)(x-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x^2+2x-1=2x^2-9x+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x^2-11x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{11-\sqrt{89}}{2}\\x_2=\dfrac{11+\sqrt{89}}{2}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện $x\neq 1$).

Suy ra, tổng hoành độ của hai giao điểm là: $x_1+x_2=\dfrac{11-\sqrt{89}}{2}+\dfrac{11+\sqrt{89}}{2}=11$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ thêm đường thẳng $y=1$ cắt các nhánh của đồ thị:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

$y=1$

- Nhánh thứ nhất: Hàm số tăng từ $-\infty$ đến 2. Vì $1\in(-\infty;2)$ nên đường thẳng $y=1$ cắt nhánh này tại 1 điểm.
- Nhánh thứ hai: Hàm số giảm từ $+\infty$ xuống -4. Vì $1\in(-4;+\infty)$ nên cắt tại 1 điểm.
- Nhánh thứ ba: Hàm số tăng từ -4 lên $+\infty$. Vì $1\in(-4;+\infty)$ nên cắt tại 1 điểm.

Vậy tổng số giao điểm là 3. Chọn đáp án A.

Câu 33. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(0)=2$.

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. C

Câu 34. Cho hàm số $y=2x^3-7x^2+3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^3-5x^2+(3-m)x+2m$ (với $m\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

Ⓐ -6. Ⓑ -10. Ⓒ -8. Ⓓ -5.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3-7x^2+3x=x^3-5x^2+(3-m)x+2m\Leftrightarrow x^3-2x^2+mx-2m=0. \quad (1)$$

Đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$ khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x^2+m)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[-2;4] \\ x^2+m=0. \end{array}\right. \quad (2)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ và khác 2.

Đặt $g(x)=x^2+m \Rightarrow g'(x)=2x$, ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+4$	↗	$m+16$

Từ bảng biến thiên phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ và khác 2

$$\Leftrightarrow m<0<m+4 \Leftrightarrow -4<m<0.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Tổng các giá trị nguyên của m bằng -6. A

Câu 35. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

Ⓐ 2 250 000. Ⓑ 2 350 000. Ⓒ 2 450 000. Ⓓ 2 550 000.

Hướng dẫn giải. Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng; $x\geq 2\,000\,000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100 000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x-2\,000\,000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống?

Theo quy tắc tam suất ta có số căn hộ bị bỏ trống là: $\dfrac{2(x-2\,000\,000)}{100\,000}=\dfrac{x-2\,000\,000}{50\,000}$.

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50-\frac{x-2\,000\,000}{50\,000}=-\frac{x}{50\,000}+90.$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có

$$F(x)=\left(-\frac{x}{50\,000}+90\right)x=-\frac{1}{50\,000}x^2+90x$$

(bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x)=-\dfrac{1}{50\,000}x^2+90x$, với $x\geq 2\,000\,000$.

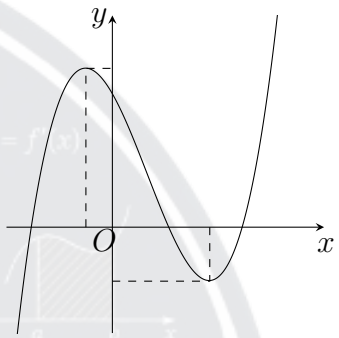
$F'(x)=-\dfrac{1}{25\,000}x+90$; $F'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{25\,000}x+90=0 \Leftrightarrow x=2\,250\,000$

Bảng biến thiên

x	$2\,000\,000$		$2\,250\,000$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F_{\max}$	$\searrow$	

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2\,250\,000$.
Vậy công ty phải cho thuê với giá $x = 2\,250\,000$ đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất. A

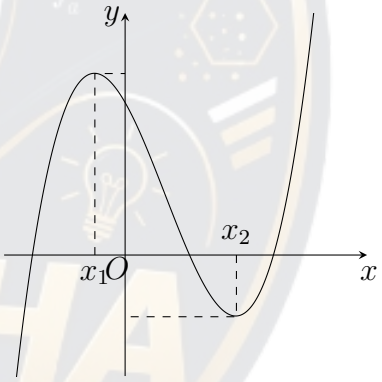
Câu 36. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (B) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (D) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Hướng dẫn giải.

Câu 36. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.



Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$ suy ra $d > 0$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.
Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases}$, mà $a > 0$, suy ra $b < 0$, $c < 0$.
Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 3$.

(A) $\begin{cases} -\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0. \end{cases}$ (B) $m < 1$. (C) $\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{4} < m < 1$.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0. \end{array}\right. \qquad (1) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, đặt $x_3 = 1$ là một nghiệm của phương trình.
Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân

biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 3 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 + x_2^2 < 2 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 < 2 \\ \Leftrightarrow\ & 1^2 + 2m < 2 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy các giá trị thỏa mãn là $\begin{cases} -\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0. \end{cases}$ A

Câu 38. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi phòng thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Ⓐ 480 ngàn. Ⓑ 50 ngàn. Ⓒ 450 ngàn. Ⓓ 80 ngàn.

Hướng dẫn giải. Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$.

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x là $\dfrac{(x-400)\cdot 2}{20} = \dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \dfrac{x-400}{10} = 90 - \dfrac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là $f(x) = x\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) = -\dfrac{x^2}{10} + 90x$.

$f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 450$.

Bảng biến thiên

x	0		450		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗	$2\,025$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2 025 000 đồng.

C

Câu 39. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 là

Ⓐ $y + y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Ⓑ $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x + x_0)$.

Ⓒ $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Ⓓ $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x_0 - x)$.

Hướng dẫn giải. C

Câu 40. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0{,}5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Ⓐ 72. Ⓑ 12. Ⓒ $-\dfrac{1}{192}$. Ⓓ $\dfrac{23}{2}$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $P = 12I - 0{,}5I^2$ với $I \geq 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên

I	0		12		$+\infty$
$P'(I)$		$+$	0	$-$	
$P(I)$		↗	72	↘	

Công suất tối đa của mạch điện là 72 (W) đạt được khi cường độ dòng điện là 12 (A). A

Câu 41. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

Ⓐ 25. Ⓑ 30. Ⓒ 20. Ⓓ 15.

Hướng dẫn giải. Ta có: $G'(t) = 90t - 3t^2$; $G''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên

t	0		15		$+\infty$
$G''(t)$		$+$	0	$-$	
$G(t)$		↗	675	↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15. D

Câu 42. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Ⓐ 14. Ⓑ 13. Ⓒ 12. Ⓓ 11.

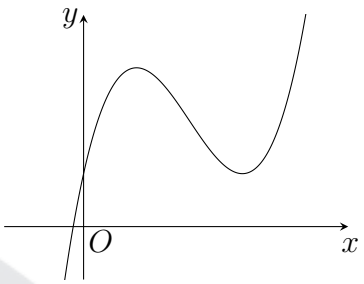
Hướng dẫn giải. Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có: $F(n) = (480 - 20n)n = 480n - 20n^2$.

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích

của mặt hồ là lớn nhất.
Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(n)$ đạt giá trị lớn nhất.
$F'(n) = 480 - 40n$; $F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$.
Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất. C

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. (B) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$. (D) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

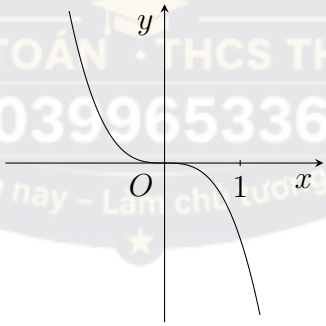
Hướng dẫn giải. Dựa vào dạng đồ thị hàm bậc ba ta có $a > 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ suy ra $d = 1 > 0$.
Hàm số có hai điểm cực trị dương suy ra $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c > 0. \end{cases}$
Vậy $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. B

Câu 44. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28°C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị °C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0{,}008t^3 - 0{,}16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

(A) 27,832°C. (B) 18,4°C. (C) 26,2°C. (D) 25,312°C.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $T = -0{,}008t^3 - 0{,}16t + 28$ với $t \in [1;10]$.
$T' = -0{,}024t^2 - 0{,}16 < 0$, $\forall t \in [1;10]$ suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.
Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18{,}4$°C. B

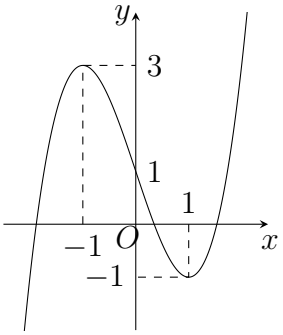
Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?



(A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.
(D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Trong khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. D

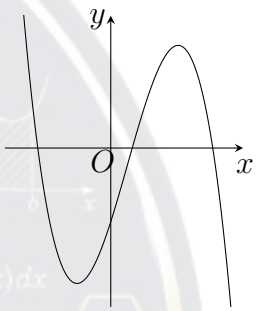
Câu 46. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (B) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. (D) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $a > 0$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.
Hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0; c < 0$. A

Câu 47. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. (B) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (D) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Hướng dẫn giải. Ta thấy nhánh đồ thị ngoài cùng bên phải hướng xuống suy ra $a < 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm suy ra $d < 0$.
Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số.
Ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$.
Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. A

Câu 48. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

(A) $m \geq -3$. (B) $m > -2$. (C) $m > -3$. (D) $m \geq -2$.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - 2x - 2 - m\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 & (*) \\ x^2 - 2x - 2 - m = 0. \end{bmatrix}$$

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 + m > 0 \\ 1 - 2 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$.
Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.
Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 4 \Leftrightarrow 4 - 2(-2 - m) > 4 \Leftrightarrow m > -2$.
Vậy $m > -2$. B

Câu 49. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

Ⓐ $t = 10(h)$. Ⓑ $t = 14(h)$. Ⓒ $t = 15(h)$. Ⓓ $t = 22(h)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $h' = -3\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$. $h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}^+)$. Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị:

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10(h)$.

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau:

Vì $-1 \le \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Rightarrow 9 \le 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \le 15$.

Do đó để h lớn nhất thì $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}^+)$. Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10(h)$. A

Câu 50. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$, $(0 \le t \le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
Ⓑ Tốc độ bơm luôn giảm.
Ⓒ Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
Ⓓ Cả ba đáp án đều sai.

Hướng dẫn giải. Xét hàm $V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3$; $V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0$ khi $t = 0, t = 60$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số V' đồng biến trên $(0; 60)$ và nghịch biến trên $(60; 90)$. D

Câu 51. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0{,}25x^2(30 - x)$ trong đó x mg và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

Ⓐ 15 mg. Ⓑ 30 mg. Ⓒ 40 mg. Ⓓ 20 mg.

Hướng dẫn giải. Ta có $G(x) = 0{,}25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ $G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$.

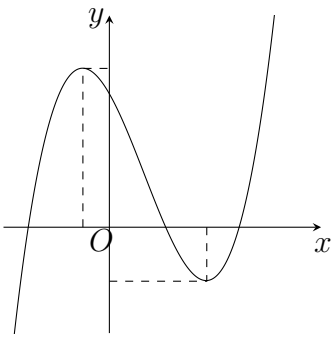
$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20 mg. D

Câu 52. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. (B) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. (D) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Theo hình vẽ
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0, d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$.
Hàm số có hai cực trị trái dấu nên $ac < 0$ mà $a > 0$, do đó $c < 0$.
Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương nên $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{2b}{6a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.
Do $a > 0$ nên $b < 0$. A

Câu 53. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \dfrac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.

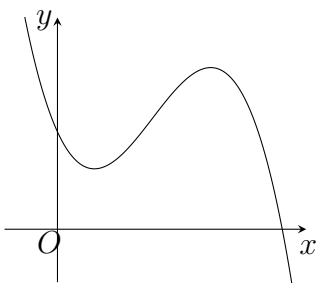
(A) 30. (B) 40. (C) 50. (D) 60.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất $(0 < x \leq 60)$.
Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).
Số tiền thu được: $F(x) = \left(300 - \dfrac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90\,000x - 1\,500x^2 + \dfrac{25}{4}x^3$.
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $F'(x) = 90\,000 - 3\,000x + \dfrac{75}{4}x^2$; $F'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$90\,000 - 3\,000x + \dfrac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120 \text{ (loại)} \\ x = 40 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên

x	0		40		60
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người. B

Câu 54. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?



Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình dạng đồ thị: đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung nên $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2.

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Vậy $a < 0$, $c < 0$. D

Câu 55. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất?

Ⓐ 29 triệu VNĐ. Ⓑ 27,5 triệu VNĐ.
Ⓒ 29,5 triệu VNĐ. Ⓓ 27 triệu VNĐ.

Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $(0 \le x \le 4)$.

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là $200x + 600$ (chiếc).

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là $(200x + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (200x + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ $(0 \le x \le 4)$ Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$2\,450$	↘	

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $2\,450$ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra giá bán hợp lý nhất là $30 - \dfrac{1}{2} = 29{,}5$ triệu VNĐ. C

Câu 56. Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

Ⓐ 1 375 000. Ⓑ 3 781 250. Ⓒ 2 500 000. Ⓓ 3 000 000.

Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\dfrac{(2-x)20}{0{,}1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150+(400-200x)=550-200x$.

Tổng doanh thu là: $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x)=-400x+550=0\Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

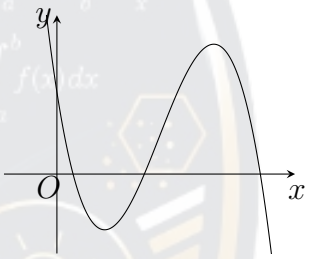
Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{3025}{8}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{11}{8}=1{,}375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1 375 000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 3 781 250 đồng. A

Câu 57. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$. (B) $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

(C) $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. (D) $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

Hướng dẫn giải. Do nhánh bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$. Đồ thị cắt trục tung ở phần dương nên $d>0$. Đồ thị có 2 cực trị tại hai giá trị x dương nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-3ac>0\\ -\dfrac{2b}{3a}>0\\ \dfrac{c}{3a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b>0\\ c<0.\end{cases}$$

D

Câu 58. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

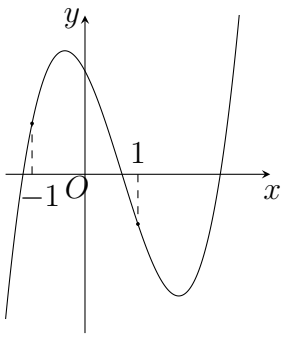
(A) 289 m/s. (B) 105 m/s. (C) 111 m/s. (D) 487 m/s.

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t)=s'=-6t^2+48t+9$. Xét hàm số $v(t)=-6t^2+48t+9,\ t\in[0;10]$.

Ta có $v'(t)=-12t+48=0\Leftrightarrow t=4$ (nhận).

Ta có $\begin{cases}v(0)=9\\ v(4)=105\\ v(10)=-111\end{cases}\Rightarrow\max\limits_{t\in[0;10]}v(t)=v(4)=105$. B

Câu 59. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



Ⓐ $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
Ⓒ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Hướng dẫn giải. Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$.
Nhìn vào giao điểm của đồ thị với trục tung ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2 với $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow c < 0$ (vì $a > 0$).
Vì $-1 < x_1 < 0$ và $x_2 > 1$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow -2b > 0 \Leftrightarrow b < 0$ (vì $a > 0$).
Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D

Câu 60. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50 000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5 000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30 000 đồng.

Ⓐ 44 000 đồng. Ⓑ 43 000 đồng. Ⓒ 42 000 đồng. Ⓓ 41 000 đồng.

Hướng dẫn giải. Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng , (x: đồng; $30\,000 \le x \le 50\,000$ đồng).
Ta có thể lập luận như sau:
Giá 50 000 đồng thì bán được 40 quả bưởi.
Giảm giá 5 000 đồng thì bán được thêm 50 quả.
Giảm giá $50\,000 - x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?
Theo quy tắc tam suất số quả bán thêm được là: $(50\,000 - x) \cdot \dfrac{50}{5\,000} = \dfrac{1}{100}(50\,000 - x)$.
Do đó số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40 + \frac{1}{100}(50\,000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540.$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).
Ta có

$$F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right)(x - 30\,000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16\,200\,000.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16\,200\,000, \text{ điều kiện } 30\,000 \le x \le 50\,000.$$

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840;\ F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42\,000.$$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $[30\,000; 50\,000]$ nên ta có

$$F(30\,000) = 0;\ F(42\,000) = 1\,440\,000;\ F(50\,000) = 800\,000.$$

Vậy với $x = 42\,000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Doan Hùng là 42 000 đồng. C

Câu 61. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

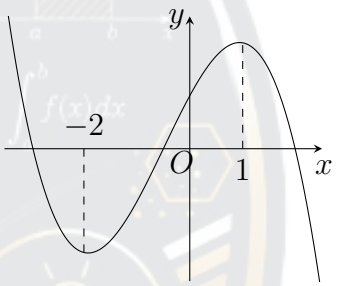
Ⓐ $t = 2$. Ⓑ $t = 0{,}5$. Ⓒ $t = 2{,}5$. Ⓓ $t = 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		↗	2	↘	

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây). A

Câu 62. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



Ⓐ $ab > 0$, $bc < 0$, $cd < 0$. Ⓑ $ab > 0$, $bc < 0$, $cd > 0$.
Ⓒ $ab > 0$, $bc > 0$, $cd > 0$. Ⓓ $ab < 0$, $bc < 0$, $cd > 0$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra $a < 0$.
Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.
Hàm số có các điểm cực trị $x = 1$ và $x = -2$ nên phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.
Ta có $\frac{-2b}{3a} = -1$ và $\frac{c}{3a} = -2$.
Do đó $b < 0$ và $c > 0$.
Như vậy $ab > 0$, $bc < 0$ và $cd > 0$. B

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó:

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.

c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.

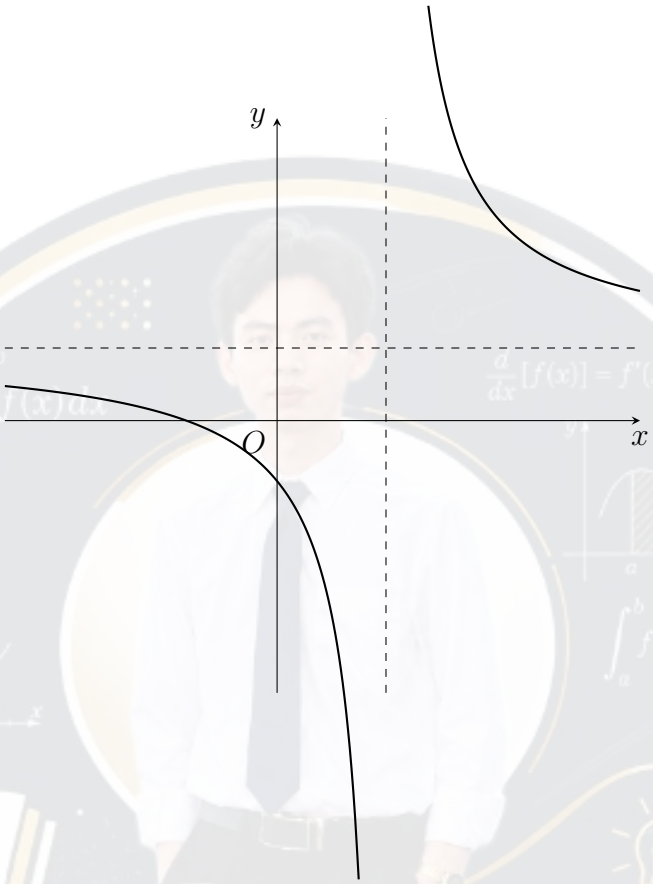
d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Hướng dẫn giải. a) **Sai.** Tập xác định của hàm số đa thức bậc ba là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
b) **Đúng.** Với $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Vậy đồ thị đi qua điểm $(0; 2)$.
c) **Sai.** Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Tại $x = 0$, $y'(0) = -3 \neq 0$. Do đó hàm số không đạt cực trị tại $x = 0$.
d) **Đúng.** Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$:

- $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Chỉ có $x = 1 \in [0; 2]$.
- $y(0) = 2$; $y(1) = 0$; $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ là 4.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Dựa vào đồ thị, trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

b) **Đúng.** Đồ thị cắt trục tung Oy tại điểm nằm dưới trục hoành Ox, do đó tung độ giao điểm là số âm.

c) **Đúng.** Đồ thị cắt trục hoành Ox tại điểm nằm bên trái trục tung Oy, do đó hoành độ giao điểm là số âm.

d) **Sai.**

- Tiệm cận đứng $x = a$ nằm bên phải trục tung $\Rightarrow a > 0$.
- Tiệm cận ngang $y = b$ nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow b > 0$.
- Giao điểm với Oy (tại $x = 0$) có tung độ $y = \dfrac{c}{a}$. Vì giao điểm nằm dưới trục hoành nên $\dfrac{c}{a} < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow c < 0$.

Như vậy, trong ba số a, b, c chỉ có một số âm là c.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}\searrow -\infty$		$+\infty\searrow \frac{1}{2}$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.

d) $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0. \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$.

Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3.

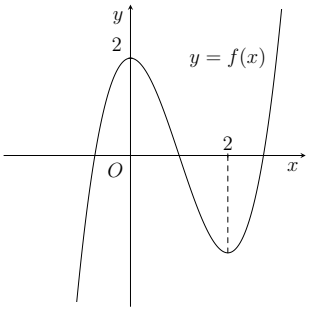
Từ bảng biến thiên, ta thấy đồ thị có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{c}{b}=3$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{c}{b}=3 \end{cases}$ (1).

Ta có $y'=\dfrac{ac+b}{(bx+c)^2}<0, \forall x\neq -\dfrac{c}{b}\Leftrightarrow ac+b<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{b}{2}\cdot(-3b)+b<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0. \end{array}\right.$

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình.



a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2

b) Giá trị b bằng 0

c) Giá trị $c=-2$

d) $f(x)=x^3-6x^2+2$

Hướng dẫn giải.

Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=2$, điểm cực đại là $x=0$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì 0, 2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên $b = 0$, $a = -3$.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; 2)$ nên $c = 2$.

Ta có $a = -3$, $b = 0$, $c = 2$ suy ra $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

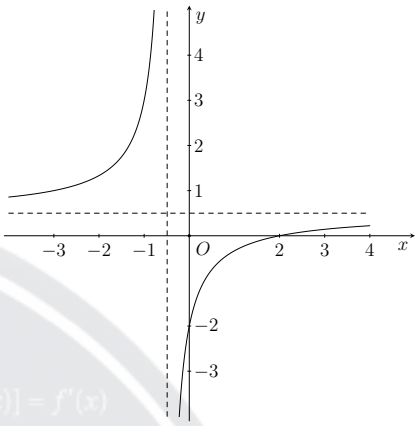
Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

c) Các đường tiệm cận của hàm số là $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên



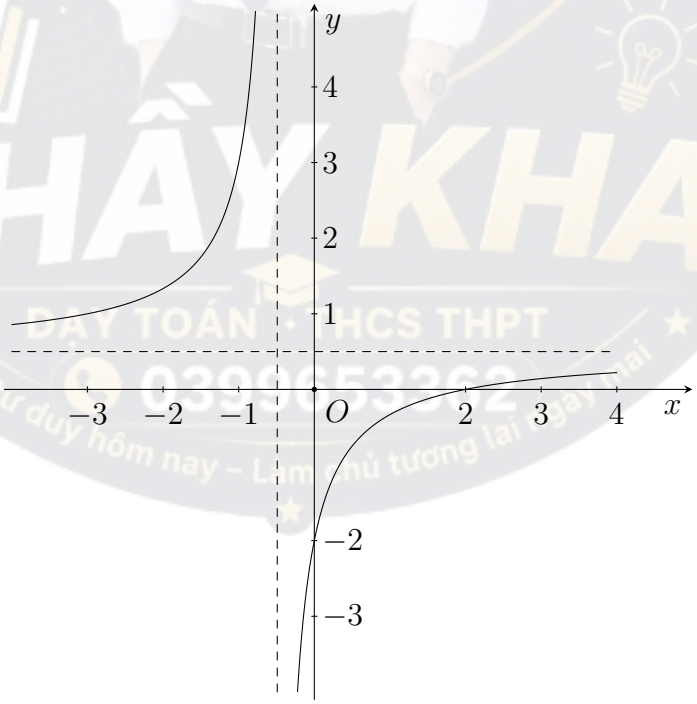
Hướng dẫn giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

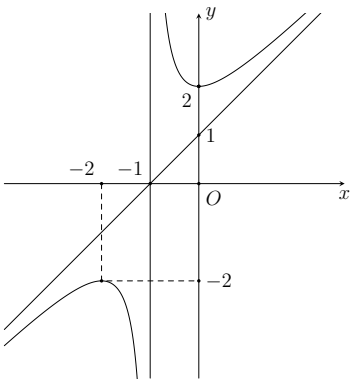
Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$.

Các đường tiệm cận của hàm số là $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$.

Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên.



Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình vẽ bên



a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

b) Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y=x+1$

c) Gọi A, B là hai cực trị của hàm số đã cho, diện tích tam giác OAB bằng 8 (với O là gốc toạ độ)

d) Một trục đối xứng của đồ thị đã cho là $d\colon y=(x+1)\tan\dfrac{3\pi}{8}$

Hướng dẫn giải. **Sai**.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-2;-1)$ và $(-1;0)$. **Đúng**.

Gọi phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $d\colon y=a_1x+b_1\,(a_1\neq 0)$.

Ta thấy d đi qua các điểm có tọa độ $(0;1)$, $(-1;0)$ nên $\begin{cases}1=b\\-a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1.\end{cases}$

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $y=x+1$. **Sai**.

Ta có 2 điểm cực trị của hàm số đã cho có tọa độ là $A\,(0;2)$, $B\,(-2;-2)$.

Ta có $AO=2$, $BO=2\sqrt{2}$ và $AB=2\sqrt{5}$.

Nửa chu vi của $\triangle ABO$ bằng $p=\dfrac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $S_{OAB}=\sqrt{\mathrm{P}\,(p-2)\left(p-2\sqrt{2}\right)\left(p-2\sqrt{5}\right)}=2$. **Đúng**.

Từ đô thị hàm số ta thấy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $\Delta\colon x=-1$.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho chính là tia phân giác của góc tạo bởi tiệm cận xiên $d\colon x-y+1=0$ và tiệm cận đứng $\Delta\colon x+1=0$.

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi (d,Δ) là

$$\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}=\pm(x+1)\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x-y+1=\sqrt{2}\,(x+1)\\&x-y+1=-\sqrt{2}\,(x+1)\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&y=\left(1-\sqrt{2}\right)(x+1)\\&y=\left(1+\sqrt{2}\right)(x+1)=(x+1)\tan\frac{3\pi}{8}.\end{aligned}\right.$$

Bài 7. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Hướng dẫn giải. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Kẻ đường thẳng $y = 2$ đi qua điểm $(0; 2)$ và song song với trục Ox, đường này cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ d = 4 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy có đúng hai số âm trong bốn hệ số.

Với $a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 4$, ta có hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Thay $x = -4$ ta được

$$y = -(-4)^3 - 3(-4)^2 + 4 = 64 - 48 + 4 = 20.$$

Nên đồ thị đi qua điểm $(-4; 20)$.

Bài 8. Cho hàm số $\mathrm{f}(x) = 2x + \dfrac{2}{x-1}$.

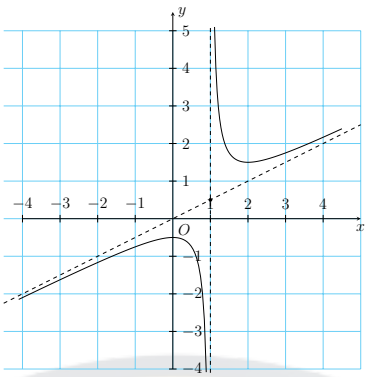
a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b) Phương trình $\mathrm{f}'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là 0 và 2.

c) Hàm số đã cho có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$ $+\infty$

d) Hàm số đã cho có đồ thị như sau



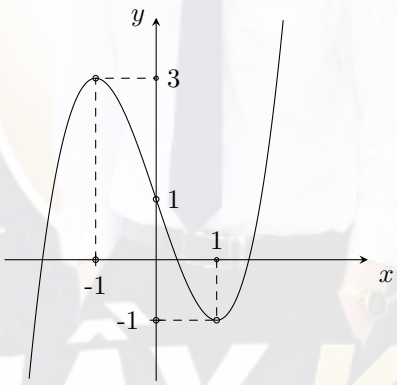
Hướng dẫn giải. Sai. Vì $f'(x) = 2 - 2\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Đúng. Ta dễ dàng đạo hàm và giải phương trình $f'(x) = 0$ và có 2 nghiệm phân biệt là 0 và 2.

Đúng. Vì ta có thể suy luận được tiệm cận đứng là $x = 1$ và $f'(x) = 0$ và có 2 nghiệm phân biệt là 0 và 2.

Sai. Vì thay $x = 2$ vào hàm số $\mathrm{f}(x) = 2x + \dfrac{2}{x-1}$ ta có giá trị là 6.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0;1)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a - b + c + d = -1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Hướng dẫn giải. Đồ thị có hai điểm cực trị là $(-1;3)$ và $(1;-1)$,có tâm đối xứng là $(0;1)$. Do đó, đồ thị cắt trục tung tại $(0;1)$.

Do $(0;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị nên đường thẳng qua điểm đó luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I, A, B với I là trung điểm của A, B, suy ra $x_A + x_B = 2x_I$.

Do đó hoành độ 3 điểm này lập thành cấp số cộng.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362

Ta có:

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a+2b+c=0 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1. \end{cases}$$

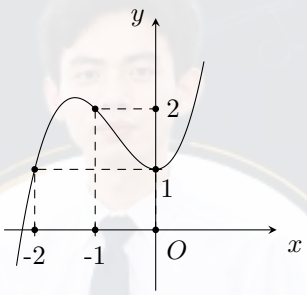
Vậy $a-b+c+d=1-0-3+1=-1$.

Hàm số tìm được là $y=x^3-3x+1$, ta có

$$f(3)=27-9+1=19\neq 18.$$

Vậy đồ thị không đi qua điểm $(3;18)$.

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a+3b+c=9$

Hướng dẫn giải. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu là $y=1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0;1)$.

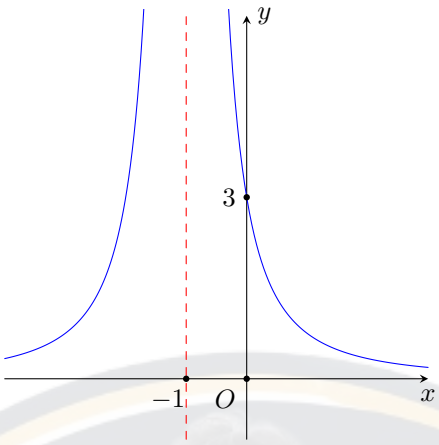
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_0)$ với $-2<x_0<-1$.

Đồ thị đi qua các điểm $(-2;1)$, $(-1;2)$, $(0;1)$ và đạt cực trị tại $x=0$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(-2)=1 \\ f(-1)=2 \\ f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a+4b-2c+d=1 \\ -a+b-c+d=2 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow 2a+3b+c=2+6=8.$$

Bài 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận $x=-1$

làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên.



Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.

a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Hướng dẫn giải.

Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$.

Do $f'(x)>0, \forall x\neq -1$ nên hàm số đã cho $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Do $f'(x)>0, \forall x\neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8$ suy ra $f(-3)\neq 8$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3 \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$.

Vì $f'(x)>0, \forall x\neq 1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8 \Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2 \\ -c+d=0 \\ b-2a=8(d-2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=d \\ a-b=3d \\ b-2a=-8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5d \\ b=2d \\ c=d. \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x)=\dfrac{5dx+2d}{dx+d}=\dfrac{5x+2}{x+1} \Rightarrow f(2)=4$.

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

Hướng dẫn giải.

Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$.

Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(-1;1)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m\left(-\dfrac{m}{2}\right)-1\neq 0\Leftrightarrow m^2+2\neq 0$ đúng với mọi giá trị m.

Khi đó, TCĐ là đường thẳng $x=-\dfrac{m}{2}$. Vì TCĐ đi qua điểm $A(-1;\sqrt{2})$ nên ta có $-\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2+2}{(2x+m)^2}>0,\forall x\neq -\dfrac{m}{2}$.

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

a) $a>0$

b) Tâm đối xứng I của đồ thị (C) có tung độ bằng 2

c) $y=f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

d) Gọi A,B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) và M,N là giao điểm của đồ thị (C) với trục Ox $(x_M<2<x_N)$. Khi đó các điểm A,B,M,N không cùng nằm trên một đường tròn

Hướng dẫn giải.

a) Nhìn vào bảng biến thiên, khi $x\to+\infty$ thì $f(x)\to+\infty$, do đó hệ số $a>0$.

b) Tâm đối xứng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.
Ta có điểm cực đại $(1;2)$ và điểm cực tiểu $(3;-2)$.
Do đó tung độ tâm đối xứng $y_I=\dfrac{2+(-2)}{2}=0$.

c) Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.
Theo đề bài ta có $\begin{cases}y(1)=2\\y(3)=-2\\y'(1)=0\\y'(3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c+d=2\\27a+9b+3c+d=-2\\3a+2b+c=0\\27a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=9\\d=-2.\end{cases}$
Vậy $y=f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

d) Ta có $A(1;2)$ và $B(3;-2)$.
Giao điểm của (C) với trục Ox là $M(2-\sqrt{3};0)$ và $N(2+\sqrt{3};0)$.
Gọi phương trình đường tròn (C') đi qua 3 điểm A, B, M có dạng
$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0\,(a^2+b^2-c>0).$$

Thay tọa độ A, B, M vào phương trình đường tròn (C') ta được

$$\begin{cases} -2a-4b+c=-5 \\ -6a+4b+c=-13 \\ (-4+2\sqrt{3})a+c=-7+4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2 \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-1. \end{cases}$$

Do đó phương trình đường tròn (C') : $x^2+y^2-\left(\dfrac{12+2\sqrt{3}}{3}\right)x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{4\sqrt{3}-3}{3}=0$.

Thế $N(2+\sqrt{3};0)$ vào đường tròn (C') ta được $-4\neq 0$.
Vậy $N(2+\sqrt{3};0)$ không thuộc đường tròn (C')

Bài 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

b) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ $(-2;-1)$

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng, 1 đường tiệm cận ngang và 1 đường tiệm cận xiên

Hướng dẫn giải.

a) $y'=\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+3x+5=0$.
Do $\Delta=3^2-4\cdot 5=-11<0$ nên phương trình trên vô nghiệm, tức là đồ thị hàm số đã cho không cắt trục hoành.

c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận xiên $y=x+1$.
Tâm đối xứng của đồ thị hàm số và giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên, khi đó $I(-2;-1)$.

d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

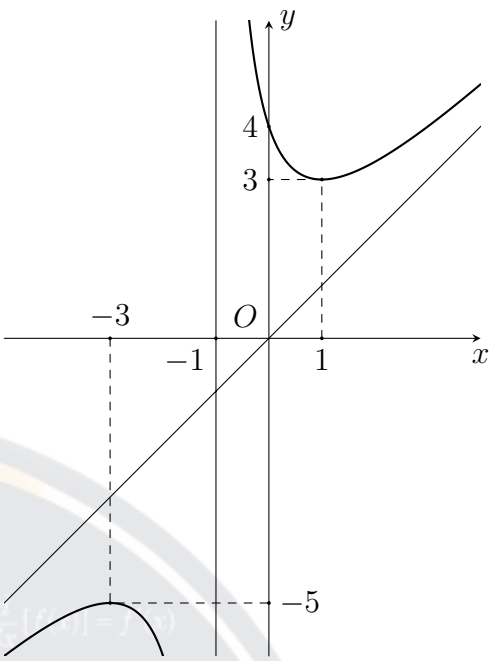
Bài 15. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O và điểm $(1; 1)$. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$

c) Phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x$

d) $a + b + c + d = 7$



Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số và các giả thiết đã cho, ta có

a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$. Khi đó mẫu số $x + d = 0$ tại $x = -1$, suy ra $-1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và cực tiểu tại $x = 1$.
Trên khoảng $(-3; 1)$, đồ thị hàm số bị gián đoạn tại $x = -1$.
Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-3; -1)$ và $(-1; 1)$, không nghịch biến trên cả khoảng $(-3; 1)$.

c) Đường tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $(1; 1)$ nên có phương trình $y = x$.

d) Ta có $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 1} = ax + (b - a) + \dfrac{c - b + a}{x + 1}$.
Vì tiệm cận xiên là $y = x$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 1$.
Đồ thị cắt trục tung tại $(0; 4) \Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow \dfrac{c}{1} = 4 \Rightarrow c = 4$.
Vậy $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$, $d = 1$. Tổng $a + b + c + d = 1 + 1 + 4 + 1 = 7$.

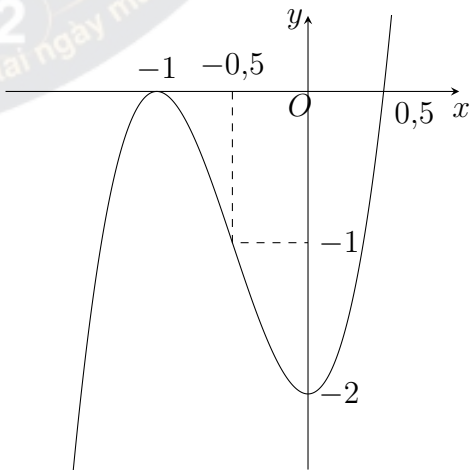
Bài 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

b) Tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ bằng -2

c) $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm có hoành độ $x = 0$

d) $3a + 2b + c - d = 25$



Hướng dẫn giải.

a) Từ đồ thị ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$, $(0;+\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

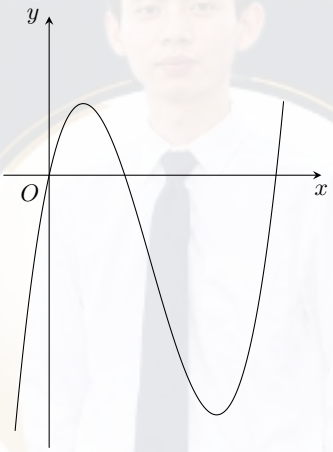
b) Ta có $M=\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y=0$, $m=\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y=-2$. Suy ra $M+m=-2$.

c) Từ đồ thị, ta có $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$, đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm có hoành độ $x=0$.

d) Ta có $\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(-1)=0 \\ f(-0{,}5)=-1 \\ f(0{,}5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-2 \\ -a+b-c+d=0 \\ a\cdot(-0{,}5)^3+b\cdot(-0{,}5)^2+c\cdot(-0{,}5)+d=-1 \\ a\cdot(0{,}5)^3+b\cdot(0{,}5)^2+c\cdot(0{,}5)+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \\ c=0 \\ d=-2. \end{cases}$

Suy ra $3a+2b+c-d=3\cdot 4+2\cdot 6+0-(-2)=26$.

Bài 17. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên



a) Hệ số a là số âm $(a<0)$

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm

c) Hàm số có 3 cực trị

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương

Hướng dẫn giải.

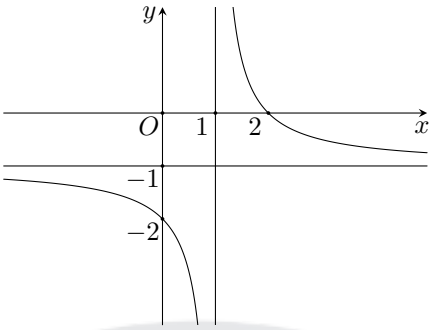
a) Vì hướng đuôi đồ thị là hướng lên nên $a>0$.

b) Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu nên tổng giá trị cực đại và cực tiểu là số âm.

c) Hàm số có 2 điểm cực trị.

d) Xét hàm số có đồ thị hàm số trên là $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$, từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt do đó $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}>0$ mà $a>0$ nên $c>0$.
Lại có $S=x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0$ mà $a>0$ nên $b<0$.
Do đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d=0$.
Vậy trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đồ thị (C) là đường cong như hình vẽ bên.



a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = -1$

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

c) $c = -1$

d) Tổng $a + b + c = -2$

Hướng dẫn giải.

a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = -1$.

b) Đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải trên từng khoảng xác định $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, do đó hàm số **nghịch biến** trên các khoảng xác định.

c) Từ đồ thị ta có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1$.

d) Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y = -1 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = -1 \Rightarrow \dfrac{a}{-1} = -1 \Rightarrow a = 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$, thay vào hàm số: $f(0) = \dfrac{b}{1} = -2 \Rightarrow b = -2$.

Vậy $a + b + c = 1 + (-2) + (-1) = -2$.

Bài 19. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	13	↘	$-\infty$

c) Tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số lần lượt là là $x = 2$, $y = 2x + 1$

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $4\sqrt{17}$

Hướng dẫn giải. Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Ta có $y' = \dfrac{(2x-3)(x-2) - (2x^2 - 3x + 6)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$.

b) Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖	↘	13	↗	$+\infty$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$. Suy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.
Ta lại có

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-3x+6}{x-2}-(2x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+1+\frac{8}{x-2}-(2x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x-2}=0.$$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = 2x + 1$.

d) Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;-3)$ và $B(4;13)$. Khi đó, $\overrightarrow{AB} = (4;16) \Rightarrow AB = 4\sqrt{17}$.
Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị là $4\sqrt{17}$.

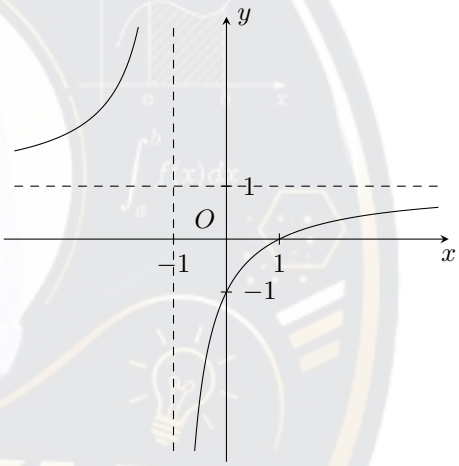
Bài 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Đạo hàm hàm số là $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y = 1$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $(1;-1)$

d) Đồ thị (C) là hình vẽ như hình bên



Hướng dẫn giải.

a) Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang là $y = 1$.
Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-1;1)$.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang là $y = 1$. Đồ thị đi qua các điểm $(1;0)$ và $(0;-1)$ và hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
Vậy đồ thị hàm số như hình bên.

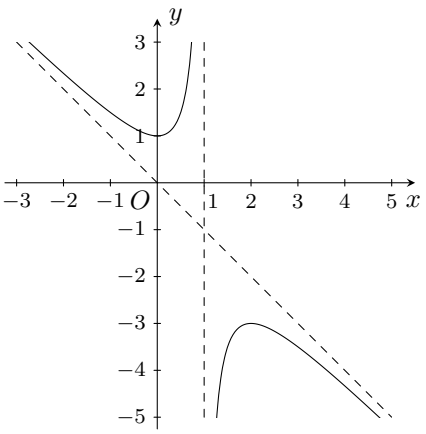
Bài 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{-x+1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ bằng -3

d) Hàm số có đồ thị như hình vẽ bên



Hướng dẫn giải.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $-x+1=0\Leftrightarrow x=1$.
Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$.

b) Tính đạo hàm của hàm số:

$$y'=\frac{-x(x-2)}{(-x+1)^2}=0\Leftrightarrow -x(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	-3	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

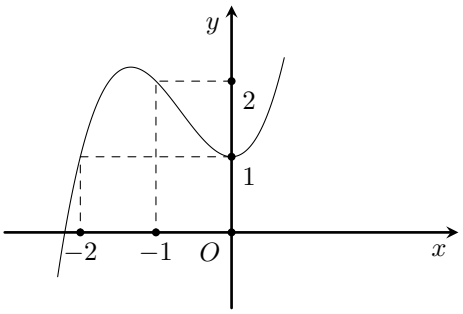
c) Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ là -3.

d) Dựa vào đồ thị, ta thấy:

- Tiệm cận đứng là $x=1$.
- Tiệm cận xiên là $y=-x$.
- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;1)$.
- Đồ thị có một điểm cực trị tại $x=2$, $y=-3$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{-x+1}$ có đồ thị phù hợp với đồ thị hình vẽ trên.

Bài 22. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

c) Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có toạ độ $(0; 1)$

d) Trong 4 số a, b, c, d có 3 số dương

Hướng dẫn giải.

a) **Sai**.
Từ đồ thị hàm số, ta thấy trên khoảng $(-1; +\infty)$ hàm số không đồng biến.

b) **Sai**.
Từ đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

c) **Đúng**.
Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

d) **Đúng**.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ nên ta có $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \Rightarrow d = 1$.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$ nên ta có

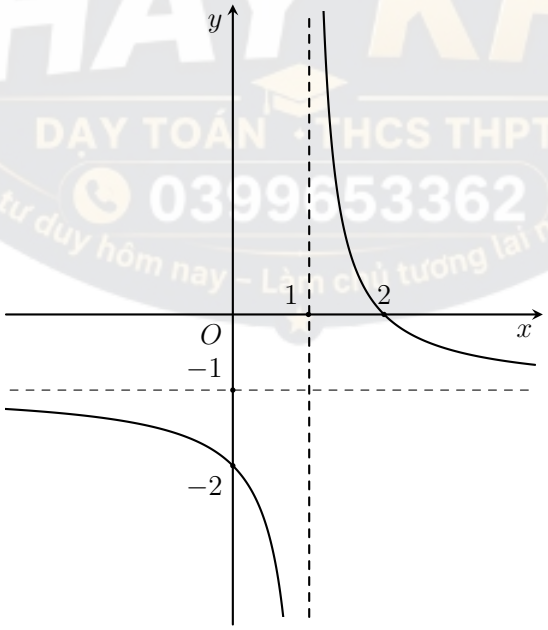
$$f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1) + d = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2.$$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 1)$ nên ta có

$$f(-2) = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2) + d = 1 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 1.$$

Từ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
Mặt khác, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ nên $0 = 3 \cdot 0^2 \cdot a + 2 \cdot 0.b + c \Rightarrow c = 0$.
Do đó ta có hệ $\begin{cases} -a + b - c + 1 = 2 \\ -8a + 4b - 2c + 1 = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ d = 1. \end{cases}$
Vậy trong 4 số a, b, c, d có ba số dương.

Bài 23. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + 1}$ với a, b, $c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



a) Đạo hàm của hàm số $f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-1$

d) Tổng $a+b+c=5$

Hướng dẫn giải. Đồ thị nhận đường thẳng $y=-1$ làm tiệm cận ngang nên

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+1}=-1\Leftrightarrow\frac{a}{c}=-1. \qquad (1)$$

Đồ thị nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng nên $\begin{cases}1\cdot c+1=0\\1\cdot a+b\neq 0.\end{cases}$ (2)

Đồ thị đi qua các điểm $(2;0)$, $(0;-2)$ nên ta có $\begin{cases}2a+b=0\\f(0)=-2.\end{cases}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\begin{cases}b=-2\\c=-1\\a=1\end{cases}$.

Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{-x+1}$.

a) Ta có $f'(x)=\dfrac{-2}{(-x+1)^2}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$

d) Vì $\begin{cases}b=-2\\c=-1\\a=1\end{cases}$ nên $a+b+c=-2$.

Bài 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang

c) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng

d) Hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải.

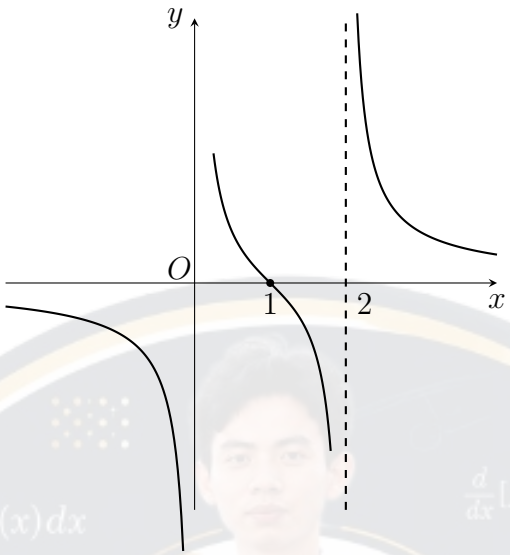
a) Sai: Hàm số không xác định tại $x=-1$

b) Sai: Khi $\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y\to+\infty\\x\to-\infty\Rightarrow y\to-\infty\end{cases}$ nên hàm số không có tiệm cận ngang

c) Sai: Hàm số có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$

d) Sai: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

Bài 25. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0;2)$

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang

d) Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0;2)$

b) Đúng: Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

c) Đúng: Hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang

d) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Bài 26. Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1 970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ tính bằng nghìn người})$$

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1 980 là 18 nghìn người

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1 995 là 23 nghìn người

c) Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1 998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Hướng dẫn giải.

a) Vào đầu năm 1 980, $t = 10 \Rightarrow f(10) = 18$.
Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Vào đầu năm 1 995, $t = 25 \Rightarrow f(25) = 22$.
Số dân của thị trấn vào đầu năm 1 995 là 22 nghìn người.

c) $f'(t) = \dfrac{120}{(t+5)^2} > 0,\ \forall t > 0$; $f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ vì liên tục trên khoảng $(-5;+\infty)$.
Hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

d) Tốc độ tăng dân số vào năm 1990:

$$f'(20) = \frac{120}{(20+5)^2} = \frac{120}{625} = 0{,}192 \quad \text{do } t = 1\,990 - 1\,970 = 20.$$

Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2 008 của thị trấn là

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0{,}065 \quad \text{do } t = 2\,008 - 1970 = 38.$$

Ta có $f'(t) = 0{,}125 \Rightarrow \dfrac{120}{(t+5)^2} = 0{,}125 \Rightarrow t + 5 = \sqrt{\dfrac{120}{0{,}125}} = \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$

Vậy vào năm 1 996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Bài 27. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2 023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100e^{0{,}012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0 \le t \le 50$.

a) Dân số của quốc gia vào năm 2 030 là 108,763 (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2 035 là 125,488 (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến t xác định trên đoạn $[0;50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;50]$

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2 040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm

Hướng dẫn giải.

a) Dân số năm 2030 ứng với $t = 7 \Rightarrow N(7) = 100e^{0{,}012\cdot 7} = 100e^{0{,}084} \approx 108{,}763$ triệu người.

b) Dân số năm 2 035 ứng với $t = 12 \Rightarrow N(12) = 100e^{0{,}012\cdot 12} = 100e^{0{,}144} \approx 115{,}488$, không phải 125,488.

c) Trên đoạn $[0;50]$, ta có đạo hàm: $N'(t) = 0{,}012 \cdot 100e^{0{,}012t} = 1{,}2e^{0{,}012t} > 0,\ \forall t \in [0;50]$. Do đó, hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;50]$.

d) Ta có: $N'(t) = 1{,}2e^{0{,}012t}$.
Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm ta có:

$$1{,}2e^{0{,}012t} = 1{,}6 \Rightarrow e^{0{,}012t} = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{4}{3}}{0{,}012} \approx 23{,}97$$

Vậy vào năm 2 046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Bài 28. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \ge 0$.

a) Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.

b) Hàm vận tốc của vật là $v(t) = 3t^2 - 12$.

c) Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.

d) Trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$ thì quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai:** Nếu y là hàm số biểu thị cho chuyển động của hạt thì y' là hàm vận tốc v.

b) **Đúng:** Ta có $y = t^3 - 12t + 3 \Rightarrow y' = v = 3t^2 - 12$.

c) **Sai:** Dựa vào hàm vận tốc $v(t) = 3t^2 - 12$ thì hạt đi lên khi $v > 0$ và xuống khi $v < 0$.
Do đó, vật đi lên khi $t \in (2;+\infty)$ và đi xuống khi $t \in (0;2)$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động đi xuống.

d) **Đúng:** Từ $t = 0$ tới $t = 2$, vật chuyển động từ tọa độ $y = 3$ đến tọa độ $y = -13$, tức là vật đi được quãng đường 16 đơn vị độ dài.
Từ $t = 2$ tới $t = 3$, vật chuyển động từ tọa độ $y = -13$ đến tọa độ $y = -6$, tức là vật đi được quãng đường 7 đơn vị độ dài.
Kết luận quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$ là $16 + 7 = 23$ đơn vị độ dài.

Bài 29. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

d) Bên A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng:** Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng.

b) **Sai:** Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449 \text{ triệu đồng.}$$

c) **Đúng:** Lợi nhuận mà A thu được là: $H(x) = R(x) - C(x) = x \cdot P(x) - C(x)$

$\Rightarrow H(x) = x(45 - 0,001x^2) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100.$

d) **Đúng:** Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100, (0 \le x \le 100)$.

Ta có: $H'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Rightarrow x = 50\sqrt{2} \approx 70,7$ (tấn).

Bảng biến thiên cho thấy tại $x = 50\sqrt{2}$ hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Vậy bán khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$.

Bài 30. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng:** Chi phí mỗi ngày là tổng các khoản chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) **Sai:** Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 5 = 25$ triệu đồng.

c) **Sai:** Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là:

$$\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}.$$

d) **Đúng:** Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$ trên $(0; 200]$.

Ta có $\bar{c}'(x) = 0,0005 - \dfrac{5}{x^2}$.

$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100$.

Vẽ bảng biến thiên, chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

Bài 31. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) Sai. Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 5 = 25$ (triệu đồng).

c) Sai. Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là $\bar{c}(x) = \dfrac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Đúng. Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$ với $0 < x \leq 200$.

Ta có $\bar{c}'(x) = 0,0005 - \dfrac{5}{x^2} = \dfrac{5}{10^4} - \dfrac{5}{x^2}$.

$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100$ (do $x \in (0; 200]$).

Bảng biến thiên:

x	0		100		200
$\bar{c}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\bar{c}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}25$	$\nearrow$	$0{,}275$

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0;100)$.

Bài 32. Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.

b) Khi thả 10 con tôm giống/m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8$ kg/m^2.

c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/m^2.

d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con/m^2.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông ao nuôi là $M(x) = (108 - x^2)x$.

b) Sai. Khi $x = 10$, $M(10) = (108 - 10^2) \cdot 10 = 80$ $(gam) = 0,08$ kg.

c) Đúng. Để tôm phát triển được, $x > 0; x^2 \leq 108 \Rightarrow 0 < x \leq 10,39$.

Xét hàm số $M(x) = (108 - x^2)x = -x^3 + 108x$.

Có $M'(x) = -3x^2 + 108 = -3(x^2 - 36)$; $M'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$. Bảng biến thiên:

x	0		6		$10,39$
$M'(x)$		$+$	0	$-$	
$M(x)$	0	$\nearrow$	432	$\searrow$	0

Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/m^2.

d) Sai. Lượng tôm thu được tăng lên khi hàm số $M(x)$ đồng biến. Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in (0;6)$, hay mật độ tôm không quá 6 con/m^2.

Bài 33. Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \geq 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t.

a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.

c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.

d) Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27(m)$.

b) Đúng. Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$. Tại $t = 1(s)$ thì $v(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9 = 6(m/s)$.

c) Sai. Khi $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 18 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (do $t \geq 0$). Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 27(m)$.

d) Sai. Xét hàm $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 \Rightarrow v'(t) = 6t - 6$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc $v(t)$ giảm trong khoảng thời gian từ $0(s)$ đến $1(s)$.

Bài 34. Ông M mua tặng vợ món quà đặt trong chiếc hộp chữ nhật thể tích 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, độ dày lớp mạ không đổi. Gọi h và x lần lượt là chiều cao và cạnh đáy.

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x > 4$ thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Thể tích khối hộp chữ nhật $V = x \cdot x \cdot h = x^2h$.

b) Sai. Chiếc hộp có 1 mặt đáy hình vuông cạnh x và 4 mặt bên hình chữ nhật kích thước x và h. Vậy diện tích các mặt ngoài là $S_{xq} = x^2 + 4xh$.

c) Sai. Vì mạ vàng trên mọi điểm của chiếc hộp nên mạ cả mặt trong và mặt ngoài. Vậy $S_{MV} = 2S_{xq} = 2(x^2 + 4xh) = 2x^2 + 8xh$.

d) Đúng. Ta có $V = x^2h = 32 \Rightarrow h = \dfrac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S(x) = 2x^2 + 8x \cdot \dfrac{32}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$.

Xét $f(x) = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 4x - \dfrac{256}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 256}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Bảng biến thiên:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $x > 4$ hàm số $f(x)$ tăng. Vậy lượng vàng được mạ càng tăng.

3) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{5x^2 - 6x + 9}{x - 1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. **Trả lời: 13**

Ta có $f(x) = 5x - 1 + \dfrac{8}{x - 1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $y = 5x - 1$ tương ứng là TCĐ và TCX. Suy ra $a = 1, b = 4 \Rightarrow C = 1 + 3 \cdot 4 = 13$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (T). Số giao điểm của (C) với (T) là?

Hướng dẫn giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: (ĐK $x \neq 1$)

$$x^3 - 3x + 2 = \frac{x + 2}{x - 1} \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)^2 - \frac{x + 2}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) \cdot \left((x - 1)^2 - \frac{1}{x - 1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2 = 0 \\ (x - 1)^3 = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -2 \text{ (TM)} \\ x = 2 \text{ (TM)} \end{bmatrix}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x + 3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Hướng dẫn giải.

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$$f(x + 3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x + 3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x + 3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x + 3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -1 \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$						

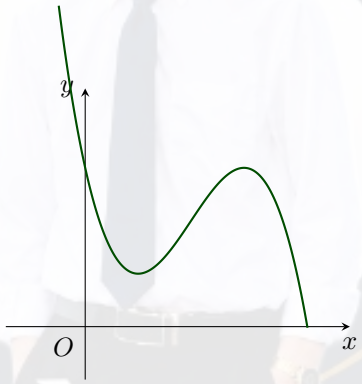
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=x^3-3x+3$ tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 1<-m<5 \Leftrightarrow -5<m<-1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thoả đề.

Bài 4. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

Hướng dẫn giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty\Rightarrow a<0$.

Gọi x_1,x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1,x_2 là nghiệm phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nên theo định lý Viet:

+) Tổng hai nghiệm $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow b>0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}>0\Rightarrow c<0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a,b,c,d (đó là b và d).

Bài 5. Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

Hướng dẫn giải.

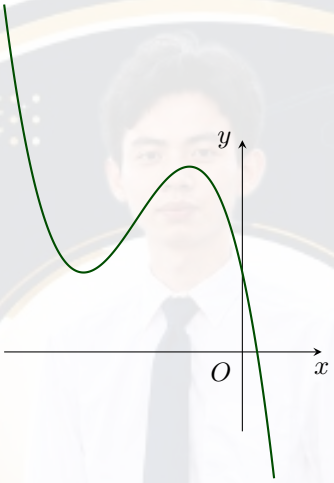
Ta có $y=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow y'=3x^2+2ax+b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y'(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 0=(-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c \\ 0=3\cdot(-2)^2+2a\cdot(-2)+b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}.$$

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3^2+0^2+(-4)^2=25$.

Bài 6. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

Hướng dẫn giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0$.

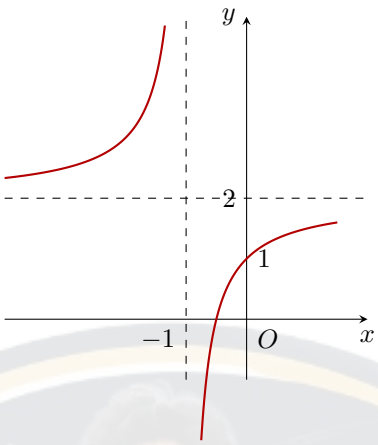
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b<0$ và $c<0$.

Vậy trong các số a,b,c,d chỉ có $d>0$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$ $(ad-b\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi điểm $M(a;b)$, $a<0$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất khi đó $a+b$ bằng

Hướng dẫn giải. **Trả lời: 1**

Ta có: Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{1}=-1\Rightarrow d=1$.

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{1}=2\Rightarrow a=2$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1)\Rightarrow \dfrac{b}{d}=1\Rightarrow b=d=1$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Gọi điểm $M\left(m;\dfrac{2m+1}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng $x=-1$ là: $|m+1|$.

Khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang $y=2$ là: $\left|\dfrac{2m+1}{m+1}-2\right|=\left|\dfrac{-1}{m+1}\right|=\dfrac{1}{|m+1|}$.

Ta có tổng khoảng cách $T=|m+1|+\dfrac{1}{|m+1|}\geq 2\cdot\sqrt{|m+1|\cdot\dfrac{1}{|m+1|}}=2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m+1|=\dfrac{1}{|m+1|}\Leftrightarrow |m+1|^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\Rightarrow M(0;1)\\ m=-2\Rightarrow M(-2;3)\end{array}\right.$.

Vì M có hoành độ âm nên $M(-2;3)$ là điểm cần tìm.

Khi đó tọa độ M ứng với $a=-2;b=3\Rightarrow a+b=-2+3=1$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+1}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Hướng dẫn giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+1}{x-1}$ (1)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta viết lại: $y=mx+\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y'=m-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $(x\neq 1)$.

Để hàm số (1) có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi $m > 0$ thì đồ thị hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng $d : y = 2mx - m$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là A, B. Suy ra $A(x_1; 2mx_1 - m), B(x_2; 2mx_2 - m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $m(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (2).

Ta có: $y_A \cdot y_B = (2mx_1 - m)(2mx_2 - m) = m^2(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = m^2(4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1)$.

Áp dụng định lý Viet cho (2) ta có: $x_1x_2 = \dfrac{m-1}{m}; x_1 + x_2 = 2$.

Suy ra $y_A \cdot y_B = m^2\left(\dfrac{4(m-1)}{m} - 2(2) + 1\right) = m^2\left(\dfrac{4m - 4 - 3m}{m}\right) = m(m-4)$.

Để A, B nằm khác phía so với trục hoành thì $y_A \cdot y_B < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2c+1$	↘	$-a$	↗	$+\infty$

Tìm $S = a + b + c + d$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

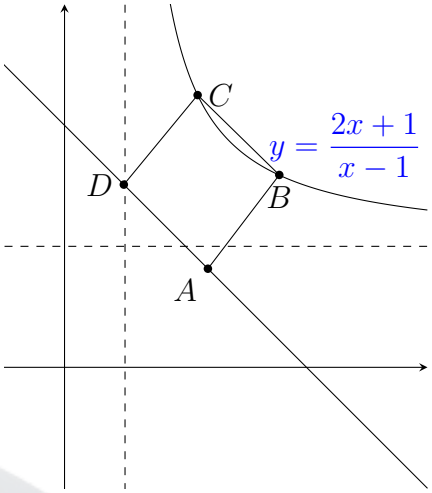
Dựa vào bảng biến thiên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(-2) = -2c + 1 \\ f(1) = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -2c + 1 \\ a + b + c + d = -a \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -12 \\ d = 5 \end{cases}$.

$\Rightarrow S = a + b + c + d = 2 + 3 - 12 + 5 = -2$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 10. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d)\colon y=-x+4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Gọi $(d_1)\colon y=-x+m$ (với $m>4$) song song với $(d)\colon y=-x+4$ và cắt $(C)\colon y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, $C\,(x_B;x_C)$ với $x_C>1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (C) là

$$\frac{2x+1}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow x^2+(1-m)x+m+1=0.$$

Điều kiện có nghiệm là

$$\Delta=m^2-6m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\ m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m>3+2\sqrt{3}\qquad(\text{vì } m>4).\qquad(1)$$

Khi đó ta có $\begin{cases}x_C+x_B=m-1\\ x_Cx_B=m+1.\end{cases}$

Suy ra $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(-x_B+m+x_C-m)^2}=\sqrt{2\,(x_B-x_C)^2}$.

Hay $CB^2=2\,(x_B-x_C)^2=2\,(x_B+x_C)^2-8x_Bx_C=2m^2-12m-6$.

Mặt khác chọn $I(0;4)\in(d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d);(d_1)$ bằng

$$AB=\mathrm{d}\,(I;(d_1))=\frac{|4-m|}{\sqrt{2}}=\frac{m-4}{\sqrt{2}}.$$

Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2=BC^2\Leftrightarrow\dfrac{(m-4)^2}{2}=2m^2-12m-6\Leftrightarrow m=\dfrac{8\pm2\sqrt{37}}{3}$.

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m=\dfrac{8+2\sqrt{37}}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng $\dfrac{\dfrac{8+2\sqrt{37}}{3}-4}{\sqrt{2}}\approx1{,}92$.

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d\colon y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2=mx+m+8$$

$$\Leftrightarrow x^3-(m+2)x^2-(3m+13)x-2m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\\ x=m+5.\end{array}\right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C khi $\begin{cases} m \neq -7 \\ m \neq -6 \end{cases}$.

Giả sử

$$B(-1;8), \quad C\left(m+5; m^2+6m+8\right).$$

Ta có $I(1;4)$, $\overrightarrow{IB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{IC} = (m+4; m^2+6m+4)$. Vì tam giác IBC cân tại $I(1;4)$ nên

$$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow (m+4)^2 + (m^2+6m+4)^2 = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -6 \text{ (loại)} \\ m = -2 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m là $-2-2+\sqrt{3}-2-\sqrt{3} = -6$.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d)\colon y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x+1$. Tìm giá trị của tham số m.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 2x^2 - mx = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x^2 - 2x - m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0;-1) \\ x^2 - 2x - m = 0. \qquad (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2x - m$.

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C thì phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (1), khi đó theo vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$.

Tọa độ các điểm $B(x_1; mx_1 - 1)$, $C(x_2; mx_2 - 1)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác KBC với $K(4;11)$, ta có

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{4 + x_1 + x_2}{3} = \dfrac{4+2}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} = \dfrac{2mx_1 + 9}{3}. \end{cases}$$

Do G nằm trên đường $y = 2x+1$ nên

$$\frac{2m+9}{3} = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow 2m + 9 = 15 \Rightarrow m = 3.$$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ta thấy $m = 3$ thảo yêu cầu bài toán.

Bài 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S = \left(-\dfrac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(x^2-(6m+5)x-2\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1>-1 \\ x^2-(6m+5)x-2=0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để hàm số có 3 nghiệm phân biệt với hoành độ lớn hơn -1 thì phương trình $x^2-(6m+5)x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(6m+5)^2+8>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0. \end{cases}$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1\cdot x_2=-2 \\ x_1+x_2=6m+5. \end{cases}$

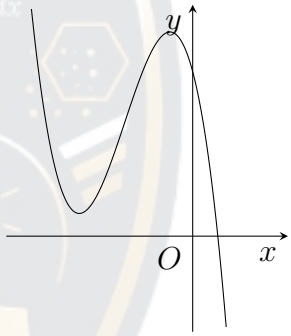
Do đó

$$\begin{cases} 6m+5>-2 \\ x_1+x_2+x_1\cdot x_2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{7}{6} \\ 6m+5-2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{2}{3} \\ m>-\dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{2}{3}.$$

$\Rightarrow S=\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Vậy $a=2,\ b=3 \Rightarrow T=a+b=5$.

Bài 14. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



Hướng dẫn giải. **Phương pháp:**

Từ đồ thị xác định dấu của hệ số a, b, c, d.

Cách giải:

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $a<0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên

$$\begin{cases} \Delta_{y'}>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2b)^2-4(3a)c>0 \\ -\dfrac{2b}{3a}<0 \\ \dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b^2-12ac>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ c>0. \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d>0$.

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d.

Bài 15. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên

hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3 875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km).

Hướng dẫn giải. Vì đồ thị hàm số đi qua $(1;0)$, $(8;0)$ nên $y=\dfrac{a(x-1)(x-8)}{b(x-c)}$.

Đặt $\dfrac{a}{m}=d \Rightarrow y=\dfrac{(x-1)(x-8)}{d(x-c)}$.

Vì đồ thị đi qua $(6;5)$ nên $5=\dfrac{(6-1)(6-8)}{d(6-c)} \Rightarrow d(6-c)=-2 \quad (1)$.

Lại có $y=\dfrac{(x-1)(x-8)}{d(x-c)^2}$.

Vì $(6;5)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số nên $y'(6)=0$.

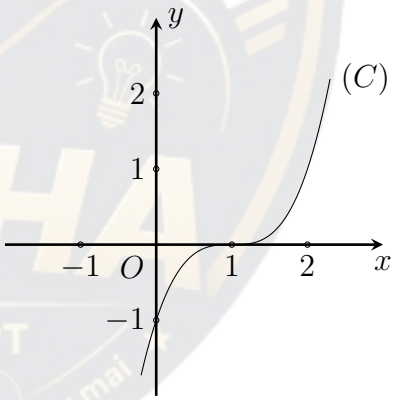
Suy ra $(2\cdot 6-9)(6-c)-(6^2-9\cdot 6+8)=0 \Rightarrow c=\dfrac{28}{3}$.

Từ (1) ta được $d=\dfrac{3}{5}$.

Khi đó $y=\dfrac{(x-1)(x-8)}{\dfrac{3}{5}\left(x-\dfrac{28}{3}\right)}$.

Ta có $3{,}875=\dfrac{(x-1)(x-8)}{\dfrac{3}{5}\left(x-\dfrac{28}{3}\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4{,}125 & \text{(loại)} \\ x=7{,}2 & \text{(thoả mãn).}\end{array}\right.$

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khi đó $f(5)$ bằng



Hướng dẫn giải. Gọi hàm số bậc 3 cần tìm có dạng là $y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.
Từ đồ thị ta có

$$\begin{cases} d=-1 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ b^2-3ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=3 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x^2+3x-1.$$

Suy ra $f(5)=64$.

Bài 17. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m $(m>0)$ cắt đồ thị $(C)\colon y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm giá trị của tham số m.

Hướng dẫn giải. Phương trình đường thẳng $d\colon y = m(x-2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\begin{aligned} &-x^3+6x^2-9x+2 = m(x-2)\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)(x^2-4x+m+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned} &x=2 \Rightarrow A(2;0)\\ &x^2-4x+m+1=0. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = x^2-4x+m+1$.

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^2-4x+m+1=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 16-4(m+1)>0\\ f(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3\\ m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<3.$$

Gọi $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-4x+m+1=0$.

Áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4\\ x_1x_2=m+1. \end{cases}$

Ta có $B(x_1, mx_1-2m)$, $C(x_2, mx_2-2m)$.

Tọa độ hình chiếu của B, C lên trục Oy là $B'(0, mx_1-2m)$, $C'(0, mx_2-2m)$.

Diện tích hình thang $BB'C'C$

$$S = \frac{1}{2}\cdot B'C'\cdot(BB'+CC') = 8 \Rightarrow B'C'\,(BB'+CC') = 16.$$

Ta có $B'C' = |m(x_1-x_2)|$, $BB' = |x_1|$, $CC' = |x_2|$. Khi đó $BB'+CC' = x_1+x_2 = 4$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |m(x_1-x_2)|\cdot 4 = 16\\ &\Leftrightarrow |m(x_1-x_2)| = 4\\ &\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)^2 = 16. \end{aligned}$$

Từ $(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2 = (x_1-x_2)^2$, ta có

$$(x_1-x_2)^2 = 16-4x_1\cdot x_2 = 16-4(m+1).$$

Vậy

$$m^2(16-4m-4) = 16 \Rightarrow m^3-3m^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m=-1 \text{ (loại)}\\ &m=2. \end{aligned}\right.$$

Vậy $m=2$.

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ (C) và đường thẳng $(d)\colon y=x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là

$$\begin{aligned} &\frac{x+2}{x+1} = x+m \quad (1)\\ (1) \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x\neq -1\\ f(x) = x^2+mx+m-2=0 \quad (2). \end{cases} \end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác

$-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ f(-1) = 1 - m + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm phương trình (2).

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2. \end{cases}$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + m)(x_2 + m) < 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow m - 2 - m^2 + m^2 < 0 \Leftrightarrow m < 2. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9; -8; \ldots; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 11 giá trị m.

Bài 19. Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \dfrac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi số giờ làm tăng thêm mỗi tuần là t, $t \in \mathbb{R}$.

Số tổ công nhân bỏ việc là $\dfrac{t}{2}$ nên số tổ công nhân làm việc là $100 - \dfrac{t}{2}$ (tổ).

Năng suất của tổ công nhân còn $120 - \dfrac{5t}{2}$ sản phẩm một giờ.

Số thời gian làm việc một tuần là $40 + t = x$ (giờ).

Để nhà máy hoạt động được thì $\begin{cases} 40 + t > 0 \\ 120 - \dfrac{5t}{2} > 0 \\ 100 - \dfrac{t}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-40; 48).$

Số sản phẩm trong một tuần làm được: $S = \left(100 - \dfrac{t}{2}\right)\left(120 - \dfrac{5t}{2}\right)(40 + t)$.

Số sản phẩm thu được là:

$$f(t) = \left(100 - \frac{t}{2}\right)\left(120 - \frac{5t}{2}\right)(40 + t) - \frac{95(40 + t)^2 + 120(40 + t)}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{2}\left(120 - \frac{5t}{2}\right)(40 + t) - \frac{5}{2}\left(100 - \frac{t}{2}\right)(40 + t) + \left(100 - \frac{t}{2}\right)\left(120 - \frac{5t}{2}\right) - \frac{95}{2}(40 + t) - 30 \\ &= \frac{15}{4}t^2 - \frac{1135}{2}t - 2330 \end{aligned}$$

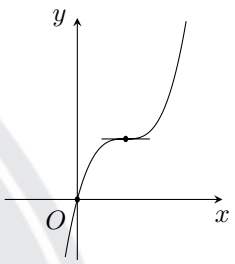
Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = \dfrac{466}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	-40		-4		48
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có số lượng sản phẩm thu được lớn nhất thì thời gian làm việc trong một tuần là $40 + (-4) = 36$

Bài 20. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 1$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị suy ra $d = 0$, $b^2 - 3ac = 0 \Rightarrow ac = \dfrac{b^2}{3}$.

Do đó, $P \geq 2ac + b + 1 = \dfrac{2b^2}{3} + b + 1 = \dfrac{2}{3}\left(b + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{5}{8} \geq \dfrac{5}{8}$.

Vậy $\min P = \dfrac{5}{8} \approx 0{,}63$ tương ứng với $a = c = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, b = -\dfrac{3}{4}$.

Bài 21. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x \neq -1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

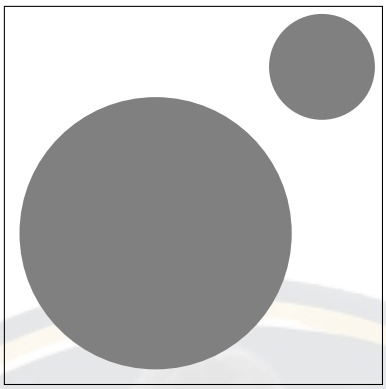
$$\begin{aligned} &\frac{x-3}{x+1} = x - 2m \\ \Leftrightarrow\ & x - 3 = (x+1)(x-2m) \\ \Leftrightarrow\ & x - 3 = x^2 - 2mx + x - 2m \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2mx + 3 - 2m = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Đường thẳng $d\colon y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (3 - 2m) > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 3 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m > 0 \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

Vậy với $1 < m < \dfrac{3}{2}$ thì đường thẳng $d\colon y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên $a + b = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Bài 22. Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi k, $(k \leq 1)$ là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Giả sử cạnh hình vuông bằng 1. Tổng diện tích của 2 hình tròn là $S = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Bài toán đưa về tìm GTLN của biểu thức $P = r_1^2 + r_2^2$, biết $r_1 + r_1\sqrt{2} + r_2 + r_2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ và $0 < r_1, r_2 \leq \frac{1}{2}$.

Từ $r_1 + r_1\sqrt{2} + r_2 + r_2\sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow r_1 + r_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Thay vào $P = r_1^2 + r_2^2 = r_1^2 + \left(2 - \sqrt{2} - r_1\right)^2 = 2r_1^2 - r_1(2 - \sqrt{2}) + \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = f(r_1)$.

Ta có $f'(r_1) = 4r_1 - (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow f'(r_1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Bảng biến thiên

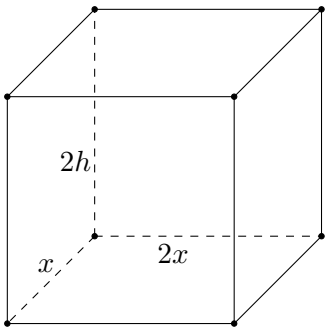
v	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f'(r_1)$		$-$	0	$+$	
$f(r_1)$	$6-4\sqrt{2}$	↘	$\frac{21-14\sqrt{2}}{4}$	↗	$\frac{11-7\sqrt{2}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(r_1) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Khi $r_1 = \dfrac{1}{2}$ thì $r_2 = 2 - \sqrt{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{k} = \dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{2} - 1$ vì $k \leq 1$.

Bài 23. Ông A dự định sử dụng hết 5,5m^2 kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.



Gọi x(m) là chiều rộng, $(x>0)$; chiều dài là $2x$(m); chiều cao là h(m), $(h>0)$.

Theo đề bài, ta có

$$2x^2+4xh+2xh=5{,}5 \Leftrightarrow 2x^2+6xh=5{,}5 \Leftrightarrow h=\frac{5{,}5-2x^2}{6x}.$$

Vì $h>0$ và $x>0$ nên $5<5-2x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra thể tích của bể cá là $V=2x^2h=\dfrac{5,5}{3}x-\dfrac{2}{3}x^3$ với $0<x<\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

$$V'=\frac{11}{6}-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{33}}{6}(N) \\ x=-\dfrac{\sqrt{33}}{6}(L) \end{array}\right. .$$

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V_{max}=V\left(\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)\approx 1,17\text{m}^3$.

Bài 24. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Gọi x $(0<x<60)$ là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60-x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15-\dfrac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15-\dfrac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R=x \Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$.

Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là $f(x)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(15-\dfrac{x}{4}\right)^2$.

Khi đó ta có $f'(x)=\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\left(15-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{15}{2}$.

Cho $f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{15}{\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{4}}$. Suy ra tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $x=\dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là $60-\dfrac{60\pi}{4+\pi}\approx 33,61$.

Bài 25. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x)=0,0001x^2-0,2x+10,000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10.000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x)=\dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30.000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là $0,4$ vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000, \text{ với } x > 0.$$

Ta có $f(x) = M(x) = \dfrac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \dfrac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \dfrac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$f'(x) = 0,0001 - \dfrac{10000}{x^2} = \dfrac{0,0001x^2 - 10000}{x^2}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000$ (do $x > 0$).

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	0		10000		30000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(10000)$	$\nearrow$	$f(30000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 2,2$ (vạn đồng) $= 22000$ (đồng).

Bài 26. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Hãy tính lợi nhuận tối đa đó.

Hướng dẫn giải.

Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

- Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

- Sự biến thiên:

+ Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).

+ Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Trên khoảng $(10; 18)$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{C\text{Đ}} = L(10) = 1200$.

- Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$	-258	↗	1200	↘	-1040

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

Bài 27. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số: $P(t) = \dfrac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \le t \le 10$. Trong đó t là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

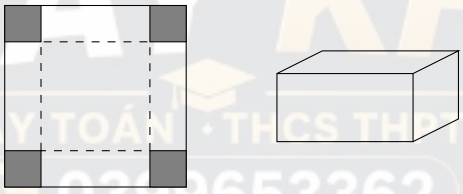
Hướng dẫn giải. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là:

$$P'(t) = \frac{50t \cdot (t^2 + 1) - (25t^2 + 125) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-200t}{(t^2 + 1)^2} \le 0, \forall 0 \le t \le 10$$

$\Rightarrow P(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0; 10]$ và ta có $P'(8) = \dfrac{-200 \cdot 8}{(8^2 + 1)^2} = \dfrac{-64}{169}$.

