



TỌA ĐỘ *trong* MẶT PHẪNG



TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM



MỤC LỤC

Bài 1. TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

1. Trục tọa độ.....	3
2. Hệ trục tọa độ.....	3
3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.....	4
4. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.....	5

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Tọa độ trên trục.....	6
➤ Dạng 2. Tọa độ trên hệ trục.....	9

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	14
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai.....	16
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	19

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. Lý thuyết

1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng.....	21
2. Liên hệ giữa VTCP và VTPT.....	22
3. Phương trình đường thẳng.....	22

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Phương trình tham số của đường thẳng.....	24
➤ Dạng 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng.....	26
➤ Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng.....	28
➤ Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.....	32

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	34
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai.....	36
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	39

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn.....	41
2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.....	41
3. Vị trí tương đối.....	42

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Nhận diện phương trình đường tròn – tìm tâm & bán kính.....	43
---	----



➤ Dạng 2. Viết phương trình đường tròn	46
➤ Dạng 3. Vị trí tương đối giữa đường tròn & đường thẳng.....	49
➤ Dạng 4. Vị trí tương đối giữa đường tròn & đường tròn.....	53
➤ Dạng 5. Tiếp tuyến của đường tròn	56

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	60
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai	63
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	65

Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC

A. Lý thuyết

1. Elip	68
2. Hypebol.....	68
3. Parabol.....	69

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Phương trình Elip	70
➤ Dạng 2. Phương trình Hypebol	73
➤ Dạng 3. Phương trình Parabol	76

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	78
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai	82
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	90

TOÁN TỪ TÂM



Chương 09

Bài 1.

TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG



A

Lý thuyết

1. Trục tọa độ

1.1. Định nghĩa



Định nghĩa

- » Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.
- » Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- » Hướng của vectơ đơn vị là hướng của trục.
- » Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{i})$.



1.2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục



Định nghĩa

- » Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số a được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\vec{u} = a\vec{i}$.
 - » Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số m được gọi là tọa độ của điểm M trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$.
- Như vậy tọa độ điểm M là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

2. Hệ trục tọa độ

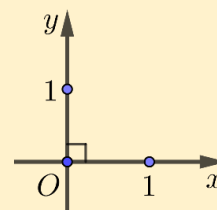
2.1. Định nghĩa



Định nghĩa

- » Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Điểm O là gốc tọa độ, Ox gọi là trục hoành và Oy gọi là trục tung.

Kí hiệu: Oxy hay $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



2.2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ



Định nghĩa

» Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của vectơ

$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Kí hiệu: $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

» Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M .

Kí hiệu: $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$.

2.3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác



» M là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

» G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ



Cho $\vec{u} = (x; y); \vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có

(1) $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

(2) $\vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$

(3) $k\vec{u} = (kx; ky)$

(4) $\vec{u}'$ cùng phương với $\vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

(5) Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.



4. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

(2) $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

(4) $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

(5) $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$)

TOÁN TỪ TÂM

B



Dạng 1. Tọa độ trên trục



Như vậy tọa điểm M là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.



(4) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

 **Lời giải**

TOÁN TỪ TÂM



Ví dụ 1.2.

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -3 và 1 .

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \mathbf{1}$.
- (2) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Trên trục tọa độ $(0; \vec{i})$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là a, b .

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, (k \neq 1)$.
- (2) Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.4.

Trên trục tọa độ $(0; \vec{i})$ cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ.

Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.5.

Trên trục $(O; \vec{i})$, cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c .

Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2. Tọa độ trên hệ trục



Phương pháp

$$(1) \text{ M là trung điểm của đoạn AB } \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

$$(2) \text{ G là trọng tâm tam giác ABC } \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}.$$

» Cho $\vec{u} = (x; y); \vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có

$$(1) \vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$(2) \vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$(3) k\vec{u} = (kx; ky)$$

$$(4) \vec{u}' \text{ cùng phương với } \vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \text{tồn tại số } k \text{ sao cho } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

$$(5) \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0$$

$$(6) \cos(\vec{u}; \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (\vec{u}; \vec{u}' \text{ đều khác } \vec{0})$$

$$(7) \text{ Cho hai điểm } A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \text{ thì } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

$$(8) AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Ví dụ 2.1.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$.

- (1) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .
- (2) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

-  **Lời giải**



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1;-2), B(3;2), C(4;-1)$.

-  **Lời giải**


$$\text{Cho } \vec{a} = (2; 0), \vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right), \vec{c} = (4; -6)$$

-  **Lời giải**



Cho 4 điểm $A(1;1), B(2;-1), C(4;3), D(16;3)$.

~~Lời giải~~



Ví dụ 2.6.

Tìm m để

- (1) 2 vectơ $\vec{a} = (2m; 3m+1)$ và $\vec{b} = (-4; -8)$ cùng phương.
- (2) 3 điểm $A(1;1), B(3;2), C(m+4; 2m+1)$ thẳng hàng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.7.

Cho ba điểm $A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -2)$

- (1) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- (2) Tìm tọa độ điểm E , sao cho $ABEC$ là hình bình hành.
- (3) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



(4) Tìm điểm N trên Oy sao cho $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO .





Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , tọa độ của vectơ $\vec{a} = 8\vec{j} - 3\vec{i}$ bằng
A. $\vec{a} = (-3; 8)$. **B.** $\vec{a} = (3; -8)$. **C.** $\vec{a} = (8; 3)$. **D.** $\vec{a} = (8; -3)$.
- » **Câu 2.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng
A. 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.
- » **Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 3)$ và $B(0; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} = (5; -3)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (1; -3)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-1; 3)$.
- » **Câu 4.** Cho $A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0)$. Tìm x sao cho $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{BC}$
A. $x = \frac{2}{3}$ **B.** $x = -\frac{2}{3}$ **C.** $x = \frac{3}{2}$ **D.** $x = -\frac{3}{2}$
- » **Câu 5.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là
A. 45° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 135° .
- » **Câu 6.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -3), \vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$
A. 16. **B.** 26. **C.** 36. **D.** -16.
- » **Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?
A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10.
B. Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.
C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5.
D. Góc giữa hai vectơ là 90° .
- » **Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **B.** $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u} = -\vec{v}$.
- » **Câu 9.** Trong hệ tọa độ Oxy cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là
A. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; 5\right)$. **B.** $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$. **C.** $\vec{u} = (-1; 10)$. **D.** $\vec{u} = (1; -10)$.
- » **Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $\vec{a} = (5; 2), \vec{b} = (10; 6 - 2x)$. Tìm x để $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương?
A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.
- » **Câu 11.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1; 1), N(4; -1)$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MN}$.
A. $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{13}$. **B.** $|\overrightarrow{MN}| = 5$. **C.** $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{29}$. **D.** $|\overrightarrow{MN}| = 3$.

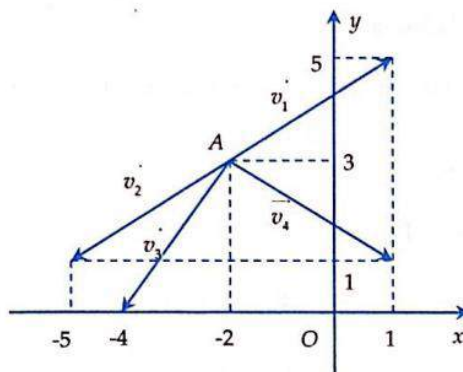


- » **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$
- » **Câu 13.** Trên trục $(O; \vec{i})$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $-5; 2; 4$. Khi đó tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là:
A. $\frac{10}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5}{4}$
- » **Câu 14.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm B, C lần lượt là $m-2$ và m^2+3m+2 . Tìm m để đoạn thẳng BC có độ dài nhỏ nhất.
A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$
- » **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$
A. $\vec{c} = (-1; -3)$ **B.** $\vec{c} = (-1; 3)$ **C.** $\vec{c} = (1; -3)$ **D.** $\vec{c} = (1; 3)$
- » **Câu 16.** Cho $\overrightarrow{OM} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3; -1)$. Tính góc của $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$
A. 135° . **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** -135° . **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- » **Câu 17.** Cặp vector nào sau đây vuông góc?
A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. **B.** $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.
C. $\vec{a} = (-2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$. **D.** $\vec{a} = (7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.
- » **Câu 18.** Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(5; -1)$. Tính $\cos A$
A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{-2}{\sqrt{5}}$.
- » **Câu 19.** Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vector: $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **B.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **C.** $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$. **D.** $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.
- » **Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vector $\vec{c}$ vuông góc với vector $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $2k = 2m$ **B.** $3k = 2m$ **C.** $2k + 3m = 0$ **D.** $3k + 2m = 0$.
- » **Câu 21.** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.
A. $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -4)$. **B.** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.
C. Tam giác ABC vuông cân tại A . **D.** Tam giác ABC vuông cân tại B .
- » **Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .
A. $C(0; 6)$. **B.** $C(5; 0)$. **C.** $C(3; 1)$. **D.** $C(0; -6)$.
- » **Câu 23.** Cho tam giác ABC có $A(-1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .



- A. $(0;3)$. B. $(0;-3)$. C. $(3;0)$. D. $(-3;0)$.

» **Câu 24.** Cho điểm $A(-2;3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$?



- A. $\vec{V}_1$ B. $\vec{V}_2$ C. $\vec{V}_3$ D. $\vec{V}_4$

» **Câu 25.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

- A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.
C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

» **Câu 26.** Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3;y)$ tạo với véc tơ $\vec{a}$ một góc 45° ?

- A. $y = -9$. B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$. D. $y = -1$.

» **Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

- A. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ C. $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ D. $M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}\right)$

» **Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (1;2)$ và $\vec{v} = (4m; 2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

» **Câu 29.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, biết $M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh BC . Tọa độ đỉnh A là

- A. $(2; 0)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0;-2)$. D. $(0; 2)$.

» **Câu 30.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm I của AD và BG với D thuộc BC và $2BD = 5DC$, G là trọng tâm $\triangle ABC$

- A. $I\left(\frac{5}{9}; 1\right)$ B. $I\left(\frac{1}{9}; 1\right)$ C. $I\left(\frac{35}{9}; 2\right)$ D. $I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho các điểm $A(0;2); B(1;1); C(-1;-2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn BC, CA, AB theo các tỉ số $-1; \frac{1}{2}; -2$. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$		
(b)	$B'(2; 6)$		
(c)	$C'\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$		
(d)	Ba điểm A', B', C' thẳng hàng.		

» Câu 32. Cho $A(0; 1); B(2; -3); C(1; -7)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu B là trung điểm của AM thì tọa độ điểm $M(1; -2)$.		
(b)	Nếu C là trọng tâm của tam giác ABG thì tọa độ điểm $G(1; -3)$.		
(c)	Nếu D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì tọa độ điểm $D(-1; -3)$.		
(d)	Nếu E là điểm thuộc trục hoành sao cho AE vuông góc với BC thì tọa độ $E(4; 0)$.		

» Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 5), B(-4; -2), C(1; 5)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.		
(b)	$G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .		
(c)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi đó tọa độ điểm D là $D(3; 10)$		
(d)	$ACB = 45^\circ$		

» Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (-1; 2), \vec{c} = (-6; 4)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$ \vec{a} = \sqrt{13}$		
(b)	$ \vec{b} = \sqrt{3}$		
(c)	$ \vec{c} = \sqrt{13}$		
(d)	Vecto $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $\frac{\sqrt{13}}{2}$ có tọa độ $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ hay $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.		

» Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = (0; -1)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2)$		
(b)	Vecto $\vec{e} = (1; -1)$ cùng phương, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$		
(c)	Vecto $\vec{f} = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ cùng phương, cùng hướng với vectơ $\vec{b}$		



(d) $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$

» **Câu 36.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có các đỉnh thỏa mãn $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A(2; -1), B(1; 1), C(4; 1)$		
(b)	E là trung điểm AB nên $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$		
(c)	G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$		
(d)	Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành nên $D(2; -1)$		

» **Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD là $D(8; 11)$		
(b)	$\vec{BC} = (0; -6); \vec{AC} = (6; -3)$		
(c)	Tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho A, B, E thẳng hàng là $E(-6; 0)$		
(d)	Tọa độ F thỏa mãn $\vec{AF} = \vec{BC} - 2\vec{AC} + 2\vec{CF}$ là $F(20; 5)$		

» **Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; -1); B(1; 3); C(2; -3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	A, B, C là ba đỉnh một tam giác		
(b)	Điểm $I(0; -2)$ là trung điểm của AB		
(c)	Điểm M thuộc Ox sao cho $AM + BM$ bé nhất có hoành độ bằng $\frac{5}{4}$		
(d)	Điểm N thuộc Oy sao cho $BN + CN$ bé nhất có tung độ bằng 2		

» **Câu 39.** Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác ABC vuông tại A .		
(b)	Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$		
(c)	Tam giác ABC có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích).		
(d)	Điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất có tọa độ là $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$		

» **Câu 40.** Trên màn hình ra đa của một đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét, một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600; 200)$ đến thành phố B có tọa độ $(200; 500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Biết tọa độ $M(x; y)$ là tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200)$		
(b)	$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$		
(c)	$M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$		
(d)	$\overrightarrow{AB} = (400; 300)$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 41. Với $m > 0$ thì có bao nhiêu $\vec{u} = (2m - 1; -2)$ cùng phương với $\vec{v} = (-2; m + 3)$.

Điền đáp số:

» Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (1; 1)$ và $\vec{d} = (2m + 2; 1 - m^2)$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$.

Điền đáp số:

» Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(5; 3)$, $N(-3; 5)$. Xác định giá trị hoành độ của điểm P sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng. Biết điểm P nằm trên trục hoành.

Điền đáp số:

» Câu 44. Cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(0; 5)$, tính tổng tung độ và hoành độ điểm M biết rằng $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Điền đáp số:

» Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; 2)$, $\vec{b} = (-3; n)$ và $\vec{c} = (-2m; 7)$. Tính $m + n$ biết rằng $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, với $m; n$ là các số tự nhiên.

Điền đáp số:

» Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; 2)$, $B(1; -3)$, $C(-3; 0)$. Xác định hoành độ điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Điền đáp số:

» Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 4)$, $B(-1; -2)$, $C(8; 1)$. Có bao nhiêu điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng ba lần diện tích của tam giác ABM .

Điền đáp số:

» Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 5)$, $B(9; 3)$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành thỏa mãn $\angle AMB = 90^\circ$.

Điền đáp số:

» Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (3m; 4m - 1)$ và $\vec{b} = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$ (với m là tham số). Tìm giá trị của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° .

Điền đáp số:



» **Câu 50.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; -2)$ và $B(10; 4)$. Biết điểm M trên trục tung để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tung độ của điểm M bằng bao nhiêu?

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----



TOÁN TỪ TÂM



Chương 09

Bài 2.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A

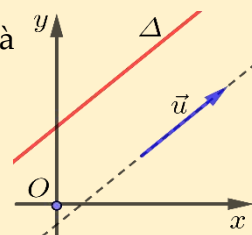
Lý thuyết

1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng



Định nghĩa Vectơ chỉ phương:

» Véc tơ $\vec{u}$ gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .



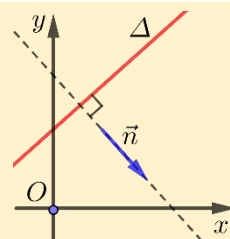
Nhận xét

- (1) Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $k.\vec{u}$, ($k \neq 0$) cũng là một VTCP của d .
- (2) Một đường thẳng xác định khi biết một VTCP và một điểm mà nó đi qua.



Định nghĩa Vectơ pháp tuyến:

» Véc tơ $\vec{n}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .



Nhận xét

- (1) Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d thì $k.\vec{n}$, ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của d .
- (2) Một đường thẳng xác định khi biết một VTPT và một điểm nó đi qua.
- (3) Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$.



2. Liên hệ giữa VTCP và VTPT



Nhận xét:

(1) Từ nhận xét:

“Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ”

▪ Ta rút ra được:

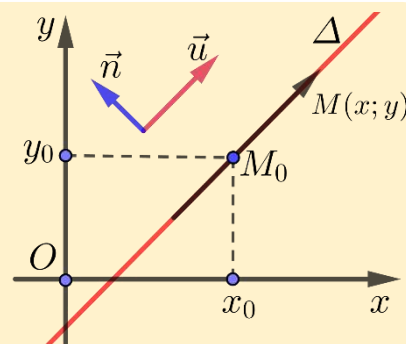
“Nếu $\vec{n} = (a; b)$ là một VTPT của đường thẳng d thì VTCP của d là $\vec{u} = (b; -a)$ ($\vec{u} = (-b; a)$)”

(2) Từ nhận xét:

“Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ”

▪ Ta rút ra được:

“Nếu $\vec{u} = (a; b)$ là một VTCP của đường thẳng d thì một VTPT của d là $\vec{n} = (-b; a)$ ($\vec{n} = (b; -a)$)”



3. Phương trình đường thẳng



Phương trình tham số:

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{d}$.

» Khi đó $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow$ tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là **phương trình tham số** của đường thẳng Δ (t là tham số).

» Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{d}$ thì có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. (Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t \in \mathbb{R}$ và ngược lại).

✓ **Nhận xét:** $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$

Nhận xét

Trong mặt phẳng Oxy , mọi phương trình dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một VTCP là $\vec{d}$.



Phương trình tổng quát:

- » Mọi đường thẳng đều có **phương trình tổng quát** dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0.
- » Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n} = (a; b)$ là một VTPT.

Nhận xét

- (1) Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ thì có phương trình tổng quát là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
- (2) Nếu $a = 0$ phương trình trở thành $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0; -\frac{c}{b}\right)$.
- (3) Nếu $b = 0$ phương trình trở thành $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$.
- (4) Nếu $c = 0$ phương trình trở thành $ax + by = 0$ đường thẳng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- (5) Đường thẳng $y = ax + b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có VTPT là $\vec{n} = (a; -1)$.
Ngược lại đường thẳng có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ thì có hệ số góc là $-\frac{a}{b}$.
- (6) Đường thẳng d đi qua điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



Phương trình chính tắc:

- » Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình tham số của đường thẳng



Phương pháp

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định:

- » một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$
- » một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$



Ví dụ 1.1.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $A(1; 2), B(3; 1)$. Viết phương trình tham số đường thẳng d .

Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $M(-2; 3)$ và song song với đường thẳng EF . Biết $E(0; -1), F(-3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng d .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng



Phương pháp

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định:

» một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$

» một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

» Phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: ax + by = c$ với $c = -(ax_0 + by_0)$.