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim là giảm $\dfrac{64}{169} \approx 0,38$ (mmHg).

Bài 28. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Hướng dẫn giải. Ta có $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là $12 - 2x$ (cm).

Ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$.

Thể tích của hình hộp là: $V = x(12 - 2x)^2$. Xét hàm số $y = x(12 - 2x)^2, x \in (0; 6)$.

Ta có $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x)(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$ ta nhận $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $y(2) = 128$. Vậy $x = 2$ (cm) thì thể tích hộp là lớn nhất.

Bài 29. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) Sai. Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 5 = 25$ (triệu đồng).

c) Sai. Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là $\bar{c}(x) = \dfrac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$.

d) Đúng. Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \dfrac{5}{x}$ với $0 < x \leq 200$.

Ta có $\bar{c}'(x) = 0,0005 - \dfrac{5}{x^2} = \dfrac{5}{10^4} - \dfrac{5}{x^2}$.

$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100$ (do $x \in (0; 200]$).

Bảng biến thiên:

x	0		100		200
$\bar{c}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\bar{c}(x)$	$+\infty$	↘	$0,25$	↗	$0,275$

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

Bài 30. Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.

b) Khi thả 10 con tôm giống/m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8$ kg/m^2.

c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/m^2.

d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con/m^2.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông ao nuôi là $M(x) = (108 - x^2)x$.

b) Sai. Khi $x = 10$, $M(10) = (108 - 10^2) \cdot 10 = 80$ $(gam) = 0,08$ kg.

c) Đúng. Để tôm phát triển được, $x > 0; x^2 \le 108 \Rightarrow 0 < x \le 10,39$.

Xét hàm số $M(x) = (108 - x^2)x = -x^3 + 108x$.

Có $M'(x) = -3x^2 + 108 = -3(x^2 - 36)$; $M'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$. Bảng biến thiên:

x	0		6		$10,39$
$M'(x)$		$+$	0	$-$	
$M(x)$	0	$\nearrow$	432	$\searrow$	0

Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/m^2.

d) Sai. Lượng tôm thu được tăng lên khi hàm số $M(x)$ đồng biến. Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in (0; 6)$, hay mật độ tôm không quá 6 con/m^2.

Bài 31. Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \ge 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t.

a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.

c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.

d) Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27(m)$.

b) Đúng. Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$. Tại $t = 1(s)$ thì $v(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9 = 6(m/s)$.

c) Sai. Khi $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 18 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (do $t \ge 0$). Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 27(m)$.

d) Sai. Xét hàm $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 \Rightarrow v'(t) = 6t - 6$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc $v(t)$ giảm trong khoảng thời gian từ $0(s)$ đến $1(s)$.

Bài 32. Ông M mua tặng vợ món quà đặt trong chiếc hộp chữ nhật thể tích 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, độ dày lớp mạ không đổi. Gọi h và x lần lượt là chiều cao và cạnh đáy.

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x > 4$ thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Thể tích khối hộp chữ nhật $V = x \cdot x \cdot h = x^2h$.

b) Sai. Chiếc hộp có 1 mặt đáy hình vuông cạnh x và 4 mặt bên hình chữ nhật kích thước x và h. Vậy diện tích các mặt ngoài là $S_{xq} = x^2 + 4xh$.

c) Sai. Vì mạ vàng trên mọi điểm của chiếc hộp nên mạ cả mặt trong và mặt ngoài. Vậy $S_{MV} = 2S_{xq} = 2(x^2 + 4xh) = 2x^2 + 8xh$.

d) Đúng. Ta có $V = x^2h = 32 \Rightarrow h = \dfrac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S(x) = 2x^2 + 8x \cdot \dfrac{32}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$.

Xét $f(x) = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 4x - \dfrac{256}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 256}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Bảng biến thiên:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $x > 4$ hàm số $f(x)$ tăng. Vậy lượng vàng được mạ càng tăng.

ĐẠI SỐ - TOÁN - THCS THPT 0399653362 Kiến thức hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

§5 ÔN TẬP CHƯƠNG 1

I. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 63 (THPT Lê Thánh Tông HCM 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

Ⓐ $y=-1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x=2$.

Câu 64 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+2$. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 65 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=3$ và $f'(1)=2$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-9}{x-1}$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 18.

Câu 66 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$.

Ⓐ $y=2x+1$. Ⓑ $y=2x-3$. Ⓒ $y=2x$. Ⓓ $y=2x-1$.

Câu 67 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{x+2026}{x-2025}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là

Ⓐ $x=2025$. Ⓑ $x=-2024$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=6$.

Câu 68 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là

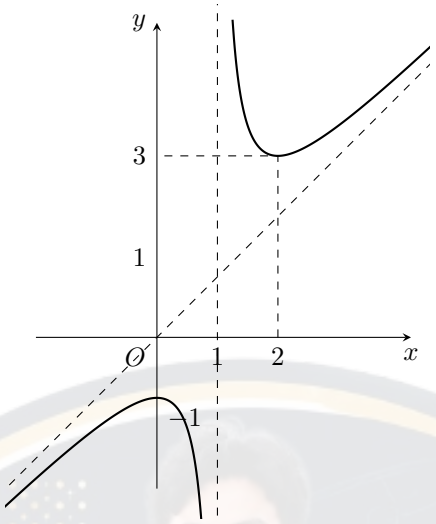
Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $y=-1$.

Câu 69 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-2;2]$ là

Ⓐ 2. Ⓑ -1. Ⓒ 3. Ⓓ -2.

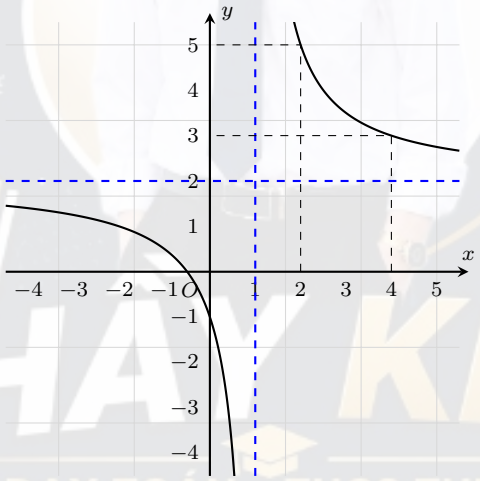
Câu 70 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường

cong như hình vẽ?



Ⓐ $y = x - \dfrac{1}{x-1}$.
Ⓑ $y = -x + \dfrac{1}{x-1}$.
Ⓒ $y = -x - \dfrac{1}{x-1}$.
Ⓓ $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

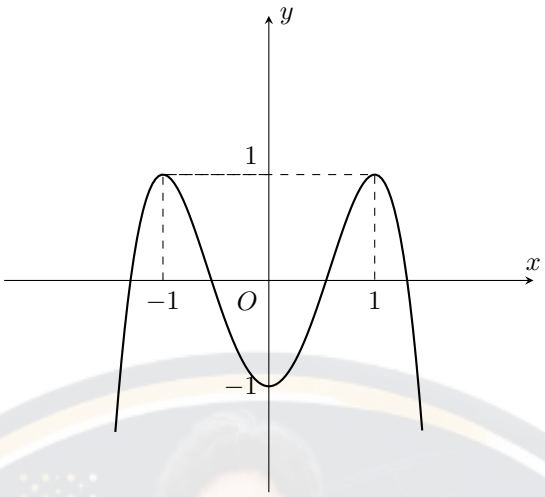
Câu 71 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Câu 72 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Câu 73 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 74 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $f(x)$ là hàm số lẻ và $f(x)=x^2$ với mọi $x\le 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

Ⓐ -4. Ⓑ -2. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Câu 75 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Giá trị cực tiểu của hàm số $y=4x^3-6x^2+11$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Câu 76 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Hàm số $y=-2x^3+9x^2+24x-114$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

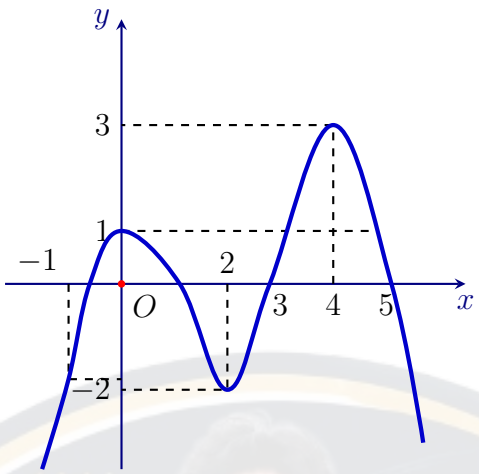
Ⓐ $(-1;4)$. Ⓑ $(-4;-1)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(4;+\infty)$.

Câu 77 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $y=-2$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-2$.

Câu 78 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên (các điểm cực trị của đồ thị thể hiện rõ trên hình). Gọi M và m lần

lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M-m$ bằng

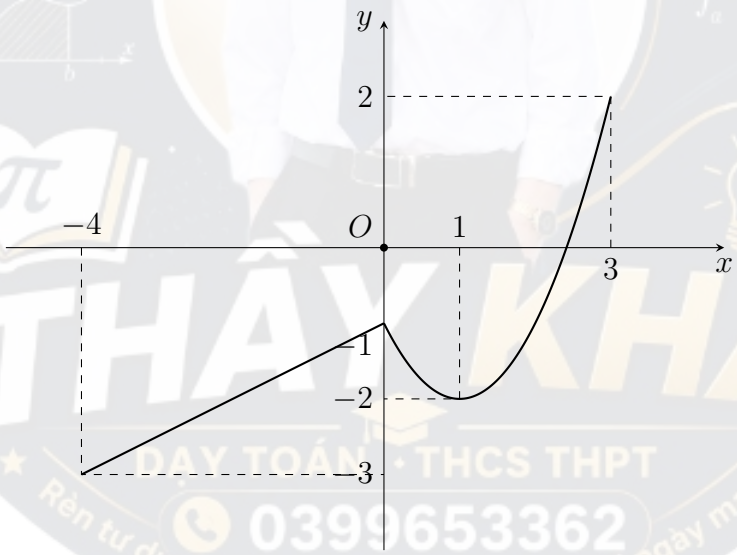


Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 79 (Sở Bắc Ninh 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-1}{1-x}$ có phương trình là

Ⓐ $x=-3$. Ⓑ $y=-3$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $y=3$.

Câu 80 (Sở Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-4;3]$ như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là



Ⓐ -4. Ⓑ -3. Ⓒ 1. Ⓓ -2.

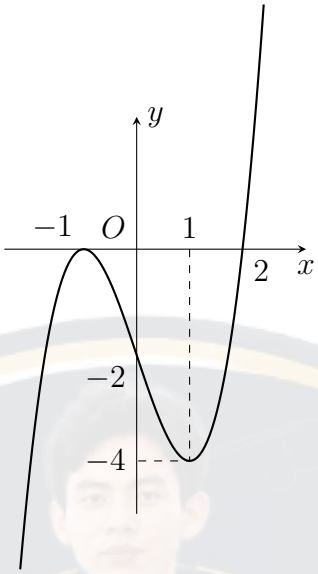
Câu 81 (Sở Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 82 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(-4; 0)$.

Câu 83 (Sở Phú Thọ 2026). Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ là

Ⓐ $x = \dfrac{1}{3}$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 1$.

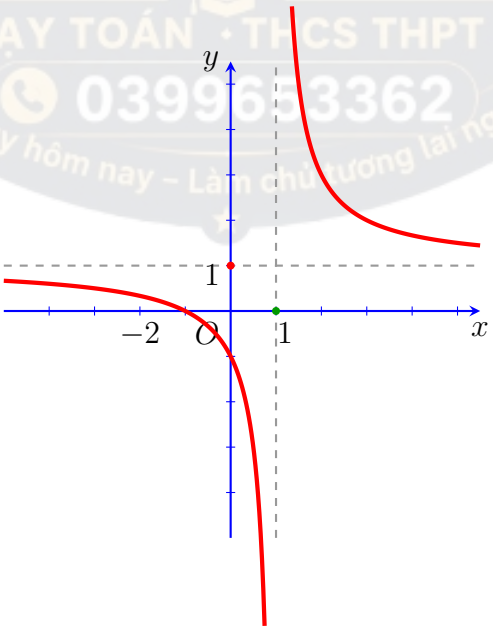
Câu 84 (Sở Phú Thọ 2026). Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 5 + \frac{10}{x+3}$?

Ⓐ $y = 2x - 5$. Ⓑ $y = x + 3$. Ⓒ $y = 2x$. Ⓓ $y = 2x + 3$.

Câu 85 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $y = \frac{3x+7}{x+1}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 3]$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 7. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Câu 86 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây?



DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Ⓐ $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{2x-2}{2x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$.

Câu 87 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

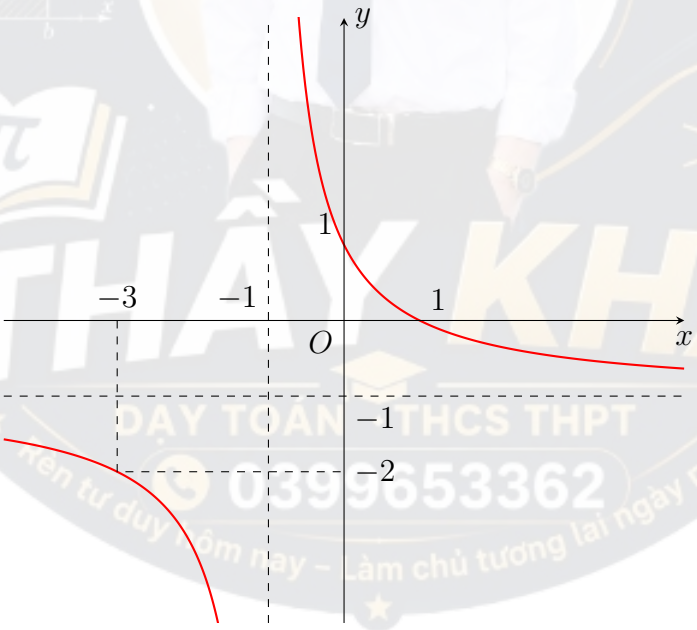
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-20	↗	20	↘	$-\infty$

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;22)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Câu 88 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

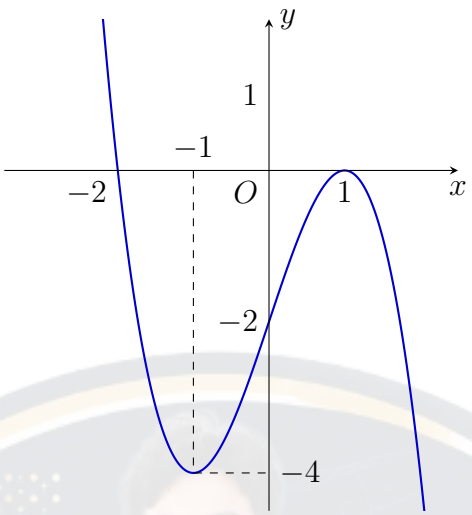
Câu 89 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Đồ thị có hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$.

Câu 90 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ tại



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=1$.

Câu 91 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 92 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

Ⓐ $y=0$. Ⓑ $x=-4$. Ⓒ $y=-4$. Ⓓ $x=3$.

Câu 93 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(-\infty;-3)$.

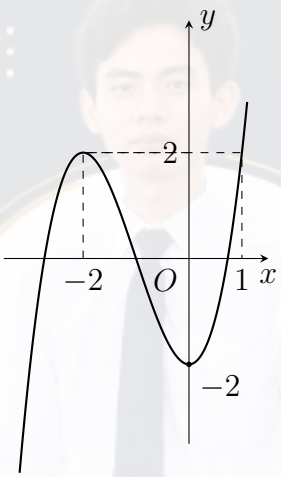
Câu 94 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Bảng biến thiên sau đây là của

hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Ⓐ $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 95 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Đường cong trong hình sau là của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y=-x^3-3x^2-2$. Ⓑ $y=x^3-3x^2-2$.
Ⓒ $y=2x^3+6x^2-2$. Ⓓ $y=x^3+3x^2-2$.

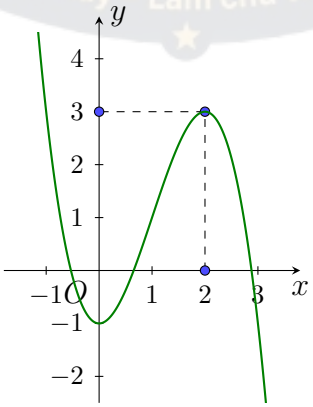
Câu 96 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{2x+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ⓐ 8. Ⓑ $\frac{9}{2}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\frac{11}{3}$.

Câu 97 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin 2x-1$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 98 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây. Số nghiệm dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là:



Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 99 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-7		-4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

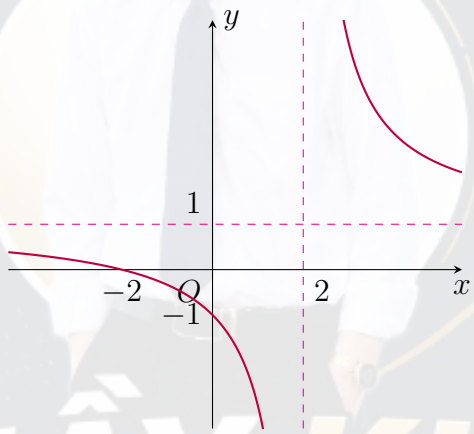
Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ $y=-3$. Ⓑ $y=-6$. Ⓒ $x=-7$. Ⓓ $x=-4$.

Câu 100 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=x+4+\dfrac{x-1}{x-2}$ là

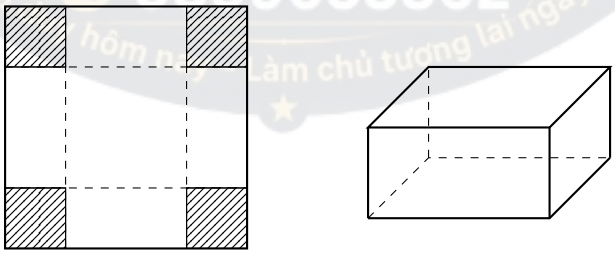
Ⓐ $y=x+4$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=x+5$. Ⓓ $y=x+3$.

Câu 101 (Liên trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{x+c}$ có đồ thị như hình sau đây. Tính giá trị của biểu thức $P=2a-c$



Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ -5. Ⓓ 5.

Câu 102 (Liên trường Nghệ An 2026). Bạn Hải có một tấm bìa hình vuông cạnh 40 cm. Bạn muốn cắt bỏ ở bốn góc bốn hình vuông nhỏ bằng nhau để gấp và dán lại thành một hộp hình hộp chữ nhật không có nắp (tham khảo hình vẽ).



Để hộp có thể tích lớn nhất thì độ dài cạnh của hình vuông nhỏ bị cắt là:

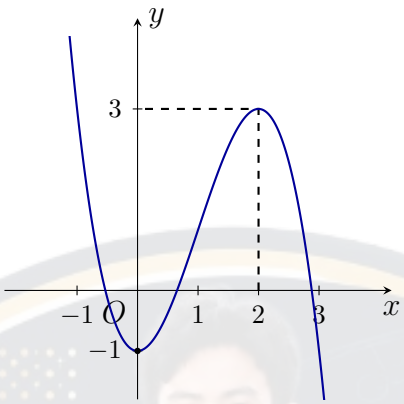
Ⓐ 6 cm. Ⓑ 5 cm. Ⓒ $\dfrac{20}{3}$ cm. Ⓓ $\dfrac{10}{3}$ cm.

Câu 103 (Liên trường Nghệ An 2026). Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\left(\dfrac{2026}{2025}\right)^x$. Ⓑ $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

Ⓒ $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓓ $y=e^{-x}$.

Câu 104 (Liên trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây. Điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là



Ⓐ $x=0$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $M(2;3)$.

Câu 105 (Liên trường Nghệ An 2026). Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ là

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $y=1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x=1$.

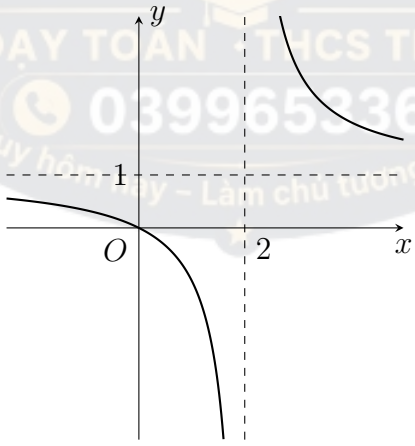
Câu 106 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 107 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y=5$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y=0$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y=7$.

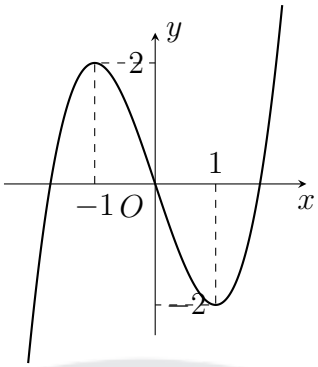
Câu 108 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là:



Ⓐ $x=2$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=2$.

Câu 109 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm

số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 + 2x + 1$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = -x^3 + 3x$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2$.

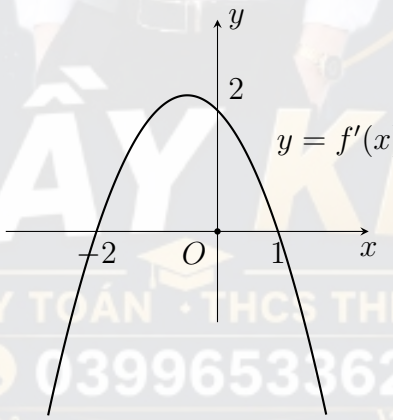
Câu 110 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (2x - 1)(x + 1)$. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là y_{CT}. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $y_{CT} = f(1)$.
Ⓑ $y_{CT} = f(-1)$.
Ⓒ $y_{CT} = f(1/2)$.
Ⓓ $y_{CT} = f(0)$.

Câu 111 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = 2x+3+\dfrac{1}{x-1}$ là

Ⓐ 0.
Ⓑ 3.
Ⓒ 1.
Ⓓ 2.

Câu 112 (ĐGNL DHSPHN 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x_1 = -2$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = 1$.
Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại hai điểm $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.
Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại hai điểm $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.
Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_1 = -2$ và đạt cực đại tại $x_2 = 1$.

Câu 113 (ĐGNL DHSPHN 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 2}$ là

Ⓐ $y = x - 1$.
Ⓑ $y = x + 1$.
Ⓒ $y = x - 2$.
Ⓓ $y = x + 2$.

Câu 114 (ĐGNL DHSPHN 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 5}{x + 1}$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm

số là điểm nào?

Ⓐ $M(-1;3)$. Ⓑ $N(3;-1)$. Ⓒ $P(-1;5)$. Ⓓ $Q(-5;1)$.

Câu 115 (ĐGNL DHSPHN 2026). Bạn Long định gấp một cái hộp có dạng hình lăng trụ tứ giác đều với tổng diện tích tất cả các mặt là 96 cm^2. Thể tích cái hộp mà bạn Long định gấp lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ 32 cm^3. Ⓑ 64 cm^3. Ⓒ 108 cm^3. Ⓓ 96 cm^3.

Câu 116 (Cụm trường Nghệ An 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 117 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-2;1)$. Ⓒ $(-2;3)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

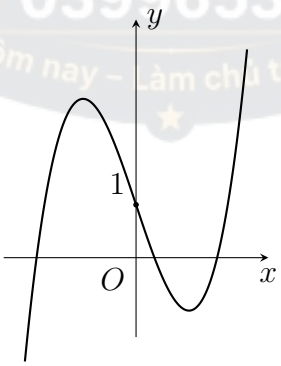
Câu 118 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	4 ‖ $+\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 119 (Cụm trường Nghệ An 2026). Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Ⓐ $y = -x^4 + 3x + 1$. Ⓑ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓒ $y = -x^2 + 3x + 1$. Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 1$.

THẦY KHA 0399653362

Câu 120 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là:

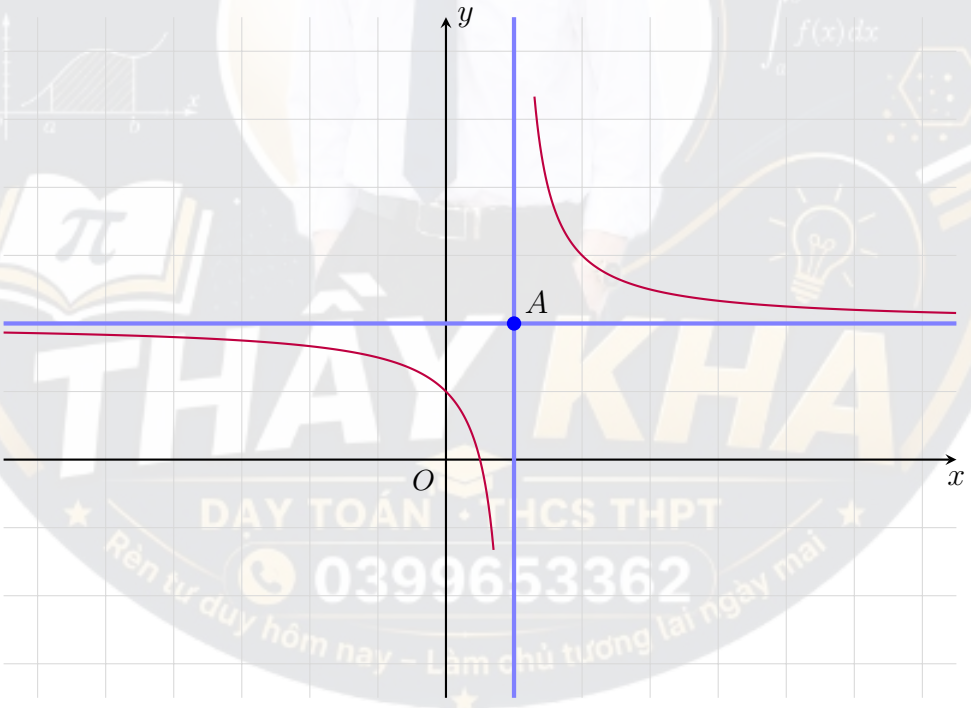
Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 0. Ⓓ -3.

Câu 121 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$ có tập xác định là D. Hàm số đã cho có đạo hàm trên D là

Ⓐ $y'=-\dfrac{2}{(x+2)^2}$. Ⓑ $y'=\dfrac{6}{(x+2)^2}$.

Ⓒ $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$. Ⓓ $y'=-\dfrac{6}{(x+2)^2}$.

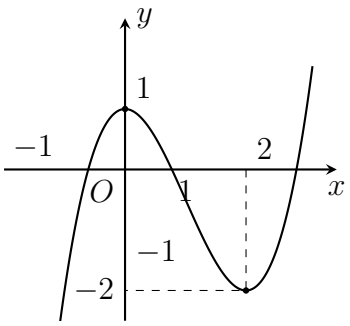
Câu 122 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=3$.

Câu 123 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực đại

của hàm số đã cho là



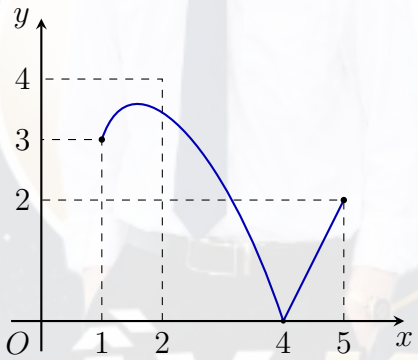
Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=0$. Ⓓ $x=-2$.

Câu 124 (Sở Hưng Yên 2026). Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

Ⓐ $y=-x^3+3x+1$. Ⓑ $y=2x^3+x-5$.

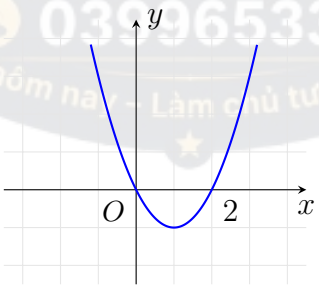
Ⓒ $y=\sqrt{x}$. Ⓓ $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Câu 125 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ sau. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm.



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=4$. Ⓒ $x=5$. Ⓓ $x=2$.

Câu 126 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình sau. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng



Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(2;3)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(3;4)$.

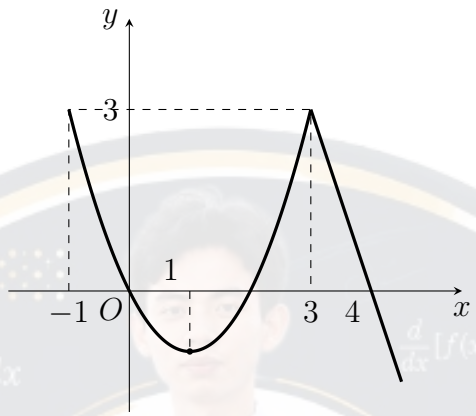
Câu 127 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 18. Ⓓ -2.

Câu 128 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Trong hệ trục tọa độ Oxy, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{x-2}$ có phương trình là:

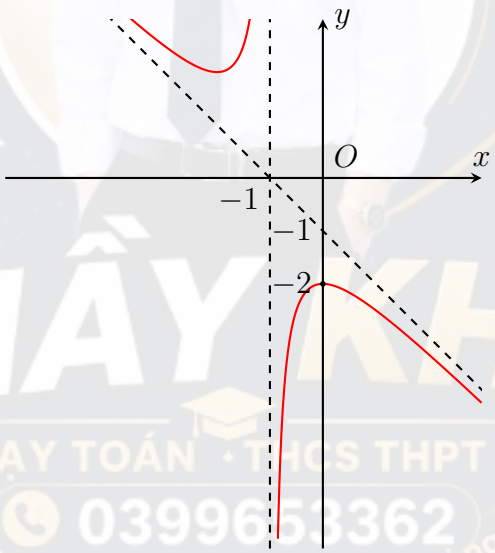
Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $x = 2$.

Câu 129 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có một phần đồ thị như hình bên. Khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$ là:



Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;3)$.

Câu 130 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y = \dfrac{-x^2-2x-2}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$.

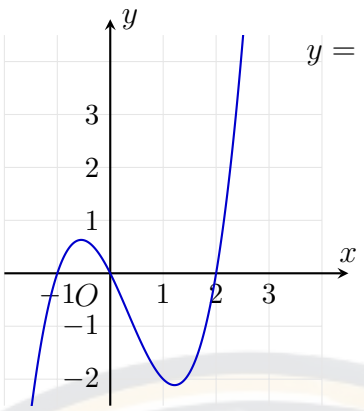
Ⓒ $y = \dfrac{-x^2-2x}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Câu 131 (Chuyên Hạ Long 2026). Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = -2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 2$.

Câu 132 (Chuyên Hạ Long 2026). Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đạo hàm $f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-1; 0; 2$ như hình

bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty, -1)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(0; 2)$. Ⓓ $(-1; 0)$.

Câu 133 (Chuyên Hạ Long 2026). Tính đạo hàm của hàm số $y = e^x + \log x$.

Ⓐ $y' = e^x - \dfrac{1}{x \ln 10}$. Ⓑ $y' = e^x + \dfrac{1}{x}$.

Ⓒ $y' = e^x + \dfrac{1}{x \ln 10}$. Ⓓ $y' = e^x - \dfrac{1}{x}$.

Câu 134 (Chuyên Hạ Long 2026). Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 0. Ⓒ -3. Ⓓ 1.

Câu 135 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

Ⓐ $(0; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 0)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(-\infty; 5)$.

Câu 136 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến

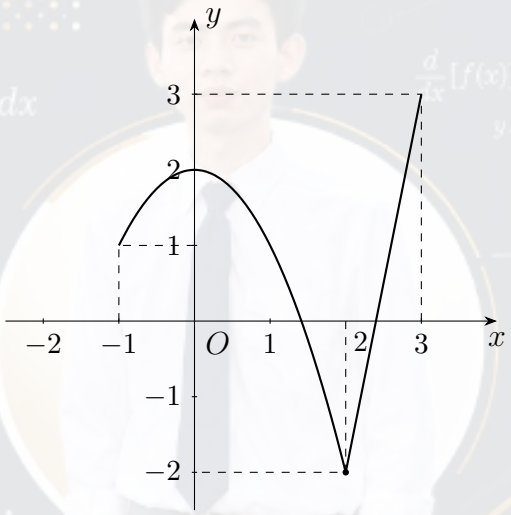
thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

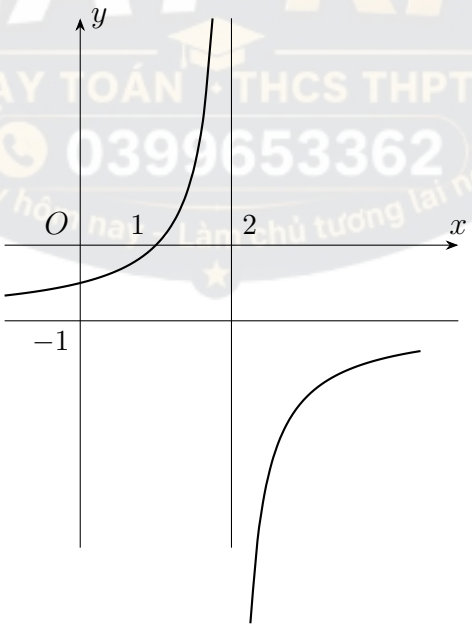
Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(1;0)$. Ⓒ $(-1;4)$. Ⓓ $(1;4)$.

Câu 137 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$ bằng



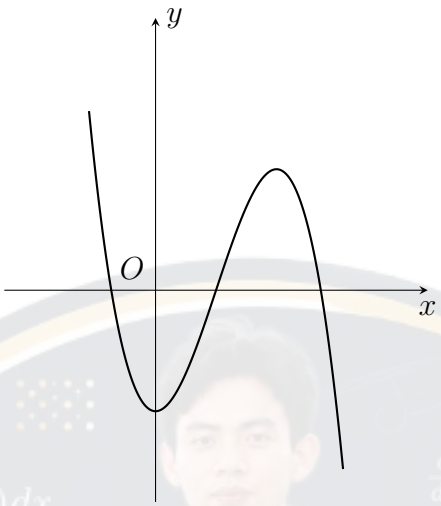
Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 138 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị dưới đây. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $y=-1$.

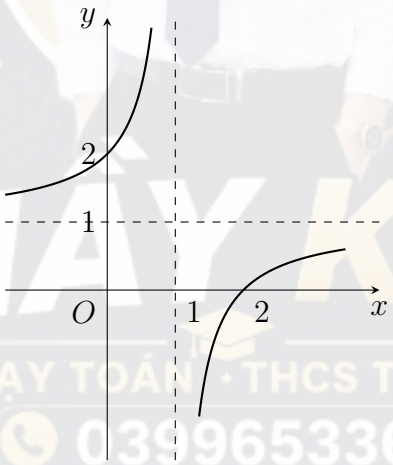
Câu 139 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Đồ thị nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên?



Ⓐ $y=x^3-3x^2-1$. Ⓑ $y=\dfrac{x^3-3x+1}{x-1}$.

Ⓒ $y=-x^3+3x^2-2$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 140 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là



Ⓐ $(2;0)$. Ⓑ $(0;1)$. Ⓒ $(1;0)$. Ⓓ $(0;2)$.

Câu 141 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t)=-t^3+6t^2+t+5$, trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây.

Ⓐ 35 m/s. Ⓑ 10 m/s. Ⓒ 64 m/s. Ⓓ 13 m/s.

Câu 142 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau.

Hàm số đã cho có điểm cực đại là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $y=1$.

Câu 143 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x}$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Câu 144 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x+1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $y=-1$.

Câu 145 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 146 (Sở Ninh Bình 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 20. Ⓓ 0.

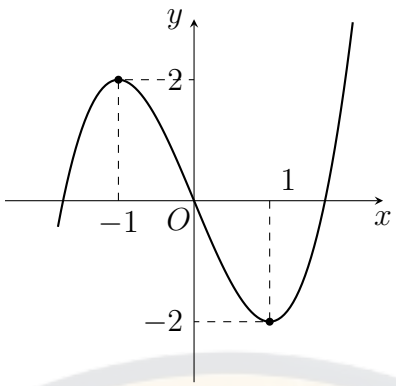
Câu 147 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 2	$\nearrow$	4	1 $\searrow$	-5	$\nearrow$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Câu 148 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Câu 149 (Sở Ninh Bình 2026). Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1}$ là

Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = x$. Ⓒ $y = x - 3$. Ⓓ $y = 2x$.

Câu 150 (Sở Ninh Bình 2026). Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$ có tâm đối xứng là điểm

Ⓐ $N(3; -1)$. Ⓑ $P(1; 2)$. Ⓒ $Q(1; -\dfrac{3}{2})$. Ⓓ $M(2; -1)$.

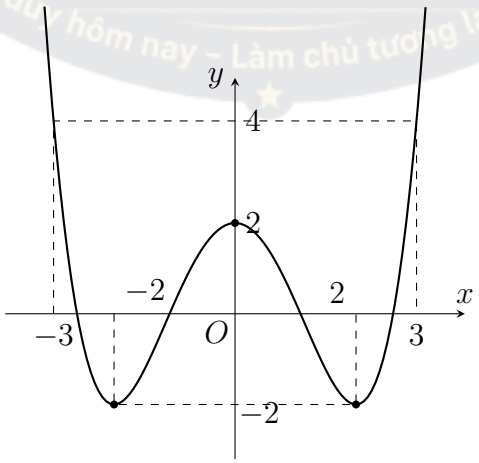
Câu 151 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(-\infty; 0)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(0; 1)$.

Câu 152 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$ đạt tại x bằng

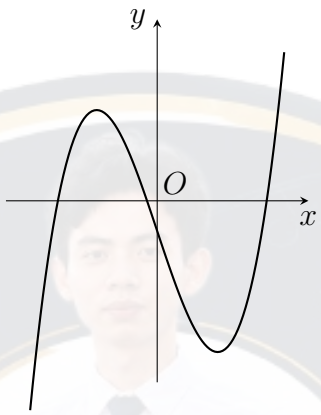


Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ 0.

Câu 153 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-2$.

Câu 154 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

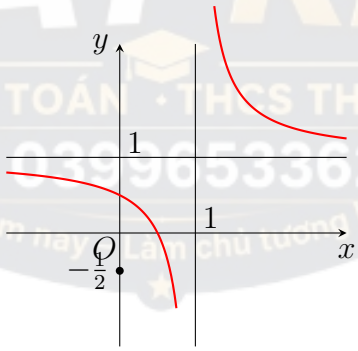


Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y=x^3-3x-1$. Ⓓ $y=x^2+x-1$.

Câu 155 (THPT Nguyễn Khuyến - LTT HCM 2026). Hàm số nào dưới đây đơn điệu trên tập xác định của nó?

Ⓐ $y=\sqrt{x^3+x-5}$. Ⓑ $y=\dfrac{4x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=x^4+x^3+x+11$. Ⓓ $y=\cot 2x$.

Câu 156 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+b}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị có phương trình là



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=2$.

Câu 157 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$.

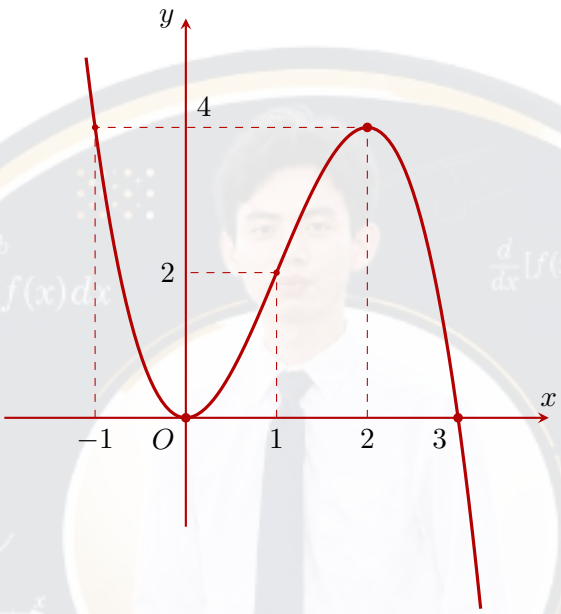
Ⓐ $\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\max\limits_{[1;2]} y=-\dfrac{1}{2}$.

Ⓒ $\max_{[1;2]} y = -\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\max_{[1;2]} y = 1$.

Câu 158 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 2x + 5}{x + 2}$ là

Ⓐ $y = -x$. Ⓑ $y = -x + 1$. Ⓒ $y = x + 2$. Ⓓ $x = -2$.

Câu 159 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Phát biểu nào sau đây sai?



Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
Ⓒ Điểm cực đại của hàm số là 4.
Ⓓ Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0; 0)$.

Câu 160 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Ⓐ $\min_{\mathbb{R}} y = 4$. Ⓑ $y_{CT} = 0$. Ⓒ $\max_{\mathbb{R}} y = 5$. Ⓓ $y_{CD} = 5$.

Câu 161 (Cụm trường Nghệ An 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5}{x - 1}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x = 5$. Ⓑ $y = 0$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $x = 1$.

Câu 162 (Cụm trường Nghệ An 2026). Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 3x - 1$ và $y = x^3 - 1$ là

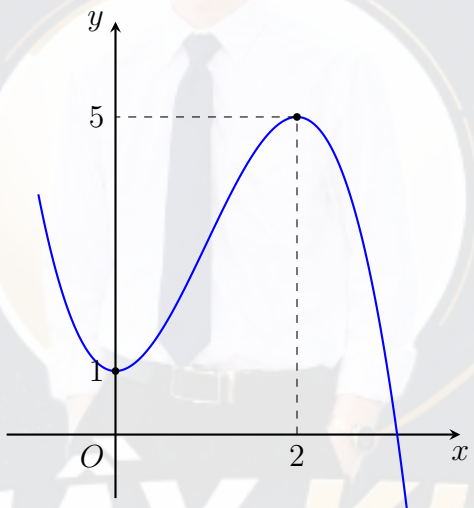
Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 163 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +infty)$, có bảng biến thiên như hình sau: Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 164 (Cụm trường Nghệ An 2026). Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = -x^3 + 2x^2 - 1$.

Câu 165 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-1	↘	‖	$+\infty$	↘	↗	2
		$-\infty$	‖		1		

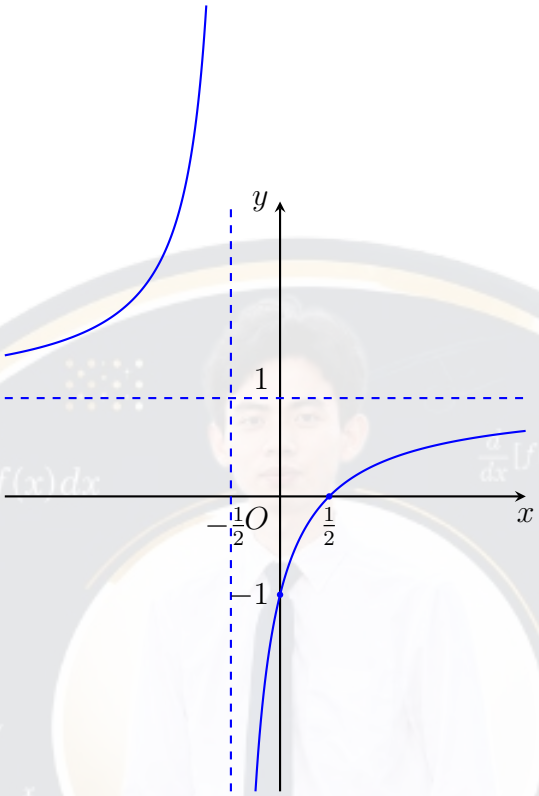
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 166 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên $[1; 3]$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ $\dfrac{52}{3}$. Ⓒ $\dfrac{65}{3}$. Ⓓ 20.

Câu 167 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x=-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $y=1$.

Câu 168 (Liên trường Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-3;0)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 169 (Liên trường Hà Nội 2026). Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình

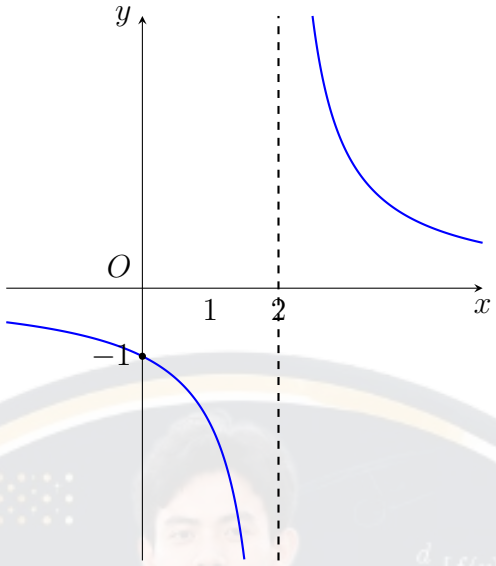
Ⓐ $y=-2$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=2$.

Câu 170 (THPT Nguyễn Trung Thiên - Hà Tĩnh 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=-2$. Ⓓ $x=2$.

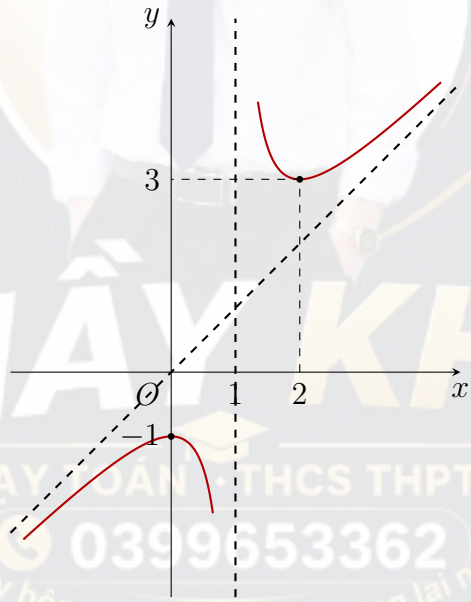
Câu 171 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tìm hệ số b,c để hàm số $y=\dfrac{2}{cx+b}$ có đồ

thị như hình vẽ sau:



Ⓐ $\begin{cases} b=2 \\ c=-1 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} b=-2 \\ c=1 \end{cases}$.

Câu 172 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Câu 173 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(3;4)$. Ⓒ $(4;+\infty)$. Ⓓ $(1;3)$.

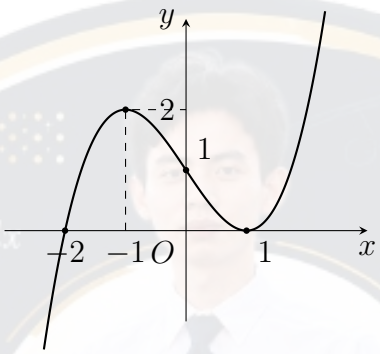
Câu 174 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

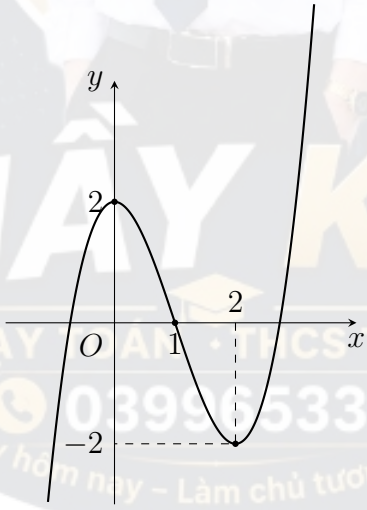
Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Câu 175 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



Ⓐ $y=x^3+2x+1$.
Ⓑ $y=x^3-3x+1$.
Ⓒ $y=-x^3+2x+1$.
Ⓓ $y=x^3-3x^2+1$.

Câu 176 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



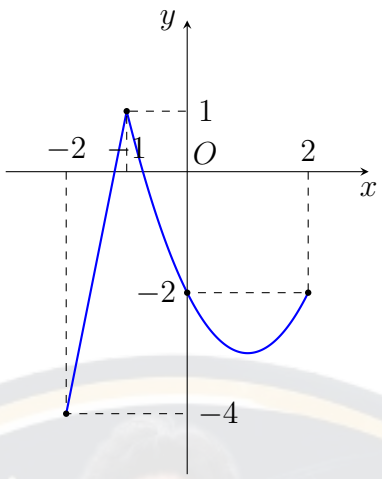
Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;2)$.

Câu 177 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng là

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=-3$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.

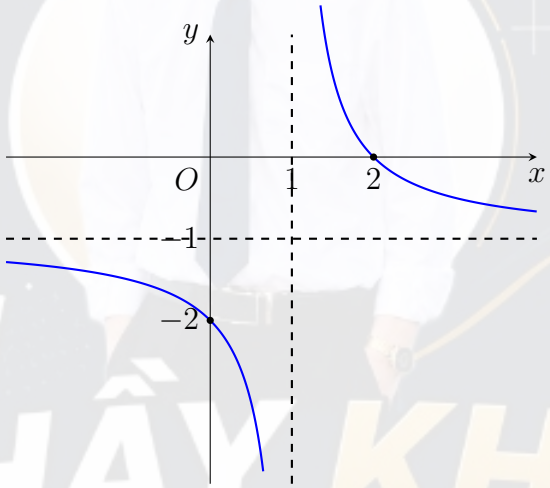
Câu 178 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ lần lượt

là M và m. Khi đó $M-m$ bằng



Ⓐ 5. Ⓑ -4. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Câu 179 (THPT Trần Nhân Tông - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac\neq 0; ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 180 (THPT Trần Phú - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-5	↗	$+\infty$

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 181 (THPT Trần Phú - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 182 (Cụm Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(3;+\infty)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(0;1)$.

Câu 183 (Cụm Hải Phòng 2026). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 184 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$ là

Ⓐ -1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ 1.

Câu 185 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=4\sin 2x-3$ là

Ⓐ 1. Ⓑ -11. Ⓒ -7. Ⓓ 5.

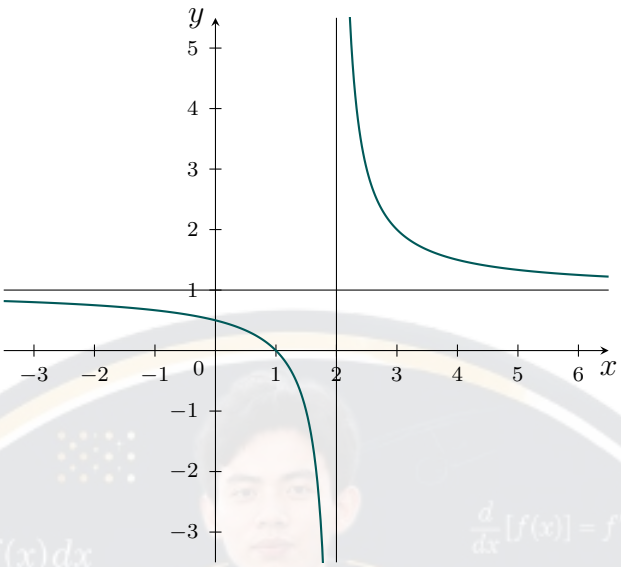
Câu 186 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

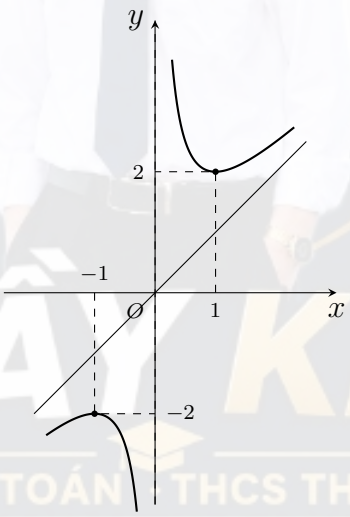
Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-3$. Ⓒ $x=-2$. Ⓓ $x=0$.

Câu 187 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Cho đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x=2$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $y=1$.

Câu 188 (Sở Lạng Sơn 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;2)$.

Câu 189 (Sở Thái Nguyên 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $y=-2$. Ⓒ $y=\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $y=\dfrac{2}{5}$.

Câu 190 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị

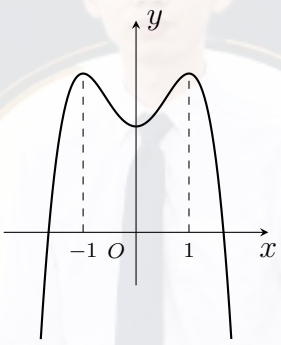
THẦY KHA
DẠY TOÁN THCS THPT
0399653362

cực tiểu của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

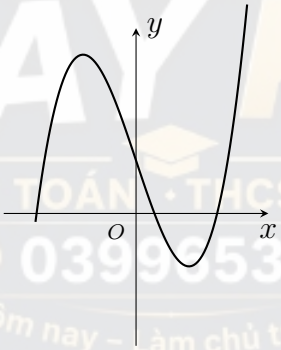
Ⓐ $y=2$. Ⓑ $y=-1$. Ⓒ $y=0$. Ⓓ $y=1$.

Câu 191 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Câu 192 (Sở Thái Nguyên 2026). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



Ⓐ $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-1}{2x-1}$.
Ⓒ $y=-x^3+3x+1$. Ⓓ $y=x^3-3x+1$.

Câu 193 (Cụm trường Thanh Hóa 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ là

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $x=2$.

Câu 194 (Cụm trường Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

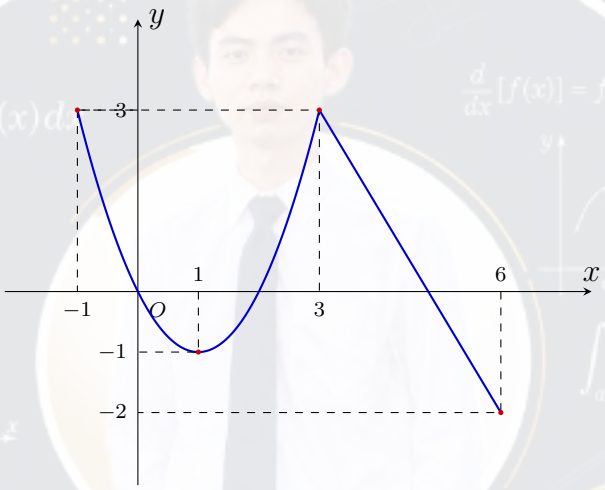
Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 195 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 196 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $[-1;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;4]$.



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 197 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Hiệu $a-2b$ có giá trị là

Ⓐ 4. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 5.

Câu 198 (Cụm trường Sở Phú Thọ 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng:

Ⓐ -52. Ⓑ $20\sqrt{10}$. Ⓒ -63. Ⓓ $-20\sqrt{10}$.

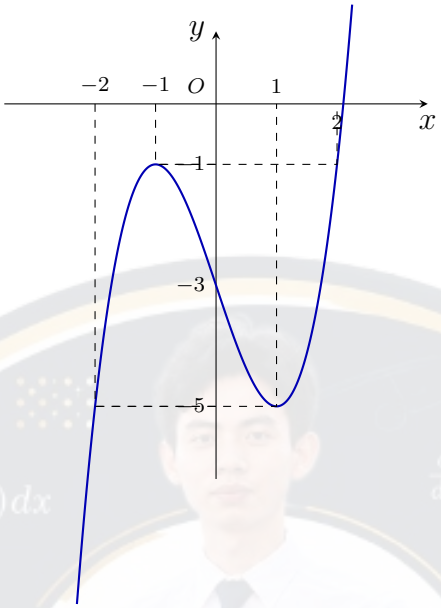
Câu 199 (Cụm trường Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ -3. Ⓓ 3.

Câu 200 (Sở Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$ bằng



Ⓐ -1. Ⓑ -6. Ⓒ 0. Ⓓ -5.

Câu 201 (Sở Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 202 (Cụm trường Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	↗	4 ‖	↗	3	↘	-1
			$-\infty$				

Hỏi đồ thị hàm số có tổng tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 203 (Sở Sơn La 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x=2$.

Câu 204 (Sở Tuyên Quang 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=x+1-\dfrac{1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y=x$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=x+1$.

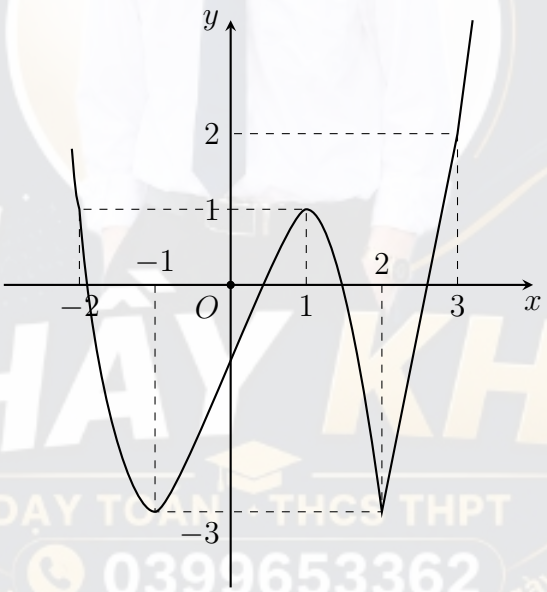
Câu 205 (Sở Tuyên Quang 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	-26	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-26;6)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-1;2)$.

Câu 206 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ và có đồ thị trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng bao nhiêu?



Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ 2.

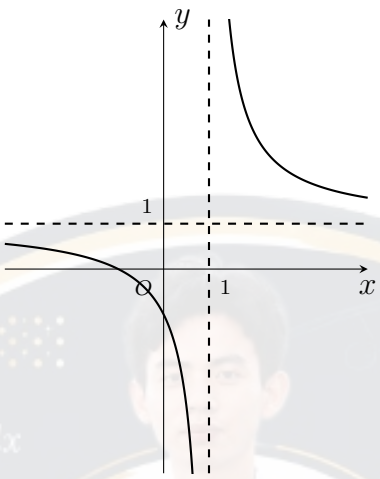
Câu 207 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

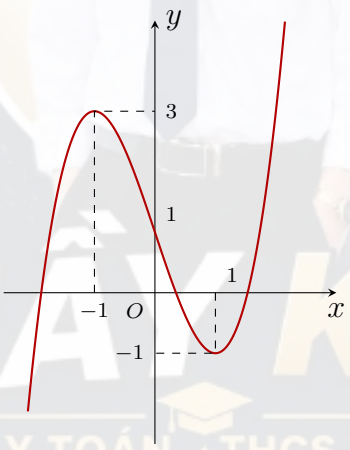
Ⓐ $(-3;6)$. Ⓑ $(6;+\infty)$. Ⓒ $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;5)$.

Câu 208 (Sở Ninh Bình 2026). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{3x-3}$.

Câu 209 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



Ⓐ $y=3$. Ⓑ $y=-1$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.

Câu 210 (Sở Hưng Yên 2026). Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$ có phương trình là

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $x=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 211 (Sở Hưng Yên 2026). Hàm số $y=x^3-3x+2026$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(-1;1)$.

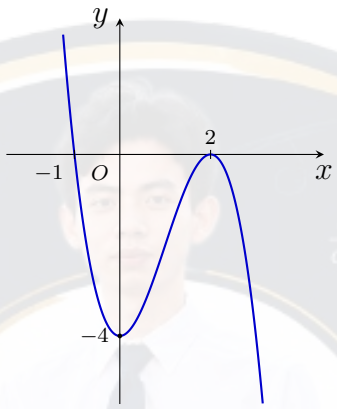
Câu 212 (Chuyên KHTN HN 2026). Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-5x^2+3x+1}{x-1}$ có phương trình là:

Ⓐ $y = 5x + 2$.
Ⓑ $y = -5x + 2$.
Ⓒ $y = -5 - 2x$.
Ⓓ $y = -5x - 2$.

Câu 213 (Chuyên KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2 + 2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$ (với a là hằng số). Biết rằng $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

Ⓐ -6. Ⓑ -8. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 214 (Chuyên KHTN HN 2026). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ là đồ thị một hàm số bậc ba như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là



Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 215 (Sở Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$..
Ⓑ Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận..
Ⓒ Đồ thị hàm số có ba tiệm cận..
Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$..

Câu 216 (Sở Quảng Ninh 2026). Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ có cực đại là

Ⓐ -1. Ⓑ 12. Ⓒ 3. Ⓓ -20.

Câu 217 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \dfrac{2x + 1}{x + 2}$ có phương trình là

Ⓐ $y = 3$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $x = -2$.

Câu 218 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

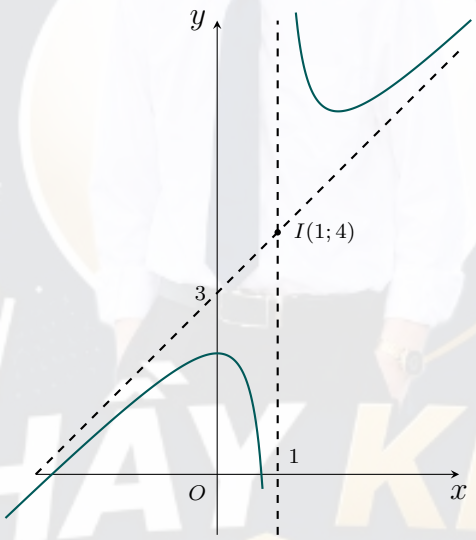
như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
Ⓑ Hàm số có giá trị cực đại bằng -1.
Ⓒ Hàm số có 2 điểm cực đại.
Ⓓ Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 219 (Sở Lào Cai 2026). Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là



Ⓐ $y = x - 2$. Ⓑ $y = 3x + 1$. Ⓒ $y = x + 3$. Ⓓ $y = x - 1$.

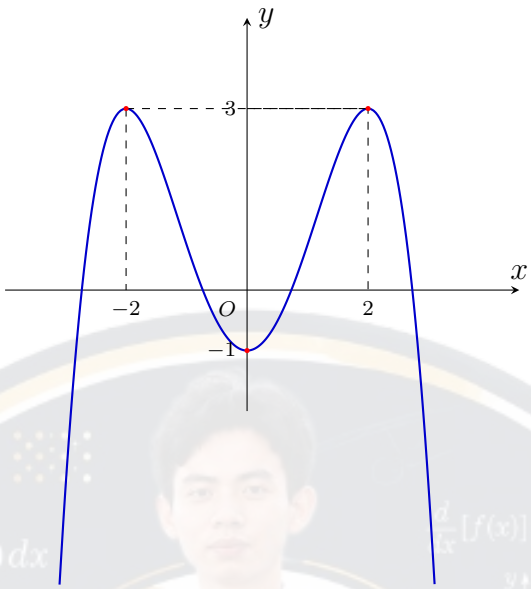
Câu 220 (Sở Lào Cai 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = -1$.

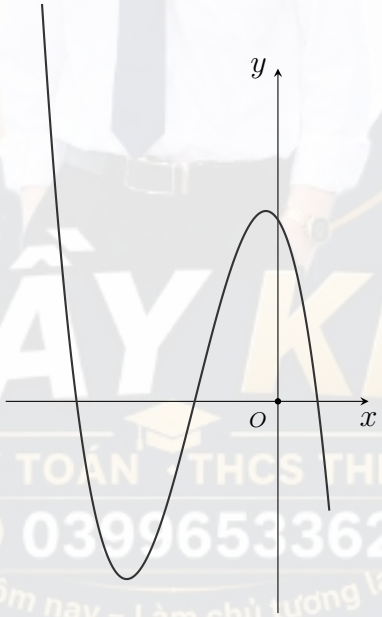
Câu 221 (THPT Trần Phú - Phú Thọ 2026). Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $A(0; -1)$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = -1$.

Câu 222 (Sở Thanh Hóa 2026). Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



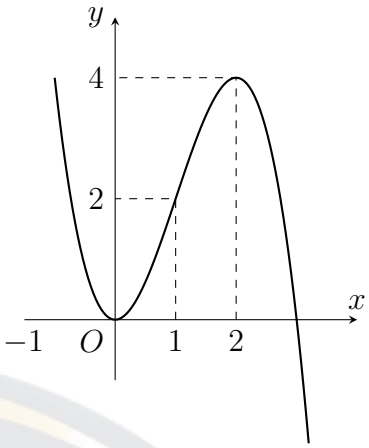
Ⓐ $a < 0, d > 0$. Ⓑ $a > 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, d < 0$. Ⓓ $a < 0, d < 0$.

Câu 223 (Sở Hà Tĩnh 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ -5.

THẦY KHA
DẠY TOÁN THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Câu 224 (Sở Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**



(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$..
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$..
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$..
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$..

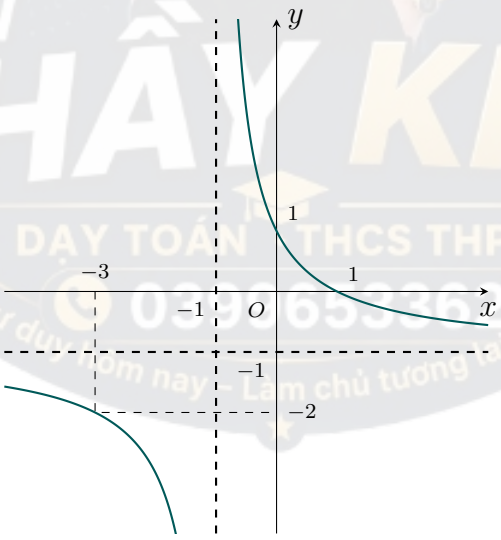
Câu 225 (Sở TT Huế 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây

(A) $(2;3)$. (B) $(0;3)$. (C) $(-1;2)$. (D) $(3;4)$.

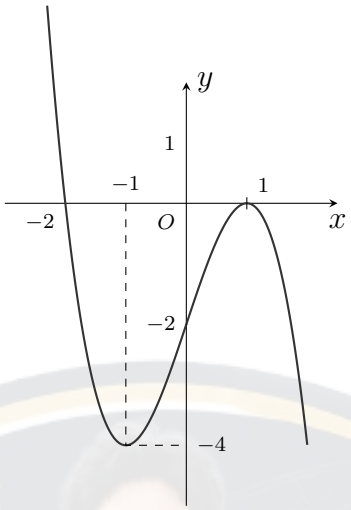
Câu 226 (Sở TT Huế 2026). Xác định tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có dạng như hình dưới.



(A) $x=1$. (B) $x=-1$. (C) $y=1$. (D) $y=-1$.

Câu 227 (Sở TT Huế 2026). Xác định giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ của hàm số $y=f(x)$

có đồ thị như hình dưới.



Ⓐ -1. Ⓑ -4. Ⓒ 0. Ⓓ -2.

Câu 228 (Sở Cao Bằng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-3;1)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Câu 229 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 230 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

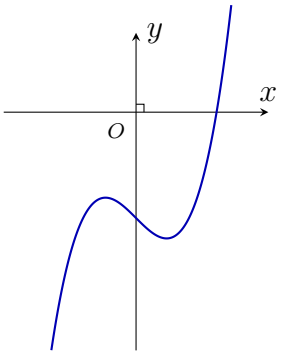
Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Câu 231 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)(x+3), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)+f(-2)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

Ⓐ $f(0)$ và $f(-2)$. Ⓑ $f(3)$ và $f(0)$.
Ⓒ $f(0)$ và $f(3)$. Ⓓ $f(-2)$ và $f(0)$.

Câu 232 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường

cong hình bên?



Ⓐ $y=-x^3+3x-1$.
Ⓑ $y=x^3-x+2$.
Ⓒ $y=x^3-x-2$.
Ⓓ $y=x^4-2x^2-2$.

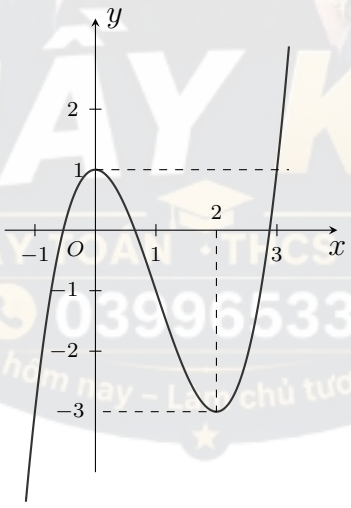
Câu 233 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là

Ⓐ $17m/s^2$.
Ⓑ $12m/s^2$.
Ⓒ $24m/s^2$.
Ⓓ $14m/s^2$.

Câu 234 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=6x-\sqrt{9x^2-x+10}-\dfrac{8}{\sqrt{4-x}}$ có đồ thị (C), đường tiệm cận xiên của (C) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B. Diện tích tam giác OAB bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{36}$.
Ⓑ $\dfrac{-1}{324}$.
Ⓒ $\dfrac{1}{324}$.
Ⓓ $\dfrac{1}{648}$.

Câu 235 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2-4x+4}-2x\right)$ đồng biến trên khoảng



Ⓐ $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.
Ⓑ $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.
Ⓒ $(-4;-2)$.
Ⓓ $(-\infty;0)$.

Câu 236 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{-4x^2+8x-7}{2x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi A,B là hai điểm cực trị của (C), khoảng cách giữa hai điểm A,B là:

Ⓐ 68.
Ⓑ $2\sqrt{17}$.
Ⓒ $\sqrt{17}$.
Ⓓ 17.

Câu 237 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Một nhà máy cần sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho thị trường trong nước. Biết rằng chi phí để sản xuất x sản phẩm trong một ngày bao gồm
(1) Chi phí cho công việc hành chính chung là 2500 (nghìn đồng)
(2) Các loại chi phí khác là $\dfrac{25x^2}{10000}$ (nghìn đồng)
(3) Chi phí sản xuất là $4x$ (nghìn đồng)
Lợi nhuận thu được trên mỗi một sản phẩm được tính bằng giá bán mỗi sản phẩm trừ đi tổng chi phí của mỗi một sản phẩm. Giả sử giá bán mỗi sản phẩm không thay đổi, để lợi nhuận thu được trên mỗi một sản phẩm là lớn nhất, trong một ngày nhà máy cần sản xuất số lượng sản phẩm là

Ⓐ 1000000.. Ⓑ 1612.. Ⓒ 1000.. Ⓓ 1613..

Câu 238 ((HSG 12 - Quảng Ninh 2026)). Cho hàm số $y=\dfrac{7-4x}{2x-1}$ có đồ thị (H), điểm $M\in(H)$. Tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của (H) nhỏ nhất là.

Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ $2+\sqrt{5}$. Ⓓ $\sqrt{10}$.

Câu 239 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=2x^3+(m+1)x^2-12x+1$ (m là tham số), tập hợp các giá trị m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $x-9y=0$.

Ⓐ $\{-2;4\}$. Ⓑ $\{-4;2\}$. Ⓒ $\{2\}$. Ⓓ $\{-4\}$.

Câu 240 (HSG 12 - Hải Phòng 2026). Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

Ⓐ $S=-\dfrac{7}{2}$. Ⓑ $S=-\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $S=-3$. Ⓓ $S=4$.

Câu 241 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)(x+3),\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)+f(-2)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

Ⓐ $f(0)$ và $f(3)$. Ⓑ $f(3)$ và $f(0)$.
Ⓒ $f(-2)$ và $f(0)$. Ⓓ $f(0)$ và $f(-2)$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

a) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=ax+b$. Khi đó $a-2b=5$.

b) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=2x-3$.

c) Gọi A,B lần lượt là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số và O là gốc tọa độ. Diện tích tam giác OAB bằng 6.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Bài 2 (Sở Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x-1}$ có đồ thị (C). Khi đó

a) $y'=f'(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2},\forall x\neq 1$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=x+3$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng $6\sqrt{5}$.

d) Gọi M là một điểm trên đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 18.

Bài 3 (Sở Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

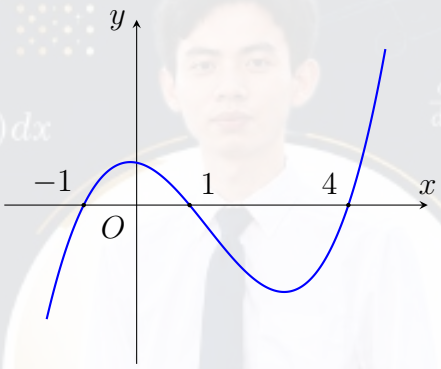
a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 3$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;2]$ tại $x = 1$.

Bài 4 (THPT Lang Chánh - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



a) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) $f(1) > f(2) > f(4)$.

Bài 5 (THPT Trần Phú – Hà Nội 2026). Giả sử chi phí tiền xăng C nghìn đồng khi xe đi được 100 km phụ thuộc vào tốc độ trung bình $v\,(km/h)$ trên cả đoạn đường theo công thức $C(v) = \dfrac{16000}{v} + \dfrac{5}{2}v$, với $0 < v \le 120$.

a) Nếu tài xế lái xe với tốc độ trung bình $40km/h$ thì chi phí là 500 nghìn đồng.

b) $C'(v) = -\dfrac{16000}{v^2} + \dfrac{5}{2}$ với $0 < v < 120$.

c) Nếu tốc độ càng lớn thì chi phí càng giảm.

d) Chi phí tối thiểu trên đoạn đường tối đa $50km/h$ là 445 nghìn đồng.

Bài 6 (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$.

c) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $x = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$.

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên.

Bài 7 (THPT Phụ Dực - Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $y = x + 1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị (C) là $I(2; 3)$.

d) Đồ thị hàm số đi qua $A(1; 1)$.

Bài 8 (THPT Yên Hòa - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$. Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là A và B.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $x = -1$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ là $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2}$, $\forall x \neq -1$.

c) Hai điểm A and B nằm về hai phía của trục hoành và $AB = 5\sqrt{17}$.

d) Gọi $y = g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $g(0) = 12$. Giả sử C, D là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = g(x)$ thì 4 điểm A, B, C, D lập thành tứ giác có diện tích là 42 đơn vị diện tích.

Bài 9 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Khánh Hòa 2026). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 9$.

a) $f(5) = 64$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$.

c) Tổng các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $\dfrac{8}{3}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 1.

Bài 10 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh 2026). Một video tích lũy người xem theo $P(t) = \dfrac{100\,000}{1 + 999e^{-0{,}5t}}$.

a) Tại thời điểm $t = 0$, đã có 100 người xem video này.

b) Để đạt được 90 000 người xem, công ty cần khoảng 18 ngày.

c) Sau 10 ngày, tổng số lượng người xem video đạt hơn 15 000 người.

d) Tại thời điểm $t = 5$, tốc độ lan truyền của video vẫn đang trên đà tăng.

Bài 11 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

d) Đồ thị (C) đi qua điểm $M(0; 2)$.

Bài 12. (Sở Đồng Nai 2026) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$.

b) $f(1) = f(-2) = -1$.

c) $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên $[-2; 1]$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[-2; 1]$ bằng 3.

Bài 13 (Sở Nghệ An 2026). Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) $f'(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$, $\forall x\neq 2$.

c) $f(4)=2$.

d) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[4;6]$. Khi đó $M+m=2$.

Bài 14 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục hoành.

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là điểm $I(-1;1)$.

c) Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d) Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm M là $y=-3x-6$.

Bài 15 (Sở Thái Nguyên 2026). Thùng trộn kem $2000L$ nước và $5kg$ đường. Vòi nước $50L/pht$, đường $1kg/pht$.

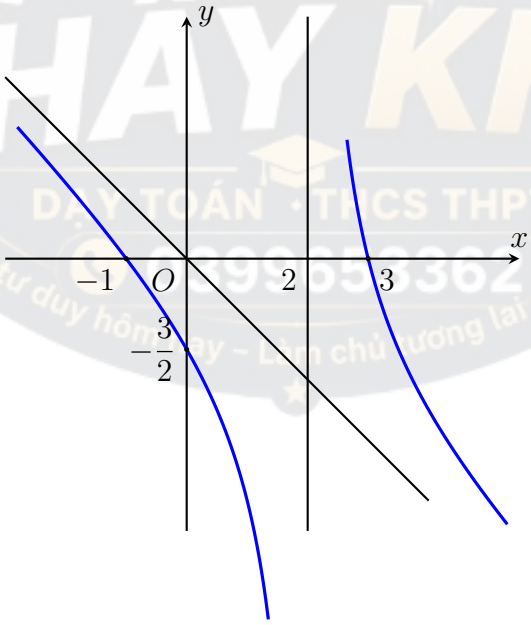
a) Khối lượng đường sau t phút là $1000t+5000$ gam.

b) Nồng độ đường trong thùng luôn tăng khi sản xuất trong thời gian dài liên tục.

c) Nồng độ đường sau t phút là $f(t)=\dfrac{1000t+5000}{50t+2000}$.

d) Tiêu chuẩn không quá $20gam/lt$. Nhà máy không thể sản xuất liên tục trong một thời gian dài.

Bài 16 (Sở Sơn La 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ luôn dương với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Tổng hai hệ số c and d bằng 1.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=-x$.

d) Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ thì m là nghiệm của phương trình $m^2 - 2m - 3 = 0$.

e) Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm M là $y = -3x - 6$.

Bài 17 (Sở Cà Mau 2026). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ có đồ thị (C).

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = -3x^2 + 3$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Đồ thị (C) của hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung Oy.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

Bài 18. (Sở Đà Nẵng 2026) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

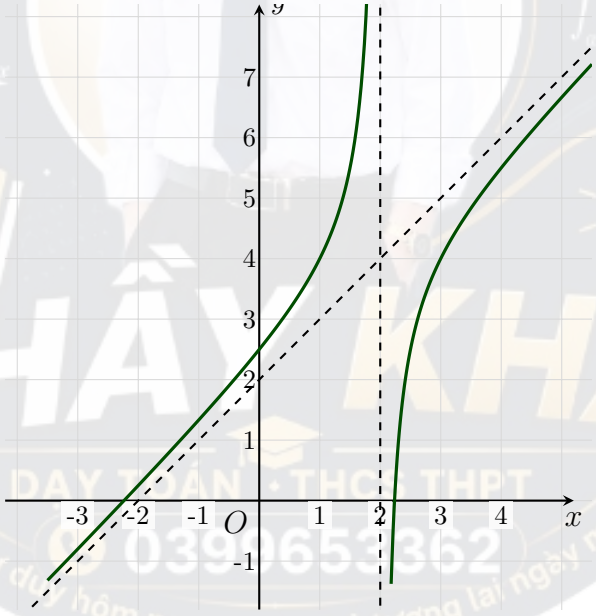
a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $x = 1$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài 19 (Sở Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - d}$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ là 5.

d) Các hệ số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30$.

Bài 20 (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2026). Một đại lý xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn thể tích $V = 54\pi$ (m^3).

a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.

b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3(m)$.

c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi\left(\dfrac{54}{r} + r^2\right)$.

d) Biết chi phí vật liệu tôn là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng 84,8 triệu đồng.

Bài 21 (THPT Khương Hạ - Hà Nội 2026). GigaCloud dịch vụ lưu trữ. Giá cước x (triệu đồng), khách hàng $S(x) = \sqrt{45 - x}$ (nghìn). Chi phí cố định 10 tỷ đồng, chi phí biến đổi $C_v = 3S^2$ tỷ đồng.

a) Giá cước 36 triệu đồng/tháng thì công ty GigaCloud đạt lợi nhuận ròng hằng tháng cao nhất.

b) Doanh thu của công ty GigaCloud là $R(x) = xS(x) = x\sqrt{45 - x}$ tỷ đồng.

c) Chi phí cố định của công ty là $C_f = 10$ tỷ đồng mỗi tháng.

d) Lợi nhuận của công ty được biểu diễn bởi hàm số $L(x) = x\sqrt{45 - x} + 3x - 145$.

Bài 22 (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2026). Nhà máy sản xuất thuốc nhuộm. Chi phí loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm: $C(x) = \dfrac{2x + 1}{1 - 0,01x}$ triệu đồng.

a) Nếu giảm từ 20% trở lên, doanh thu tăng $R(x) = 12x - 240$. Lợi nhuận có thể đạt hơn 177 triệu đồng.

b) Không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.

c) Chi phí để loại bỏ 20% chất ô nhiễm là 51,25 triệu đồng.

d) Để chi phí không quá 200 triệu đồng thì nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm.