Ví dụ 2.1.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 3)$.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1; 3), B(2; 1)$.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

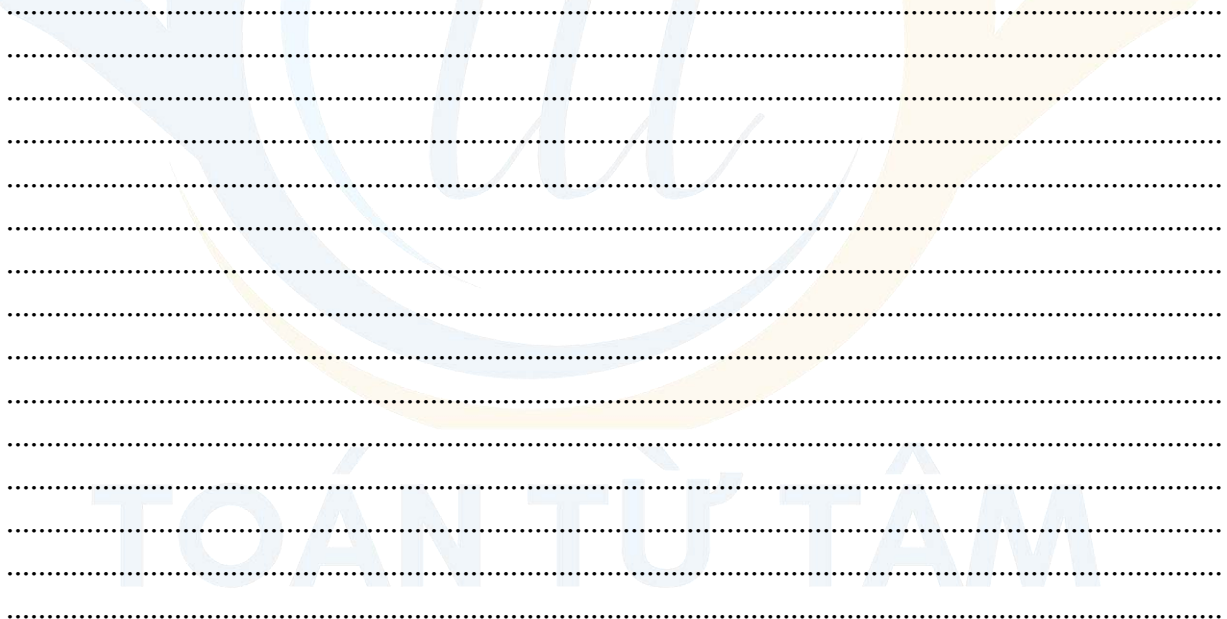
.....



Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(-4;-1), B(2;3)$.

[illegible]

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = -2-t' \\ y = t' \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đối xứng với Δ' qua Δ .



TOÁN TỬ TÂM



Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng



Phương pháp

Cho các đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và $\Delta': a'x + b'y + c' = 0$.

Khi đó ta có $\vec{n} = (a; b)$ và $\vec{n}' = (a'; b')$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của Δ và Δ' .

Để xét vị trí tương đối của Δ và Δ' trước hết ta dựa vào các vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n}'$. Cụ thể ta có:

- (1) Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, hơn nữa nếu $AA' + BB' = 0$ thì $\Delta \perp \Delta'$.
- (2) $\Delta \equiv \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.
- (3) $\Delta // \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.
- (4) Nếu Δ cắt Δ' và gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ, Δ' thì $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}; \vec{n}')|$.

Chú ý:

- (1) Việc xét vị trí tương đối của Δ và Δ' cũng được xét qua số điểm chung.
- (2) Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa Δ và Δ' cũng được thực hiện qua các vectơ chỉ phương.



Ví dụ 3.1.

Cho ba đường thẳng: $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y + 1 = 0$, $d_3: mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

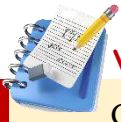
.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.4.

Cho hai đường thẳng song $d_1 : 5x - 7y + 4 = 0$ và $d_2 : 5x - 7y + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 là?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.5.

Xác định tất cả các giá trị của a để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x = 9 + at \\ y = 7 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng $3x + 4y - 2 = 0$ bằng 45° .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng



Phương pháp

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$.

Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính: $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



Ví dụ 4.1.

Tìm khoảng cách từ điểm $M(1; 2)$ đến đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 2 = 0$.

 Lời giải

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng $d: 4x + 3y - 10 = 0$ bằng 2.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.3.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3)$ và có khoảng cách đến điểm $M(2; 4)$ bằng 1.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



 Lời giải



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $(d): ax + by + c = 0, (a^2 + b^2 \neq 0)$. Vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của đường thẳng (d) ?
- A. $\vec{n} = (a; -b)$. B. $\vec{n} = (b; a)$. C. $\vec{n} = (b; -a)$. D. $\vec{n} = (a; b)$.
- » **Câu 2.** Cho đường thẳng d có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b), a, b \in \mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:
1. Nếu $b = 0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.
 2. Nếu $b \neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $\frac{a}{b}$.
 3. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (b; -a)$.
 4. Vector $k\vec{n}, k \in \mathbb{R}$ là vector pháp tuyến của d .
- Có bao nhiêu khẳng định sai?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- » **Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Vector pháp tuyến của đường thẳng d là
- A. $\vec{n} = (1; -2)$ B. $\vec{n} = (2; 1)$ C. $\vec{n} = (-2; 3)$ D. $\vec{n} = (1; 3)$
- » **Câu 4.** Cho đường thẳng $(d): 3x + 2y - 10 = 0$. Vector nào sau đây là vector chỉ phương của (d) ?
- A. $\vec{u} = (3; 2)$. B. $\vec{u} = (3; -2)$. C. $\vec{u} = (2; -3)$. D. $\vec{u} = (-2; -3)$.
- » **Câu 5.** Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ một vector pháp tuyến của đường thẳng Δ có tọa độ
- A. $(5; -3)$. B. $(6; 1)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. D. $(-5; 3)$.
- » **Câu 6.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , vector nào là một vector pháp tuyến của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?
- A. $\vec{n} = (-2; -1)$. B. $\vec{n} = (2; -1)$. C. $\vec{n} = (-1; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2)$.
- » **Câu 7.** Vector chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ là:
- A. $\vec{u} = (-4; 3)$. B. $\vec{u} = (4; 3)$. C. $\vec{u} = (3; 4)$. D. $\vec{u} = (1; -2)$.
- » **Câu 8.** Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox :
- A. $\vec{u} = (1; 0)$. B. $\vec{u} = (1; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 1)$. D. $\vec{u} = (0; 1)$.
- » **Câu 9.** Cho đường thẳng $d: 7x + 3y - 1 = 0$. Vector nào sau đây là Vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u} = (7; 3)$. B. $\vec{u} = (3; 7)$. C. $\vec{u} = (-3; 7)$. D. $\vec{u} = (2; 3)$.



- » **Câu 10.** Cho đường thẳng $d: 2x + 3y - 4 = 0$. Véc tơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d ?
A. $\vec{n}_1 = (3; 2)$. **B.** $\vec{n}_1 = (-4; -6)$. **C.** $\vec{n}_1 = (2; -3)$. **D.** $\vec{n}_1 = (-2; 3)$.
- » **Câu 11.** Cho đường thẳng $d: 5x + 3y - 7 = 0$. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d ?
A. $\vec{n}_1 = (3; 5)$. **B.** $\vec{n}_2 = (3; -5)$. **C.** $\vec{n}_3 = (5; 3)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-5; -3)$.
- » **Câu 12.** Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$. Véc tơ nào sau đây **không** là véc tơ chỉ phương của Δ ?
A. $\vec{n} = (4; -2)$. **B.** $\vec{v} = (-2; -1)$. **C.** $\vec{m} = (2; 1)$. **D.** $\vec{q} = (4; 2)$.
- » **Câu 13.** Cho hai điểm $A = (1; 2)$ và $B = (5; 4)$. Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là
A. $(-1; -2)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-2; 1)$. **D.** $(-1; 2)$.
- » **Câu 14.** Cho đường thẳng $d: 7x + 3y - 1 = 0$. Véc tơ nào sau đây là Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d ?
A. $\vec{u} = (7; 3)$. **B.** $\vec{u} = (3; 7)$. **C.** $\vec{u} = (-3; 7)$. **D.** $\vec{u} = (2; 3)$.
- » **Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$. Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là
A. $\vec{u} = (1; -2)$. **B.** $\vec{u} = (2; 1)$. **C.** $\vec{u} = (2; -1)$. **D.** $\vec{u} = (1; 2)$.
- » **Câu 16.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 3)$ và $B(4; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB ?
A. $x + y - 3 = 0$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-4}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.
- » **Câu 17.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(2; 5)$ là
A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$.
- » **Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(-6; 2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng AB ?
A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -6 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$.
- » **Câu 19.** Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1; -2)$, $N(4; 3)$ là
A. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.
- » **Câu 20.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -1)$, $B(-6; 2)$ là
A. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -6 - t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$.
- » **Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3; 0)$, $B(0; 2)$ và đường thẳng $d: x + y = 0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ qua A và song song với d .



A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \end{cases}$

» **Câu 22.** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1;2)$. Gọi A, B là hình chiếu của M lên Ox, Oy . Viết phương trình đường thẳng AB .

A. $x + 2y - 1 = 0$. B. $2x + y + 2 = 0$. C. $2x + y - 2 = 0$. D. $x + y - 3 = 0$.

» **Câu 23.** Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x - 2y + 1 = 0$ là:

A. $3x - 2y - 7 = 0$. B. $2x + 3y + 4 = 0$. C. $x + 3y + 5 = 0$. D. $2x + 3y - 3 = 0$.

» **Câu 24.** Cho đường thẳng $d: 8x - 6y + 7 = 0$. Nếu đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng d thì Δ có phương trình là

A. $4x - 3y = 0$. B. $4x + 3y = 0$. C. $3x + 4y = 0$. D. $3x - 4y = 0$.

» **Câu 25.** Đường thẳng đi qua điểm $A(1;11)$ và song song với đường thẳng $y = 3x + 5$ có phương trình là

A. $y = 3x + 11$. B. $y = (-3x + 14)$. C. $y = 3x + 8$. D. $y = x + 10$.

» **Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

» **Câu 27.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB .

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

» **Câu 28.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$

» **Câu 29.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục Ox .

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$

» **Câu 30.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0, d_2: x - 2y - 6 = 0$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (1;2)$. B. $\vec{u}_2 = (2;1)$. C. $\vec{u}_3 = (1;-2)$. D. $\vec{u}_4 = (2;-1)$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(1;2), N(3;-1), \vec{n} = (2;-1), \vec{u} = (1;1)$. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y = 0$		
(b)	Phương trình tham số của đường thẳng d_2 đi qua N và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng d_3 đi qua N và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y + 7 = 0$		
(d)	Phương trình tham số của đường thẳng d_4 đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$		

» Câu 32. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 2 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$		
(b)	Đường thẳng Δ_2 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3)$		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$		
(d)	Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 là $x - 3y - 7 = 0$.		

» Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 2), B(3; 4)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{AB} = (2; 5)$		
(b)	Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -5)$		
(c)	Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - 5y + 14 = 0$		
(d)	Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(-1; 1)$ và song song với AB là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$		

» Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác DEF có $D(1; -1), E(2; 1), F(3; 5)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng vuông góc với đường thẳng EF nhận $\vec{EF}$ là một vectơ chỉ phương		
(b)	Phương trình đường cao kẻ từ D là: $x + y = 0$.		
(c)	Gọi I là trung điểm của DF . Tọa độ của điểm I là $(2; 2)$.		
(d)	Đường trung tuyến kẻ từ E có phương trình là: $x - 2 = 0$.		

» Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2; 1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vecto chỉ phương của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4; 3)$.		
(b)	Vecto pháp tuyến của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4; 3)$.		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB là $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.		
(d)	Điểm $A(-2; 1)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh CD .		

» Câu 36. Cho tam giác ABC có phương trình của đường thẳng BC là $7x + 5y - 8 = 0$, phương trình các đường cao kẻ từ B, C lần lượt là $9x - 3y - 4 = 0, x + y - 2 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm B có tọa độ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.		
(b)	Điểm C có tọa độ là $(-1; 3)$.		
(c)	Phương trình đường cao kẻ từ A là $5x - 7y - 6 = 0$		
(d)	Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A là $x - 13y + 4 = 0$.		

» Câu 37. Cho tam giác ABC , biết $A(1; 3), B(-1; -1), C(5; -3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - y + 1 = 0$.		
(b)	Phương trình tham số của đường thẳng BC là $x + 3y + 4 = 0$.		
(c)	Phương trình đường trung trực cạnh AB là $x + 2y - 2 = 0$		
(d)	Phương trình đường cao AH là $3x + y = 0$.		

» Câu 38. Cho tam giác MNP có phương trình đường thẳng chứa cạnh MN là $2x + y + 1 = 0$, phương trình đường cao MK ($K \in NP$) là $x + y - 1 = 0$, phương trình đường cao NQ ($Q \in MP$) là $3x - y + 4 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm M có tọa độ là $(-2; 3)$.		
(b)	Điểm N có tọa độ là $(-1; 1)$.		
(c)	Phương trình đường thẳng NP là $2x - y + 3 = 0$.		
(d)	Phương trình đường thẳng MP là: $2x + 3y - 5 = 0$.		

» Câu 39. Cho điểm $M(3; 0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0, d_2: x + y + 3 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$		
(b)	Phương trình đường thẳng Δ không đi qua điểm $M(3; 0)$		
(c)	Đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1)$		



(d) | Không tồn tại đường thẳng Δ . | |

» **Câu 40.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(2;-1)$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình đường cao AH có dạng là $x+5y-11=0$.		
(b)	Phương trình đường trung tuyến CM có dạng là $x+2=0$.		
(c)	Phương trình đường trung trực của đoạn AB có dạng là $x+y+5=0$.		
(d)	Phương trình đường phân giác trong của góc A có dạng là $x+y-3=0$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 41.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3;-3)$, $B(5;-1)$ và đường thẳng $\Delta: 2x-y-1=0$. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm M biết M thuộc Δ sao cho tam giác MAB cân tại M .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 42.** Cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình của đường thẳng AB có dạng $ax+by-4=0$ ($a; b \in \mathbb{N}$). Tính $a+b$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 43.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(7;1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;2)$, $B(1;5)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: 2x-y-8=0$. Tìm hoành độ đỉnh C , biết rằng C có tung độ âm và diện tích tam giác ABC bằng 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Có bao nhiêu đường thẳng đi qua $A(2;3)$ và tạo với đường thẳng $d: 2x+y-4=0$ một góc bằng 45° ?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Gọi AM, AD lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác. Các đường thẳng AM, AD lần lượt có phương trình là $x-y-2=0, y=0$. Giả sử $B(1;3)$. Xác định giá trị tung độ của điểm C .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;2)$, $B(4;3)$, giao điểm hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: x-3y=0$. Khi đó có bao nhiêu điểm C có tọa độ nguyên?

» **Điền đáp số:**



» **Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \end{cases}$ và điểm $A(3;10)$. Điểm $M(a;b)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng AM ngắn nhất. Tính $S = a + b$.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Tìm tung độ điểm M trên trục Oy sao cho B nằm giữa O và M đồng thời diện tích tam giác MAB bằng 1? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Một chiếc Phà chở khách qua sông từ điểm $A(3;4)$ đến điểm $B(3;50)$ bên kia sông. Nhưng vì có gió và nước chảy mạnh nên chiếc Phà qua bên kia sông tại điểm $C(38;50)$. Góc lệch của con thuyền với lúc dự tính ban đầu là bao nhiêu độ? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 09

Bài 3.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A

Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn



Định nghĩa Vectơ chỉ phương:

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ bán kính R

Dạng 1. Phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Dạng 2. Phương trình: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



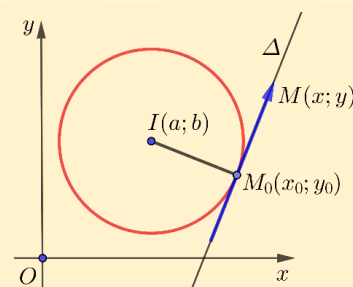
Phương trình tiếp tuyến tại M_0 thuộc (C)

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng $\begin{cases} \text{qua } M_0 \\ \text{VTPT: } \vec{n} = \overrightarrow{IM_0} \end{cases}$

Có dạng $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$



Phương trình tiếp tuyến tại M_0 không thuộc (C)

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R (*)$.

Giải $(*)$ tìm được mối liên hệ giữa a & b . Chọn a & b phù hợp để kết luận.



Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax + By + C = 0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến $\parallel (D_1): Ax + By + C = 0$ nên có dạng $Ax + By + C' = 0$ ($C' \neq C$)

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R (*)$.

Giải $(*)$ tìm được C' so với điều kiện để kết luận.



Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với $(D_1): Ax + By + C = 0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến $\perp (D_1): Ax + By + C = 0$ nên có dạng $Bx - Ay + C' = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*).

Giải (*) tìm được C' so với điều kiện để kết luận.

3. Vị trí tương đối



Giữa đường thẳng & đường tròn

Cho $(D): Ax + By + C = 0$ và đường tròn $(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tâm $I(a; b)$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \{M; N\} \Leftrightarrow d(I; (D)) < R$$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \{M\} \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \emptyset \Leftrightarrow d(I; (D)) > R$$



Giữa đường tròn & đường tròn

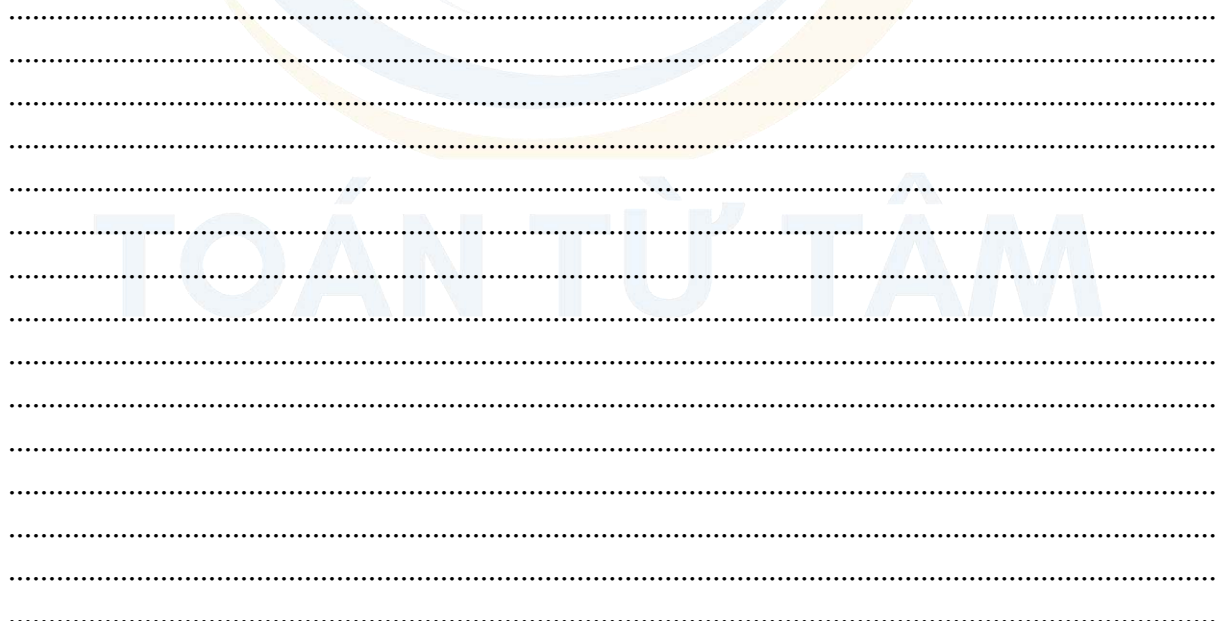
Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 . Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có:

$$\checkmark \text{ Hai đường tròn tiếp xúc } \Leftrightarrow I_1 I_2 = |R_1 \pm R_2|$$

$$\checkmark \text{ Hai đường tròn cắt nhau } R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2$$

TOÁN TỪ TÂM

Các dạng bài tập



TOÁN TỬ TÂM



Ví dụ 1.2.

Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (C_m)

- (1) Tìm điều kiện của m để (C_m) là phương trình đường tròn.
- (2) Nếu (C_m) là phương trình đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính theo m

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Cho phương trình đường cong (C_m): $x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$

- (1) Chứng minh rằng (C_m) là phương trình một đường tròn.
- (2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.
- (3) Chứng minh khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 2. Viết phương trình đường tròn



Phương pháp

▪ Cách 1:

- » Tìm tọa độ tâm $I(a; b)$ của đường tròn (C) .
- » Tìm bán kính R của đường tròn (C) .
- » Viết phương trình của đường tròn (C) theo dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

▪ Cách 2:

- » Giả sử phương trình của đường tròn (C) là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (hoặc dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$).
- » Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c .
- » Giải hệ để tìm a, b, c , từ đó tìm được phương trình của đường tròn (C) .

▪ Chú ý:

- » Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R , điểm $A \in (C) \Leftrightarrow IA = R$.
- » (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I, \Delta) = R$.
- » (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$.
- » (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a \Leftrightarrow [d(I, \Delta_3)]^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$.



Ví dụ 2.1.

Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3; -5)$, bán kính $R = 2$

Lời giải

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

- (1) Có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$.
- (2) Nhận AB làm đường kính với $A(1; 1), B(7; 5)$.
- (3) Đi qua ba điểm: $M(-2; 4), N(5; 5), P(6; -2)$

Lời giải

.....

.....

.....

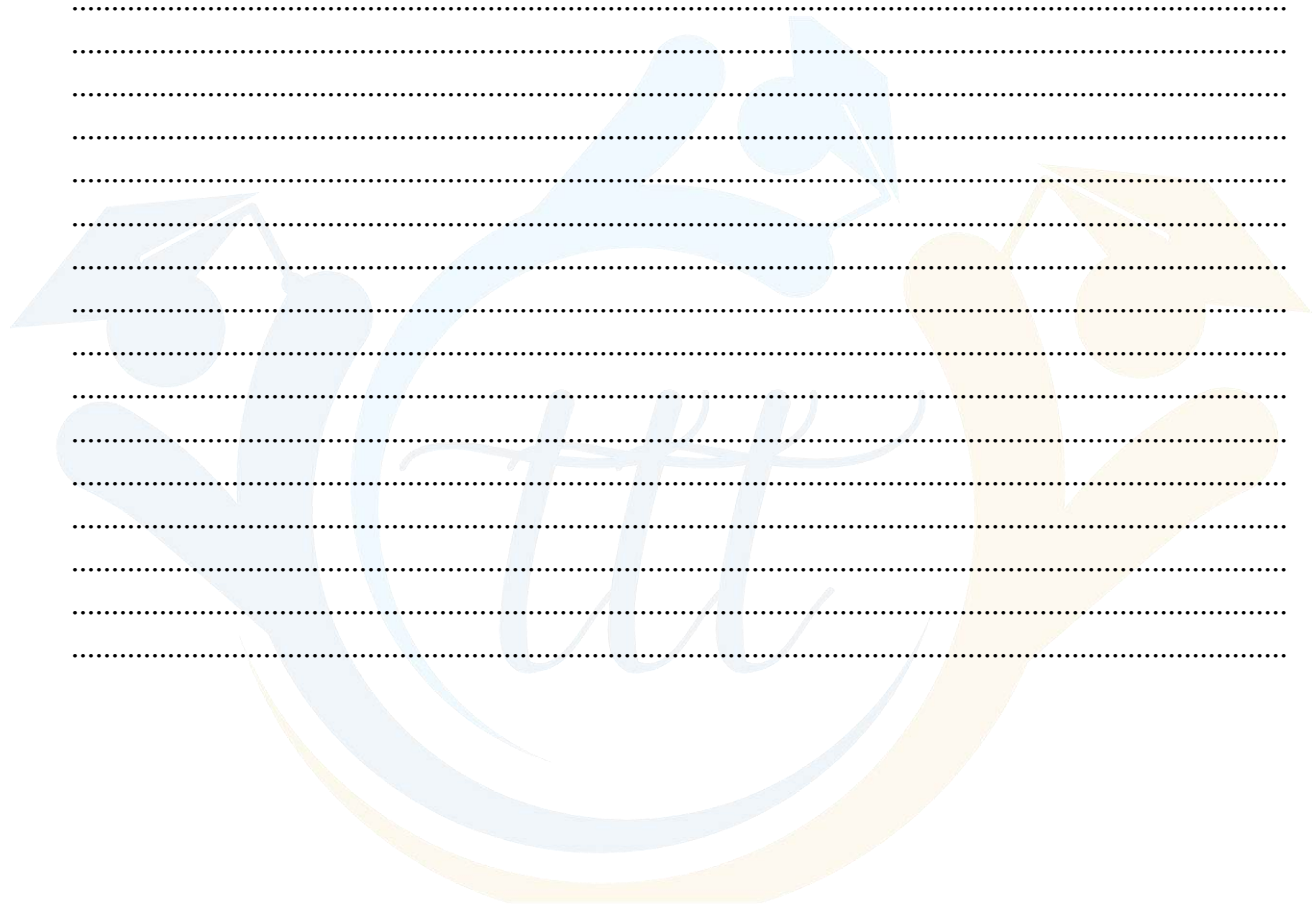
.....

.....



(3) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2: 4x - 3y - 5 = 0$

TOÁN TỪ TÂM



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Vị trí tương đối giữa đường tròn & đường thẳng



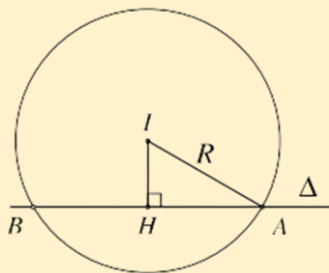
Phương pháp

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và đường tròn (C) có tâm $I(x_0; y_0)$, bán kính R .

Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có ba vị trí tương đối.

Hướng xử lý: so sánh $d(I, \Delta)$ và R .

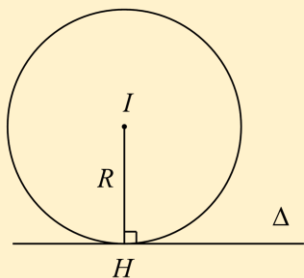
(1) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có **hai điểm chung**, ta nói Δ và (C) cắt nhau.



$$\triangle d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R$$

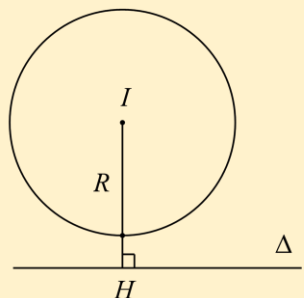
(2) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có **một điểm chung**, ta nói Δ **tiếp xúc** (C) .

Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn (C) .



$$\triangle d(I; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

(3) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) **không có điểm chung** nào, ta nói Δ và (C) không cắt nhau.



$$\triangle d(I; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$$

$\triangle$ Chú ý:

* Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Để xét vị trí tương đối với đường tròn (C) ta có thể làm hai cách:

(1) Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.



(2) Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn (C) ta được phương trình bậc hai có ẩn t , kí hiệu phương trình (*).

» Phương trình (*) **vô nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *không cắt nhau*.

» Phương trình (*) **có một nghiệm**. Ta nói Δ *tiếp xúc* với (C).

» Phương trình (*) **có hai nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *cắt nhau*.

✱✱ Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta: ax + by + c = 0$, để xét vị trí tương đối của Δ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, người ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \end{cases} (*)$$

» Hệ (*) **vô nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *không cắt nhau*.

» Hệ (*) **có một nghiệm**. Ta nói Δ *tiếp xúc* với (C).

» Hệ (*) **có hai nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *cắt nhau*.



Ví dụ 3.1.

Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 5 = 0$ và đường tròn (C): $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = t \end{cases}$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=4t \\ y=2+2t \end{cases}$ và đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) , tìm tọa độ giao điểm nếu có.



Cho đường thẳng $\Delta: 6x + 8y - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$.
 Tìm m để Δ cắt (C) .

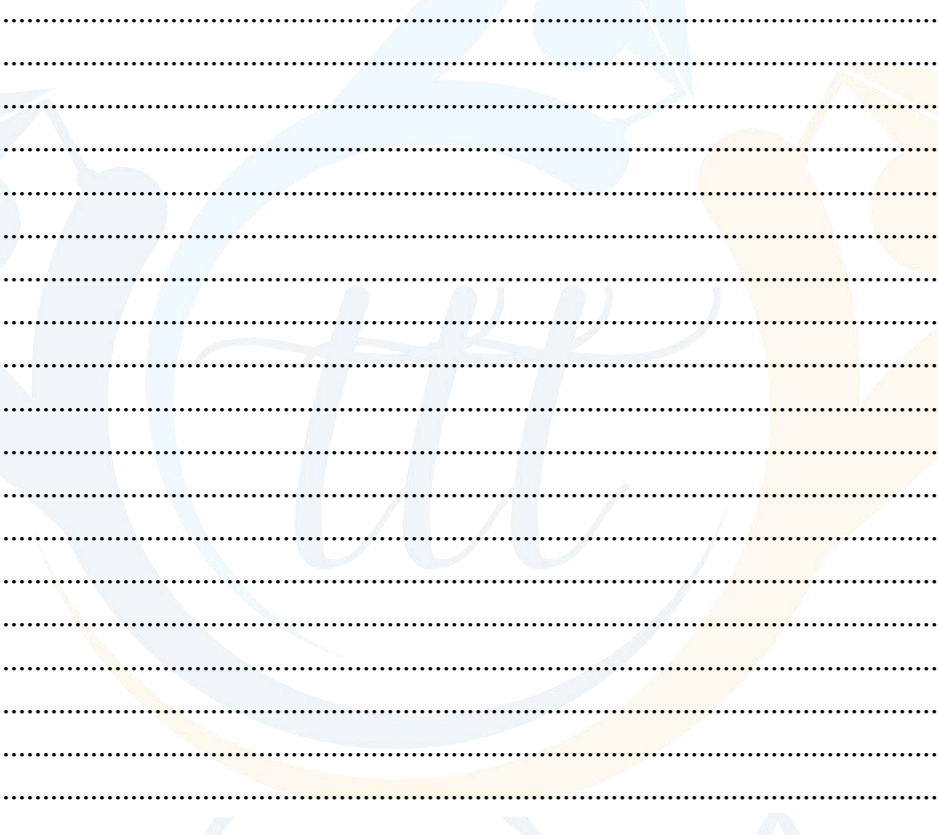
TOÁN TỬ TÂM



Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

- (1) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B
- (2) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

~~Đ~~ **Lời giải**

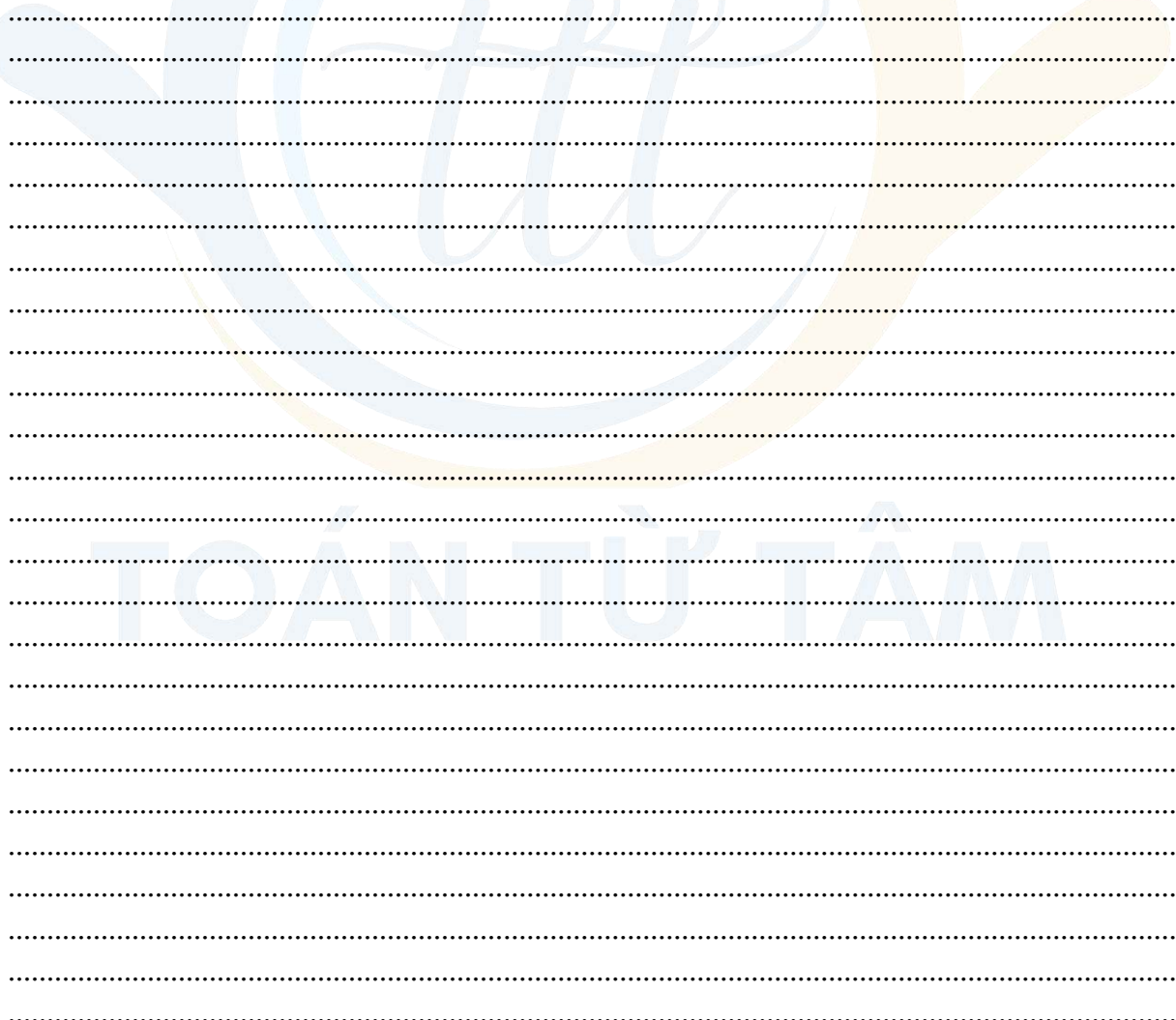


Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường tròn (C') có tâm I' bán kính R'

- 

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$; $(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .

 Lời giải





Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 4my - 5 = 0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C)



Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

-
-
-
-
-





Dạng 5. Tiếp tuyến của đường tròn



Phương pháp

****** Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng $\begin{cases} \text{qua } M_0 \\ \text{VTPT: } \vec{n} = \overrightarrow{IM_0} \end{cases}$

****** Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*).

Giải (*) tìm được mối liên hệ giữa a & b . Chọn a & b phù hợp để kết luận.



Ví dụ 5.1.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ tại điểm $M(3; -1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm hai điểm $A(1; -1); B(1; 3)$

- (1) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn.
- (2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .
- (3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B .

Lời giải

.....

.....



Ví dụ 5.3.

Cho đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my - 4 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với $(d): x - 2y - 1 = 0$.

 **Lời giải**

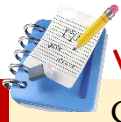




Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường hợp:

- (1) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$
- (2) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°





Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 180$) vật thể ở vị trí có tọa độ $(2 + \sin t^\circ; 4 + \cos t^\circ)$.

-  **Lời giải**



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Trong mặt phẳng Oxy , phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?
- A. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$. D. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$.
- » **Câu 2.** Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?
- A. $2x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$. B. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y - 12 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$. D. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
- » **Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình đường tròn.
- A. $1 < m < 2$. B. $m < -2$ hoặc $m > -1$.
C. $m < -2$ hoặc $m > 1$. D. $m < 1$ hoặc $m > 2$.
- » **Câu 4.** Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1). Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.
- A. $m = 2$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.
- » **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy , đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ có tâm là.
- A. $I(-2; -3)$. B. $I(2; 3)$. C. $I(4; 6)$. D. $I(-4; -6)$.
- » **Câu 6.** Đường tròn $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?
- A. 49. B. 7. C. 1. D. $\sqrt{29}$.
- » **Câu 7.** Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.
- A. $I(-1; 2); R = 4$. B. $I(1; -2); R = 2$. C. $I(-1; 2); R = \sqrt{5}$. D. $I(1; -2); R = 4$.
- » **Câu 8.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. Đường tròn có tâm và bán kính là
- A. $I(2; 3), R = 9$. B. $I(2; -3), R = 3$. C. $I(-3; 2), R = 3$. D. $I(-2; 3), R = 3$.
- » **Câu 9.** Phương trình đường tròn có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 5$ là
- A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 20 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 20 = 0$.
- » **Câu 10.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1)$, $B(5; 3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là
- A. $(x+4)^2 + y^2 = 10$. B. $(x-4)^2 + y^2 = 10$. C. $(x-4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$. D. $(x+4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.
- » **Câu 11.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0; 4)$, $B(2; 4)$, $C(2; 0)$.
- A. $I(1; 1)$. B. $I(0; 0)$. C. $I(1; 2)$. D. $I(1; 0)$.