Bài 23. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 20.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cap (5; +\infty)$.

c) Điểm uốn của đồ thị hàm số có tọa độ $I(2; -26)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80.

Bài 24. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 8$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng $\dfrac{28}{3}$.

Bài 25. Cho hàm số $y = \dfrac{3x + 2}{x + 2}$ có đồ thị là (C)

a) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

b) Điểm $I(-2; 3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C).

c) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt.

d) Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Biết đường thẳng $y = x + k$ cắt (C) tại C, D thì $ABCD$ là hình bình hành khi đó $k = 10$.

Bài 26. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Bài 27. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

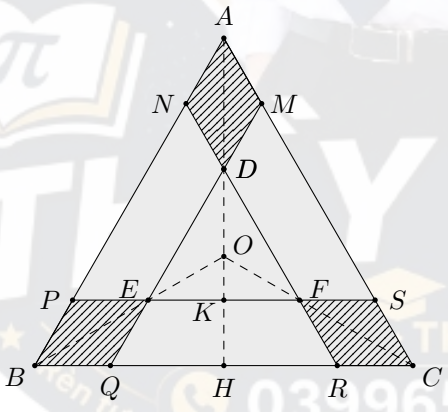
a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.

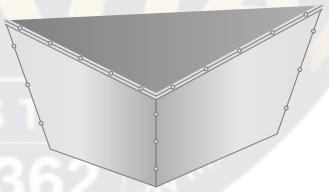
b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \dfrac{480}{x} + 0,03x^2$.

c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Bài 28. Anh Việt có một tấm tôn hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 6 (dm). Bên trong tấm nhôm này anh vẽ thêm tam giác đều DEF sao cho hai tam giác có cùng trọng tâm, đồng thời các cạnh tương ứng song song nhau. Anh Việt muốn làm một chậu đựng nước dạng hình chóp cụt tam giác đều với đáy nhỏ là DEF và đáy lớn để hở. Anh cắt bỏ ba hình bình hành ở ba góc của tam giác ABC là $AMDN$, $BPEQ$, $CSFR$ (như hình vẽ). Kẻ đường cao AH và gọi O là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $x = DN = DM$, $(0 < x < 2)$.





a) $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).

b) $AH = 3\sqrt{3}$ (dm) và $OA = 2\sqrt{3}$ (dm).

c) $AD = x\sqrt{3}$ (dm) và $DE = 6 - 3x$ (dm).

d) Sau khi gập hình vuông và dùng keo dán kín các đoạn gập vào với nhau gồm DM và DN, EP với EQ, FS với FR, sức chứa tối đa của chậu xấp xỉ 4,54 (lít).

Bài 29. Đậu đỏ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỏ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp. Cây đậu đỏ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát

cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỏ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số $h(t) = -0{,}005t^4 + bt^3 + c$ (trong đó b, $c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỏ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

a) Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0{,}005t^4 + 0{,}1t^3$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỏ đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu đỏ đó là 90 cm.

d) Vào thời điểm cây đậu đỏ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Bài 30. Ta coi Trái Đất là hình cầu hoàn hảo với bán kính $R = 6\,370$ (km) và diện tích toàn phần là $S = 4\pi R^2$. Các phi hành gia từ tàu vũ trụ chỉ có thể nhìn thấy một phần bề mặt Trái Đất. Ở độ cao h, phần diện tích Trái Đất các phi hành gia có thể nhìn thấy sẽ được tính theo công thức $S_T = 2\pi R^2\left(1 - \dfrac{R}{R+h}\right)$, trong đó R là bán kính Trái Đất. Gọi K là tỉ số diện tích bề mặt Trái Đất nhìn thấy được ở độ cao h với diện tích toàn phần của Trái Đất.



a) Công thức tính K là $K = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{h}{R+h}\right)$

b) Trong một chuyến bay của tàu con thoi, các phi hành gia đã thực hiện một hoạt động ngoài tàu ở độ cao 280 km. Có 2,5% (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) diện tích bề mặt Trái Đất có thể nhìn thấy ở độ cao đó

c) Muốn nhìn thấy $\dfrac{1}{4}$ diện tích bề mặt Trái Đất, các phi hành gia cần đưa tàu con thoi đạt đến độ cao 6 470 km

d) Khi độ cao h càng tăng lên thì K càng tăng nhưng không vượt quá 50%

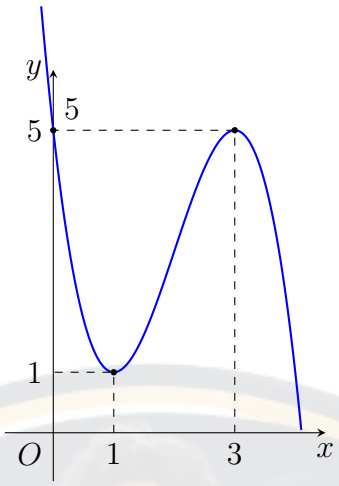
3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Gọi m, n lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^3 + n^3$.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $a - 3b$ là bao nhiêu?

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị của

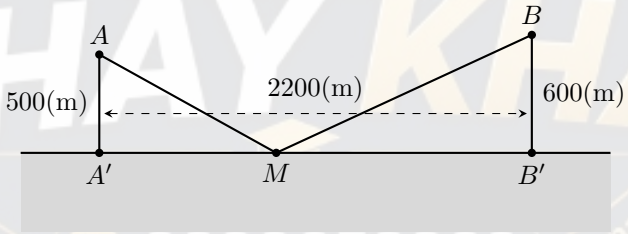
$a+2b+3c$ là:



Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+ax+3}{x-b}$ với a,b lần lượt là số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần tung một con xúc xắc cân đối đồng chất. Biết xác suất để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ là $\dfrac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính m^2+n^2.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và a,b,c lần lượt là số chấm xuất hiện trong ba lần gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối đồng chất. Hãy tính xác suất để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

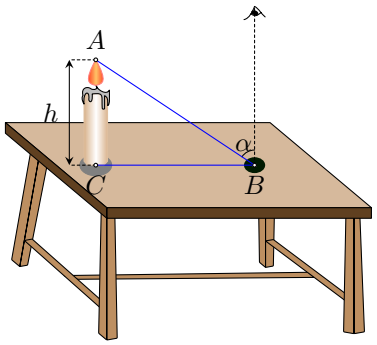
Bài 6. Có hai xã A,B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA'=500$ m, $BB'=600$ m. Người ta đo được $A'B'=2200$ m như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Bài 7. Trong quang học, chúng ta biết định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng A đến một điểm B cho bởi công thức $T=\dfrac{i\cos\alpha}{AB^2}$, trong đó i là độ phát sáng của nguồn A, α là góc phản xạ của ánh sáng lên người quan sát (coi rằng người quan sát nhìn thẳng xuống mặt bàn, tham khảo hình vẽ bên.

Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC=30$ cm. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao h bằng bao nhiêu để chiếu sáng rõ nhất đồng tiền xu nằm trên bàn (kết quả làm tròn

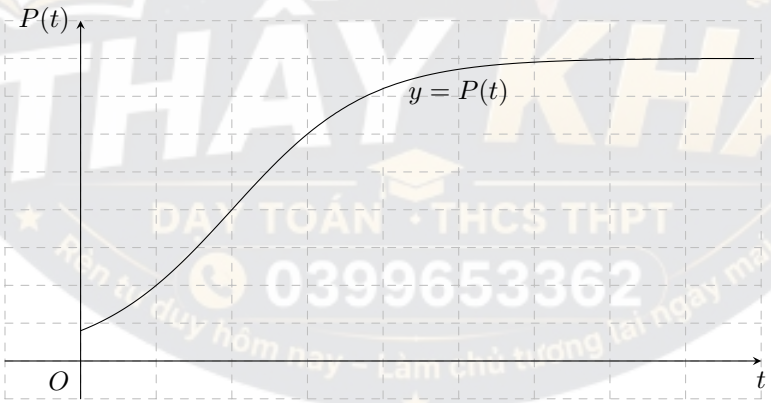
đến hàng phần chục)?



Bài 8. Bác An muốn xây dựng một chuồng nuôi chim bồ câu có dạng khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Từ số tiền đã chuẩn bị để mua vật liệu và dựa vào không gian sẵn có để xây dựng chuồng nuôi, bác An dự kiến xây dựng chuồng có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36 m^2, độ dài đường chéo AC' bằng 6 m. Với những điều kiện đó, chuồng được xây dựng tối ưu nếu thể tích chuồng lớn nhất. Hãy giúp bác An tính xem giá trị tối ưu đó của thể tích chuồng nuôi đó bằng bao nhiêu mét khối (*kết quả được làm tròn đến chữ số hàng phần chục*)?

Bài 9. Anh Nam có một cái ao diện tích 50 m^2 để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con/m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5$ (kg). Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Bài 10. Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \dfrac{c}{1 + a \cdot b^{-t}} (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó t tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ).

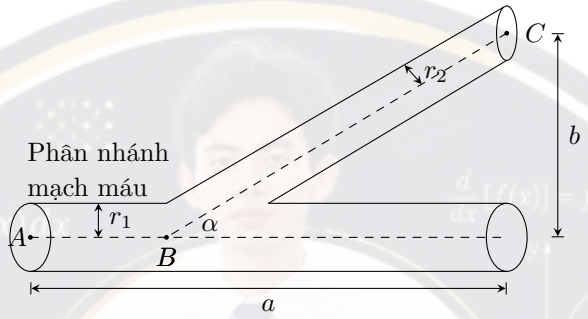


Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Bài 11. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\dfrac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \le t \le 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 12. Gieo ngẫu nhiên một cặp xúc sắc cân đối và đồng chất. Gọi a là tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc. Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x - a}$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) có một đường tiệm cận xiên là đường thẳng (d). Khi đó hãy tính xác suất để đường thẳng (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ âm (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 13. Hệ thống mạch máu chứa các mạch máu gồm động mạch chính, động mạch con, mao mạch và tĩnh mạch để giúp đưa máu từ tim đến các cơ quan và ngược lại. Hệ thống hoạt động để tối ưu hoá (tối thiểu) năng lượng mà tim sử dụng trong quá trình bơm máu. Đặc biệt năng lượng này giảm khi sức cản của máu giảm. Hình vẽ dưới đây minh hoạ một mạch máu chính có bán kính r_1 phân nhánh với một góc α° tạo thành một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2.



Sử dụng mô tả Định luật Poiseuille, người ta đã chứng minh được sức cản của máu theo con đường ABC là

$$R(\alpha) = C\left(\frac{a - b\cot\alpha}{r_1^4} + \frac{b}{r_2^4 \sin\alpha}\right)$$

với C, a, b là các hằng số. Khi bán kính mạch máu nhỏ bằng $\dfrac{2}{3}$ bán kính mạch máu chính. Xác định α để sức cản này là nhỏ nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 14. Một chiếc phà chạy giữa đất liền và đảo Dedlos. Phà có công suất tối đa là 1 000 xe hơi mỗi chuyến, nhưng việc tải gần hết công suất rất tốn thời gian. Biết rằng số lượng xe hơi đưa lên phà mỗi chuyến là $f(t) = \dfrac{2000t}{2t + 1}$ và mất một khoảng thời gian là 1 giờ. Mỗi xe cần trung bình 3,6 giây để dỡ xuống khi đến điểm đích. Thời gian di chuyển đến đảo và thời gian vòng về đều mất 1,28 giờ. Nên tải bao nhiêu xe lên phà cho mỗi chuyến đi để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 15. Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán bao gồm: 14 câu hỏi vận dụng và 07 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng là $\dfrac{14x}{5(x + 1)}$ còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là $\dfrac{14y}{5(3y + 1)}$ Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm cho 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao là lớn nhất?

Bài 16. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh

thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Giả sử số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất trong tháng được bán hết. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm để bắt đầu có lãi?

Bài 17. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên *(làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).*

Bài 18. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \le k \le 2$) là $t_k = \dfrac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \le x \le 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \dfrac{36}{x + 10}$ và $t_2 = \dfrac{4}{x - 30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2 400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 19. Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động được cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc và φ (rad) là pha ban đầu. Trong Vật lý, động năng (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$ trong đó m (kg) là khối lượng của vật và $v(t)$ (m/s) là vận tốc của vật tại thời điểm t (s). Giả sử một vật có khối lượng $m = 100$ (gam) dao động điều hòa với phương trình chuyển động: $x = 40\cos\left(200\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (cm). Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)? (Làm tròn đến hàng phần chục).

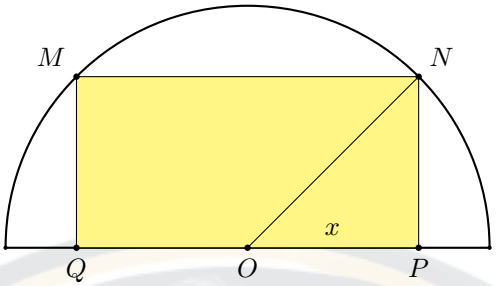
Bài 20. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \le 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

Bài 21. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

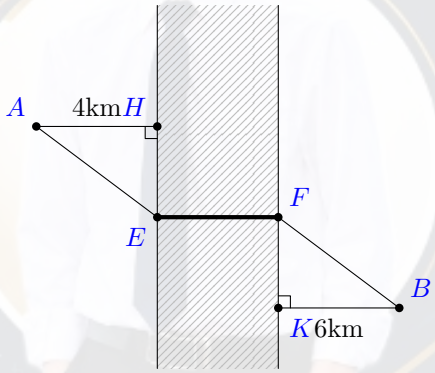
Bài 22. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê

mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Bài 23. Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?



Bài 24. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Bài 25. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

II. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1 (THPT Lê Thánh Tông HCM 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

Ⓐ $y = -1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = 2$.

Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2$.

Câu 2 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

Khi $x = -1$ thì $f(-1) = 4$.

Khi $x = 1$ thì $f(1) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

Câu 3 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 3$ và $f'(1) = 2$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 9}{x - 1}$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 18.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 9}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot (f(x)+3)$.

$= f'(1) \cdot (f(1) + 3) = 2 \cdot (3 + 3) = 12$.

Câu 4 (THPT ĐH-KHTN HN 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x}{x + 1}$.

Ⓐ $y = 2x + 1$. Ⓑ $y = 2x - 3$. Ⓒ $y = 2x$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

Hướng dẫn giải. Chia tử cho mẫu ta được: $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x + 1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\infty} [y - (2x - 1)] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$.

Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = 2x - 1$.

Câu 5 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{x + 2026}{x - 2025}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là

Ⓐ $x = 2025$. Ⓑ $x = -2024$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 6$.

Hướng dẫn giải. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là nghiệm của mẫu số: $x - 2025 = 0 \Leftrightarrow x = 2025$.

Câu 6 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $y = -1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 7 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

Ⓐ 2. Ⓑ -1. Ⓒ 3. Ⓓ -2.

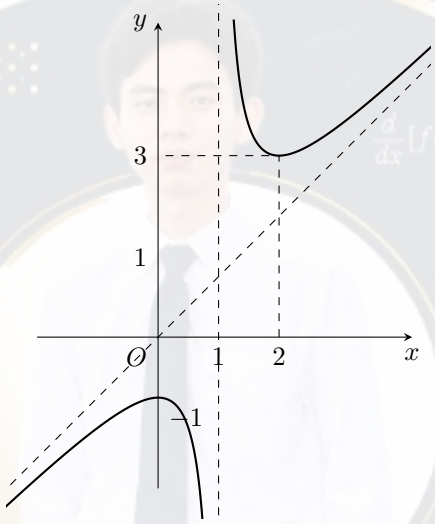
Hướng dẫn giải. Xét $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $[-2; 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng 3.

Câu 8 (THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên 2026). Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ?



Ⓐ $y = x - \dfrac{1}{x-1}$. Ⓑ $y = -x + \dfrac{1}{x-1}$.

Ⓒ $y = -x - \dfrac{1}{x-1}$. Ⓓ $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x$. Đồ thị đi qua các điểm $(0; -1)$ và $(2; 3)$.

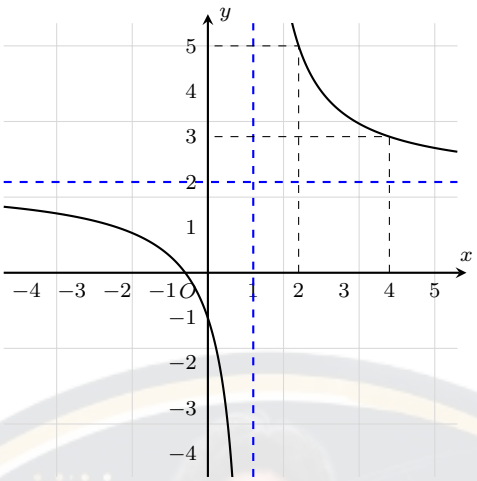
Thay $x = 0$ vào hàm số $y = x + \dfrac{1}{x-1}$ ta được $y = -1$.

Thay $x = 2$ vào hàm số $y = x + \dfrac{1}{x-1}$ ta được $y = 3$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Câu 9 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như

đường cong trong hình vẽ?

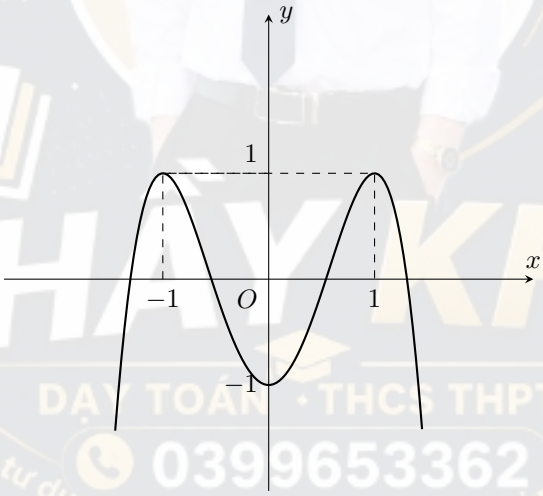


Ⓐ $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=1$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$.

Kiểm tra hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đi qua $(0;-1)$.

Câu 10 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên từ trái sang phải trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 11 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2026). Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $y'=x^4-3x^3+2x^2=x^2(x^2-3x+2)=x^2(x-1)(x-2)$. $y'=0\Leftrightarrow x=0, x=1, x=2$.

Bảng xét dấu y': y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=1$ (cực đại).

y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=2$ (cực tiểu).

y' không đổi dấu khi qua $x=0$.

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 12 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $f(x)$ là hàm số lẻ và $f(x)=x^2$ với mọi $x\le 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

Ⓐ -4. Ⓑ -2. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(2)=-f(-2)$.

Với $x=-2\le 0$, ta có $f(-2)=(-2)^2=4$.

Suy ra $f(2)=-4$.

Câu 13 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Giá trị cực tiểu của hàm số $y=4x^3-6x^2+11$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Hướng dẫn giải. $y'=12x^2-12x=0\Leftrightarrow x=0, x=1$.

Ta có $y(0)=11$, $y(1)=9$.

Lập bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng 9 tại $x=1$.

Câu 14 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Hàm số $y=-2x^3+9x^2+24x-114$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;4)$. Ⓑ $(-4;-1)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(4;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=-6x^2+18x+24=-6(x+1)(x-4)$.

$y'>0\Leftrightarrow -1<x<4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;4)$.

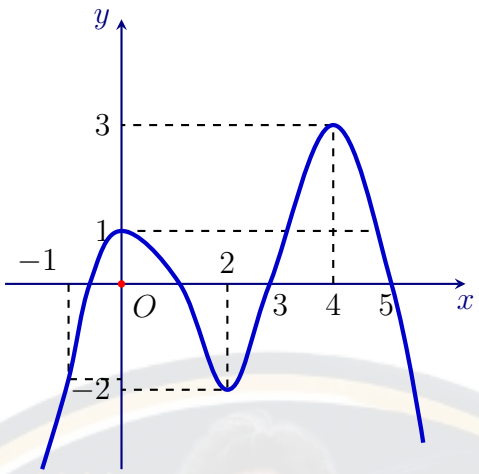
Câu 15 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $y=-2$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-4}{x+2}=2$. Suy ra tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 16 (THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên (các điểm cực trị của đồ thị thể hiện rõ trên hình). Gọi M và m lần

lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M-m$ bằng



Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-1;5]$:

Giá trị lớn nhất $M=3$ tại $x=4$.

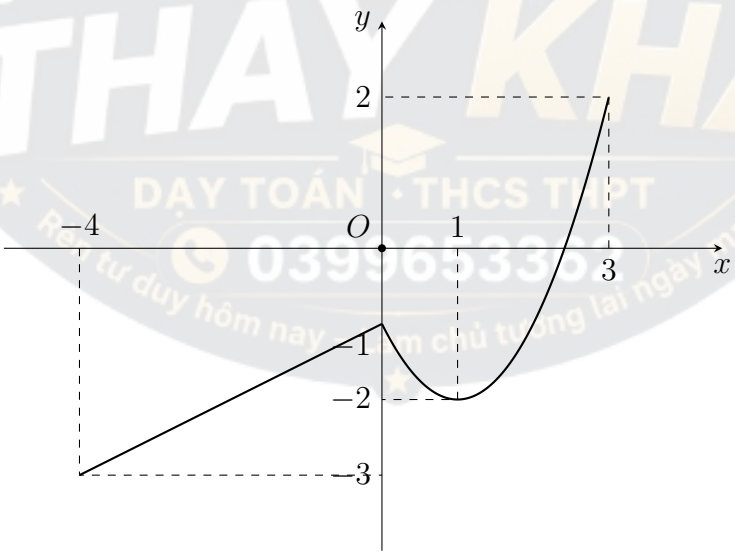
Giá trị nhỏ nhất $m=-2$ tại $x=2$. Vậy $M-m=3-(-2)=5$.

Câu 17 (Sở Bắc Ninh 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-1}{1-x}$ có phương trình là

Ⓐ $x=-3$. Ⓑ $y=-3$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $y=3$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-1}{1-x}=-3$. Suy ra tiệm cận ngang là $y=-3$.

Câu 18 (Sở Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-4;3]$ như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là



Ⓐ -4. Ⓑ -3. Ⓒ 1. Ⓓ -2.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị, trên đoạn $[0;3]$ điểm thấp nhất là $(1;-2)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -2.

Câu 19 (Sở Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

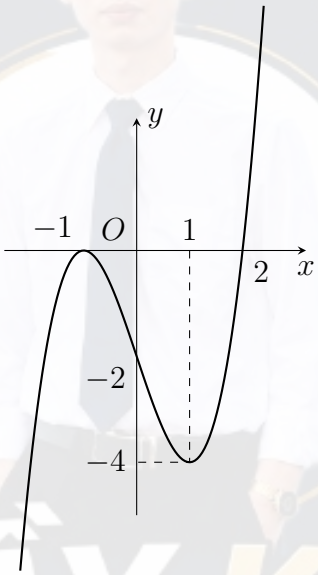
Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 20 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-4;0)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi xuống trên khoảng $(-1;1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 21 (Sở Phú Thọ 2026). Điểm cực tiểu của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ là

Ⓐ $x=\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=-1$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1, x=3$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=3$. Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Câu 22 (Sở Phú Thọ 2026). Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=2x-5+\frac{10}{x+3}$?

Ⓐ $y=2x-5$. Ⓑ $y=x+3$. Ⓒ $y=2x$. Ⓓ $y=2x+3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(2x-5)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x+3}=0$.

Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2x - 5$.

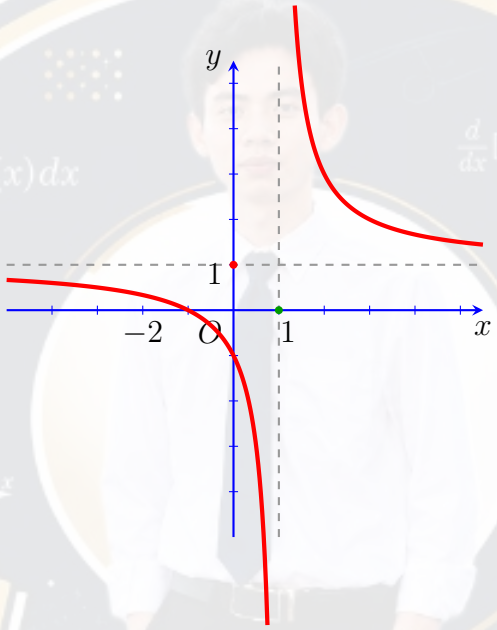
Câu 23 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $y = \frac{3x+7}{x+1}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 7. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Hàm số có $y' = \dfrac{-4}{(x+1)^2} < 0$. Hàm số nghịch biến trên $[0;3]$.

Do đó giá trị lớn nhất là $y(0) = \dfrac{7}{1} = 7$.

Câu 24 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y = \dfrac{2x-2}{2x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$. Đồ thị đi qua điểm $(0;-1)$.

Thử hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đầy đủ các đặc điểm trên.

Câu 25 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-20	↗	20	↘	$-\infty$

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;22)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Vì $(2;+\infty)\subset(1;+\infty)$ nên hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 26 (Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng 2026). Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ (bội 2), $x=1$ (bội 1), $x=2$ (bội 3).

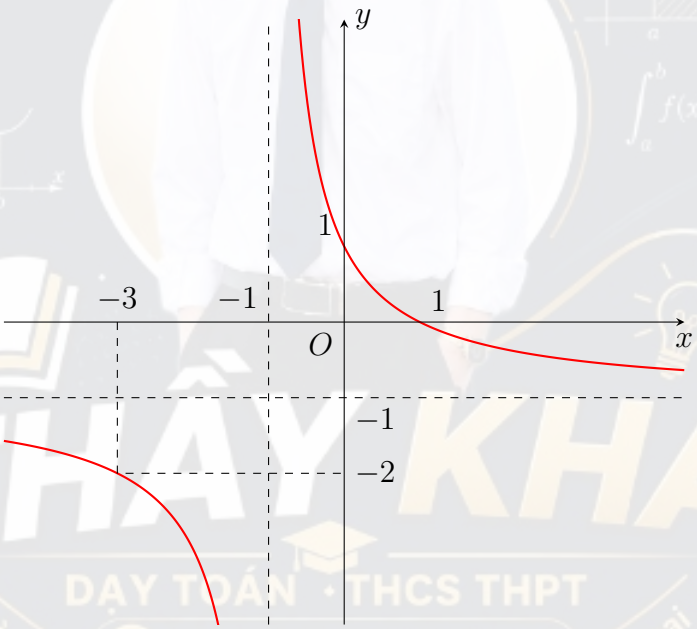
Bảng xét dấu: $x<1\Rightarrow f'(x)>0$.

$1<x<2\Rightarrow f'(x)<0$.

$x>2\Rightarrow f'(x)>0$.

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$. Vậy $x=1$ là điểm cực đại. Hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 27 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Đồ thị có hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$.

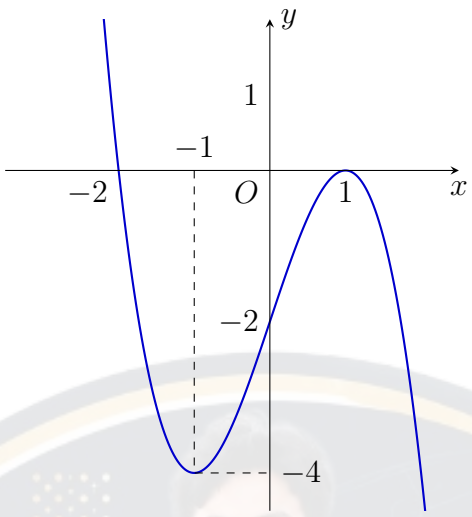
Hướng dẫn giải. Đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-1$. Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;0)$.

Kiểm tra hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$ thỏa mãn tất cả các tính chất trên.

Câu 28 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ ngày mai

Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ tại



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $x\in[-1;1]$, quan sát đồ thị ta thấy điểm thấp nhất của đồ thị hàm số là $(-1;-4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất đạt được tại $x=-1$.

Câu 29 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1\Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y=-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty\Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị có 2 đường tiệm cận.

Câu 30 (Cụm liên trường Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

Ⓐ $y=0$. Ⓑ $x=-4$. Ⓒ $y=-4$. Ⓓ $x=3$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đạt cực tiểu khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

Câu 31 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3;0)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(-\infty;-3)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến trên các khoảng có đạo hàm $f'(x) < 0$. Theo bảng xét dấu, đó là các khoảng $(-3;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 32 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

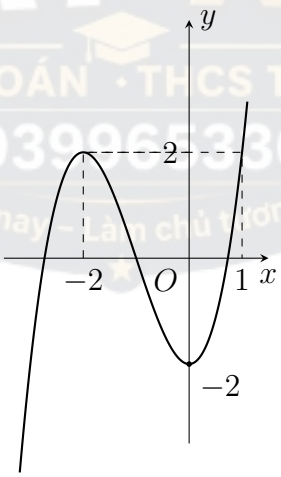
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Ⓐ $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓒ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Hướng dẫn giải. BBT có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Thử hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$, ngang $y = 2$ và $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$.

Câu 33 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội 2026). Đường cong trong hình sau là của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
Ⓒ $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$. Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

Hướng dẫn giải. Đây là đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a > 0$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;-2)$ và có các cực trị tại $x=-2$ và $x=0$.

Hàm số $y=x^3+3x^2-2$ thỏa mãn các đặc điểm này.

Câu 34 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{2x+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ⓐ 8. Ⓑ $\frac{9}{2}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}<0$. Hàm số nghịch biến trên $[2;4]$.

Do đó giá trị lớn nhất là $y(2)=\dfrac{7}{1}=7$.

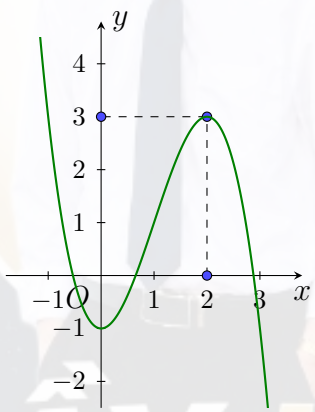
Câu 35 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin 2x-1$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $-1\le \sin 2x\le 1\Leftrightarrow -3\le 3\sin 2x\le 3\Leftrightarrow -4\le 3\sin 2x-1\le 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 36 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây. Số nghiệm dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là:



Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Ta có $2f(x)-3=0\Leftrightarrow f(x)=1,5$.

Số nghiệm dương của phương trình là số giao điểm có hoành độ dương của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1,5$.

Quan sát đồ thị, đường thẳng $y=1,5$ cắt đồ thị tại 2 điểm nằm bên phải trục tung.

Câu 37 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-7		-4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-3	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ $y=-3$. Ⓑ $y=-6$. Ⓒ $x=-7$. Ⓓ $x=-4$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = -4$ và giá trị cực đại tương ứng là $y = -3$.

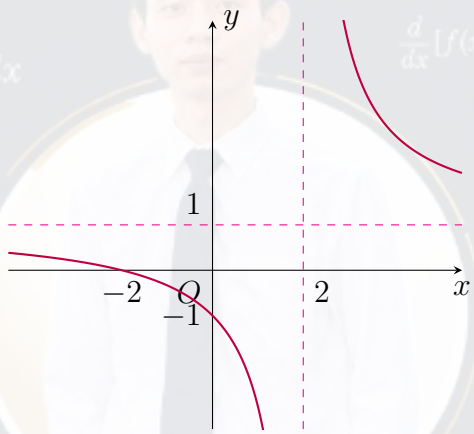
Câu 38 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x+4+\dfrac{x-1}{x-2}$ là

Ⓐ $y = x + 4$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = x + 5$. Ⓓ $y = x + 3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = x + 4 + \dfrac{x-1}{x-2} = x + 4 + 1 + \dfrac{1}{x-2} = x + 5 + \dfrac{1}{x-2}$.

Khi $x \to \infty$ thì $\dfrac{1}{x-2} \to 0$. Vậy đường tiệm cận xiên là $y = x + 5$.

Câu 39 (Liên trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{ax+2}{x+c}$ có đồ thị như hình sau đây. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a - c$



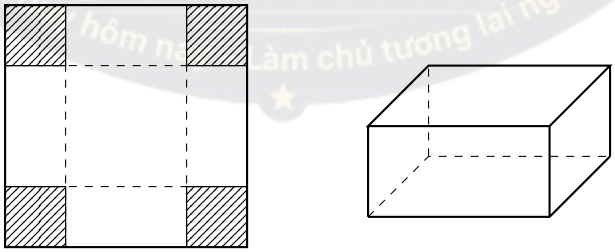
Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ -5. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2 \Rightarrow -c = 2 \Leftrightarrow c = -2$.

Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.

Giá trị biểu thức $P = 2a - c = 2(1) - (-2) = 4$.

Câu 40 (Liên trường Nghệ An 2026). Bạn Hải có một tấm bìa hình vuông cạnh 40 cm. Bạn muốn cắt bỏ ở bốn góc bốn hình vuông nhỏ bằng nhau để gấp và dán lại thành một hộp hình hộp chữ nhật không có nắp (tham khảo hình vẽ).



Để hộp có thể tích lớn nhất thì độ dài cạnh của hình vuông nhỏ bị cắt là:

Ⓐ 6 cm. Ⓑ 5 cm. Ⓒ $\dfrac{20}{3}$ cm. Ⓓ $\dfrac{10}{3}$ cm.

Hướng dẫn giải. Gọi x là độ dài cạnh hình vuông nhỏ bị cắt $(0 < x < 20)$. Kích thước đáy hộp là $(40 - 2x)$ cm, chiều cao là x cm.

Thể tích hộp là $V = x(40-2x)^2 = 4x(20-x)^2 = 4(x^3-40x^2+400x)$.

$V' = 4(3x^2-80x+400) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$ hoặc $x = 20$ (loại).

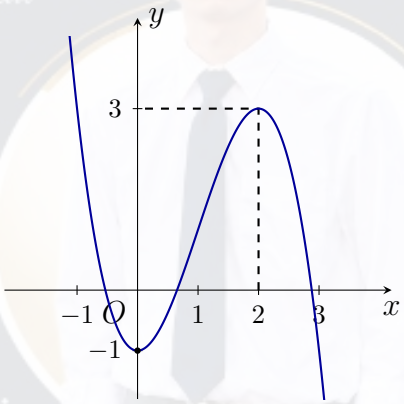
Dựa vào bảng biến thiên, thể tích đạt lớn nhất tại $x = \dfrac{20}{3}$.

Câu 41 (Liên trường Nghệ An 2026). Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \left(\dfrac{2026}{2025}\right)^x$.
Ⓑ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.
Ⓓ $y = e^{-x}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y = e^{-x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ là hàm số mũ cơ số $a = \dfrac{1}{e} < 1$, nên nó nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 42 (Liên trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây. Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là



Ⓐ $x = 0$.
Ⓑ $x = 2$.
Ⓒ $y = 3$.
Ⓓ $M(2;3)$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị, hàm số đạt cực đại tại điểm $(2;3)$. Vậy điểm cực đại của hàm số là $x = 2$.

Câu 43 (Liên trường Nghệ An 2026). Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ là

Ⓐ $x = 2$.
Ⓑ $y = 1$.
Ⓒ $y = 2$.
Ⓓ $x = 1$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm của mẫu số là $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Câu 44 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ 3.
Ⓑ 0.
Ⓒ 2.
Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (bội 2), $x = -1$ (bội 2), $x = \dfrac{1}{2}$ (bội lẻ).

Đạo hàm chỉ đổi dấu khi đi qua $x = \dfrac{1}{2}$. Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 45 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3-3x+5$

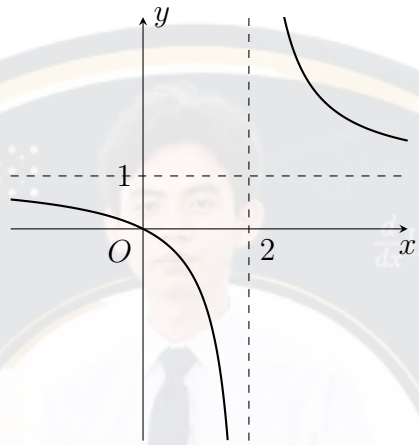
trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y = 0$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y = 7$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $y' = 3x^2 - 3 > 0$ với mọi $x \in (2;4)$. Hàm số đồng biến trên $[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y = y(2) = 2^3 - 3(2) + 5 = 7$.

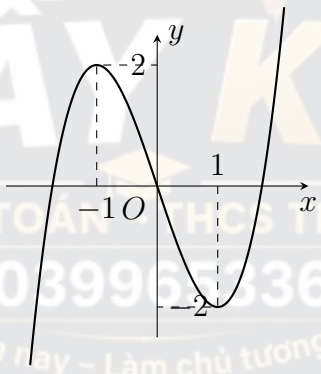
Câu 46 (Cụm trường Hà Tĩnh 2026). Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là:



Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = 2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị, khi $x \to \infty$, đồ thị hàm số tiến sát đường thẳng $y = 1$. Vậy tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 47 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 + 2x + 1$. Ⓑ $y = x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = -x^3 + 3x$. Ⓓ $y = x^3 + 3x^2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đây là đồ thị hàm số bậc ba hệ số $a > 0$, đi qua gốc tọa độ O và có cực trị tại $x = \pm 1$.

Thử hàm số $y = x^3 - 3x$:

Tại $x = -1, y = 2$.

Tại $x = 1, y = -2$.

Hàm số thỏa mãn tất cả các đặc điểm của đồ thị.

Câu 48 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x-1)(x+1)$. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là y_{CT}. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $y_{CT}=f(1)$. Ⓑ $y_{CT}=f(-1)$.
Ⓒ $y_{CT}=f(1/2)$. Ⓓ $y_{CT}=f(0)$.

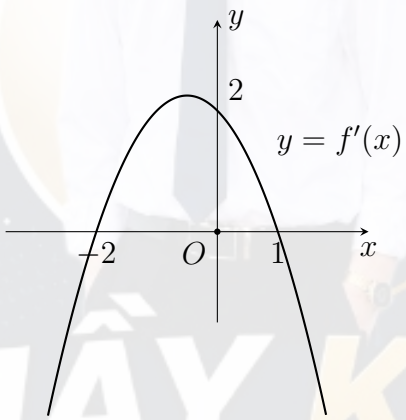
Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=-1$. Bảng xét dấu đạo hàm: $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=\dfrac{1}{2}$. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{1}{2}$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT}=f(1/2)$.

Câu 49 (Cụm 5 Sở Ninh Bình 2026). Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=2x+3+\dfrac{1}{x-1}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Hàm số có $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$. Hàm số có dạng $y=ax+b+\dfrac{k}{x-x_0}$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+3$. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 50 (ĐGNL DHSPHN 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x_1=-2$ và đạt cực tiểu tại $x_2=1$.
Ⓑ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại hai điểm $x_1=-2$ và $x_2=1$.
Ⓒ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại hai điểm $x_1=-2$ và $x_2=1$.
Ⓓ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_1=-2$ và đạt cực đại tại $x_2=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị $f'(x)$: - Tại $x=-2$: $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên hàm số đạt cực tiểu. - Tại $x=1$: $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại.

Câu 51 (ĐGNL DHSPHN 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+2}$ là

Ⓐ $y=x-1$. Ⓑ $y=x+1$. Ⓒ $y=x-2$. Ⓓ $y=x+2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+2}=\dfrac{(x-1)(x+2)+4}{x+2}=x-1+\dfrac{4}{x+2}$. Vì $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+2}=0$ nên tiệm cận xiên là $y=x-1$.

Câu 52 (ĐGNL DHSPHN 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x+1}$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm

số là điểm nào?

Ⓐ $M(-1;3)$. Ⓑ $N(3;-1)$. Ⓒ $P(-1;5)$. Ⓓ $Q(-5;1)$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng. Tiệm cận đứng: $x=-1$. Tiệm cận ngang: $y=3$. Vậy tâm đối xứng là $M(-1;3)$.

Câu 53 (ĐGNL DHSPHN 2026). Bạn Long định gấp một cái hộp có dạng hình lăng trụ tứ giác đều với tổng diện tích tất cả các mặt là 96 cm^2. Thể tích cái hộp mà bạn Long định gấp lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ 32 cm^3. Ⓑ 64 cm^3. Ⓒ 108 cm^3. Ⓓ 96 cm^3.

Hướng dẫn giải. Gọi cạnh đáy là a, chiều cao là h $(a,h>0)$. Tổng diện tích: $S=2a^2+4ah=96 \Rightarrow h=\dfrac{96-2a^2}{4a}=\dfrac{24}{a}-\dfrac{a}{2}$. Thể tích: $V=a^2h=a^2\left(\dfrac{24}{a}-\dfrac{a}{2}\right)=24a-\dfrac{a^3}{2}$. Xét $V'(a)=24-\dfrac{3a^2}{2}=0 \Leftrightarrow a^2=16 \Leftrightarrow a=4$. Khi $a=4 \Rightarrow V=24(4)-\dfrac{4^3}{2}=64$ cm^3.

Câu 54 (Cụm trường Nghệ An 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=-1$. Trên đoạn $[0;2]$, ta tính các giá trị: $y(0)=3$, $y(1)=1-2+3=2$, $y(2)=16-8+3=11$. Vậy giá trị nhỏ nhất là 2.

Câu 55 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-2;1)$. Ⓒ $(-2;3)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, $f'(x)>0$ trên khoảng $(-2;1)$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 56 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình:

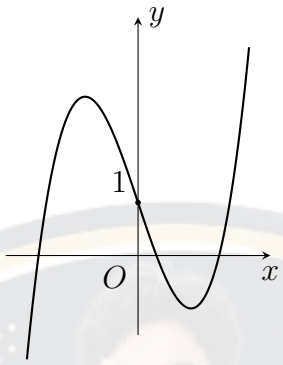
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	4 | $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -1$. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = -1$.

Câu 57 (Cụm trường Nghệ An 2026). Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Ⓐ $y = -x^4 + 3x + 1$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓒ $y = -x^2 + 3x + 1$.
Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình dáng, đây là đồ thị của hàm bậc ba với hệ số $a > 0$. Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$. Xét $y = x^3 - 3x + 1$, ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Với $x = -1, y = 3$; $x = 1, y = -1$. Phù hợp với đồ thị.

Câu 58 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0 ↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là:

Ⓐ 1.
Ⓑ 5.
Ⓒ 0.
Ⓓ -3.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có điểm cực đại là $x = 1$ và giá trị cực đại tương ứng là $y = 0$.

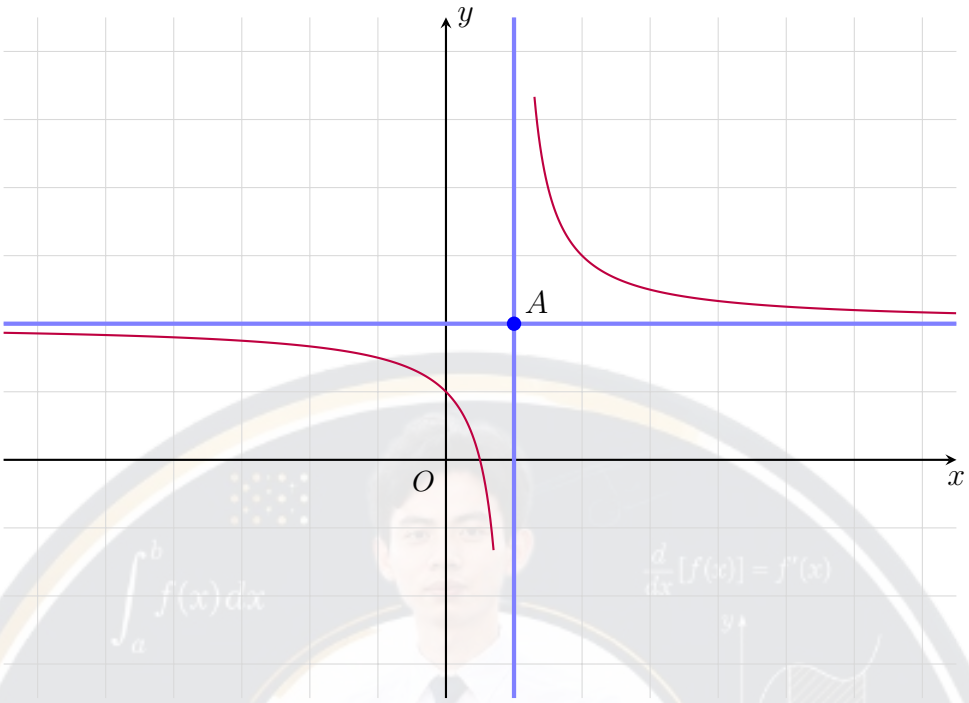
Câu 59 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+2}$ có tập xác định là D. Hàm số đã cho có đạo hàm trên D là

Ⓐ $y' = -\dfrac{2}{(x+2)^2}$.
Ⓑ $y' = \dfrac{6}{(x+2)^2}$.
Ⓒ $y' = \dfrac{2}{(x+2)^2}$.
Ⓓ $y' = -\dfrac{6}{(x+2)^2}$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức đạo hàm hàm phân thức bậc nhất: $y' = \dfrac{2\cdot 2 - (-2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$.

Câu 60 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đường tiệm cận

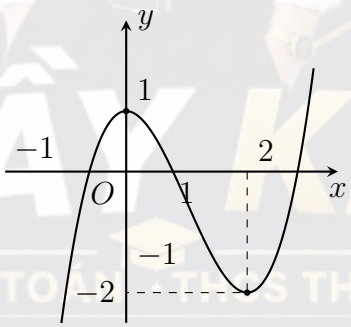
ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=3$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị, đường tiệm cận ngang là đường thẳng song song với trục hoành đi qua điểm có tung độ bằng 2. Vậy tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 61 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực đại của hàm số đã cho là



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=0$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x=0$ (đỉnh cao nhất của một phần đường cong).

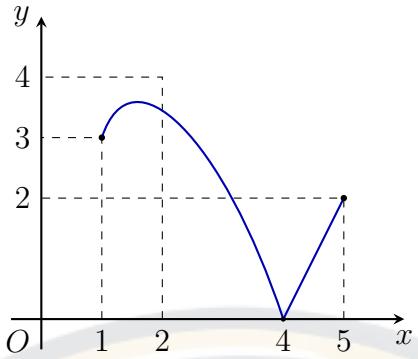
Câu 62 (Sở Hưng Yên 2026). Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

Ⓐ $y=-x^3+3x+1$. Ⓑ $y=2x^3+x-5$.

Ⓒ $y=\sqrt{x}$. Ⓓ $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y=2x^3+x-5$, ta có $y'=6x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

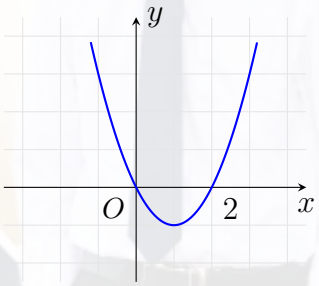
Câu 63 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ sau. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm.



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 4$. Ⓒ $x = 5$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị trên đoạn $[1;5]$, điểm cao nhất có tung độ bằng 4, đạt được khi $x = 2$.

Câu 64 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình sau. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng



Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(2;3)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(3;4)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0$. Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, đường cong nằm phía dưới trục hoành khi $0 < x < 2$. Khoảng $(1;2)$ nằm trong khoảng này.

Câu 65 (THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 18. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Trên đoạn $[0;3]$, xét $x = 0, x = 1, x = 3$: $y(0) = 0, y(1) = 1 - 3 = -2, y(3) = 27 - 9 = 18$. Vậy giá trị lớn nhất là 18.

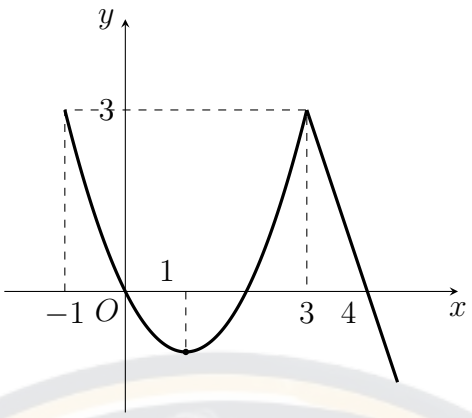
Câu 66 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Trong hệ trục tọa độ Oxy, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{x-2}$ có phương trình là:

Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$. Vậy tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Câu 67 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có một phần

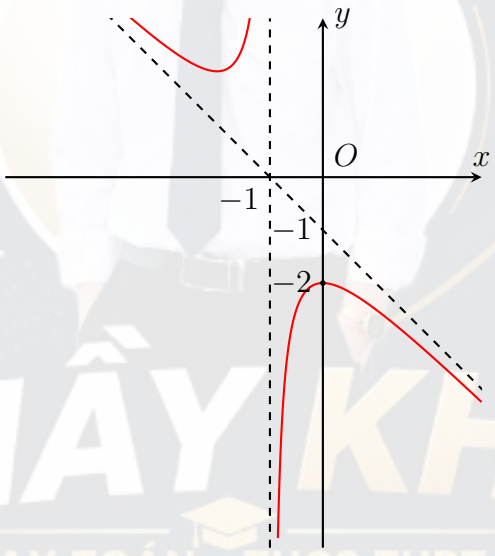
đồ thị như hình bên. Khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$ là:



Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;3)$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số đi lên từ điểm thấp nhất $(1;-1)$ đến điểm $(3;3)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 68 (THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM 2026). Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y = \dfrac{-x^2-2x-2}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{-x^2-2x}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$. Đồ thị cắt trục tung tại $(0;-2)$. Thay $x = 0$ vào hàm số ở phương án A: $y = \dfrac{-2}{1} = -2$. Thỏa mãn.

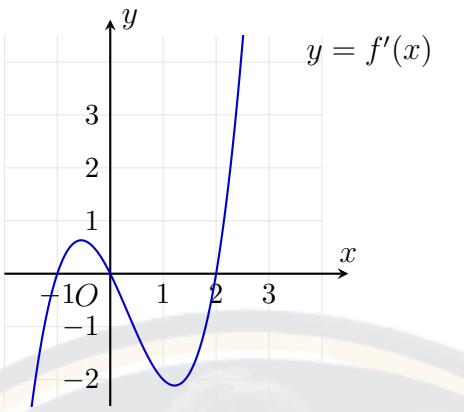
Câu 69 (Chuyên Hạ Long 2026). Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = -2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x-1} = 2$. Vậy tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 70 (Chuyên Hạ Long 2026). Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đạo

hàm $f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-1; 0; 2$ như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty, -1)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(0; 2)$. Ⓓ $(-1; 0)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Hàm số đồng biến khi $f'(x) > 0$. Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta thấy $f'(x) > 0$ trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 71 (Chuyên Hạ Long 2026). Tính đạo hàm của hàm số $y = e^x + \log x$.

Ⓐ $y' = e^x - \dfrac{1}{x \ln 10}$. Ⓑ $y' = e^x + \dfrac{1}{x}$.

Ⓒ $y' = e^x + \dfrac{1}{x \ln 10}$. Ⓓ $y' = e^x - \dfrac{1}{x}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Sử dụng các công thức đạo hàm cơ bản: $(e^x)' = e^x$ và $(\log x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Câu 72 (Chuyên Hạ Long 2026). Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 0. Ⓒ -3. Ⓓ 1.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và giá trị cực đại tương ứng là $y = 1$.

Câu 73 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-\infty;5)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, $f'(x)<0$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 74 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

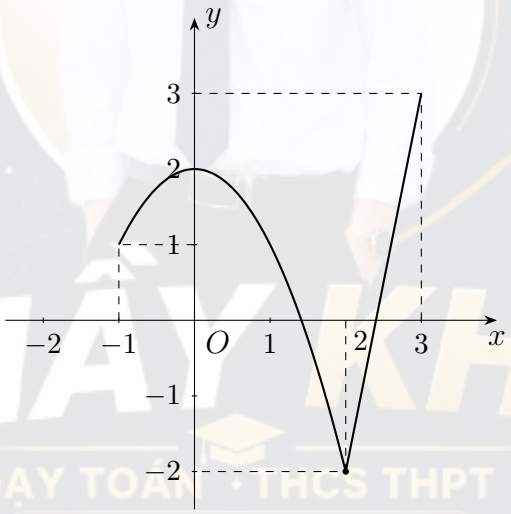
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(1;0)$. Ⓒ $(-1;4)$. Ⓓ $(1;4)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, giá trị cực tiểu tương ứng là $y=0$. Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;0)$.

Câu 75 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$ bằng

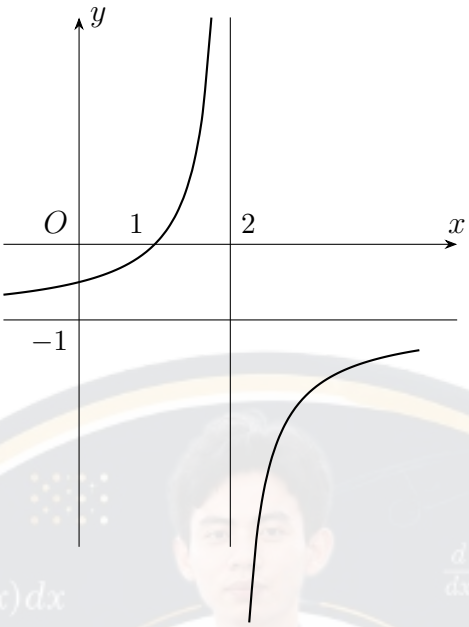


Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị trên đoạn $[-1;3]$, điểm cao nhất có tung độ bằng 3 (tại $x=3$).

Câu 76 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ

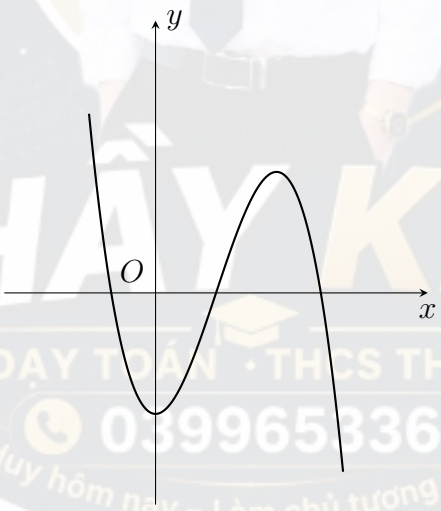
thị dưới đây. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $y=-1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng là đường thẳng vuông góc với trục hoành tại giá trị làm mẫu số bằng 0. Quan sát hình vẽ, đó là đường thẳng $x=2$.

Câu 77 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Đồ thị nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên?



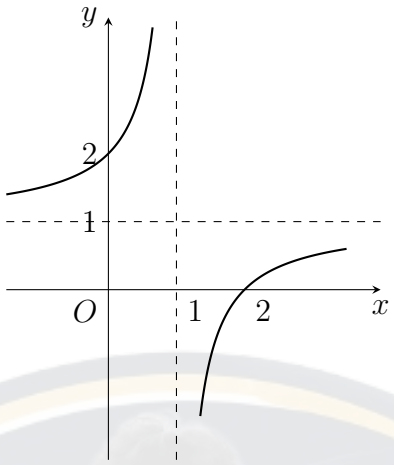
Ⓐ $y=x^3-3x^2-1$. Ⓑ $y=\dfrac{x^3-3x+1}{x-1}$.

Ⓒ $y=-x^3+3x^2-2$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải. Đây là đồ thị hàm bậc ba với hệ số $a<0$. Đồ thị đi qua điểm $(0;-2)$. Xét $y=-x^3+3x^2-2$, ta có $y(0)=-2$.

Câu 78 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường

cong như hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là



Ⓐ $(2;0)$. Ⓑ $(0;1)$. Ⓒ $(1;0)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị, đường cong cắt trục hoành (trục Ox) tại điểm có hoành độ $x=2$. Vậy tọa độ giao điểm là $(2;0)$.

Câu 79 (THPT Than Uyên - Lai Châu 2026). Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t)=-t^3+6t^2+t+5$, trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây.

Ⓐ 35 m/s. Ⓑ 10 m/s. Ⓒ 64 m/s. Ⓓ 13 m/s.

Hướng dẫn giải. Vận tốc $v(t)=S'(t)=-3t^2+12t+1$. Tại $t=3$, $v(3)=-3(3^2)+12(3)+1=-27+36+1=10$ m/s.

Câu 80 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đã cho có điểm cực đại là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $y=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 81 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x}$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số xác định trên $[0;2]$. $y'=\dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x}}$. $y'>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$. Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 82 (THPT Nguyễn Khuyến - HCM 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x+1}$. Tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số là

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $y=-1$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tiệm cận đứng là nghiệm của mẫu số: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Câu 83 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)>0$ trên $(-\infty;-2)$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng này.

Câu 84 (Sở Ninh Bình 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 20. Ⓓ 0.

✍ *Hướng dẫn giải.* $y'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Trên $[0;3]$, ta xét các giá trị: $y(0)=2, y(1)=0, y(3)=27-9+2=20$. GTLN là 20.

Câu 85 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

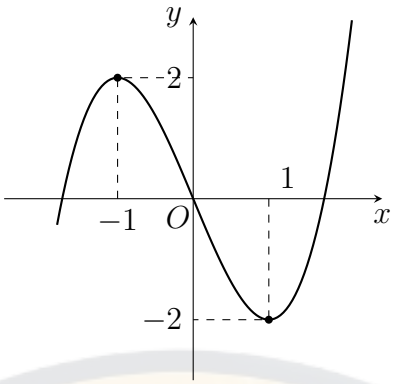
x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ 2	↗	4 ‖ 1	↘	-5	↗	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

✍ *Hướng dẫn giải.* - Tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to -1^-} y=-\infty \Rightarrow x=-1$. - Tiệm cận đứng: tại $x=1$ giới hạn hai bên hữu hạn, không có tiệm cận đứng tại 1. - Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow y=0$. Tổng cộng có 2 đường tiệm cận.

Câu 86 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, điểm cực đại của đồ thị là $(-1;2)$, do đó giá trị cực đại là $y=2$.

Câu 87 (Sở Ninh Bình 2026). Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$ là

Ⓐ $y=x+1$. Ⓑ $y=x$. Ⓒ $y=x-3$. Ⓓ $y=2x$.

Hướng dẫn giải. $y=\dfrac{x(x+1)-3}{x+1}=x-\dfrac{3}{x+1}$. Tiệm cận xiên là $y=x$.

Câu 88 (Sở Ninh Bình 2026). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có tâm đối xứng là điểm

Ⓐ $N(3;-1)$. Ⓑ $P(1;2)$. Ⓒ $Q(1;-\dfrac{3}{2})$. Ⓓ $M(2;-1)$.

Hướng dẫn giải. TCĐ $x=1$, TCN $y=2$. Tâm đối xứng là $(1;2)$.

Câu 89 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

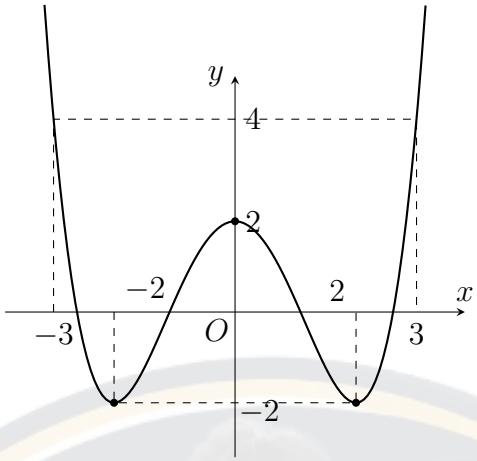
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, $f'(x)<0$ trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 90 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình

bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$ đạt tại x bằng



Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ 0.

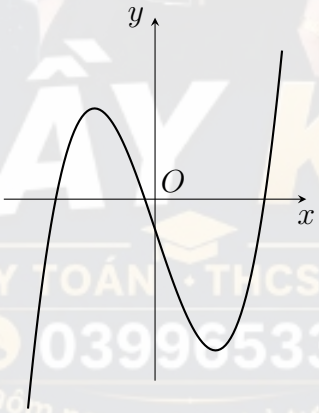
Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-3;2]$, điểm cao nhất của đồ thị nằm tại biên $x=-3$ với giá trị $y=4,25$.

Câu 91 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ là

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm của mẫu số là $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 92 (THPT Liên cấp đại học Hồng Đức 2026). Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y=x^3-3x-1$. Ⓓ $y=x^2+x-1$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị có dạng hàm bậc ba với hệ số $a>0$.

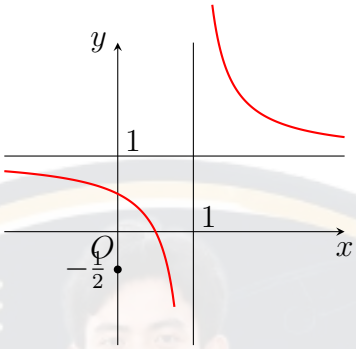
Câu 93 (THPT Nguyễn Khuyến - LTT HCM 2026). Hàm số nào dưới đây đơn điệu trên tập xác định của nó?

Ⓐ $y=\sqrt{x^3+x-5}$. Ⓑ $y=\dfrac{4x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=x^4+x^3+x+11$. Ⓓ $y=\cot 2x$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN - TRUNG HỌC CƠ SỞ VÀ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y=\dfrac{4x-2}{x-1}$, đạo hàm $y'=\dfrac{4(-1)-(-2)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$. Vậy hàm số này đơn điệu (nghịch biến) trên từng khoảng xác định.

Câu 94 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+b}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị có phương trình là



Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=2$.

Hướng dẫn giải. Đường tiệm cận đứng là đường thẳng vuông góc với trục hoành, ở đây là $x=1$.

Câu 95 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$.

Ⓐ $\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\max\limits_{[1;2]} y=-\dfrac{1}{2}$.

Ⓒ $\max\limits_{[1;2]} y=-\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\max\limits_{[1;2]} y=1$.

Hướng dẫn giải. $y'=\dfrac{2(1)-(-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$. Hàm số đồng biến trên $[1;2]$. Vậy giá trị lớn nhất đạt được tại $x=2$: $y(2)=\dfrac{4-1}{2+1}=1$.

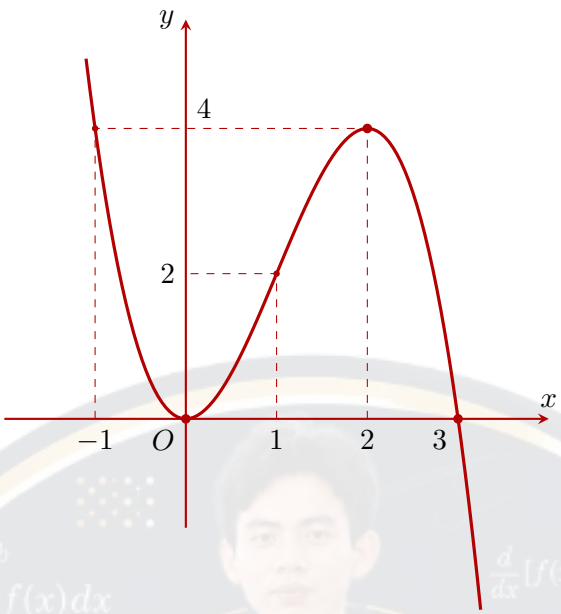
Câu 96 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2-2x+5}{x+2}$ là

Ⓐ $y=-x$. Ⓑ $y=-x+1$. Ⓒ $y=x+2$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{-x(x+2)+5}{x+2}=-x+\dfrac{5}{x+2}$. Tiệm cận xiên là $y=-x$.

Câu 97 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên.

Phát biểu nào sau đây sai?



Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
Ⓒ Điểm cực đại của hàm số là 4.
Ⓓ Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0;0)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* "Điểm cực đại của hàm số" dùng để chỉ giá trị x. Ở đây giá trị cực đại là $y=4$ tại $x=2$. Tuy nhiên, trong các lựa chọn phổ thông, nếu "Điểm cực đại của hàm số là 4" thì sai về mặt thuật ngữ (4 là giá trị cực đại).

Câu 98 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Ⓐ $\min_{\mathbb{R}} y=4$. Ⓑ $y_{CT}=0$. Ⓒ $\max_{\mathbb{R}} y=5$. Ⓓ $y_{CD}=5$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tại $x=0$, y' đổi dấu từ âm sang dương nên $y_{CT}=4$. Tại $x=1$, hàm số không xác định đạo hàm nhưng đổi dấu từ dương sang âm, tuy nhiên nhánh phải tiến về $-\infty$, không đạt cực đại kiểu hàm đa thức thông thường nhưng $y=5$ là giá trị cực đại của nhánh trái. Xét theo BBT, $y_{CD}=5$.

Câu 99 (Cụm trường Nghệ An 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x=5$. Ⓑ $y=0$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=1$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Nghiệm của mẫu số: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 100 (Cụm trường Nghệ An 2026). Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 3x - 1$ và $y = x^3 - 1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 1 = x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 3) = 0$. Phương trình $x^2 - x + 3 = 0$ vô nghiệm do $\Delta < 0$. Vậy có duy nhất 1 giao điểm $x = 0$.

Câu 101 (Cụm trường Nghệ An 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +infty)$, có bảng biến thiên như hình sau: Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào BBT, $y' > 0$ trên $(1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 102 (Cụm trường Nghệ An 2026). Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = -x^3 + 2x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải. Hàm bậc ba có $a < 0$, đồ thị đi qua $(0; 1)$ và cực đại là $(2; 5)$. Thử $y = -x^3 + 3x^2 + 1$, ta có $y(0) = 1$ và $y(2) = -8 + 12 + 1 = 5$. Phù hợp.

Câu 103 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

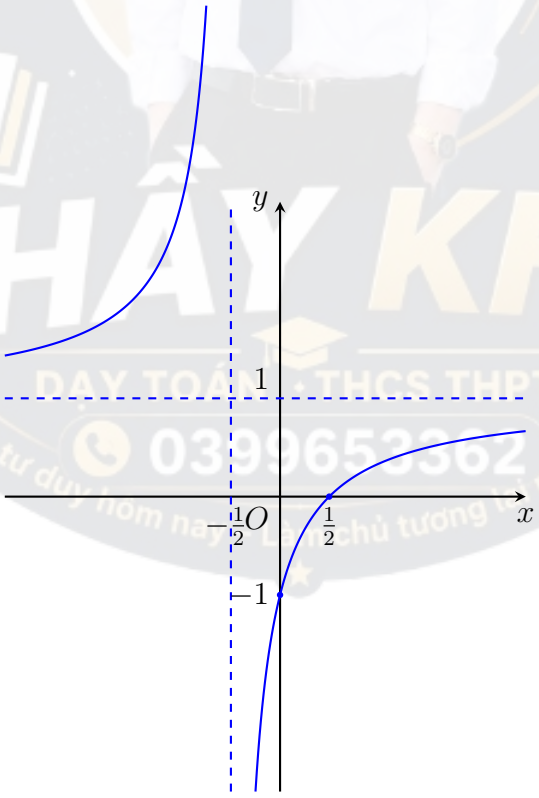
Hướng dẫn giải. - TCN: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1 \Rightarrow y=-1$. - TCN: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2 \Rightarrow y=2$. - TCĐ: $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty \Rightarrow x=1$. Tổng cộng có 3 tiệm cận.

Câu 104 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên $[1;3]$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ $\dfrac{52}{3}$. Ⓒ $\dfrac{65}{3}$. Ⓓ 20.

Hướng dẫn giải. $y'=1-\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm2$. Trên $[1;3]$ ta xét các giá trị: $y(1)=5, y(2)=4, y(3)=\dfrac{13}{3}$. Min $=4$, Max $=5$. Tích $=20$.

Câu 105 (THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $x=-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $y=1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận ngang là đường thẳng nét đứt nằm ngang, cắt trục tung tại giá trị

$y = 1$.

Câu 106 (Liên trường Hà Nội 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-3;0)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, $y' > 0$ trên $(-\infty;-3)$ và $(0;2)$. Khoảng $(0;1)$ nằm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 107 (Liên trường Hà Nội 2026). Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{2-x}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $x = 2$.

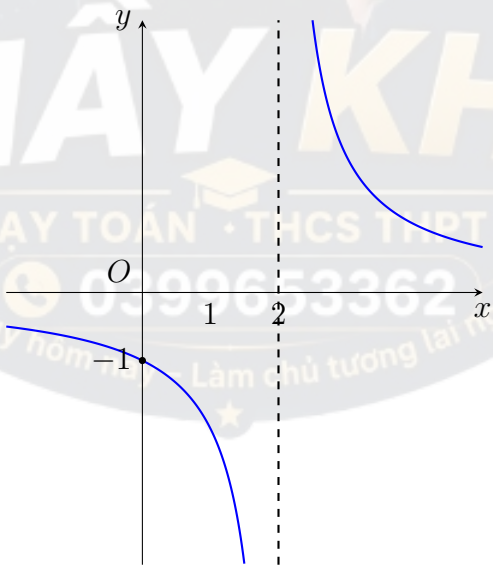
Hướng dẫn giải. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{-x+2} = -2$.

Câu 108 (THPT Nguyễn Trung Thiên - Hà Tĩnh 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Mẫu số $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 109 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Tìm hệ số b, c để hàm số $y = \dfrac{2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ sau:

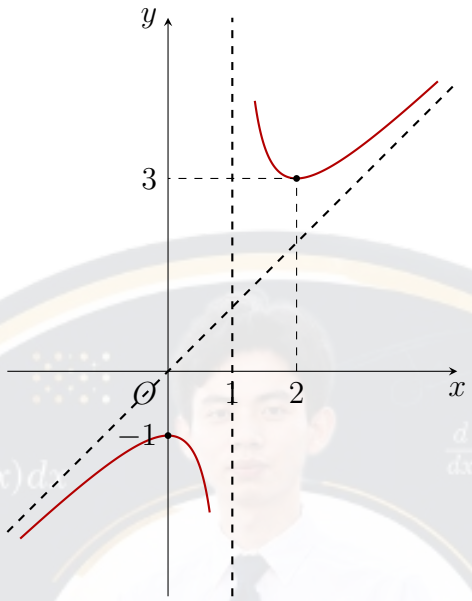


Ⓐ $\begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng $x = 2 \Rightarrow c(2) + b = 0 \Rightarrow b = -2c$. Đồ thị đi qua $(0;-1) \Rightarrow$

$-1=\dfrac{2}{b}\Rightarrow b=-2$. Suy ra $c=1$.

Câu 110 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số đi lên trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 111 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(3;4)$. Ⓒ $(4;+\infty)$. Ⓓ $(1;3)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến khi $y'<0$. Dựa vào bảng xét dấu, đó là các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;4)$.

Câu 112 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

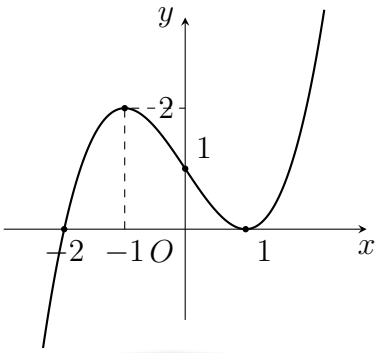
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu qua các điểm: $x=-3, x=-2, x=3, x=5$. Tổng cộng có 4 điểm cực trị.

Câu 113 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào

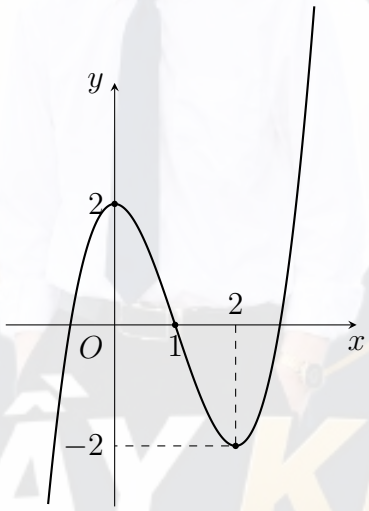
trong các hàm số dưới đây?



Ⓐ $y=x^3+2x+1$.
Ⓑ $y=x^3-3x+1$.
Ⓒ $y=-x^3+2x+1$.
Ⓓ $y=x^3-3x^2+1$.

Hướng dẫn giải. Hàm số bậc ba với hệ số $a>0$, đi qua điểm $(0;1)$, $(-2;0)$, $(1;0)$ và cực đại tại $(-1;2)$.

Câu 114 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0;2)$.
Ⓑ $(0;+\infty)$.
Ⓒ $(2;+\infty)$.
Ⓓ $(-\infty;2)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đồng biến khi đồ thị đi lên từ trái sang phải, tức là trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

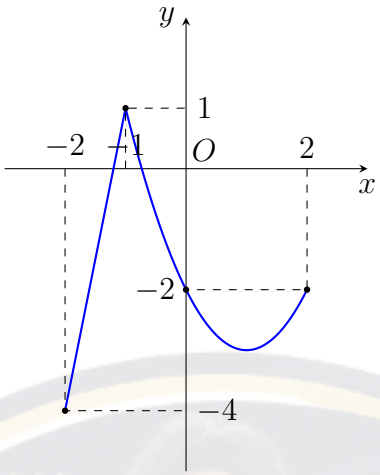
Câu 115 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng là

Ⓐ $y=1$.
Ⓑ $x=-3$.
Ⓒ $x=1$.
Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm của mẫu số: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Câu 116 (THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ lần lượt

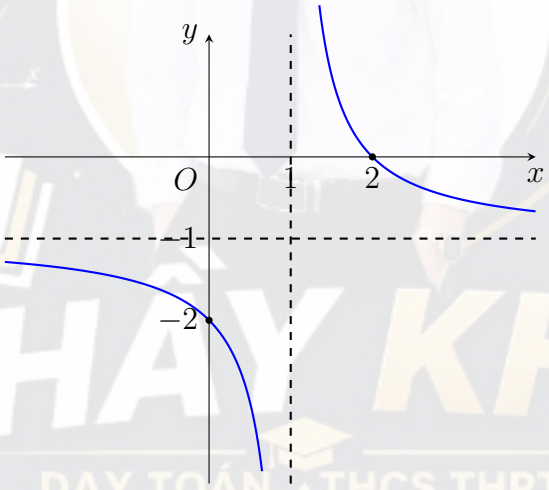
là M và m. Khi đó $M-m$ bằng



Ⓐ 5. Ⓑ -4. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-2;2]$: Giá trị lớn nhất $M=1$ (tại $x=-1$). Giá trị nhỏ nhất $m=-4$ (tại $x=-2$). $M-m=1-(-4)=5$.

Câu 117 (THPT Trần Nhân Tông - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac\neq 0; ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow -d/c=1\Rightarrow d=-c$. Tiệm cận ngang $y=-1\Rightarrow a/c=-1\Rightarrow a=-c\Rightarrow a=d$. Cắt trục tung tại $(0;-2)\Rightarrow b/d=-2\Rightarrow b=-2d$. Cắt trục hoành tại $(2;0)\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$. Nếu $a=1$ thì $d=1, c=-1, b=-2$. Có 2 số dương.

Câu 118 (THPT Trần Phú - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362

hình vẽ. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-5	↗	$+\infty$

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu tại $x=-1$ và tại điểm không xác định $x=1$. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 119 (THPT Trần Phú - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Xét trên đoạn $[-1;2]$: Giá trị lớn nhất $M=3$ (tại $x=-1$). Giá trị nhỏ nhất $m=0$ (tại $x=0$). $M+m=3$.

Câu 120 (Cụm Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(3;+\infty)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đồng biến trên các khoảng nơi $y'>0$, đó là $(1;2)$ và $(2;3)$.

Câu 121 (Cụm Hải Phòng 2026). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0;3]$: Giá trị lớn nhất $M=3$ (tại $x=0$). Giá trị nhỏ nhất $m=-2$ (tại $x=2$). $M+m=1$.

Câu 122 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$ là

Ⓐ -1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. $y' = \dfrac{3}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in [2;5]$. Hàm số đồng biến. Max là $y(5) = \dfrac{10-5}{5-1} = \dfrac{5}{4}$.

Câu 123 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 4\sin 2x - 3$ là

Ⓐ 1. Ⓑ -11. Ⓒ -7. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Ta có $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\sin 2x \le 4 \Rightarrow -7 \le 4\sin 2x - 3 \le 1$. Giá trị nhỏ nhất là -7.

Câu 124 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

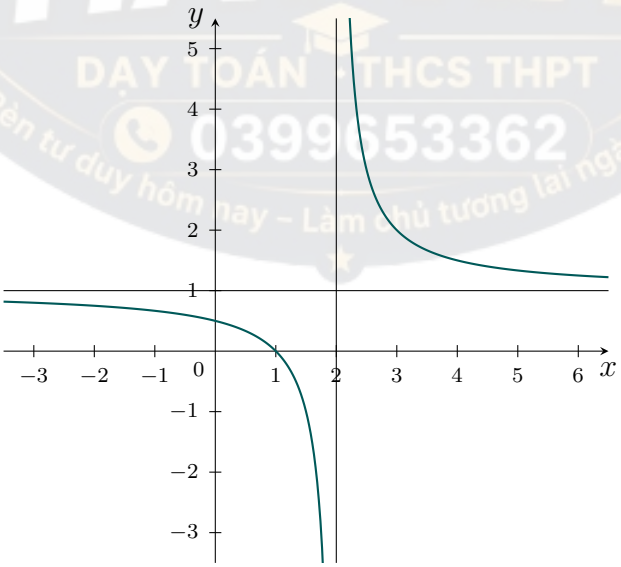
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -3$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 0$.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 0$.

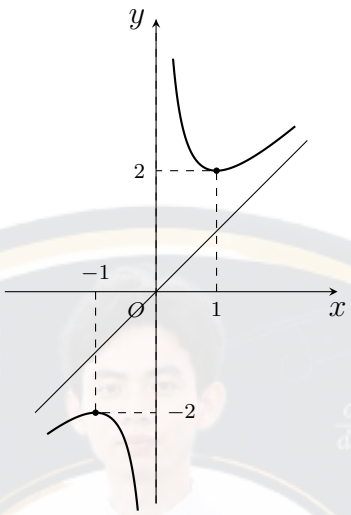
Câu 125 (THPT Lê Quý Đôn - Đống Đa 2026). Cho đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận ngang là đường thẳng nét mảnh nằm ngang, cắt trục tung tại giá trị $y = 1$.

Câu 126 (Sở Lạng Sơn 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;2)$.

Hướng dẫn giải. Quan sát đồ thị, trong khoảng $(-1;0)$ đồ thị đi xuống từ cực đại $(-1;-2)$.

Câu 127 (Sở Thái Nguyên 2026). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $y = -2$. Ⓒ $y = \dfrac{5}{2}$. Ⓓ $y = \dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{x+2} = 2$.

Câu 128 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

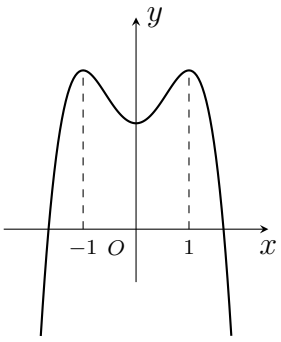
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $y = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Câu 129 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình

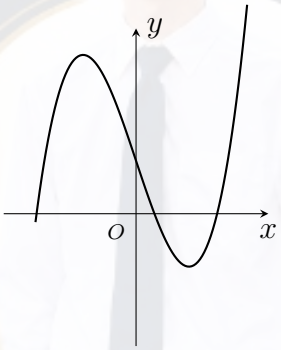
vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị đi lên trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 130 (Sở Thái Nguyên 2026). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



Ⓐ $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-1}{2x-1}$.
Ⓒ $y=-x^3+3x+1$. Ⓓ $y=x^3-3x+1$.

Hướng dẫn giải. Hàm bậc ba với hệ số $a>0$, đi qua điểm $(0;1)$.

Câu 131 (Cụm trường Thanh Hóa 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ là

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $x=2$.