- » **Câu 12.** Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là
- A. $\left(\frac{47}{10}; -\frac{13}{10}\right)$. B. $\left(\frac{47}{10}; \frac{13}{10}\right)$. C. $\left(-\frac{47}{10}; -\frac{13}{10}\right)$. D. $\left(-\frac{47}{10}; \frac{13}{10}\right)$.
- » **Câu 13.** Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: x+y=0$.
- A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$. B. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$.
C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$. D. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$.
- » **Câu 14.** Cho tam giác ABC biết $H(3;2), G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 20$. B. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$.
C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$. D. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.
- » **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ là
- A. $x^2 + y^2 = 2$. B. $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.
- » **Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S) , biết hoành độ tâm I là số dương.
- A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
C. $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 9$. D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
- » **Câu 17.** Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{5}{3}$. B. 5. C. 3. D. $\frac{3}{5}$.
- » **Câu 18.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{5}$.
- » **Câu 19.** Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C) .



A. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$.

B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$.

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

» Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2 + y^2 = 1$.

B. $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

» Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 1 = 0$.

A. $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$; $3x + 4y - 5\sqrt{2} + 11 = 0$.

B. $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$, $3x + 4y - 5\sqrt{2} - 11 = 0$.

C. $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$, $3x + 4y + 5\sqrt{2} + 11 = 0$.

D. $3x + 4y - 5\sqrt{2} + 11 = 0$, $3x + 4y - 5\sqrt{2} - 11 = 0$.

» Câu 22. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A .

A. $y - 5 = 0$.

B. $y + 5 = 0$.

C. $x + y - 5 = 0$.

D. $x - y - 5 = 0$.

» Câu 23. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C) ?

A. $4x - 3y + 10 = 0$.

B. $6x + y + 4 = 0$.

C. $3x + 4y + 10 = 0$.

D. $3x - 4y + 11 = 0$.

» Câu 24. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 2 = 0$ là

A. $4x - 3y + 18 = 0$.

B. $4x - 3y + 18 = 0$.

C. $4x - 3y + 18 = 0$; $4x - 3y - 2 = 0$.

D. $4x - 3y - 18 = 0$; $4x - 3y + 2 = 0$.

» Câu 25. Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

» Câu 26. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$.

A. $4x + 3y + 29 = 0$.

B. $4x + 3y + 29 = 0$ hoặc $4x + 3y - 21 = 0$.

C. $4x - 3y + 5 = 0$ hoặc $4x - 3y - 45 = 0$

D. $4x + 3y + 5 = 0$ hoặc $4x + 3y + 3 = 0$.

» Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

B. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2 = 2$.

C. Hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ không có điểm chung.



D. Hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc với nhau.

» **Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho hai đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 4$ và $(C'): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x + y - 2 = 0$. **B.** $x - y + 2 = 0$ **C.** $x + y + 2 = 0$. **D.** $x - y - 2 = 0$.

» **Câu 29.** Cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 19 = 0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B , khi đó độ dài đoạn thẳng AB là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

» **Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 5$. Biết rằng đường thẳng $(d): 3x - 4y + 8 = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 8$. **B.** $AB = 4$. **C.** $AB = 3$. **D.** $AB = 6$.

» **Câu 31.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $M(2; 1)$. Dây cung của (C) đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

» **Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0; -3)$, $B(4; 1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7, 7; 8, 1)$. **B.** $(7, 3; 7, 7)$. **C.** $(8, 3; 8, 5)$. **D.** $(8, 1; 8, 3)$.

» **Câu 33.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$. Tính độ dài nhỏ nhất của OM ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

» **Câu 34.** Gọi I là tâm của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x + y - m = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

» **Câu 35.** Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$ có tọa độ $M(a; b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{2}a = -b$. **B.** $a = -b$. **C.** $\sqrt{2}a = b$. **D.** $a = b$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 36.** Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường tròn (C) có tâm là $I(1; -2)$.		
(b)	Đường tròn (C) có bán kính $R = 4$		
(c)	Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1; 2)$.		
(d)	Đường tròn (C) có đường kính bằng 4.		



» **Câu 37.** Cho $(C): (x-1)^2 + y^2 = 10$; và điểm $A(4;1)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A \in (C)$.		
(b)	Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{10}$.		
(c)	Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4;1)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;1)$.		
(d)	Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4;1)$ đi qua điểm $N(4;3)$.		

» **Câu 38.** Cho đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(I, \Delta) = \frac{3}{\sqrt{5}}$		
(b)	Đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$		
(c)	Phương trình đường tròn là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$		
(d)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		

» **Câu 39.** Đường tròn (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm của (C) có dạng $I(R;-R)$, R là bán kính đường tròn (C)		
(b)	$R^2 = (R-2)^2 + (R-1)^2$		
(c)	Có 2 đường tròn thỏa mãn		
(d)	Tổng bán kính các đường tròn thỏa mãn bằng 5		

» **Câu 40.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;3), B(-1;1)$ có tâm thuộc $\Delta: x-3y-11=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm của đường tròn (C) là $I\left(7; -\frac{4}{3}\right)$		
(b)	Đường kính của đường tròn (C) bằng 65		
(c)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		
(d)	Đường tròn (C) đi qua điểm $N(0;2)$		

» **Câu 41.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2), B(3;4)$ và tiếp xúc $\Delta: 3x+y-3=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$IB = d(I, \Delta)$		
(b)	Tổng đường kính của các đường tròn (C) bằng: $2\sqrt{10}$		
(c)	Có hai đường tròn (C) thỏa mãn		



(d) Điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)

» **Câu 42.** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và hai điểm $A(1;-1), B(1;3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm A thuộc đường tròn		
(b)	Điểm B nằm trong đường tròn		
(c)	$x=1$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A		
(d)	Qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-12=0$		

» **Câu 43.** Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(2;0), B(0;-3), C(5;-3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{26}$		
(b)	Hoành độ của tâm đường tròn (C) bằng $-\frac{5}{2}$		
(c)	Đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$		
(d)	Gọi I là tâm của đường tròn (C) khi đó độ dài đoạn $IO = 5\sqrt{2}$		

» **Câu 44.** Đường tròn (C) đi qua điểm $A(-2;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-15=0$ tại $B(1;-3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường kính của đường tròn (C) bằng 10		
(b)	Tâm của đường tròn (C) có tung độ bằng -2		
(c)	Khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến đường thẳng Δ bằng 4		
(d)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		

» **Câu 45.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $I(-2;3)$ và điểm $M(2;5)$ và hai đường thẳng $d: 12x-5y+13=0$ và $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường tròn tâm I và đi qua M có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.		
(b)	Đường tròn tâm I và đi qua M có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$.		
(c)	Đường tròn tâm I và tiếp xúc đường thẳng d có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.		
(d)	Phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$ và đi qua hai điểm I và M là: $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 85$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn



» **Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , bán kính của đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x - 4y - 6 = 0$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0 \leq t \leq 180)$ có tọa độ là $(3 + 2\cos t^\circ; 4 + 2\sin t^\circ)$. Quỹ đạo chuyển động của chất điểm K có phương trình dạng $(x-3)^2 + (y-4)^2 = a$. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 48.** Có bao nhiêu đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$ và tiếp xúc với 2 trục tọa độ?

Điền đáp số:

» **Câu 49.** Có bao nhiêu đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2: 4x - 3y - 5 = 0$.

Điền đáp số:

» **Câu 50.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là một phương trình đường tròn.

Điền đáp số:

» **Câu 51.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Xác định giá trị của tham số m để qua điểm $A(2; m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C) .

Điền đáp số:

» **Câu 52.** Cho đường tròn $(C): (x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$. Có bao nhiêu đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) và song song với đường thẳng $\Delta: x + 2y - 5 = 0$.

Điền đáp số:

» **Câu 53.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Biết rằng có hai đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của hai đường tròn ấy đến điểm B bằng 5. Tính tổng đường kính của hai đường tròn đã cho.

Điền đáp số:

» **Câu 54.** Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và các đường thẳng $d_1: x - y = 0$, $d_2: x - 7y = 0$. Tính bán kính đường tròn (C') có tâm I nằm trên đường tròn (C) và tiếp xúc với d_1, d_2 .

Điền đáp số:

» **Câu 55.** Phương trình đường tròn (C) có tâm $B(1;1)$ và cắt $d: 3x + 4y + 8 = 0$ tại M, N thỏa mãn $MN = 8$ có đường kính bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

----- Hết -----



TOÁN TỪ TÂM



Chương 09

Bài 4.

BA ĐƯỜNG CONIC

A

Lý thuyết

1. Elip



Định nghĩa:

Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$.

» Tập hợp tất cả điểm M thỏa $MF_1 + MF_2 = 2a$, với $a > c > 0$ là một elip.

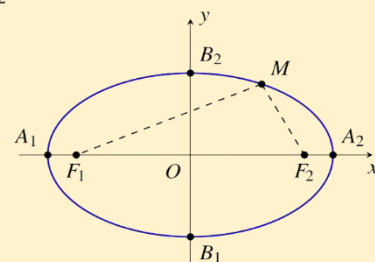
Phương trình Elip:

» Trong mặt phẳng Oxy , cho $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (hai tiêu điểm thuộc trục hoành).

» Với $b^2 = a^2 - c^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Từ hình bên ta có:

- » Trục lớn $A_1A_2 = 2a$; Trục bé $B_1B_2 = 2b$;
- » Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $a^2 = b^2 + c^2$.
- » Tọa độ đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- » Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.



2. Hypebol



Định nghĩa:

Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$.

» Tập hợp tất cả điểm M thỏa $|MF_1 - MF_2| = 2a$, với $0 < a < c$ là một hypebol.

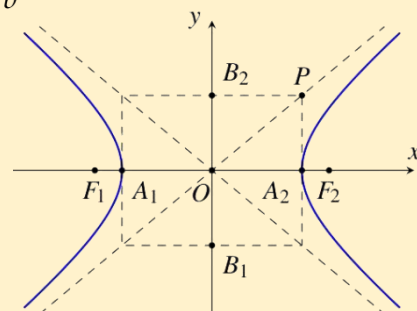
Phương trình Hypebol:

» Trong mặt phẳng Oxy , cho $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (hai tiêu điểm thuộc trục hoành).

» Với $b^2 = c^2 - a^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Từ hình bên ta có:

- » Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là **trục thực**, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là **trục ảo** của hypebol.
- » Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $a^2 + b^2 = c^2$.
- » Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.
- » Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- » Giao điểm O của hai trục là **tâm đối xứng** của





3. Parabol



Định nghĩa:

Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

- » Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ là một đường parabol.
- » Điểm F gọi là **tiêu điểm** và Δ gọi là **đường chuẩn** của parabol (P) .

Phương trình Parabol:

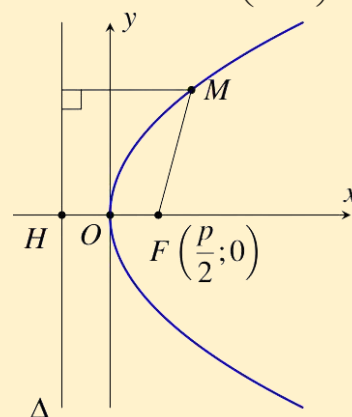
- » Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ .
- » Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là $p = HF$.
- » Chọn hệ trục tọa độ Oxy , với O là trung điểm HF (như hình vẽ) thì $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và

$$\Delta: x = -\frac{p}{2}.$$

- » Khi đó, phương trình (P) là: $y^2 = 2px$, với $p > 0$.

Hình dạng parabol và các đại lượng liên quan:

- » O là đỉnh; Ox gọi là **trục đối xứng** của parabol (P) .
- » p gọi là **tham số tiêu** của parabol (P) .
- » Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.



TOÁN TỪ TÂM



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình Elip



Phương pháp

Cho Elip có phương trình chính tắc: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

Các yếu tố trong Elip:

- » Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.
- » Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
- » Độ dài trục lớn $2a$.
- » Độ dài trục bé $2b$.
- » Tiêu cự $2c$.



Ví dụ 1.1.

Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(3) $x^2 + 4y^2 = 1$

(4) $4x^2 + 25y^2 = 36$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



- (1) Độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.
- (2) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.
- (3) Elip đi qua hai điểm $M(1;0)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

TOÁN TỪ TÂM



.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM

Các yếu tố trong Hypebol:

- 

Xác định tiêu cự, tiêu điểm, các đỉnh, độ dài 2 trục của hypebol sau:

$$(3) \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$$

 **Lời giải**



Ví dụ 2.2.

Lập phương trình chính tắc của (H) biết:

- (1) Độ dài trục thực là 8 và tiêu cự bằng 10.
- (2) Độ dài trục ảo là 8 và tiêu cự bằng 12.
- (3) Tiêu cự bằng 20 và một đỉnh trên trục thực là (-3.0) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là 100m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM

Các yếu tố trong Hypebol:

- 

Tìm phương trình chính tắc của parabol (P) . Biết:

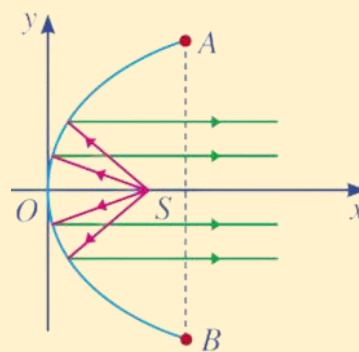
-  **Lời giải**





Ví dụ 3.2.

Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol như hình bên. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40\text{ cm}$ và chiều sâu $h = 30\text{ cm}$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?
- A.** $F_{1,2} = (0; \pm 1)$. **B.** $F_{1,2} = (\pm 1; 0)$. **C.** $F_{1,2} = (\pm 3; 0)$. **D.** $F_{1,2} = (1; \pm 2)$.
- » **Câu 2.** Cho Elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau:
- A.** (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** (E) có trục lớn bằng 6.
- C.** (E) có trục nhỏ bằng 4. **D.** (E) có tiêu cự $\sqrt{5}$.
- » **Câu 3.** Cho elip $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$. Phát biểu nào sau đây đúng?
- A.** Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{3}$. **B.** Tiêu cự bằng 4.
- C.** Tâm sai $e = \frac{2}{3}$. **D.** Hai tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$.
- » **Câu 4.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip
- A.** $4x^2 + 8y^2 = 32$. **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{5}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = -1$. **D.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$.
- » **Câu 5.** Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ bằng
- A.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.
- » **Câu 6.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ có tiêu cự bằng
- A.** 4. **B.** 2. **C.** 12. **D.** 6.
- » **Câu 7.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Chọn khẳng định **sai**
- A.** Điểm $A(3; 0) \in (E)$. **B.** (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.
- C.** Trục lớn của (E) có độ dài bằng 6. **D.** (E) có tâm sai bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.
- » **Câu 8.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip
- A.** $x^2 - y^2 = 2$. **B.** $x^2 + y^2 = 2$.
- C.** $x^2 + 2y^2 = 2$. **D.** $x^2 = 2y^2$.
- » **Câu 9.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{12} = 1$?
- A.** $x + 8 = 0$. **B.** $x - \frac{3}{4} = 0$. **C.** $x + 2 = 0$. **D.** $x + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$.



» **Câu 10.** Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và điểm M thuộc (E) . Biết chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18. Khi đó tâm sai của (E) bằng

- A. $\frac{4}{18}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $-\frac{4}{5}$. D. $-\frac{4}{9}$.

» **Câu 11.** Phương trình chính tắc của Elip là

- A. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$. B. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
C. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). D. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

» **Câu 12.** Phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

» **Câu 13.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 6.

» **Câu 14.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{33}$. C. 3. D. 9.

» **Câu 15.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1;2)$.

- A. $y^2 = 4x$. B. $y^2 = 2x$. C. $y = 2x^2$. D. $y = x^2 + 2x - 1$.

» **Câu 16.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+1=0$.

- A. $y^2 = 2x$. B. $y^2 = 4x$. C. $y = 4x^2$. D. $y^2 = 8x$.

» **Câu 17.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng 10.

- A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$.

» **Câu 18.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây?

- A. $(-5;0)$. B. $(0;\sqrt{7})$. C. $(\sqrt{7};0)$. D. $(0;5)$.

» **Câu 19.** Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. Nếu điểm M có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

- A. 8. B. 10;6. C. $4 \pm \sqrt{7}$. D. 14;22.

» **Câu 20.** Phương trình của Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

- A. $9x^2 + 16y^2 = 144$. B. $9x^2 + 16y^2 = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

» **Câu 21.** Cho (E) có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 8, chu vi bằng 6 thì phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.



C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

» Câu 22. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

A. $y = x^2 - 3x - 12.$

B. $y = x^2 - 27.$

C. $y^2 = \frac{4x}{5}.$

D. $y^2 = 5x - 21.$

» Câu 23. Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng 6, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ là

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$

C. $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{5} = 1.$

D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1.$

» Câu 24. Elip có hai đỉnh $(-3;0)$; $(3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$

» Câu 25. Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ là

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1.$

C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1.$

D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

» Câu 26. Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

A. 6 và 14.

B. 5 và 13.

C. $8 \pm \sqrt{5}.$

D. $8 \pm 4\sqrt{2}.$

» Câu 27. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường tiệm cận là $x - 2y = 0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng 24.

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1.$

C. $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} = 1.$

D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1.$

» Câu 28. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x + y = 0$.

A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1.$

B. $x^2 - y^2 = 9.$

C. $x^2 - y^2 = 1.$

D. $x^2 - y^2 = 3.$

» Câu 29. Cho Elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Với M là điểm bất kì nằm trên (E) , khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $4 \leq OM \leq 5.$

B. $OM \geq 5.$

C. $OM \leq 3.$

D. $3 \leq OM \leq 4.$

» Câu 30. Elip đi qua điểm $M\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ thì có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1.$

D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

» Câu 31. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$?



A. $x + 4\sqrt{5} = 0$.

B. $x + 4 = 0$.

C. $x - \frac{4\sqrt{35}}{7} = 0$.

D. $x + 2 = 0$.

» **Câu 32.** Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sqrt{2}$.

» **Câu 33.** Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Các điểm M, N lần lượt di động trên tia Ox và tia Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E). Tọa độ điểm M để đoạn MN ngắn nhất là

A. $M(5;0)$.

B. $M(-5;0)$.

C. $M(0;5)$.

D. $M(\sqrt{5};0)$.

» **Câu 34.** Cho Elip (E): $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng -13 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng:

A. 8; 18.

B. $13 \pm \sqrt{5}$.

C. 10; 16.

D. $13 \pm \sqrt{10}$.

» **Câu 35.** Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7};0)$, $F_2(\sqrt{7};0)$ và điểm $M(-\sqrt{7};\frac{9}{4})$ thuộc (E). Gọi N là điểm đối xứng với M qua gốc tọa độ O . Khi đó

A. $NF_1 + MF_2 = \frac{9}{2}$.

B. $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$.

C. $NF_2 - NF_1 = \frac{7}{2}$.

D. $NF_1 + MF_2 = 8$.

» **Câu 36.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $M(-5;-1)$, $N(-1;1)$. Điểm K thay đổi trên elip (E). Diện tích tam giác MNK lớn nhất bằng

A. $9\sqrt{5}$.

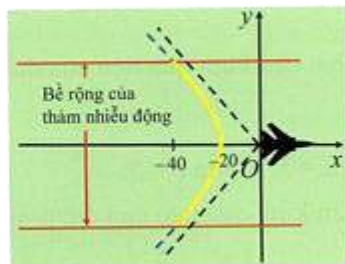
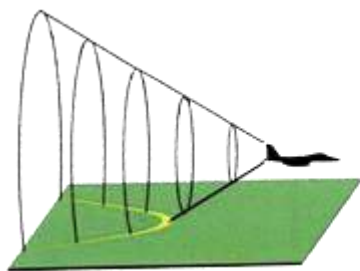
B. $\frac{9}{2}$.