Hướng dẫn giải. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x-2}=3$.

Câu 132 (Cụm trường Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu khi đi qua các nghiệm bội lẻ. $x=1$ (bội 1) và $x=3$ (bội 3).

Nghiệm $x=2$ bội chẵn không làm đạo hàm đổi dấu. Vậy có 2 điểm cực trị.

Câu 133 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

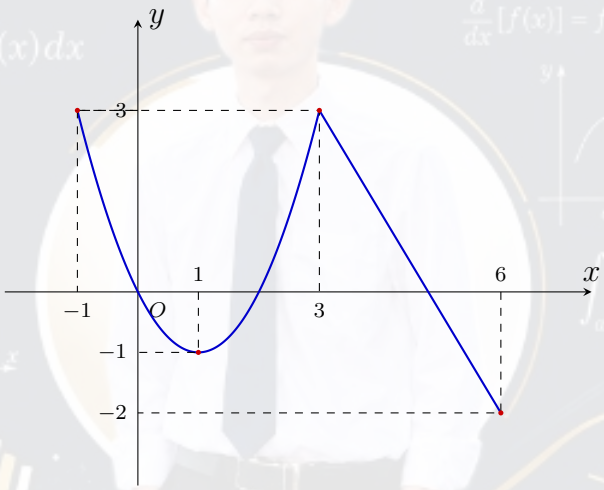
x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 1$.

Đây là điểm cực đại duy nhất (mặc dù tại 1 đạo hàm không xác định nhưng hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$).

Câu 134 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[1; 4]$, điểm cao nhất đạt được tại $x = 3$ với tung độ $y = 3$.

Tại $x = 4$, giá trị nằm trên đoạn nối từ $(3, 3)$ đến $(6, -2)$, sẽ nhỏ hơn 3.

Câu 135 (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2026). Biết rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Hiệu $a - 2b$ có giá trị là

Ⓐ 4. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng $x = 2 \Rightarrow b(2) - 2 = 0 \Rightarrow b = 1$.

Tiệm cận ngang $y = 3 \Rightarrow a/b = 3 \Rightarrow a = 3b = 3$. $a - 2b = 3 - 2(1) = 1$.

Câu 136 (Cụm trường Sở Phú Thọ 2026). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng:

Ⓐ -52. Ⓑ $20\sqrt{10}$. Ⓒ -63. Ⓓ $-20\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải. $f'(x) = 3x^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$ (do $x \in [2; 19]$).

$f(2) = -52$, $f(19) = 19^3 - 30(19) = 6289$, $f(\sqrt{10}) = 10\sqrt{10} - 30\sqrt{10} = -20\sqrt{10} \approx -63,2$. Vậy giá trị nhỏ nhất là $-20\sqrt{10}$.

Câu 137 (Cụm trường Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

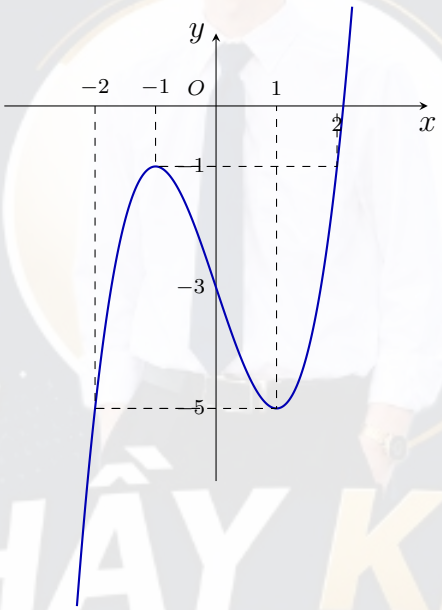
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -2. Ⓒ -3. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Nhìn vào bảng biến thiên, giá trị cực đại là $y = 2$.

Câu 138 (Sở Hà Nội 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 2]$ bằng



Ⓐ -1. Ⓑ -6. Ⓒ 0. Ⓓ -5.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-2; 2]$:

Giá trị lớn nhất $M = -1$ (tại $x = -1$).

Giá trị nhỏ nhất $m = -5$ (tại $x = -2$ và $x = 1$). $M + m = -6$.

Câu 139 (Sở Hà Nội 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn luyện hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu tại $x=-3$ và $x=2$. Tại $x=1$ đạo hàm không đổi dấu. Vậy có 2 cực trị.

Câu 140 (Cụm trường Bắc Ninh 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	2	↗	$+\infty$ | 4	↗	3	↘	-1

Hỏi đồ thị hàm số có tổng tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. - TCN: $y=2$ (khi $x\to-\infty$) và $y=-1$ (khi $x\to+\infty$).

- TCĐ: $x=-1$. Tổng là 3.

Câu 141 (Sở Sơn La 2026). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x=2$.

Hướng dẫn giải. Nghiệm mẫu: $x=1$.

Câu 142 (Sở Tuyên Quang 2026). Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=x+1-\dfrac{1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y=x$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=x+1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận xiên là phần đa thức bậc nhất $y=x+1$.

Câu 143 (Sở Tuyên Quang 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	-26	↗	$+\infty$

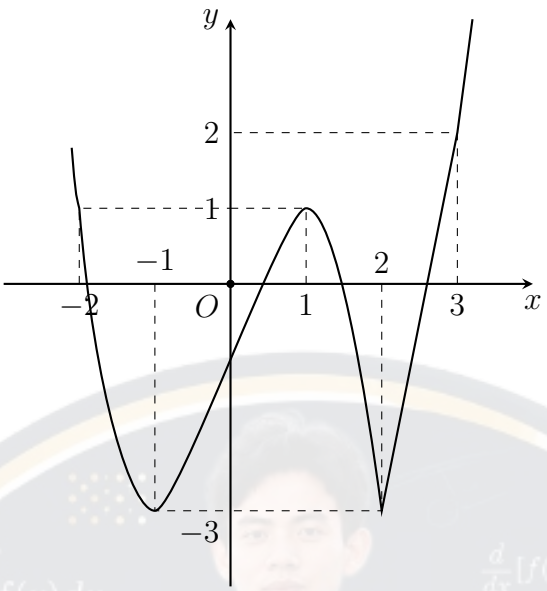
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-26;6)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$. Khoảng $(-1;2)$ nằm trong khoảng này.

Câu 144 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ và có đồ thị

trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng bao nhiêu?



Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-2;3]$, tung độ cao nhất của đồ thị hàm số đạt được tại $x = 3$ với $y = 2$.

Câu 145 (Sở Ninh Bình 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

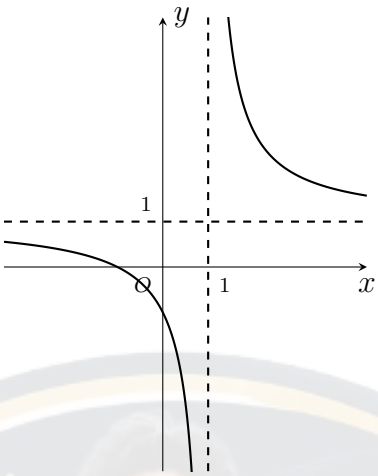
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-3;6)$. Ⓑ $(6;+\infty)$. Ⓒ $(-1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;5)$.

Hướng dẫn giải. Đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(6;+\infty)$.

Câu 146 (Sở Ninh Bình 2026). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau

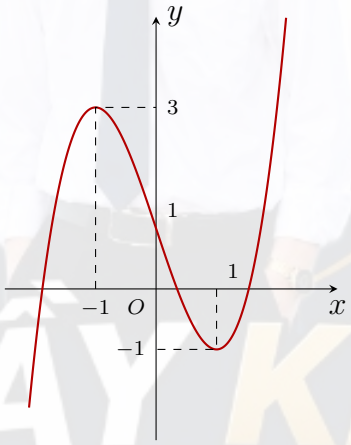
đây?



Ⓐ $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x+1}{3x-3}$.

Hướng dẫn giải. TCĐ $x=1$, TCN $y=1$. Đi qua $(-1;0)$. Chỉ có $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

Câu 147 (Sở Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



Ⓐ $y=3$. Ⓑ $y=-1$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 148 (Sở Hưng Yên 2026). Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$ có phương trình là

Ⓐ $y=2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $y=-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $x=-\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Câu 149 (Sở Hưng Yên 2026). Hàm số $y=x^3-3x+2026$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải. $y'=3x^2-3<0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$.

Câu 150 (Chuyên KHTN HN 2026). Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-5x^2+3x+1}{x-1}$ có phương trình là:

Ⓐ $y = 5x + 2$. Ⓑ $y = -5x + 2$.
Ⓒ $y = -5 - 2x$. Ⓓ $y = -5x - 2$.

Hướng dẫn giải. $y = \dfrac{-5x(x-1)-2x+1}{x-1} = \dfrac{-5x(x-1)-2(x-1)-1}{x-1} = -5x-2-\dfrac{1}{x-1}$.

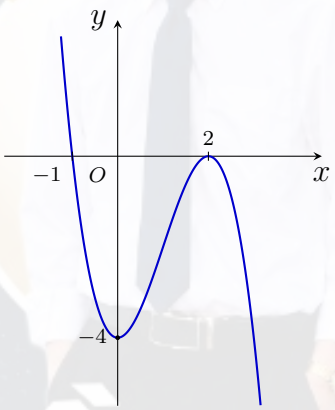
Câu 151 (Chuyên KHTN HN 2026). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2+2x-5}{x^2-3x+2}$ (với a là hằng số). Biết rằng $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

Ⓐ -6. Ⓑ -8. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Để liên tục tại $x = 1$, tử số phải nhận 1 là nghiệm: $a + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

Khi đó $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-5}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(x-1)(3x+5)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{3x+5}{x-2}$. $f(1) = \dfrac{8}{-1} = -8$.

Câu 152 (Chuyên KHTN HN 2026). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ là đồ thị một hàm số bậc ba như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là



Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Hàm số đạt cực tiểu khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$, tại $x = -1$, $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm (cực đại).

Tại $x = 2$ là nghiệm bội chẵn, không đổi dấu. Vậy không có điểm cực tiểu.

Câu 153 (Sở Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=-1$ và tiệm cận ngang $x=-2$..
Ⓑ Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận..
Ⓒ Đồ thị hàm số có ba tiệm cận..
Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-2$..

Hướng dẫn giải. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2 \Rightarrow y=-2$ là TCN. $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty \Rightarrow x=-1$ là TCĐ.

Câu 154 (Sở Quảng Ninh 2026). Hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+7$ có cực đại là

Ⓐ -1. Ⓑ 12. Ⓒ 3. Ⓓ -20.

Hướng dẫn giải. $y'=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow x=-1, x=3$. $y(-1)=12, y(3)=-20$. Giá trị cực đại là 12.

Câu 155 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng 2026). Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=1+\dfrac{2x+1}{x+2}$ có phương trình là

Ⓐ $y=3$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+1}{x+2}\right)=1+2=3$.

Câu 156 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

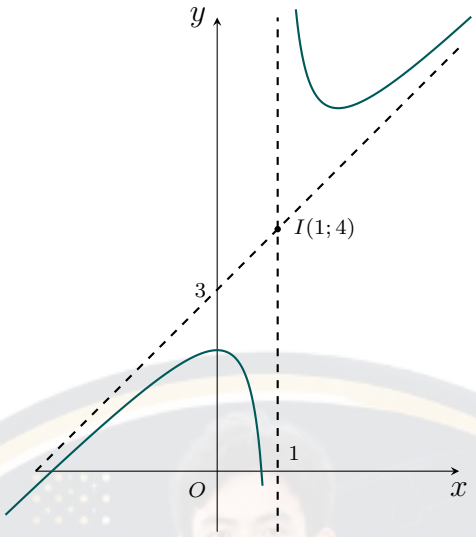
Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
Ⓑ Hàm số có giá trị cực đại bằng -1.
Ⓒ Hàm số có 2 điểm cực đại.
Ⓓ Hàm số có 3 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải. Giá trị cực tiểu là -1, giá trị cực đại là 3. Vậy khẳng định "Giá trị cực đại bằng -1" là sai.

Câu 157 (Sở Lào Cai 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình vẽ

dưới đây. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là



Ⓐ $y=x-2$. Ⓑ $y=3x+1$. Ⓒ $y=x+3$. Ⓓ $y=x-1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận xiên đi qua $(0;3)$ và điểm giao tiệm cận $I(1;4)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm này là $y=x+3$.

Câu 158 (Sở Lào Cai 2026). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

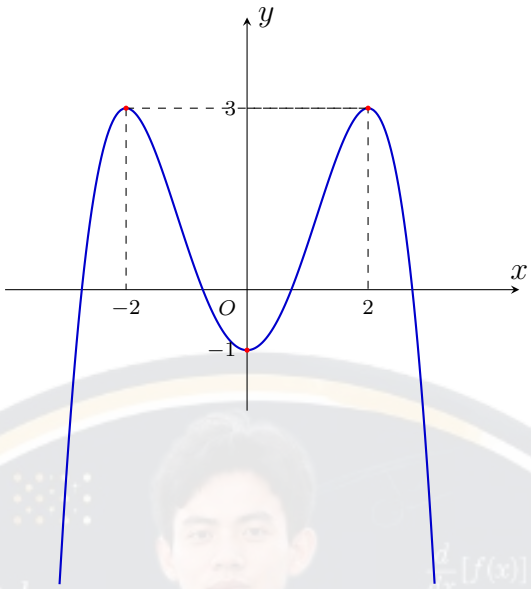
Hàm số đã cho đạt cực đại tại

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $x=2$. Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x=-1$.

Câu 159 (THPT Trần Phú - Phú Thọ 2026). Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ

dưới đây:

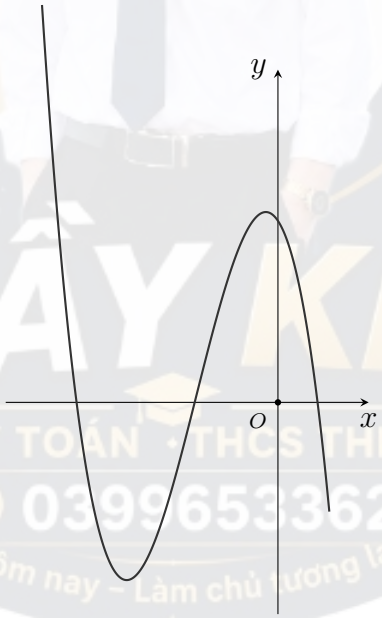


Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $A(0;-1)$. Ⓒ $x=0$. Ⓓ $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là điểm $(0;-1)$.

Câu 160 (Sở Thanh Hóa 2026). Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $a<0,d>0$. Ⓑ $a>0,d>0$.
Ⓒ $a>0,d<0$. Ⓓ $a<0,d<0$.

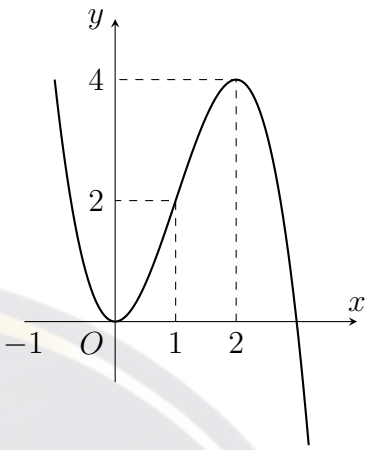
Hướng dẫn giải. Nhánh cuối cùng của đồ thị đi xuống $\Rightarrow a<0$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.

Câu 161 (Sở Hà Tĩnh 2026). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ -5.

✍ *Hướng dẫn giải.* $y' = \dfrac{-6}{(x-3)^2} < 0$. Hàm số nghịch biến trên $[0;2]$. Max $= y(0) = -1$.

Câu 162 (Sở Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**



Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$..
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$..
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$..
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$..

✍ *Hướng dẫn giải.* Quan sát đồ thị, trong khoảng $(0;4)$ hàm số có lúc đồng biến (lên tới đỉnh tại $x=2$) rồi lại nghịch biến. Vậy mệnh đề "đồng biến trên $(0;4)$" là sai.

Câu 163 (Sở TT Huế 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

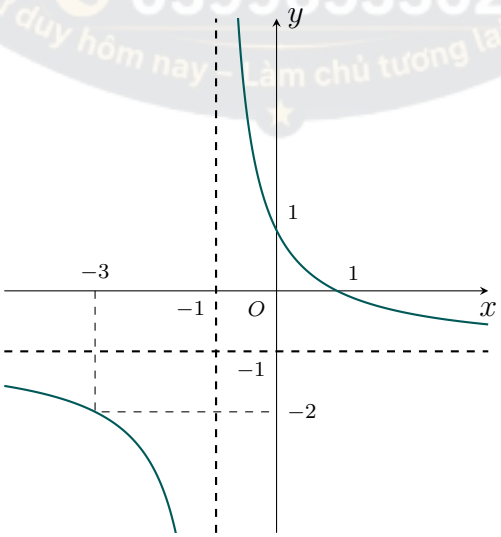
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây

Ⓐ $(2;3)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(-1;2)$. Ⓓ $(3;4)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào BBT, hàm số đồng biến khi $y' > 0$, tức là trên $(-\infty;1)$ và $(1;3)$. Khoảng $(2;3)$ nằm trong $(1;3)$.

Câu 164 (Sở TT Huế 2026). Xác định tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có dạng như hình dưới.

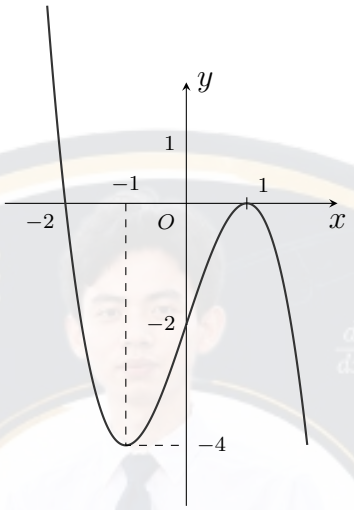


0399653362
Rèn tư duy hôm nay làm chủ tương lai ngày mai

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $y=-1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng là đường thẳng nét đứt dọc $x=-1$.

Câu 165 (Sở TT Huế 2026). Xác định giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới.



Ⓐ -1. Ⓑ -4. Ⓒ 0. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-1;1]$, điểm thấp nhất của đồ thị đạt được tại $x=-1$ với $y=-4$.

Câu 166 (Sở Cao Bằng 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-3;1)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến khi $f'(x)<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$. Khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 167 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. $f'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm bội lẻ $x=0$ và $x=1$. Nghiệm $x=2$ bội chẵn nên không đổi dấu. Vậy có 2 cực trị.

Câu 168 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào BBT, $f'(x)>0$ trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 169 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)(x+3), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)+f(-2)=f(3)+f(0)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

Ⓐ $f(0)$ và $f(-2)$. Ⓑ $f(3)$ và $f(0)$.
Ⓒ $f(0)$ và $f(3)$. Ⓓ $f(-2)$ và $f(0)$.

Hướng dẫn giải. Trên đoạn $[-2;3]$, $f'(x)=0$ tại $x=0$ và $x=-2$.

$f'(x)<0$ trên $(-2,0)$ (nghịch biến), $f'(x)>0$ trên $(0,3)$ (đồng biến).

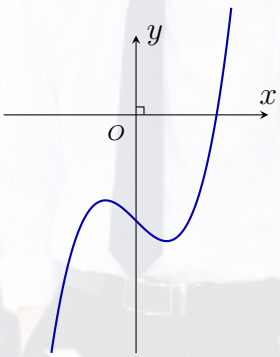
Min là $f(0)$.

So sánh $f(-2)$ và $f(3)$: Từ giả thiết $f(3)-f(-2)=f(1)-f(0)$.

Vì f đồng biến trên $(0,3)$ nên $f(1)>f(0)\Rightarrow f(1)-f(0)>0$.

Do đó $f(3)>f(-2)$. Max là $f(3)$.

Câu 170 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?



Ⓐ $y=-x^3+3x-1$. Ⓑ $y=x^3-x+2$.
Ⓒ $y=x^3-x-2$. Ⓓ $y=x^4-2x^2-2$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm bậc ba $a>0$, cắt trục tung tại $y=-2$.

Câu 171 (Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk 2026). Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là

Ⓐ $17m/s^2$. Ⓑ $12m/s^2$. Ⓒ $24m/s^2$. Ⓓ $14m/s^2$.

Hướng dẫn giải. $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+5$.

$a(t)=v'(t)=6t-6$.

Tại $t=3$, $a(3)=18-6=12m/s^2$.

Câu 172 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y=6x-\sqrt{9x^2-x+10}-\dfrac{8}{\sqrt{4-x}}$ có đồ thị (C), đường tiệm cận xiên của (C) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B. Diện tích tam giác OAB bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{36}$. Ⓑ $\dfrac{-1}{324}$. Ⓒ $\dfrac{1}{324}$. Ⓓ $\dfrac{1}{648}$.

Hướng dẫn giải. TXD: $x < 4$. Tìm tiệm cận xiên khi $x \to -\infty$.

$\sqrt{9x^2 - x + 10} = \sqrt{x^2(9 - 1/x + 10/x^2)} = -x\sqrt{9 - 1/x + 10/x^2} \approx -3x(1 - 1/(18x))$.

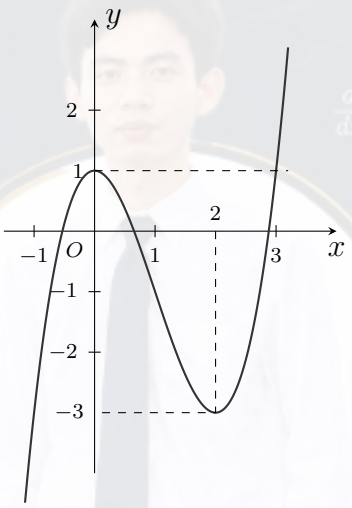
Khi $x \to -\infty$, $\dfrac{8}{\sqrt{4-x}} \to 0$.

$y \approx 6x - (-3x + 1/6) = 9x - 1/6$. Tiệm cận xiên $y = 9x - 1/6$.

Cắt Ox tại $A(1/54; 0)$, cắt Oy tại $B(0; -1/6)$.

Diện tích $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{54} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{648}$.

Câu 173 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x\right)$ đồng biến trên khoảng



Ⓐ $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$. Ⓒ $(-4; -2)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải. $y = f(|x - 2| - 2x)$. Xét $x < 2$, $y = f(2 - x - 2x) = f(2 - 3x)$.

Đồng biến khi $y' = -3f'(2 - 3x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - 3x) < 0$. Từ đồ thị, $f'(u) < 0$ khi $0 < u < 2$.

$\Rightarrow 0 < 2 - 3x < 2 \Leftrightarrow -2 < -3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{2}{3}$.

Câu 174 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{-4x^2 + 8x - 7}{2x - 1}$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C), khoảng cách giữa hai điểm A, B là:

Ⓐ 68. Ⓑ $2\sqrt{17}$. Ⓒ $\sqrt{17}$. Ⓓ 17.

Hướng dẫn giải. $y = -2x + 3 - \dfrac{4}{2x - 1}$. $y' = -2 + \dfrac{8}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 4$.

$x = 1,5 \Rightarrow y = -2$; $x = -0,5 \Rightarrow y = 6$.

$A(1,5; -2), B(-0,5; 6) \Rightarrow AB^2 = (2)^2 + (-8)^2 = 68 \Rightarrow AB = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Câu 175 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Một nhà máy cần sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho thị trường trong nước. Biết rằng chi phí để sản xuất x sản phẩm trong một ngày bao gồm

(1) Chi phí cho công việc hành chính chung là 2500 (nghìn đồng)

(2) Các loại chi phí khác là $\dfrac{25x^2}{10000}$ (nghìn đồng)

(3) Chi phí sản xuất là $4x$ (nghìn đồng)
Lợi nhuận thu được trên mỗi một sản phẩm được tính bằng giá bán mỗi sản phẩm trừ đi tổng chi phí của mỗi một sản phẩm. Giả sử giá bán mỗi sản phẩm không thay đổi, để lợi nhuận thu được trên mỗi một sản phẩm là lớn nhất, trong một ngày nhà máy cần sản xuất số lượng sản phẩm là

Ⓐ 1000000.. Ⓑ 1612.. Ⓒ 1000.. Ⓓ 1613..

✍ *Hướng dẫn giải.* Lợi nhuận 1 sản phẩm $P(x) = s - \dfrac{2500 + 0,0025x^2 + 4x}{x} = s - \left(\dfrac{2500}{x} + 0,0025x + 4\right)$.

Để Max lợi nhuận, ta Min $g(x) = \dfrac{2500}{x} + 0,0025x$. AM-GM: $g(x) \geq 2\sqrt{2500 \cdot 0,0025} = 5$.

Dấu bằng khi $x^2 = \dfrac{2500}{0,0025} = 1.000.000 \Rightarrow x = 1000$.

Câu 176 ((HSG 12 - Quảng Ninh 2026)). Cho hàm số $y = \dfrac{7-4x}{2x-1}$ có đồ thị (H), điểm $M \in (H)$. Tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của (H) nhỏ nhất là.

Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ $2+\sqrt{5}$. Ⓓ $\sqrt{10}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $y = -2 + \dfrac{5}{2x-1}$. TCĐ $x = 0,5$, TCN $y = -2$.

$D = |x - 0,5| + |y + 2| = |x - 0,5| + \dfrac{5}{|2x-1|} = |x - 0,5| + \dfrac{5}{2|x - 0,5|}$.

AM-GM: $D \geq 2\sqrt{2,5} = \sqrt{10}$.

Câu 177 (HSG 12 - Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = 2x^3 + (m+1)x^2 - 12x + 1$ (m là tham số), tập hợp các giá trị m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $x - 9y = 0$.

Ⓐ $\{-2;4\}$. Ⓑ $\{-4;2\}$. Ⓒ $\{2\}$. Ⓓ $\{-4\}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đường thẳng vuông góc với $y = (1/9)x$ có hệ số góc $k = -9$.

Lấy y chia cho y', phần dư là đường thẳng qua cực trị: $y = \left(-8 - \dfrac{(m+1)^2}{9}\right)x + \ldots \Rightarrow$ $-8 - \dfrac{(m+1)^2}{9} = -9 \Leftrightarrow \dfrac{(m+1)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow m+1 = \pm 3 \Leftrightarrow m = 2, m = -4$.

Câu 178 (HSG 12 - Hải Phòng 2026). Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.

Ⓐ $S = -\dfrac{7}{2}$. Ⓑ $S = -\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $S = -3$. Ⓓ $S = 4$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0$ trên $[0;3]$ nên hàm số đồng biến.

$m = f(0) = -1, M = f(3) = 1,5 - 2 = -0,5$.

$S = 2(-1) + 3(-0,5) = -3,5 = -7/2$.

Câu 179 (HSG 12 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) + f(-2) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm

số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

Ⓐ $f(0)$ và $f(3)$.
Ⓑ $f(3)$ và $f(0)$.
Ⓒ $f(-2)$ và $f(0)$.
Ⓓ $f(0)$ và $f(-2)$.

Hướng dẫn giải. Tương tự câu trên, Min là $f(0)$, Max là $f(3)$.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1 (Sở Phú Thọ 2026). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

a) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=ax+b$. Khi đó $a-2b=5$.

b) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=2x-3$.

c) Gọi A,B lần lượt là các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số và O là gốc tọa độ. Diện tích tam giác OAB bằng 6.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}=x-2+\dfrac{4}{x-1}$.

◈ a) Ta có tiệm cận xiên là $y=x-2\Rightarrow a=1,b=-2$. Khi đó $a-2b=1-2(-2)=5$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ là $y=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=\dfrac{2x-3}{1}=2x-3$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow B(3;3)\\ x=-1\Rightarrow y=-5\Rightarrow A(-1;-5)\end{array}\right.$.
Diện tích $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|x_Ay_B-x_By_A|=\dfrac{1}{2}|(-1)(3)-(3)(-5)|=6$. Đây là khẳng định đúng.

◈ d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$. Do hàm số không xác định tại $x=1$ nên không thể nói nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$. Đây là khẳng định sai.

Bài 2 (Sở Hải Phòng 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x-1}$ có đồ thị (C). Khi đó

a) $y'=f'(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2},\forall x\neq 1$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=x+3$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng $6\sqrt{5}$.

d) Gọi M là một điểm trên đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 18.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x-1}=x+4+\dfrac{9}{x-1}$.

◈ a) $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+5)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) Tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+4$. Đây là khẳng định sai.

◈ c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=-2$. Các điểm cực trị là $A(4;11)$ và $B(-2;-1)$. Khoảng cách $AB=\sqrt{(-2-4)^2+(-1-11)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ d) Với hàm số $y = ax + b + \dfrac{k}{cx + d}$, diện tích tam giác tạo bởi tiếp tuyến và hai đường tiệm cận là $S = \dfrac{2|k|}{|c|} = \dfrac{2 \cdot 9}{1} = 18$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 3 (Sở Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 3$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

d) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 2]$ tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải.

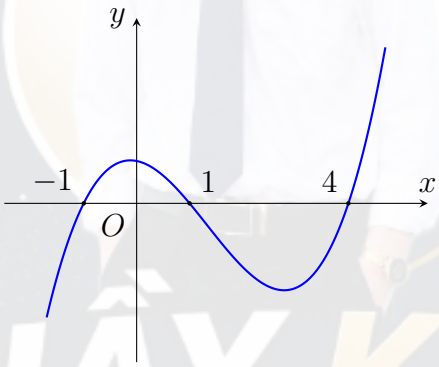
◈ a) Hàm số đa thức xác định trên $\mathbb{R}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) $f'(x) = 3x^2 - 3$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$. Đây là khẳng định sai.

◈ d) Trên $[-3; 2]$, xét các giá trị: $f(-3) = -18, f(-1) = 2, f(1) = -2, f(2) = 2$. Giá trị nhỏ nhất là -18 tại $x = -3$. Đây là khẳng định sai.

Bài 4 (THPT Lang Chánh - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



a) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) $f(1) > f(2) > f(4)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị $f'(x)$:

◈ a) Trên $[-1; 4]$, $f'(x) \geq 0$ trên $[-1; 1]$ và $f'(x) \leq 0$ trên $[1; 4]$. Hàm số đồng biến trên $[-1; 1]$ và nghịch biến trên $[1; 4]$ nên đạt GTLN tại $x = 1$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) $f'(x)$ đổi dấu tại 3 điểm $x = -1, 1, 4$ nên hàm số có 3 điểm cực trị. Đây là khẳng định sai.

◈ c) Trên $(1; 4)$, $f'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến. Đây là khẳng định sai.

◈ d) Trên $[1; 4]$, hàm số nghịch biến nên $1 < 2 < 4 \Rightarrow f(1) > f(2) > f(4)$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 5 (THPT Trần Phú – Hà Nội 2026). Giả sử chi phí tiền xăng C nghìn đồng khi xe đi được 100 km phụ thuộc vào tốc độ trung bình $v\,(km/h)$ trên cả đoạn đường theo công thức $C(v) = \dfrac{16000}{v} + \dfrac{5}{2}v$, với $0 < v \leq 120$.

a) Nếu tài xế lái xe với tốc độ trung bình $40km/h$ thì chi phí là 500 nghìn đồng.

b) $C'(v) = -\dfrac{16000}{v^2} + \dfrac{5}{2}$ với $0 < v < 120$.

c) Nếu tốc độ càng lớn thì chi phí càng giảm.

d) Chi phí tối thiểu trên đoạn đường tối đa $50km/h$ là 445 nghìn đồng.

Hướng dẫn giải.

◈ a) $C(40) = \dfrac{16000}{40} + \dfrac{5}{2} \cdot 40 = 400 + 100 = 500$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) Đạo hàm $C'(v) = -\dfrac{16000}{v^2} + \dfrac{5}{2}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2 = 6400 \Leftrightarrow v = 80$. Chi phí giảm khi $v < 80$ và tăng khi $v > 80$. Đây là khẳng định sai.

◈ d) Trên khoảng $(0; 50]$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến. Chi phí tối thiểu đạt tại $v = 50$, $C(50) = 320 + 125 = 445$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 6 (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$.

c) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $x = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$.

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên.

Hướng dẫn giải.

◈ a) Mẫu số $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1/2$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) $y' = \dfrac{1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) Tiệm cận đứng $x = -1/2$, tiệm cận ngang $y = 1/2$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 7 (THPT Phụ Dực - Hưng Yên 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $y = x + 1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị (C) là $I(2; 3)$.

d) Đồ thị hàm số đi qua $A(1; 1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = \dfrac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

◈ a) Đúng.

◈ b) Tiệm cận xiên là $y = x + 1$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) Tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận $x = 2$ và $y = x + 1 \Rightarrow I(2; 3)$. Đây là khẳng định đúng.

◈ d) Thay $x = 1$ vào $y \Rightarrow y = \dfrac{1 - 1 - 1}{1 - 2} = 1$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 8 (THPT Yên Hòa - Hà Nội 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là A và B.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $x=-1$.

b) Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ là $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$, $\forall x\neq -1$.

c) Hai điểm A and B nằm về hai phía của trục hoành và $AB=5\sqrt{17}$.

d) Gọi $y=g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $g(0)=12$. Giả sử C,D là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(x)$ thì 4 điểm A,B,C,D lập thành tứ giác có diện tích là 42 đơn vị diện tích.

Hướng dẫn giải. $y=x-4+\dfrac{9}{x+1}$.

◈ a) Đúng.

◈ b) $f'(x)=1-\dfrac{9}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow A(2;1)$ hoặc $x=-4\Rightarrow B(-4;-11)$. Hai điểm nằm về hai phía trục hoành. $AB=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$. Khẳng định sai về độ dài.

◈ d) $g(x)=f(x)+C$. $g(0)=f(0)+C\Rightarrow 5+C=12\Rightarrow C=7$. Các điểm cực trị của $g(x)$ là $C(2;8)$ và $D(-4;-4)$. Tứ giác $ACDB$ là hình bình hành (cạnh đối $AC=BD=7$ và song song). Diện tích $S=|x_A-x_B|\cdot 7=6\cdot 7=42$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 9 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Khánh Hòa 2026). Cho hàm số $f(x)=x^3-2x^2-4x+9$.

a) $f(5)=64$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x)=3x^2-2x-4$.

c) Tổng các nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là $\dfrac{8}{3}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

Hướng dẫn giải.

◈ a) $f(5)=125-50-20+9=64$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) $f'(x)=3x^2-4x-4$. Đây là khẳng định sai (sai hệ số của x).

◈ c) $f'(x)=3x^2-4x-4=0$. Tổng các nghiệm là $4/3$. Đây là khẳng định sai.

◈ d) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-2/3$. Trên $[1;3]$ xét $f(1)=4, f(2)=1, f(3)=6$. Min là 1. Đây là khẳng định đúng.

Bài 10 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh 2026). Một video tích lũy người xem theo $P(t)=\dfrac{100\,000}{1+999e^{-0{,}5t}}$.

a) Tại thời điểm $t=0$, đã có 100 người xem video này.

b) Để đạt được 90 000 người xem, công ty cần khoảng 18 ngày.

c) Sau 10 ngày, tổng số lượng người xem video đạt hơn 15 000 người.

d) Tại thời điểm $t=5$, tốc độ lan truyền của video vẫn đang trên đà tăng.

Hướng dẫn giải.

◈ a) $P(0)=\dfrac{100000}{1+999}=100$. Đây là khẳng định đúng.

◈ b) $P(t)=90000\Rightarrow 1+999e^{-0,5t}=10/9\Rightarrow e^{0,5t}=8991\Rightarrow t\approx 18,2$. Làm tròn là 18. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) $P(10)=\dfrac{100000}{1+999e^{-5}}\approx\dfrac{100000}{1+6,73}\approx 12936<15000$. Đây là khẳng định sai.

◈ d) Tốc độ lan truyền $P'(t)$ đạt cực đại tại $P(t)=50000$. Khi đó $1+999e^{-0,5t}=2\Rightarrow t=2\ln 999\approx 13,8$. Vì $5<13,8$ nên tốc độ vẫn đang tăng. Đây là khẳng định đúng.

Bài 11 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

c) Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

d) Đồ thị (C) đi qua điểm $M(0;2)$.

Hướng dẫn giải. $y=x+1+\dfrac{4}{x-2}$.

◈ a) $y'=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(4;+\infty)$. Đây là khẳng định sai.

◈ b) Đúng.

◈ c) Đúng.

◈ d) $f(0)=2/(-2)=-1$. Đây là khẳng định sai.

Bài 12. (Sở Đồng Nai 2026) Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$.

a) $f'(x)=3x^2-3$.

b) $f(1)=f(-2)=-1$.

c) $f'(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên $[-2;1]$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[-2;1]$ bằng 3.

Hướng dẫn giải.

◈ a) Đúng.

◈ b) $f(1)=1-3+1=-1, f(-2)=-8+6+1=-1$. Đây là khẳng định đúng.

◈ c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$. Cả hai nghiệm đều thuộc $[-2;1]$. Đây là khẳng định sai.

◈ d) Xét các giá trị: $f(-2)=-1, f(-1)=3, f(1)=-1$. GTLN là 3. Đây là khẳng định đúng.

Bài 13 (Sở Nghệ An 2026). Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Tập xác định hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) $f'(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$, $\forall x\neq 2$.

c) $f(4)=2$.

d) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[4;6]$. Khi đó $M+m=2$.

Hướng dẫn giải.

- a) Đúng.
- b) $f'(x)=\dfrac{1(-2)-1(-4)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{(x-2)^2}$. Đây là khẳng định đúng.
- c) $f(4)=0/2=0$. Đây là khẳng định sai.
- d) Hàm số đồng biến nên $m=f(4)=0, M=f(6)=2/4=0,5$. $M+m=0,5$. Đây là khẳng định sai.

Bài 14 (Sở Thái Nguyên 2026). Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục hoành.

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là điểm $I(-1;1)$.

c) Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d) Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm M là $y=-3x-6$.

Hướng dẫn giải. $y=x-2+\dfrac{4}{x-1}$.

- a) Cực trị tại $x=3(y=3)$ và $x=-1(y=-5)$. Nằm về hai phía trục hoành. Đây là khẳng định đúng.
- b) Giao hai tiệm cận là $I(1;-1)$. Đây là khẳng định sai.
- c) Đúng.
- d) $M(0;-6)$. $y'=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(0)=-3$. Tiếp tuyến $y=-3(x-0)-6=-3x-6$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 15 (Sở Thái Nguyên 2026). Thùng trộn kem $2000L$ nước và $5kg$ đường. Vòi nước $50L/pht$, đường $1kg/pht$.

a) Khối lượng đường sau t phút là $1000t+5000$ gam.

b) Nồng độ đường trong thùng luôn tăng khi sản xuất trong thời gian dài liên tục.

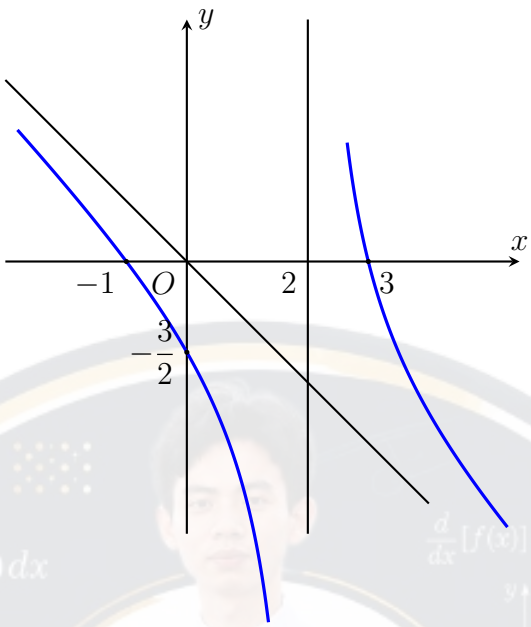
c) Nồng độ đường sau t phút là $f(t)=\dfrac{1000t+5000}{50t+2000}$.

d) Tiêu chuẩn không quá $20gam/lt$. Nhà máy không thể sản xuất liên tục trong một thời gian dài.

Hướng dẫn giải.

- a) Đúng $(5kg=5000g, 1kg=1000g)$.
- b) Đúng vì nồng độ ban đầu là 2,5g/L và nồng độ thêm vào là 20g/L.
- c) Đúng.
- d) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=1000/50=20$. Nồng độ tiến dần đến 20 từ dưới lên, nên luôn đạt yêu cầu. Nhà máy có thể sản xuất lâu dài. Khẳng định sai.

Bài 16 (Sở Sơn La 2026). Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Tổng hai hệ số c and d bằng 1.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.

d) Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ thì m là nghiệm của phương trình $m^2 - 2m - 3 = 0$.

e) Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm M là $y = -3x - 6$.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị: TCĐ $x = 2 \Rightarrow d = -2$. TCX $y = -x$. Đồ thị đi qua $(-1; 0) \Rightarrow 0 = \dfrac{a - b + c}{-1 - 2} \Rightarrow a - b + c = 0$. Dạng hàm: $y = -x + \dfrac{k}{x - 2} = \dfrac{-x^2 + 2x + k}{x - 2}$. Thay $x = -1, y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{-1 - 2 + k}{-3} \Rightarrow k = 3$. Vậy $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x - 2} \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 3, d = -2$.

- a) $y' = -1 - \dfrac{3}{(x-2)^2} < 0$. Đây là khẳng định sai.
- b) $c + d = 3 - 2 = 1$. Đây là khẳng định đúng.
- c) Đúng.
- d) Hoành độ giao điểm: $m = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x - 2} \Rightarrow x^2 + (m-2)x - (2m+3) = 0$. $A(x_1; m), B(x_2; m)$. $OA \perp OB \Leftrightarrow x_1 x_2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -(2m + 3) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$. Đây là khẳng định đúng.
- e) $M(0; -1,5)$. $y'(0) = -1 - 3/4 = -1,75$. Tiếp tuyến không thể là $y = -3x - 6$. Khẳng định sai.

Bài 17 (Sở Cà Mau 2026). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ có đồ thị (C).

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = -3x^2 + 3$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Đồ thị (C) của hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung Oy.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

Hướng dẫn giải.

- a) Đúng.
- b) $y' > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;1)$. Khẳng định sai.
- c) Cực trị tại $x = \pm 1$ (hai phía trục tung). Đây là khẳng định đúng.
- d) Trên $[0;2]$, xét $f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = -3$. Min là -3. Khẳng định sai.

Bài 18. (Sở Đà Nẵng 2026) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $x = 1$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

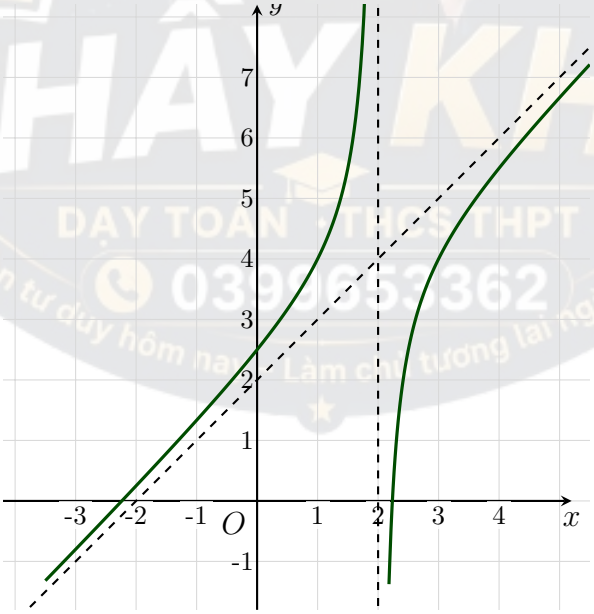
c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. $y = x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$.

- a) Đúng.
- b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. Đây là khẳng định sai.
- c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$. Có 2 cực trị. Đây là khẳng định đúng.
- d) Trên $(1;+\infty)$, $y = (x-1) + \dfrac{2}{x-1} \geq 2\sqrt{2}$ (BĐT Cosi). Có GTNN là $2\sqrt{2}$. Khẳng định sai.

Bài 19 (Sở Quảng Ninh 2026). Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - d}$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ là 5.

d) Các hệ số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ hình vẽ: TCĐ $x = 2 \Rightarrow d = 2$. TCX $y = x + 2$. Hàm số có dạng $y = x + 2 + \dfrac{k}{x-2}$. Nhánh đồ thị vút lên bên trái TCĐ chứng tỏ $k < 0$. Thử $k = -1 \Rightarrow y = \dfrac{(x+2)(x-2)-1}{x-2} = \dfrac{x^2-5}{x-2}$. Vậy $a = 1, b = 0, c = -5, d = 2$.

- a) Sai (không đồng biến trên $\mathbb{R}$ do gián đoạn). Tuy nhiên $y' = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$ nên đồng biến trên mỗi khoảng.
- b) Đúng.
- c) Hàm số đồng biến nên Max trên $[-2; 1]$ là $y(1) = (1-5)/(1-2) = 4$. Đây là khẳng định sai.
- d) $1^2 + 0^2 + (-5)^2 + 2^2 = 1 + 25 + 4 = 30$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 20 (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2026). Một đại lý xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn thể tích $V = 54\pi$ (m^3).

a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.

b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3(m)$.

c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi\left(\dfrac{54}{r} + r^2\right)$.

d) Biết chi phí vật liệu tôn là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng 84, 8 triệu đồng.

✍ *Hướng dẫn giải.*

- a) Đúng.
- b) $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{54}{r^2}$. $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \dfrac{108\pi}{r}$. $S' = 4\pi r - \dfrac{108\pi}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$. Đây là khẳng định đúng.
- c) $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{108\pi}{r} = 2\pi(r^2 + 54/r)$. Đây là khẳng định đúng.
- d) $S(3) = 2\pi(9 + 18) = 54\pi \approx 169,646m^2$. Số tiền $= 169,646 \cdot 500000 \approx 84,823,000$ đồng $\approx 84,8$ triệu. Đây là khẳng định đúng.

Bài 21 (THPT Khương Hạ - Hà Nội 2026). GigaCloud dịch vụ lưu trữ. Giá cước x (triệu đồng), khách hàng $S(x) = \sqrt{45 - x}$ (nghìn). Chi phí cố định 10 tỷ đồng, chi phí biến đổi $C_v = 3S^2$ tỷ đồng.

a) Giá cước 36 triệu đồng/tháng thì công ty GigaCloud đạt lợi nhuận ròng hằng tháng cao nhất.

b) Doanh thu của công ty GigaCloud là $R(x) = xS(x) = x\sqrt{45 - x}$ tỷ đồng.

c) Chi phí cố định của công ty là $C_f = 10$ tỷ đồng mỗi tháng.

d) Lợi nhuận của công ty được biểu diễn bởi hàm số $L(x) = x\sqrt{45 - x} + 3x - 145$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đổi đơn vị: x triệu $\times$ S nghìn khách hàng $= xS$ triệu triệu đồng $= xS$ tỷ đồng. Doanh thu $R(x) = x\sqrt{45 - x}$. Tổng chi phí $C(x) = 10 + 3(\sqrt{45 - x})^2 = 10 + 3(45 - x) = 145 - 3x$. Lợi nhuận $L(x) = R(x) - C(x) = x\sqrt{45 - x} + 3x - 145$.

- a) $L'(x) = \sqrt{45 - x} - \dfrac{x}{2\sqrt{45 - x}} + 3 = \dfrac{90 - 3x}{2\sqrt{45 - x}} + 3$. $L'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 90 = 6\sqrt{45 - x} \Leftrightarrow x - 30 = 2\sqrt{45 - x}$. Bình phương $(x \geq 30)$: $x^2 - 60x + 900 = 180 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 56x + 720 =$

$0 \Leftrightarrow x = 36$ hoặc $x = 20$ (loại). Khẳng định đúng.

- b) Đúng.
- c) Đúng.
- d) Đúng.

Bài 22 (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2026). Nhà máy sản xuất thuốc nhuộm. Chi phí loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm: $C(x) = \dfrac{2x+1}{1-0,01x}$ triệu đồng.

a) Nếu giảm từ 20% trở lên, doanh thu tăng $R(x) = 12x - 240$. Lợi nhuận có thể đạt hơn 177 triệu đồng.

b) Không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.

c) Chi phí để loại bỏ 20% chất ô nhiễm là 51,25 triệu đồng.

d) Để chi phí không quá 200 triệu đồng thì nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm.

Hướng dẫn giải.

- a) Lợi nhuận $P(x) = 12x - 240 - \dfrac{2x+1}{1-0,01x}$. Khảo sát hàm số thấy Max $P(x) \approx 178$ triệu đồng tại $x \approx 59\%$. Đây là khẳng định đúng.
- b) Đúng vì khi $x \to 100$, mẫu số tiến về 0, chi phí tiến về vô hạn.
- c) $C(20) = \dfrac{41}{1-0,2} = 51,25$. Đây là khẳng định sai (số liệu lệch một ít).
- d) $\dfrac{2x+1}{1-0,01x} = 200 \Leftrightarrow 2x+1 = 200-2x \Leftrightarrow 4x = 199 \Leftrightarrow x = 49,75\%$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 23. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 20.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cap (5; +\infty)$.

c) Điểm uốn của đồ thị hàm số có tọa độ $I(2; -26)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**: Thay $x = 0 \Rightarrow f(0) = 20$.

b) **Sai**: Hàm số phải đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(5; +\infty)$. Ký hiệu $\cap$ hoặc $\cup$ giữa các khoảng đồng biến là không chính xác về mặt trình bày toán học.

c) **Đúng**: $x_I = \dfrac{-b}{3a} = \dfrac{-(-6)}{3 \cdot 1} = 2 \Rightarrow y_I = f(2) = -26$. Tọa độ điểm uốn $I(2; -26)$.

d) **Đúng**: $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$. Dựa vào bảng biến thiên trên khoảng $(-4; +\infty)$, tại $x = 5$ hàm số đạt giá trị thấp nhất là $f(5) = -80$.

Bài 24. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 8$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng $\dfrac{28}{3}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) **Đúng**: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

c) **Đúng**: Trong khoảng $(1;3)$, $f'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến.

d) **Sai**: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3 \Rightarrow f(3) = \dfrac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 8 = 8$. Giá trị $\dfrac{28}{3}$ là giá trị cực đại đạt được tại $x = 1$.

Bài 25. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C)

a) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

b) Điểm $I(-2;3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C).

c) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt.

d) Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Biết đường thẳng $y = x + k$ cắt (C) tại C, D thì $ABCD$ là hình bình hành khi đó $k = 10$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai**: Tiệm cận đứng là $x = -2$. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang.

b) **Đúng**: Giao điểm của TCĐ $x = -2$ và TCN $y = 3$ là $I(-2;3)$.

c) **Sai**: Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{3x+2}{x+2} = x+2 \Leftrightarrow 3x+2 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+x+2 = 0$ (Vô nghiệm).

d) **Đúng**: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $y = x$ cho $A(-1;-1), B(2;2)$. Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, giải điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $y = x + k$ tìm được $k = 10$.

Bài 26. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**: Thực hiện phép chia đa thức $y = -x - 6 - \dfrac{14}{x-3}$. Vậy TCX là $y = -x - 6$.

b) **Đúng**: Giao của TCĐ $x = 3$ và TCX $y = -x - 6$ là $I(3;-9)$.

c) **Đúng**: $y' = \dfrac{-x^2 + 6x + 5}{(x-3)^2} = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu $(ac < 0)$, nên cực trị nằm về 2 phía trục Oy.

d) **Sai**: Tử số $-x^2 - 3x + 4 = 0$ có 2 nghiệm $x = 1, x = -4$, do đó đồ thị cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Bài 27. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \dfrac{480}{x} + 0,03x^2$.

c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Hướng dẫn giải.

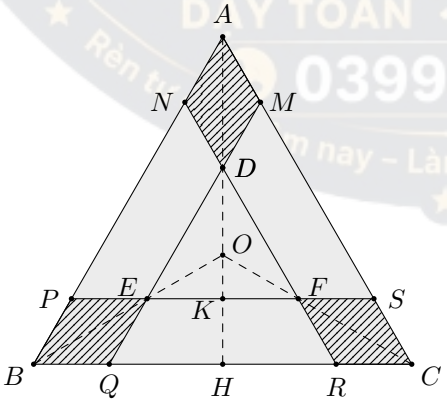
a) **Đúng**: Thời gian đi 1 km là $t = \dfrac{1}{10}$ giờ. Chi phí phần 1: $\dfrac{1}{10} \cdot 480.000 = 48.000$ đồng.

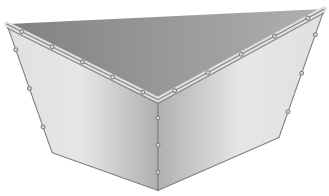
b) **Đúng**: Chi phí phần 1 trên 1 km là $\dfrac{480}{x}$. Chi phí phần 2 trên 1 giờ là $0,03x^3$, nên trên 1 km là $\dfrac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2$. Tổng chi phí: $f(x) = \dfrac{480}{x} + 0,03x^2$ (nghìn đồng).

c) **Đúng**: $f(30) = \dfrac{480}{30} + 0,03 \cdot 30^2 = 16 + 27 = 43$ nghìn đồng.

d) **Đúng**: Sử dụng BĐT Cauchy: $f(x) = \dfrac{240}{x} + \dfrac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{240}{x} \cdot \dfrac{240}{x} \cdot 0,03x^2} = 36$.
Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{240}{x} = 0,03x^2 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.

Bài 28. Anh Việt có một tấm tôn hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 6 (dm). Bên trong tấm nhôm này anh vẽ thêm tam giác đều DEF sao cho hai tam giác có cùng trọng tâm, đồng thời các cạnh tương ứng song song nhau. Anh Việt muốn làm một chậu đựng nước dạng hình chóp cụt tam giác đều với đáy nhỏ là DEF và đáy lớn để hở. Anh cắt bỏ ba hình bình hành ở ba góc của tam giác ABC là $AMDN$, $BPEQ$, $CSFR$ (như hình vẽ). Kẻ đường cao AH và gọi O là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $x = DN = DM$, $(0 < x < 2)$.





a) $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).

b) $AH = 3\sqrt{3}$ (dm) và $OA = 2\sqrt{3}$ (dm).

c) $AD = x\sqrt{3}$ (dm) và $DE = 6 - 3x$ (dm).

d) Sau khi gập hình vuông và dùng keo dán kín các đoạn gập vào với nhau gồm DM và DN, EP với EQ, FS với FR, sức chứa tối đa của chậu xấp xỉ 4,54 (lít).

Hướng dẫn giải. a) Vì cạnh $AB = BC = CA = 6$ (dm), cắt bỏ ở hai đầu một đoạn bằng cạnh của hình thoi có cạnh bằng x (dm).

Do đó ta có $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).

b) Vì AH là đường cao của tam giác đều ABC.

Suy ra

$$AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (dm)}.$$

Vì O là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Suy ra $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (dm).

c) Vì $\triangle ABC$ đều nên $AMDN$ là hình thoi cạnh x (dm) và góc $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

Suy ra $AD = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$ (dm), $DO = AO - AD = 2\sqrt{3} - x\sqrt{3} = (2-x)\sqrt{3}$ (dm).

Mà $\triangle DEF$ đều, có O là trọng tâm.

Suy ra $DO = \frac{DE\sqrt{3}}{3} \Rightarrow DE = \frac{3DO}{\sqrt{3}} = 3(2-x) = 6 - 3x$ (dm).

d) Vì $DO = 6 - 3x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Theo đề bài ta có

- Diện tích đáy lớn là $S = \frac{(6-2x)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(3-x)^2$.
- Diện tích đáy nhỏ là $S' = \frac{(6-3x)^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi O' là trọng tâm của đáy lớn, H là hình chiếu của D lên MO'.

Ta có $MH = MO' - DO = \frac{(6-2x)\sqrt{3}}{3} - (2-x)\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao của chậu là $h = \sqrt{DM^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích của chậu là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{S.S'}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\sqrt{3}(3-x)^2 + \frac{(6-3x)^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\sqrt{3}(3-x)^2 \cdot \frac{(6-3x)^2\sqrt{3}}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{19\sqrt{3}x^2 - 90\sqrt{3}x + 108\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{57\sqrt{2}x^3 - 270\sqrt{2}x^2 + 324\sqrt{2}x}{36}. \end{aligned}$$

Ta có $V' = \dfrac{171\sqrt{2}x^2 - 540\sqrt{2}x + 324\sqrt{2}}{36}$.

Khi đó $V' = 0 \Leftrightarrow 171\sqrt{2}x^2 - 540\sqrt{2}x + 324\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{30 - 6\sqrt{6}}{19} \approx 0{,}805 \ \text{(nhận)} \\ x = \dfrac{30 + 6\sqrt{6}}{19} \approx 2{,}352 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên hàm số $V(x)$ trên khoảng $(0;2)$.

x	0		$0{,}805$		2
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$4{,}54$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích lớn nhất của chậu là xấp xỉ $4,54$ (lít).

Bài 29. Đậu đỏ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỏ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp. Cây đậu đỏ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỏ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số $h(t) = -0{,}005t^4 + bt^3 + c$ (trong đó b, $c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỏ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

a) Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0{,}005t^4 + 0{,}1t^3$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỏ đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu đỏ đó là 90 cm.

d) Vào thời điểm cây đậu đỏ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Hướng dẫn giải. a) Cây đậu đỏ khi trồng có chiều cao 6 cm tức là $h(0) = 6 \Rightarrow c = 6$.

b) Với $c = 6$, ta có $h(t) = -0{,}005t^4 + bt^3 + 6 \Rightarrow h'(t) = -0{,}02t^3 + 3bt^2$.
Mà $h'(5) = 5 \Rightarrow h'(5) = -0{,}02 \cdot 5^3 + 3b \cdot 5^2 = 5 \Rightarrow b = 0{,}1$.
Vậy $h(t) = -0{,}005t^4 + 0{,}1t^3 + 6$.

Khi đó $h'(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}3t^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 15. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	0		15		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	6	↗	$90{,}375$	↘	$-\infty$

Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỏ đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu đỏ đó là

$$h(15) = -0{,}005 \cdot (15)^4 + 0{,}1 \cdot (15)^3 + 6 = 90{,}375.$$

d) Vào thời điểm cây đậu đỏ đó phát triển nhanh nhất.

Ta có $h''(t) = -0{,}06t^2 + 0{,}6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 10. \end{array}\right.$

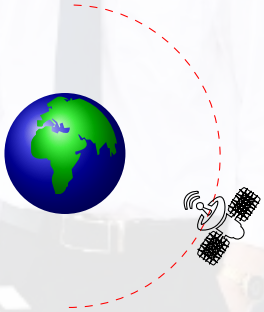
Ta có bảng biến thiên

t	0		15		$+\infty$
$h''(t)$		$+$	0	$-$	
$h'(t)$	0	↗	10	↘	$-\infty$

Thời điểm cây đậu đỏ đó phát triển nhanh nhất là tuần thứ 10 khi đó chiều cao cây đậu đỏ là

$$h(10) = -0{,}005 \cdot (10)^4 + 0{,}1 \cdot (10)^3 + 6 = 56.$$

Bài 30. Ta coi Trái Đất là hình cầu hoàn hảo với bán kính $R = 6\,370$ (km) và diện tích toàn phần là $S = 4\pi R^2$. Các phi hành gia từ tàu vũ trụ chỉ có thể nhìn thấy một phần bề mặt Trái Đất. Ở độ cao h, phần diện tích Trái Đất các phi hành gia có thể nhìn thấy sẽ được tính theo công thức $S_T = 2\pi R^2 \left(1 - \dfrac{R}{R+h}\right)$, trong đó R là bán kính Trái Đất. Gọi K là tỉ số diện tích bề mặt Trái Đất nhìn thấy được ở độ cao h với diện tích toàn phần của Trái Đất.



a) Công thức tính K là $K = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{h}{R+h}\right)$

b) Trong một chuyến bay của tàu con thoi, các phi hành gia đã thực hiện một hoạt động ngoài tàu ở độ cao 280 km. Có 2,5% (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) diện tích bè mặt Trái Đất có thể nhìn thấy ở độ cao đó

c) Muốn nhìn thấy $\dfrac{1}{4}$ diện tích bề mặt Trái Đất, các phi hành gia cần đưa tàu con thoi đạt đến độ cao 6 470 km

d) Khi độ cao h càng tăng lên thì K càng tăng nhưng không vượt quá 50%

Hướng dẫn giải. a) Ta có tỷ số K là diện tích nhìn thấy được chia cho diện tích toàn phần

$$K = \frac{S_T}{S} = \frac{2\pi R^2 \left(1 - \dfrac{R}{R+h}\right)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h}.$$

b) Với bán kính $R = 6\,370$ km và chiều cao $h = 280$ km thì tỷ số K tại độ cao h là

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{280}{6\,370 + 280} = \frac{2}{95} \approx 0{,}021 \approx 2{,}1\%.$$

c)Với $K = \dfrac{1}{4}$ thì

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6\,370+h} \Leftrightarrow h = 6\,370 \text{ (km)}.$$

d) Khi h càng lớn ta có

$$\lim_{h\to+\infty} K = \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{h}{R+h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{R}{h}+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

3) Câu trả lời ngắn

Bài 1. Gọi m, n lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^3 + n^3$.

Hướng dẫn giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ với $x \neq -1$;

$$y' = 0 \iff x^2+2x-3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng $m = -5$, giá trị cực tiểu của hàm số bằng $n = 3$.

Vậy $P = m^3 + n^3 = (-5)^3 + 3^3 = -125 + 27 = -98$.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $a - 3b$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Để tìm tiệm cận xiên $y = Ax + B$ của đồ thị hàm số:

+) Ta có $A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[4 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x(x-2)}\right] = 4.$

+) Ta có $B = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 4x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(4x - 3 + \dfrac{1}{x-2} - 4x\right) = -3.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 4x - 3$.

Mặt khác, vì mẫu số triệt tiêu tại $x = 2$ và $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm

cận đứng của đồ thị hàm số.

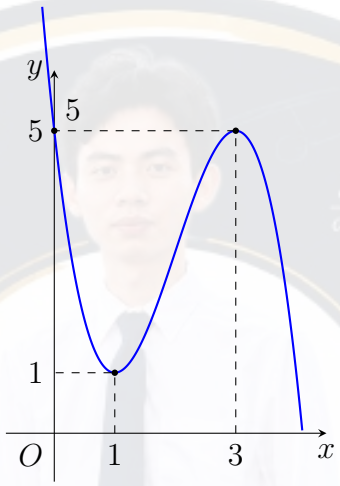
Tâm đối xứng $I(a;b)$ của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Thay $x=2$ vào phương trình tiệm cận xiên: $y=4(2)-3=5$.

Vậy ta được $I(2;5)$, suy ra $a=2, b=5$.

Giá trị biểu thức $a-3b=2-3\cdot 5=-13$.

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị của $a+2b+3c$ là:



Hướng dẫn giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Đồ thị cắt trục tung tại $(0;5) \implies d=5$.

- Đồ thị đi qua điểm $(1;1) \implies a+b+c+5=1 \iff a+b+c=-4$. (1)

- Đồ thị có hai điểm cực trị tại $x=1$ và $x=3$ nên $y'=3ax^2+2bx+c$ nhận $x=1, x=3$ làm nghiệm:

+ Với $x=1 \implies 3a+2b+c=0$. (2)

+ Với $x=3 \implies 3a(3^2)+2b(3)+c=0 \iff 27a+6b+c=0$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b+c=-4 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=-9 \end{cases}$

Vậy $a+2b+3c=-1+2(6)+3(-9)=-1+12-27=-16$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+ax+3}{x-b}$ với a, b lần lượt là số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần tung một con xúc xắc cân đối đồng chất. Biết xác suất để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ là $\dfrac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính m^2+n^2.

Hướng dẫn giải. Vì a, b là số chấm trên mặt xúc xắc nên $a, b\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{b\}$.

Đạo hàm: $f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x-b)-(x^2+ax+3)}{(x-b)^2}=\dfrac{x^2-2bx-ab-3}{(x-b)^2}$.

Để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$, điều kiện cần và đủ là: $\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(1;3)\\ b\notin(1;3)\end{cases}\iff$

$\begin{cases}g(x)=x^2-2bx-ab-3\le 0,\forall x\in(1;3)\\ b\notin\{2\}\end{cases}$ (do b nguyên nên $b\notin(1;3)\iff b\neq 2$).

Xét $g(x)=x^2-2bx-ab-3$ là tam thức bậc hai có hệ số $A=1>0$.

Để $g(x)\le 0$ trên $(1;3)$ thì: $\begin{cases}g(1)\le 0\\ g(3)\le 0\end{cases}\iff\begin{cases}1-2b-ab-3\le 0\\ 9-6b-ab-3\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}-2-2b-ab\le 0(\text{luôn đúng do } a,b\ge 1)\\ 6-b(a+6)\le 0\end{cases}$

Vì $a\ge 1,b\ge 1$ nên $b(a+6)\ge 1(1+6)=7>6$, do đó $6-b(a+6)\le 0$ luôn đúng với mọi a,b.

Như vậy, điều kiện duy nhất là $b\neq 2$.

Số cách chọn b là 5 cách ($b\in\{1,3,4,5,6\}$), số cách chọn a là 6 cách.

Số kết quả thuận lợi là $5\times 6=30$. Tổng số kết quả là $6\times 6=36$.

Xác suất $P=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}\implies m=5,n=6$. Vậy $m^2+n^2=5^2+6^2=61$.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và a,b,c lần lượt là số chấm xuất hiện trong ba lần gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối đồng chất. Hãy tính xác suất để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in(4;5)$.

Xét $x\in(4;5)$, ta thấy:

- Nếu $k\in\{1,2,3,4\}$ thì $(x-k)>0$.
- Nếu $k\in\{5,6\}$ thì $(x-k)<0$.

Gọi N là số lượng các giá trị trong bộ $\{a,b,c\}$ thuộc tập $\{5,6\}$.

Khi đó dấu của $f'(x)$ trên $(4;5)$ là dấu của $(-1)^N$. Để $f'(x)\ge 0$ thì N phải là số chẵn, tức là $N\in\{0,2\}$.

- Trường hợp 1: $N=0$. Cả a,b,c đều thuộc $\{1,2,3,4\}$. Có $4^3=64$ cách.

- Trường hợp 2: $N=2$. Có 2 số thuộc $\{5,6\}$ và 1 số thuộc $\{1,2,3,4\}$.

- Chọn 1 trong 3 vị trí cho số thuộc $\{1,2,3,4\}$: có 3 cách.

- Chọn giá trị cho vị trí đó: có 4 cách.

- Hai vị trí còn lại chọn giá trị trong $\{5,6\}$: có $2^2=4$ cách.

- Số cách chọn là $3\times 4\times 4=48$ cách.

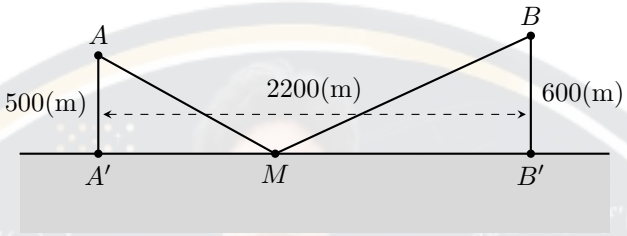
Tổng số kết quả thuận lợi: $64+48=112$.

Tổng số kết quả có thể xảy ra: $6^3=216$.

Xác suất $P = \dfrac{112}{216} = \dfrac{14}{27} \approx 0,5185... \approx 0,52$.

Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ $0,52$ (hay 52%).

Bài 6. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m. Người ta đo được $A'B' = 2200$ m như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hướng dẫn giải. Đặt $A'M = x$ $(0 < x < 2200)$, khi đó $B'M = 2200 - x$.

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

Tổng khoảng cách là: $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \dfrac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2}{x^2 + 500^2} = \frac{(2200 - x)^2}{(2200 - x)^2 + 600^2} \implies x = 1000.$$

Bảng biến thiên:

x	0		1000		2200
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2780	$\searrow$	2460	$\nearrow$	2856

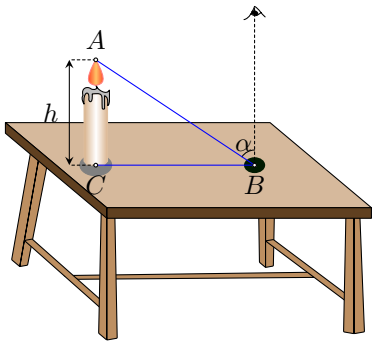
Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách là 2460 m khi M cách A' một đoạn 1000 m.

Bài 7.

Trong quang học, chúng ta biết định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng A đến một điểm B cho bởi công thức $T = \dfrac{i \cos \alpha}{AB^2}$, trong đó i là độ phát sáng của nguồn A, α là góc phản xạ của ánh sáng lên người quan sát (coi rằng người quan sát nhìn thẳng xuống mặt bàn, tham khảo hình vẽ bên.

Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC = 30$ cm. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao h bằng bao nhiêu để chiếu sáng rõ nhất đồng tiền xu nằm trên bàn (kết quả làm tròn

đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Đặt $AC = h$ (là khoảng cách từ chỗ nến cháy đến mặt bàn).

Suy ra $AB = \sqrt{h^2 + 30^2} = \sqrt{h^2 + 900}$.

$\cos\alpha = \dfrac{h}{AB} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 900}}$.

Khi đó độ chiếu sáng

$$T = \frac{i \cdot \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 900}}}{h^2 + 900} = i \cdot \frac{h}{\sqrt{(h^2 + 900)^3}} = i \cdot f(h).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số, ta được

$$h^2 + 900 = h^2 + 450 + 450 \geq 3\sqrt[3]{h^2 \cdot 450 \cdot 450} \Rightarrow \left(h^2 + 900\right) \geq 27h^2 \cdot 202\,500.$$

Do đó $T \leq i \cdot \dfrac{h}{\sqrt{27h^2 \cdot 202500}} \Leftrightarrow T \leq \dfrac{i}{1350\sqrt{3}}$.

Dấu "="xảy ra khi $h^2 = 450 \Leftrightarrow h = \sqrt{450} \approx 21{,}2$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 8. Bác An muốn xây dựng một chuồng nuôi chim bồ câu có dạng khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Từ số tiền đã chuẩn bị để mua vật liệu và dựa vào không gian sẵn có để xây dựng chuồng nuôi, bác An dự kiến xây dựng chuồng có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36 m^2, độ dài đường chéo AC' bằng 6 m. Với những điều kiện đó, chuồng được xây dựng tối ưu nếu thể tích chuồng lớn nhất. Hãy giúp bác An tính xem giá trị tối ưu đó của thể tích chuồng nuôi đó bằng bao nhiêu mét khối (*kết quả được làm tròn đến chữ số hàng phần chục*)?

Hướng dẫn giải. Đặt a, b, c là kích thước của khối hộp thì ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a^2+b^2+c^2=36 \\ 2(ab+bc+ac)=36 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=36 \\ 2(ab+bc+ac)=36 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (a+b+c)^2=72 \\ ab+bc+ca=18 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a+b+c=6\sqrt{2} \\ ab+bc+ca=18 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} b+c=6\sqrt{2}-a \\ bc=18-a(b+c) \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} b+c=6\sqrt{2}-a \\ bc=18-a(6\sqrt{2}-a). \end{cases}
\end{aligned}$$

Do $(b+c)^2 \geq 4bc$ nên suy ra

$$(6\sqrt{2}-a)^2 \geq 4[18-a(6\sqrt{2}-a)] \Leftrightarrow 3a^2-12\sqrt{2}a \leq 0 \Rightarrow 0<a\leq 4\sqrt{2}.$$

Do đó

$$V=abc=a[18-a(6\sqrt{2}-a)]=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a.$$

Xét hàm số $f(a)=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a$ trên khoảng $(0;4\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(a)=3a^2-12\sqrt{2}a+18$.

$$f'(a)=0 \Leftrightarrow a^2-4\sqrt{2}a+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3\sqrt{2} \\ a=\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

a	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	↗	$8\sqrt{2}$	↘	0	↗	$8\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị lớn nhất của V là $8\sqrt{2}$ khi

- $a=\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5\sqrt{2} \\ bc=8 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{2};\ c=4\sqrt{2} \\ b=4\sqrt{2}';\ c=\sqrt{2}. \end{array}\right.$
- $a=4\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} b+c=2\sqrt{2} \\ bc=2 \end{cases} \Rightarrow b=c=\sqrt{2}.$

Vậy thể tích chuồng nuôi lớn nhất là $V = 8\sqrt{2} \approx 11{,}3$ m^3.

Bài 9. Anh Nam có một cái ao diện tích 50 m^2 để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con/m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5$ (kg). Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Hướng dẫn giải. Số cá anh Nam nuôi vụ vừa qua là: 2000 (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\frac{3000}{2000} = 1,5$ (kg/con)

Gọi x $(x > 0)$ (con/m^2) là số cá mà anh Nam thả ít đi trong vụ tới, ta thấy:

Giảm 8 (con/m^2) khối lượng cá thành phẩm tăng $0,5$ kg/con

Giảm x (con/m^2) khối lượng cá thành phẩm tăng $0,0625x$ kg/con

Vậy tổng sản lượng cá thu được là: $f(x) = (2000 - 50x)(1,5 + 0,0625x)$

Khi đó, ta đi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$

$$f(x) = 3000 + 125x - 75x - 3,125x^2 = -3,125x^2 + 50x + 3000$$

$$f'(x) = -6,25x^2 + 50 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 8 \\ x = -8(l) \end{array}\right.$$

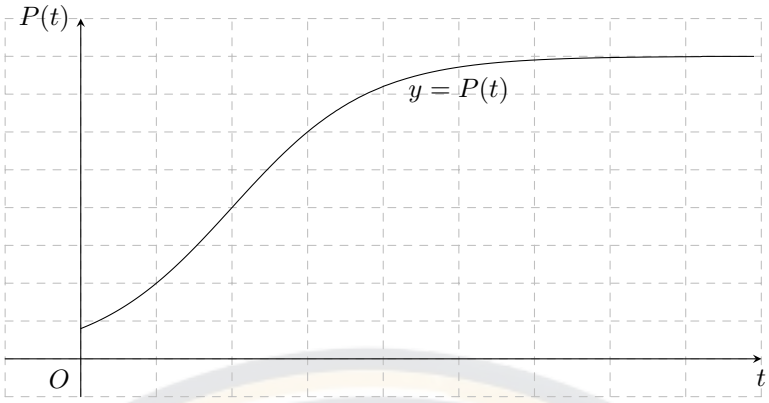
Bảng biến thiên:

x	0		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(8)$	↘	

Vậy để sản lượng cá thu được lớn nhất thì số cá cần thả của anh Nam là $2000 - 50 \cdot 8 = 1600$ (con).

Bài 10. Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \dfrac{c}{1 + a \cdot b^{-t}} (a, b, c \in \mathbb{R})$

có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó t tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ).



Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào dữ kiện bài toán ta có

- $P(0) = 800 \Leftrightarrow \dfrac{c}{1+ab^{-0}} = 800 \Leftrightarrow \dfrac{c}{1+a} = 800.$
- $P(3) = 6000 \Leftrightarrow \dfrac{c}{1+ab^{-3}} = 6000 \Leftrightarrow \dfrac{c}{1+ab^{-3}} = 6000.$
- Sức chứa của hồ là 8000 con $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 8000.$

  Khi $t \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} b<1 \Rightarrow b^{-t} \to +\infty (L) \\ b>1 \Rightarrow b^{-t} \to 0 (TM) \end{cases} \Rightarrow P(t) \to c.$

  Khi đó $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = c = 8000.$

Mà $\dfrac{c}{1+a} = 800 \Leftrightarrow \dfrac{8000}{1+a} = 800 \Rightarrow a = 9.$

Thay $c = 8000$ và $a = 9$ vào phương trình $\dfrac{c}{1+ab^{-3}} = 6000$ ta được

$\dfrac{8000}{1+9b^{-}3} = 6000 \Leftrightarrow 1 + 9b^{-3} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b^{-3} = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow b = 3.$

Suy ra $P(t) = \dfrac{8000}{1+9\cdot 3^{-t}}.$

Hàm số $P'(t) = -8000 \cdot \dfrac{-9\cdot 3^{-t}\cdot \ln 3}{(1+9\cdot 3^{-t})^2} = 72000 \ln 3 \cdot \dfrac{3^{-t}}{(1+9\cdot 3^{-t})^2}.$

Để tìm max của $P(t)$ ta có hai cách làm như sau

Cách 1: Tính $P''(t) = \dfrac{-72000 \ln^2 3 \cdot 3^{-t}\cdot (1-81\cdot 3^{-2t})}{(1+9\cdot 3^{-t})^2}$ Ta có $P''(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 81\cdot 3^{-2t} = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$P''(t)$		$+$	0	$-$	
$P'(t)$		↗	$2000\ln 3$	↘	

Vậy tốc độ tăng trưởng tối đa là 2197 con.

Cách 2: Đặt $3^{-t}=a$ $(a>0)$.

$\Rightarrow g(t)=\dfrac{a}{(1+9a)^2}=\dfrac{a}{1+18a+81a^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+18+81a}$.

Nhận xét $g(t)$ max khi $\left(\dfrac{1}{a}+18+81a\right)$ min.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{1}{a}$ và $81a$, ta có

$\dfrac{1}{a}+81a\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot 81a}\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+81a\geq 2\sqrt{81}=18\Rightarrow \dfrac{1}{a}+18+81a\geq 36.$

Do đó $\dfrac{1}{a}+18+81a\leq \dfrac{1}{36}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a}=81a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{9}$.

Khi đó $P'(t)_{\max}=72000\ln 3\cdot\dfrac{1}{36}\approx 2197$.

Bài 11. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12000$ (con), $0\leq t\leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Năm 2024 là năm nhuận nên tháng hai có 29 ngày. Cụ thể: tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+bt^2+ct+12000$ có $f'(t)=-\dfrac{1}{100}t^2+2bt+c$.

Ngày 26/09/2024 ứng với $t=31+29+31+30+31+30+31+31+26=270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t=270$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}f'(270)=0\\ f(270)=55740\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{100}\cdot 270^2+540b+c=0\\ -\dfrac{1}{300}\cdot 270^3+b\cdot 270^2+270c+12000=55740\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}540b+c=729\\ 72900b+270c=109350\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{6}{5}\\ c=81\end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là $f(t)=-\dfrac{1}{300}t^3+\dfrac{6}{5}t^2+81t+12000$.

Thử lại $f'(t)=-\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{12}{5}t+81$, $f'(t)=0\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=270\\ t=-30\ \text{(loại)}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		270		365
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	55740	↘	

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ngày 25/11/2024 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng:

$$f(330) = -\frac{1}{300} \cdot 330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12000 = 49620 \text{ (con)}.$$

Đổi sang đơn vị nghìn con: $49,62$ nghìn con.

Làm tròn kết quả đến hàng phần chục, ta được $49,6$ nghìn con.

Bài 12. Gieo ngẫu nhiên một cặp xúc sắc cân đối và đồng chất. Gọi a là tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc. Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x - a}$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) có một đường tiệm cận xiên là đường thẳng (d). Khi đó hãy tính xác suất để đường thẳng (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ âm (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Vì a là tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc nên $a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

Ta tìm phương trình đường tiệm cận xiên bằng cách thực hiện phép chia đa thức:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x - a} = \frac{x(x-a) + (a-5)x + 1}{x - a} = x + \frac{(a-5)(x-a) + a(a-5) + 1}{x - a} = x + a - 5 + \frac{a^2 - 5a + 1}{x - a}$$

Vì a là số nguyên nên $a^2 - 5a + 1 \neq 0$ với mọi $a \in \{2, 3, \ldots, 12\}$ (do phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ không có nghiệm nguyên). Suy ra đồ thị hàm số luôn có tiệm cận xiên $(d) : y = x + a - 5$.

Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; a - 5)$.

Theo yêu cầu bài toán, điểm này có tung độ âm, tức là:

$$a - 5 < 0 \iff a < 5$$

Vì a là tổng số chấm của hai con xúc sắc nên $a \geq 2$, do đó $a \in \{2, 3, 4\}$.

- Trường hợp $a = 2$: Có 1 kết quả thuận lợi là $(1, 1)$.
- Trường hợp $a = 3$: Có 2 kết quả thuận lợi là $(1, 2), (2, 1)$.
- Trường hợp $a = 4$: Có 3 kết quả thuận lợi là $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố là $1 + 2 + 3 = 6$.

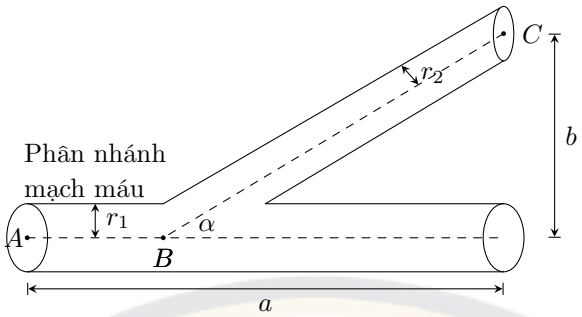
Tổng số kết quả có thể xảy ra khi gieo một cặp xúc sắc là $6 \times 6 = 36$.

Xác suất của biến cố là $P = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \approx 0,1666...$

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả $P \approx 0,17$.

Bài 13. Hệ thống mạch máu chứa các mạch máu gồm động mạch chính, động mạch con, mao mạch và tĩnh mạch để giúp đưa máu từ tim đến các cơ quan và ngược lại. Hệ thống hoạt động để

tối ưu hoá (tối thiểu) năng lượng mà tim sử dụng trong quá trình bơm máu. Đặc biệt năng lượng này giảm khi sức cản của máu giảm. Hình vẽ dưới đây minh hoạ một mạch máu chính có bán kính r_1 phân nhánh với một góc α° tạo thành một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2.



Sử dụng mô tả Định luật Poiseuille, người ta đã chứng minh được sức cản của máu theo con đường ABC là

$$R(\alpha) = C\left(\frac{a - b\cot\alpha}{r_1^4} + \frac{b}{r_2^4 \sin\alpha}\right)$$

với C, a, b là các hằng số. Khi bán kính mạch máu nhỏ bằng $\dfrac{2}{3}$ bán kính mạch máu chính. Xác định α để sức cản này là nhỏ nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

✍ *Hướng dẫn giải.* Các hằng số C, a, b là các hằng số dương.

Ta có $r_2 = \dfrac{2}{3}r_1 \Leftrightarrow r_2^4 = \dfrac{16}{81}r_1^4$.

Khi đó

$$R(\alpha) = C\left(\frac{a - b\cot\alpha}{r_1^4} + \frac{81b}{16r_1^4 \sin\alpha}\right) = \frac{C}{r_1^4}\left(a - b\cot\alpha + \frac{81b}{16\sin\alpha}\right).$$

Điều kiện xác định $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ta có $R'(\alpha) = \dfrac{Cb}{r_1^4} \cdot \dfrac{16 - 81\cos\alpha}{16\sin^2\alpha}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & R'(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 16 - 81\cos\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\alpha = \frac{16}{81} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \alpha \approx 79^\circ + k360^\circ \\ \alpha \approx -79^\circ + k360^\circ. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ suy ra $\alpha \approx 79^\circ$.

Bảng biến thiên

α	0°		79°		180°
$R'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$R(\alpha)$		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, sức cản của mạch máu là nhỏ nhất đạt được khi $\alpha \approx 79^\circ$.

Bài 14. Một chiếc phà chạy giữa đất liền và đảo Dedlos. Phà có công suất tối đa là 1 000 xe hơi mỗi chuyến, nhưng việc tải gần hết công suất rất tốn thời gian. Biết rằng số lượng xe hơi đưa lên phà mỗi chuyến là $f(t)=\dfrac{2000t}{2t+1}$ và mất một khoảng thời gian là 1 giờ. Mỗi xe cần trung bình 3,6 giây để dỡ xuống khi đến điểm đích. Thời gian di chuyển đến đảo và thời gian vòng về đều mất 1,28 giờ. Nên tải bao nhiêu xe lên phà cho mỗi chuyến đi để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Để đưa được $f(t)$ xe lên phà cần t giờ.

Tổng thời gian đưa xe qua đảo hoặc từ đảo về là $t+\dfrac{3,6}{3\,600}f(t)+1,28$ giờ.

Số xe di chuyển trung bình mỗi giờ là $g(t)$, với

$$g(t)=\frac{f(t)}{t+\dfrac{3,6}{3\,600}f(t)+1,28}=\frac{\dfrac{2000t}{2t+1}}{t+\dfrac{3,6}{3\,600}\cdot\dfrac{2000t}{2t+1}+1,28}=\frac{2\,000t}{2t^2+5,56t+1,28}=\frac{2\,000}{2t+\dfrac{1,28}{t}+5,56}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $2t$ và $\dfrac{1,28}{t}$, ta có $2t+\dfrac{1,28}{t}\geq 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1,28}{t}}$.

Suy ra $\dfrac{2\,000}{2t+\dfrac{1,28}{t}+5,56}\leq\dfrac{2\,000}{2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1,28}{t}}+5,56}=\dfrac{50\,000}{219}$.

Dấu bằng xảy ra khi $2t=\dfrac{1,28}{t}\Leftrightarrow t^2=0,64\Leftrightarrow t=0,8$.

Vậy để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất cần tải lên phà mỗi chuyến $f(0,8)\approx 615$ xe.

Bài 15. Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán bao gồm: 14 câu hỏi vận dụng và 07 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng là $\dfrac{14x}{5(x+1)}$ còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là $\dfrac{14y}{5(3y+1)}$ Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm cho 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao là lớn nhất?

Hướng dẫn giải. Điều kiện $0\leq x,y\leq 40$. Tổng điểm thí sinh này đạt được là

$$S(x)=\frac{14x}{5(x+1)}+\frac{14y}{5(3y+1)}=\frac{14x}{5(x+1)}+\frac{14(40-x)}{5\left[3(40-x)+1\right]}=\frac{-56x^2+2\,240x+560}{5(-3x^2+118x+121)}.$$

Ta có $S'(x)=\dfrac{112x^2-10\,192x+204\,960}{5(-3x^2+118x+121)^2}$.

Khi đó $S'(x)=0\Leftrightarrow 112x^2-10\,192x+204\,960=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=61\notin(0;40)\\ x=30\in(0;40).\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ là

x	0		30		40
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$\frac{112}{121}$	↗	$\frac{112}{31}$	↘	$\frac{112}{41}$

Khi đó $\max\limits_{(0;40)} S(x) = S(30) = \dfrac{121}{31}$.

Vậy thí sinh này cần 30 phút cho câu hỏi vận dụng và 10 phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để đạt được tổng điểm cao nhất.

Bài 16. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Giả sử số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất trong tháng được bán hết. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm để bắt đầu có lãi?

Hướng dẫn giải. Tổng chi phí là $C(x) = 200 + x$ (triệu đồng).

Tổng doanh thu là $R(x) = 3x$ (triệu đồng).

Lợi nhuận là $L(x) = R(x) - C(x) - \text{Thuế}$. Doanh nghiệp có lãi khi $L(x) > 0$.

Trường hợp 1. $x < 100$. Thuế $= 0{,}1 \cdot 3x = 0{,}3x$.

Khi đó $L(x) = 3x - (200 + x) - 0{,}3x = 1{,}7x - 200$.

Ta có $L(x) > 0 \Leftrightarrow x > 117{,}6$ (loại vì đang xét $x < 100$).

Trường hợp 2. $100 \le x < 300$. Thuế $= 0{,}08 \cdot 3x = 0{,}24x$.

Khi đó $L(x) = 3x - (200 + x) - 0{,}24x = 1{,}76x - 200$.

Ta có $L > 0 \Leftrightarrow x > 113{,}63$.

Vì $x \in \mathbb{N}^*$, giá trị tối thiểu là $x = 114$.

Trường hợp 3. $x \ge 300$. Thuế $= 0{,}05 \cdot 3x = 0{,}15x$.

Khi đó $L(x) = 3x - (200 + x) - 0{,}15x = 1{,}85x - 200$.

Ta có $L(x) > 0$, $\forall x \ge 3$ nên giá trị tối thiểu là $x = 300$.

Vậy doanh nghiệp cần bán tối thiểu 114 sản phẩm để bắt đầu có lãi.

Bài 17. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.

- Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên *(làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng)*.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số máy chủ cần dùng ($x \in \mathbb{N}$) và t là thời gian chạy máy ($0 < t \leq 8$).

Tổng số lệnh xử lý là $250 \cdot x \cdot t = 18\,000 \Rightarrow x \cdot t = 72 \Rightarrow t = \dfrac{72}{x}$.

Vì thời gian tối đa là 8 giờ nên $\dfrac{72}{x} \leq 8 \Rightarrow x \geq 9$.

Tiền thuê máy $15x$.

Tiền điện $0{,}12 \cdot x \cdot t = 0{,}12 \cdot 72 = 8{,}64$.

Tiền giám sát $8 \cdot t = 8 \cdot \dfrac{72}{x} = \dfrac{576}{x}$.

Tổng chi phí $f(x) = 15x + \dfrac{576}{x} + 8{,}64$.

Xét hàm $f(x)$ với $x \geq 9$, ta có đạo hàm $f'(x) = 15 - \dfrac{576}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 38{,}4 \Rightarrow x = \dfrac{8\sqrt{15}}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{8\sqrt{15}}{5}$		9		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$194{,}5$	↗	$207{,}64$	↗	$+\infty$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên chọn $x = 9$, ta có $f(9) = 15 \cdot 9 + \dfrac{576}{9} + 8{,}64 \approx 208$ (triệu đồng).

Bài 18. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \dfrac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \dfrac{36}{x + 10}$ và $t_2 = \dfrac{4}{x - 30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2 400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Hướng dẫn giải. Tổng số công nhân $N = 2\,400$.

Số công nhân vi phạm đúng 1 lần $N_1 = 2\,400 \cdot \dfrac{36}{x + 10}$, tỉ lệ $t_1 = \dfrac{36}{x + 10}$.

Số công nhân vi phạm đúng 2 lần $N_2 = 2\,400 \cdot \dfrac{4}{x-30}$, tỉ lệ $t_2 = \dfrac{4}{x-30}$.

Không có công nhân nào vi phạm quá 2 lần.

Tiền phạt mỗi lần vi phạm

- Lần 1: x (nghìn đồng), với $60 \le x \le 300$.
- Lần 2: $x - 20$ (nghìn đồng).

Tiền phạt công nhân vi phạm 1 lần x (nghìn đồng).

Tiền phạt công nhân vi phạm 2 lần $x + (x-20) = 2x - 20$ (nghìn đồng).

Tổng tiền phạt hàm số theo x là

$$f(x) = N_1 \cdot x + N_2 \cdot (2x-20) = \frac{86\,400x}{x+10} + \frac{9600(2x-20)}{x-30}.$$

Tính đạo hàm ta được $f'(x) = \dfrac{864\,000}{(x+10)^2} - \dfrac{384\,000}{(x-30)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{x+10}{x-30}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Từ đó tìm được nghiệm $x = 110$ (thỏa mãn điều kiện $x \in [60; 300]$).

Ta có $f(110) = 103\,200$, $f(60) \approx 106\,057$, $f(300) \approx 104\,235$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được tại $x = 110$, khi đó $f(110) = 103\,200$ (nghìn đồng).

Vậy tổng số tiền phạt ít nhất làm tròn đến hàng đơn vị là 103 triệu đồng.

Bài 19. Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động được cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc và φ (rad) là pha ban đầu. Trong Vật lý, động năng (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$ trong đó m (kg) là khối lượng của vật và $v(t)$ (m/s) là vận tốc của vật tại thời điểm t (s). Giả sử một vật có khối lượng $m = 100$ (gam) dao động điều hòa với phương trình chuyển động: $x = 40\cos\left(200\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (cm). Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)? (Làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Đổi khối lượng: $m = 100$ gam $= 0,1$ kg.

Từ công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$, để động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất thì $|v(t)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có phương trình vận tốc:

$$v(t) = (x(t))' = \left[40\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right]' = -40\cdot 200\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm/s)}.$$

Đổi đơn vị sang m/s: $v(t) = -80\pi \sin\left(200\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (m/s).

Ta có $-80\pi \le v(t) \le 80\pi$ nên $|v(t)|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 80π (m/s).

Khi đó động năng lớn nhất của vật là:

$$W_{max} = \frac{1}{2}m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (80\pi)^2 = 320\pi^2 \approx 3158,3 \text{ (J)}.$$

Bài 20. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \le 0$ là tham số. Khi

đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(t) = 500(2t - me^{-t})$.

Đạo hàm cấp hai: $f''(t) = 500(2 + me^{-t})$.

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm $\iff$ $f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0;10]$ $\iff$ $f''(t) \geq 0, \forall t \in [0;10]$

$\iff$ $500(2 + me^{-t}) \geq 0, \forall t \in [0;10]$ $\iff$ $2 + me^{-t} \geq 0, \forall t \in [0;10]$

$\iff$ $me^{-t} \geq -2, \forall t \in [0;10]$ $\iff$ $m \geq -2e^{t}, \forall t \in [0;10]$

$\iff$ $m \geq \max\limits_{t\in[0;10]} (-2e^{t})$.

Xét hàm số $g(t) = -2e^{t}$ trên đoạn $[0;10]$. Vì $g'(t) = -2e^{t} < 0, \forall t \in [0;10]$ nên hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[0;10]$.

Do đó $\max\limits_{t\in[0;10]} g(t) = g(0) = -2e^{0} = -2$.

Suy ra $m \geq -2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2.

Bài 21. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Hướng dẫn giải. Sau mỗi vụ, trung bình sản lượng cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là $f(n) = n \cdot P(n) = 540n - 18n^2$ (gam).

Ta có $f'(n) = 540 - 36n = 0 \iff n = 15$.

Bảng biến thiên:

n	0		15		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$	0	↗	$f(15)$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy sản lượng cá $f(n)$ đạt cực đại tại $n = 15$ và nghịch biến khi $n > 15$.

Vậy thả cá từ 16 con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm.

Bài 22. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Hướng dẫn giải. Gọi x (lần) là số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng ($0 \leq x \leq 30$; $x \in \mathbb{N}$).

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng).

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ).

Thu nhập của công ty đạt được là $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$ (triệu đồng).

Ta có $f'(x) = 0,1(150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$.

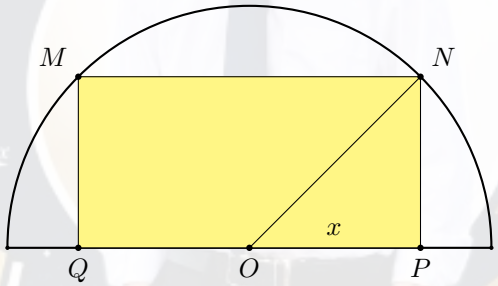
$f'(x) = 0 \iff x = 5$.

Bảng biến thiên:

x	0		5		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(30)$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$ và nghịch biến trên khoảng $(5;30)$, nên thu nhập của công ty đạt cực đại tại lần tăng giá thứ 5 và bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ 6.

Bài 23. Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ $(0 < x < 4)$, $ON = 4$.

Khi đó, xét tam giác vuông ONP tại P, ta có $NP = \sqrt{ON^2 - OP^2} = \sqrt{16 - x^2}$.

Chiều dài của hình chữ nhật là $MN = 2OP = 2x$.

Diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên khoảng $(0;4)$.

Ta có: $f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} + 2x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = 2\sqrt{16 - x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \dfrac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \iff 32 - 4x^2 = 0 \iff x^2 = 8 \iff \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \in (0;4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0;4) \end{array}\right.$.

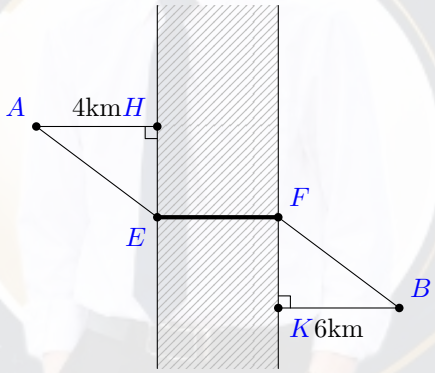
Bảng biến thiên:

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	16	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16\,(\text{dm}^2)$.

Bài 24. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Hướng dẫn giải. Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$.

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$, $\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên đường đi $AEFB$ ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$.

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \dfrac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20)$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \dfrac{20 - x}{\sqrt{(20 - x)^2 + 36}} \Rightarrow 36x^2 = 16(20 - x)^2 \Rightarrow 6x = 4(20 - x) \Rightarrow x = 8$.

Bảng biến thiên:

x	0		8		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$10\sqrt{5}$	↗	

Vậy quãng đường ngắn nhất khi $x = 8$, lúc đó khoảng cách từ thành phố A đến chân cầu E là:

$AE = \sqrt{8^2 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,94$ km.

Làm tròn đến phần chục, ta được kết quả: $AE \approx 8,9$ km.

Bài 25. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ (x: đồng; $x \geq 2.000.000$ đồng).

- Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.
- Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\dfrac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \dfrac{x - 2.000.000}{50.000}$.
- Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50 - \dfrac{x - 2.000.000}{50.000} = -\dfrac{x}{50.000} + 90$.

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\dfrac{x}{50.000} + 90\right) x = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$.

Ta tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của $F(x) = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$ với $x \geq 2.000.000$.

$F'(x) = -\dfrac{1}{25.000}x + 90$.

$F'(x) = 0 \iff -\dfrac{1}{25.000}x + 90 = 0 \iff x = 2.250.000$.

Bảng biến thiên:

X	$2.000.000$		$2.250.000$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗	$F_{\max}$	↘	

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$ (đồng).

Đổi sang đơn vị triệu đồng: 2.250.000 đồng $= 2,25$ triệu đồng.

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2,25$ triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 26. Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ là $ax + by + 4 = 0$. Tính $a + 2b$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	28	$\searrow$	$-\infty$

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-1;-4)$ và $B(3;28)$.

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $8x - y + 4 = 0 \Rightarrow a = 8; b = -1$.

Vậy $a + 2b = 6$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Chương II

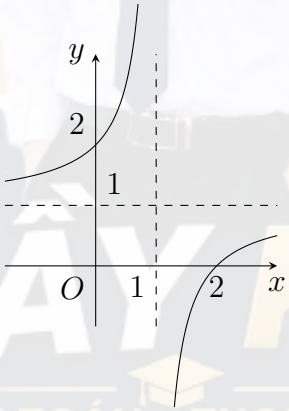
BỘ ĐỀ TỔNG ÔN CHƯƠNG 1

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 1
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới:



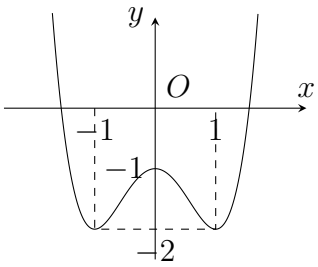
Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$..
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$..
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$..
(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$..

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Học hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

sau đây?



Ⓐ $x=1$.. Ⓑ $x=-2$.. Ⓒ $x=0$.. Ⓓ $x=-1$..

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$..
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$..
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$..
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$..

Câu 4. Cho các hàm số sau: (1) $y=-x^3+x^2-x+2$. (2) $y=-4x+3$. (3) $y=-x^4$. (4) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ 1.. Ⓑ 3.. Ⓒ 4.. Ⓓ 2..

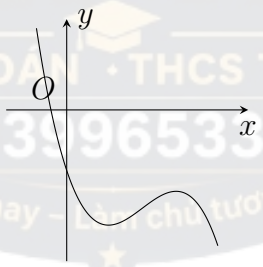
Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=-x^3-3x^2+1$ trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

Ⓐ 1.. Ⓑ -1..
Ⓒ -3.. Ⓓ Không tồn tại..

Câu 6. Đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Ⓐ $AB=\sqrt{34}$.. Ⓑ $AB=6$.. Ⓒ $AB=8$.. Ⓓ $AB=\sqrt{17}$..

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

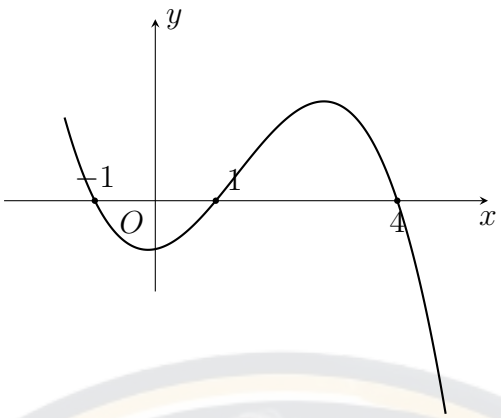
Ⓐ $a<0;b<0;c<0;d<0$.. Ⓑ $a<0;b>0;c<0;d<0$..
Ⓒ $a<0;b>0;c>0;d<0$.. Ⓓ $a>0;b>0;c>0;d<0$..

Câu 8. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$ bằng 1.

Ⓐ 5.. Ⓑ 6.. Ⓒ 4.. Ⓓ 7..

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào **sai** về hàm số $y = f(x)$?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	3	↘	$+\infty$	↘	-2	↗	5
			$-\infty$				

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(2-x)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 12. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 30 m/s. Ⓑ 400 m/s. Ⓒ 216 m/s. Ⓓ 54 m/s.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

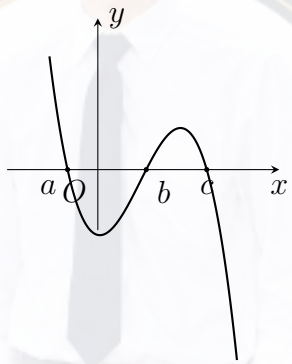
a) Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

b) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

c) Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

d) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

Bài 2. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ bên dưới:



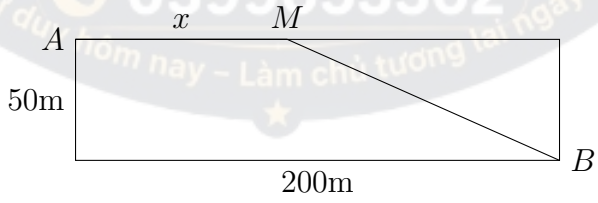
a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

c) $(f(b)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 3. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200 m. Một vận động viên xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M trên cạnh dài và bơi từ M đến điểm B ở góc đối diện. Biết vận tốc chạy $4,8$ m/s, vận tốc bơi $2,4$ m/s. Gọi x (m) là khoảng cách từ A đến M $(0<x<200)$.



a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\dfrac{x}{4,8}$ giây.

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{2,4}$ giây.

c) Nếu $AM=100$ m thì tổng thời gian di chuyển từ A đến B ít hơn 1 phút.

d) Vận động viên chọn điểm M cách A khoảng 171 mét thì đến B nhanh nhất.

Bài 4. Một công ty du lịch in tạp chí. Chi phí xuất bản x cuốn là $C(x) = x^2 - 2000x + 10^7$ (đồng). Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4000 (đồng).

a) Chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí là: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2000x + 10^7}{x} + 4000$ (đồng).

b) Chi phí xuất bản và phát hành 5000 cuốn tạp chí là 45 triệu đồng.

c) Chi phí trung bình mỗi cuốn bắt đầu tăng khi số lượng đạt từ 3163 cuốn trở lên.

d) Chi phí trung bình thấp nhất là 3162 đồng.

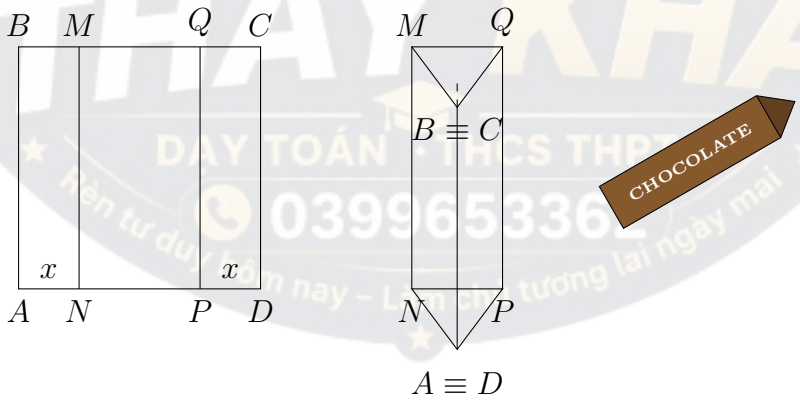
Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Bài 1. Biết hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ đạt cực đại tại $x = a$ và đạt cực tiểu tại $x = b$. Giá trị của biểu thức $M = 2a - 3b$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + 6m$ (với m là tham số). Tính tổng bình phương các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

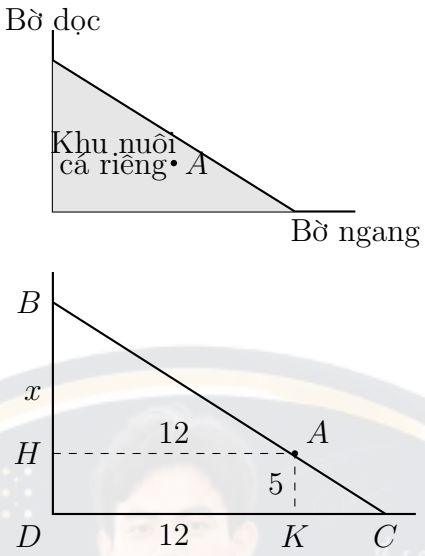
Bài 3. Hằng ngày mực nước của một hồ thủy điện lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian trong ngày sau t (giờ) (kể từ 8h sáng) được cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \dfrac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước quy định trước 5 tiếng đồng hồ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ, biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước?

Bài 4. Để tạo ra phần xung quanh của một hộp kẹo sôcôla có dạng hình lăng trụ đứng (không tính hai đáy), người ta dùng một tờ giấy bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh là 15 cm. Ta gập tấm bìa theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khi đó ta có thể tạo được hộp kẹo sôcôla có thể tích lớn nhất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) centimet khối, biết thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao?

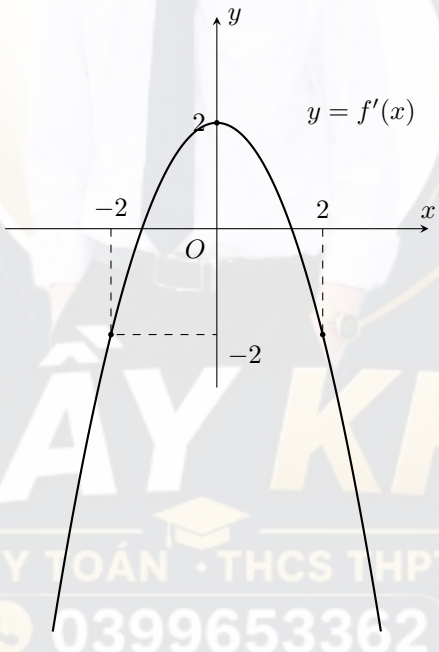


Bài 5. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là bao nhiêu mét vuông, biết

rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+6x$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ với $b-a=4$. Khi đó giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng bao nhiêu?



THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 2
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+16x+32}{x+8}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x=-15$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=-12$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	9	↘	8	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

Ⓐ $y_{C\text{Đ}}=9$. Ⓑ $y_{C\text{Đ}}=2$. Ⓒ $y_{C\text{Đ}}=-2$. Ⓓ $y_{C\text{Đ}}=8$.

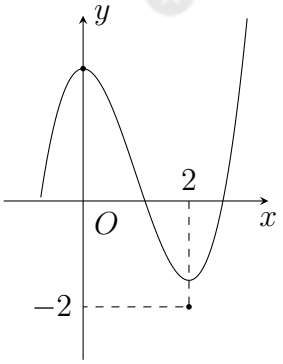
Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{-10x-1}{5x+2}$ trên đoạn $[-12;-4]$.

Ⓐ $M=-\dfrac{13}{6}$. Ⓑ $M=-\dfrac{37}{6}$. Ⓒ $M=-\dfrac{119}{58}$. Ⓓ $M=-\dfrac{3}{58}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-7^-}f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Ⓑ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
Ⓒ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.
Ⓓ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số có 2 điểm cực đại.
Ⓑ Hàm số có 2 điểm cực trị.
Ⓒ Hàm số có 2 điểm cực tiểu.
Ⓓ Hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;0)$. Ⓑ $(-\infty;2)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Câu 8. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\dfrac{x+1}{2-x}$.
Ⓑ $y=-x^3-3x+2025$.
Ⓒ $y=-x^3-2x^2+x+2025$.
Ⓓ $y=2x^2-3x+2025$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-3)^2e^x$ trên đoạn $[2;4]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $4e$. Ⓒ e^2. Ⓓ e^4.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=3$.
Ⓑ Hàm số đã cho có hai cực trị thỏa mãn $y_{C\text{Đ}}<y_{CT}$.
Ⓒ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$.
Ⓓ Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

Câu 11. Cho hàm số $y=x\ln x$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;e]$ bằng:

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ e. Ⓓ $e+1$.

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-9x+3}{x+1}$ là đường thẳng:

Ⓐ $y=2x-9$.
Ⓑ $y=2x-11$.
Ⓒ $y=2x+11$.
Ⓓ $y=2x+9$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống.

b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.

c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.

d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

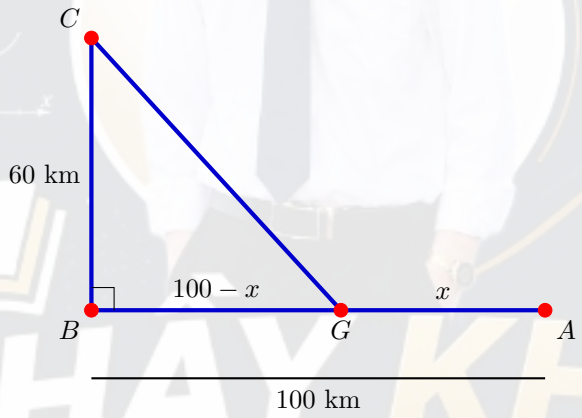
a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2; 5)$.

Bài 3. Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60km, AB = 100km$, góc $\widehat{ABC} = 90°$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.



a) Khi $x = 20km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

b) Khi $x = 20km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

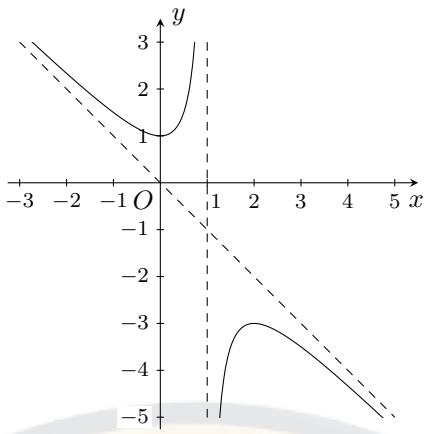
Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng -3.

d) Hàm số có đồ thị như hình vẽ bên



Phần III. Câu trả lời ngắn

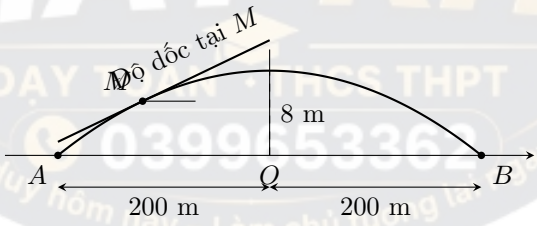
Bài 1. Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 28. Chọn ngẫu nhiên hai số a, b phân biệt từ tập S. Tính xác suất để hai đồ thị $(C_1): y = x^4 + 2ax^2 + 4b$ và $(C_2): y = -\dfrac{1}{2}x^4 + bx^2 - a$ đều có 3 điểm cực trị, đồng thời chúng đều có điểm cực trị chung.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{5x^2 - 6x + 9}{x - 1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T). Số giao điểm của (C) với (T) là?

Bài 5. Hình vẽ dưới đây mô tả một cây cầu vượt có mặt cắt đứng là một phần parabol nối hai điểm A, B và nhận đường trung trực của đoạn AB làm trục đối xứng, $AB = 400m$. Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8m$. Xét tiếp tuyến Δ tại điểm M trên mặt cầu, người ta quy ước $\tan(\Delta, d)$ là độ dốc tại M của mặt cầu, với d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B. Độ dốc lớn nhất của mặt cầu là bao nhiêu?



Bài 6. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó $(0 < x \leq 2000)$, tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) $(0 < t < 300)$. Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu triệu đồng?

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 3
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây.

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	-3		-1		0		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $5M-2m$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 15. Ⓑ 3. Ⓒ 17. Ⓓ -15.

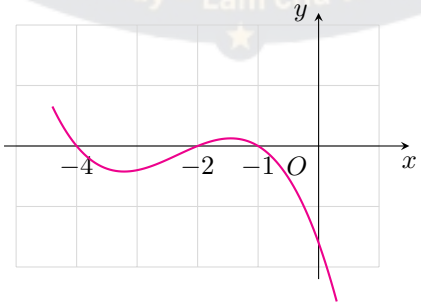
Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính vận tốc chất điểm đạt được tại thời điểm $t=2$.

Ⓐ $\dfrac{21}{4}$. Ⓑ $\dfrac{45}{4}$. Ⓒ 9. Ⓓ 12.

Câu 4. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. Ⓑ $y=x^2+2x$.
Ⓒ $y=x^3-x^2+x$. Ⓓ $y=x^4-3x^2+2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^2-9x+15)e^x$ trên đoạn $[0;9]$.

Ⓐ $25e^{10}$. Ⓑ $15e^9$. Ⓒ $\dfrac{25}{e}$. Ⓓ $-3e^6$.

Câu 7. Bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
y'	$+$		$\|$	$+$	
y	$-\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{2}{3}$

Ⓐ $y=\dfrac{2x-3}{3x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{2x+3}{-3x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{2x-1}{4-3x}$. Ⓓ $y=\dfrac{-2x-3}{-3x-1}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$. Biết hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2, đồng thời $0<x_1<x_2$. Chọn mệnh đề đúng:

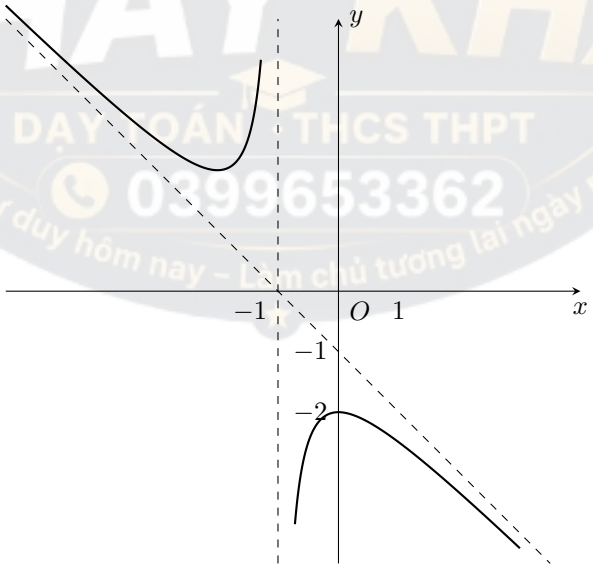
Ⓐ $a>0,b>0,c>0$. Ⓑ $a<0,b>0,c>0$.

Ⓒ $a>0,b<0,c>0$. Ⓓ $a<0,b>0,c<0$.

Câu 9. Một vật xuất phát từ A chuyển động thẳng và nhanh dần đều với quãng đường $s(t)=t+t^2$ (m). Tính vận tốc tại thời điểm mà vật đó cách A một khoảng 20 m (giả sử thời điểm vật xuất phát từ A tương ứng với $t=0$).

Ⓐ 12 m/s. Ⓑ 11 m/s. Ⓒ 10 m/s. Ⓓ 9 m/s.

Câu 10. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số ở các phương án sau?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Câu 11. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+2}$?

Ⓐ $y=2x$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=2x-7$. Ⓓ $x=-2$.

Câu 12. Hàm số $y=-x^3+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;4)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(0;2)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$.

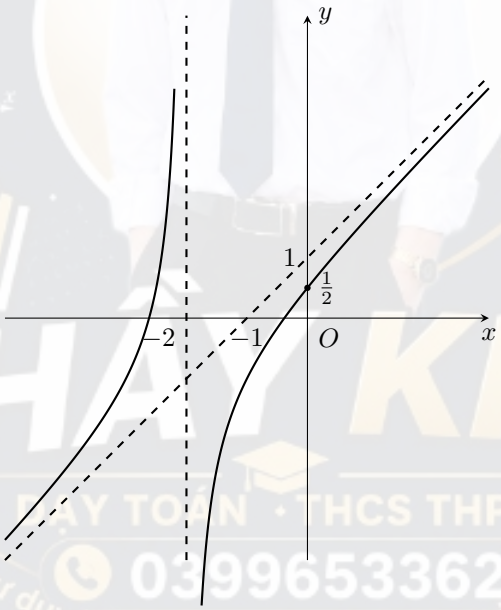
a) Điểm cực tiểu của hàm số là $x=1$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;5]$ là 111.

d) Gọi A,B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng 2 với $C(-1;2)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) $c=1$.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-1$.

c) Hàm số có dạng $y=x+1+\dfrac{d}{x+2}$ với $d>0$.

d) $T=2a+3b-c=10$.

Bài 3. Một cửa hàng bán vải thiều với giá bán là 30000 đồng/1kg. Giá nhập vào là 16000 đồng/1kg. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/1kg thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10 kg.

a) Nếu giữ nguyên giá ban đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1400000 đồng.

b) Nếu giá bán là 20000 đồng/1kg, cửa hàng bán được 250 kg/ngày.

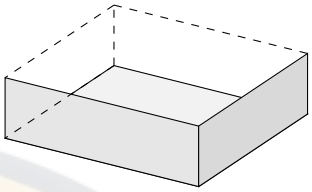
THẦY KHA · DẠY TOÁN · THCS THPT · 0399653362 · Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

c) Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán $(16 < x < 30)$, khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = (x-16)(400-10x)$.

d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1600000 đồng.

Bài 4. Một tấm kim loại hình chữ nhật có kích thước 3m × 8m. Người ta cắt mỗi góc một hình vuông có cạnh là x (m) để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:





a) Hình vuông được cắt ra ở mỗi góc có cạnh x thỏa $0 < x < \dfrac{3}{2}$ (m).

b) Diện tích mặt đáy của chiếc hộp là $S = (8-2x)(3-2x)$ (m^2).

c) Thể tích của chiếc hộp là $V = 4x^3 + 22x^2 + 24x$ (m^3).

d) Chiếc hộp có thể tích lớn nhất bằng $\dfrac{2}{3}$ (m^3).

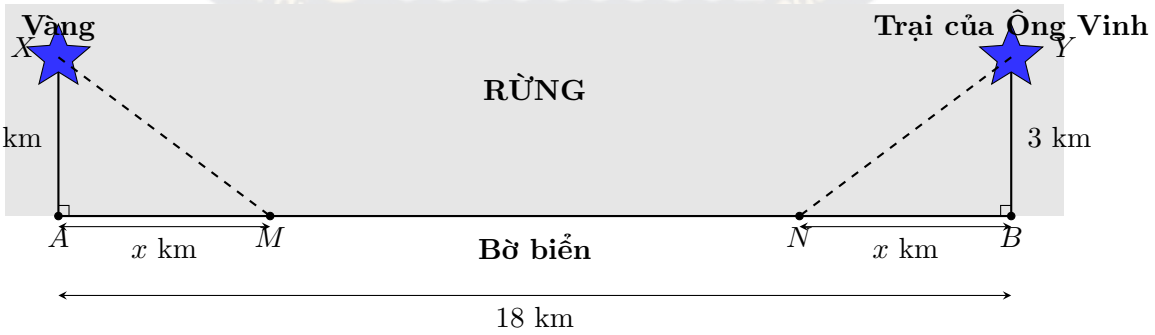
Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1;2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 2. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu (đơn vị: m/s) trong 18 giây đầu tiên đó?

Bài 3. Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng $(1 \le x \le 200)$ thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0{,}001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 4. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở X, cách điểm A là 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y, cách điểm B là 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và XA vuông góc với bờ biển, YB vuông góc với bờ biển. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t+2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về

đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Bài 5. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tìm a.

Bài 6. Một kỹ sư đang thiết kế viền (biên dạng) của một chi tiết kỹ thuật cần phải chịu lực nén tối ưu. Viền này được mô hình hóa trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Biên dạng cong của chi tiết được mô tả bởi đồ thị (C) của một hàm số phân thức bậc hai trên bậc một, có dạng tổng quát là $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, với $m = 1$. Biết đồ thị (C) này cắt Oy tại điểm $A(0;1)$, qua điểm $B(-1;\dfrac{1}{2})$, có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và có một điểm cực trị là $C(2;5)$. Khi đó, $a + b - n$ bằng bao nhiêu?

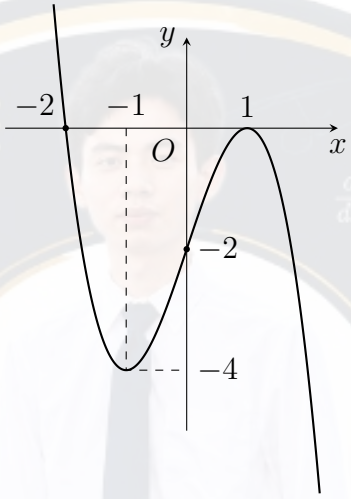
THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 4
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-2;1)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

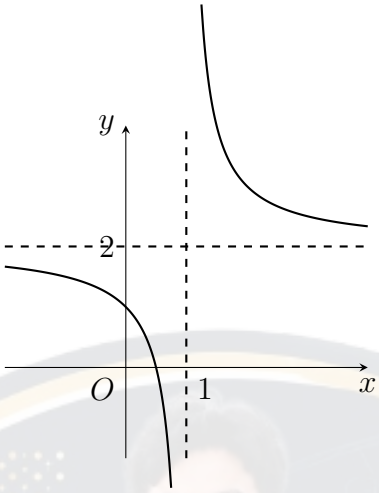
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Câu 3. Xác định a, b, c để hàm số $y = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ sau.



(A) $a = 2, b = 1, c = -1$.
(B) $a = 2, b = 1, c = 1$.
(C) $a = 2, b = 2, c = -1$.
(D) $a = 2, b = -1, c = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-38	$\nearrow$	$\dfrac{14}{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số trên cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

Câu 5. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ lần lượt là:

(A) $x = 3, y = 1$.
(B) $x = 1, y = 3$.
(C) $x = -1, y = 3$.
(D) $x = 3, y = -1$.

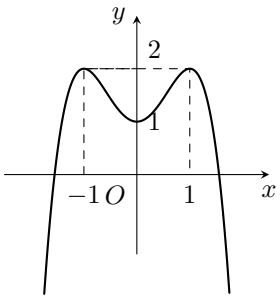
Câu 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính $M.m$.

(A) $\dfrac{1}{3}$.
(B) -1.
(C) 1.
(D) 0.

Câu 7. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

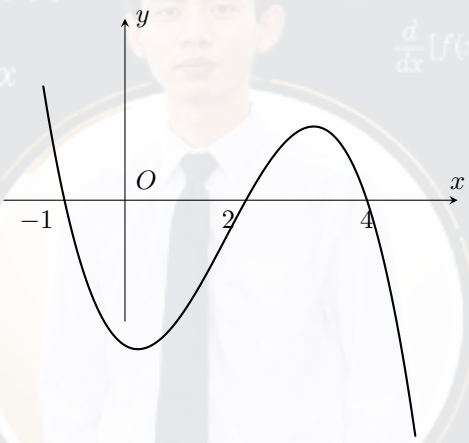
(A) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
(B) $y = x^3 - 3x + 2$.
(C) $y = \dfrac{1}{x^4+1}$.
(D) $y = \dfrac{1}{x^2-x+1}$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như hình vẽ bên dưới?



Ⓐ $y=-x^3+2x^2+1$.
Ⓑ $y=x^4-2x^2+1$.
Ⓒ $y=-x^4+2x^2+1$.
Ⓓ $y=x^3-3x^2+1$.

Câu 9. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình bên dưới:



Hàm số $g(x)=f(1-3x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-1)$.
Ⓑ $(-1;+\infty)$.
Ⓒ $\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$.
Ⓓ $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 289(m/s).
Ⓑ 105(m/s).
Ⓒ 111(m/s).
Ⓓ 487(m/s).

Câu 11. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó x (mg) và $x>0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

Ⓐ 15mg.
Ⓑ 30mg.
Ⓒ 40mg.
Ⓓ 20mg.

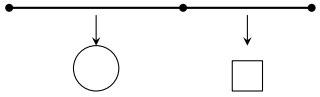
Câu 12. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

Ⓐ $N(1;-10)$.
Ⓑ $Q(-1;10)$.
Ⓒ $M(0;-1)$.
Ⓓ $P(1;0)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn: đoạn có độ

dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $(a > x > 0)$.



a) Bán kính đường tròn: $r = \dfrac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\dfrac{(4+\pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \dfrac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Bài 2. Một vật được làm nóng đến $u_0 = 100°\text{C}$ và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là $T = 30°\text{C}$. Nhiệt độ của vật được làm mát tại thời điểm t (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức sau: $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$ với k là hằng số.

a) Nhiệt độ $u(t)$ của vật tại thời điểm t là $u(t) = 30 + 70e^{kt}$.

b) Nếu hằng số $k = -0,05$ thì nhiệt độ của vật sau 10 phút gần bằng $60°\text{C}$.

c) Nếu nhiệt độ của vật là $80°\text{C}$ sau 5 phút thì hằng số k có giá trị gần bằng $-0,0673$.

d) Nếu nhiệt độ của vật là $80°\text{C}$ sau 5 phút thì nhiệt độ của vật sau 18 phút gần bằng $51°\text{C}$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực thỏa mãn đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$, đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đi qua điểm $A(2;3)$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $f(2) = 3$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(2;1)$

d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 1

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{4x^2 + x - 3}{2x - 6}$.

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x + \dfrac{13}{2}$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 3$.

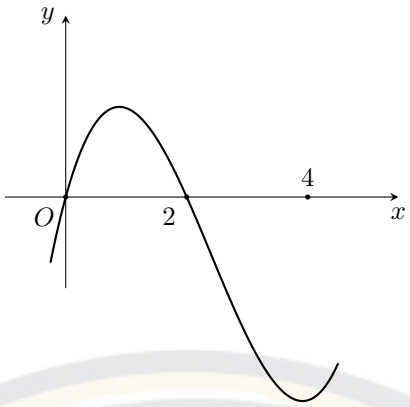
d) Điểm $\left(3; \dfrac{25}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có khoảng nghịch biến có độ dài lớn nhất là $(a;b)$. Tìm tổng $a + b$ là bao nhiêu?

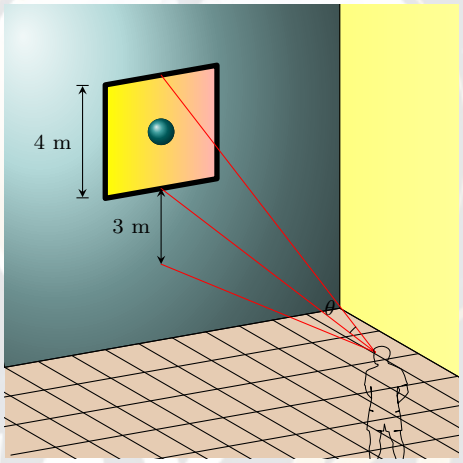
Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(2) = f(4) - f(3)$. Giả sử giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên

đoạn $[0;4]$ đạt được lần lượt tại x_0 và x_1. Tính giá trị biểu thức $T = x_0 + x_1$.

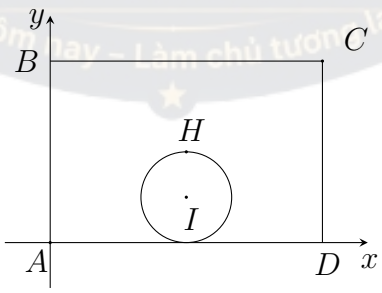


Bài 3. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tích $P = a \cdot b$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Một bức tranh cao 4 m được treo trên tường có mép dưới cao hơn tầm mắt người quan sát 3 m (như hình vẽ). Người quan sát phải đứng cách tường bao nhiêu mét để có được tầm nhìn thuận lợi nhất *(tức là, có góc nhìn θ lớn nhất)*?

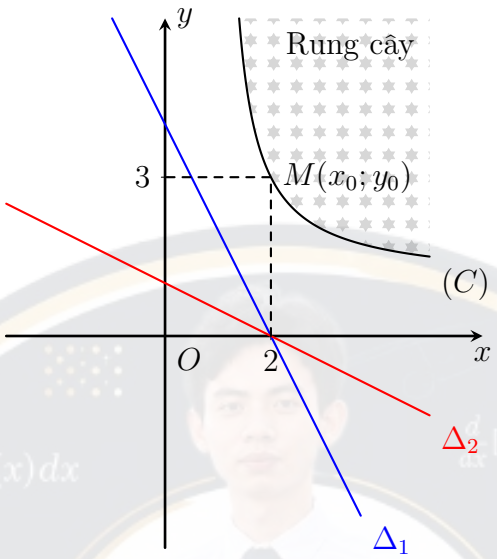


Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0;0)$, $C(6;4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và đi qua H. Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C. Dải LED có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H, tính $27a + 3b + c + 9d$.



Bài 6. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C)\colon y = \dfrac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục toạ độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2;3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến

đường $\Delta_1\colon 2x+y-4=0$ và $\Delta_2\colon x+2y-2=0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trị $M(x_0;y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc toạ độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 5
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định với mọi $x\neq -5$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-9;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-9)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-8$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(0;2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+16x+32}{x+8}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x=-15$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=-12$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	9	↘	8	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

Ⓐ $y=9$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=-2$. Ⓓ $y=8$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\ln(3x^2+3x+4)$ trên đoạn $[-3;3]$.

Ⓐ $\ln 40$. Ⓑ $1+\ln 64$. Ⓒ $\ln\dfrac{13}{4}$. Ⓓ $\ln 64$.

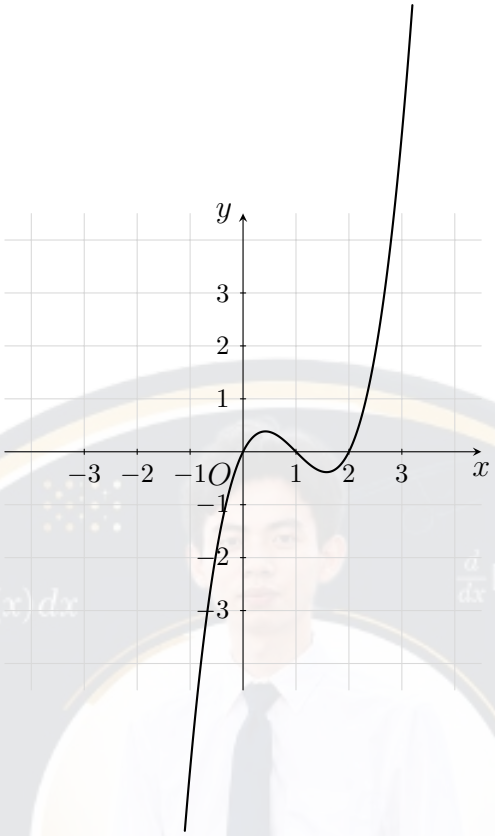
Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{-10x-1}{5x+2}$ trên đoạn $[-12;-4]$.

Ⓐ $M=-\dfrac{13}{6}$. Ⓑ $M=-\dfrac{37}{6}$. Ⓒ $M=-\dfrac{119}{58}$. Ⓓ $M=-\dfrac{3}{58}$.

Câu 7. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-3x^2-30x-51}{3x+6}$.

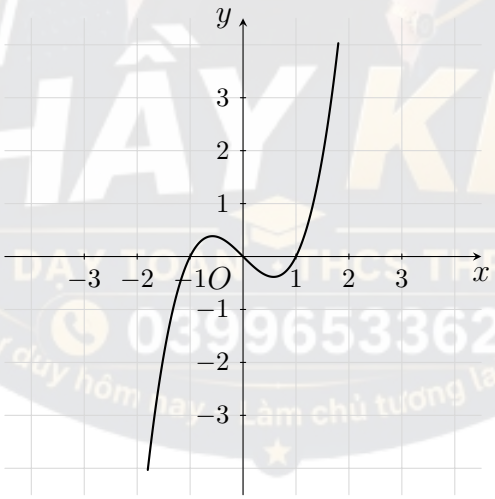
Ⓐ $y=-x-8$. Ⓑ $y=-x-12$.
Ⓒ $y=x-6$. Ⓓ $y=3x+6$.

Câu 8. Đồ thị như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.
Ⓑ $y = -x^3 - 3x^2 + 2x$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ là:

Ⓐ 1.
Ⓑ 0.
Ⓒ 3.
Ⓓ 2.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng:

Ⓐ $y = 3$.
Ⓑ $x = 2$.
Ⓒ $x = 3$.
Ⓓ $y = 2$.

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

Ⓐ $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x$.

Ⓒ $y=\log_2 x$. Ⓓ $y=x+\sqrt{x^2+4}$.

Câu 12. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

Ⓐ 6 máy. Ⓑ 7 máy. Ⓒ 4 máy. Ⓓ 5 máy.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$	↗	1
			$-\infty$		

a) $a=b$.

b) $f(1)>f(2025)$.

c) $\max\limits_{(-\infty;2)} f(x)=+\infty$.

d) Trong các hệ số a,b,c chỉ có một số âm.

Bài 2. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L).

a) $c'(t)=\dfrac{t^2+1}{(t^2+1)^2}$.

b) $c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in(0;+\infty)\\ t=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

c) Nồng độ thuốc trong máu tăng trong 2 giờ đầu tiên sau khi tiêm.

d) Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

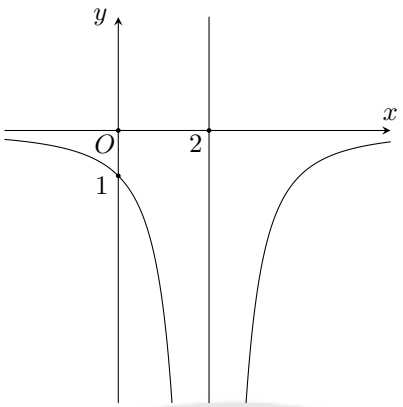
Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[3;4]$ bằng 7 và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khi đó

a) Đồ thị $y=f'(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) $3b+2c=-2$

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[3;4]$ bằng 6



Bài 4. Một công ty sản xuất sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm số biểu diễn giá bán mỗi sản phẩm khi có x sản phẩm được bán ra là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng).

a) Hàm số doanh thu của công ty khi bán được x sản phẩm là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).

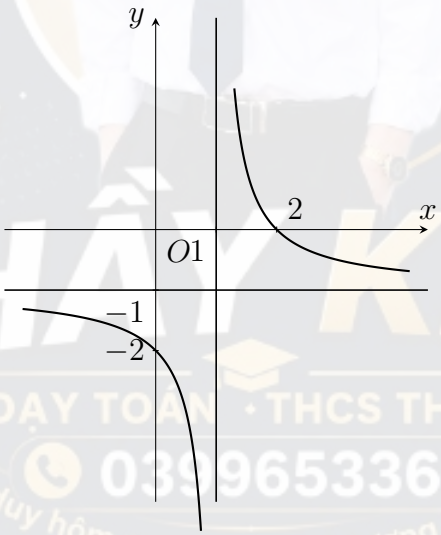
b) Doanh thu của công ty khi bán được 10 sản phẩm là 7,5 triệu đồng.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.

d) Doanh thu công ty lớn nhất là 10 triệu đồng khi bán được 20 sản phẩm.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{a - 2b + 3d}{c}$.

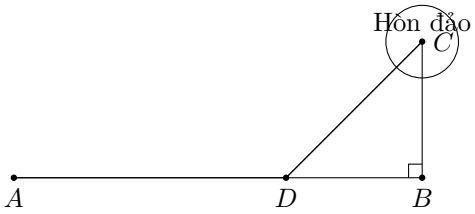


Bài 2. Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 28. Chọn ngẫu nhiên hai số a, b phân biệt từ tập S. Tính xác suất để hai đồ thị $(C_1) : y = x^4 + 2ax^2 + 4b$ và $(C_2) : y = -\dfrac{1}{2}x^4 + bx^2 - a$ đều có ba điểm cực trị, đồng thời chúng có điểm cực trị chung.

Bài 3. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy bằng thuyền là 5 USD/km, đi đường bộ bằng xe taxi là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? (Kết quả ghi dưới dạng

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

thập phân)



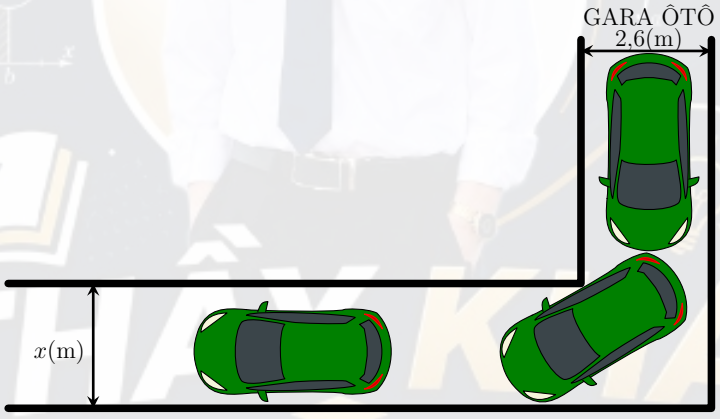
Bài 4. Gọi $M(a;b),(a>-2)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d:y=3x+6$ nhỏ nhất. Tính giá trị $a+b$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	-2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-2

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

Bài 6. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ôtô là $5\times 1{,}9$m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ôtô, người ta coi ôtô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ôtô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ôtô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ôtô không bị biến dạng).

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 6
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Diểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2+4x-5$?

Ⓐ $M(0;5)$. Ⓑ $Q(1;4)$. Ⓒ $N(2;15)$. Ⓓ $P(-2;15)$.

Câu 2. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+2025$ có đồ thị (C). Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

Ⓐ -10. Ⓑ 2. Ⓒ 10. Ⓓ -2.

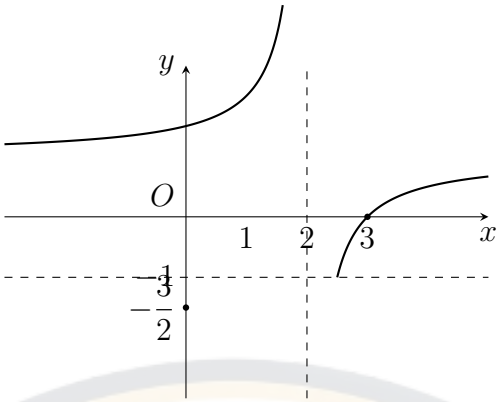
Câu 4. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số được cho ở các phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	→	$+\infty$	→	-9	↘	$-\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R};c\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu

thức $a+b+c$ bằng



Ⓐ -3. Ⓑ 5. Ⓒ -4. Ⓓ 3.

Câu 6. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=10$ (s) chất điểm đạt tốc độ lớn nhất tại thời điểm nào (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Ⓐ $t=2,5$. Ⓑ $t=3,5$. Ⓒ $t=2$. Ⓓ $t=1,5$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+1$ trên đoạn $[-3;4]$.

Ⓐ $m=-\dfrac{43}{2}$. Ⓑ $m=1$. Ⓒ $m=\dfrac{31}{6}$. Ⓓ $m=-\dfrac{133}{3}$.

Câu 8. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{4x+4}$.

Ⓐ $y=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $y=\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $x=-\dfrac{1}{2}$.

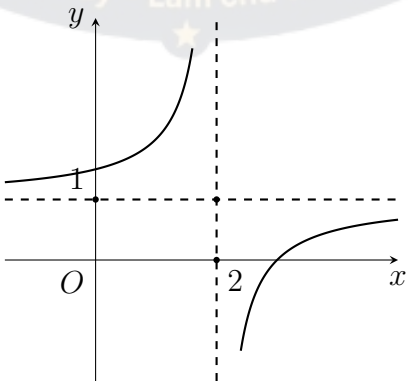
Câu 9. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-9x^2+6x+4}{-3x-2}$.

Ⓐ $y=5x-2$. Ⓑ $y=-3x-2$.
Ⓒ $y=3x-4$. Ⓓ $y=3x-7$.

Câu 10. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

Ⓐ $y=x^3-3x$. Ⓑ $y=\dfrac{1}{x}$. Ⓒ $y=x^4$. Ⓓ $y=x^2-2$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

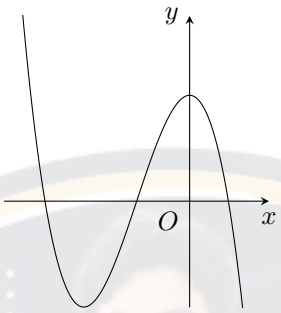


Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số là

Ⓐ $(1;2)$. Ⓑ $(2;1)$. Ⓒ $(-2;-1)$. Ⓓ $(-1;-2)$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a<0,\,d>0$. Ⓑ $a>0,\,d>0$.
Ⓒ $a>0,\,d<0$. Ⓓ $a<0,\,d<0$.



Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+4)$.

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$

b) Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2}$

c) Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

d) Hàm số có một điểm cực trị

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như trên.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2

b) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

c) Hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$

d) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

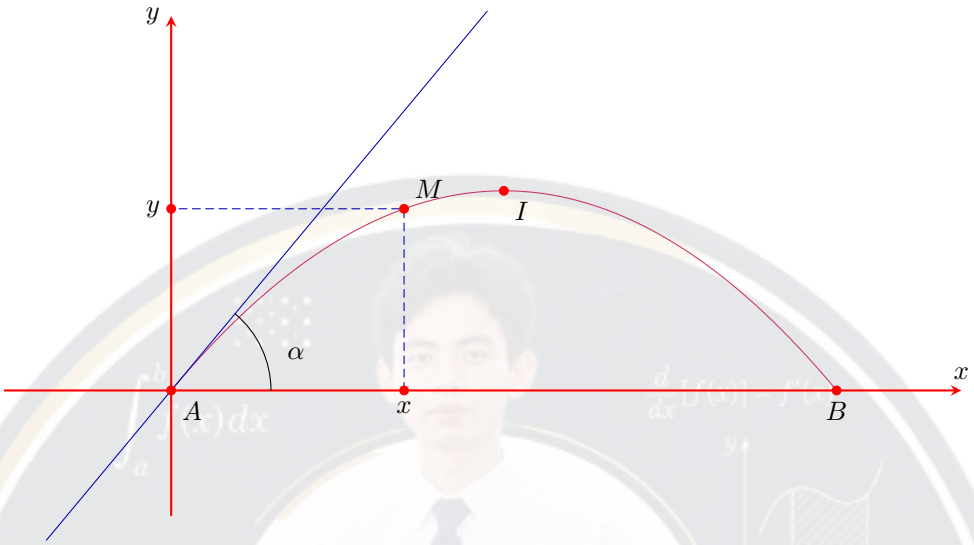
Bài 3. Xét chuyển động của một tàu lượn trên đoạn đường ray có hình dạng một phần đồ thị của hàm số $y=f(x)=\dfrac{135x-x^2-x^3}{200}$ $(x\geq 0)$, trong đó x là khoảng cách theo phương ngang kể từ điểm A, y là độ cao tương ứng của tàu lượn so với phương ngang AB. Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 10 m). *Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.*

a) Độ dài đoạn AB bằng 111 m.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 = \dfrac{\sqrt{406} - 1}{3}$.

c) Độ cao lớn nhất của tàu lượn so với phương ngang AB là 64 m.

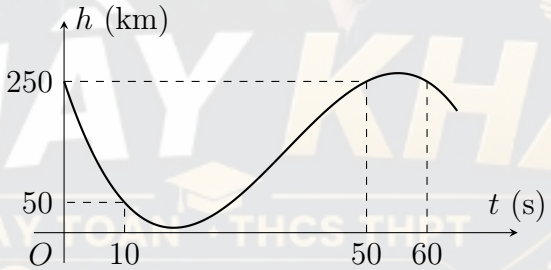
d) Khi tàu lượn đi qua điểm A, tiếp tuyến của quỹ đạo tại A hợp với phương ngang AB một góc $\alpha \approx 34°$.



Bài 4. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h tính bằng kilômét.

a) Trong 50 giây đầu tiên thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này khoảng 8,08 km.

b) Đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 70$ như sau:



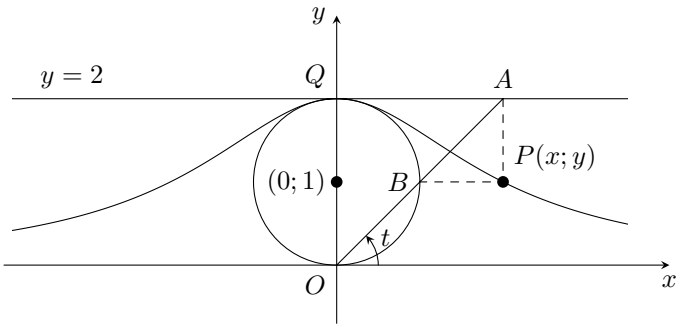
c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ là 5,25 km/s.

d) Tại thời điểm $t = 25$, vận tốc tức thời của con tàu vẫn đang tăng.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Hình vẽ sau mô tả một đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy như sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y = 2$ tại điểm A. Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy. Tập hợp các điểm P tạo thành một đường cong $y = f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị

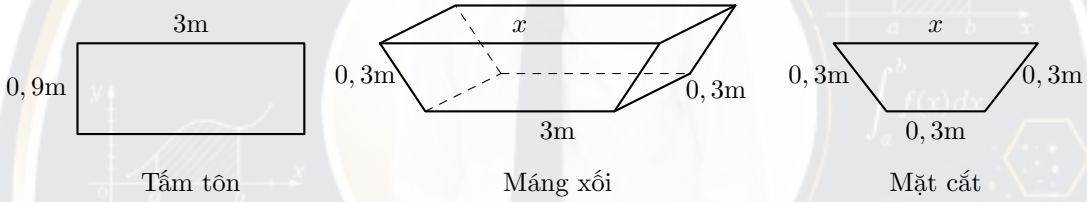
hàm số $y = f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 2. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

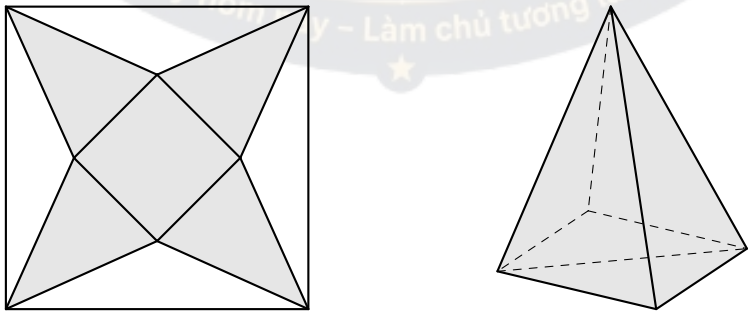
Bài 3. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu (đơn vị: m/s) trong 18 giây đầu tiên đó?

Bài 4. Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Bài 5. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34 567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X, công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x $(x \geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X. Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Bài 6. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gập lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình sau.



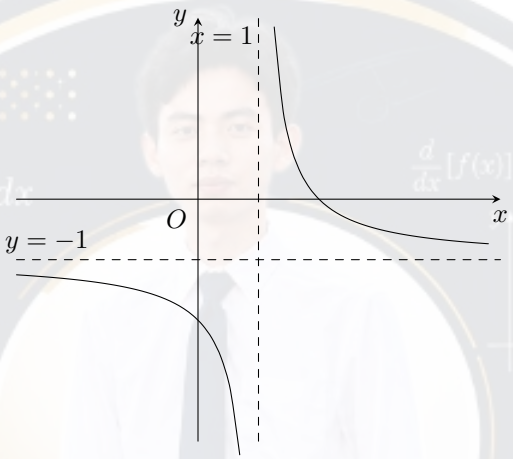
Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 7
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $b<0<a$. Ⓑ $0<b<a$. Ⓒ $b<a<0$. Ⓓ $0<a<b$.

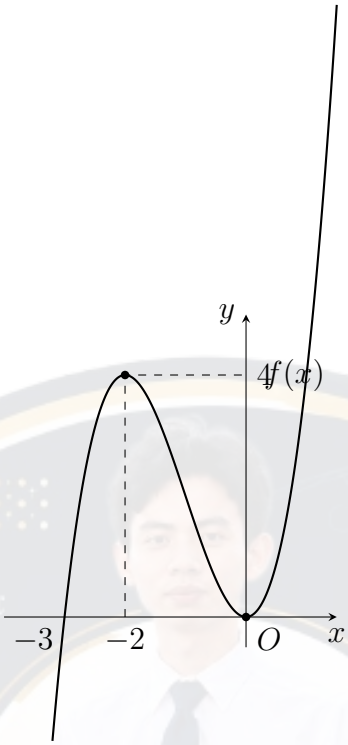
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như bảng dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5;4)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;4)$.

THẦY KHA · ĐẠI SỐ TOÁN · THCS THPT · 0399653362 · Làm chủ tương lai ngay mai

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số đạt cực đại tại

Ⓐ $x = -3$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $y = 4$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 10$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $(-2; 2)$. Ⓒ $(-\infty; 2)$. Ⓓ $(-\infty; -2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau:

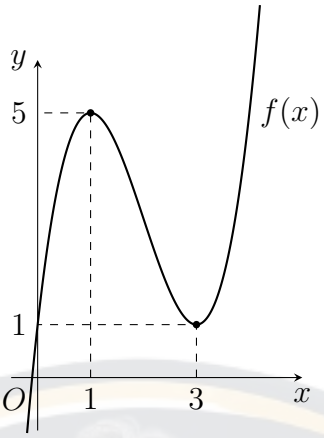
x	-5		1		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	↗	2	↘	9

Ⓐ $\min\limits_{[-5;7]} f(x) = 6$. Ⓑ $\max\limits_{[-5;7]} f(x) = 9$.

Ⓒ $\max\limits_{[-5;7]} f(x) = 6$. Ⓓ $\min\limits_{[-5;7]} f(x) = 2$.

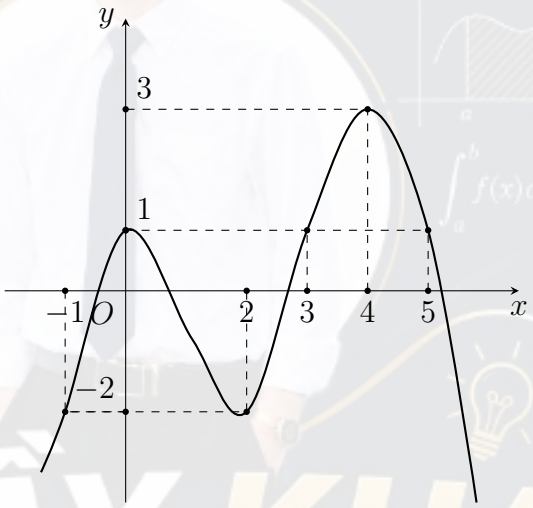
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề

nào sau đây đúng?



Ⓐ $a>0, b>0, c>0, d>0$.
Ⓑ $a>0, b>0, c<0, d>0$.
Ⓒ $a>0, b<0, c>0, d>0$.
Ⓓ $a<0, b<0, c>0, d<0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên $[-1;5]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm



Ⓐ 5.
Ⓑ 4.
Ⓒ 3.
Ⓓ 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Hàm số có giá trị lớn nhất là 2.
Ⓑ Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
Ⓒ Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$.
Ⓓ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\pm 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=x-5+\dfrac{1}{x}$, xét trên khoảng $(0;+\infty)$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

Ⓐ 0.
Ⓑ -3.
Ⓒ 4.
Ⓓ -4.

B

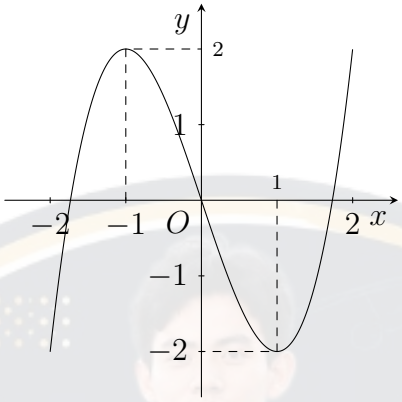
Câu 10. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin 2x+2$ là

Ⓐ 4.
Ⓑ 0.
Ⓒ 3.
Ⓓ 1.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x-3)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Ⓐ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$.
Ⓑ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$.
Ⓒ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \mathrm{e}^5$.
Ⓓ Không tồn tại.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là



Ⓐ 3.
Ⓑ 1.
Ⓒ 0.
Ⓓ 2.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-2; -1)$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[2; 5]$ bằng 10.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Bài 3. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình tính theo thời gian bơm t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \le t \le 0,5$.

a) Ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

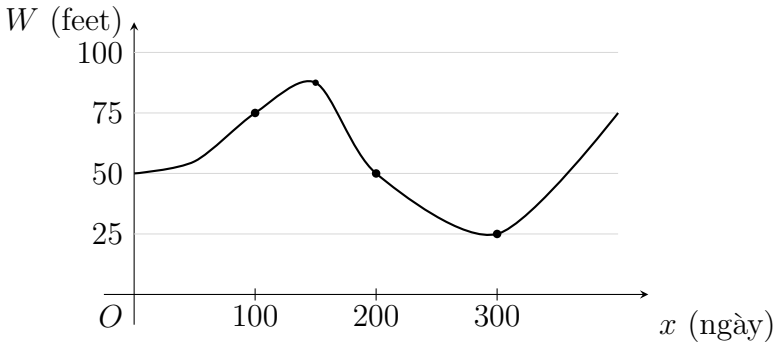
b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Dung tích của bình xăng trong xe là 42 lít.

c) Để lượng xăng trong bình xăng có thể tích tối thiểu là 13,6 lít thì thời gian bơm xăng $t \le 0,2$ phút.

d) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t. Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Bài 4. Biểu đồ mực nước của một hồ chứa trong năm được mô tả bằng một hàm số W tính bằng feet với x là số ngày được tính từ đầu năm (hình vẽ bên). Xét tính đúng sai của các phát

biểu sau:



a) Trong khoảng từ ngày thứ 150 đến ngày thứ 300 thì mực nước trong hồ giảm

b) Mực nước trong hồ chứa đạt cực đại được vào ngày 100

c) Mực nước trong hồ chứa đạt cực tiểu bằng 25 feet

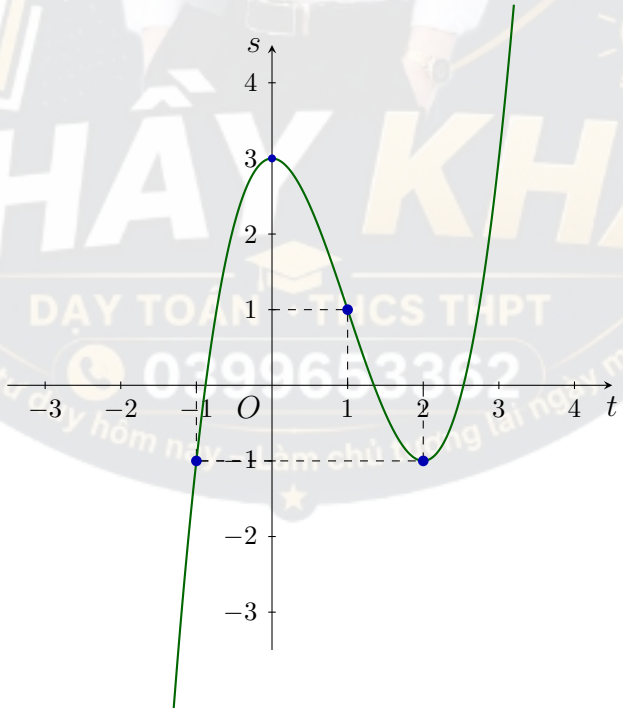
d) Mực nước trong hồ giảm đi 50 feet từ ngày thứ 100 đến ngày thứ 300.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Biết các khoảng nghịch biến của hàm số đã cho là $(-\infty;a)$ và $(b;c)$. Tính giá trị biểu thức $S=3a+5b+7c$.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $(C):y=\dfrac{-x^2+4x+1}{x+1}$, biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) có dạng $d:y=ax+b$. Tìm ab.

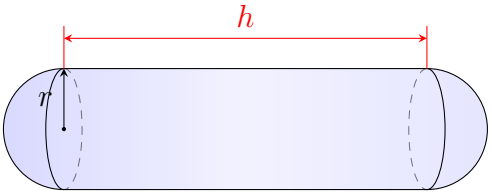
Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=at^3+bt^2+ct+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như hình bên dưới:



Tính vận tốc (m/s) của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng 12 m/s^2.

Bài 4. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét $(h>0)$

và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r $(r > 0)$ (hình vẽ).



Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi$ m^3. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20 000 đồng cho 1 m^2, còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10 000 đồng cho 1 m^2. Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m.

Bài 5. Một công ty sản xuất và bán ra 100 sản phẩm mỗi ngày với chi phí sản xuất là 1 triệu đồng/sản phẩm. Công ty phân phối số sản phẩm này đến hai cửa hàng bán lẻ. Do sự khác biệt về vị trí, nhu cầu, mặt bằng,... nên mỗi cửa hàng có chi phí vận hành và doanh thu khác nhau theo số lượng sản phẩm bán ra.

Tại cửa hàng thứ nhất, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 14 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_1 sản phẩm tại cửa hàng này $(0 \le x_1 \le 100, x_1 \in \mathbb{N})$ được mô tả bởi hàm số

$$R_1(x_1) = -6x_1^2 + 2000x_1 \quad \text{(nghìn đồng)}.$$

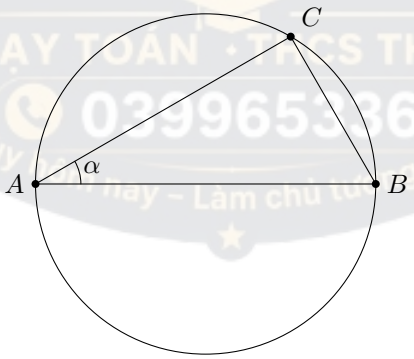
Tại cửa hàng thứ hai, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 30 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_2 sản phẩm tại cửa hàng này $(0 \le x_2 \le 100, x_2 \in \mathbb{N})$ được mô tả bởi hàm số

$$R_2(x_2) = -6x_2^2 + 1800x_2 \quad \text{(nghìn đồng)}.$$

(Chi phí vận hành bao gồm các khoản chi phí dùng cho quảng cáo, vận tải,...). Lợi nhuận của công ty là tổng lợi nhuận từ việc bán sản phẩm từ hai cửa hàng.