C. 9.

D. 18.

» **Câu 37.** Khi bay với vận tốc siêu thanh (tốc độ chuyển động lớn hơn tốc độ âm thanh trong cùng môi trường), một máy bay tạo ra một vùng nhiễu động trên mặt đất dọc theo một nhánh của hypebol (H) (Hình bên dưới). Phần nghe rõ nhất tiếng ồn của vùng nói trên được gọi là thảm nhiễu động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Biết bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng là 40 mile (mile (dặm) là đơn vị đo khoảng cách, 1 mile $\approx$ 1,6 km) và (H) có phương trình: $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$.

Cao độ của máy bay là



A. $15\sqrt{3}$ mile.

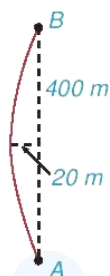
B. $10\sqrt{3}$ mile.

C. $20\sqrt{3}$ mile.

D. $4\sqrt{3}$ mile.



- » **Câu 38.** Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol (P) , điểm đầu vào của khúc cua là A và điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 320m$. Đỉnh của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng $20m$ và cách đều A, B (hình bên). Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ tương ứng với $1m$ trên thực tế. Phương trình chính tắc của parabol (P) đó là



- A. $y^2 = 640x$. B. $y^2 = 320x$ C. $x^2 = 1280y$. D. $y^2 = 1280x$.

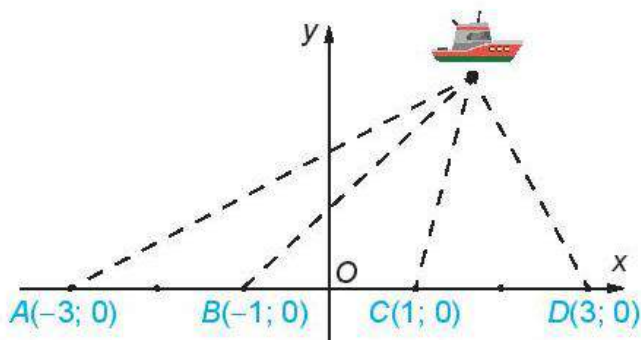
- » **Câu 39.** Một sao chổi đi qua hệ Mặt Trời theo quỹ đạo là một nhánh hypebol nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm, khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là 3.10^8 km và tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6.



Hãy lập phương trình chính tắc của hypebol chứa quỹ đạo, với 1 đơn vị đo trên mặt phẳng tọa độ ứng với 10^8 km trên thực tế.

- A. $\frac{x^2}{60,84} - \frac{y^2}{55,8} = 1$. B. $\frac{x^2}{6,4} - \frac{y^2}{5,8} = 2$. C. $\frac{x^2}{55,88} - \frac{y^2}{60,84} = 1$. D. $\frac{x^2}{5,8} - \frac{y^2}{6,4} = 2$.

- » **Câu 40.** Bốn trạm phát tín hiệu vô tuyến có vị trí A, B, C, D theo thứ tự đó thẳng hàng và cách đều với khoảng cách 200 km. Tại một thời điểm, bốn trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292000 km/s. Một tàu thủy nhận được tín hiệu từ trạm C trước $0,0005s$ so với tín hiệu từ trạm B và nhận được tín hiệu từ trạm D sớm $0,001s$ so với tín hiệu từ trạm A . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như trong hình bên dưới (1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ ứng với 100 km trên thực tế). Tổng khoảng cách từ tàu đến các trạm B và trạm C bằng bao nhiêu (đáp số được làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo đơn vị km) bằng cách lập phương trình chính tắc của hai hypebol đi qua vị trí M của tàu?



- A. 150. B. 255. C. 452. D. 18.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai



» **Câu 41.** Cho elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), đi qua điểm $A(2;0)$ và có một tiêu điểm $F_2(\sqrt{2};0)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu cự của elip (E) bằng $\sqrt{2}$		
(b)	$a = 2$		
(c)	$a^2 - b^2 = 2$		
(d)	Điểm $B(0;\sqrt{2})$ thuộc elip (E)		

» **Lời giải**

(a) Tiêu cự của elip (E) bằng $\sqrt{2}$

Elip (E) có tiêu điểm $F_2(\sqrt{2};0) \Rightarrow c = \sqrt{2} \Rightarrow$ Tiêu cự $= 2\sqrt{2}$

» **Chọn SAI.**

(b) $a = 2$

Có $A \in (E) \Leftrightarrow \frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $a^2 - b^2 = 2$

Từ $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Điểm $B(0;\sqrt{2})$ thuộc elip (E)

Vậy elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Thay tọa độ $B(0;\sqrt{2})$ vào $(E): \frac{0^2}{4} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$, do đó $B(0;\sqrt{2})$ thuộc (E)

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 42.** Cho hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), đi qua điểm $A(\sqrt{3};0)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu cự bằng 2		
(b)	$a = \sqrt{3}$		
(c)	$b^2 = 2$		
(d)	Điểm $B(0;1)$ thuộc hypebol (H)		

» **Lời giải**

(a) Tiêu cự bằng 2

Hypebol (H) có tiêu điểm $F_1(-2;0) \Rightarrow c = 2 \Rightarrow$ Tiêu cự $= 4$

» **Chọn SAI.**



(b) $a = \sqrt{3}$

Có $A \in (H) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $b^2 = 2$

Mà $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{3 + b^2} \Rightarrow b^2 = 1$.

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm $B(0;1)$ thuộc hypebol (H)

Vậy hypebol $(H): \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

Thay tọa độ $B(0;1)$ vào $(H): \frac{0^2}{3} - 1^2 = -1 \neq 1$, do đó $B(0;1)$ không thuộc (H)

» **Chọn SAI.**

» **Câu 43.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .		
(b)	Tiêu cự elip (E) bằng $\sqrt{7}$		
(c)	Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{7};0), F_2(2\sqrt{7};0)$		
(d)	Cho M là điểm thuộc (E) thỏa mãn $MF_1 + 2MF_2 = 11$. Khi đó $2MF_1 + MF_2 = 13$.		

» **Lời giải**

(a) Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .

Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tiêu cự elip (E) bằng $\sqrt{7}$

Ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$. Suy ra $c = \sqrt{7}$.

Elip (E) có tiêu cự $2c = 2\sqrt{7}$

» **Chọn SAI.**

(c) Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{7};0), F_2(2\sqrt{7};0)$

Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7};0); F_2(\sqrt{7};0)$

» **Chọn SAI.**

(d) Cho M là điểm thuộc (E) thỏa mãn $MF_1 + 2MF_2 = 11$. Khi đó $2MF_1 + MF_2 = 13$.

Ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 2 \cdot 4 = 8$.

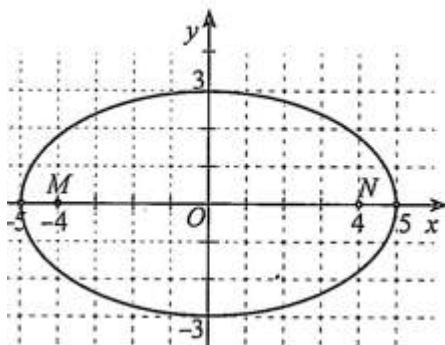
Suy ra $3MF_1 + 3MF_2 = 24$ hay $(2MF_1 + MF_2) + (MF_1 + 2MF_2) = 24$.

Vì $MF_1 + 2MF_2 = 11$ nên $2MF_1 + MF_2 = 24 - 11 = 13$.

» **Chọn ĐÚNG.**



- » **Câu 44.** Trước một tòa nhà, người ta làm một cái hồ bơi có dạng hình elip với độ dài hai bán trục lần lượt là $3m$ và $5m$. Xét hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét) có hai trục tọa độ chứa hai trục của elip, gốc tọa độ O là tâm của elip (hình)



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.		
(b)	Xét các điểm M, N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O . Tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $10m$		
(c)	Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ		
(d)	Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Khi đó vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5}{3}m$		

» **Lời giải**

- (a) Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

- (b) Xét các điểm M, N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O . Tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $10m$

Ta có: $a = 5, b = 3$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, suy ra $c = 4$.

Các tiêu điểm của elip có tọa độ là $(-4; 0)$ và $(4; 0)$.

Vậy M và N chính là các tiêu điểm của elip.

Vì vậy, tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $2a = 10m$ không đổi.

» **Chọn ĐÚNG.**

- (c) Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ

Gọi giao điểm của đường thẳng OP và elip là Q .

Vì độ dài bán trục lớn là $5m$ nên $OQ \leq 5$. Suy ra $OQ < OP = 6m$.

Vậy vị trí P ở ngoài hồ.

» **Chọn SAI.**



(d) Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Khi đó vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5}{3}m$

$$\text{Giả sử } C(x_0; y_0). \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ |y_0| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{4}{9} = 1 \\ |y_0| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_0| = \frac{5\sqrt{5}}{3} \\ |y_0| = 2 \end{cases}$$

Vậy C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5\sqrt{5}}{3}m$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 45.** Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 12x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	(P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$		
(b)	Một điểm nằm trên (P) có hoành độ $x = 2$. Khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm bằng 4		
(c)	Độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F bằng 12		
(d)	Qua $I(2;0)$ vẽ một đường thẳng thay đổi cắt (P) tại hai điểm A và B . Khi đó tích số khoảng cách từ A và B tới trục Ox bằng 12.		

» **Lời giải**

(a) (P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$.

$$\text{Ta có: } p = 6 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vậy (P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Một điểm nằm trên (P) có hoành độ $x = 2$. Khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm bằng 4

$$\text{Gọi } M \text{ là điểm trên } (P) \text{ có hoành độ } x = 2 \Rightarrow MF = x_M + \frac{p}{2} = 2 + 3 = 5$$

» **Chọn SAI.**

(c) Độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F bằng 12

Đường thẳng đi qua $F(3;0)$ và vuông góc với trục đối xứng có dạng: $x = 3$ (d).

$$\text{Tọa độ giao điểm của } (P) \text{ và } (d) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (d) \text{ cắt } (P) \text{ tại } M(3;-6), N(3;6) \Rightarrow MN = \sqrt{(3-3)^2 + (6+6)^2} = 12.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Qua $I(2;0)$ vẽ một đường thẳng thay đổi cắt (P) tại hai điểm A và B . Khi đó tích số khoảng cách từ A và B tới trục Ox bằng 12.

Phương trình đường thẳng đi qua $I(2;0)$ có dạng:

$$A(x-2) + B(y-0) = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \Leftrightarrow Ax + By - 2A = 0 \quad (d)$$



Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} Ax + By - 2A = 0 & (1) \\ y^2 = 12x & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{12}$$

Thế vào (1) ta được $A \frac{y^2}{12} + By - 2A = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + 12By - 24A = 0$

Do $\Delta' = 36B^2 + 24A^2 > 0, \forall A^2 + B^2 \neq 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi y_A và y_B là nghiệm của phương trình trên nên $d(A; Ox) \cdot d(B; Ox) = |y_A \cdot y_B| = 24$ (không đổi).

» **Chọn SAI.**

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 8x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu điểm $F(2;0)$		
(b)	Có 2 điểm M trên (P) , cách F một khoảng là 3		
(c)	Điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$, có hoành độ bằng 6		
(d)	Tồn tại một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất, khi đó AB ngắn nhất bằng $\frac{1}{5}$		

» **Lời giải**

(a) Tiêu điểm $F(2;0)$

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (P)$ suy ra $y_M^2 = 8x_M$.

Từ phương trình (P) có $p = 4$ nên $F(2;0)$.

Ta có $FM = x_M + \frac{p}{2}$ suy ra $x_M = 1$, thay vào $y_M^2 = 8x_M \Rightarrow y_M = \pm 2\sqrt{2}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Có 2 điểm M trên (P) , cách F một khoảng là 3.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(1; 2\sqrt{2}); M_2(1; -2\sqrt{2})$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$, có hoành độ bằng 6

Ta có $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$.

$$S_{\Delta OMF} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OF \cdot d(M; OF) = 8 \Leftrightarrow a = 8.$$

Vậy điểm cần tìm là $M(8;8)$.

» **Chọn SAI.**

(d) Tồn tại một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất, khi đó AB ngắn nhất bằng $\frac{1}{5}$



Với mọi điểm $A \in (P); B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$.

$$A \in (P) \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8}; a\right) \text{ với } a \geq 0,$$

$$\text{Khi đó } d(A; \Delta) = \frac{\left|4 \cdot \frac{a^2}{8} - 3 \cdot a + 5\right|}{5} = \frac{(a-3)^2 + 1}{10} \geq \frac{1}{10}.$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ .

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u} = (3; 4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x - \frac{9}{8}\right) + 4(y - 3) = 0$ hay $24x + 32y - 123 = 0$.

$$\text{Do đó tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 24x + 32y - 123 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{209}{200} \\ y = \frac{153}{50} \end{cases}.$$

Vậy $A\left(\frac{9}{8}; 3\right), B\left(\frac{209}{200}; \frac{153}{50}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 47.** Quỹ đạo của sao hỏa là elip có bán trục lớn 227,9 triệu km, bán trục nhỏ bằng 226,9 triệu km và quay quanh mặt trời một vòng hết 687 ngày. Các số liệu trong các khẳng định dưới đây được làm tròn tới 5 chữ số thập phân. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm sai của elip là 0,09358.		
(b)	Tiêu cự của elip bằng 21,32604.		
(c)	Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 249,22604.		
(d)	Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 206,57396.		

» **Lời giải**

$$\text{Ta có } a = 227,9; \quad b = 226,9 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21,32604 \Rightarrow e = \frac{c}{a} \approx 0,09358$$

(a) Tâm sai của elip là 0,09358.

$$\text{Tâm sai của elip là } e = \frac{c}{a} \approx 0,09358.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tiêu cự của elip bằng 21,32604.

$$\text{Tiêu cự của elip bằng } 2c \approx 2 \cdot 21,32604 = 42,65208.$$

» **Chọn SAI.**

(c) Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 249,22604.

$$\text{Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng là } a + c \approx 249,22604.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 206,57396.

$$\text{Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng } a - c \approx 206,57396.$$

» **Chọn ĐÚNG.**



» **Câu 48.** Gọi phương trình chính tắc của parabol có dạng $(P): y^2 = 4x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(1; y_A)$ thuộc (P) thì $y_A = 2$ hoặc $y_A = -2$.		
(b)	Điểm M thuộc (P) và $MF = 3$ thì hoành độ của M là $\frac{3}{4}$.		
(c)	Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B . Nếu $A(1; -2)$ thì tọa độ của $B(1; 2)$.		
(d)	Một điểm A thuộc (P) . Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 4.		

» **Lời giải**

(a) Điểm $A(1; y_A)$ thuộc (P) thì $y_A = 2$ hoặc $y_A = -2$.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 4x$

$$A(1; y_A) \Rightarrow y_A = 2 \text{ hoặc } y_A = -2.$$

» **Chọn ĐÚNG**

(b) Điểm M thuộc (P) và $MF = 3$ thì hoành độ của M là $\frac{3}{4}$.

$$M \in (P): y^2 = 4x \Rightarrow M(m^2; 2m), \text{ tiêu điểm } F(1; 0)$$

$$\text{Ta có: } MF^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = 9 \Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -4 \end{cases}$$

Vậy hoành độ điểm M là 2.

» **Chọn SAI.**

(c) Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B . Nếu $A(1; -2)$ thì tọa độ của $B(1; 2)$.

(P) có tiêu điểm $F(1; 0)$

Đường thẳng $AF: x = 1$

Đường thẳng AF cắt parabol tại $B(1; 2)$.

» **Chọn ĐÚNG**

(d) Một điểm A thuộc (P) . Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 4.

$$\text{Ta có: } A \in (P) \Rightarrow A(m^2; 2m), \text{ đường chuẩn } \Delta: x = -1$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến đường chuẩn } d(A, \Delta) = |m^2 + 1| = m^2 + 1 = 5 \Rightarrow m^2 = 4$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ } A \text{ đến trục hoành bằng } |2m| = 4.$$

» **Chọn ĐÚNG**

» **Câu 49.** Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112km.



Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol, tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm của parabol, đơn vị trên các trục là kilômét.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ tiêu điểm là $F(224;0)$.		
(b)	Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -224$.		
(c)	Phương trình chính tắc của parabol (P) là $y = 448x$.		
(d)	Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) là 224km .		

✎ **Lời giải**

(a) Tọa độ tiêu điểm là $F(224;0)$

Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px (p > 0)$.

Gọi F là tiêu điểm của (P) , $(x; y)$ là tọa độ của sao chổi A .

Khi đó khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là $AF = x + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2}$ (vì $x > 0$)

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là $\frac{p}{2}$ (km)

$\Rightarrow \frac{p}{2} = 112 \Rightarrow p = 224$.

Khi đó: tọa độ tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ hay $F(112;0)$

» **Chọn SAI.**

(b) Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -224$.

Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -\frac{p}{2} = -112$

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình chính tắc của parabol (P) là $y = 448x$.

Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 448x$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) là 224km .

Khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) thì sao chổi có hoành độ là $x = \frac{p}{2}$

Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi đó là:

$AF = x + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p = 224$ (km)

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn



» **Câu 50.** Cho parabol (P) có tiêu điểm $F(1;0)$ và đường thẳng $d: x+6m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 51.** Cho parabol $(P): y^2 = 2x$. Có bao nhiêu điểm thuộc (P) có hoành độ dương sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm của (P) bằng 4.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 52.** Tìm tọa độ điểm M (có hoành độ dương) thuộc elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60° .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 53.** Có bao nhiêu điểm N có tung độ lớn hơn 1 thuộc hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho N nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

» **Điền đáp số:**

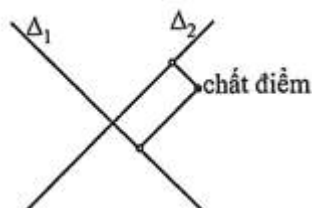
» **Câu 54.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M chuyển động trên đường elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của OM .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M chuyển động trên đường elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của DM , trong đó $D(6;0)$.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 56.** Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau. Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4. Biết rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol có dạng $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ ($a; b \in \mathbb{N}^*$). Tính $S = a + b$



» **Điền đáp số:**

» **Câu 57.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Biết rằng M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông. Khi đó có bao nhiêu điểm M có tổng tọa độ lớn hơn 3?