Hỏi lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (giả sử số sản phẩm ở cả hai cửa hàng đều được bán hết mỗi ngày và kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

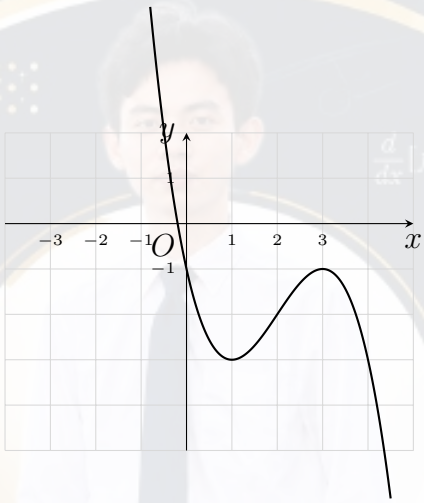
Bài 6. Một bờ hồ hình tròn có bán kính bằng 2 km, đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Từ điểm A anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm C trên hồ, rồi chạy dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 6 km/h (C không trùng với A và B).



Thời gian ngắn nhất mà anh Tài di chuyển từ A đến B là bao nhiêu (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(1;3)$. Ⓒ $(5;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;3)$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{-3x-4}{4x-4}$ nhận điểm nào làm tâm đối xứng trong các điểm sau?

Ⓐ $\left(-1;\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓑ $\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓒ $\left(1;-\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓓ $\left(-1;-\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 3. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{29-6x^2}{-2x-4}$.

Ⓐ $y=3x-8$. Ⓑ $y=-2x-4$.
Ⓒ $y=5x-4$. Ⓓ $y=3x-6$.

Câu 4. Bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $\frac{1}{4}$

Ⓐ $y=\dfrac{3-x}{4x-3}$. Ⓑ $y=\dfrac{x-3}{4x-3}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x-3}{4x-2}$. Ⓓ $y=\dfrac{x+3}{-4x-3}$.

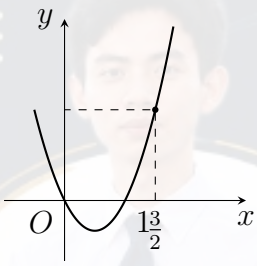
Câu 5. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2-3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$.
(B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

(A) $M=-2$. (B) $M=2$. (C) $M=4$. (D) $M=0$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?



(A) $x=\dfrac{3}{2}$. (B) $x=\dfrac{1}{2}$. (C) $x=1$. (D) $x=0$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)=6t^2-t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

(A) $t=3$ s. (B) $t=4$ s. (C) $t=2$ s. (D) $t=6$ s.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm lớn hơn -1 của phương trình $f(x)=1$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Câu 10. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x + 4$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; -2)$.
Ⓑ $(2; 4)$.
Ⓒ $(-2; +\infty)$.
Ⓓ $(2; +\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

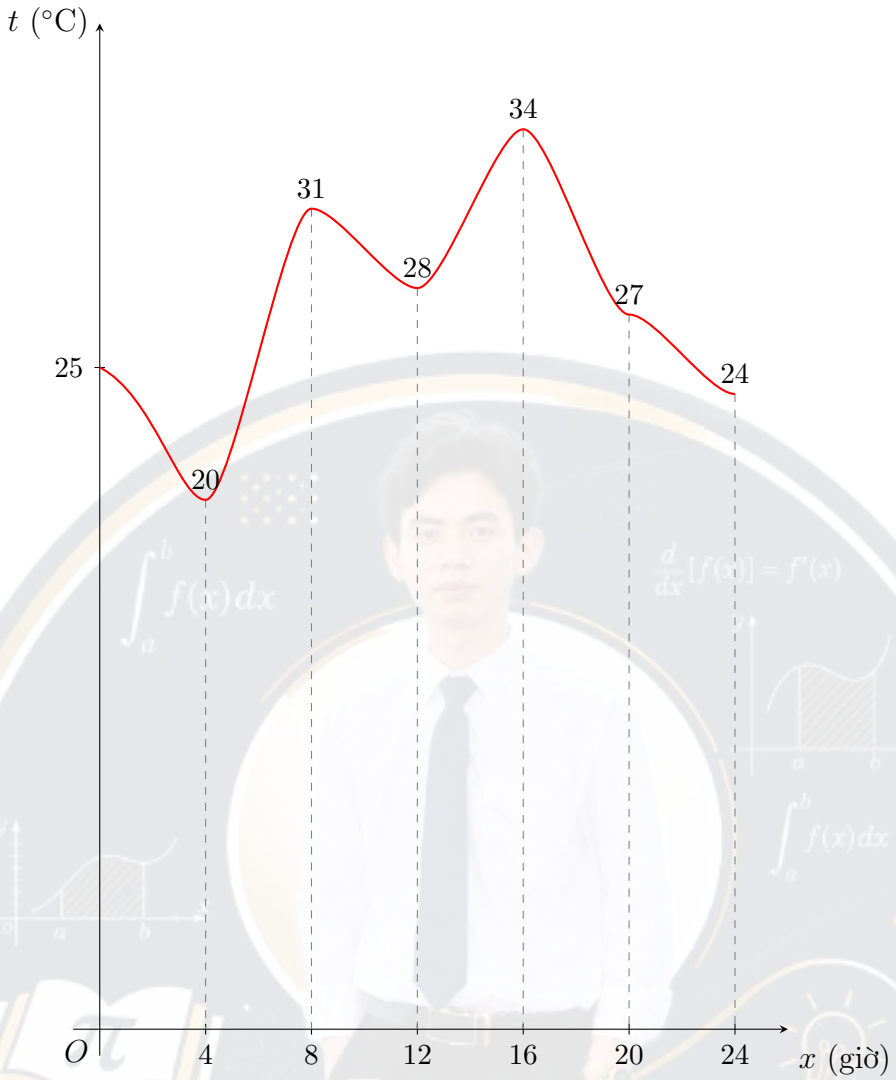
Ⓐ $x = 2$.
Ⓑ $x = -1$.
Ⓒ $x = 1$.
Ⓓ $x = -2$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

đúng, sai của các khẳng định sau:



a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C.

c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

Bài 2. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \dfrac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Nếu một mặt hàng với giá 5 nghìn đồng/kg thì khối lượng mặt hàng đó mà cửa tiệm bán được trong một ngày là 20 kg.

b) Công thức biểu diễn R theo p là $R = -2p^2 + 30p$ với $p > 0$.

c) Để một mặt hàng có doanh thu tối thiểu là 88 nghìn đồng, thì giá của mặt hàng đó $p \geq 4$ nghìn đồng/kg.

d) Giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất là $7,5$ nghìn đồng và doanh thu cao nhất khi đó là $121,5$ nghìn đồng.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4\ln(1 - x)$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{1 - x}$.

c) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ là $1 - 4\ln 2$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{-4x + 5}{2x + 3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số không có cực trị.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.

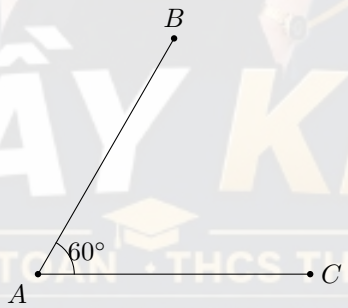
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.

d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \dfrac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 2. Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm A và đi đến điểm C với vận tốc là 60 (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm B với vận tốc là 30 (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc 60° như hình vẽ dưới đây. Cho biết $AB = 42$ (km) và vào lúc a giờ b phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cực li gần nhất để vẫy tay chào nhau ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + b$? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.

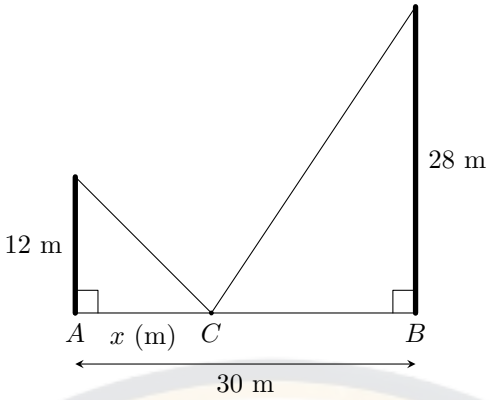


Bài 3. Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$, $f(-3) = 28$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính $S = a^2 + b^2 - c^2$.

Bài 4. Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Bài 5. Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Tổng chiều

dài ngắn nhất của hai sợi dây là bao nhiêu mét?



Bài 6. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

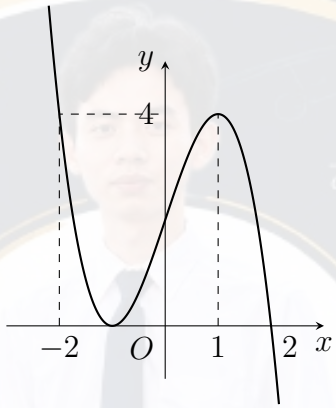
THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 9
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y=x^3+3x-2$.
Ⓑ $y=x^3-3x+2$.
Ⓒ $y=-x^3+3x+2$.
Ⓓ $y=-x^3-3x-2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y		$+\infty$		5	
	2		3		

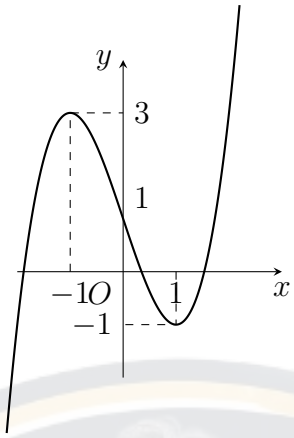
Ⓐ 4.
Ⓑ 1.
Ⓒ 3.
Ⓓ 2.

Câu 3. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2+4x-5}{x-1}$.

Ⓐ $y=x-1$.
Ⓑ $y=3x+3$.
Ⓒ $y=5x+10$.
Ⓓ $y=3x+7$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(-1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{3x-x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. Ⓓ $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 6. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=2x-\cos 2x-5$. Ⓑ $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Ⓒ $y=x^2-2x$. Ⓓ $y=\sqrt{x}$.

Câu 7. Số điểm cực trị của hàm số $y=x^3+x^2+3x-1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$ / 3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $y=1$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $y=3$. Ⓓ $x=1$.

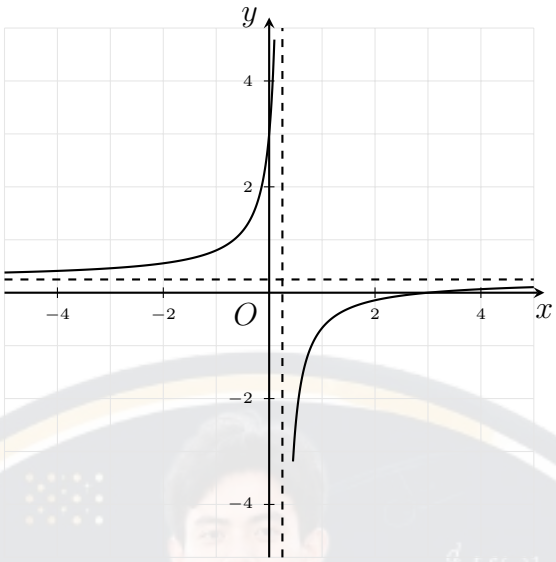
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Câu 10. Đồ thị như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

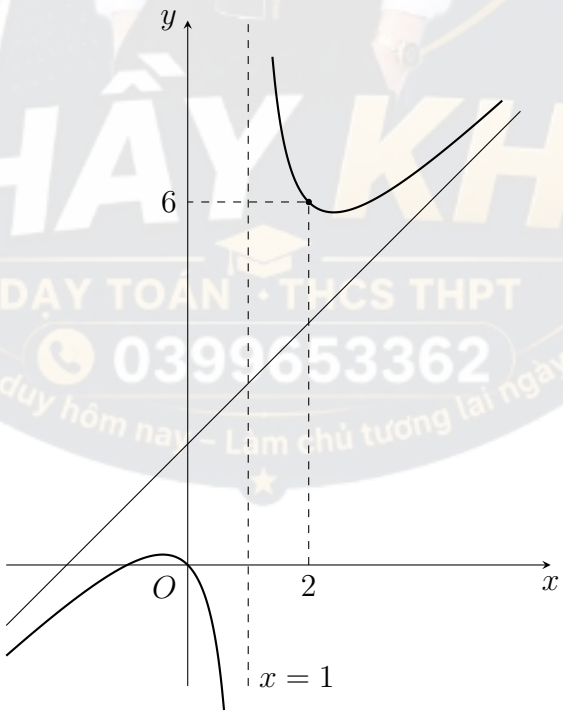


Ⓐ $y=\dfrac{x+3}{4x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x-3}{-4x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{4x-1}{x-3}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x-3}{4x-1}$.

Câu 11. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

Ⓐ -3.
Ⓑ 2.
Ⓒ 0.
Ⓓ -1.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:



Ⓐ $(2;+\infty)$.
Ⓑ $(0;1)$.
Ⓒ $(-\infty;1)$.
Ⓓ $(1;2)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí*

sinh chọn đúng hoặc sai

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=2\cos^2 x+2x$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x)=2+2\sin 2x$.

c) Số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};2\pi\right]$ là 7.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là π.

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Gọi A,B là hai điểm cực trị của (C). Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

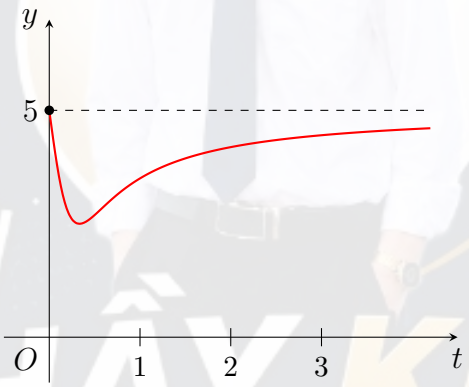
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

Bài 3. Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t\geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$.



Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

a) Khi $t=1$ giờ, thì nồng độ oxygen trong hồ là $3,5$ mg/l.

b) Nồng độ oxigen trong hồ cao nhất là 5 mg/l.

c) Nồng độ oxigen trong hồ thấp nhất là $2,45$ mg/l.

d) Đạo hàm $y'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxigen. Tốc độ thay đổi nồng độ oxigen lớn nhất khi $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ giờ.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$		$\nearrow$	$+\infty$
					2		

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(-5) < f(4)$.

b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

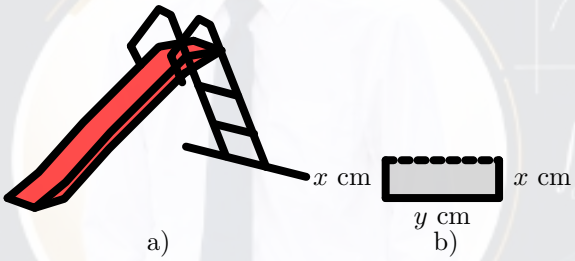
Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao $(121 - 149)$ qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0{,}000989t^3 - 0{,}0486t^2 + 0{,}7116t + 1{,}46, \quad 5 \le t \le 19.$$

Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Bài 2. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (*Hình a*) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở *Hình b*. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì mức độ đảm bảo an của cầu trượt đạt cực đại?



a) b)

Bài 3. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho hàm số $y = x\sqrt{3 - x}$. Khoảng nghịch biến của hàm số có độ dài lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 1}{x - 9}$ có điểm cực tiểu $x = x_1$ và điểm cực đại $x = x_2$. Tính $P = 4x_1 + 2x_2$.

Bài 6. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên *(làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng)*.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 10
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y = 7x^3 + 9x^2 - 3x - 4$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Giá trị cực đại $y = 1$.
Ⓑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{7}$.
Ⓒ Giá trị cực tiểu $y = \dfrac{1}{7}$.
Ⓓ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \ln x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 3. Điểm cực đại của hàm số $y = (2x + 1)e^{1-x}$ là

Ⓐ $x = \dfrac{3}{2}$.
Ⓑ $x = 1$.
Ⓒ $x = -1$.
Ⓓ $x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

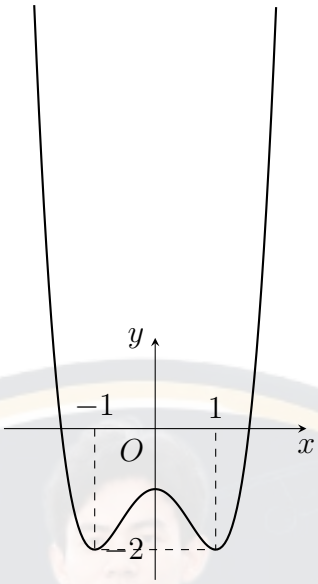
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -1.
Ⓑ 5.
Ⓒ -3.
Ⓓ 1.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch

biến trên khoảng

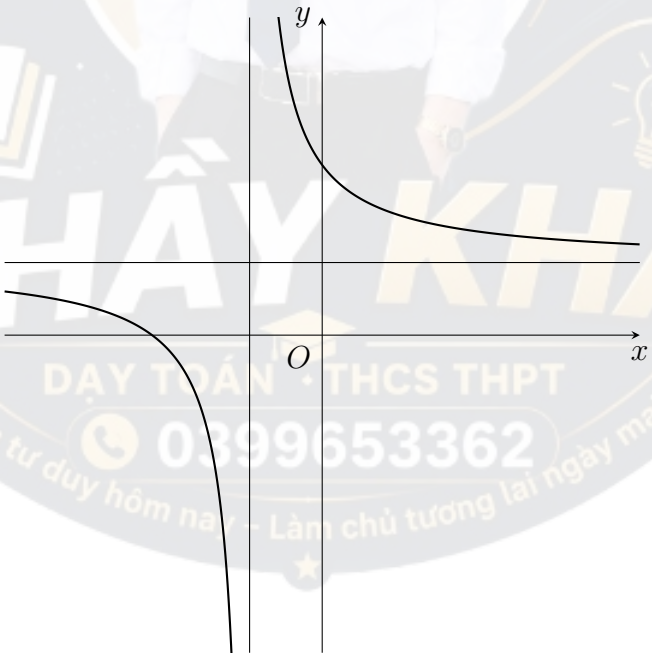


Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Câu 6. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Ⓐ $x=0$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=2$.

Câu 7. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $y'<0, \forall x\neq -1$.
Ⓑ $y'>0, \forall x\neq -1$.
Ⓒ $y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Ⓓ $y'>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

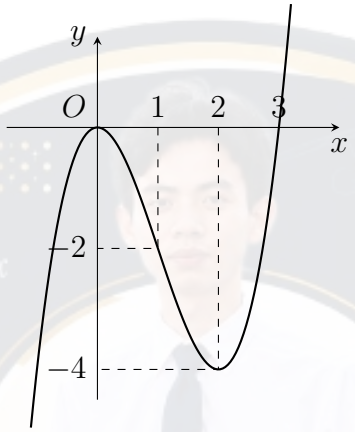
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình bên?



Ⓐ $y=x^3-3x$. Ⓑ $y=x^3-3x^2$.
Ⓒ $y=x^3+3x$. Ⓓ $y=x^3+3x^2$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng?

Ⓐ $y=\dfrac{2}{x+2}$. Ⓑ $y=\dfrac{5x}{2-x}$.
Ⓒ $y=\dfrac{1}{x+1}$. Ⓓ $y=x-2+\dfrac{1}{x+1}$.

Câu 11. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

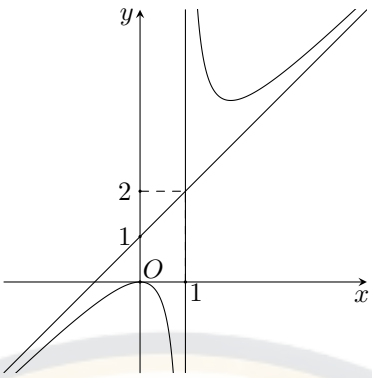
Ⓐ $y=\ln x$. Ⓑ $y=\log x$.
Ⓒ $y=\left(\dfrac{1}{2023}\right)^x$. Ⓓ $y=\left(\dfrac{8}{5}\right)^x$.

Câu 12. Chi phí để sản xuất x sản phẩm là $C(x)=2500+10x+\dfrac{1}{4}x^2$ (nghìn đồng). Chi phí trung bình trên mỗi sản phẩm là thấp nhất khi số lượng sản phẩm được sản xuất là

Ⓐ 50. Ⓑ 20. Ⓒ 1000. Ⓓ 100.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$ là hình bên



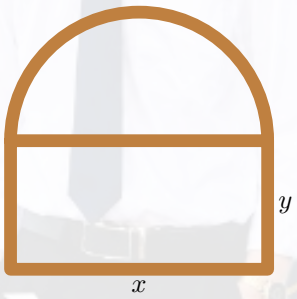
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty$

c) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x + 1$

d) Tổng $a + b + c + d = 2$

Bài 2. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$

b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$

c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \dfrac{16}{8+\pi}$

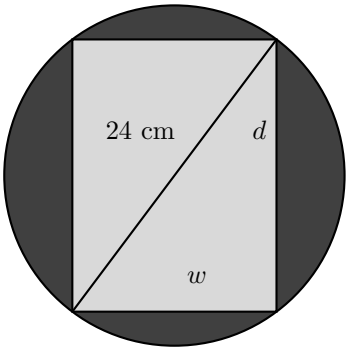
Bài 3. Độ cứng S của một thanh gỗ hình chữ nhật tỉ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều dài d của nó (theo đơn vị mét). Biết rằng nếu thanh gỗ có chiều dài là 6 cm, chiều rộng là 3 cm thì độ cứng của nó bằng 108. Một khúc gỗ hình tròn có đường kính là 24 cm, người ta cắt thành một thanh gỗ hình chữ nhật như hình vẽ bên.

a) Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật liên hệ bởi công thức $d^2 + w^2 = 576$

b) Độ cứng của thanh gỗ là $S = 2dw^2$

c) Độ cứng của thanh gỗ được mô phỏng bằng hàm số $S(w) = 576w - w^3, \forall w \in (0;24)$

d) Độ cứng lớn nhất của miếng gỗ cắt ra được là $S_{\max} = 5321$ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Bài 4. Dựa vào thiết bị giám sát hành trình của một xe khách di chuyển trên một đường thẳng theo thời gian t (phút), với gốc tọa độ là văn phòng của công ty và chiều dương cho trước, người ta xác định được vị trí của xe tại thời điểm t (phút) được cho bởi hàm số $S(t)=\dfrac{1}{36}t^3-\dfrac{1}{6}t^2$ (km) với $t\in[0;6]$. Vận tốc của xe tại thời điểm t (phút) (với $t\in[0;6]$) là $v(t)$ (km/phút) được tính theo công thức $v(t)=S'(t)$.

a) Sau 1 phút di chuyển, xe cách văn phòng công ty một đoạn $\dfrac{5}{36}$ km.

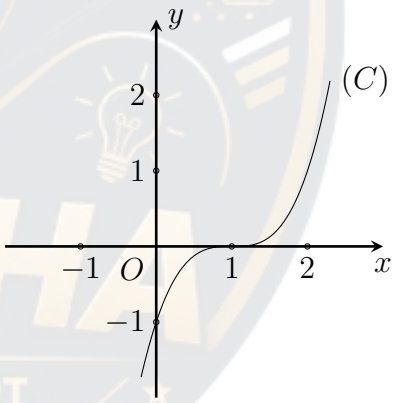
b) Vận tốc của xe tại thời điểm $t=1$ (phút) là $-\dfrac{1}{4}$ (km/phút).

c) Sau 6 phút di chuyển, xe di chuyển được quãng đường là $\dfrac{16}{9}$ km.

d) Trong khoảng thời gian từ phút thứ 2 đến phút thứ 4, tốc độ xe đang tăng dần.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khi đó $f(5)$ bằng

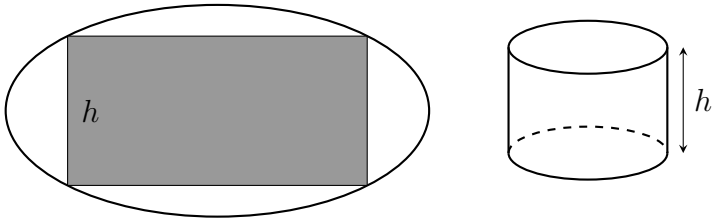


Bài 2. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=-2x+1+\dfrac{2}{x-2}$ tạo với nhau một góc α, hãy tính $\tan\alpha$ (viết kết quả ở dạng số thập phân).

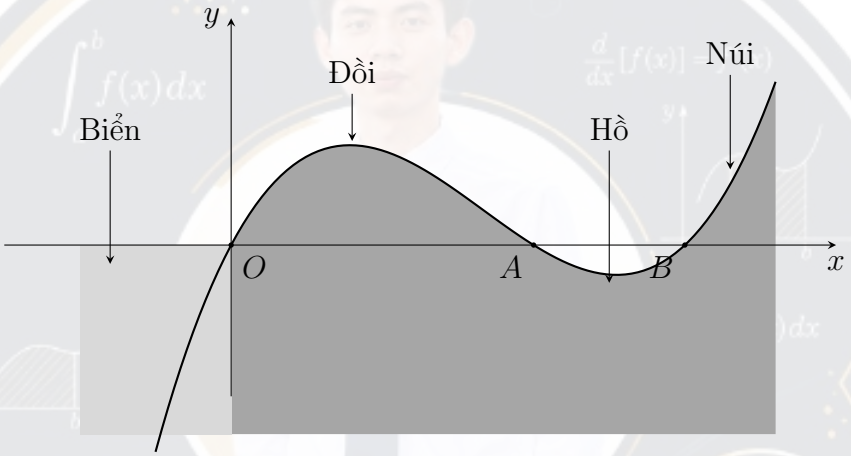
Bài 3. Cho hàm số $y=2x+1+\sqrt{x^2-4x+5}$. Biết đồ thị hàm số có hai tiệm cận xiên cắt nhau tại $I(a;b)$. Tính $a+b$.

Bài 4. Người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng là một elip với độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được

của khối trụ đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 5. Hình vẽ sau mô phỏng một mặt cắt ngang của một phần hòn đảo X, trên hòn đảo X có một lớp đất cạnh một bờ biển, phần nhô lên cao là đỉnh của một quả đồi và phần trũng tạo thành một hồ nước tự nhiên. Trên hệ tọa độ Oxy, đường cong $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mô phỏng độ cao của lớp đất bên cạnh bờ biển với trục Ox là mực nước biển, đơn vị trên các hệ trục là một kilômét. Biết khoảng cách giữa hai bên chân đồi là $OA = 2$ km, chiều dài của hồ là $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m.



Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ là bao nhiêu(làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 6. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c\left(1 - e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0{,}2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Chương III

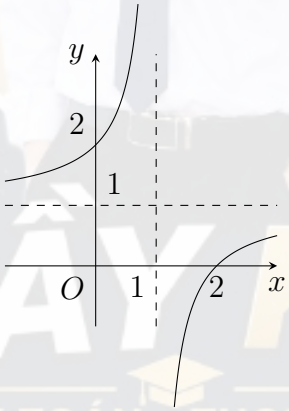
LỜI GIẢI CHI TIẾT BỘ ĐỀ TỔNG ÔN CHƯƠNG 1

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 1
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$..
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$..
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$..
(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$..

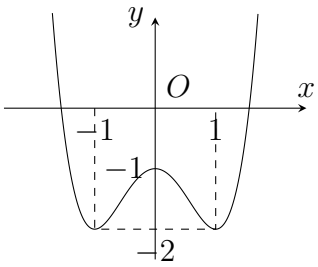
Hướng dẫn giải. Chọn C.

Nhìn đồ thị trên khoảng $(-\infty;1)$, ta thấy đồ thị đi lên từ trái qua phải nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng này.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Học hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

sau đây?



Ⓐ $x=1$.. Ⓑ $x=-2$.. Ⓒ $x=0$.. Ⓓ $x=-1$..

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$ với giá trị cực đại là $y=-1$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$..
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$..
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$..
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$..

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2+2x-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-3;1)$.

Câu 4. Cho các hàm số sau: (1) $y=-x^3+x^2-x+2$. (2) $y=-4x+3$. (3) $y=-x^4$. (4) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ 1.. Ⓑ 3.. Ⓒ 4.. Ⓓ 2..

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Xét (1) $y=-x^3+x^2-x+2$: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-3x^2+2x-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Xét (2) $y=-4x+3$: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Loại (3) $y=-x^4$: Hàm đa thức bậc chẵn **không** đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Loại (4) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ vì tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ không phải $\mathbb{R}$.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=-x^3-3x^2+1$ trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

(A) 1..
(B) -1..
(C) -3..
(D) Không tồn tại..

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Ta có $f'(x)=-3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\ (\text{n})\\ x=0\ (\text{l})\end{array}\right.$. Bảng biến thiên trên $(-\infty;-1)$:

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(-\infty;-1)} y=-3=f(-2)$.

Câu 6. Đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) $AB=\sqrt{34}$..
(B) $AB=6$..
(C) $AB=8$..
(D) $AB=\sqrt{17}$..

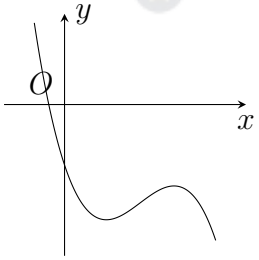
Hướng dẫn giải. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x+1=\dfrac{x+3}{x-1}$ $(x\neq 1)\Rightarrow (x+1)(x-1)=x+3\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

Do đó giao điểm của 2 đồ thị trên là $A\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right), B\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{17};-\sqrt{17})$, suy ra $AB=\sqrt{(-\sqrt{17})^2+(-\sqrt{17})^2}=\sqrt{34}$.

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

(A) $a<0;b<0;c<0;d<0$..
(B) $a<0;b>0;c<0;d<0$..
(C) $a<0;b>0;c>0;d<0$..
(D) $a>0;b>0;c>0;d<0$..

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Đây là dạng đồ thị hàm số bậc ba với $a < 0$ nên loại D.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; d)$ nằm phía dưới Ox nên $d < 0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía so với Oy nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm cùng dấu, suy ra a, c cùng dấu, do đó $c < 0$.

Điểm uốn (tâm đối xứng) của đồ thị nằm bên phải Oy nên a, b trái dấu, do đó $b > 0$.

Câu 8. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 1]$ bằng 1.

Ⓐ 5.. Ⓑ 6.. Ⓒ 4.. Ⓓ 7..

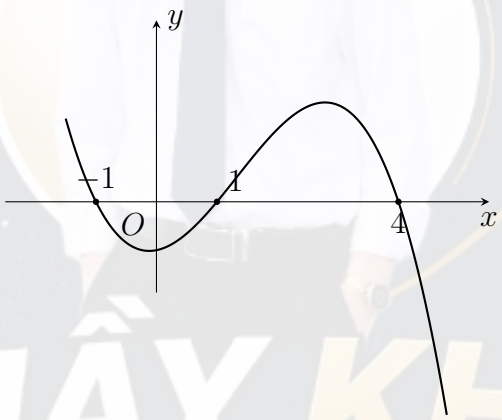
Hướng dẫn giải. Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (l)} \\ x = 0 \text{ (n)} \end{array}\right.$.

Khi đó $f(-1) = m - 4; f(0) = m; f(1) = m - 2$.

Theo đề bài, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 nên $m - 4 = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào **sai** về hàm số $y = f(x)$?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và

$(1;4)$.

Trên khoảng $(0;3)$, hàm số vừa đồng biến (trên $(0;1)$) vừa nghịch biến (trên $(1;3)$). Do đó, khẳng định C sai.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$) $\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} y=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y=5\Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có ba tiệm cận (một đứng và hai ngang).

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(2-x)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$ Trong đó:

- $x=0$ là nghiệm đơn (bội lẻ).
- $x=-1$ là nghiệm bội chẵn.
- $x=2$ là nghiệm bội lẻ.

Vì đạo hàm chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm bội lẻ, nên hàm số có 2 điểm cực trị là $x=0$ và $x=2$.

Câu 12. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 30 m/s. Ⓑ 400 m/s. Ⓒ 216 m/s. Ⓓ 54 m/s.

Hướng dẫn giải. Vận tốc của vật là $v(t)=s'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+18t$. Xét hàm số $v(t)$ trên đoạn $[0;10]$:

Ta có $v'(t) = -3t + 18$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$. Bảng biến thiên:

t	0		6		10
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	↗	54	↘	30

Dựa vào bảng biến thiên, vận tốc lớn nhất của vật trong 10 giây đầu là $v(6) = 54$ m/s.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

a) Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

b) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

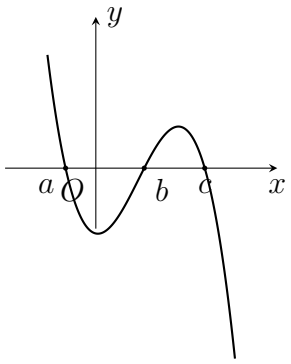
c) Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

d) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

Hướng dẫn giải.

- **a) Sai.** Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng nơi $y' > 0$, đó là $(0; 1)$ và $(3; +\infty)$.
- **b) Đúng.** Hàm số đổi dấu đạo hàm tại 3 điểm $x = 0, x = 1, x = 3$ nên có 3 điểm cực trị.
- **c) Đúng.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$, đạt được tại $x = 0$ và $x = 3$.
- **d) Đúng.** Vì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Bài 2. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ bên dưới:



a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

c) $(f(b)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.

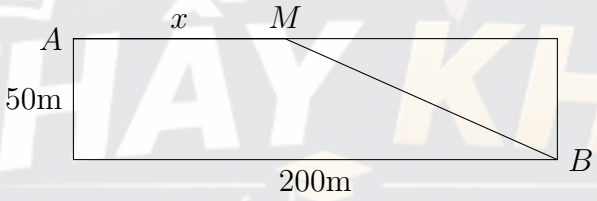
d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$-\infty$

- **a) Sai.** Trên khoảng $(-\infty;a)$, đồ thị $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành ($y'>0$) nên hàm số đồng biến.
- **b) Đúng.** Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi qua a,b,c nên hàm số có 3 điểm cực trị.
- **c) Sai.** Từ bảng biến thiên ta thấy $f(b)$ là giá trị cực tiểu, nên $f(b)<f(a)$ và $f(b)<f(c)$. Suy ra $(f(b)-f(a))<0$ và $(f(b)-f(c))<0$. Tích của chúng phải >0.
- **d) Sai.** Thông tin về $f'(x)$ chỉ cho biết hình dạng đồ thị $f(x)$, không đủ để kết luận số giao điểm với trục hoành nếu không biết giá trị cụ thể của các cực trị.

Bài 3. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200 m. Một vận động viên xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M trên cạnh dài và bơi từ M đến điểm B ở góc đối diện. Biết vận tốc chạy $4,8$ m/s, vận tốc bơi $2,4$ m/s. Gọi x (m) là khoảng cách từ A đến M $(0<x<200)$.



a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\dfrac{x}{4,8}$ giây.

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{2,4}$ giây.

c) Nếu $AM=100$ m thì tổng thời gian di chuyển từ A đến B ít hơn 1 phút.

d) Vận động viên chọn điểm M cách A khoảng 171 mét thì đến B nhanh nhất.

Hướng dẫn giải.

- **a) Đúng.** Thời gian = Quãng đường / Vận tốc $=x/4,8$.
- **b) Đúng.** Quãng đường bơi $MB=\sqrt{MC^2+CB^2}=\sqrt{(200-x)^2+50^2}$. Thời gian bơi là $MB/2,4$.
- **c) Sai.** Với $x=100$, $t=\dfrac{100}{4,8}+\dfrac{\sqrt{100^2+50^2}}{2,4}\approx 20,83+46,59=67,42$ giây >60 giây.

◈ **d) Đúng.** Xét hàm $t(x)=\dfrac{x}{4,8}+\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+2500}}{2,4}$. Đạo hàm $t'(x)=\dfrac{1}{4,8}-\dfrac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2+2500}}$

Giải $t'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{(200-x)^2+2500}=2(200-x) \Rightarrow (200-x)^2+2500=4(200-x)^2 \Rightarrow 3(200-x)^2=2500 \Rightarrow 200-x\approx 28,87 \Rightarrow x\approx 171,13$.

Bài 4. Một công ty du lịch in tạp chí. Chi phí xuất bản x cuốn là $C(x)=x^2-2000x+10^7$ (đồng). Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4000 (đồng).

a) Chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí là: $f(x)=\dfrac{x^2-2000x+10^7}{x}+4000$ (đồng).

b) Chi phí xuất bản và phát hành 5000 cuốn tạp chí là 45 triệu đồng.

c) Chi phí trung bình mỗi cuốn bắt đầu tăng khi số lượng đạt từ 3163 cuốn trở lên.

d) Chi phí trung bình thấp nhất là 3162 đồng.

Hướng dẫn giải.

◈ **a) Đúng.** Chi phí trung bình = (Chi phí xuất bản / x) + Chi phí phát hành mỗi cuốn.

◈ **b) Đúng.** $f(5000)=\dfrac{5000^2-2000\cdot 5000+10^7}{5000}+4000=9000$ đồng/cuốn. Tổng chi phí $=9000\cdot 5000=45.000.000$ đồng.

◈ **c) Đúng.** Xét $f(x)=x-2000+\dfrac{10^7}{x}+4000=x+\dfrac{10^7}{x}+2000$. Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{10^7}{x^2}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=10^7 \Rightarrow x\approx 3162,27$. Vậy từ cuốn thứ 3163 chi phí trung bình bắt đầu tăng.

◈ **d) Sai.** Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt tại $x\approx 3162$. $f(3162)\approx 3162+\dfrac{10^7}{3162}+2000\approx 8324,5$ đồng. Con số 3162 đồng là sai.

Phần III. Câu trả lời ngắn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Bài 1. Biết hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$ đạt cực đại tại $x=a$ và đạt cực tiểu tại $x=b$. Giá trị của biểu thức $M=2a-3b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$ nên suy ra $a=1, b=3$.

Khi đó $M=2a-3b=2\cdot 1-3\cdot 3=-7$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+6m$ (với m là tham số). Tính tổng bình phương các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Hướng dẫn giải.

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $A(0;6m)$ và $B\left(m;-\dfrac{1}{6}m^3+6m\right)$.

Ta có $A \in Oy$ nên $\triangle OAB$ vuông tại O khi và chỉ khi $B \in Ox \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}m^3+6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (l)} \\ m=\pm 6 \text{ (n)} \end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $6^2+(-6)^2=72$.

Bài 3. Hằng ngày mực nước của một hồ thủy điện lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian trong ngày sau t (giờ) (kể từ 8h sáng) được cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\dfrac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước quy định trước 5 tiếng đồng hồ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ, biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước?

Hướng dẫn giải.

Xét hàm số $h(t)=24t+5t^2-\dfrac{t^3}{3}$ với $8 \leq t \leq 24$.

Ta có $h'(t)=24+10t-t^2$; $h'(t)=0 \Leftrightarrow 24+10t-t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=12 \text{ (n)} \\ t=-2 \text{ (l)} \end{array}\right.$.

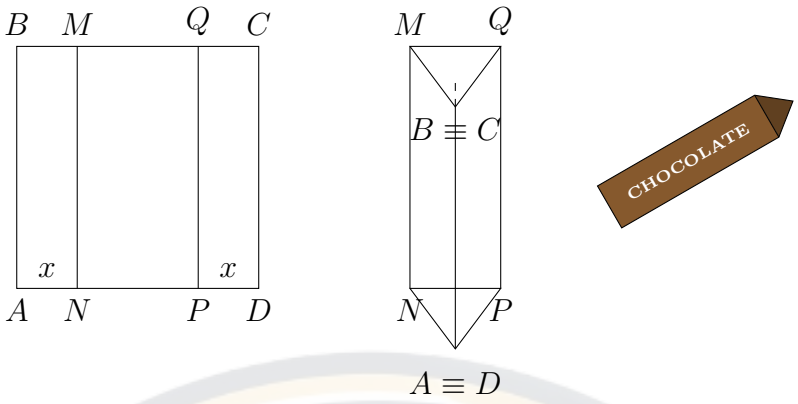
Bảng biến thiên:

t	8		12		24
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	$h_{\max}$	↘	

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ, tức là vào lúc 20 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày (vì $20-5=15$).

Bài 4. Để tạo ra phần xung quanh của một hộp kẹo sôcôla có dạng hình lăng trụ đứng (không tính hai đáy), người ta dùng một tờ giấy bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh là 15 cm. Ta gập tấm bìa theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khi đó ta có thể tạo được hộp kẹo sôcôla có thể tích lớn nhất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) centimet khối, biết thể tích của khối lăng

trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao?



Hướng dẫn giải.

Ta có một đáy của lăng trụ là tam giác cân ANP có cạnh bên bằng $AN = x$, cạnh đáy bằng $NP = 15 - 2x$ nên đường cao tam giác đó là $AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{15-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{15x - \dfrac{225}{4}}$.

Diện tích đáy là $S_{ANP} = \dfrac{1}{2}NP \cdot AH = \dfrac{1}{2}(15-2x) \cdot \sqrt{15x - \dfrac{225}{4}} = \dfrac{1}{4}(15-2x)\sqrt{60x-225}$.

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{1}{4}(15-2x)\sqrt{60x-225}$ với $x \in \left(\dfrac{15}{4}; \dfrac{15}{2}\right)$.

Ta có $S'(x) = \dfrac{1}{4}\left[-2\sqrt{60x-225} + (15-2x)\dfrac{30}{\sqrt{60x-225}}\right]$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (15-2x)\dfrac{30}{\sqrt{60x-225}} = 2\sqrt{60x-225} \Leftrightarrow 450 - 60x = 2(60x-225) \Leftrightarrow x = 5$ (nhận).

Bảng biến thiên:

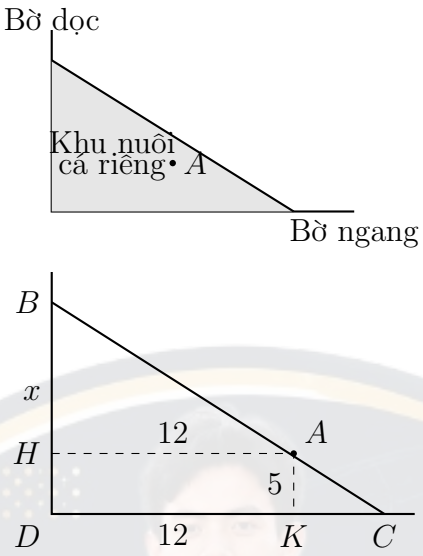
x	3,75		5		7,5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy diện tích đáy lớn nhất là $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2 nên thể tích lớn nhất của lăng trụ là:

$V = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \approx 162$ cm^3.

Bài 5. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là bao nhiêu mét vuông, biết

rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Hướng dẫn giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BD và CD. Theo đề bài ta có $AH = 12$ m, $AK = 5$ m.

Suy ra $DK = AH = 12$ m, $DH = AK = 5$ m.

Đặt $BH = x$ (m) với $x > 0$.

Ta có $AH // DC, AK // DH$ nên $\dfrac{BH}{HD} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{DK}{KC}$. Suy ra $KC = \dfrac{HD \cdot DK}{BH} = \dfrac{5 \cdot 12}{x} = \dfrac{60}{x}$ (m).

Diện tích khu nuôi cá riêng là: $S = \dfrac{1}{2}BD \cdot DC = \dfrac{1}{2}(x+5)\left(\dfrac{60}{x} + 12\right) = 6x + \dfrac{150}{x} + 60$ (m^2).

Xét hàm số $S(x) = 6x + \dfrac{150}{x} + 60$ với $x \in (0; +\infty)$.

Ta có $S'(x) = 6 - \dfrac{150}{x^2} = \dfrac{6x^2 - 150}{x^2}$; $S'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$.

Bảng biến thiên:

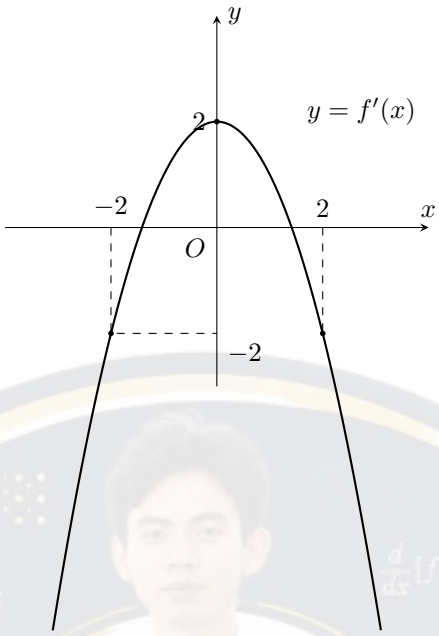
x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	120	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} S(x) = 120$ tại $x = 5$.

Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là 120 m^2.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + 6x$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ với $b - a = 4$. Khi đó giá trị của biểu

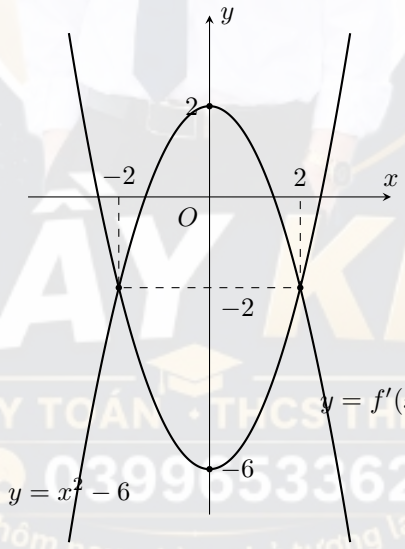
thức a^2+b^2 bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải.

Ta có $y=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+6x$ nên $y'=f'(x)-x^2+6$.

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và parabol $(P):y=x^2-6$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Từ đồ thị ta có: $y'=f'(x)-x^2+6>0\Leftrightarrow f'(x)>x^2-6\Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy hàm số $y=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+6x$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

Khi đó $a=-2,b=2$. Kiểm tra điều kiện $b-a=2-(-2)=4$ (thỏa mãn).

Giá trị biểu thức $a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 2
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+16x+32}{x+8}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x=-15$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=-12$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(4x+16)(x+8)-(2x^2+16x+32)}{(x+8)^2}=\dfrac{2x^2+32x+96}{(x+8)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2+32x+96=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-12\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-12		-8		-4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-16	↘		↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x=-4$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	9	↘	8	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

Ⓐ $y_{C\text{Đ}}=9$. Ⓑ $y_{C\text{Đ}}=2$. Ⓒ $y_{C\text{Đ}}=-2$. Ⓓ $y_{C\text{Đ}}=8$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=-2$. Do đó, giá trị cực đại của hàm số là $y(-2)=9$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{-10x-1}{5x+2}$ trên đoạn $[-12;-4]$.

Ⓐ $M=-\dfrac{13}{6}$. Ⓑ $M=-\dfrac{37}{6}$. Ⓒ $M=-\dfrac{119}{58}$. Ⓓ $M=-\dfrac{3}{58}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số xác định trên đoạn $[-12;-4]$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{-10(5x+2)-5(-10x-1)}{(5x+2)^2}=\dfrac{-15}{(5x+2)^2}<0, \forall x\in[-12;-4]$.

Do hàm số luôn nghịch biến trên đoạn $[-12;-4]$ nên giá trị lớn nhất đạt được tại đầu mút bên trái.

$M=y(-12)=\dfrac{-10(-12)-1}{5(-12)+2}=\dfrac{119}{-58}=-\dfrac{119}{58}$.

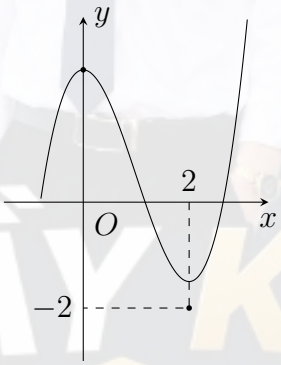
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-7^-}f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Ⓑ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
Ⓒ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.
Ⓓ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải. - Vì $\lim\limits_{x\to-7^-}f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-7$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$ nên đường thẳng $y=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=2$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Xét đáp án C: Vì $(-\infty;-1)\subset(-\infty;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ là khẳng định đúng.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Học hôm nay - Làm chủ tương lai ngày mai

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số có 2 điểm cực đại.
Ⓑ Hàm số có 2 điểm cực trị.
Ⓒ Hàm số có 2 điểm cực tiểu.
Ⓓ Hàm số có 4 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta xét sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua các điểm:

- Qua $x=1$: $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+ \Rightarrow x=1$ là điểm cực tiểu.
- Qua $x=2$: $f'(x)$ không đổi dấu $\Rightarrow x=2$ không là điểm cực trị.
- Qua $x=3$: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $- \Rightarrow x=3$ là điểm cực đại.
- Qua $x=4$: $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+ \Rightarrow x=4$ là điểm cực tiểu.

Vậy hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại (tổng 3 điểm cực trị). Đáp án C đúng.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;0)$. Ⓑ $(-\infty;2)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, trong khoảng $(0;2)$ đạo hàm $y'<0$ và hàm số liên tục trên khoảng này.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 8. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\dfrac{x+1}{2-x}$. Ⓑ $y=-x^3-3x+2025$.
Ⓒ $y=-x^3-2x^2+x+2025$. Ⓓ $y=2x^2-3x+2025$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y=-x^3-3x+2025$, ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-3x^2-3=-3(x^2+1)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì đạo hàm luôn âm trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-3)^2e^x$ trên đoạn $[2;4]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $4e$. Ⓒ e^2. Ⓓ e^4.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x)=(x-3)^2e^x$ trên đoạn $[2;4]$.

Đạo hàm $f'(x)=2(x-3)e^x+(x-3)^2e^x=e^x(x-3)(2+x-3)=(x-3)(x-1)e^x$.

Giải phương trình $f'(x)=0$ trên $[2;4]$ ta được $x=3$.

Tính các giá trị:

$f(2)=(2-3)^2e^2=e^2$.

$f(3) = (3-3)^2 e^3 = 0.$

$f(4) = (4-3)^2 e^4 = e^4.$

So sánh các giá trị trên, ta thấy giá trị lớn nhất là e^4 tại $x = 4$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$.
Ⓑ Hàm số đã cho có hai cực trị thỏa mãn $y_{CĐ} < y_{CT}$.
Ⓒ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1$.
Ⓓ Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y_{CĐ} = -2 \\ x = 3 \Rightarrow y_{CT} = 6 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	$+\infty$

Ta có $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 6$. Do đó $y_{CĐ} < y_{CT}$. Khẳng định B đúng.

Câu 11. Cho hàm số $y = x \ln x$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; e]$ bằng:

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ e. Ⓓ $e+1$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $f(x) = x \ln x$ liên tục trên $[1; e]$.

Đạo hàm: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$. Giá trị này không nằm trong đoạn $[1; e]$.

Xét giá trị tại hai đầu mút đoạn $[1; e]$:

$f(1) = 1 \ln 1 = 0.$

$f(e) = e \ln e = e.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; e]$ là 0 khi $x = 1$.

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-9x+3}{x+1}$ là đường thẳng:

Ⓐ $y = 2x - 9$. Ⓑ $y = 2x - 11$.
Ⓒ $y = 2x + 11$. Ⓓ $y = 2x + 9$.

Hướng dẫn giải. Ta thực hiện phép chia đa thức tử cho mẫu:

$2x^2 - 9x + 3 = (2x - 11)(x + 1) + 14.$

Suy ra $y = \dfrac{2x^2-9x+3}{x+1} = 2x - 11 + \dfrac{14}{x+1}$.

Do $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(2x-11)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14}{x+1}=0$, nên tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x-11$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống.

b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.

c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.

d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Hướng dẫn giải.

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng là x (lần), $(0\le x\le 30)$.

Mỗi lần tăng 100.000 đồng tương ứng với $\dfrac{1}{10}$ triệu đồng.

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là: $2+0,1x$ (triệu đồng).

Số căn hộ có người thuê là: $150-5x$ (căn hộ).

Thu nhập của công ty là: $f(x)=(2+0,1x)(150-5x)$.

Đạo hàm:

$$f'(x)=0,1(150-5x)-5(2+0,1x)=15-0,5x-10-0,5x=5-x$$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng biến thiên hoặc tính các giá trị tại biên:

$$f(0)=300;\quad f(5)=312,5;\quad f(30)=0$$

Suy ra $\max\limits_{x\in[0;30]}f(x)=f(5)=312,5$ (triệu đồng) khi $x=5$.

- Với $x=5$, thu nhập cao nhất là $312,5$ triệu đồng $=312.500.000$ đồng $\Rightarrow$ **c) đúng**.
- Giá thuê để thu nhập cao nhất là $2+0,1\cdot 5=2,5$ triệu $=2.500.000$ đồng $\Rightarrow$ **b) sai**.
- Số căn hộ thuê khi thu nhập cao nhất là $150-5\cdot 5=125$ căn hộ $\Rightarrow$ **d) đúng**.
- Khi giá thuê là 2.200.000 đồng $=2,2$ triệu đồng, ta có $2+0,1x=2,2\Rightarrow x=2$. Số căn hộ trống là $5\cdot 2=10$ căn hộ $\Rightarrow$ **a) đúng**.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$.

Hướng dẫn giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

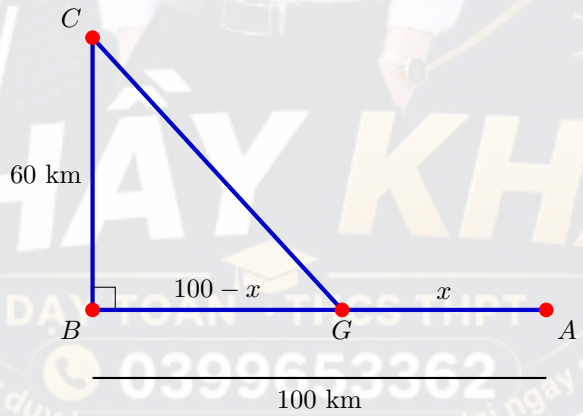
Ta có: $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

- **a) ĐÚNG:** Theo tập xác định đã tìm ở trên.
- **b) ĐÚNG:** Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.
- **c) SAI:** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$.
- **d) SAI:** Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0; 1)$. (Điểm $(2; 5)$ là điểm cực tiểu).

Bài 3. Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60km, AB = 100km$, góc $\widehat{ABC} = 90°$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.



a) Khi $x = 20km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

b) Khi $x = 20km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Hướng dẫn giải.

a) Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \le x \le 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20km \Rightarrow CG = \sqrt{3600 + (100 - 20)^2} = \sqrt{3600 + 6400} = 100km$.

Vậy **a) ĐÚNG**.

b) Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20km \Rightarrow CG = 100km$ và tổng chi phí mắc điện là:

$T = f(20) = 3000 \cdot 20 + 5000 \cdot 100 = 560.000USD$. Vậy **b) ĐÚNG**.

c) Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000 \cdot \dfrac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3000 = 5000 \cdot \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 55 \\ x = 145\,(l) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(0) \approx 583095,1895\,USD$

$f(55) = 540.000\,USD$

$f(100) = 600.000\,USD$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 55km$. Do đó **c) SAI**.

d) Chi phí mắc điện nhỏ nhất là $f(55) = 540.000\,USD$.

Vậy **d) ĐÚNG**.

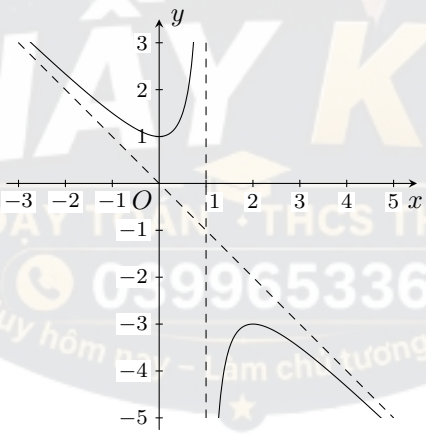
Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng -3.

d) Hàm số có đồ thị như hình vẽ bên



Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.

Tính đạo hàm của hàm số:

$$y' = \frac{-x(x - 2)}{(-x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

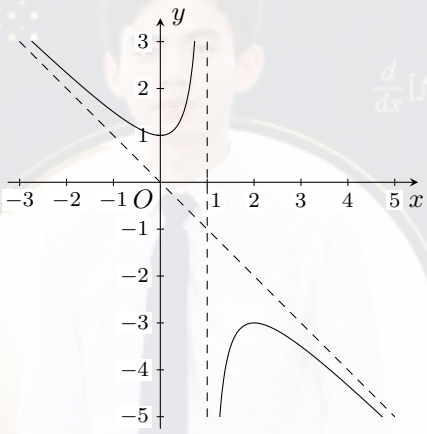
Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
			1				-3		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ là -3.

Đồ thị hàm số



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

- Tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Tiệm cận xiên là $y = -x$.
- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;1)$.
- Đồ thị có một điểm cực trị tại $x = 2$, $y = -3$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$ có đồ thị phù hợp với đồ thị hình vẽ trên.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 28. Chọn ngẫu nhiên hai số a, b phân biệt từ tập S. Tính xác suất để hai đồ thị $(C_1) : y = x^4 + 2ax^2 + 4b$ và $(C_2) : y = -\dfrac{1}{2}x^4 + bx^2 - a$ đều có 3 điểm cực trị, đồng thời chúng đều có điểm cực trị chung.

Hướng dẫn giải.

Không gian mẫu: Số phần tử của tập S là các số $\{-28; -27; -26; \ldots, 26; 27; 28\}$ gồm 57 số.

Lấy lần lượt hai số phân biệt a, b từ tập S có $57 \cdot 56$ cách.

$(C_1) : f(x) = x^4 + 2ax^2 + 4b$

$f'(x) = 4x^3 + 4ax = 4x(x^2 + a)$

Để đồ thị (C_1) có 3 điểm cực trị thì $f'(x)$ cần có 3 nghiệm phân biệt:

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x=0 \\ x^2+a=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\pm\sqrt{-a} \end{bmatrix} \quad (a<0)$

$(C_2): g(x)=-\dfrac{1}{2}x^4+bx^2-a$

$g'(x)=-2x^3+2bx=-2x(x^2-b)$

Để đồ thị (C_2) có 3 điểm cực trị thì $g'(x)$ cần có 3 nghiệm phân biệt:

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x=0 \\ x^2-b=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\pm\sqrt{b} \end{bmatrix} \quad (b>0)$

Để hai đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có đồng thời điểm cực trị chung thì thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x_1=x_2 \\ f(x_1)=g(x_2) \end{cases}$

Trường hợp 1: Dễ thấy $f(x)$ và $g(x)$ đều tồn tại điểm cực trị tại $x=0$.

Để có điểm cực trị chung thì $\begin{cases} f(0)=g(0) \\ \Leftrightarrow 4b=-a \end{cases}$

Vì $a<0, b>0$ và $|a|\le 28, |b|\le 28$, ta có:

$0<|-a|\le 28 \Rightarrow 0<|4b|\le 28 \Rightarrow 0<|b|\le 7$

$\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6;7\} \Rightarrow$ có 7 cặp số (a,b) thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{-a}=\sqrt{b} \\ f(\sqrt{-a})=g(\sqrt{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=b \\ (\sqrt{-a})^4+2a(\sqrt{-a})^2+4b=-\dfrac{(\sqrt{b})^4}{2}+b(\sqrt{b})^2-a \end{cases}$

$\Leftrightarrow (-a)^2+2a(-a)+4b=-\dfrac{b^2}{2}+b^2-a$

$\Leftrightarrow a^2-2a^2+4b=\dfrac{b^2}{2}-a \Leftrightarrow 4b-a^2=\dfrac{b^2}{2}-a$

Thay $a=-b$ vào phương trình:

$\Leftrightarrow 4b-(-b)^2=\dfrac{b^2}{2}-(-b) \Leftrightarrow 4b-b^2=\dfrac{b^2}{2}+b \Leftrightarrow \dfrac{3b^2}{2}-3b=0$

$\Leftrightarrow 3b\left(\dfrac{b}{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=0 \text{ (loại)} \\ b=2\Rightarrow a=-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ có 1 cặp số (a,b) thỏa mãn.

Vậy có tổng $7+1=8$ cặp số thỏa mãn $\Rightarrow$ xác suất thỏa mãn ycbt là: $\dfrac{8}{57\cdot 56}=\dfrac{1}{399}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x=a$ và $y=b$. Tính $a+4b$?

Hướng dẫn giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{5x-3}{2x+6}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{5x-3}{2x+6}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x-3}{2x+6}=\dfrac{5}{2}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x-3}{2x+6}=\dfrac{5}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x=-3$ và $y=\dfrac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang.

Như vậy, $a=-3; b=\dfrac{5}{2} \Rightarrow a+4b=-3+4\cdot\dfrac{5}{2}=7$.

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{5x^2-6x+9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C=a+3b$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Ta có $f(x)=5x-1+\dfrac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x=1$ và $y=5x-1$ tương ứng là TCĐ và TCX. Tâm đối xứng I là giao điểm của hai tiệm cận này.

Tại $x=1 \Rightarrow y=5(1)-1=4$. Suy ra $a=1, b=4 \Rightarrow C=1+3\cdot 4=13$.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C) và $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T). Số giao điểm của (C) với (T) là?

Hướng dẫn giải.

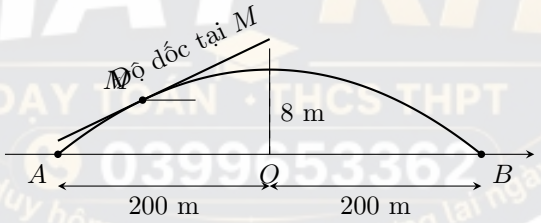
Xét phương trình hoành độ giao điểm: (ĐK $x\neq 1$)

$$x^3-3x+2=\frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2=\frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2-\frac{x+2}{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\cdot\left((x-1)^2-\frac{1}{x-1}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ (x-1)^3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(TM) \\ x=2(TM) \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Bài 5. Hình vẽ dưới đây mô tả một cây cầu vượt có mặt cắt đứng là một phần parabol nối hai điểm A, B và nhận đường trung trực của đoạn AB làm trục đối xứng, $AB=400m$. Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8m$. Xét tiếp tuyến Δ tại điểm M trên mặt cầu, người ta quy ước $\tan(\Delta, d)$ là độ dốc tại M của mặt cầu, với d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B. Độ dốc lớn nhất của mặt cầu là bao nhiêu?



Đáp số: 0,08

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ O là trung điểm của đoạn AB, trục Ox trùng với đường thẳng AB, trục Oy là trục đối xứng của parabol hướng lên trên.

- Theo giả thiết, ta có: $A(-200;0)$ và $B(200;0)$.
- Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8m$ nên tọa độ đỉnh là $I(0;8)$.

Phương trình của parabol có dạng: $y=ax^2+8$.

Vì parabol đi qua điểm $B(200;0)$ nên ta có:

$$0=a\cdot 200^2+8 \Leftrightarrow 40000a=-8 \Leftrightarrow a=-\frac{8}{40000}=-\frac{1}{5000}$$

Vậy phương trình mặt cắt của cây cầu là: $y = -\dfrac{1}{5000}x^2 + 8$ với $x \in [-200; 200]$.

Độ dốc của mặt cầu tại điểm $M(x_0; y_0)$ là trị tuyệt đối hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đó:

$$\text{Độ dốc } = |y'(x_0)| = \left|-\frac{2}{5000}x_0\right| = \frac{1}{2500}|x_0|$$

Vì $x_0 \in [-200; 200]$ nên độ dốc lớn nhất khi $|x_0|$ đạt giá trị lớn nhất, tức là tại hai đầu cầu A hoặc B ($|x_0| = 200$).

Độ dốc lớn nhất là:

$$\text{Max độ dốc} = \frac{1}{2500} \cdot 200 = \frac{200}{2500} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Độ dốc lớn nhất của mặt cầu là $0,08$.

Bài 6. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Lợi nhuận của doanh nghiệp khi phải chịu mức thuế phụ thu t trên mỗi đơn vị sản phẩm được tính bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí và tiền thuế:

$$P(x) = f(x) - g(x) - t \cdot x$$

$$P(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x + 50) - t \cdot x$$

$$P(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$$

Để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất (với mức thuế t cố định), ta tìm cực trị của hàm $P(x)$:

$$P'(x) = -4x + 560 - t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{560 - t}{4} = 140 - \frac{t}{4}$$

Vì $0 < t < 300$ nên $65 < x < 140$, thỏa mãn điều kiện $0 < x \leq 2000$. Do đó, với mỗi mức thuế t, doanh nghiệp sẽ sản xuất số lượng sản phẩm là $x = 140 - \dfrac{t}{4}$.

Số tiền thuế phụ thu mà nhà nước nhận được là:

$$T(t) = t \cdot x = t\left(140 - \frac{t}{4}\right) = 140t - \frac{t^2}{4}$$

Để số tiền thuế nhà nước nhận được lớn nhất, ta xét hàm số $T(t)$ trên khoảng $(0; 300)$:

$$T'(t) = 140 - \frac{t}{2}$$

Cho $T'(t) = 0 \Leftrightarrow 140 - \dfrac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 280$.

Dễ thấy hàm số $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2,8$ (triệu đồng).

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây.

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Hàm số đồng biến khi $y'>0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\x\in D\setminus\{0;2\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(2;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	-3		-1		0		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $5M-2m$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 15. Ⓑ 3. Ⓒ 17. Ⓓ -15.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, trên đoạn $[-1;2]$, ta thấy các giá trị của hàm số biến thiên như sau: từ 3 giảm xuống 0, rồi tăng lên 2, sau đó giảm xuống 1.

- Giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;2]$ là $M=3$ (đạt được tại $x=-1$).

- Giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ là $m=0$ (đạt được tại $x=0$).

Khi đó, giá trị của biểu thức là: $5M-2m=5\cdot3-2\cdot0=15$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính vận tốc chất điểm đạt được tại thời điểm $t=2$.

Ⓐ $\dfrac{21}{4}$. Ⓑ $\dfrac{45}{4}$. Ⓒ 9. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t được tính bởi đạo hàm của quãng

đường theo thời gian:

$$v(t) = s'(t) = (-t^3 + 6t^2)' = -3t^2 + 12t.$$

Tại thời điểm $t = 2$, vận tốc của chất điểm là:

$$v(2) = -3 \cdot (2)^2 + 12 \cdot 2 = -12 + 24 = 12.$$

Câu 4. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.
Ⓑ $y = x^2 + 2x$.
Ⓒ $y = x^3 - x^2 + x$.
Ⓓ $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Hướng dẫn giải. Để một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì trước hết nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

- Đáp án A: Hàm số không xác định tại $x = 2$ nên loại.

- Đáp án B: Hàm bậc hai $y = x^2 + 2x$ là một parabol, có khoảng đồng biến và nghịch biến nên loại.

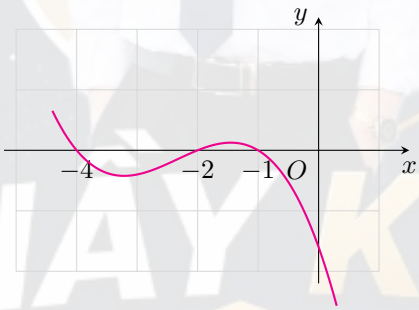
- Đáp án C: Xét $y = x^3 - x^2 + x$, ta có $y' = 3x^2 - 2x + 1$.

Phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (-1)^2 - 3 \cdot 1 = -2 < 0$. Vì $a = 3 > 0$ và $\Delta' < 0$ nên $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (Chọn).

- Đáp án D: Hàm bậc bốn trùng phương luôn có các khoảng đồng biến và nghịch biến khác nhau nên loại.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là



Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 0.
Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta xác định các khoảng dấu của $f'(x)$ như sau:

- $f'(x) > 0$ trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $(-2; -1)$.
- $f'(x) < 0$ trên các khoảng $(-4; -2)$ và $(-1; +\infty)$.

Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là điểm mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm. Quan sát đồ thị, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua các điểm $x = -4$ và $x = -1$.

Vậy hàm số có 2 điểm cực đại.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 9x + 15)e^x$ trên đoạn $[0; 9]$.

Ⓐ $25e^{10}$.
Ⓑ $15e^9$.
Ⓒ $\dfrac{25}{e}$.
Ⓓ $-3e^6$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x)=(x^2-9x+15)e^x$ trên $[0;9]$.

Đạo hàm: $f'(x)=(2x-9)e^x+(x^2-9x+15)e^x=(x^2-7x+6)e^x$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-7x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;9] \\ x=6\in[0;9] \end{array}\right.$

Tính giá trị của hàm số tại các điểm đầu mút và các điểm cực trị:

$f(0)=(15)\cdot e^0=15$.

$f(1)=(1-9+15)\cdot e^1=7e$.

$f(6)=(36-54+15)\cdot e^6=-3e^6$.

$f(9)=(81-81+15)\cdot e^9=15e^9$.

So sánh các giá trị trên, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;9]$ là $-3e^6$ (đạt được tại $x=6$).

Câu 7. Bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $-\frac{2}{3}$

Ⓐ $y=\dfrac{2x-3}{3x-1}$.

Ⓑ $y=\dfrac{2x+3}{-3x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{2x-1}{4-3x}$.

Ⓓ $y=\dfrac{-2x-3}{-3x-1}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên ta có các đặc điểm sau:

- Đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{1}{3}$. Loại các phương án A (TCĐ $x=1/3$) và C (TCĐ $x=4/3$).
- Đường tiệm cận ngang là $y=-\dfrac{2}{3}$.
- Hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định ($y'>0$).

- Xét phương án B: $y=\dfrac{2x+3}{-3x-1}$.

Tiệm cận ngang là $y=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Đạo hàm $y'=\dfrac{2(-1)-3(-3)}{(-3x-1)^2}=\dfrac{7}{(-3x-1)^2}>0$ (thỏa mãn).

- Xét phương án D: $y=\dfrac{-2x-3}{-3x-1}$. Tiệm cận ngang là $y=\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}$ (loại).

Vậy hàm số tương ứng với bảng biến thiên là $y=\dfrac{2x+3}{-3x-1}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$. Biết hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2, đồng thời $0<x_1<x_2$. Chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ $a>0, b>0, c>0$.
Ⓑ $a<0, b>0, c>0$.
Ⓒ $a>0, b<0, c>0$.
Ⓓ $a<0, b>0, c<0$.

Hướng dẫn giải.

Do hàm đã cho có $x_{CT}<x_{C\text{Đ}}$ $(x_1<x_2)$ nên hệ số $a<0$ (xem 6 dạng đồ thị của hàm số bậc ba).

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Do $0<x_1<x_2$ nên $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}>0\Rightarrow a,c$ cùng dấu, do đó $c<0$.

Do $0<x_1<x_2$ nên $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow a,b$ trái dấu. Do đó $b>0$.

Câu 9. Một vật xuất phát từ A chuyển động thẳng và nhanh dần đều với quãng đường $s(t)=t+t^2$ (m). Tính vận tốc tại thời điểm mà vật đó cách A một khoảng 20 m (giả sử thời điểm vật xuất phát từ A tương ứng với $t=0$).

Ⓐ 12 m/s.
Ⓑ 11 m/s.
Ⓒ 10 m/s.
Ⓓ 9 m/s.

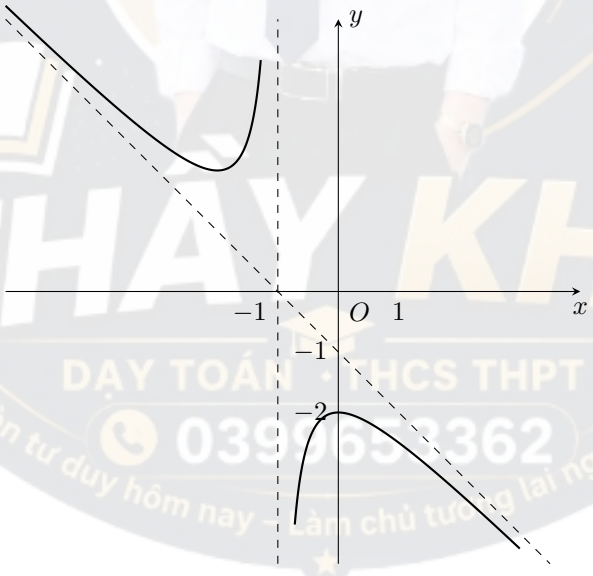
Hướng dẫn giải.

Ta có $s(t)=20\Leftrightarrow t^2+t=20\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4\,(n) \\ t=-5\,(l) \end{array}\right.$.

Suy ra thời điểm mà vật cách A một khoảng 20 m là $t=4$ s.

Vận tốc $v(t)=s'(t)=2t+1$ (m/s), suy ra tại thời điểm $t=4$ s là $v(4)=9$ (m/s).

Câu 10. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số ở các phương án sau?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1: (Thuộc hình dáng đồ thị) Nhìn dạng đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $am<0$ nên chọn ngay được đáp án **A**.

Cách 2:

- Tiệm cận đứng $x=-1$ nên loại **C**.
- Đồ thị qua điểm $(0;-2)$ nên loại **B**, **D**.

Câu 11. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+2}$?

Ⓐ $y=2x$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=2x-7$. Ⓓ $x=-2$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+2}=2x-7+\dfrac{15}{x+2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=2x-7$.

Câu 12. Hàm số $y=-x^3+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;4)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$.

a) Điểm cực tiểu của hàm số là $x=1$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;5]$ là 111.

d) Gọi A,B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng 2 với $C(-1;2)$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.

b) Sai

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Đúng

Trên đoạn $[-1;5]$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (-1;5) \\ x = 1 \in (-1;5) \end{array}\right.$

Khi đó $f(-1) = 3, f(1) = -1, f(5) = 111$. Vậy $\max\limits_{[-1;5]} y = 111 = f(5)$.

d) Sai

Ta có điểm cực đại $A(-1;3)$, điểm cực tiểu $B(1;-1)$ và $C(-1;2)$.

Cách 1: Áp dụng công thức: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;-4) \\ \overrightarrow{AC} = (0;-1) \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|ad-bc| = \dfrac{1}{2}|2\cdot(-1)-(-4)\cdot 0| =$ 1.

Cách 2: Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1$.

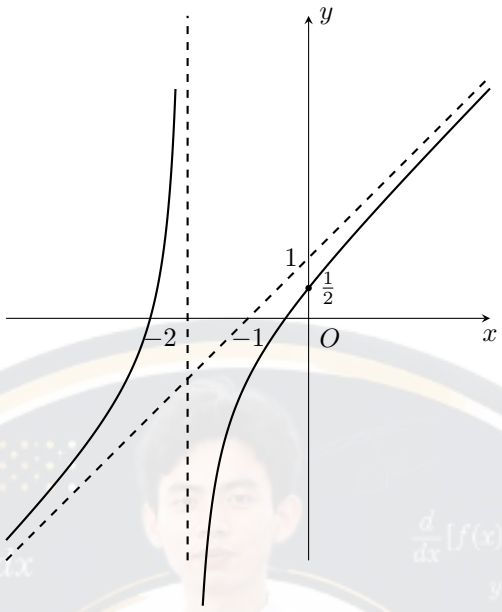
$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{2\cdot 0+(-4)\cdot(-1)}{2\sqrt{5}\cdot 1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\sin\widehat{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5} = 1$.

THẦY KHA
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) $c=1$.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-1$.

c) Hàm số có dạng $y=x+1+\dfrac{d}{x+2}$ với $d>0$.

d) $T=2a+3b-c=10$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Xét hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+2}$. Nhìn đồ thị ta thấy tiệm cận đứng $x=-2$, nên ta có phương trình: $-\dfrac{2}{c}=-2\Leftrightarrow c=1$.

b) Sai

Gọi $\Delta: y=mx+n$ là tiệm cận xiên của đồ thị. Nhìn đồ thị ta thấy Δ đi qua 2 điểm là $A(-1;0)$ và $B(0;1)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-m+n=0\\ n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$. Vậy $\Delta: y=x+1$.

c) Sai

Dựa vào công thức hàm số ta có đồ thị hàm số đi qua điểm $C\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Do tiệm cận xiên là $\Delta: y=x+1$ nên hàm số đã cho có dạng:

$$y=x+1+\frac{d}{x+2}\Leftrightarrow y=\frac{x^2+3x+2+d}{x+2}$$

Suy ra $\dfrac{ax^2+bx+1}{x+2}=\dfrac{x^2+3x+2+d}{x+2}$.

Đồng nhất 2 vế ta được: $a=1$, $b=3$, $2+d=1\Rightarrow d=-1<0$.

Vậy $y=x+1-\dfrac{1}{x+2}$ với $d<0$.

d) Đúng

Ta có $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$; với $a=1, b=3, c=1$.

Vậy $T=2a+3b-c=2(1)+3(3)-1=10$.

Bài 3. Một cửa hàng bán vải thiều với giá bán là 30000 đồng/1kg. Giá nhập vào là 16000 đồng/1kg. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/1kg thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10 kg.

a) Nếu giữ nguyên giá ban đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1400000 đồng.

b) Nếu giá bán là 20000 đồng/1kg, cửa hàng bán được 250 kg/ngày.

c) Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán $(16<x<30)$, khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x)=(x-16)(400-10x)$.

d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1600000 đồng.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là $(30000-16000)\cdot 100=1400000$ đồng.

b) Sai

Với giá bán 20000 đồng/1kg, tức là đã giảm 10000 đồng so với giá cũ, khi đó số vải thiều bán được tăng thêm $10\cdot 10=100$ kg, nên cửa hàng bán được $100+100=200$ kg/ngày.

c) Đúng

Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán $(16<x<30)$.

Khi đó số kg vải thiều bán được sẽ là $100+(30-x)\cdot 10=400-10x$ (kg).

Lợi nhuận thu được theo ngày là: $f(x)=(x-16)(400-10x)$ (nghìn đồng).

d) Sai

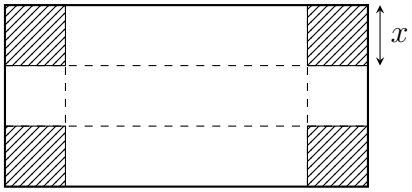
Xét hàm số $f(x)=(x-16)(400-10x)=-10x^2+560x-6400$ với $16<x<30$.

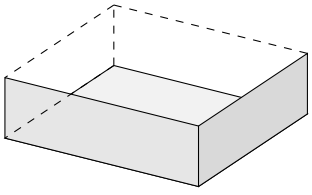
Đây là hàm số bậc hai với $a=-10<0$ nên có:

$\max\limits_{(16;30)} f(x)=f(28)=-\dfrac{\Delta}{4a}=1440$ khi $x=-\dfrac{b}{2a}=28$ (thỏa mãn $16<x<30$).

Vậy lợi nhuận tối đa là 1440 nghìn đồng/ngày = 1.440.000 đồng khi giá bán là 28 nghìn đồng/1kg.

Bài 4. Một tấm kim loại hình chữ nhật có kích thước 3m × 8m. Người ta cắt mỗi góc một hình vuông có cạnh là x (m) để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:





a) Hình vuông được cắt ra ở mỗi góc có cạnh x thỏa $0<x<\dfrac{3}{2}$ (m).

b) Diện tích mặt đáy của chiếc hộp là $S=(8-2x)(3-2x)$ (m^2).

c) Thể tích của chiếc hộp là $V=4x^3+22x^2+24x$ (m^3).

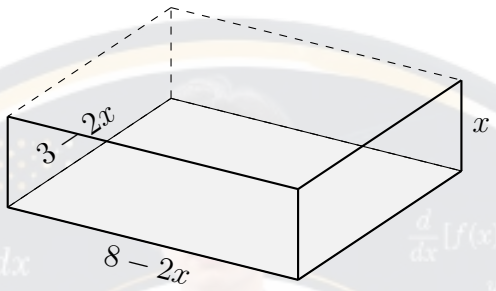
d) Chiếc hộp có thể tích lớn nhất bằng $\dfrac{2}{3}$ (m^3).

Hướng dẫn giải.

a) Đúng

Do chiều rộng của tấm kim loại hình chữ nhật là 3 (m) và phải cắt ra 2 hình vuông có cạnh x (m) dọc theo chiều rộng này nên ta có $0 < 2x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{3}{2}$.

b) Đúng



Ta có chiều dài, chiều rộng, chiều cao của chiếc hộp lần lượt là $8-2x, 3-2x, x$ (m).