Điền đáp số:

- » **Câu 58.** Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao $8m$, rộng $20m$. Khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường $5m$ lên đến nóc nhà vòm là bao nhiêu mét? *Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*



Điền đáp số:

- » **Câu 59.** Một cái tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính tổng bán kính nóc và bán kính đáy của tháp theo đơn vị mét. *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



Điền đáp số:

- » **Câu 60.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 . Có bao nhiêu điểm M có tung độ dương thuộc (E) sao cho góc $F_1MF_2 = 60^\circ$.

Điền đáp số:

----- Hết -----



Chương 09

Bài 1.

TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG

A

Lý thuyết

1. Trục tọa độ

1.1. Định nghĩa



Định nghĩa

- » Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.
- » Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- » Hướng của vectơ đơn vị là hướng của trục.
- » Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{i})$.



1.2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục



Định nghĩa

- » Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số a được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\vec{u} = a \cdot \vec{i}$.
 - » Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số m được gọi là tọa độ của điểm M trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = m \vec{i}$.
- Như vậy tọa độ điểm M là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

2. Hệ trục tọa độ

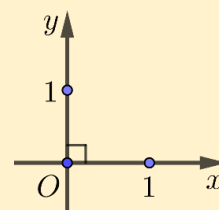
2.1. Định nghĩa



Định nghĩa

- » Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Điểm O là gốc tọa độ, Ox gọi là trục hoành và Oy gọi là trục tung.

Kí hiệu: Oxy hay $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



2.2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ



Định nghĩa

» Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của vectơ

$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Kí hiệu: $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

» Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M .

Kí hiệu: $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$.

2.3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác



» M là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

» G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ



Cho $\vec{u} = (x; y); \vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có

(1) $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

(2) $\vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$

(3) $k\vec{u} = (kx; ky)$

(4) $\vec{u}'$ cùng phương với $\vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

(5) Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.



4. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

(2) $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

(4) $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

(5) $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$)



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ trên trục



Phương pháp

Tọa độ trên trục của điểm & vectơ:

- » Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số a được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\vec{u} = a \cdot \vec{i}$.
 - » Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số m được gọi là tọa độ của điểm M trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$.
- Như vậy tọa độ điểm M là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.



Ví dụ 1.1.

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -2 và 5 .

- (1) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.
- (2) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- (3) Tìm tọa độ của điểm sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- (4) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

Lời giải

- (1) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = 5 - (-2) = 7.$$

- (2) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

$$\text{Tọa độ điểm } I \text{ là } \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}.$$

- (3) Tìm tọa độ của điểm sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

$$\text{Giả sử điểm } M \text{ có tọa độ } x, \text{ ta có } 2(-2-x) + 5(5-x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

- (4) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

$$\text{Giả sử điểm } N \text{ có tọa độ } x, \text{ ta có } 2(-2-x) + 3(5-x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}.$$



Ví dụ 1.2.

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -3 và 1 .

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 1$.
- (2) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.



Lời giải

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{1}$.

Giả sử điểm M có tọa độ x , ta có $3(-3-x) - 2(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = -12$.

- (2) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.

Giả sử điểm N có tọa độ x , ta có $(-3-x) + 3(1-x) = 1+3 \Leftrightarrow x = -1$.



Ví dụ 1.3.

Trên trục tọa độ $(0; i)$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là a, b .

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ($k \neq 1$).

- (2) Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

Lời giải

- (1) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ($k \neq 1$).

Gọi tọa độ điểm M là x .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = a - x \\ \overrightarrow{MB} = b - x \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow a - x = k(b - x) \Leftrightarrow x = \frac{a - kb}{1 - k}, (k \neq 1)$$

Vậy tọa độ điểm M là $\frac{a - kb}{1 - k}$, ($k \neq 1$).

- (2) Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

Gọi tọa độ điểm I là y . I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = a - y \\ \overrightarrow{IB} = b - y \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a - y = -(b - y) \Leftrightarrow y = \frac{a + b}{2}$$

Vậy tọa độ điểm I là $\frac{a + b}{2}$.



Ví dụ 1.4.

Trên trục tọa độ $(0; i)$ cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ.

Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải

Gọi tọa độ của A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d .

Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} = b - a; \overrightarrow{AC} = c - a; \overrightarrow{AD} = d - a$$

$$\overrightarrow{CD} = d - c; \overrightarrow{DB} = b - d; \overrightarrow{BC} = c - b.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (b - a)(d - c) + (c - a)(b - d) + (d - a)(c - b) \\ &= bd - bc - ad + ac + cb - cd - ab + ad + dc - db - ac + ab \\ &= 0. \end{aligned}$$



Ví dụ 1.5.

Trên trục $(O; \vec{i})$, cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c .

Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

Gọi điểm I có tọa độ là x .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = a - x \\ \overrightarrow{IB} = b - x \\ \overrightarrow{IC} = c - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (a - x)\vec{i} \\ \overrightarrow{IB} = (b - x)\vec{i} \\ \overrightarrow{IC} = (c - x)\vec{i} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a + b + c - 3x)\vec{i} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra: } a + b + c - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a + b + c}{3}.$$



➤ Dạng 2. Tọa độ trên hệ trục



Phương pháp

$$(1) \text{ M là trung điểm của đoạn AB } \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

$$(2) \text{ G là trọng tâm tam giác ABC } \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}.$$

» Cho $\vec{u} = (x; y); \vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có

$$(1) \vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$(2) \vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$(3) k\vec{u} = (kx; ky)$$

$$(4) \vec{u}' \text{ cùng phương với } \vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \text{tồn tại số } k \text{ sao cho } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

$$(5) \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0$$

$$(6) \cos(\vec{u}; \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (\vec{u}; \vec{u}' \text{ đều khác } \vec{0})$$

$$(7) \text{ Cho hai điểm } A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \text{ thì } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

$$(8) AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Ví dụ 2.1.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$.

(1) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .

(2) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

➤ Lời giải

(1) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .

$$I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AC \Leftrightarrow I\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1+2}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

(2) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{2-1-3}{3}; \frac{1-2+2}{3}\right) \Leftrightarrow G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$



Ví dụ 2.2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

- (1) Tìm tọa độ các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- (2) Phân tích vector $\vec{c}$ theo hai vector $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

- (1) Tìm tọa độ các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2; 0), \vec{b} = (0; -3), \vec{c} = (3; -4).$$

$$3\vec{a} = (6; 0)$$

$$-2\vec{b} = (0; 6)$$

$$\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (6; 6).$$

- (2) Phân tích vector $\vec{c}$ theo hai vector $\vec{a}; \vec{b}$.

$$\text{Giả sử } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

$$m\vec{a} = (2m; 0); n\vec{b} = (0; -3n)$$

$$\text{Lại có } \vec{c} = (3; -4)$$

$$\text{Nên } \begin{cases} 2m = 3 \\ -3n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}. \text{ Vậy } \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$



Ví dụ 2.3.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1; -2), B(3; 2), C(4; -1)$.

- (1) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành tam giác.
- (2) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

- (1) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành tam giác.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; 4), \overrightarrow{AC} = (5; 1).$$

$$\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương hay ba điểm } A, B, C \text{ tạo thành 1 tam giác.}$$

- (2) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 4 - 3 \\ y_D + 2 = -1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -5 \end{cases} \Rightarrow D(0; -5).$$



Ví dụ 2.4.

Cho $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{c} = (4; -6)$

- (1) Tìm tọa độ của $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$
- (2) Tìm m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$
- (3) Biểu diễn vector $\vec{c}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

- (1) Tìm tọa độ của $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$

$$\vec{d} = \left(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4; 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (-6) \right) = \left(20; -\frac{63}{2} \right).$$

- (2) Tìm m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$

$$m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 2 + (-1) - n \cdot 4 = 0 \\ m \cdot 0 + \frac{1}{2} - n \cdot (-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -\frac{1}{12} \end{cases}.$$

- (3) Biểu diễn vector $\vec{c}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

$$\text{Giả sử } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot 2 + n \cdot (-1) = 4 \\ m \cdot 0 + n \cdot \frac{1}{2} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -12 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{c} = -4\vec{a} - 12\vec{b}.$$



Ví dụ 2.5.

Cho 4 điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$, $D(16; 3)$.

Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (15; 2)$.

$$\text{Giả sử } \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 1 + n \cdot 3 = 15 \\ m \cdot (-2) + n \cdot 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}.$$



Ví dụ 2.6.

Tìm m để

- (1) 2 vector $\vec{a} = (2m; 3m+1)$ và $\vec{b} = (-4; -8)$ cùng phương.
- (2) 3 điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(m+4; 2m+1)$ thẳng hàng.

Lời giải

- (1) 2 vector $\vec{a} = (2m; 3m+1)$ và $\vec{b} = (-4; -8)$ cùng phương.



$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\frac{2m}{-4} = \frac{3m+1}{-8} \Leftrightarrow 4m = 3m+1 \Leftrightarrow m=1$.

(2) 3 điểm $A(1;1), B(3;2), C(m+4;2m+1)$ thẳng hàng.

$$\overrightarrow{AB} = (2;1), \overrightarrow{AC} = (m+3;2m).$$

Yêu cầu bài toán tương đương $\exists k : \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} (k \neq 0)$

$$\Leftrightarrow (m+3;2m) = k(2;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+3=2k \\ 2m=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ k=2 \end{cases}.$$

Vậy $m=1$ thì $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ hay 3 điểm A, B, C thẳng hàng.



Ví dụ 2.7.

Cho ba điểm $A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$

- (1) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- (2) Tìm tọa độ điểm E , sao cho $ABEC$ là hình bình hành.
- (3) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

(1) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

$$\overrightarrow{AB} = (1;5), \overrightarrow{AC} = (-2;0).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng.

(2) Tìm tọa độ điểm E , sao cho $ABEC$ là hình bình hành.

Đặt $E(x;y)$.

Do A, B, C không thẳng hàng

Nên $ABEC$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

$$\Leftrightarrow (1;5) = (x+1;y+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow E(0;3)$$

(3) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(\frac{1+2-1}{3}; \frac{-2+3-2}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.



Ví dụ 2.8.

Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$

- (1) Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.
- (2) Tìm điểm D đối xứng với A qua C .
- (3) Tìm điểm M trên trục Ox , sao cho A, B, M thẳng hàng.
- (4) Tìm điểm N trên Oy sao cho $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO .

Lời giải

(1) Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.



Gọi $C(x; y)$

Ta có: $\overrightarrow{OC} = (x; y)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 5)$

Khi đó: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x; y) = -3(-2; 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow C(6; -15).$

(2) Tìm điểm D đối xứng với A qua C .

Gọi $D(x; y)$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x - 3; y + 5)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -10)$

Khi đó: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (x - 3; y + 5) = 2(3; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -25 \end{cases} \Rightarrow D(9; -25)$

(3) Tìm điểm M trên trục Ox , sao cho A, B, M thẳng hàng.

Vì $M \in Ox$ nên $M(x; 0)$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\exists k (k \neq 0): \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = k \cdot (-2) \\ 5 = k \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 0)$

(4) Tìm điểm N trên Oy sao cho $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO .

Vì $N \in Oy$ nên $N(0; y)$,

Để $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO

thì $\exists k (k > 0): \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \cdot (-3) \\ y = k \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} (tm) \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(0; \frac{5}{3}\right).$



Chương 09

Bài 1.

TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , tọa độ của vectơ $\vec{a} = 8\vec{j} - 3\vec{i}$ bằng

- A. $\vec{a} = (-3; 8)$. B. $\vec{a} = (3; -8)$. C. $\vec{a} = (8; 3)$. D. $\vec{a} = (8; -3)$.

✎ **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\vec{a} = 8\vec{j} - 3\vec{i} = -3\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (-3; 8)$.

» **Câu 2.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{5}$. C. 2. D. $\sqrt{5}$.

✎ **Lời giải**

Chọn B

Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = (4; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \text{ Vậy } |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}.$$

» **Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 3)$ và $B(0; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = (5; -3)$. B. $\overrightarrow{AB} = (1; -3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$. D. $\overrightarrow{AB} = (-1; 3)$.

✎ **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-1; 3)$.

» **Câu 4.** Cho $A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0)$. Tìm x sao cho $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{BC}$

- A. $x = \frac{2}{3}$ B. $x = -\frac{2}{3}$ C. $x = \frac{3}{2}$ D. $x = -\frac{3}{2}$

✎ **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (2; 2), \overrightarrow{BC} = (-3; -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

» **Câu 5.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .

✎ **Lời giải**

Chọn A



Ta có $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6)$, suy ra $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

» **Câu 6.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$

A. 16.

B. 26.

C. 36.

D. -16.

🔗 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a} = 10$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$ suy ra $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) = -16$.

» **Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10.

B. Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.

C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5.

D. Góc giữa hai vectơ là 90° .

🔗 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ nên B đúng.

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ nên C đúng.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ nên A đúng, D sai.

» **Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

D. $\vec{u} = -\vec{v}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

» **Câu 9.** Trong hệ tọa độ Oxy cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

A. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

B. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$.

C. $\vec{u} = (-1; 10)$.

D. $\vec{u} = (1; -10)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn B

Có $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$.

» **Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (10; 6 - 2x)$. Tìm x để $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương?

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

🔗 **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi: $\frac{10}{5} = \frac{6-2x}{2} \Leftrightarrow x=1$.

» **Câu 11.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1;1)$, $N(4;-1)$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{13}$. B. $|\overrightarrow{MN}| = 5$. C. $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{29}$. D. $|\overrightarrow{MN}| = 3$.

» **Lời giải**

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} = (3; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

» **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$

» **Lời giải**

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; 11), \overrightarrow{AC} = (-7; 3).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$$

» **Câu 13.** Trên trục $(O; \vec{i})$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $-5; 2; 4$. Khi đó tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là:

- A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

» **Lời giải**

Chọn B

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(-5 - x_M) + 3(4 - x_M) + 4(2 - x_M) = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{10}{9}$$

» **Câu 14.** Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm B, C lần lượt là $m-2$ và m^2+3m+2 . Tìm m để đoạn thẳng BC có độ dài nhỏ nhất.

- A. $m=2$ B. $m=1$ C. $m=-1$ D. $m=-2$

» **Lời giải**

Chọn C

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = |m^2 + 2m + 4| = (m+1)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}. \text{ BC nhỏ nhất khi } m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$$

» **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

- A. $\vec{c} = (-1; -3)$ B. $\vec{c} = (-1; 3)$ C. $\vec{c} = (1; -3)$ D. $\vec{c} = (1; 3)$

» **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Gọi } \vec{c} = (x; y)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1; 3)$$



» **Câu 16.** Cho $\overrightarrow{OM} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3; -1)$. Tính góc của $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

- A. 135° . B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -135° . D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔍 **Lời giải**

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 135^\circ.$$

» **Câu 17.** Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

- A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. B. $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.
C. $\vec{a} = (-2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$. D. $\vec{a} = (7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn C

Phương án A: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ suy ra A sai.

Phương án B: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 \neq 0$ suy ra B sai.

Phương án C: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ suy ra C đúng.

Phương án D: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) = 42 \neq 0$ suy ra D sai.

» **Câu 18.** Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(5; -1)$. Tính $\cos A$

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$

$$\text{suy ra } \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

» **Câu 19.** Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vectơ: $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$. D. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.

🔍 **Lời giải**

Chọn C

$\vec{a} = (3; 6)$; $\vec{b} = (8; -4)$

Phương án A: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 - 24 = 0$ nên loại A

Phương án B: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ suy ra $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$ nên loại B

Phương án C: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-4)^2} \neq 0$ nên chọn C.

» **Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $2k = 2m$

B. $3k = 2m$

C. $2k + 3m = 0$

D. $3k + 2m = 0$.

🔍 *Lời giải*

Chọn C

Ta có
$$\begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4) \end{cases}$$

Để $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0$.

» **Câu 21.** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB} = (4;2)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-4)$.

B. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

C. Tam giác ABC vuông cân tại A .

D. Tam giác ABC vuông cân tại B .

🔍 *Lời giải*

Chọn C

Phương án A: do $\overrightarrow{AB} = (2;2)$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{AB} = (2;2)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-4)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$

suy ra $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc $\overrightarrow{BC}$ nên loại B.

Phương án C: Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2)$, $\overrightarrow{AC} = (2;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-4)$, suy ra $AB = AC = \sqrt{8}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Nên Tam giác ABC vuông cân tại A . Do đó chọn C.

» **Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(0;6)$.

B. $C(5;0)$.

C. $C(3;1)$.

D. $C(0;-6)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0;c)$ và
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;c-2) \end{cases}$$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0;6)$.

» **Câu 23.** Cho tam giác ABC có $A(-1;2)$, $B(0;3)$, $C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

A. $(0;3)$.

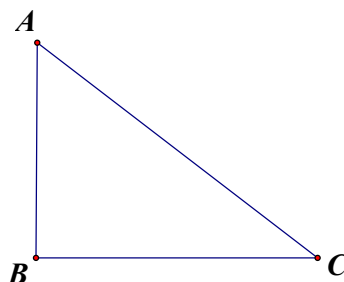
B. $(0;-3)$.

C. $(3;0)$.

D. $(-3;0)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn A



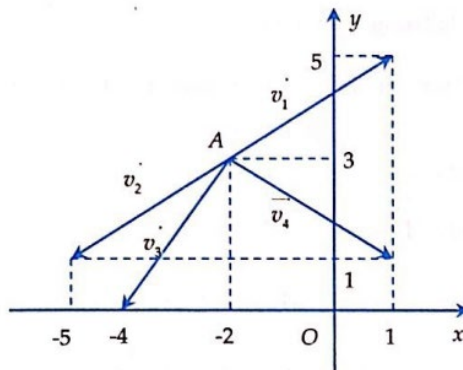


Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1); \overrightarrow{AC} = (6; -4); \overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1.5 + 1.(-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

» **Câu 24.** Cho điểm $A(-2; 3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$?



A. $\vec{V}_1$

B. $\vec{V}_2$

C. $\vec{V}_3$

D. $\vec{V}_4$

» **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{V}_4 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

» **Câu 25.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

A. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; -4)$.

B. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$.

C. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; -4)$.

D. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; 4)$.

» **Lời giải**

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Gọi $A(x; y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$.

» **Câu 26.** Cho véc tơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3; y)$ tạo với véc tơ $\vec{a}$ một góc 45° ?

A. $y = -9$.

B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$.

D. $y = -1$.

» **Lời giải**

Chọn D



Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3-2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9+y^2}}.$

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3-2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2} = 6-4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4y \geq 0 \\ 90+10y^2 = (6-4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

» **Câu 27.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho ΔABC có $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

A. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ **C.** $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}\right)$

» **Lời giải**

Chọn C

Ta có $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3-x_M) - (2-1) = 4(x_M-2) \\ 2(3-y_M) - (5-4) = 4(y_M+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{6} \\ y_M = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$

» **Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (1;2)$ và $\vec{v} = (4m; 2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

» **Lời giải**

Chọn A

Hai vectơ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 \cdot (2m-2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$

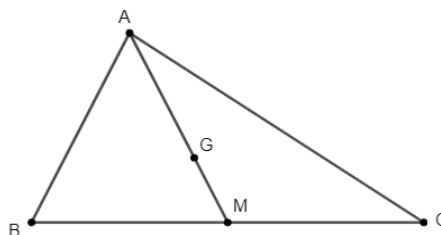
» **Câu 29.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, biết

$M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh BC . Tọa độ đỉnh A là

A. $(2; 0)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; -2)$. **D.** $(0; 2)$.

» **Lời giải**

Chọn D





Gọi $A(x_A; y_A)$. Ta tính được $\overrightarrow{AM} = (1 - x_A; -1 - y_A)$, $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{3}; -1\right)$.

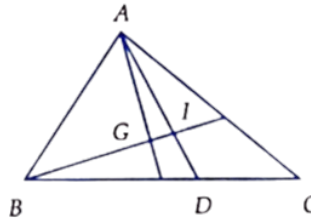
Ta có: $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 1 \\ -1 - y_A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases}$. Vậy $A(0; 2)$.

» **Câu 30.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1; -1), B(0; 1), C(3; 0)$. Xác định tọa độ giao điểm I của AD và BG với D thuộc BC và $2BD = 5DC$, G là trọng tâm $\triangle ABC$

- A.** $I\left(\frac{5}{9}; 1\right)$ **B.** $I\left(\frac{1}{9}; 1\right)$ **C.** $I\left(\frac{35}{9}; 2\right)$ **D.** $I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$

🔗 **Lời giải**

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Ta có $2\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_D = 5(3 - x_D) \\ 2(y_D - 1) = 5(-y_D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{15}{7} \\ y_D = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{15}{7}; \frac{2}{7}\right)$

Trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. Gọi $I(x; y)$ là giao điểm của AD và BG

Ta có $\overrightarrow{AI} = (x + 1; y + 1)$, $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{22}{7}; \frac{9}{7}\right)$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{7(x+1)}{22} = \frac{7(y+1)}{9} \Leftrightarrow 9x - 22y - 13 = 0$$

Ta lại có $\overrightarrow{BI} = (x; y - 1)$, $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{2}{3}; 0\right)$ cùng phương $\Rightarrow$ tồn tại số $k \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BG} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$$

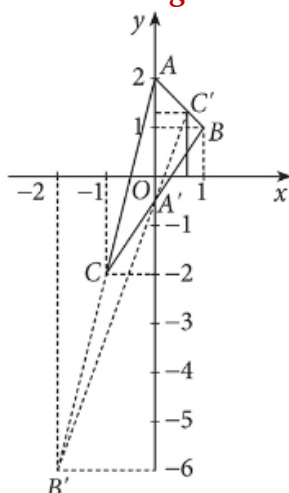
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho các điểm $A(0; 2); B(1; 1); C(-1; -2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn BC, CA, AB theo các tỉ số $-1; \frac{1}{2}; -2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$		
(b)	$B'(2; 6)$		
(c)	$C'\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$		
(d)	Ba điểm A', B', C' thẳng hàng.		



Lời giải



(a) $A'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

Theo đề bài ta có $\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'C} = -1 \Rightarrow A'$ là trung điểm đoạn BC .

Theo công thức trung điểm ta có: $A'\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow A'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $B'(2; 6)$

$$\text{Vì } B' \text{ chia } CA \text{ tỉ số } \frac{1}{2} \text{ nên } \overrightarrow{B'C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'A} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = \frac{x_C - \frac{1}{2}x_A}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \\ y_{B'} = \frac{y_C - \frac{1}{2}y_A}{1 - \frac{1}{2}} = -6 \end{cases} \quad \text{Vậy } B'(-2; -6)$$

» **Chọn SAI.**

(c) $C'\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Tương tự tính được $C'\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

» **Chọn SAI.**

(d) Ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Ta có $\overrightarrow{A'B'} = \left(-2; -\frac{11}{2}\right); \overrightarrow{A'C'} = \left(\frac{2}{3}; \frac{11}{6}\right)$.

Rõ ràng $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{A'C'}$ nên A', B', C' thẳng hàng.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 32.** Cho $A(0; 1); B(2; -3); C(1; -7)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu B là trung điểm của AM thì tọa độ điểm $M(1; -2)$.		



(b)	Nếu C là trọng tâm của tam giác ABG thì tọa độ điểm $G(1;-3)$.		
(c)	Nếu D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì tọa độ điểm $D(-1;-3)$.		
(d)	Nếu E là điểm thuộc trục hoành sao cho AE vuông góc với BC thì tọa độ $E(4;0)$.		

Lời giải

(a) Nếu B là trung điểm của AM thì tọa độ điểm $M(1;-2)$.

$$\text{Nếu } B \text{ là trung điểm của } AM \text{ thì } \begin{cases} x_M = 2x_B - x_A = 4 \\ y_M = 2y_B - y_A = -7 \end{cases} \Rightarrow M(4;-7).$$

» **Chọn SAI.**

(b) Nếu C là trọng tâm của tam giác ABG thì tọa độ điểm $G(1;-3)$.

$$\text{Nếu } C \text{ là trọng tâm của tam giác } ABG \text{ thì } \begin{cases} x_G = 3x_C - x_A - x_B = 1 \\ y_G = 3y_C - y_A - y_B = -19 \end{cases} \Rightarrow G(1;-19).$$

» **Chọn SAI.**

(c) Nếu D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì tọa độ điểm $D(-1;-3)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2;-4); \overrightarrow{DC} = (1-x_D;-7-y_D).$$

$$\text{Nếu } ABCD \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-1;-3).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Nếu E là điểm thuộc trục hoành sao cho AE vuông góc với BC thì tọa độ $E(4;0)$.

$$\text{Vì } E \text{ là điểm thuộc trục hoành } \Rightarrow E(a;0); \overrightarrow{AE} = (a;-1); \overrightarrow{BC} = (-1;-4)$$

$$\text{Do } AE \text{ vuông góc với } BC \text{ nên } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow -a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow E(4;0).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2;5), B(-4;-2), C(1;5)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.		
(b)	$G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .		
(c)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi đó tọa độ điểm D là $D(3;10)$		
(d)	$\widehat{ACB} = 45^\circ$		

Lời giải

(a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2;-7); \overrightarrow{AC} = (3;0).$$

$$\text{Do } \frac{3}{-2} \neq \frac{0}{-7} \text{ nên } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

Vì vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

» **Chọn ĐÚNG.**



(b) $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi đó tọa độ điểm D là $D(3;10)$

Giả sử $D(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -7); \overrightarrow{DC} = (1-x; 5-y)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 1-x \\ -7 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$.

Vậy $D(3;12)$.

» **Chọn SAI.**

(d) $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Ta có: $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$;

$AC = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (5-5)^2} = 3$,

$BC = \sqrt{[1-(-4)]^2 + [5-(-2)]^2} = \sqrt{74}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot 3 + (-7) \cdot 0 = -6$.

Suy ra $\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6}{\sqrt{53} \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{53}}{53}$ nên $\widehat{BAC} \approx 106^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2.5 + 7.7 = 59$.

Suy ra $\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{59}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{74}}$ nên $\widehat{ABC} \approx 20^\circ$.

Vậy $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) \approx 180^\circ - (106^\circ + 20^\circ) = 54^\circ$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (-1; 2), \vec{c} = (-6; 4)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$ \vec{a} = \sqrt{13}$		
(b)	$ \vec{b} = \sqrt{3}$		
(c)	$ \vec{c} = \sqrt{13}$		
(d)	Vecto $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $\frac{\sqrt{13}}{2}$ có tọa độ $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ hay $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.		

» **Lời giải**

(a) $|\vec{a}| = \sqrt{13}$



Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

» **Chọn SAI.**

(c) $|\vec{c}| = \sqrt{13}$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

» **Chọn SAI.**

(d) Vector $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $\frac{\sqrt{13}}{2}$ có tọa độ $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ hay $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.

Vì $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên tồn tại $k \in \mathbb{R}$ để $\vec{d} = k\vec{a} = (2k; 3k)$

$$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{4k^2 + 9k^2} = \sqrt{13k^2}.$$

$$\text{Mặt khác } |\vec{d}| = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \sqrt{13k^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow 13k^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy có hai vector thỏa mãn đề bài là $\vec{d} = \left(1; \frac{3}{2}\right)$ hay $\vec{d} = \left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 35.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = (0; -1)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2)$		
(b)	Vector $\vec{e} = (1; -1)$ cùng phương, cùng hướng với vector $\vec{a}$		
(c)	Vector $\vec{f} = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ cùng phương, cùng hướng với vector $\vec{b}$		
(d)	$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$		

» **Lời giải**

(a) $2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2\vec{a} = (4; -4) \\ -\vec{b} = (-4; -1) \\ -3\vec{c} = (0; 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Vector $\vec{e} = (1; -1)$ cùng phương, cùng hướng với vector $\vec{a}$

Ta $\vec{a} = (2; -2) = 2\vec{e}$ nên $\vec{a}, \vec{e}$ là hai vector cùng phương với nhau,

Hơn nữa chúng cùng hướng với nhau vì $\vec{a} = k\vec{e}, k = 2 > 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**



(c) Vector $\vec{f} = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ cùng phương, cùng hướng với vector $\vec{b}$

Tương tự: $\vec{b} = (4; 1) = -4\vec{f}$, tức là $\vec{b} = k\vec{f}, k = -4 < 0$

Nên $\vec{b}$ và $\vec{f}$ là hai vector cùng phương, ngược hướng với nhau.

» **Chọn SAI.**

(d) $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$

Gọi m, n là các số thỏa mãn $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ ($\vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương).

Khi đó:
$$\begin{cases} 2 = m \cdot 4 + n \cdot 0 \\ -2 = m \cdot 1 + n \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c} \text{ .}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 36.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có các đỉnh thỏa mãn $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A(2; -1), B(1; 1), C(4; 1)$		
(b)	E là trung điểm AB nên $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$		
(c)	G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$		
(d)	Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành nên $D(2; -1)$		

» **Lời giải**

(a) $A(2; -1), B(1; 1), C(4; 1)$

Ta có: $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow A(2; -1)$

$\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow B(1; 1)$.

$\vec{OC} = 4\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow C(4; 1)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) E là trung điểm AB nên $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

E là trung điểm AB nên
$$\begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \end{cases} \text{ hay } E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

G là trọng tâm $\triangle ABC$



$$\text{Nên } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2+1+4}{3} = \frac{7}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1+1+1}{3} = \frac{1}{3} \text{ hay } G\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành nên $D(2; -1)$

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 4 - 1 \\ y_D + 1 = 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(5; -1)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD là $D(8; 11)$		
(b)	$\overrightarrow{BC} = (0; -6); \overrightarrow{AC} = (6; -3)$		
(c)	Tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho A, B, E thẳng hàng là $E(-6; 0)$		
(d)	Tọa độ F thỏa mãn $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF}$ là $F(20; 5)$		

» **Lời giải**

(a) Tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD là $D(8; 11)$

$$C \text{ là trọng tâm tam giác } ABD \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} \\ y_C = \frac{y_A + y_B + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-4 + 2 + x_D}{3} \\ -2 = \frac{1 + 4 + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases}$$

Vậy $D(8; -11)$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{BC} = (0; -6); \overrightarrow{AC} = (6; -3)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho A, B, E thẳng hàng là $E(-6; 0)$

$$\text{Gọi } E(x; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (x + 4; -1), \overrightarrow{AB} = (6; 3).$$

Ba điểm A, B, E thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x+4 = -2 \Leftrightarrow x = -6. \text{ Vậy } E(-6; 0).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tọa độ F thỏa mãn $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF}$ là $F(20; 5)$

Gọi $F(x; y)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AF} = (x + 4; y - 1); \overrightarrow{BC} = (0; -6); \overrightarrow{AC} = (6; -3)$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{AC} = (-12; 6); \overrightarrow{CF} = (x - 2; y + 2) \Rightarrow 2\overrightarrow{CF} = (2x - 4; 2y + 4)$$



Suy ra: $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF} = (2x - 16; 2y + 4)$.

Ta có: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 2x - 16 \\ y - 1 = 2y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy $F(20; -5)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; -1)$; $B(1; 3)$; $C(2; -3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	A, B, C là ba đỉnh một tam giác		
(b)	Điểm $I(0; -2)$ là trung điểm của AB		
(c)	Điểm M thuộc Ox sao cho $AM + BM$ bé nhất có hoành độ bằng $\frac{5}{4}$		
(d)	Điểm N thuộc Oy sao cho $BN + CN$ bé nhất có tung độ bằng 2		

» **Lời giải**

(a) A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (4; -2)$; vì $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Điểm $I(0; -2)$ là trung điểm của AB

Trung điểm AB có tọa độ $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

» **Chọn SAI.**

(c) Điểm M thuộc Ox sao cho $AM + BM$ bé nhất có hoành độ bằng $\frac{5}{4}$

Do $y_A \cdot y_B = -1.3 < 0$ nên hai điểm A, B nằm khác phía so với trục Ox .

Vì M thuộc Ox mà $AM + BM$ bé nhất nên A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương.

Gọi $M(x; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x + 2; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x+8=3 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$.

Vậy $M\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$.

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm N thuộc Oy sao cho $BN + CN$ bé nhất có tung độ bằng 2

Do $x_B \cdot x_C = 1.2 > 0$ nên hai điểm B, C nằm cùng phía so với trục Oy .

Lấy C' đối xứng với C qua $Oy \Rightarrow C'(-2; -3)$ (lúc này C' và B khác phía so với trục Oy).

Vì N thuộc Oy nên $CN = C'N$.

Do vậy $BN + CN = BN + C'N$; tổng này bé nhất

$\Leftrightarrow B, N, C'$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$ cùng phương.



Gọi $N(0; y) \in Oy \Rightarrow \overrightarrow{BN} = (-1; y-3); \overrightarrow{BC'} = (-3; -6)$.

Ta có : $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-1}{-3} = \frac{y-3}{-6} \Leftrightarrow 6 = -3y+9 \Leftrightarrow y=1$.

Vậy $N(0;1)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 39.** Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1;2), B(-2;6), C(9;8)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác ABC vuông tại A .		
(b)	Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$		
(c)	Tam giác ABC có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích).		
(d)	Điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất có tọa độ là $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$		

» **Lời giải**

(a) Tam giác ABC vuông tại A .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 4), \overrightarrow{AC} = (8; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$.

Tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$ vuông là trung điểm cạnh huyền, là điểm có tọa độ là $\left(\frac{7}{2}; 7\right)$

» **Chọn SAI.**

(c) Tam giác ABC có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích).

$\overrightarrow{AB} = (-3; 4), \overrightarrow{AC} = (8; 6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 5; |\overrightarrow{AC}| = 10$.

Vậy diện tích tam giác vuông $\triangle ABC$ là $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$ (đơn vị diện tích)

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất có tọa độ là $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$

Điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất $\Leftrightarrow H$ là hình chiếu của A trên BC .

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của A lên BC .

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-1; y-2), \overrightarrow{BH} = (x+2; y-6), \overrightarrow{BC} = (11; 2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow$ (2)



Từ (1) và (2) ta có : tọa độ điểm H thỏa mãn hệ $\begin{cases} 11x + 2y - 15 = 0 \\ 2x - 11y + 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{32}{5} \end{cases}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Trên màn hình ra đa của một đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét, một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600; 200)$ đến thành phố B có tọa độ $(200; 500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Biết tọa độ $M(x; y)$ là tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200)$		
(b)	$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$		
(c)	$M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$		
(d)	$\overrightarrow{AB} = (400; 300)$		

» **Lời giải**

Giả sử $M(x; y)$ là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200)$, $\overrightarrow{AB} = (-400; 300)$

Vì máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} x - 600 = -\frac{400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1400}{3} \\ y = 300 \end{cases}$$

Vậy vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là $M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$

(a) $\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

» **Chọn SAI.**

(c) $M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\overrightarrow{AB} = (400; 300)$.

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 41.** Với $m > 0$ thì có bao nhiêu $\vec{u} = (2m - 1; -2)$ cùng phương với $\vec{v} = (-2; m + 3)$.



Lời giải

Trả lời: 1

Vì $\vec{u} = (2m-1; -2)$ cùng phương với $\vec{v} = (-2; m+3)$ nên $(2m-1)(m+3) - (-2)(-2) = 0$,
hay $2m^2 + 5m - 7 = 0$

Do đó, $m = 1$ hoặc $m = -\frac{7}{2}$.

Vậy chỉ có $m = 1$ thỏa, do đó có 1 vectơ $\vec{u}$ thỏa.

» **Câu 42.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (1; 1)$ và $\vec{d} = (2m+2; 1-m^2)$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có: $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ khi và chỉ khi $\frac{2m+2}{2} = \frac{1-m^2}{-1}$

$$\Leftrightarrow -2m-2 = 2-2m^2 \Leftrightarrow 2m^2-2m-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}.$$

Vì m dương nên $m = 2$ thỏa mãn.

» **Câu 43.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(5; 3)$, $N(-3; 5)$. Xác định giá trị hoành độ của điểm P sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng. Biết điểm P nằm trên trục hoành.

Lời giải

Trả lời: 17

P là điểm nằm trên trục hoành nên $P(x; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-8; 2)$; $\overrightarrow{MP} = (x-5; -3)$

$$\text{Ba điểm } M, N, P \text{ thẳng hàng khi } \overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = k \cdot (-8) \\ -3 = k \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $P(17; 0) \Rightarrow x_P = 17$.

» **Câu 44.** Cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 0)$; $C(0; 5)$, tính tổng tung độ và hoành độ điểm M biết rằng $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

Trả lời: 2,3

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-2)$, $\overrightarrow{BM} = (x+2; y)$, $\overrightarrow{CM} = (x; y-5)$.

$$\text{Từ điều kiện đã cho ta } \Rightarrow \begin{cases} (x-1) + 2(x+2) + 3x = 0 \\ y-2 + 2y + 3(y-5) = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình ta được $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{17}{6}$, suy ra $x + y = -\frac{1}{2} + \frac{17}{6} = \frac{7}{3} \approx 2,3$.

» **Câu 45.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; 2)$, $\vec{b} = (-3; n)$ và $\vec{c} = (-2m; 7)$. Tính $m+n$ biết rằng $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, với $m; n$ là các số tự nhiên.