Đáy của chiếc hộp là hình chữ nhật có diện tích là $S = (8-2x)(3-2x)$ (m^2).

c) Sai

Thể tích của chiếc hộp là: $V = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$ (m^3).

d) Sai

Xét hàm số: $V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$ trên $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 44x + 24$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3 & (l) \\ x = \dfrac{2}{3} & (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{3}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$V_{\max}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của $V(x)$ trên $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ là $V\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 7,41$ (m^3).

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4ax$.

Do đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $(1;2)$ nên ta có $\begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^4 - 2a.1^2 + b = 2 \\ 4.1^3 - 4a.1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Khi đó ta có hàm số là $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $A(-1;2)$, $B(1;2)$ và một điểm cực đại $C(0;3)$.

Vậy khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu là: $AC = BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Bài 2. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu (đơn vị: m/s) trong 18 giây đầu tiên đó?

Hướng dẫn giải.

Ta có vận tốc tức thời là: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t + 1$.

Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 36t + 1$ với $t \in [0;18]$. Ta có $v'(t) = -6t + 36$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Khi đó $v(0) = 1$; $v(6) = 109$; $v(18) = -323$. Suy ra $\max\limits_{[0;18]} v(t) = v(6) = 109$.

Vậy vận tốc tức thời đạt giá trị lớn nhất bằng 109 m/s khi $t = 6$ giây.

Bài 3. Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng $(1 \le x \le 200)$ thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải.

Hàm lợi nhuận: $\pi(x) = R(x) - C(x) = 60x - (0,001x^3 + 30x + 10) = -0,001x^3 + 30x - 10$.

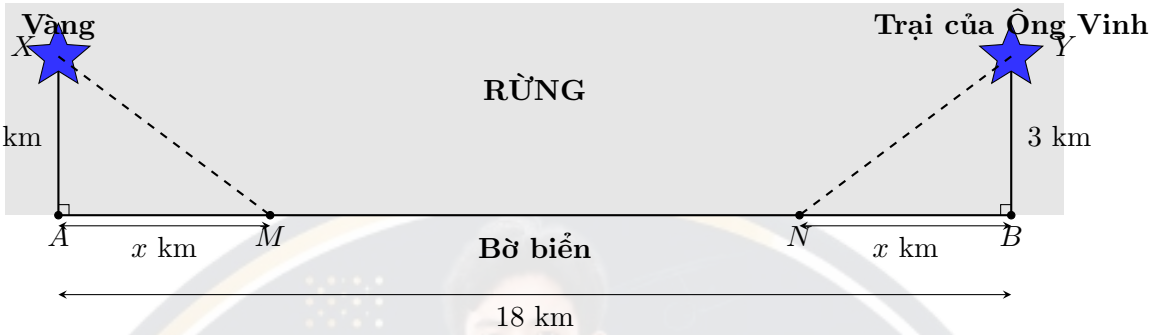
Đạo hàm: $\pi'(x) = -0,003x^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \in [1;200] \\ x = -100 \notin [1;200] \end{array}\right.$.

Ta có: $\pi(1) = 19,999$; $\pi(100) = 1990$; $\pi(200) = -2010$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là 1990 triệu đồng khi chế biến

100 tấn nguyên liệu.

Bài 4. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở X, cách điểm A là 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y, cách điểm B là 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và XA vuông góc với bờ biển, YB vuông góc với bờ biển. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t+2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất, thời gian di chuyển t về đến trại phải là thấp nhất (do hàm $y(t) = 50\log(t+2)$ là hàm đồng biến với $t > 0$).

Gọi x là độ dài quãng đường AM (km), với điều kiện $0 < x < 9$.

Quãng đường ông Vinh di chuyển gồm 3 đoạn: XM, MN, và NY.

Áp dụng định lý Pytago, ta có độ dài các quãng đường:

- Quãng đường trong rừng: $XM = NY = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$ (km).
- Quãng đường trên bờ biển: $MN = AB - AM - NB = 18 - x - x = 18 - 2x$ (km).

Thời gian di chuyển tổng cộng là

$$t(x) = (\text{thời gian đi } XM) + (\text{thời gian đi } MN) + (\text{thời gian đi } NY)$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{18-2x}{13} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{5}$$

$$t(x) = \frac{2\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{18-2x}{13}$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $t(x)$ trên khoảng $(0, 9)$.

Xét đạo hàm $t'(x)$:

$$t'(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - \frac{2}{13} = \frac{2x}{5\sqrt{9+x^2}} - \frac{2}{13}$$

Cho $t'(x) = 0$:

$$\frac{2x}{5\sqrt{9+x^2}} = \frac{2}{13} \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{9+x^2}$$

Bình phương hai vế (với $x > 0$):

$$169x^2 = 25(9 + x^2) \Leftrightarrow 169x^2 = 225 + 25x^2 \Leftrightarrow 144x^2 = 225 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{144}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{225}{144}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \quad \text{(thỏa mãn } 0 < x < 9\text{)}.$$

Bảng biến thiên của $t(x)$ trên khoảng $(0, 9)$:

x	0		$\frac{5}{4}$		9
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{168}{65}$	$\searrow$	$\frac{162}{65}$	$\nearrow$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, thời gian di chuyển nhỏ nhất là $t_{\min} = t\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$ giờ.

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất tương ứng là

$$y_{\min} = 50\log(t_{\min} + 2) = 50\log\left(\frac{162}{65} + 2\right) = 50\log\left(\frac{292}{65}\right) \approx 32,6$$

Bài 5. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tìm a.

Hướng dẫn giải. Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20 \cdot 15t = 300t$ (gam).

Thế tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1\,000 + 20t$ (lít).

Do đó nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \dfrac{300t}{1\,000 + 20t} = \dfrac{30t}{100 + 2t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{30t}{100 + 2t} = \dfrac{30}{2} = 15$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = 15$.

Vậy $a = 15$.

Bài 6. Một kỹ sư đang thiết kế viền (biên dạng) của một chi tiết kỹ thuật cần phải chịu lực nén tối ưu. Viền này được mô hình hóa trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Biên dạng cong của chi tiết được mô tả bởi đồ thị (C) của một hàm số phân thức bậc hai trên bậc một, có dạng tổng quát là $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, với $m = 1$. Biết đồ thị (C) này cắt Oy tại điểm $A(0; 1)$, qua điểm $B(-1; \frac{1}{2})$, có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và có một điểm cực trị là $C(2; 5)$. Khi đó, $a + b - n$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Hàm số có dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ (do $m = 1$).

- Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow n = -1$.

◈ Đồ thị hàm số qua $A(0;1) \Rightarrow \dfrac{c}{-1} = 1 \Rightarrow c = -1$.

◈ Đồ thị hàm số qua $B\left(-1;\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{a-b-1}{-2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a - b = 0 \quad (1)$.

◈ Đồ thị hàm số qua $C(2;5) \Rightarrow \dfrac{4a+2b-1}{1} = 5 \Rightarrow 4a + 2b = 6 \quad (2)$.

Từ (1) và (2), ta có $a = 1$ và $b = 1$.

Lúc này đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Với $x = 2$ thì $y' = 0$ (thỏa mãn).

Từ đó ta có $a + b - n = 1 + 1 - (-1) = 3$.

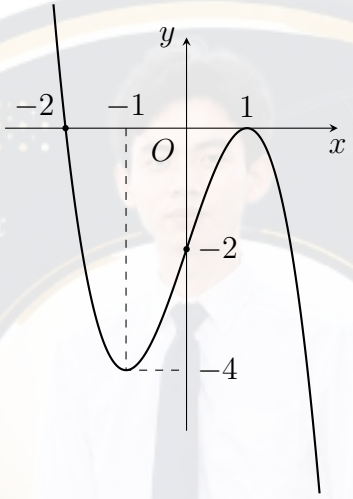
THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 4
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-2;1)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị ta thấy trên khoảng $(-1;1)$, đồ thị đi lên từ trái qua phải nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng này.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

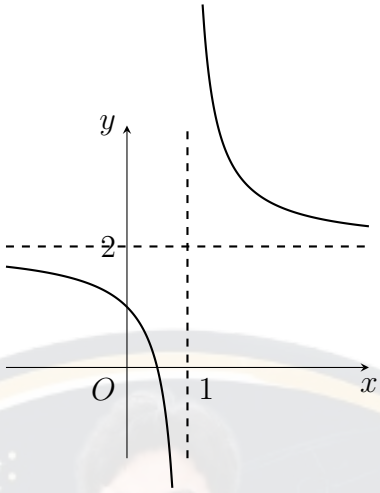
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	4	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				0		

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=2$.

Câu 3. Xác định a, b, c để hàm số $y = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Ⓐ $a = 2, b = 1, c = -1$.
Ⓑ $a = 2, b = 1, c = 1$.
Ⓒ $a = 2, b = 2, c = -1$.
Ⓓ $a = 2, b = -1, c = 1$.

Hướng dẫn giải. Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} -\dfrac{c}{b} = 1 \\ \dfrac{a}{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 2b \end{cases}$. Chỉ có phương án A thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-38	$\nearrow$	$\dfrac{14}{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số trên cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Vẽ đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) ta thấy nó cắt đồ thị hàm số đã cho tại 4 điểm vì $y_{CT1} = -38 < 0$, $y_{CĐ} = \frac{14}{3} > 0$ và $y_{CT2} = -2 < 0$.

Câu 5. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ lần lượt là:

Ⓐ $x = 3, y = 1$.
Ⓑ $x = 1, y = 3$.
Ⓒ $x = -1, y = 3$.
Ⓓ $x = 3, y = -1$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng là nghiệm của mẫu số: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Tiệm cận ngang là: $y = \dfrac{3}{1} = 3$.

Câu 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính $M.m$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ -1. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Ta có: $y' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;2] \Rightarrow \begin{cases} M = y(2) = -\dfrac{1}{3} \\ m = y(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow M.m = 1.$

Câu 7. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

Ⓐ $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Ⓑ $y = x^3 - 3x + 2$.

Ⓒ $y = \dfrac{1}{x^4+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

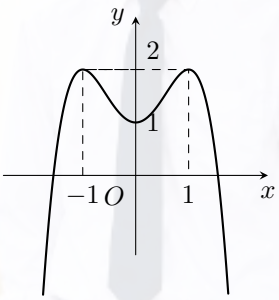
Hướng dẫn giải. Chọn A.

Loại B vì hàm đa thức không có tiệm cận đứng.

Loại C, D vì là hàm phân thức với mẫu vô nghiệm.

Kiểm tra đáp án A: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như hình vẽ bên dưới?



Ⓐ $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Ⓒ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

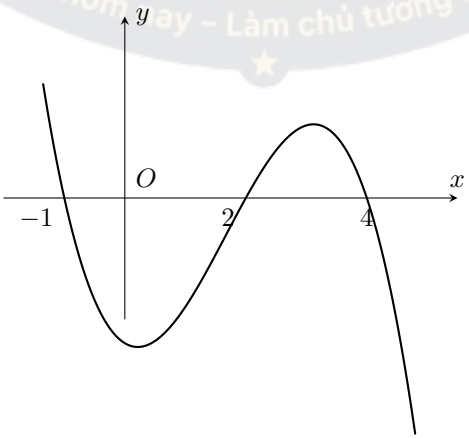
Hướng dẫn giải. Chọn C.

Đồ thị này không phải dạng đồ thị hàm số bậc ba nên loại A, D.

Đồ thị có nhánh bên phải đi xuống nên hệ số cao nhất phải âm, do đó loại B.

Đồ thị của hàm số trùng phương thì đây là đồ thị của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0, b > 0$ nên chọn C.

Câu 9. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên dưới:



Hàm số $g(x) = f(1 - 3x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;+\infty)$. Ⓒ $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f(1-3x)$.

Ta có $g'(x)=-3f'(1-3x)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(1-3x)=0\Leftrightarrow \begin{cases}1-3x=-1\\1-3x=2\\1-3x=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{3}\\x=-\frac{1}{3}\\x=-1\end{cases}$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 289(m/s). Ⓑ 105(m/s). Ⓒ 111(m/s). Ⓓ 487(m/s).

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t)=s'=-6t^2+48t+9$. Xét hàm số $v(t)=-6t^2+48t+9, t\in[0;10]$.

Ta có $v'(t)=-12t+48=0\Leftrightarrow t=4$ (Nhận). Ta có $\begin{cases}v(0)=9\\v(4)=105\\v(10)=-111\end{cases}\Rightarrow \max_{t\in[0;10]} v(t)=v(4)=105$.

Câu 11. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó x (mg) và $x>0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

Ⓐ 15mg. Ⓑ 30mg. Ⓒ 40mg. Ⓓ 20mg.

Hướng dẫn giải. Ta có: $G(x)=0,25x^2(30-x)=\frac{15}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$

Đạo hàm $G'(x)=15x-\frac{3}{4}x^2$; $G'(x)=0\Leftrightarrow 15x-\frac{3}{4}x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\text{ (loại)}\\x=20\text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		↗	1000	↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20 mg.

Câu 12. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

Ⓐ $N(1;-10)$. Ⓑ $Q(-1;10)$. Ⓒ $M(0;-1)$. Ⓓ $P(1;0)$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Thực hiện phép chia đa thức y cho y', ta có:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 6x - 9) - 8x - 2$$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A, B là $d : y = -8x - 2$.

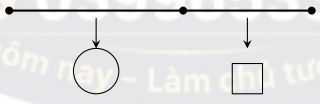
Kiểm tra tọa độ các điểm:

- Thay tọa độ $N(1;-10)$ vào phương trình d: $-10 = -8 \cdot 1 - 2 = -10$ (đúng).
- Thay tọa độ $Q(-1;10)$ vào phương trình d: $10 = -8(-1) - 2 = 6$ (sai).
- Thay tọa độ $M(0;-1)$ vào phương trình d: $-1 = -8 \cdot 0 - 2 = -2$ (sai).
- Thay tọa độ $P(1;0)$ vào phương trình d: $0 = -8 \cdot 1 - 2 = -10$ (sai).

Vậy điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB. Chọn đáp án A.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn: đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông $(a > x > 0)$.



a) Bán kính đường tròn: $r = \dfrac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\dfrac{(4+\pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \dfrac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải. **a) Sai**

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$.

b) Đúng

Do x là độ dài của đoạn dây uốn thành hình tròn nên chiều dài đoạn còn lại là $a-x$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\dfrac{a-x}{4}$. Diện tích hình vuông: $\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Đúng

Diện tích hình tròn: $\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích hai hình: $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2 = \dfrac{4x^2+(a-x)^2\pi}{16\pi} = \dfrac{(4+\pi)x^2-2a\pi x+\pi a^2}{16\pi}$.

d) Sai

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{(4+\pi)x^2-2a\pi x+\pi a^2}{16\pi}$ với $0<x<a$.

Ta có $S'(x) = \dfrac{(4+\pi)x-a\pi}{8\pi}$; $S'(x)=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\pi}{4+\pi}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{a\pi}{4+\pi}$		a
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;a)$ tại $x = \dfrac{a\pi}{4+\pi}$.

Bài 2. Một vật được làm nóng đến $u_0 = 100°\text{C}$ và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là $T = 30°\text{C}$. Nhiệt độ của vật được làm mát tại thời điểm t (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức sau: $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$ với k là hằng số.

a) Nhiệt độ $u(t)$ của vật tại thời điểm t là $u(t) = 30 + 70e^{kt}$.

b) Nếu hằng số $k = -0,05$ thì nhiệt độ của vật sau 10 phút gần bằng $60°\text{C}$.

c) Nếu nhiệt độ của vật là $80°\text{C}$ sau 5 phút thì hằng số k có giá trị gần bằng $-0,0673$.

d) Nếu nhiệt độ của vật là $80°\text{C}$ sau 5 phút thì nhiệt độ của vật sau 18 phút gần bằng $51°\text{C}$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Ta có $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt} = 30 + (100-30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt}$.

b) Sai

Với $k = -0,05$, ta có $u(10) = 30 + 70e^{-0,05\cdot 10} \approx 72°\text{C}$.

c) Đúng

Ta có $u(5) = 80 \Leftrightarrow 30 + 70e^{5k} = 80 \Leftrightarrow e^{5k} = \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = \ln\dfrac{5}{7} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{5}{7} \approx -0,0673$.

d) Đúng

Nhiệt độ của vật sau 18 phút là: $u(18) = 30 + 70e^{18\cdot\frac{1}{5}\ln\frac{5}{7}} \approx 51°\text{C}$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực thỏa mãn đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$, đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đi qua điểm $A(2;3)$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) $f(2) = 3$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(2;1)$

d) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 1

Hướng dẫn giải. a) Do tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ nên tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;3)$ nên $f(2)=3$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận và có tọa độ là $(1;2)$.

d) Từ giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{x}=1 \\ \dfrac{a}{c}=2 \\ \dfrac{2a+b}{2c+d}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=-c \\ d=-c. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $y=f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0, \forall x\in\mathscr{D}$.

Do đó $\min\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(0)=1$.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{4x^2+x-3}{2x-6}$.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+\dfrac{13}{2}$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $y=3$.

d) Điểm $\left(3;\dfrac{25}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{4x^2+x-3}{2x-6}=\dfrac{(2x-6)\left(2x+\dfrac{13}{2}\right)+36}{2x-6}=2x+\dfrac{13}{2}+\dfrac{18}{x-3}$.

a) Sai.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}(4x^2+x-3)=36>0$ và $\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-6)=0^-$.

Nên $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.

b) Đúng.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+\dfrac{13}{2})]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{18}{x-3}=0$, nên đường thẳng $y=2x+\dfrac{13}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

c) Sai.

Vì $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$) nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=3$. Phát biểu ghi $y=3$ là sai.

d) Đúng.

HA KHA THPT 0399653362 Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=3 \\ y=2x+\dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2(3)+\dfrac{13}{2}=\dfrac{25}{2} \end{cases}$.

Vậy giao điểm là $\left(3;\dfrac{25}{2}\right)$.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có khoảng nghịch biến có độ dài lớn nhất là $(a;b)$. Tìm tổng $a+b$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x-9$.

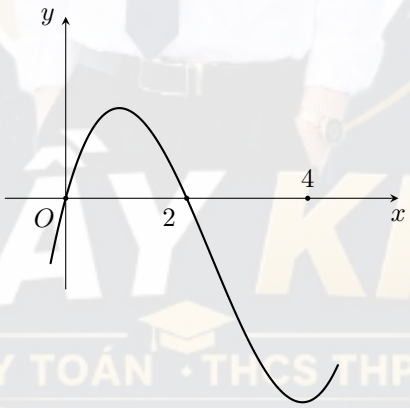
Hàm số nghịch biến khi $y'\le 0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Khoảng nghịch biến có độ dài lớn nhất của hàm số là $(-1;3)$.

Suy ra $a=-1, b=3$.

Vậy tổng $a+b=-1+3=2$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)-f(2)=f(4)-f(3)$. Giả sử giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ đạt được lần lượt tại x_0 và x_1. Tính giá trị biểu thức $T=x_0+x_1$.



Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ như sau:

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$

Vậy giá trị lớn nhất $M=f(2)$ đạt được tại $x_1=2$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ nên $f(2)>f(3) \Rightarrow f(2)-f(3)>0$.

Theo giả thiết: $f(0)-f(2)=f(4)-f(3) \Leftrightarrow f(0)-f(4)=f(2)-f(3)>0 \Rightarrow f(0)>f(4)$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất $m = f(4)$ đạt được tại $x_0 = 4$.

Vậy $x_0 = 4, x_1 = 2$, ta có $T = x_0 + x_1 = 4 + 2 = 6$.

Bài 3. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tích $P = a \cdot b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức nhân đôi cho hàm số cosin: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Ta được hàm số mới: $f(x) = 2\cos^3 x - (2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1$.

Đặt $t = \cos x$. Với $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Xét hàm số $g(t) = 2t^3 - 2t^2 + 1$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Đạo hàm $g'(t) = 6t^2 - 4t = 2t(3t - 2)$.

Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = \frac{2}{3} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Ta tính các giá trị tại các mút và điểm cực trị:

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$.

$g(1) = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1$.

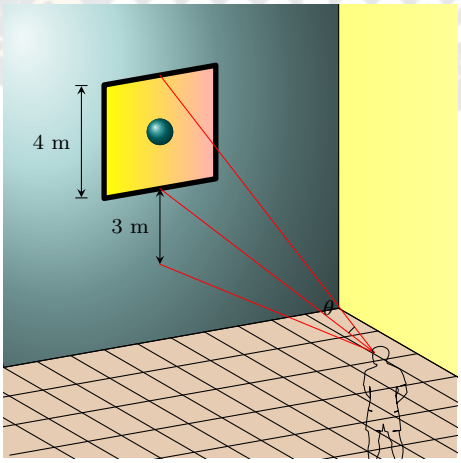
$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{16}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{19}{27}$.

So sánh các giá trị trên, ta thấy giá trị nhỏ nhất là $m = \frac{19}{27}$.

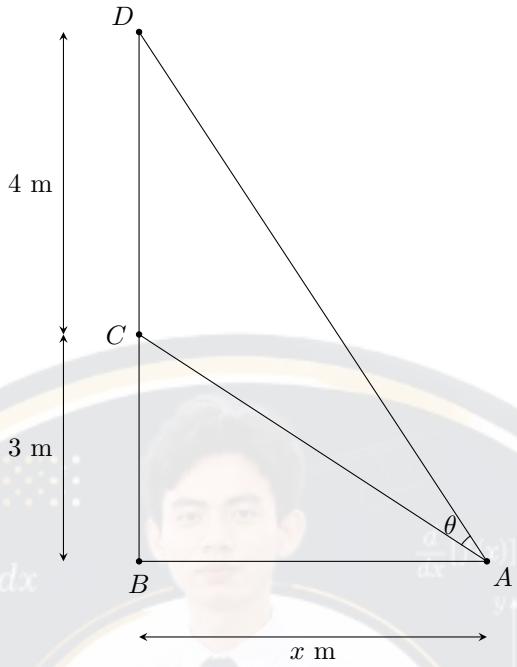
Suy ra $a = 19, b = 27$ (vì $\frac{19}{27}$ đã tối giản).

Vậy tích $P = a \cdot b = 19 \cdot 27 = 513$.

Bài 4. Một bức tranh cao 4 m được treo trên tường có mép dưới cao hơn tầm mắt người quan sát 3 m (như hình vẽ). Người quan sát phải đứng cách tường bao nhiêu mét để có được tầm nhìn thuận lợi nhất *(tức là, có góc nhìn θ lớn nhất)*?



✍ *Hướng dẫn giải.*



Đặt $BA = x$, ta có $AC = \sqrt{x^2+9}$. Khi đó $\sin D = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+49}}$.

Xét tam giác ACD, ta có

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin DAC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+9}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+49}}} = \frac{4}{\sin DAC} \Leftrightarrow \sin DAC = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{x^2+49}}.$$

Để có được tầm nhìn thuận lợi thì góc nhìn θ phải lớn nhất.

Xét hàm số

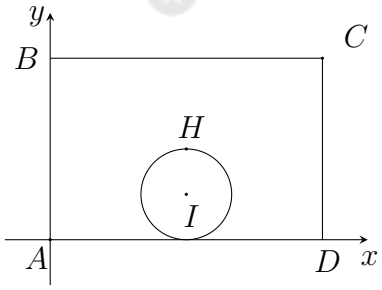
$$y = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{x^2+49}} = \frac{4x}{\sqrt{(x^2+9)(x^2+49)}} = \frac{4x}{\sqrt{x^4+58x^2+441}},\ x>0.$$

Ta có

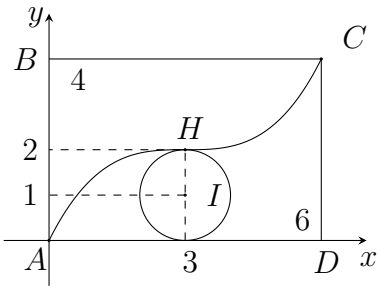
$$y' = \frac{-4x^4+1764}{(x^4+58x^2+441)\sqrt{x^4+58x^2+441}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{21} \approx 4{,}58.$$

Vậy người đó phải đứng cách tường khoảng 4,58 m thì tầm nhìn là thuận lợi nhất.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0;0)$, $C(6;4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và đi qua H. Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C. Dải LED có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H, tính $27a+3b+c+9d$.



✍ *Hướng dẫn giải.*



Từ $A(0;0)$ và $C(6;4)$ suy ra trung điểm H là $H\left(\dfrac{0+6}{2};\dfrac{0+4}{2}\right)=H(3;2)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và đi qua $H(3;2)$.

Vì $I(3;1)$ và $H(3;2)$ có cùng hoành độ $x=3$, nên tiếp tuyến của đường tròn (C) tại H là đường thẳng vuông góc với đoạn IH.

Đoạn IH là đoạn thẳng đứng, song song với trục Oy.

Do đó, tiếp tuyến của (C) tại H là đường thẳng song song với trục Ox, có phương trình $y=2$.

Độ dốc của tiếp tuyến tại H bằng 0, suy ra $f'(3)=0$.

Dải LED đi qua A và C và tiếp xúc tại H nên ta có hệ điều kiện

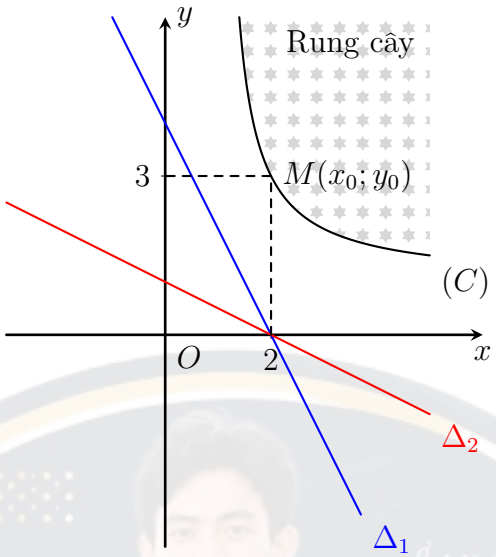
- $f(0)=0 \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=0 \Leftrightarrow d=0.$
- $f(6)=4 \Rightarrow 216a+36b+6c+d=4.$
- $f(3)=2 \Rightarrow 27a+9b+3c+d=2.$
- $f'(3)=0 \Rightarrow 27a+6b+c=0.$

Khi đó, ta có hệ $\begin{cases}216a+36b+6c=4\\27a+9b+3c=2\\27a+6b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{27}\\b=-\dfrac{2}{3}\\c=2.\end{cases}$

Vậy $27a+3b+c+9d=27\left(\dfrac{2}{27}\right)+3\left(-\dfrac{2}{3}\right)+2+9(0)=2+(-2)+2+0=2.$

Bài 6. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C)\colon y=\dfrac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục toạ độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2;3)$ và có đường tiệm cận đứng $x=1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1\colon 2x+y-4=0$ và $\Delta_2\colon x+2y-2=0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trị $M(x_0;y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc toạ độ

đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-b \Rightarrow b=-1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+b}$ đi qua $(2;3) \Rightarrow 3=\dfrac{2+a}{2-1} \Rightarrow a=1$.

Do đó đồ thị hàm số $(C)\colon y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Để khoảng cách từ điểm M thuộc khu vườn đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là bé nhất thì điểm M phải thuộc đồ thị hàm số.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$ với $x_0>1$.

Tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$\mathrm{d}=\mathrm{d}\left(M,\Delta_1\right)+\mathrm{d}\left(M,\Delta_2\right)=\frac{\left|2x_0+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-4\right|}{\sqrt{5}}+\frac{\left|x_0+2\cdot\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}\mathrm{d}=\left|\frac{2x_0^2-5x_0+5}{x_0-1}\right|+\left|\frac{x_0^2-x_0+4}{x_0-1}\right|=\frac{3x_0^2-6x_0+9}{x_0-1} \text{ vì } \begin{cases}2x_0^2-5x_0+5>0\\ x_0^2-x_0+4>0\\ x_0-1>0\end{cases}, \forall x_0>1.$$

Đặt $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+9}{x-1}$ với $x>1$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{3x^2-6x-3}{(x-1)^2}$; $g'(x)=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$ vì $x>1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta có $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5}\mathrm{d} \geq 6\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{d} \geq \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

Dấu "="xảy ra khi $x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow M\left(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Khoảng cách OM thực tế là

$$10 \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 10(1+\sqrt{2})\sqrt{2} \approx 34{,}1$$

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định với mọi $x\neq -5$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-9;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-9)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $y'>0$ với mọi $x\in(-\infty;-5)$ và $x\in(-5;+\infty)$.

Vì $(-\infty;-9)\subset(-\infty;-5)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-9)$.

Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-8$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=-3x^2+6x$.

$y'>0\Leftrightarrow -3x^2+6x>0\Leftrightarrow 0<x<2$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn D.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+16x+32}{x+8}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x=-15$. Ⓑ $x=0$. Ⓒ $x=-4$. Ⓓ $x=-12$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

Ta có $y=\dfrac{2(x+4)^2}{x+8}\Rightarrow y'=\dfrac{4(x+4)(x+8)-2(x+4)^2}{(x+8)^2}=\dfrac{2(x+4)(x+12)}{(x+8)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-12\end{array}\right.$

Bảng biến thiên cho thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-4$.

Chọn C.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	9	↘	8	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$.

Ⓐ $y=9$. Ⓑ $y=2$. Ⓒ $y=-2$. Ⓓ $y=8$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và giá trị cực đại tương ứng là $y_{\text{CD}}=9$.

Chọn A.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\ln(3x^2+3x+4)$ trên đoạn $[-3;3]$.

Ⓐ $\ln 40$. Ⓑ $1+\ln 64$. Ⓒ $\ln\dfrac{13}{4}$. Ⓓ $\ln 64$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $f(x)=\ln(3x^2+3x+4)$ liên tục trên $[-3;3]$.

$f'(x)=\dfrac{6x+3}{3x^2+3x+4}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\in[-3;3]$.

Ta có: $f(-3)=\ln 22$; $f(3)=\ln 40$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{13}{4}$.

So sánh các giá trị, ta được $\max\limits_{[-3;3]}y=\ln 40$.

Chọn A.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{-10x-1}{5x+2}$ trên đoạn $[-12;-4]$.

Ⓐ $M=-\dfrac{13}{6}$. Ⓑ $M=-\dfrac{37}{6}$. Ⓒ $M=-\dfrac{119}{58}$. Ⓓ $M=-\dfrac{3}{58}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-12;-4]$.

Ta có $y'=\dfrac{-10(5x+2)-5(-10x-1)}{(5x+2)^2}=\dfrac{-15}{(5x+2)^2}<0,\forall x\in[-12;-4]$.

Do hàm số nghịch biến trên đoạn $[-12;-4]$ nên giá trị lớn nhất đạt được tại $x=-12$.

$M=y(-12)=\dfrac{-10(-12)-1}{5(-12)+2}=\dfrac{119}{-58}=-\dfrac{119}{58}$.

Chọn C.

Câu 7. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-3x^2-30x-51}{3x+6}$.

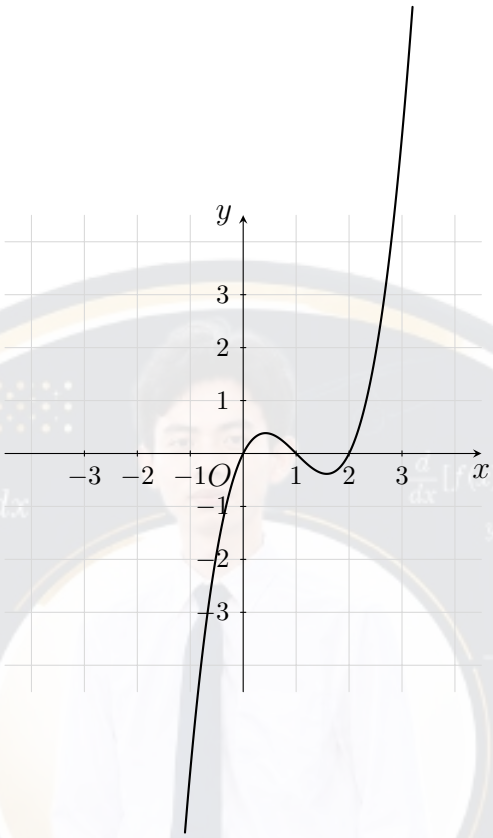
Ⓐ $y=-x-8$. Ⓑ $y=-x-12$.
Ⓒ $y=x-6$. Ⓓ $y=3x+6$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{-3x^2-30x-51}{3x+6}=\dfrac{-x^2-10x-17}{x+2}=-x-8-\dfrac{1}{x+2}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(-x-8)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=-x-8$ là đường tiệm cận

xiên của đồ thị hàm số.
Chọn A.

Câu 8. Đồ thị như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

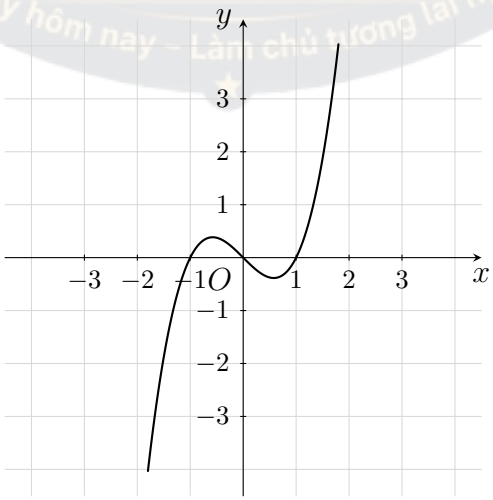


Ⓐ $y=x^3-3x^2+2x+3$.
Ⓑ $y=-x^3-3x^2+2x$.
Ⓒ $y=x^3-3x^2+2x$.
Ⓓ $y=x^3+3x^2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị ta thấy:
- Đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, loại phương án A.
- Nhánh cuối cùng đi lên nên hệ số của x^3 phải dương, loại phương án B.
- Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=0, x=1, x=2$. Thử với phương án C: $y=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1;2\}$ (thỏa mãn).

Chọn C.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ là:

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y=5$.
Quan sát đồ thị, đường thẳng $y=5$ nằm phía trên điểm cực đại của đồ thị và chỉ cắt nhánh bên phải (đang đi lên tới $+\infty$) tại duy nhất một điểm.
Vậy phương trình có 1 nghiệm.
Chọn A.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng:

Ⓐ $y=3$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $y=2$.

Hướng dẫn giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow x=2$.

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

Ⓐ $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$. Ⓑ $y=x^3-3x$.
Ⓒ $y=\log_2 x$. Ⓓ $y=x+\sqrt{x^2+4}$.

Hướng dẫn giải.

Phương án D. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4}{x-\sqrt{x^2+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\dfrac{4}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=0$.
Do đó đồ thị hàm số này có đường tiệm cận ngang là $y=0$.
Xét thêm các phương án còn lại:
Phương án A. Tập xác định $D=[0;+\infty)$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}=+\infty$. Do đó đồ thị không có tiệm cận ngang.
Phương án B. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x)=-\infty$. Do đó đồ thị không có tiệm cận ngang.
Phương án C. Theo lý thuyết, đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ chỉ có tiệm cận đứng $x=0$, không có tiệm cận ngang.

Câu 12. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

Ⓐ 6 máy. Ⓑ 7 máy. Ⓒ 4 máy. Ⓓ 5 máy.

Hướng dẫn giải.

Gọi số giờ cần in là x và số máy in cần sử dụng là n $(x\geq 0, n\geq 1)$.
Số bản in in được là: $4000nx$.
Theo đề bài ta có $4000nx=50000 \Rightarrow x=\dfrac{25}{2n}$.

Chi phí in ấn và vận hành là:

$20(3n+5)x+50n=60nx+100x+50n=60n\cdot\dfrac{25}{2n}+100\cdot\dfrac{25}{2n}+50n=50n+\dfrac{1250}{n}+750$ nghìn đồng.

Xét hàm số $f(n)=50n+\dfrac{1250}{n}+750$ với $1\le n\le 8$.

Ta có $f'(n)=-\dfrac{1250}{n^2}+50$; $f'(n)=0\Leftrightarrow -\dfrac{1250}{n^2}+50=0\Leftrightarrow n^2=25\Rightarrow n=5$.

Lại có $f(1)=2050, f(5)=1250, f(8)=1306,25$.

Do đó ta có $\min\limits_{[1;8]} f(n)=1250$ (nghìn đồng) khi $n=5$.

Để thu được tiền lãi cao nhất thì chi phí bỏ ra phải thấp nhất, khi đó số máy in cần sử dụng là 5 máy.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

a) $a=b$.

b) $f(1)>f(2025)$.

c) $\max\limits_{(-\infty;2)} f(x)=+\infty$.

d) Trong các hệ số a,b,c chỉ có một số âm.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng**. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường tiệm cận ngang là $y=1\Rightarrow\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$.

b) **Đúng**. Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(1)>1$ (vì trên $(-\infty;2)$ hàm số tăng từ 1 đến $+\infty$) và $f(2025)<1$ (vì trên $(2;+\infty)$ hàm số tăng từ $-\infty$ đến 1) nên $f(1)>f(2025)$.

c) **Sai**. Trên khoảng $(-\infty;2)$ hàm số không có giá trị lớn nhất vì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$.

d) **Sai**. Từ bảng biến thiên ta có:

- $x=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{c}>1\Rightarrow c>0$ (vì $x=0$ thuộc khoảng $(-\infty;2)$ và tại đó y đang tăng từ 1 lên).
- Đường tiệm cận đứng là $x=2\Rightarrow -\dfrac{c}{b}=2\Rightarrow c=-2b$. Vì $c>0$ nên $b<0$.
- Mà $a=b$ nên $a<0$.

Vậy trong các hệ số a,b,c có hai số âm là a và b.

Bài 2. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm

vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L).

a) $c'(t)=\dfrac{t^2+1}{(t^2+1)^2}$.

b) $c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in(0;+\infty)\\t=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

c) Nồng độ thuốc trong máu tăng trong 2 giờ đầu tiên sau khi tiêm.

d) Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Ta có $c'(t)=\dfrac{(t)'(t^2+1)-t(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}=\dfrac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$.

b) Đúng.

Ta có $c'(t)=0\Leftrightarrow 1-t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in(0;+\infty)\\t=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

c) Sai.

Bảng biến thiên của hàm số $c(t)$ trên khoảng $(0;+\infty)$:

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $c(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$, tức là nồng độ thuốc trong máu tăng trong 1 giờ đầu tiên sau khi tiêm.

d) Đúng.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;+\infty)}c(t)=\dfrac{1}{2}$ khi $t=1$.

Vậy sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[3;4]$ bằng 7 và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khi đó

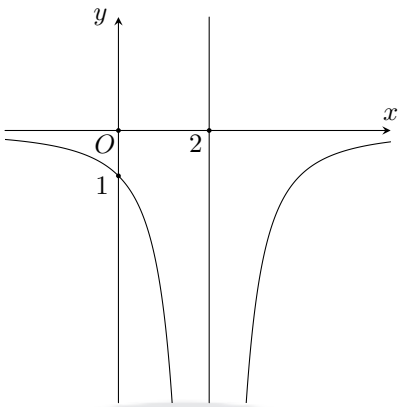
a) Đồ thị $y=f'(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) $3b+2c=-2$

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[3;4]$ bằng 6

THẦY KHA 0399653362



Hướng dẫn giải.

a) Ta có từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, đường tiệm cận đứng là $x = 2$.

b) Ta có trên khoảng $(2; +\infty)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành, nên $f'(x) < 0$, $\forall x \in (2; +\infty)$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) Ta có $y = f'(x) = \dfrac{ac - b}{(x + c)^2}$.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} f(3) = 7 \\ f'(0) = -1 \\ -c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3a + b}{3 + c} = 7 \\ \dfrac{ac - b}{c^2} = -1 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 7 \\ -2a - b = -4 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -2. \end{cases}$$

Vậy $3b + 2c = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -10$.

d) Vì trên đoạn $[3; 4]$ hàm số nghịch biến nên $\min\limits_{[3;4]} f(x) = f(4) = 5$.

Bài 4. Một công ty sản xuất sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm số biểu diễn giá bán mỗi sản phẩm khi có x sản phẩm được bán ra là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng).

a) Hàm số doanh thu của công ty khi bán được x sản phẩm là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).

b) Doanh thu của công ty khi bán được 10 sản phẩm là 7,5 triệu đồng.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.

d) Doanh thu công ty lớn nhất là 10 triệu đồng khi bán được 20 sản phẩm.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Bán x sản phẩm với giá mỗi sản phẩm là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng) nên ta có doanh thu của công ty là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).

b) Đúng

Doanh thu khi bán được 10 sản phẩm là:

$f(10) = 10 \cdot p(10) = 10 \cdot (1000 - 25 \cdot 10) = 7500$ nghìn đồng $= 7{,}5$ triệu đồng.

c) Sai

Ta có $f(x) = x(1000 - 25x) = -25x^2 + 1000x$.

Khi đó $f'(x) = -50x + 1000$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -50x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

Vậy $f'(x)=0$ có nghiệm là $x=20$.

d) Đúng

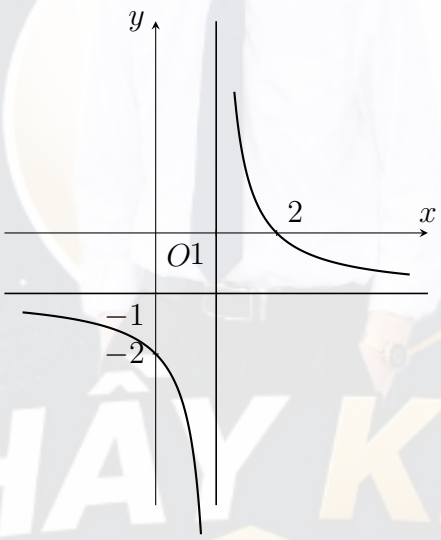
Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	10000	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 10000 tại $x=20$. Vậy doanh thu lớn nhất là 10 triệu đồng, khi đó có 20 sản phẩm được bán ra.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.



Hướng dẫn giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các thông tin sau:

- Tiệm cận ngang: $y=-1$. Theo công thức, tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, suy ra $\dfrac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-c$ (1).
- Tiệm cận đứng: $x=1$. Theo công thức, tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}$, suy ra $-\dfrac{d}{c}=1\Rightarrow d=-c$ (2).
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;0)$, suy ra: $\dfrac{a(2)+b}{c(2)+d}=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$. Thay (1) vào ta được $b=-2(-c)=2c$ (3).

Từ (1), (2) và (3), thay vào biểu thức T ta có: $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}=\dfrac{-c-2(2c)+3(-c)}{c}=\dfrac{-c-4c-3c}{c}=\dfrac{-8c}{c}=-8$.

Bài 2. Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 28. Chọn ngẫu nhiên hai số a, b phân biệt từ tập S. Tính xác suất để hai đồ thị $(C_1): y = x^4 + 2ax^2 + 4b$ và $(C_2): y = -\frac{1}{2}x^4 + bx^2 - a$ đều có ba điểm cực trị, đồng thời chúng có điểm cực trị chung.

Hướng dẫn giải. Tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 28\} = \{-28; -27; \ldots; 0; \ldots; 27; 28\}$.

Số phần tử của tập S là $28 \times 2 + 1 = 57$.

Số cách chọn ngẫu nhiên hai số phân biệt a, b từ tập S (có tính đến thứ tự) là $n(\Omega) = A_{57}^2 = 57 \times 56 = 3192$.

Xét hàm số $(C_1): y = x^4 + 2ax^2 + 4b$ là hàm bậc bốn trùng phương.

Đồ thị (C_1) có 3 điểm cực trị khi $1 \cdot (2a) < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

Các điểm cực trị của (C_1) là $M_0(0; 4b)$ và $M_{1,2}(\pm\sqrt{-a}; -a^2 + 4b)$.

Xét hàm số $(C_2): y = -\frac{1}{2}x^4 + bx^2 - a$.

Đồ thị (C_2) có 3 điểm cực trị khi $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot b < 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Các điểm cực trị của (C_2) là $N_0(0; -a)$ và $N_{1,2}\left(\pm\sqrt{b}; \frac{1}{2}b^2 - a\right)$.

Để hai đồ thị có điểm cực trị chung, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Điểm cực trị chung nằm trên trục tung ($x = 0$).

Khi đó $M_0 \equiv N_0 \Leftrightarrow 4b = -a \Leftrightarrow a = -4b$.

Vì $a \in S$ và $a < 0$ nên $-28 \le -4b < 0 \Rightarrow 0 < b \le 7$.

Kết hợp với $b \in S$ và $b > 0$, ta có $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Ứng với mỗi giá trị b có một giá trị a tương ứng (luôn phân biệt với b vì một số âm, một số dương). Trường hợp này có 7 cặp (a, b).

Trường hợp 2: Điểm cực trị chung có hoành độ khác 0 ($x \ne 0$).

Khi đó hoành độ cực trị phải thỏa mãn: $x^2 = -a = b \Rightarrow a = -b$.

Đồng thời tung độ phải bằng nhau: $-a^2 + 4b = \frac{1}{2}b^2 - a$

Thay $a = -b$ vào phương trình trên ta được: $-(-b)^2 + 4b = \frac{1}{2}b^2 - (-b) \Leftrightarrow -b^2 + 4b = \frac{1}{2}b^2 + b$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ (loại vì } b > 0) \\ b = 2 \end{array}\right.$

Với $b = 2 \Rightarrow a = -2$ (thỏa mãn $a, b \in S, a < 0, b > 0$ và $a \ne b$).

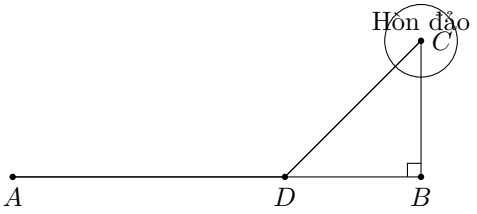
Trường hợp này có 1 cặp (a, b) là $(-2; 2)$.

Hai trường hợp trên là xung khắc vì nếu $a = -4b$ và $a = -b$ thì $b = 0$ (vô lý).

Tổng số cặp (a, b) thỏa mãn là $7 + 1 = 8$. Xác suất cần tìm là $P = \frac{8}{3192} = \frac{1}{399}$.

Bài 3. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là

40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy bằng thuyền là 5 USD/km, đi đường bộ bằng xe taxi là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? (Kết quả ghi dưới dạng thập phân)



Hướng dẫn giải. Vì B là điểm trên bờ gần hòn đảo C nhất nên suy ra $BC \perp AB$.

Theo đề bài, ta có $AB = 40$ (km), $BC = 10$ (km).

Gọi D là điểm bất kì thuộc đoạn AB (D có thể trùng với A hoặc B).

Đặt $AD = x$ (km), $x \in [0; 40]$.

Ta có $BD = 40 - x \Rightarrow DC = \sqrt{(40-x)^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 - 80x + 1700}$.

Để đi từ A đến C, thì người đó có thể phải đi đường bộ trên đoạn AD và đi đường thủy trên đoạn DC.

Do đó tổng kinh phí đi từ A đến C là:

$f(x) = 3x + 5\sqrt{(40-x)^2 + 10^2} \Leftrightarrow f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}$ (USD).

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$, nhưng ta chỉ xét trên $[0; 40]$.

$$f'(x) = 3 + 5 \cdot \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 200 - 5x \geq 0 \\ 9(x^2 - 80x + 1700) = (200 - 5x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 40 \\ 16x^2 - 1280x + 24700 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{95}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{65}{2} \in [0; 40] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{65}{2}$		40
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 40]$ tại điểm $x = \dfrac{65}{2}$.

Vậy người đó phải đi đường bộ một khoảng $\dfrac{65}{2} = 32,5$ km để kinh phí nhỏ nhất.

Bài 4. Gọi $M(a; b), (a > -2)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d : y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Tính giá trị $a + b$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $d : y = 3x + 6 \Leftrightarrow 3x - y + 6 = 0$.

Gọi $M\left(a; \dfrac{2a+1}{a+2}\right) \in (C)$, ta có khoảng cách từ M đến đường thẳng d là:

$$d(M,d) = \frac{\left|3a - \dfrac{2a+1}{a+2} + 6\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\left|3a + 6 - \dfrac{2(a+2)-3}{a+2}\right|}{\sqrt{10}}$$

$$d(M,d) = \frac{\left|3(a+2) - 2 + \dfrac{3}{a+2}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\left|3(a+2) + \dfrac{3}{a+2} - 2\right|}{\sqrt{10}}.$$

Vì $a > -2 \Rightarrow a + 2 > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $3(a+2)$ và $\dfrac{3}{a+2}$:

$$3(a+2) + \frac{3}{a+2} \geq 2\sqrt{3(a+2) \cdot \frac{3}{a+2}} = 6.$$

Do đó: $d(M,d) \geq \dfrac{|6-2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $3(a+2) = \dfrac{3}{a+2} \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2=1 \\ a+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \text{ (thỏa mãn } a > \\ a=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $a = -1 \Rightarrow b = \dfrac{2(-1)+1}{-1+2} = -1$.

Khi đó: $a + b = -1 + (-1) = -2$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	-2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	
		$-\infty$			-2

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Từ bảng biến thiên ta có:

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$. Theo công thức $y = \dfrac{a}{b}$, suy ra $\dfrac{a}{b} = -2 \Rightarrow a = -2b$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$. Theo công thức $x = -\dfrac{c}{b}$, suy ra $-\dfrac{c}{b} = 3 \Rightarrow c = -3b$.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $f'(x) < 0$.

Ta có $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Điều kiện $f'(x) < 0 \Leftrightarrow ac - b < 0$.

Thay $a=-2b$ và $c=-3b$ vào, ta được:

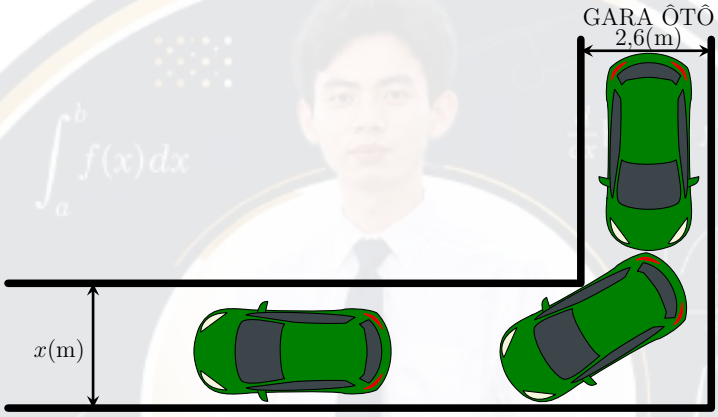
$$(-2b)(-3b)-b<0 \Leftrightarrow 6b^2-b<0 \Leftrightarrow b(6b-1)<0 \Leftrightarrow 0<b<\frac{1}{6}.$$

Vì $0<b<\dfrac{1}{6}$ nên:

- $b>0$.
- $a=-2b<0$.
- $c=-3b<0$.

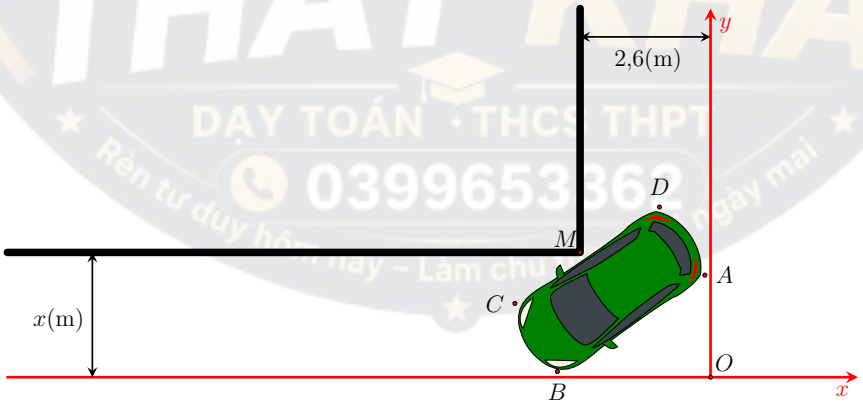
Vậy trong các số a,b,c chỉ có duy nhất 1 số dương (là số b).

Bài 6. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ôtô là $5\times 1{,}9$m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ôtô, người ta coi ôtô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ôtô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ôtô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ôtô không bị biến dạng).

Hướng dẫn giải.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó, $M(-2{,}6;m)$.
Gọi $B(-a;0)$, suy ra $A(0;\sqrt{25-a^2})$, $a>0$.
Từ đó, phương trình của AB là

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}=1.$$

Do $CD//AB$ nên phương trình CD là

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-k=0.$$

Khoảng cách giữa AB và CD là chiều rộng của ôtô và bằng 1,9 m nên

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1{,}9\Leftrightarrow k=1+\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Phương trình CD được viết lại là

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}=0.$$

Điều kiện để ôtô đi qua được là M và O nằm khác phía đối với đường thẳng CD.

Suy ra

$$\left(\frac{2{,}6}{a}+\frac{m}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\right)\left(-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2{,}6}{a}+\frac{m}{\sqrt{25-a^2}}-1-\frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow m\ge\sqrt{25-a^2}+\frac{9{,}5}{a}-\frac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a}\ \text{(đúng với mọi } a\in(0;5]).$$

Xét hàm số $f(a)=\sqrt{25-a^2}+\frac{9{,}5}{a}-\frac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên nửa khoảng $(0;5]$.

Ta có $f'(a)=\dfrac{65-9{,}5\sqrt{25-a^2}-a^3}{a^2\sqrt{25-a^2}}\Rightarrow f'(a)=0\Leftrightarrow a=3\in(0;5)$.

Bảng biến thiên

a	0		3		5
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{10}$	$\searrow$	$\frac{19}{10}$

Do đó, $m\ge f(a),\forall a\in(0;5]\Leftrightarrow m\ge\dfrac{37}{10}=3{,}7$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên bằng 3,7.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 6
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2+4x-5$?

Ⓐ $M(0;5)$. Ⓑ $Q(1;4)$. Ⓒ $N(2;15)$. Ⓓ $P(-2;15)$.

Hướng dẫn giải. Thay lần lượt tọa độ các điểm M,N,P,Q vào hàm số $y=-2x^3+3x^2+4x-5$ ta thấy điểm $P(-2;15)$ thỏa mãn vì: $-2(-2)^3+3(-2)^2+4(-2)-5=16+12-8-5=15$. Chọn D.

Câu 2. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-1

Ⓐ $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. + Từ bảng biến thiên ta thấy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=1$ nên ta loại phương án A và D.
+ Từ bảng biến thiên ta thấy $y'>0$ với mọi $x\neq 1$. Kiểm tra hai phương án còn lại:
Xét $y=\dfrac{-x+2}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1(-1)-2(1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$ (loại).
Xét $y=\dfrac{-x-2}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1(-1)-(-2)(1)}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{(x-1)^2}>0,\forall x\neq 1$ (chọn). Chọn B.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+2025$ có đồ thị (C). Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

Ⓐ -10. Ⓑ 2. Ⓒ 10. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
Ta có: $y=x^4-3x^2+2025\Rightarrow y'=4x^3-6x$.
Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là: $k=y'(-1)=4(-1)^3-6(-1)=-4+6=2$. Chọn B.

Câu 4. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số được cho ở các phương án A, B, C,

D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\to$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\to$	-9	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.
Ⓑ $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

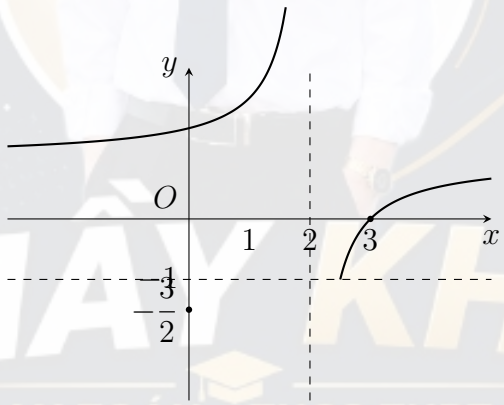
✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$, loại phương án D (có mẫu là $-x+3$ nên TCD cũng là 3 nhưng cần kiểm tra thêm).

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1, y=-1$ và đạt cực đại tại $x=5, y=-9$.

Thử với phương án C: $y(1)=\dfrac{-1^2+1+2}{1-3}=\dfrac{2}{-2}=-1$ (đúng). $y(5)=\dfrac{-5^2+5+2}{5-3}=\dfrac{-18}{2}=-9$ (đúng). Chọn C.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R};c\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng



Ⓐ -3.
Ⓑ 5.
Ⓒ -4.
Ⓓ 3.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

- Tiệm cận đứng $x=2\Rightarrow -\dfrac{2}{c}=2\Leftrightarrow c=-1$.
- Tiệm cận ngang $y=-1\Rightarrow \dfrac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-c=1$.
- Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(3;0)\Rightarrow \dfrac{3a-b}{3c+2}=0\Rightarrow b=3a=3$.

Vậy $a+b+c=1+3+(-1)=3$. Chọn D.

Câu 6. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=10$ (s) chất điểm đạt tốc độ lớn nhất tại thời điểm nào (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Ⓐ $t = 2,5$. Ⓑ $t = 3,5$. Ⓒ $t = 2$. Ⓓ $t = 1,5$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ trên đoạn $[0; 10]$. Ta có $v'(t) = -4t^3 + 48t$. $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -4t(t^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{12} \approx 3,46 \\ t = -\sqrt{12} \text{ (loại)} \end{array}\right.$. Ta có $v(0) = 500$; $v(\sqrt{12}) = 644$; $v(10) = -7100$. Vậy tốc độ lớn nhất đạt được khi $t = \sqrt{12} \approx 3,5$ (s). Chọn B.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 1$ trên đoạn $[-3; 4]$.

Ⓐ $m = -\dfrac{43}{2}$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = \dfrac{31}{6}$. Ⓓ $m = -\dfrac{133}{3}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên $[-3; 4]$. Ta có $y' = x^2 - 3x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-3; 4] \\ x = 3 \in [-3; 4] \end{array}\right.$. Tính các giá trị: $y(-3) = \dfrac{(-3)^3}{3} - \dfrac{3(-3)^2}{2} + 1 = -9 - \dfrac{27}{2} + 1 = -\dfrac{43}{2}$. $y(0) = 1$. $y(3) = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{3 \cdot 3^2}{2} + 1 = 9 - \dfrac{27}{2} + 1 = -\dfrac{7}{2}$. $y(4) = \dfrac{4^3}{3} - \dfrac{3 \cdot 4^2}{2} + 1 = \dfrac{64}{3} - 24 + 1 = -\dfrac{5}{3}$. So sánh các giá trị trên, ta có $\min\limits_{[-3;4]} y = -\dfrac{43}{2}$. Chọn A.

Câu 8. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{4x + 4}$.

Ⓐ $y = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $y = \dfrac{5}{4}$. Ⓓ $x = -\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 3}{4x + 4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \dfrac{1}{2}$. Chọn A.

Câu 9. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-9x^2 + 6x + 4}{-3x - 2}$.

Ⓐ $y = 5x - 2$. Ⓑ $y = -3x - 2$.
Ⓒ $y = 3x - 4$. Ⓓ $y = 3x - 7$.

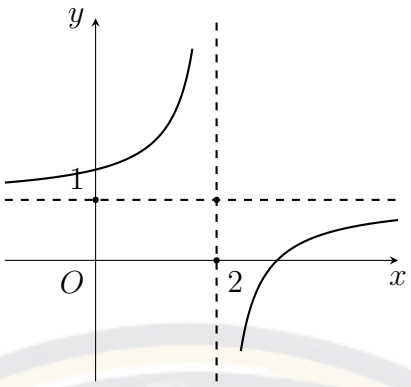
Hướng dẫn giải. Thực hiện phép chia đa thức: $\dfrac{-9x^2 + 6x + 4}{-3x - 2} = 3x - 4 + \dfrac{-4}{-3x - 2}$. Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-4}{-3x - 2} = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = 3x - 4$. Chọn C.

Câu 10. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

Ⓐ $y = x^3 - 3x$. Ⓑ $y = \dfrac{1}{x}$. Ⓒ $y = x^4$. Ⓓ $y = x^2 - 2$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ có đạo hàm $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$. Đạo hàm không đổi dấu nên hàm số không có cực trị. Các hàm số còn lại đều có ít nhất một điểm cực trị. Chọn B.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số là

Ⓐ $(1;2)$. Ⓑ $(2;1)$. Ⓒ $(-2;-1)$. Ⓓ $(-1;-2)$.

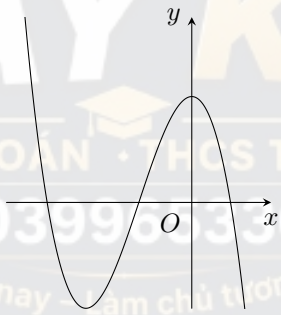
Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

- Đường tiệm cận đứng là đường thẳng đi qua điểm $x=2$ trên trục hoành, nên có phương trình $x=2$.
- Đường tiệm cận ngang là đường thẳng đi qua điểm $y=1$ trên trục tung, nên có phương trình $y=1$.
- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Vậy tọa độ tâm đối xứng là $(2;1)$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a<0,\,d>0$. Ⓑ $a>0,\,d>0$.
Ⓒ $a>0,\,d<0$. Ⓓ $a<0,\,d<0$.



Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

- Nhánh cuối của đồ thị đi xuống nên $a<0$.
- Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Do đó $a<0$ và $d>0$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+4)$.

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$

b) Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2}$

c) Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

d) Hàm số có một điểm cực trị

Hướng dẫn giải. a) **Sai**.

Hàm số $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+4)$ xác định khi $x^2-5x+4>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<1.\end{array}\right.$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Do đó hàm số không xác định trên $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$ nên không đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$.

b) **Đúng**.

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+4)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)\cdot\ln\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5-2x}{(x^2-5x+4)\cdot\ln 2}$.

c) **Sai**.

Ta có tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

d) **Sai**.

Ta có $\dfrac{5-2x}{(x^2-5x+4)}\cdot\ln 2=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Vì $1<\dfrac{5}{2}<4$ nên $x=\dfrac{5}{2}$ không thuộc$\mathscr{D}$.

Do đó hàm số không đạt cực trị tại $x=\dfrac{5}{2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như trên.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2

b) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

c) Hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$

d) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng**. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

b) **Đúng**. Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) **Đúng**. $\max\limits_{[-5;-3]} y=-6$.

d) **Sai**. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận, đó là đường tiệm cận đứng.

Bài 3. Xét chuyển động của một tàu lượn trên đoạn đường ray có hình dạng một phần đồ thị

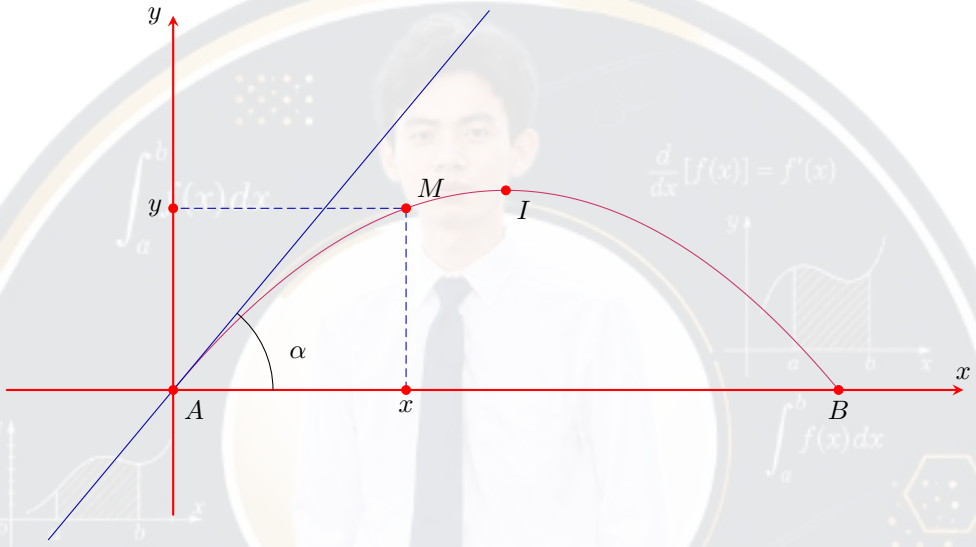
của hàm số $y = f(x) = \dfrac{135x - x^2 - x^3}{200}$ $(x \geq 0)$, trong đó x là khoảng cách theo phương ngang kể từ điểm A, y là độ cao tương ứng của tàu lượn so với phương ngang AB. Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 10 m). *Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.*

a) Độ dài đoạn AB bằng 111 m.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 = \dfrac{\sqrt{406} - 1}{3}$.

c) Độ cao lớn nhất của tàu lượn so với phương ngang AB là 64 m.

d) Khi tàu lượn đi qua điểm A, tiếp tuyến của quỹ đạo tại A hợp với phương ngang AB một góc $\alpha \approx 34°$.



Hướng dẫn giải. a) Điểm B là giao điểm của đồ thị hàm số với phần dương của trục hoành.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{135x - x^2 - x^3}{200} = 0 \Rightarrow x(135 - x - x^2) = 0$.

Vì $x_B > 0$ nên $x^2 + x - 135 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 + \sqrt{541}}{2} \approx 11{,}13$.

Thực tế nên độ dài đoạn AB là $11{,}13 \cdot 10 = 111{,}3$ m ≈ 111 m.

b) Ta có $y' = f'(x) = \dfrac{135 - 2x - 3x^2}{200}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 2x + 135 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + \sqrt{406}}{3} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{406}}{3} \end{array}\right. \text{(loại vì } x \geq 0\text{)}.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x_0 = \dfrac{\sqrt{406} - 1}{3}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = \dfrac{\sqrt{406} - 1}{3} \approx 6{,}38$.

Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\max} = f(x_0) = \dfrac{135x_0 - x_0^2 - x_0^3}{200} \approx 2{,}8$.

Độ cao lớn nhất của tàu lượn trong thực tế là $2{,}8 \cdot 10 = 28$ m.

d) Hệ số góc của tiếp tuyến tại A $(x = 0)$ là $k = f'(0) = \dfrac{135}{200} = 0{,}675$.

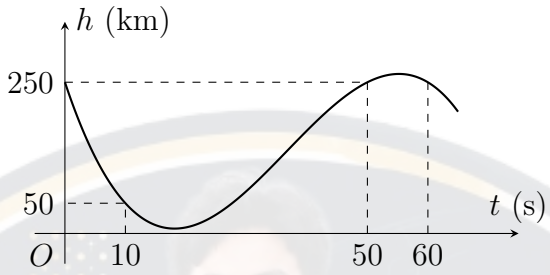
Vì cả hai trục cùng có đơn vị 10 m nên tỷ lệ là $\dfrac{1}{1}$. Khi đó $\tan\alpha = k = 0{,}675 \Rightarrow \alpha \approx 34{,}02° \approx 34°$.

Bài 4. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên

lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h tính bằng kilômét.

a) Trong 50 giây đầu tiên thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này khoảng $8,08$ km.

b) Đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 70$ như sau:



c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ là $5,25$ km/s.

d) Tại thời điểm $t = 25$, vận tốc tức thời của con tàu vẫn đang tăng.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0;50]$.

Ta có $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 18 \text{ (nhận)} \\ t \approx 55 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Khi đó $h(0) = 250$; $h(18) \approx 8,08$; $h(50) = 250$.

Do đó, $\min\limits_{[0;50]} h(t) \approx 8,08$ tại $t \approx 18$.

Vậy tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt Mặt Trăng là khoảng $8,08$ km.

b) Đúng

Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0;70]$.

Ta có $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 18 \\ t \approx 55 \end{array}\right.$

Dễ dàng vẽ bảng biến thiên, đồ thị có hình dạng như hình vẽ trong đề bài.

c) Sai

Ta có $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$ với $t \in [0;50]$.

Khi đó $v(25) = -0,03 \cdot 25^2 + 2,2 \cdot 25 - 30 = 6,25$ km/s. (Đề bài ghi $5,25$ là sai).

d) Đúng

Xét hàm vận tốc $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$ với $t \in [0;50]$.

Ta có $v'(t) = -0,06t + 2,2$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{110}{3} \approx 36,67$.

Bảng biến thiên của $v(t)$:

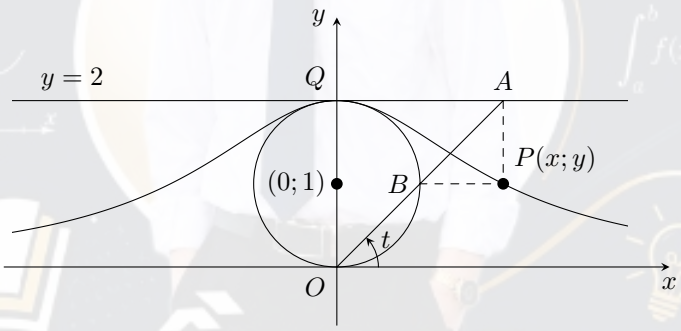
t	0		$\dfrac{110}{3}$		50
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{110}{3}\right)$.

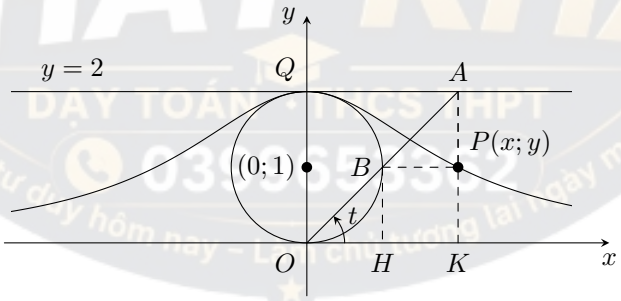
Vì $25 \in \left(0;\dfrac{110}{3}\right)$ nên tại thời điểm $t=25$, vận tốc của con tàu đang tăng.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Hình vẽ sau mô tả một đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy như sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y=2$ tại điểm A. Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy. Tập hợp các điểm P tạo thành một đường cong $y=f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải.



Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A và B lên Ox.

Tam giác AOQ vuông tại Q có QB là đường cao, $OA=\sqrt{OK^2+AK^2}=\sqrt{x^2+4}$

Suy ra $OB\cdot OA=OQ^2 \Rightarrow OB=\dfrac{OQ^2}{OA}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Ta có $\dfrac{BH}{AK}=\dfrac{OB}{OA} \Rightarrow BH=\dfrac{AK\cdot OB}{OA}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{8}{x^2+4}\Rightarrow y'=\dfrac{-8\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=-\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}.$

$$\begin{aligned}y''&=-16\cdot\frac{\left(x^2+4\right)^2-2\left(x^2+4\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2+4\right)^4}\\&=-16\cdot\frac{\left(x^2+4\right)\left(x^2+4-4x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^4}\\&=-16\cdot\frac{\left(x^2+4\right)\left(-3x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}\\&=-16\cdot\frac{\left(-3x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^3}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}y''=0&\Leftrightarrow -16\cdot\frac{-3x^2+4}{\left(x^2+4\right)^3}=0\\&\Leftrightarrow -3x^2+4=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\\&\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	$\frac{-3\sqrt{3}}{8}$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y'_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}6$.

Bài 2. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-2ax^2+b$ có một điểm cực trị là $(1;2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Hướng dẫn giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4ax$.

Do đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $(1;2)$ nên ta có $\begin{cases}y(1)=2\\y'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1^4-2a\cdot 1^2+b=2\\4\cdot 1^3-4a\cdot 1=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a=1\\b=3.\end{cases}$

Khi đó ta có hàm số là $y=x^4-2x^2+3$. Ta có $y'=4x^3-4x=0; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

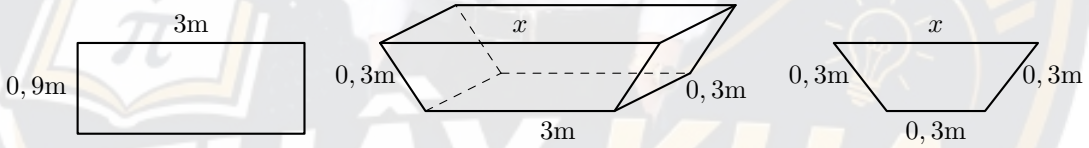
Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $A(-1;2), B(1;2)$ và một điểm cực đại $C(0;3)$.
Vậy khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu là: $AC = BC = \sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Bài 3. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu (đơn vị: m/s) trong 18 giây đầu tiên đó?

Hướng dẫn giải.

Ta có vận tốc tức thời là: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t + 1$.
Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 36t + 1$ với $t \in [0;18]$. Ta có $v'(t) = -6t + 36; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.
Khi đó $v(0) = 1; v(6) = 109; v(18) = -323$. Suy ra $\max\limits_{[0;18]} v(t) = v(6) = 109$.
Vậy vận tốc tức thời đạt giá trị lớn nhất bằng 109 m/s khi $t = 6$ giây.

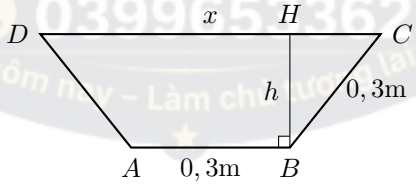
Bài 4. Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Tấm tôn | Máng xối | Mặt cắt

Hướng dẫn giải.

Gọi hình thang cân $ABCD$ là mặt cắt của máng xối và h (m) là chiều cao của hình thang cân.



Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân lớn nhất.
Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{h}{2}(x + 0,3)$; Ta có $HC = \dfrac{DC - AB}{2} = \dfrac{x - 0,3}{2}$.
Suy ra $h = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{(0,3)^2 - \dfrac{(x-0,3)^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}}{2}$.
Khi đó: $S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}}{4}(x + 0,3)$.

Xét hàm số $f(x)=S_{ABCD}=\dfrac{1}{4}(x+0,3)\sqrt{-x^2+0,6x+0,27}$ với $0,3<x<0,9$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{-x^2+0,6x+0,27}+\dfrac{1}{4}(x+0,3)\dfrac{-x+0,3}{\sqrt{-x^2+0,6x+0,27}}=\dfrac{1}{4}\dfrac{-2x^2+0,6x+0,36}{\sqrt{-x^2+0,6x+0,27}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow -2x^2+0,6x+0,36=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-0,3 \text{ (loại)}\\ x=0,6 \text{ (nhận)}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0,3		0,6		0,9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x=0,6$.

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x=0,6$ (m).

Bài 5. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34 567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X, công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x $(x\geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X. Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1;+\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

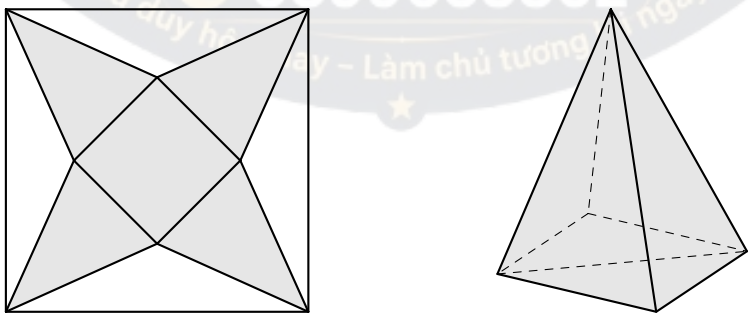
Hướng dẫn giải. Ta có $C(x)=34\,567+8x$.

Khi đó $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{34\,567+8x}{x}=8+\dfrac{34\,567}{x}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8+\dfrac{34\,567}{x}\right)=8$.

Mà $\overline{C}(x)$ là hàm nghịch biến trên $[1;+\infty)$ nên chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống thấp nhất và không dưới 8 USD.

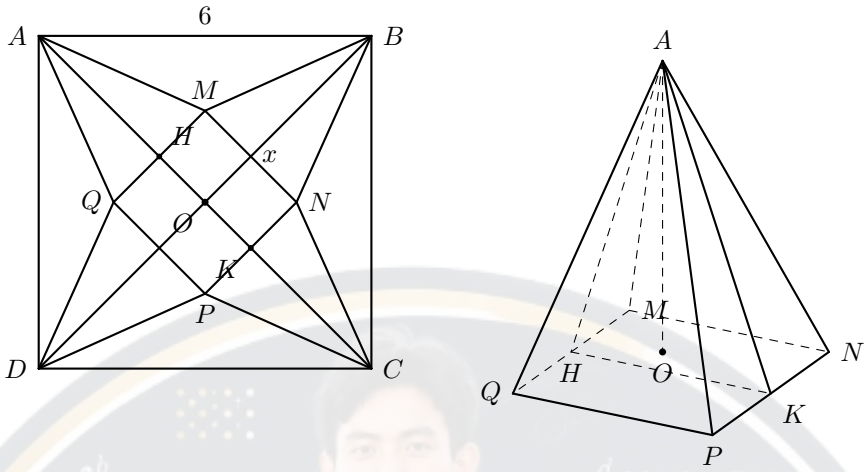
Bài 6. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gập lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình sau.



Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Hướng dẫn giải.

Tấm bìa hình vuông $ABCD$, sau khi gấp lên để A, B, C, D trùng nhau ta được hình chóp đều $A.MNPQ$ đáy là hình vuông $MNPQ$ tâm O có cạnh bằng x dm, đường cao $h = AO$ dm. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MQ và NP.



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 6 dm nên $AC = 6\sqrt{2}$ dm, $HK = x$ dm, $x > 0$.

Ta có $AH = \dfrac{AC - HK}{2} = \dfrac{6\sqrt{2} - x}{2} = 3\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}$ dm.

Khi đó $h = AO = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{18 - 3\sqrt{2}x}$ (dm).

Thể tích của khối chóp là:

$V = \dfrac{1}{3}x^2 h = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{18 - 3\sqrt{2}x} = \dfrac{1}{3}\sqrt{x^4(18 - 3\sqrt{2}x)}$ dm^3 (điều kiện: $18 - 3\sqrt{2}x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3\sqrt{2}$).

Xét hàm số $f(x) = x^4(18 - 3\sqrt{2}x)$ với $0 < x \leq 3\sqrt{2}$.

Ta có: $f'(x) = x^3(-15\sqrt{2}x + 72)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = \dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ (nhận).

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$		$3\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	≈ 478	↘	0

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;3\sqrt{2}]} f(x) = f\left(\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\right) \approx 478$.

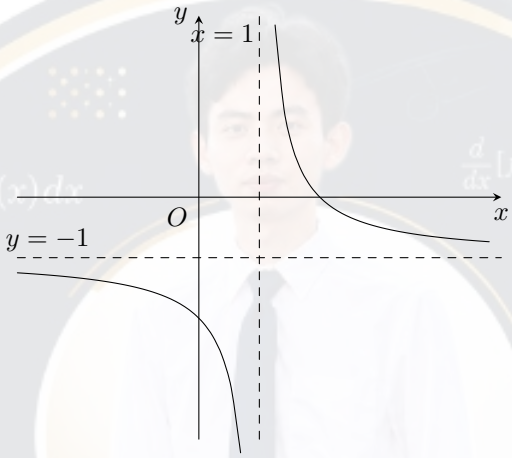
Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng $V_{\max} = \dfrac{1}{3}\sqrt{f\left(\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\right)} \approx 7,3$ dm^3.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 7
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $b<0<a$. Ⓑ $0<b<a$. Ⓒ $b<a<0$. Ⓓ $0<a<b$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y=\dfrac{ax-b}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-a+b}{(x-1)^2}$.

Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định nên $y'<0\,\forall x\neq 1$

$$\Rightarrow -a+b<0\Leftrightarrow a>b.$$

Mặt khác, đồ thị có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a=-1\Rightarrow a<0$.
Vậy $b<a<0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như bảng dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng?

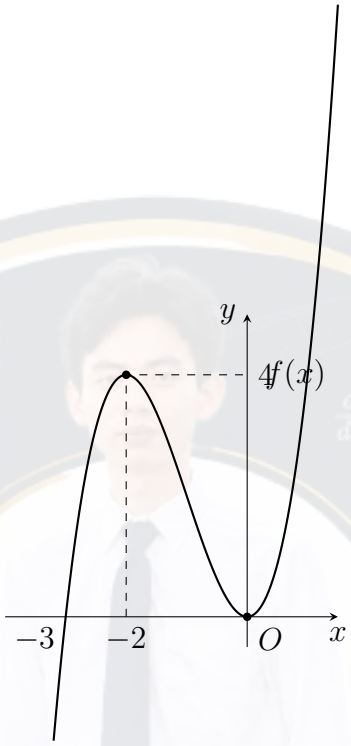
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5;4)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;4)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, trên khoảng $(1;2)$ đạo hàm $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số đạt cực đại tại

Ⓐ $x=-3$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $y=0$. Ⓓ $y=4$.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị, điểm cao nhất cục bộ của đồ thị là $(-2;4)$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-2$. Chọn B.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-4x+10$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-2;2)$. Ⓒ $(-\infty;2)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=x^2-4$. $y'<0\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$. Chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7]$ như sau:

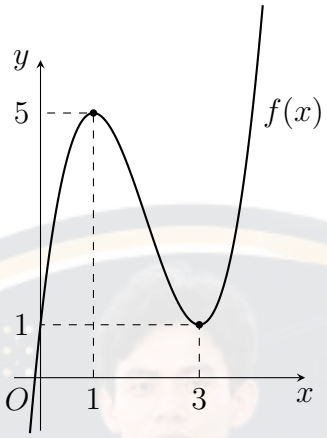
x	-5		1		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	↗	2	↘	9

Ⓐ $\min\limits_{[-5;7]} f(x)=6$. Ⓑ $\max\limits_{[-5;7]} f(x)=9$.

Ⓒ $\max\limits_{[-5;7]} f(x)=6$. Ⓓ $\min\limits_{[-5;7]} f(x)=2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên (theo đúng giá trị số trong hình), giá trị thấp nhất của $f(x)$ trên đoạn là 2. Chọn D.

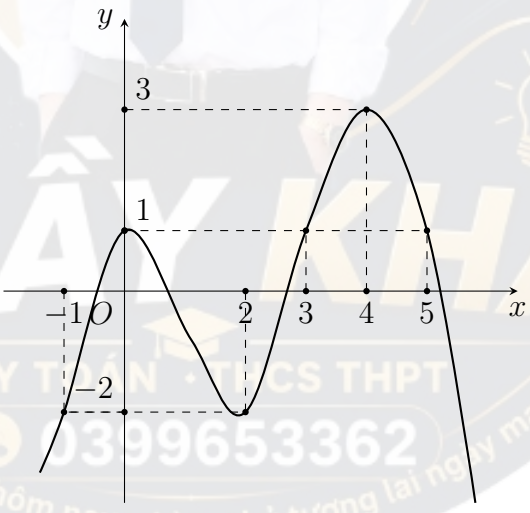
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(D) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Hướng dẫn giải. 1. Nhánh cuối đi lên nên $a > 0$. 2. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$ (hoặc nhìn hình đồ thị đi qua phía dưới O). Tuy nhiên, dựa vào các phương án, ta kiểm tra các hệ số khác qua cực trị $x_1 + x_2 = -2b/3a = 4 > 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên $[-1; 5]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm



(A) 5.
(B) 4.
(C) 3.
(D) 1.

Hướng dẫn giải. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đồ thị là $y = 3$, đạt được tại $x = 4$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số có giá trị lớn nhất là 2.
(B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
(C) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$.
(D) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \pm 2$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathscr{D}.$$

Do đó $y(0) = 2$; $y(\pm 2) = 0$. Vậy $\max\limits_{\mathscr{D}} y = y(0) = 2$; $\min\limits_{\mathscr{D}} y = y(\pm 2) = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = x - 5 + \dfrac{1}{x}$, xét trên khoảng $(0; +\infty)$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -3. Ⓒ 4. Ⓓ -4.

Hướng dẫn giải.

Hàm số $y = f(x) = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0; +\infty) \\ x = -1 \notin (0; +\infty). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(1) = -3$. B

Câu 10. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin 2x + 2$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên suy ra $1 \leq \sin 2x + 2 \leq 3$.

Do đó $y_{\max} = 3$; $y_{\min} = 1$ nên

$y_{\max} + y_{\min} = 3 + 1 = 4$.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x-3)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Ⓐ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$. Ⓑ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$.

Ⓒ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \mathrm{e}^5$. Ⓓ Không tồn tại.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = (2x-5)\,\mathrm{e}^{2x}$.

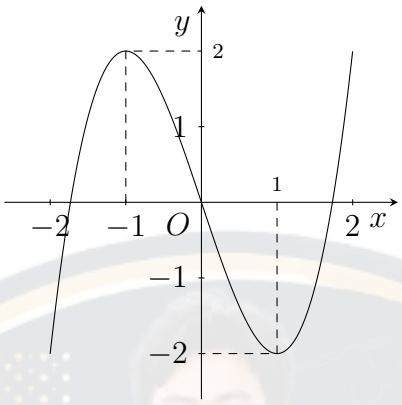
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

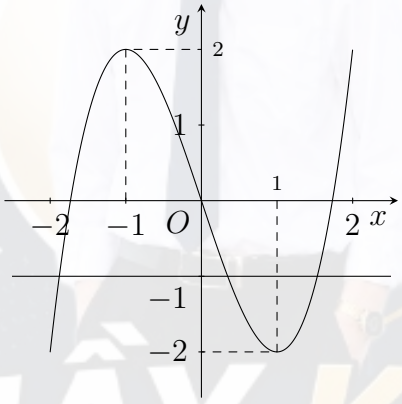
Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là



Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Từ hình vẽ suy ra phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-2; -1)$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x + 2}$.

a) **Đúng**. Giao điểm 2 tiệm cận là $I(-2; 1)$ nhưng hàm bậc 2/bậc 1 thì $I(x_0; y_0)$ với $y = ax + b$ là tiệm cận xiên $\Rightarrow I(-2; -1)$.

b) **Sai**. $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 3$ có 2 nghiệm phân biệt nên có 2 cực trị.

c) **Đúng**. Theo phép chia đa thức ở trên.

d) **Đúng**. Nghiệm mẫu là $x = -2$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[2; 5]$ bằng 10.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai**. $f(2) = 1, f(3) = -1, f(5) = 19$. Vậy GTLN là 19.

b) **Sai**. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Với $x > 3$ thì $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến.

c) **Đúng**. Đạo hàm đa thức cơ bản.

d) **Đúng**. $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ qua $x = 1$. $f(1) = 3$.

Bài 3. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình tính theo thời gian bơm t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \le t \le 0,5$.

a) Ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Dung tích của bình xăng trong xe là 42 lít.

c) Để lượng xăng trong bình xăng có thể tích tối thiểu là $13,6$ lít thì thời gian bơm xăng $t \le 0,2$ phút.

d) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t. Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

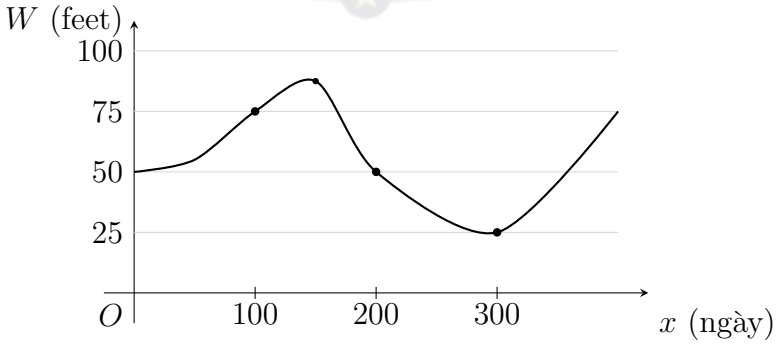
a) **Đúng**. $V(0) = 4$.

b) **Sai**. 30 giây $= 0,5$ phút. $V(0,5) = 300(0,25 - 0,125) + 4 = 41,5$ lít.

c) **Sai**. $V(0,2) = 300(0,04 - 0,008) + 4 = 13,6$. Vì hàm đồng biến nên tối thiểu $13,6$ lít thì $t \ge 0,2$.

d) **Sai**. Tốc độ $v(t) = V'(t) = 600t - 900t^2$. $v'(t) = 600 - 1800t = 0 \Leftrightarrow t = 1/3 \approx 20$ giây. Tốc độ lớn nhất tại giây thứ 20.

Bài 4. Biểu đồ mực nước của một hồ chứa trong năm được mô tả bằng một hàm số W tính bằng feet với x là số ngày được tính từ đầu năm (hình vẽ bên). Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:



a) Trong khoảng từ ngày thứ 150 đến ngày thứ 300 thì mực nước trong hồ giảm

b) Mực nước trong hồ chứa đạt cực đại được vào ngày 100

c) Mực nước trong hồ chứa đạt cực tiểu bằng 25 feet

d) Mực nước trong hồ giảm đi 50 feet từ ngày thứ 100 đến ngày thứ 300.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

a) **Đúng:** Quan sát đồ thị, từ khoảng ngày thứ 150 (vị trí đỉnh cao nhất) đến ngày thứ 300 (vị trí thấp nhất), đường biểu diễn đi xuống. Do đó mực nước trong hồ giảm.

b) **Sai:** Tại ngày thứ 100, mực nước là 75 feet. Tuy nhiên, mực nước tiếp tục tăng và đạt đỉnh cao nhất (cực đại) vào khoảng ngày thứ 150 (với giá trị $W > 75$).

c) **Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị nằm tại vị trí ngày thứ 300, dóng sang trục W ta thấy giá trị tương ứng là 25 feet.

d) **Đúng:**

- Tại ngày thứ 100 ($x = 100$): Mực nước $W(100) = 75$ feet.
- Tại ngày thứ 300 ($x = 300$): Mực nước $W(300) = 25$ feet.
- Lượng giảm: $W(100) - W(300) = 75 - 25 = 50$ feet.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Biết các khoảng nghịch biến của hàm số đã cho là $(-\infty; a)$ và $(b; c)$. Tính giá trị biểu thức $S = 3a + 5b + 7c$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$.

Điều kiện xác định: $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Tập xác định: $D = (-\infty; 3]$.

Ta có $y' = \dfrac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$.

Do đó $a = 0, b = 2, c = 3$.

Giá trị biểu thức $S = 3(0) + 5(2) + 7(3) = 31$.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $(C) : y = \dfrac{-x^2 + 4x + 1}{x + 1}$, biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) có dạng $d : y = ax + b$. Tìm ab.

Hướng dẫn giải. **Cách 1:** Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	10	$\to$	$-\infty$	$+\infty$	$\to$ 2	$\searrow$	$-\infty$

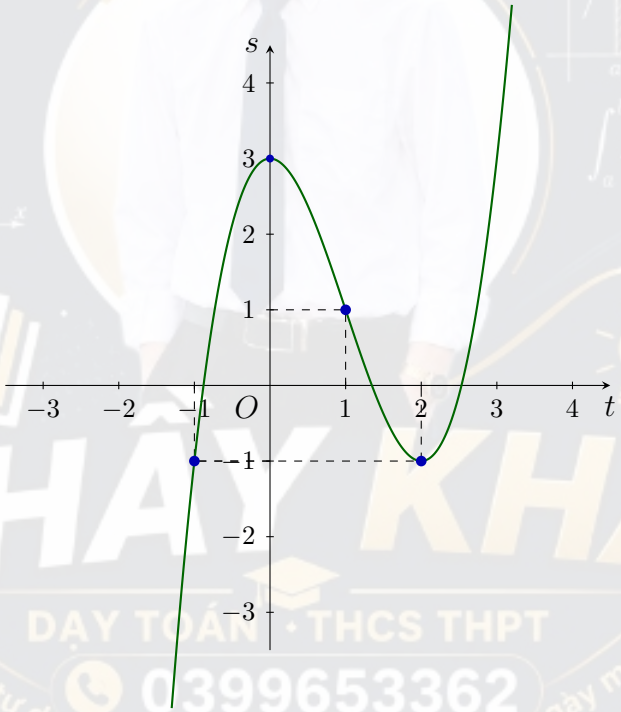
Hai điểm cực trị của (C) là $A(-3;10)$ và $B(1;2)$.

Khi đó $\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=10 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow ab=-8.$

Cách 2: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là $y=\dfrac{(-x^2+4x+1)'}{(x+1)'}=\dfrac{-2x+4}{1}=-2x+4.$

Vậy $a=-2, b=4$ suy ra $ab=-8$.

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=at^3+bt^2+ct+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như hình bên dưới:



Tính vận tốc (m/s) của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng 12 m/s^2.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-1;-1), B(0;3), C(1;1), D(2;-1)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a+b-c+d=-1 \\ d=3 \\ a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=-1 \end{cases}$ $(*)$

Giải hệ phương trình ta được $a=1; b=-3; c=0; d=3$. Do đó $S=t^3-3t^2+3$.

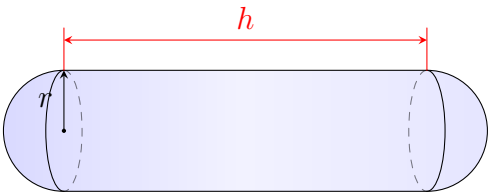
Vận tốc của chuyển động là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v=S'=3t^2-6t$.

Gia tốc của chuyển động là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a=S''=6t-6$.

Theo đề bài: $a=6t-6=12 \Rightarrow t=3$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $v(3) = S'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9$ m/s.

Bài 4. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$) (hình vẽ).



Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi$ m^3. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20 000 đồng cho 1 m^2, còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10 000 đồng cho 1 m^2. Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m.

Hướng dẫn giải. Thể tích của thùng chứa gồm thể tích hình trụ và thể tích của hai nửa hình cầu (tức là một hình cầu):

$$V = V_{\text{trụ}} + V_{\text{cầu}} = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 144\,000\pi \Rightarrow r^2 h = 144\,000 - \frac{4}{3}r^3$$

Từ đó ta có chiều dài hình trụ: $h = \dfrac{144\,000}{r^2} - \dfrac{4r}{3}$.

Vì $h > 0$ nên $144\,000 - \dfrac{4}{3}r^3 > 0 \Leftrightarrow r < 30\sqrt[3]{4} \approx 47,6$ m.

Diện tích mặt ngoài của phần hình cầu là: $S_1 = 4\pi r^2$ (m^2).

Diện tích xung quanh của phần hình trụ là: $S_2 = 2\pi rh$ (m^2).

Tổng chi phí sơn (đơn vị: đồng) là:

$$C(r) = 20\,000 \cdot S_1 + 10\,000 \cdot S_2 = 20\,000 \cdot (4\pi r^2) + 10\,000 \cdot (2\pi rh)$$

$$C(r) = 80\,000\pi r^2 + 20\,000\pi r\left(\frac{144\,000}{r^2} - \frac{4r}{3}\right)$$

$$C(r) = 80\,000\pi r^2 + \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r} - \frac{80\,000\pi r^2}{3} = \frac{160\,000\pi r^2}{3} + \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r}$$

Xét hàm số $C(r)$ trên khoảng $(0; 50]$, ta có đạo hàm:

$$C'(r) = \frac{320\,000\pi r}{3} - \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{320\,000\pi r}{3} = \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2\,880\,000\,000 \cdot 3}{320\,000} = 27\,000 \Leftrightarrow r = 30.$$

Bảng biến thiên:

r	0		30		50
$C'(r)$		$-$	0	$+$	
$C(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$C(30)$	$\nearrow$	$C(50)$

Dựa vào bảng biến thiên, chi phí thấp nhất khi $r = 30$ m (giá trị này thỏa mãn điều kiện $r \le 50$).

Bài 5. Một công ty sản xuất và bán ra 100 sản phẩm mỗi ngày với chi phí sản xuất là 1 triệu đồng/sản phẩm. Công ty phân phối số sản phẩm này đến hai cửa hàng bán lẻ. Do sự khác biệt về

vị trí, nhu cầu, mặt bằng,... nên mỗi cửa hàng có chi phí vận hành và doanh thu khác nhau theo số lượng sản phẩm bán ra.

Tại cửa hàng thứ nhất, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 14 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_1 sản phẩm tại cửa hàng này $(0 \leq x_1 \leq 100, x_1 \in \mathbb{N})$ được mô tả bởi hàm số

$$R_1(x_1) = -6x_1^2 + 2000x_1 \quad \text{(nghìn đồng)}.$$

Tại cửa hàng thứ hai, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 30 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_2 sản phẩm tại cửa hàng này $(0 \leq x_2 \leq 100, x_2 \in \mathbb{N})$ được mô tả bởi hàm số

$$R_2(x_2) = -6x_2^2 + 1800x_2 \quad \text{(nghìn đồng)}.$$

(Chi phí vận hành bao gồm các khoản chi phí dùng cho quảng cáo, vận tải,...). Lợi nhuận của công ty là tổng lợi nhuận từ việc bán sản phẩm từ hai cửa hàng.

Hỏi lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (giả sử số sản phẩm ở cả hai cửa hàng đều được bán hết mỗi ngày và kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi x_1 và x_2 lần lượt là số lượng sản phẩm phân phối cho cửa hàng thứ nhất và cửa hàng thứ hai.

Theo đề bài, ta có: $x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 100 - x_1$ $(0 \leq x_1 \leq 100, x_1 \in \mathbb{N})$.

Đổi đơn vị: 1 triệu đồng = 1000 nghìn đồng.

Tổng chi phí của công ty bao gồm chi phí sản xuất và chi phí vận hành tại hai cửa hàng:

$$\begin{aligned} C &= 1000(x_1 + x_2) + 14x_1 + 30x_2 \\ &= 1000(100) + 14x_1 + 30(100 - x_1) \\ &= 100000 + 14x_1 + 3000 - 30x_1 \\ &= 103000 - 16x_1 \quad \text{(nghìn đồng)}. \end{aligned}$$

Tổng doanh thu từ hai cửa hàng là:

$$\begin{aligned} R &= R_1(x_1) + R_2(x_2) \\ &= -6x_1^2 + 2000x_1 - 6(100 - x_1)^2 + 1800(100 - x_1) \\ &= -6x_1^2 + 2000x_1 - 6(10000 - 200x_1 + x_1^2) + 180000 - 1800x_1 \\ &= -12x_1^2 + 1400x_1 + 120000 \quad \text{(nghìn đồng)}. \end{aligned}$$

Hàm lợi nhuận $P(x_1)$ của công ty là:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= R - C \\ &= (-12x_1^2 + 1400x_1 + 120000) - (103000 - 16x_1) \\ &= -12x_1^2 + 1416x_1 + 17000 \quad \text{(nghìn đồng)}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $P(x_1)$ trên đoạn $[0; 100]$, ta có $P'(x_1) = -24x_1 + 1416$.

Cho $P'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1416}{24} = 59$ (thỏa mãn).

Vì hệ số của x_1^2 âm nên đồ thị là parabol bề lõm hướng xuống, đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

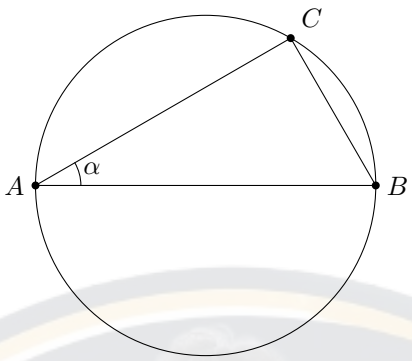
Lợi nhuận lớn nhất tại $x_1 = 59$:

$$P(59) = -12(59)^2 + 1416(59) + 17000 = 58772 \quad \text{(nghìn đồng)}.$$

Đổi sang đơn vị triệu đồng: 58,772 triệu đồng.

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất, ta được: $58,8$

Bài 6. Một bờ hồ hình tròn có bán kính bằng 2 km, đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Từ điểm A anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm C trên hồ, rồi chạy dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 6 km/h (C không trùng với A và B).



Thời gian ngắn nhất mà anh Tài di chuyển từ A đến B là bao nhiêu (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Gọi $R = 2$ km là bán kính của hồ, suy ra đường kính $AB = 4$ km.

Gọi $\alpha = \angle CAB$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Vì AB là đường kính nên tam giác ABC vuông tại C.

Độ dài quãng đường chèo thuyền là: $AC = AB \cdot \cos\alpha = 4\cos\alpha$ (km).

Góc ở tâm chắn cung BC là $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$ (đơn vị radian).

Độ dài quãng đường chạy bộ dọc theo bờ hồ (cung BC) là: $l_{BC} = R \cdot 2\alpha = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$ (km).

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là:

$$f(\alpha) = \frac{AC}{3} + \frac{l_{BC}}{6} = \frac{4\cos\alpha}{3} + \frac{4\alpha}{6} = \frac{4}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\alpha \text{ (giờ)}.$$

Xét hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(\alpha) = -\frac{4}{3}\sin\alpha + \frac{2}{3}.$$

Cho $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Bảng biến thiên:

α	0		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	$\dfrac{4}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi}{9}$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{3}$

Giá trị tại các đầu mút và điểm cực trị:

- $f(0) = \dfrac{4}{3} \approx 1,33.$
- $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi}{9} \approx 1,50.$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \approx 1,047.$

So sánh các giá trị, ta thấy thời gian ngắn nhất $f_{\min} \approx 1,047$ giờ.

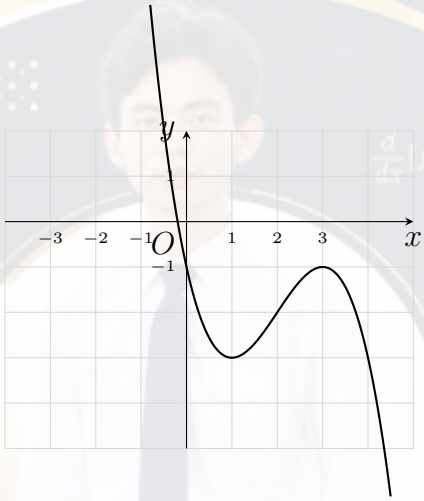
Làm tròn đến hàng phần chục ta được kết quả là 1.

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 8
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(1;3)$. Ⓒ $(5;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;3)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và cực đại tại $x=3$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Vì $(5;+\infty)\subset(3;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$. Chọn C.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{-3x-4}{4x-4}$ nhận điểm nào làm tâm đối xứng trong các điểm sau?

Ⓐ $\left(-1;\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓑ $\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓒ $\left(1;-\dfrac{3}{4}\right)$. Ⓓ $\left(-1;-\dfrac{3}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

Với $y=\dfrac{-3x-4}{4x-4}$, ta có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=-\dfrac{3}{4}$.

Vậy tâm đối xứng là $I\left(1;-\dfrac{3}{4}\right)$. Chọn C.

Câu 3. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{29-6x^2}{-2x-4}$.

Ⓐ $y=3x-8$. Ⓑ $y=-2x-4$.
Ⓒ $y=5x-4$. Ⓓ $y=3x-6$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y=\dfrac{-6x^2+29}{-2x-4}=\dfrac{3x(-2x-4)+12x+29}{-2x-4}=3x+\dfrac{-6(-2x-4)-24+29}{-2x-4}=3x-6+\dfrac{5}{-2x-4}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{-2x-4}=0$ nên tiệm cận xiên là $y=3x-6$.

Chọn D.

Câu 4. Bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$

Ⓐ $y=\dfrac{3-x}{4x-3}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x-3}{4x-3}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x-3}{4x-2}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x+3}{-4x-3}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị có tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{4}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{4}$.

Hàm số ở phương án B có: TCĐ: $x=\dfrac{3}{4}$; TCN: $y=\dfrac{1}{4}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1(-3)-(-3)4}{(4x-3)^2}=\dfrac{9}{(4x-3)^2}>0$ (thỏa mãn hàm số đồng biến). Chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2-3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$.
Ⓑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
Ⓒ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
Ⓓ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=-x^3+x=-x(x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm1$.

$y''=-3x^2+1$.

Tại $x=0$, $y''(0)=1>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Chọn B.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

Ⓐ $M=-2$. Ⓑ $M=2$. Ⓒ $M=4$. Ⓓ $M=0$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D=[-2;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\in D$.

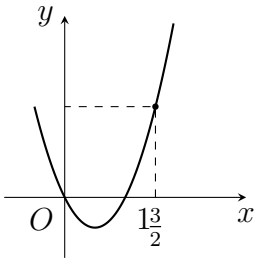
$y(-2)=0$; $y(2)=0$; $y(0)=2$.

Vậy $\max y=2$.

Chọn B.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số

$y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?



Ⓐ $x = \dfrac{3}{2}$. Ⓑ $x = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 0$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị $f'(x)$, trên khoảng $(0;1)$ thì $f'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến. Trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến.

Do đó trên đoạn $[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}]$, hàm số giảm từ 1/2 đến 1 rồi tăng từ 1 đến 3/2.

Suy ra giá trị nhỏ nhất đạt được tại $x = 1$. Chọn C.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

Ⓐ $t = 3$ s. Ⓑ $t = 4$ s. Ⓒ $t = 2$ s. Ⓓ $t = 6$ s.

Hướng dẫn giải. Vận tốc tức thời $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$.

Xét $v(t)$ trên đoạn $[0;4]$: $v'(t) = 12 - 6t$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

$v(0) = 0$; $v(4) = 0$; $v(2) = 12$.

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$. Chọn C.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm lớn hơn -1 của phương trình $f(x) = 1$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình $f(x) = 1$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ ta có

- Trên khoảng $(-1;2)$ ta thấy hàm số giảm từ 3 xuống -2. Vì $-2 < 1 < 3$ nên phương trình có 1 nghiệm thuộc $(-1;2)$.
- Trên khoảng $(2;+\infty)$ ta thấy hàm số tăng từ -2 lên $+\infty$. Vì $1 > -2$ nên phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2;+\infty)$.

Vậy tổng cộng có 2 nghiệm lớn hơn -1.

Câu 10. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x + 4$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $y'(1) = 0$. Đây là đặc điểm của hàm bậc ba có nghiệm kép tại đạo hàm (điểm uốn nằm ngang).

Xét phương án C: $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi $x = 1$ thì $y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2$ (khớp với bảng biến thiên). Chọn C.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; -2)$.
Ⓑ $(2; 4)$.
Ⓒ $(-2; +\infty)$.
Ⓓ $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -2$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. Chọn A.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ $x = 2$.
Ⓑ $x = -1$.
Ⓒ $x = 1$.
Ⓓ $x = -2$.

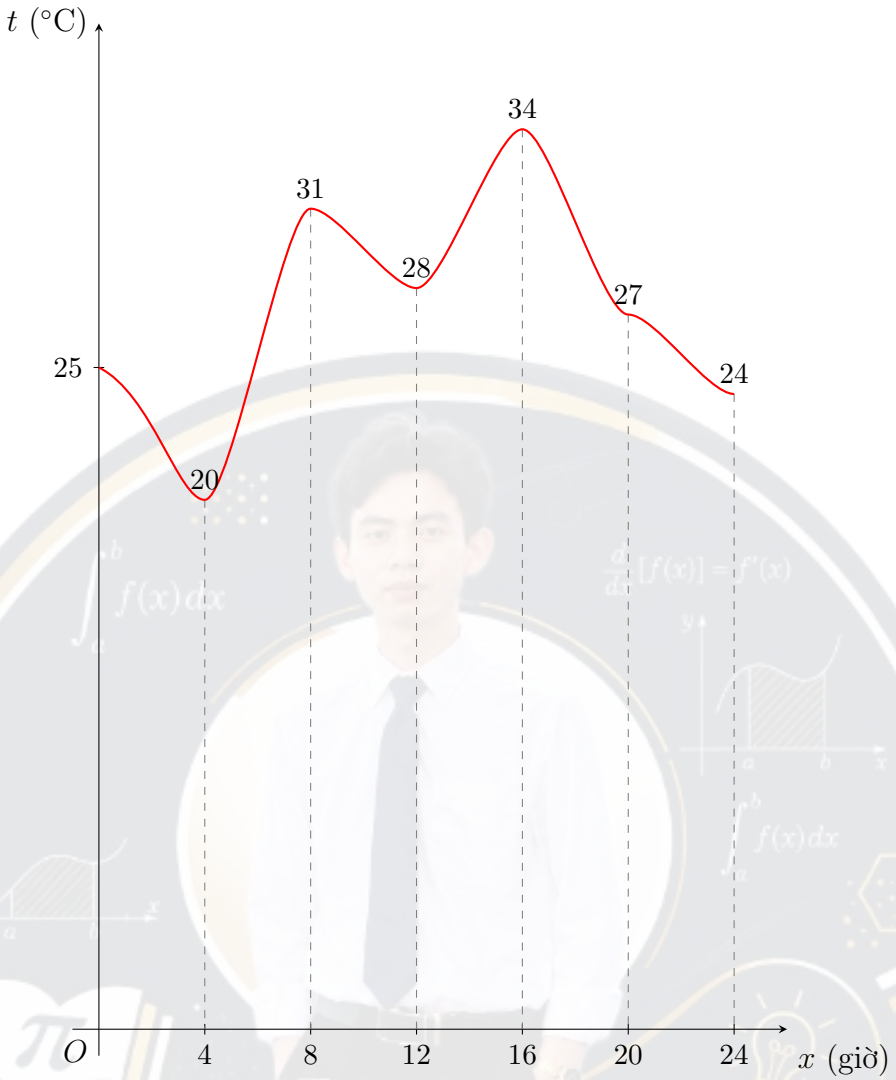
Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = -1$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x = -1$. Chọn B.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính

đúng, sai của các khẳng định sau:



a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C.

c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số nhiệt độ $t(x)$ theo thời gian x:

- **a) Sai:** Giá trị cao nhất đạt được tại đỉnh tương ứng với giá trị $t = 34$°C.
- **b) Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ là $t = 20$°C.
- **c) Đúng:** Điểm cao nhất của đồ thị ($t = 34$) có hoành độ tương ứng là $x = 16$ giờ.
- **d) Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị ($t = 20$) có hoành độ tương ứng là $x = 4$ giờ.

Bài 2. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \dfrac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Nếu một mặt hàng với giá 5 nghìn đồng/kg thì khối lượng mặt hàng đó mà cửa tiệm bán được trong một ngày là 20 kg.

b) Công thức biểu diễn R theo p là $R = -2p^2 + 30p$ với $p > 0$.

c) Để một mặt hàng có doanh thu tối thiểu là 88 nghìn đồng, thì giá của mặt hàng đó $p \geq 4$ nghìn đồng/kg.

d) Giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất là $7,5$ nghìn đồng và doanh thu cao nhất khi đó là $121,5$ nghìn đồng.

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết $p = 15 - \dfrac{1}{2}q \Rightarrow \dfrac{1}{2}q = 15 - p \Rightarrow q = 30 - 2p$.

- **a) Đúng:** Với $p = 5 \Rightarrow q = 30 - 2(5) = 20$ (kg).
- **b) Đúng:** Doanh thu $R = pq = p(30 - 2p) = -2p^2 + 30p$.
- **c) Đúng:** Doanh thu tối thiểu là 88 nghìn đồng $\Rightarrow R \geq 88$.

  $\Leftrightarrow -2p^2 + 30p \geq 88 \Leftrightarrow 2p^2 - 30p + 88 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 11$.

  Vậy giá bán tối thiểu là $p \geq 4$.
- **d) Sai:** Hàm số $R(p) = -2p^2 + 30p$ đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh parabol $p = \dfrac{-30}{2(-2)} = 7,5$.

  Khi đó doanh thu cực đại là $R(7,5) = -2(7,5)^2 + 30(7,5) = 112,5$ nghìn đồng.

  Khẳng định cho kết quả $121,5$ nên là sai.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4\ln(1-x)$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{1-x}$.

c) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ là $1 - 4\ln 2$.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Điều kiện xác định: $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$.

b) Đúng.

Ta có: $y' = (x^2)' - 4(\ln(1-x))' = 2x - 4 \cdot \dfrac{(1-x)'}{1-x} = 2x - 4 \cdot \dfrac{-1}{1-x} = 2x + \dfrac{4}{1-x}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{2x(1-x)+4}{1-x} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{1-x}$.

c) Sai.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in \mathscr{D} \\ x = 2 \notin \mathscr{D} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có duy nhất một nghiệm $x = -1$.

d) Đúng.

Xét trên $[-2; 0]$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Tính các giá trị:

$f(-2) = (-2)^2 - 4\ln(1-(-2)) = 4 - 4\ln 3$.

$f(-1) = (-1)^2 - 4\ln(1-(-1)) = 1 - 4\ln 2$.

$f(0) = 0^2 - 4\ln(1-0) = 0$.

So sánh các giá trị: $1 - 4\ln 2 \approx -1,77$ và $4 - 4\ln 3 \approx -0,39$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ là $f(-1) = 1 - 4\ln 2$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{-4x+5}{2x+3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số không có cực trị.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-3$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-2$.

d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có: $y'=\dfrac{(-4)(3)-(2)(5)}{(2x+3)^2}=\dfrac{-22}{(2x+3)^2}<0, \forall x\neq -\dfrac{3}{2}$.

Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định nên không có cực trị.

b) Sai.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{3}{2}$.

c) Đúng.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{-4}{2}=-2$.

d) Đúng.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x=-1,5$ và tiệm cận ngang $y=-2$.

Hai tiệm cận này cùng với hai trục tọa độ ($x=0$ và $y=0$) tạo thành một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên các đường thẳng $x=0, x=-1,5, y=0, y=-2$.

Độ dài các cạnh là $1,5$ và 2.

Diện tích hình chữ nhật là $S=1,5\cdot 2=3$.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x)=\dfrac{30x}{x^2+2}$. Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $C(x)=\dfrac{30x}{x^2+2}$ trên đoạn $[0;6]$.

Đạo hàm: $C'(x)=\dfrac{30(x^2+2)-30x(2x)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{60-30x^2}{(x^2+2)^2}$.

Cho $C'(x)=0\Leftrightarrow 60-30x^2=0\Leftrightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\approx 1,41$ (nhận vì $x\in[0;6]$).

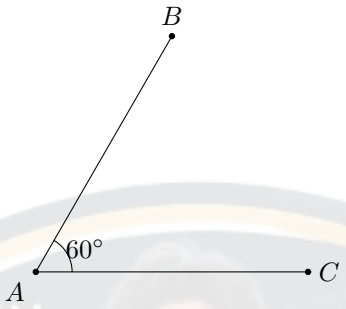
Ta có các giá trị biên và cực trị:

- $C(0)=0$.
- $C(\sqrt{2})=\dfrac{30\sqrt{2}}{2+2}=7,5\sqrt{2}\approx 10,6066$.
- $C(6)=\dfrac{30\cdot 6}{6^2+2}=\dfrac{180}{38}\approx 4,74$.

Vậy giá trị cực đại của nồng độ thuốc trong khoảng 6 phút đầu là $10,6$ mg/l.

Bài 2. Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm A và đi đến điểm C với vận

tốc là 60 (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm B với vận tốc là 30 (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc 60° như hình vẽ dưới đây. Cho biết $AB = 42$ (km) và vào lúc a giờ b phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cực li gần nhất để vẫy tay chào nhau ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + b$? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



Hướng dẫn giải. Chọn mốc thời gian là 12 giờ 00 phút. Gọi t (giờ) là thời gian kể từ mốc này.
- Vị trí anh Quang: Lúc $t = 0$ đang ở B. Anh Quang đi từ B về A với vận tốc 30 km/h. Khoảng cách từ anh Quang đến A là $x = 42 - 30t$ (km).
- Vị trí anh Hùng: Anh Hùng xuất phát từ A lúc 12 giờ 7 phút (tức là $t = \frac{7}{60}$ giờ). Khoảng cách từ anh Hùng đến A là $y = 60(t - \frac{7}{60}) = 60t - 7$ (km).
Khoảng cách giữa hai xe là d, theo định lý hàm số cos trong tam giác: $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$.
$d^2 = (42 - 30t)^2 + (60t - 7)^2 - (42 - 30t)(60t - 7)$.
Khai triển và rút gọn: $d^2 = 6300t^2 - 6090t + 2107$.
Đây là một parabol bề lõm hướng lên, đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \dfrac{-(-6090)}{2 \cdot 6300} = \dfrac{6090}{12600} = \dfrac{29}{60}$ (giờ).
Đổi $t = \dfrac{29}{60}$ giờ $= 29$ phút.
Thời điểm đó là 12 giờ 29 phút. Suy ra $a = 12, b = 29$. Vậy $a + b = 12 + 29 = 41$.

Bài 3. Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$, $f(-3) = 28$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính $S = a^2 + b^2 - c^2$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$.
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ nên $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow 3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0 \Leftrightarrow 27 - 6a + b = 0 \Leftrightarrow b = 6a - 27$.
Lại có $f(-3) = 28 \Leftrightarrow (-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) + 1 = 28 \Leftrightarrow -27 + 9a - 3b + 1 = 28 \Leftrightarrow 9a - 3b = 54 \Leftrightarrow 3a - b = 18$.
Thay $b = 6a - 27$ vào phương trình $3a - b = 18$: $3a - (6a - 27) = 18 \Leftrightarrow -3a + 27 = 18 \Leftrightarrow -3a = -9 \Leftrightarrow a = 3$.
Suy ra $b = 6(3) - 27 = 18 - 27 = -9$.
Kiểm tra lại: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ có hai nghiệm $x = 1, x = -3$. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = -3$ nên là điểm cực đại (thỏa mãn).
Tính $S = a^2 + b^2 - c^2 = 3^2 + (-9)^2 - 1^2 = 9 + 81 - 1 = 89$.

Bài 4. Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận

tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v-6$ (km/h).

Thời gian để bơi quãng đường 300km là $t=\dfrac{300}{v-6}(h)$.

Năng lượng tiêu hao là $E(v)=300c\dfrac{v^3}{v-6}(\text{J})$.

Do $c>0 \Rightarrow E(v)_{\min} \Leftrightarrow \dfrac{v^3}{v-6}=(f(v))_{\min}$.

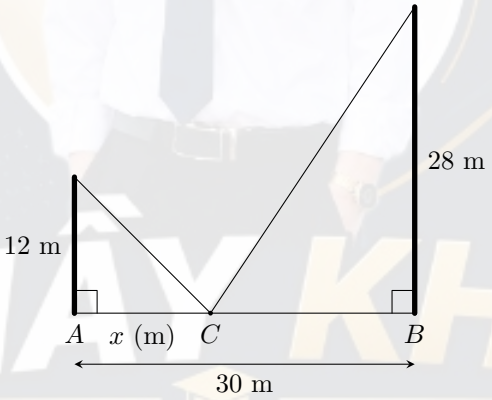
Với $v>6$ ta có $f'(v)=\dfrac{3v^2(v-6)-v^3}{(v-6)^2}=\dfrac{2v^3-18v}{(v-6)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0 \\ v=9. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

v	6		9		$+\infty$
$f'(v)$		$-$	0	$+$	
$f(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là 9 (km/h).

Bài 5. Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Tổng chiều dài ngắn nhất của hai sợi dây là bao nhiêu mét?



Hướng dẫn giải. Ta có $AC=x$, $BC=30-x$ với $x\in(0;30)$.

Tổng chiều dài của hai sợi dây là

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{x^2+12^2}+\sqrt{(30-x)^2+28^2} \\ &=\sqrt{x^2+144}+\sqrt{(30-x)^2+784}. \end{aligned}$$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+144}}-\dfrac{30-x}{\sqrt{(30-x)^2+784}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & f'(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\sqrt{x^2+144}}-\frac{30-x}{\sqrt{(30-x)^2+784}}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\sqrt{x^2+144}}=\frac{30-x}{\sqrt{(30-x)^2+784}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{x^2+144}=\frac{(30-x)^2}{(30-x)^2+784} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2(30-x)^2+784x^2=x^2(30-x^2)+144(30-x)^2$$
$$\Leftrightarrow 784x^2=144(30-x)^2$$
$$\Leftrightarrow 28x=12(30-x)\ (\text{do } x\in(0;30))$$
$$\Leftrightarrow x=9\ (\text{nhận}).$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		9		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	50	$\nearrow$	$f(30)$

Vậy tổng chiều dài ngắn nhất của hai sợi dây là 50 m.

Bài 6. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số ngày phân phối trái cây cho mỗi lần nhập hàng ($1\le x\le 10, x\in\mathbb{N}$).

Mỗi ngày phân phối 25 tạ, nên tổng khối lượng nhập mỗi lần là $25x$ (tạ).

- Chi phí vận chuyển cố định: 25 000 (nghìn đồng).

- Chi phí bảo quản:

- Ngày 1: Phân phối 25 tạ, còn lại $25(x-1)$ tạ cần bảo quản.

- Ngày 2: Phân phối 25 tạ, còn lại $25(x-2)$ tạ cần bảo quản.

- ...

- Ngày x: Phân phối hết, còn 0 tạ bảo quản.

Tổng chi phí bảo quản là: $80\cdot[25(x-1)+25(x-2)+\cdots+25\cdot 1]=80\cdot 25\cdot\dfrac{(x-1)x}{2}=1000(x^2-x)$ (nghìn đồng).

Tổng chi phí cho một lần nhập và phân phối trong x ngày là: $T(x)=25\,000+1000x^2-1000x$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình mỗi ngày là: $f(x)=\dfrac{T(x)}{x}=\dfrac{25\,000}{x}+1000x-1000$ (nghìn đồng).

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{25\,000}{x}$ và $1000x$:

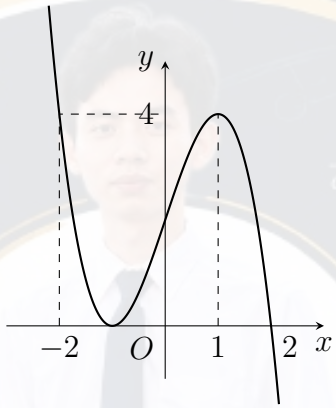
$$f(x)\ge 2\sqrt{\frac{25\,000}{x}\cdot 1000x}-1000=2\cdot 5000-1000=9000.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{25\,000}{x}=1000x\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy đại lý nên nhập hàng cho 5 ngày phân phối để chi phí trung bình mỗi ngày thấp nhất.

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y=x^3+3x-2$.
Ⓑ $y=x^3-3x+2$.
Ⓒ $y=-x^3+3x+2$.
Ⓓ $y=-x^3-3x-2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Nhánh cuối cùng đi xuống nên hệ số $a<0 \Rightarrow$ Loại A, B.
- Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;2) \Rightarrow$ Cả C và D đều thỏa mãn.
- Đồ thị đi qua điểm $(1;4)$. Thay $x=1$ vào phương án C: $y=-1^3+3(1)+2=4$ (đúng). Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$	↗	5
			3		

Ⓐ 4.
Ⓑ 1.
Ⓒ 3.
Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên ta có: - $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2 \Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5 \Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận là 3. Chọn C.

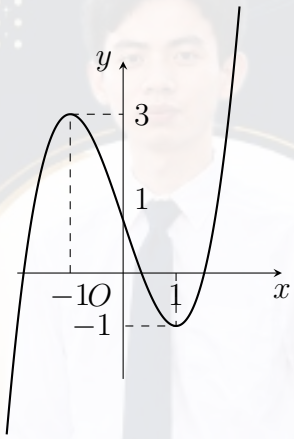
Câu 3. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{x - 1}$.

Ⓐ $y = x - 1$. Ⓑ $y = 3x + 3$. Ⓒ $y = 5x + 10$. Ⓓ $y = 3x + 7$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \dfrac{3x(x-1) + 7x - 5}{x - 1} = 3x + \dfrac{7(x-1) + 2}{x - 1} = 3x + 7 + \dfrac{2}{x - 1}$.

Vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên là $y = 3x + 7$. Chọn D.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1; 1)$. Ⓑ $(-1; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 1)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Trong các phương án, chỉ có phương án D thỏa mãn. Chọn D.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{3x - x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. Ⓑ $(0; 3)$. Ⓒ $\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$. Ⓓ $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D = [0; 3]$.

Ta có $y' = \dfrac{3 - 2x}{2\sqrt{3x - x^2}}$.

Hàm số đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$.

Kết hợp tập xác định, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. Chọn A.

Câu 6. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = 2x - \cos 2x - 5$. Ⓑ $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$.

Ⓒ $y = x^2 - 2x$. Ⓓ $y = \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải. Xét phương án A: $y = 2x - \cos 2x - 5 \Rightarrow y' = 2 + 2\sin 2x = 2(1 + \sin 2x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chọn A.

Câu 7. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x - 1$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 3x^2 + 2x + 3$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3 = 0$.

Ta có $\Delta' = 1^2 - 3 \cdot 3 = -8 < 0 \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Vậy hàm số không có cực trị. Chọn B.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$; 3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $y = 1$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $y = 3$. Ⓓ $x = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

Do đó đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng. Chọn D.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

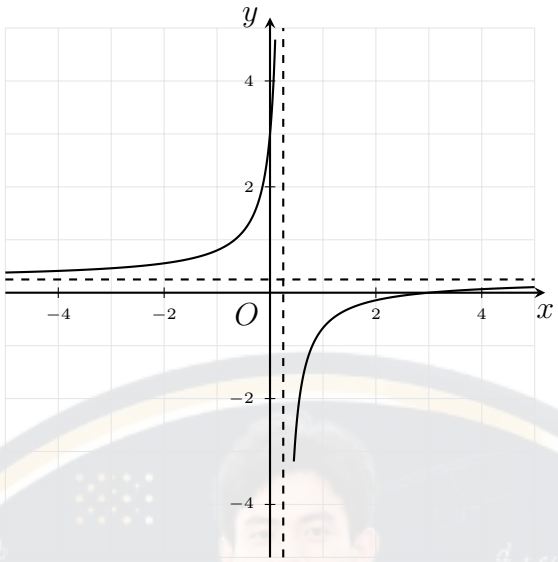
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và giá trị cực đại tương ứng là $y = 2$. Chọn D.

Câu 10. Đồ thị như hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{x+3}{4x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x-3}{-4x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{4x-1}{x-3}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x-3}{4x-1}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Đồ thị có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{4}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{4}$.
- Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(3;0)$ và cắt trục tung tại điểm $(0;3)$.

Kiểm tra phương án D: $y=\dfrac{x-3}{4x-1}$ có TCĐ $x=\dfrac{1}{4}$, TCN $y=\dfrac{1}{4}$, đi qua $(3;0)$ và $(0;3)$. Chọn D.

Câu 11. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

Ⓐ -3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x^2+x-1=x-1\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

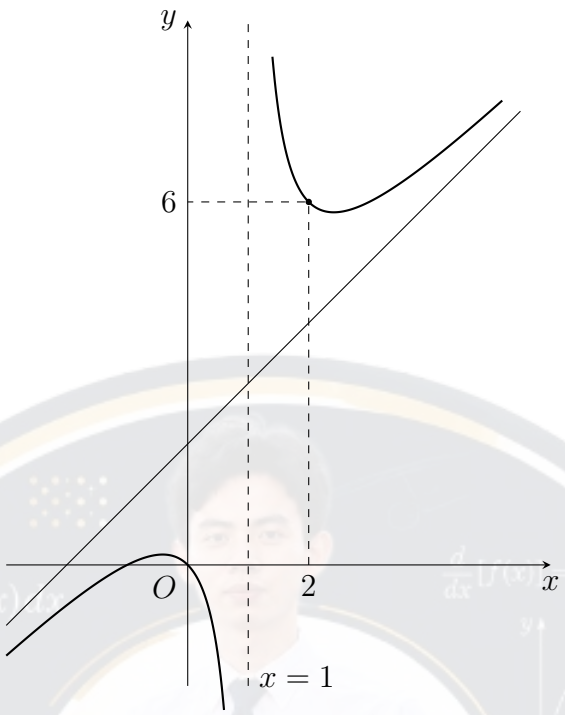
- Với $x=0\Rightarrow y=0-1=-1$.
- Với $x=1\Rightarrow y=1-1=0$.

Tổng tung độ các giao điểm là: $-1+0=-1$. Chọn D.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn luyện hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

khoảng nào trong các khoảng sau:



Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(0;1)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(1;2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số:

- Trên khoảng $(1;2)$, đồ thị đi xuống từ $+\infty$ về điểm cực tiểu $(2;6)$ nên hàm số nghịch biến.

- Trên khoảng $(2;+\infty)$, đồ thị đi lên từ điểm cực tiểu $(2;6)$ nên hàm số đồng biến.

- Trên khoảng $(-\infty;1)$, hàm số có một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến (ngắt tại điểm cực đại). Chọn A.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=2\cos^2 x+2x$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x)=2+2\sin 2x$.

c) Số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};2\pi\right]$ là 7.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là π.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0+\pi=\pi.$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}=1+\dfrac{\pi}{2}.$

b) Sai.

Ta có $f(x)=2\cos^2 x+2x=\cos 2x+1+2x\Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x+2.$

c) Sai.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi.$

Trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};2\pi\right]$, các nghiệm là $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right\}$. Vậy có 2 nghiệm.

d) Đúng.

Vì $f'(x)=2(1-\sin 2x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\max\limits_{[0;\pi/2]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Gọi A,B là hai điểm cực trị của (C). Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

Hướng dẫn giải. Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x=2\Rightarrow y=0\end{array}\right.$.

Các điểm cực trị là $A(0;4)$ và $B(2;0)$.

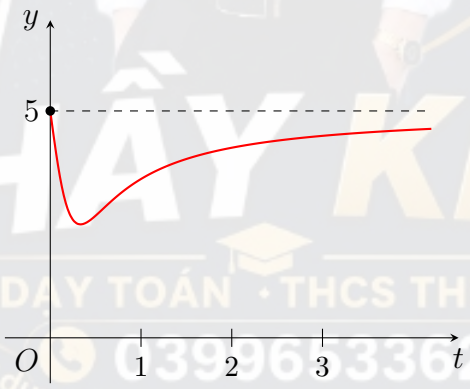
a) Đúng. Hàm đa thức bậc ba xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Sai. Trên khoảng $(0;2)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến.

c) Đúng. Phương trình đường thẳng AB đi qua $(0;4)$ và $(2;0)$ là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1\Leftrightarrow 2x+y-4=0$.

d) Đúng. Tam giác OAB vuông tại O, $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$.

Bài 3. Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\geq 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$.



Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

a) Khi $t=1$ giờ, thì nồng độ oxygen trong hồ là $3,5$ mg/l.

b) Nồng độ oxigen trong hồ cao nhất là 5 mg/l.

c) Nồng độ oxigen trong hồ thấp nhất là $2,45$ mg/l.

d) Đạo hàm $y'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxigen. Tốc độ thay đổi nồng độ oxigen lớn nhất khi $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ giờ.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** $y(1)=5-\dfrac{15(1)}{9(1)^2+1}=5-1,5=3,5$ mg/l.

b) Đúng. $y(0)=5$, và khi $t\to+\infty$ thì $y(t)\to 5$. Hàm số giảm từ 5 xuống cực tiểu rồi tăng lại lên 5 nên giá trị cao nhất là 5.

c) Sai. $y'(t) = \dfrac{-15(1-9t^2)}{(9t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1/3$. Giá trị cực tiểu là $y(1/3) = 5 - \dfrac{5}{1+1} = 2,5$ mg/l.

d) Đúng. Tốc độ thay đổi đạt giá trị lớn nhất tại điểm uốn của đồ thị, tương ứng với $y''(t) = 0$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	2	↘	‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(-5) < f(4)$.

b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Vì $f(-5) \in (-\infty; 2)$ và $f(4) \in (2; +\infty)$ nên $f(-5) < f(4)$.

b) Sai. Vì hàm số có giới hạn $-\infty$ khi $x \to 0^-$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) Đúng. Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$).

d) Sai. Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ nên $y = 2$ là đường tiệm cận ngang.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 – 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0{,}000989t^3 - 0{,}0486t^2 + 0{,}7116t + 1{,}46, \quad 5 \le t \le 19.$$

Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Hướng dẫn giải. Ta có $S'(t) = 3\cdot 0{,}000989t^2 - 2\cdot 0{,}0486t + 0{,}7116 = 0{,}002967t^2 - 0{,}0972t + 0{,}7116$.

Suy ra

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}002967t^2 - 0{,}0972t + 0{,}7116 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 21{,}72 \text{(loại)} \\ t \approx 11{,}04 \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

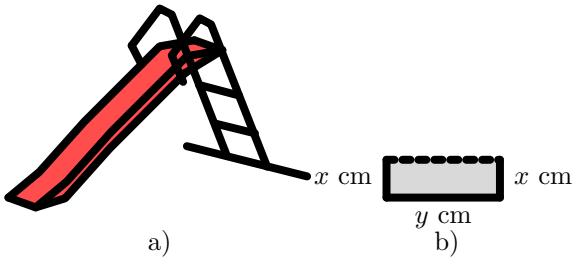
t	5		$11{,}04$		19
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	$3{,}93$	↗	$4{,}72$	↘	$4{,}22$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $S(t)$ đạt cực đại tại $t \approx 11{,}04$.

Vậy vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng 11 tuổi.

Bài 2. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (*Hình a*) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở *Hình b*. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì

càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì mức độ đảm bảo an của cầu trượt đạt cực đại?



a) b)

✍ *Hướng dẫn giải.* Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.
Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.
Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

Ta có:

$$S(x) = -2x^2 + 80x \text{ với } x \in (0; 40);$$
$$S'(x) = -4x + 80$$
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0		20		40
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↗	800	↘	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{\text{CĐ}} = 800$.
Vậy mức độ đảm bảo an toàn của cầu trượt đạt cực đại thì $x = 20$ (cm).

Bài 3. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

✍ *Hướng dẫn giải.* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ có phương trình là $y = \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.
Ta có: $u'(x) = 2x - 4$ và $v'(x) = 1$.
Do đó, phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị là: $y = \dfrac{2x - 4}{1} \Leftrightarrow y = 2x - 4$.
Giao điểm của d với trục Ox: Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2$, ta được điểm $A(2; 0)$.
Giao điểm của d với trục Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = -4$, ta được điểm $B(0; -4)$.
Tam giác tạo bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ là tam giác vuông OAB tại O.
Diện tích tam giác là: $S = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot |2| \cdot |-4| = 4$.

Bài 4. Cho hàm số $y = x\sqrt{3 - x}$. Khoảng nghịch biến của hàm số có độ dài lớn nhất bằng bao nhiêu?

✍ *Hướng dẫn giải.* Điều kiện xác định: $3-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$. Tập xác định $D=(-\infty;3]$.

Đạo hàm: $y'=\sqrt{3-x}+x\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$.

Hàm số nghịch biến khi $y'<0\Leftrightarrow 6-3x<0\Leftrightarrow x>2$.

Kết hợp với tập xác định, khoảng nghịch biến của hàm số là $(2;3)$.

Độ dài của khoảng nghịch biến là: $3-2=1$.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-9x+1}{x-9}$ có điểm cực tiểu $x=x_1$ và điểm cực đại $x=x_2$. Tính $P=4x_1+2x_2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{9\}$.

Ta viết lại hàm số: $y=x+\dfrac{1}{x-9}$.

Đạo hàm: $y'=1-\dfrac{1}{(x-9)^2}=\dfrac{(x-9)^2-1}{(x-9)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow(x-9)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x-9&=1\\x-9&=-1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x&=10\\x&=8\end{aligned}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		8		9		10		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		↗	$y(8)$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$y(10)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1=10$ và đạt cực đại tại $x_2=8$.

Giá trị biểu thức $P=4x_1+2x_2=4(10)+2(8)=40+16=56$.

Bài 6. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên *(làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng)*.

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi x là số máy chủ cần dùng ($x\in\mathbb{N}$) và t là thời gian chạy máy ($0<t\leq 8$).

Tổng số lệnh xử lý là $250\cdot x\cdot t=18\,000\Rightarrow x\cdot t=72\Rightarrow t=\dfrac{72}{x}$.

Vì thời gian tối đa là 8 giờ nên $\dfrac{72}{x}\leq 8\Rightarrow x\geq 9$.

Tiền thuê máy $15x$.

Tiền điện $0{,}12\cdot x\cdot t=0{,}12\cdot 72=8{,}64$.

Tiền giám sát $8\cdot t=8\cdot\dfrac{72}{x}=\dfrac{576}{x}$.

Tổng chi phí $f(x)=15x+\dfrac{576}{x}+8{,}64$.

Xét hàm $f(x)$ với $x \geq 9$, ta có đạo hàm $f'(x) = 15 - \dfrac{576}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 38{,}4 \Rightarrow x = \dfrac{8\sqrt{15}}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{8\sqrt{15}}{5}$		9		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$194{,}5$	$\nearrow$	$207{,}64$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên chọn $x = 9$, ta có $f(9) = 15 \cdot 9 + \dfrac{576}{9} + 8{,}64 \approx 208$ (triệu đồng).

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

TOÁN THẦY KHA
ĐỀ SỐ 10
(Đề gồm có 5 trang)

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG KHẢO SÁT HÀM SỐ
Môn: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số $y = 7x^3 + 9x^2 - 3x - 4$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Giá trị cực đại $y = 1$.
Ⓑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{7}$.
Ⓒ Giá trị cực tiểu $y = \dfrac{1}{7}$.
Ⓓ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 21x^2 + 18x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{7} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên cho thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ với $y(-1) = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{7}$ với $y\left(\dfrac{1}{7}\right) = -\dfrac{207}{49}$. Vậy khẳng định C là sai

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \ln x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$

Câu 3. Điểm cực đại của hàm số $y = (2x+1)e^{1-x}$ là

Ⓐ $x = \dfrac{3}{2}$.
Ⓑ $x = 1$.
Ⓒ $x = -1$.
Ⓓ $x = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = 2e^{1-x} - (2x+1)e^{1-x} = (1-2x)e^{1-x}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = \dfrac{1}{2}$, nên đây là điểm cực đại

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

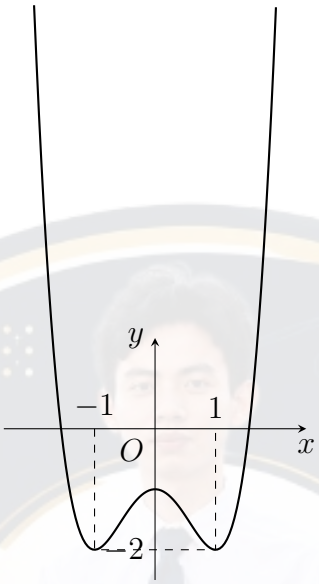
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

Ⓐ -1.
Ⓑ 5.
Ⓒ -3.
Ⓓ 1.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực tiểu là $x = -1$ và giá trị cực tiểu tương ứng là $y = -3$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng



Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-1;1)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi xuống trên khoảng $(0;1)$, do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

Câu 6. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

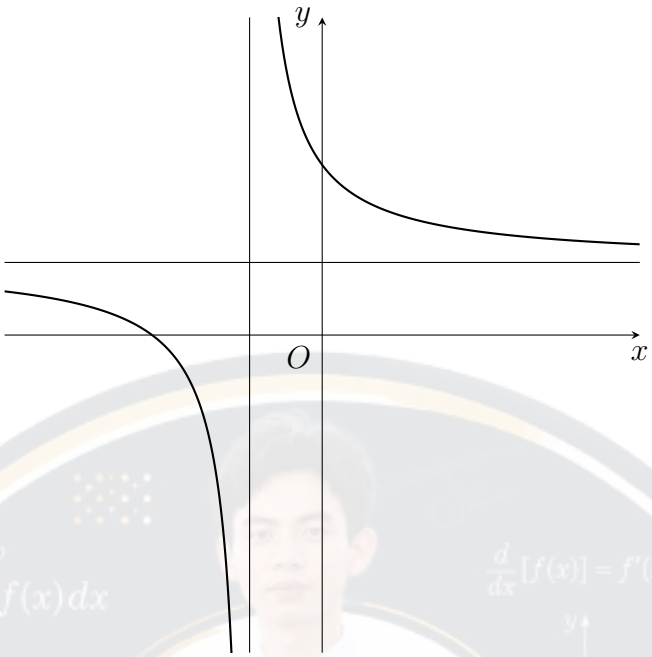
Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Trên $[0;3]$, ta tính các giá trị: $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y(3) = -18$. Giá trị lớn nhất đạt được tại $x = 1$

Câu 7. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $y' < 0, \forall x \neq -1$.
Ⓑ $y' > 0, \forall x \neq -1$.
Ⓒ $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓓ $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Do đó $y' < 0, \forall x \neq -1$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

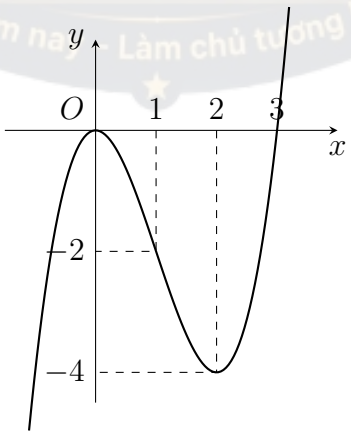
x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 5.
Ⓑ 3.
Ⓒ 2.
Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu 4 lần khi qua các giá trị $x = -2, -1, 1, 4$. Vậy hàm số có 4 điểm cực trị

Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình bên?



Ⓐ $y=x^3-3x$. Ⓑ $y=x^3-3x^2$.
Ⓒ $y=x^3+3x$. Ⓓ $y=x^3+3x^2$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ và đi qua các điểm $(0;0)$, $(2;-4)$, $(3;0)$. Thay vào các phương án, chỉ có hàm số $y=x^3-3x^2$ thỏa mãn

Câu 10. Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng?

Ⓐ $y=\dfrac{2}{x+2}$. Ⓑ $y=\dfrac{5x}{2-x}$.
Ⓒ $y=\dfrac{1}{x+1}$. Ⓓ $y=x-2+\dfrac{1}{x+1}$.

Hướng dẫn giải. Tiệm cận đứng của hàm số ở phương án B là nghiệm của mẫu số $2-x=0\Leftrightarrow x=2$

Câu 11. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\ln x$. Ⓑ $y=\log x$.
Ⓒ $y=\left(\dfrac{1}{2023}\right)^x$. Ⓓ $y=\left(\dfrac{8}{5}\right)^x$.

Hướng dẫn giải. Hàm số mũ $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$. Ta có $\dfrac{8}{5}>1$ nên chọn đáp án D

Câu 12. Chi phí để sản xuất x sản phẩm là $C(x)=2500+10x+\dfrac{1}{4}x^2$ (nghìn đồng). Chi phí trung bình trên mỗi sản phẩm là thấp nhất khi số lượng sản phẩm được sản xuất là

Ⓐ 50. Ⓑ 20. Ⓒ 1000. Ⓓ 100.

Hướng dẫn giải. Chi phí trung bình trên mỗi sản phẩm là

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{2\,500}{x}+10+\frac{1}{4}x \text{ với } x>0.$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2\,500}{x}+10+\dfrac{x}{4}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{2\,500}{x^2}+\dfrac{1}{4}$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}=\dfrac{2\,500}{x^2}\Leftrightarrow x^2=10\,000\Rightarrow x=100$ (vì $x>0$).

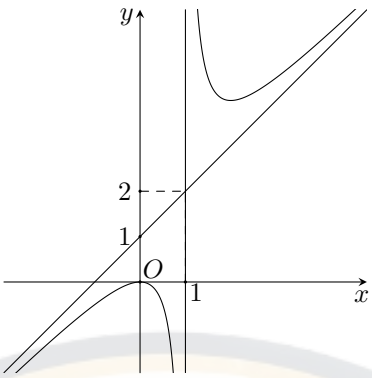
Bảng biến thiên

x	0		100		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	60	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, chi phí trung bình thấp nhất khi sản xuất 100 sản phẩm. D

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn đúng hoặc sai*

Bài 1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$ là hình bên



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty$

c) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x + 1$

d) Tổng $a + b + c + d = 2$

Hướng dẫn giải. a) Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$.

c) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có dạng $y = ax + b$. (1)

Do đường tiệm cận xiên đi qua 2 điểm $(0;1)$ và $(1;2)$, ta thay vào (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x + 1$.

d) Dựa vào đồ thị hàm số, phương trình đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Nên mẫu số có dạng $x - 1 \Rightarrow d = -1$.

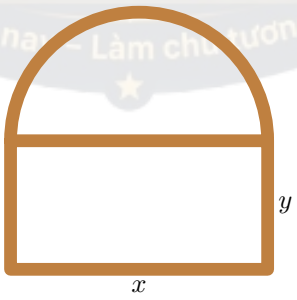
Kết hợp phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x + 1$.

Ta có $y = x + 1 + \dfrac{c}{x-1}$. (2)

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;0)$ thay vào (2) ta được $0 + 1 + \dfrac{c}{0-1} = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

Vậy tổng $a + b + c + d = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$.

Bài 2. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$

b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$

c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \dfrac{16}{8+\pi}$

Hướng dẫn giải.

a) Bán kính của hình bán nguyệt là $\dfrac{x}{2}$ nên nửa chu vi bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$.

b) Ta có $2(x+y) + \dfrac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow y = 4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ

$$S = xy + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(4 - x - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{8} = -\left(1+\frac{\pi}{8}\right)x^2 + 4x.$$

d) Khi $S = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{32}{8+\pi}. \end{array}\right.$

Ta có $S' = 4 - 2x - \dfrac{\pi}{4}$. Khi đó $S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{16}{8+\pi}$		$\dfrac{32}{8+\pi}$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	$\dfrac{32}{8+\pi}$	↘	0

Từ bảng biến thiên, ta có S đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{32}{8+\pi}$ tại $x = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Thay $x = \dfrac{16}{8+\pi}$ vào $y = 4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$ ta được $y = 4 - x - \dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{16}{8+\pi}$.

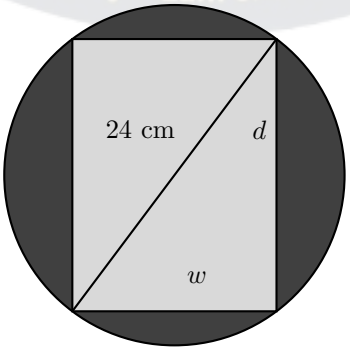
Bài 3. Độ cứng S của một thanh gỗ hình chữ nhật tỉ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều dài d của nó (theo đơn vị mét). Biết rằng nếu thanh gỗ có chiều dài là 6 cm, chiều rộng là 3 cm thì độ cứng của nó bằng 108. Một khúc gỗ hình tròn có đường kính là 24 cm, người ta cắt thành một thanh gỗ hình chữ nhật như hình vẽ bên.

a) Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật liên hệ bởi công thức $d^2 + w^2 = 576$

b) Độ cứng của thanh gỗ là $S = 2dw^2$

c) Độ cứng của thanh gỗ được mô phỏng bằng hàm số $S(w) = 576w - w^3, \forall w \in (0;24)$

d) Độ cứng lớn nhất của miếng gỗ cắt ra được là $S_{\max} = 5321$ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Hướng dẫn giải. a) Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông tạo bởi chiều dài d, chiều

rộng w và đường chéo là đường kính hình tròn 24 cm, ta có $d^2+w^2=24^2=576$. Vậy mệnh đề a) đúng

b) Theo đề bài $S=k\cdot w\cdot d^2$. Với $d=6, w=3, S=108 \Rightarrow 108=k\cdot 3\cdot 6^2 \Rightarrow k=1$.

Do đó $S=w\cdot d^2$. Vậy mệnh đề b) sai

c) Thay $d^2=576-w^2$ vào công thức tính S, ta được $S(w)=w(576-w^2)=576w-w^3$. Vậy mệnh đề c) đúng

d) Xét hàm $S(w)=576w-w^3$ trên $(0;24)$. Ta có $S'(w)=576-3w^2$.

$S'(w)=0 \Leftrightarrow w=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$.

Khi đó $S_{\max}=S(8\sqrt{3})=3072\sqrt{3}\approx 5320,8\approx 5321$. Vậy mệnh đề d) đúng

Bài 4. Dựa vào thiết bị giám sát hành trình của một xe khách di chuyển trên một đường thẳng theo thời gian t (phút), với gốc tọa độ là văn phòng của công ty và chiều dương cho trước, người ta xác định được vị trí của xe tại thời điểm t (phút) được cho bởi hàm số $S(t)=\dfrac{1}{36}t^3-\dfrac{1}{6}t^2$ (km) với $t\in[0;6]$. Vận tốc của xe tại thời điểm t (phút) (với $t\in[0;6]$) là $v(t)$ (km/phút) được tính theo công thức $v(t)=S'(t)$.

a) Sau 1 phút di chuyển, xe cách văn phòng công ty một đoạn $\dfrac{5}{36}$ km.

b) Vận tốc của xe tại thời điểm $t=1$ (phút) là $-\dfrac{1}{4}$ (km/phút).

c) Sau 6 phút di chuyển, xe di chuyển được quãng đường là $\dfrac{16}{9}$ km.

d) Trong khoảng thời gian từ phút thứ 2 đến phút thứ 4, tốc độ xe đang tăng dần.

Hướng dẫn giải. a) Ta có

$$S(1)=\frac{1}{36}\cdot 1^3-\frac{1}{6}\cdot 1^2=-\frac{5}{36}.$$

Vậy sau 1 phút di chuyển, xe cách văn phòng công ty một đoạn $\dfrac{5}{36}$ km.

b) Ta có $v(t)=S'(t)=\dfrac{1}{12}t^2-\dfrac{1}{3}t$.

Vận tốc của xe tại thời điểm $t=1$ là $v(1)=\dfrac{1}{12}\cdot 1^2-\dfrac{1}{3}\cdot 1=-\dfrac{1}{4}$.

c) Ta có $S'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4. \end{array}\right.$

Xét trên đoạn $[0;6]$, ta có $S(0)=0=S(6)$, $S(4)=-\dfrac{8}{9}$.

Do đó, quãng đường xe di chuyển được sau 6 phút là

$$|S(4)-S(0)|+|S(6)-S(4)|=\frac{16}{9}\text{ km}.$$

d) Xét hàm số $v(t)=\dfrac{1}{12}t^2-\dfrac{1}{3}t$.

Ta có $v'(t)=\dfrac{1}{6}t-\dfrac{1}{3}$.

Cho $v'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$.

THẦY KHA
DẠY TOÁN THCS THPT
0399653362

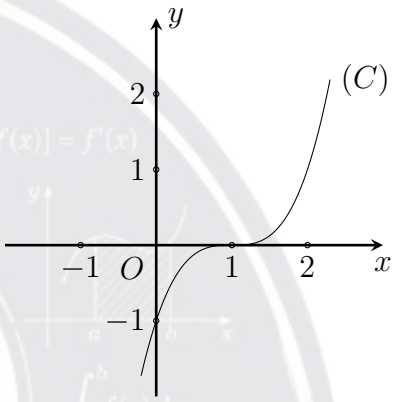
Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$

t	0		2	4	6
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$ 0	

Dựa vào bảng biến thiên, trong khoảng thời gian từ phút thứ 2 đến phút thứ 4, tốc độ xe là $|v(t)|$ đang giảm dần.

Phần III. Câu trả lời ngắn

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khi đó $f(5)$ bằng



Hướng dẫn giải. Gọi hàm số bậc 3 cần tìm có dạng là $y = ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y' = 3ax^2+2bx+c$.
Từ đồ thị ta có

$$\begin{cases} d = -1 \\ a+b+c+d = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ b^2-3ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Suy ra $f(5) = 64$.

Bài 2. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = -2x+1+\dfrac{2}{x-2}$ tạo với nhau một góc α, hãy tính $\tan\alpha$ (viết kết quả ở dạng số thập phân).

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-2x+1+\dfrac{2}{x-2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2x+1+\dfrac{2}{x-2}\right) = -\infty$.
Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $d_1\colon x = 2$ (hay $x-2=0$).
Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(-2x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-2} = 0$.
Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $d_2\colon y = -2x+1$ (hay $2x+y-1=0$).
Đường thẳng d_1 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1;0)$.
Đường thẳng d_2 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2;1)$.
Gọi α là góc giữa hai đường tiệm cận d_1 và d_2, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 2+0\cdot 1|}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}-1=\dfrac{5}{4}-1=\dfrac{1}{4}$.

Vì $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$ nên $\tan\alpha\ge 0$, do đó $\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$.

Bài 3. Cho hàm số $y=2x+1+\sqrt{x^2-4x+5}$. Biết đồ thị hàm số có hai tiệm cận xiên cắt nhau tại $I(a;b)$. Tính $a+b$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=2x+1+\sqrt{x^2-4x+5}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1+\sqrt{x^2-4x+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)=1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\sqrt{x^2-4x+5}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)=3.$
- Với $a=1$, ta có

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2-4x+5}\right)\\&=1+\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x+5}\right)\\&=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{x-\sqrt{x^2-4x+5}}\\&=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}\\&=3.\end{aligned}$$

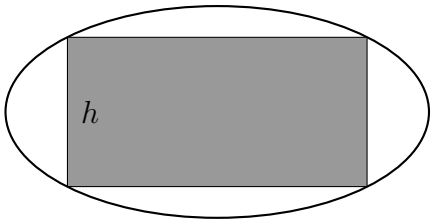
  Suy ra, $d_1\colon y=x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.
- Với $a=3$, ta có

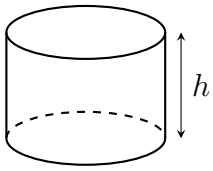
$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\sqrt{x^2-4x+5}\right)\\&=1+\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+5}-x\right)\\&=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}\\&=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}\\&=-1.\end{aligned}$$

  Suy ra, $d_2\colon y=3x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Khi đó, giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của phương trình $x+3=3x-1\Leftrightarrow x=2$, $y=5$.
Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $I(2;5)$.
Vậy $a+b=7$.

Bài 4. Người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng là một elip với độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).





Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ sao cho elip có phương trình: $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Gọi kích thước của hình chữ nhật nội tiếp elip là $2x$ và $2y$ (với $x, y>0$). Khi đó điểm $M(x,y)$ thuộc elip.

Dựa vào hình vẽ, chiều cao của khối trụ là $h=2y \Rightarrow y=\dfrac{h}{2}$.

Chu vi đường tròn đáy của khối trụ bằng chiều dài cạnh còn lại của hình chữ nhật: $2\pi R = 2x \Rightarrow R=\dfrac{x}{\pi}$.

Từ phương trình elip ta có: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(h/2)^2}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{h^2}{16}=1 \Rightarrow x^2=16-h^2$ (điều kiện $0<h<4$).

Thể tích khối trụ là: $V=\pi R^2 h=\pi\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2 h=\dfrac{x^2 h}{\pi}=\dfrac{(16-h^2)h}{\pi}=\dfrac{16h-h^3}{\pi}$.

Xét hàm số $f(h)=16h-h^3$ trên khoảng $(0;4)$, ta có $f'(h)=16-3h^2$.

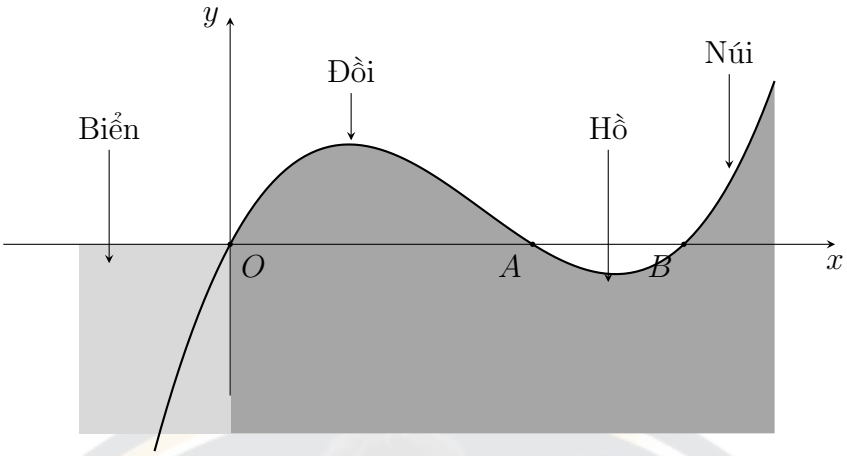
$f'(h)=0 \Leftrightarrow h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (do $h>0$).

Bảng biến thiên cho thấy $f(h)$ đạt cực đại tại $h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Giá trị thể tích lớn nhất là: $V_{\max}=\dfrac{f(4/\sqrt{3})}{\pi}=\dfrac{128}{3\pi\sqrt{3}}\approx 7{,}84$.

Bài 5. Hình vẽ sau mô phỏng một mặt cắt ngang của một phần hòn đảo X, trên hòn đảo X có một lớp đất cạnh một bờ biển, phần nhô lên cao là đỉnh của một quả đồi và phần trũng tạo thành một hồ nước tự nhiên. Trên hệ tọa độ Oxy, đường cong $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ mô phỏng độ cao của lớp đất bên cạnh bờ biển với trục Ox là mực nước biển, đơn vị trên các hệ trục là một kilômét. Biết khoảng cách giữa hai bên chân đồi là $OA=2$ km, chiều dài

của hồ là $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m.



Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ là bao nhiêu(làm tròn đến hàng đơn vị)

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, đồ thị cắt trục Ox tại gốc tọa độ $O(0;0)$, điểm chân đồi $A(2;0)$ (vì $OA = 2$) và điểm cuối hồ $B(3;0)$ (vì $AB = 1$). Do đó phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 0, x = 2, x = 3$.

Vì hàm số bậc ba có 3 nghiệm phân biệt nên $f(x) = ax(x-2)(x-3)$.

Ta có $f(x) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$. Đạo hàm $f'(x) = a(3x^2 - 10x + 6)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$. Đỉnh đồi tương ứng với điểm cực đại $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,785$.

Theo đề bài, độ cao đỉnh đồi là 528 m $= 0,528$ km. Ta có $f(x_1) = 0,528$.

$f\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\right) = a \cdot \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \approx 2,1126a$.

$\Rightarrow 2,1126a = 0,528 \Rightarrow a \approx 0,25$.

Điểm sâu nhất của hồ tương ứng với điểm cực tiểu $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,549$.

Độ sâu $h = |f(x_2)| = |0,25 \cdot x_2(x_2 - 2)(x_2 - 3)|$.

$h = |0,25 \cdot 2,549 \cdot 0,549 \cdot (-0,451)| \approx 0,1578$ km $= 157,8$ m.

Giá trị 157,8 m không xấp xỉ 142 m. Vậy mệnh đề d) sai

Bài 6. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c\left(1 - e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết của bài toán, ta có các thông số sau:

- Tổng số đơn vị kiến thức cần học: $c = 25$.

- Tốc độ tiếp thu: $k = 0{,}2$.
- Thời gian học: $t = 8$ ngày.

Thay các giá trị vào mô hình hàm số mũ $f(t) = c\left(1 - e^{-kt}\right)$, ta được:

$$f(8) = 25 \cdot \left(1 - e^{-0{,}2 \cdot 8}\right) = 25 \cdot \left(1 - e^{-1{,}6}\right)$$

Sử dụng máy tính bỏ túi để tính giá trị gần đúng:

$$e^{-1{,}6} \approx 0{,}2018965$$

$$\Rightarrow f(8) \approx 25 \cdot (1 - 0{,}2018965) \approx 25 \cdot 0{,}7981035 \approx 19{,}9525$$

Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, ta được $f(8) \approx 20$.
Vậy sau 8 ngày, em học sinh đó sẽ học được khoảng 20 đơn vị kiến thức mới.

THẦY KHA
DẠY TOÁN · THCS THPT
0399653362
Rèn tư duy hôm nay – Làm chủ tương lai ngày mai