Lời giải

Trả lời: 6



$$\text{Ta có: } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = m - 3 \\ 7 = 2 + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 1 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow S = m + n = 6.$$

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;2); B(1;-3); C(-3;0)$. Xác định hoành độ điểm E thỏa mãn $\vec{AE} = -2\vec{AB} + 3\vec{AC}$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -11**

Giả sử $E(x;y)$.

$$\text{Ta có: } \vec{AE} = (x-2; y-2), \vec{AB} = (-1; -5), \vec{AC} = (-5; -2).$$

$$\text{Suy ra } -2\vec{AB} + 3\vec{AC} = (-13; 4).$$

$$\text{Do đó } \vec{AE} = -2\vec{AB} + 3\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -13 \\ y-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 6. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E(-11;6)$$

» **Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;4); B(-1;-2); C(8;1)$. Có bao nhiêu điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng ba lần diện tích của tam giác ABM .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Vì M nằm trên đường thẳng BC

Nên $S_{ABC} = 3S_{ABM} \Leftrightarrow BC = 3BM$ (hai tam giác có cùng đường cao kẻ từ A).

Giả sử $M(x;y)$.

$$\text{Ta có: } \vec{BM} = (x+1; y+2), \vec{BC} = (9;3).$$

Trường hợp 1: $\vec{BC} = 3\vec{BM}$.

$$\text{Ta có: } \vec{BC} = 3\vec{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 3(x+1) \\ 3 = 3(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } M(2;-1).$$

Trường hợp 2: $\vec{BC} = -3\vec{BM}$.

$$\text{Ta có: } \vec{BC} = -3\vec{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = -3(x+1) \\ 3 = -3(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } M(-4;-3).$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài toán là: $M(2;-1)$ và $M(-4;-3)$.

» **Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;5); B(9;3)$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành thỏa mãn $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Điểm M thuộc trục hoành nên giả sử $M(m;0)$.

$$\text{Ta có: } \vec{MA} = (1-m; 5); \vec{MB} = (9-m; 3).$$

$$\text{Theo đề bài, } \widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$



$$\Leftrightarrow (1-m)(9-m) + 5 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 4. \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài toán là: $M(4;0)$ và $M(6;0)$.

» **Câu 49.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (3m; 4m-1)$ và $\vec{b} = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$ (với m là tham số). Tìm giá trị của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}m + (4m-1)\sqrt{2}}{\sqrt{(3m)^2 + (4m-1)^2} \cdot \sqrt{2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{7m-1}{\sqrt{25m^2 - 8m + 1}} = 1$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 25m^2 - 8m + 1 > 0 & (1) \\ 7m - 1 > 0 & (2) \end{cases} \text{ và } 7m - 1 = \sqrt{25m^2 - 8m + 1} \quad (3)$$

Giải phương trình (3), thay giá trị nghiệm vào (1), (2) để kiểm tra ta có $m = \frac{1}{4}$.

» **Câu 50.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; -2)$ và $B(10; 4)$. Biết điểm M trên trục tung để $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tung độ của điểm M bằng bao nhiêu?

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Điểm M thuộc trục tung nên giả sử $M(0; m)$.

$$\text{Ta có: } \vec{MA} = (4; -2-m), \vec{MB} = (10; 4-m).$$

$$\text{Suy ra } \vec{MA} + \vec{MB} = (14; 2-2m).$$

$$\text{Do đó } |\vec{MA} + \vec{MB}| = \sqrt{14^2 + (2-2m)^2} \geq 14.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$.

$$\Rightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 14 \text{ khi } M \text{ có tọa độ là } (0; 1).$$



Chương 09

Bài 2.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A

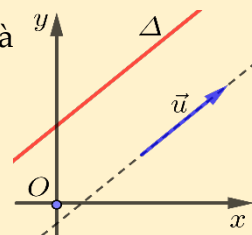
Lý thuyết

1. Véc tơ chỉ phương và vector pháp tuyến của đường thẳng



Định nghĩa Vector chỉ phương:

» Véc tơ $\vec{u}$ gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .



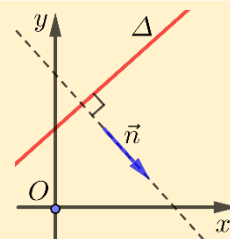
Nhận xét

- (1) Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $k.\vec{u}$, ($k \neq 0$) cũng là một VTCP của d .
- (2) Một đường thẳng xác định khi biết một VTCP và một điểm mà nó đi qua.



Định nghĩa Vector pháp tuyến:

» Véc tơ $\vec{n}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .



Nhận xét

- (1) Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d thì $k.\vec{n}$, ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của d .
- (2) Một đường thẳng xác định khi biết một VTPT và một điểm nó đi qua.
- (3) Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$.



2. Liên hệ giữa VTCP và VTPT



Nhận xét:

(1) Từ nhận xét:

“Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ”

▪ Ta rút ra được:

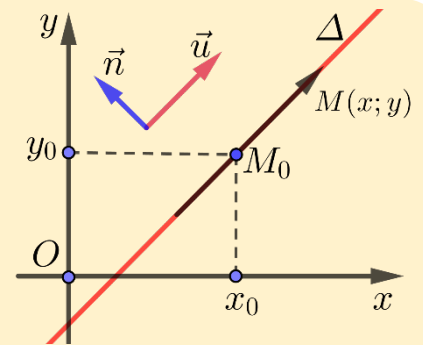
“Nếu $\vec{n} = (a; b)$ là một VTPT của đường thẳng d thì VTCP của d là $\vec{u} = (b; -a)$ ($\vec{u} = (-b; a)$)”

(2) Từ nhận xét:

“Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ”

▪ Ta rút ra được:

“Nếu $\vec{u} = (a; b)$ là một VTCP của đường thẳng d thì một VTPT của d là $\vec{n} = (-b; a)$ ($\vec{n} = (b; -a)$)”



3. Phương trình đường thẳng



Phương trình tham số:

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{d}$.

» Khi đó $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow$ tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là **phương trình tham số** của đường thẳng Δ (t là tham số).

» Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{d}$ thì có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. (Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t \in \mathbb{R}$ và ngược lại).

✓ **Nhận xét:** $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$



Nhận xét

Trong mặt phẳng Oxy , mọi phương trình dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một VTCP là $\vec{d}$.



Phương trình tổng quát:

- » Mọi đường thẳng đều có **phương trình tổng quát** dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0.
- » Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n} = (a; b)$ là một VTPT.

Nhận xét

- (1) Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ thì có phương trình tổng quát là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
- (2) Nếu $a = 0$ phương trình trở thành $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0; -\frac{c}{b}\right)$.
- (3) Nếu $b = 0$ phương trình trở thành $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$.
- (4) Nếu $c = 0$ phương trình trở thành $ax + by = 0$ đường thẳng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.
- (5) Đường thẳng $y = ax + b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có VTPT là $\vec{n} = (a; -1)$.
Ngược lại đường thẳng có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ thì có hệ số góc là $-\frac{a}{b}$.
- (6) Đường thẳng d đi qua điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



Phương trình chính tắc:

- » Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình tham số của đường thẳng



Phương pháp

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định:

- » một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$
- » một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$



Ví dụ 1.1.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3)$.

Lời giải

Phương trình tham số đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$



Ví dụ 1.2.

Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $A(1; 2), B(3; 1)$. Viết phương trình tham số đường thẳng d .

Lời giải

Đường thẳng d qua $A(1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -1)$ làm vectơ chỉ phương

Vậy phương trình tham số đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$



Ví dụ 1.3.

Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $M(-2; 3)$ và song song với đường thẳng EF . Biết $E(0; -1), F(-3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng d .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{EF} = (-3; 1)$.

Phương trình tham số đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$$



➤ Dạng 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng



Phương pháp

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định:

- » một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$
- » một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

» Phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: ax + by = c$ với $c = -(ax_0 + by_0)$.



Ví dụ 2.1.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 3)$.

✎ Lời giải

Phương trình đường thẳng $\Delta: -2(x + 1) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 17 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: -2x + 3y - 17 = 0$.



Ví dụ 2.2.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1; 3), B(2; 1)$.

✎ Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

Đường thẳng Δ qua $N(2; 3)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng $\Delta: (x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$.



Ví dụ 2.3.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

✎ Lời giải

» Cách 1:

Phương trình đường thẳng d có dạng $x + 2y + C = 0$.

Vì d đi qua $A(-1; 2)$ nên ta có phương trình $-1 + 2 \cdot 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng của đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$.

» Cách 2:

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2)$.

Vì d vuông góc với Δ nên d nhận $\vec{u} = (1; 2)$ làm vectơ pháp tuyến.



Phương trình tổng quát đường thẳng $d: (x+1)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-3=0$.



Ví dụ 2.4.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(-4;-1), B(2;3)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow I(-1;1)$, $\overrightarrow{AB} = (6;4) = 2(3;2)$

Vì $\Delta \perp AB$ nên Δ có một VTPT là $\vec{n} = (3;2)$

Vậy PTTQ của Δ là $3(x+1)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+1=0$



Ví dụ 2.5.

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = -2-t' \\ y = t' \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đối xứng với Δ' qua Δ .

Lời giải

Gọi $M = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow M(-6;4)$.

Có $A(-2;0) \in \Delta'$ khác M .

Tìm tọa độ hình chiếu của A lên Δ là $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Tọa độ điểm đối xứng của A qua Δ là $A'\left(-\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $d: \begin{cases} x = 22-7l \\ y = l \end{cases}$.



Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng



Phương pháp

Cho các đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và $\Delta': a'x + b'y + c' = 0$.

Khi đó ta có $\vec{n} = (a; b)$ và $\vec{n}' = (a'; b')$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của Δ và Δ' .

Để xét vị trí tương đối của Δ và Δ' trước hết ta dựa vào các vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n}'$. Cụ thể ta có:

- (1) Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, hơn nữa nếu $AA' + BB' = 0$ thì $\Delta \perp \Delta'$.
- (2) $\Delta \equiv \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.
- (3) $\Delta // \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.
- (4) Nếu Δ cắt Δ' và gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ, Δ' thì $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}; \vec{n}')|$.

Chú ý:

- (1) Việc xét vị trí tương đối của Δ và Δ' cũng được xét qua số điểm chung.
- (2) Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa Δ và Δ' cũng được thực hiện qua các vectơ chỉ phương.



Ví dụ 3.1.

Cho ba đường thẳng: $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y + 1 = 0$, $d_3: mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra d_1, d_2 cắt nhau tại $A(1; -1)$.

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 cũng đi qua điểm A hay $A \in d_3$

$$\text{Suy ra } m \cdot 1 - (-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$



Ví dụ 3.2.

Cho các đường thẳng $\Delta: 2x + 3y - 5 = 0$, $\Delta': 3x - 2y - 1 = 0$ và điểm $M(2; 3)$

- (1) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'
- (2) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d .

Lời giải

- (1) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'



Ta có $\vec{n} = (2; 3)$ và $\vec{n}' = (3; -2)$ là các véc tơ pháp tuyến của Δ và Δ' .

Ta thấy $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ không cùng phương vì $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-2}$ từ đó suy ra Δ và Δ' là các đường thẳng cắt nhau.

(2) Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d

Ta có $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$ do đó Δ và Δ' là các đường thẳng vuông góc với nhau.

Gọi $A = \Delta \cap \Delta'$, $B = \Delta \cap d$, $C = d \cap \Delta'$.

Khi đó tam giác ABC là vuông tại A do đó nếu tam giác ABC cân thì $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$

Từ đó suy ra góc giữa các đường thẳng Δ và d bằng $\frac{\pi}{4}$



Ví dụ 3.3.

Cho hai đường thẳng $\Delta: (m+3)x + 3y - 2m + 3 = 0$, $\Delta': 2x + 2y + 2 - 3m = 0$. Tìm giá trị của tham số m để:

- (1) Đường thẳng Δ song song với Δ'
- (2) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ' .

Lời giải

(1) Đường thẳng Δ song song với Δ'

Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\frac{m+3}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq 0$.

(2) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ'

Theo câu (1) để $\Delta // \Delta'$ thì trước hết ta phải có $m = 0$.

Với $m = 0$ khi đó dễ dàng ta nhận thấy $\Delta \equiv \Delta'$.

Vậy không tồn tại m để $\Delta // \Delta'$.

Chú ý: Ta có thể làm theo cách sau: $\Delta // \Delta'$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{m+3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{-2m+3}{2-3m} \\ 2-3m \neq 0 \end{cases}$.

Hệ trên vô nghiệm do đó không tồn tại m để $\Delta // \Delta'$.



Ví dụ 3.4.

Cho hai đường thẳng song $d_1: 5x - 7y + 4 = 0$ và $d_2: 5x - 7y + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 là?

Lời giải

Gọi là d đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 .

Suy ra phương trình d có dạng: $5x - 7y + c = 0$ ($c \neq 4$, $c \neq 6$)

Mặt khác: $d(d; d_1) = d(d; d_2) \Leftrightarrow \frac{|c-4|}{\sqrt{5^2 + (-7)^2}} = \frac{|c-6|}{\sqrt{5^2 + (-7)^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} c-4 = c-6 \\ c-4 = -c+6 \end{cases} \Leftrightarrow c = 5$



Ví dụ 3.5.

Xác định tất cả các giá trị của a để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x = 9 + at \\ y = 7 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng $3x + 4y - 2 = 0$ bằng 45° .

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Đường thẳng $\begin{cases} x = 9 + at \\ y = 7 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; -2)$.

Đường thẳng $3x + 4y - 2 = 0$ có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (4; -3)$.

Ta có $\cos \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a + 6|}{5\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2 + 4} = \sqrt{2}|4a + 6| \Leftrightarrow 25a^2 + 100 = 32a^2 + 96a + 72 \Leftrightarrow 7a^2 + 96a - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ a = -14 \end{cases}.$$



Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng



Phương pháp

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$.

Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính: $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



Ví dụ 4.1.

Tìm khoảng cách từ điểm $M(1; 2)$ đến đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 2 = 0$.

Lời giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có $d(M, \Delta) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}$.



Ví dụ 4.2.

Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng $d: 4x + 3y - 10 = 0$ bằng 2.

Lời giải

Gọi $M \in \Delta$, khi đó $M(m; 1 - 2m)$.

$$\text{Ta có } d(M, d) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2m - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 7 = 10 \\ -2m - 7 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm thỏa điều kiện bài toán là $M_1\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ và $M_2\left(-\frac{17}{2}; 18\right)$.



Ví dụ 4.3.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3)$ và có khoảng cách đến điểm $M(2; 4)$ bằng 1.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3)$ và có hệ số góc là k .

Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = k(x - 1) - 3$ hay $kx - y - k - 3 = 0$.

Theo đề ta có $d(M, \Delta) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|2k - 4 - k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |k - 7| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow (k - 7)^2 = k^2 + 1 \Leftrightarrow 14k = 48 \Leftrightarrow k = \frac{24}{7}.$$

Vậy đường thẳng Δ cần tìm có phương trình là $24x - 7y - 45 = 0$.



Ví dụ 4.4.

Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều $A(-1;2)$ và $B(5;4)$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng d cần tìm là $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) (1).

Do $M(2;5) \in d$ nên ta có: $2a + 5b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 5b$.

Thay $c = -2a - 5b$ vào (1) ta có phương trình đường thẳng d trở thành:

$$ax + by - 2a - 5b = 0 \quad (2).$$

Vì d cách đều hai điểm A và B nên:

$$\frac{|(-1)a + 2b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 4b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |3a + 2b| = |3a - b| \Leftrightarrow 9a^2 + 18ab + 9b^2 = 9a^2 - 6ab + b^2 \Leftrightarrow 8b^2 + 24ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -3a \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Với $b = 0$ thay vào (2)

Ta được phương trình đường thẳng d là: $ax + 0y - 2a - 5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow ax - 2a = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$.

Trường hợp 2: Với $b = -3a$ ta chọn $a = 1$, $b = -3$ thay vào (2)

Ta được phương trình đường thẳng d là: $1x - 3y - 2 - 5 \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 13 = 0$.



Chương 09

Bài 2.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $(d): ax + by + c = 0, (a^2 + b^2 \neq 0)$. Vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của đường thẳng (d) ?

- A. $\vec{n} = (a; -b)$. B. $\vec{n} = (b; a)$. C. $\vec{n} = (b; -a)$. D. $\vec{n} = (a; b)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn D

Ta có một vector pháp tuyến của đường thẳng (d) là $\vec{n} = (a; b)$.

Do đó chọn đáp án D. $\vec{n}_1 = (-a; b)$.

» **Câu 2.** Cho đường thẳng d có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b), a, b \in \mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:

1. Nếu $b = 0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.
2. Nếu $b \neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $\frac{a}{b}$.
3. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (b; -a)$.
4. Vector $k\vec{n}, k \in \mathbb{R}$ là vector pháp tuyến của d .

Có bao nhiêu khẳng định sai?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

d có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b) \Rightarrow$ phương trình $d: ax + by + c = 0$.

Nếu $b = 0$ thì đường thẳng $d: ax + c = 0$ không có hệ số góc $\Rightarrow$ khẳng định 1 đúng.

Nếu $b \neq 0$ thì đường thẳng $d: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ có hệ số góc là $-\frac{a}{b} \Rightarrow$ khẳng định 2 sai.

Với $\vec{u} = (b; -a) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u}$ là một vector chỉ phương của $d \Rightarrow$ khẳng định 3 đúng.

Chọn $k = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow k\vec{n} = (0; 0)$ không phải là vector pháp tuyến của $d \Rightarrow$ khẳng định 4 sai.

Vậy có 2 mệnh đề sai.

» **Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Vector pháp tuyến của đường thẳng d là

- A. $\vec{n} = (1; -2)$ B. $\vec{n} = (2; 1)$ C. $\vec{n} = (-2; 3)$ D. $\vec{n} = (1; 3)$

🔍 **Lời giải**



Chọn A

- » **Câu 4.** Cho đường thẳng $(d): 3x + 2y - 10 = 0$. Véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của (d) ?
- A. $\vec{u} = (3; 2)$. B. $\vec{u} = (3; -2)$. C. $\vec{u} = (2; -3)$. D. $\vec{u} = (-2; -3)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn C

Đường thẳng (d) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 2)$ nên (d) có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3)$.

- » **Câu 5.** Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ một vector pháp tuyến của đường thẳng Δ có tọa độ
- A. $(5; -3)$. B. $(6; 1)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. D. $(-5; 3)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn B

$\Delta: \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ suy ra có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = \left(3; \frac{1}{2}\right)$. Do đó đường thẳng Δ cũng có một vector pháp tuyến có tọa độ $(6; 1)$.

- » **Câu 6.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , véc tơ nào là một véc tơ pháp tuyến của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?
- A. $\vec{n} = (-2; -1)$. B. $\vec{n} = (2; -1)$. C. $\vec{n} = (-1; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn A

Một VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (-1; 2) \Rightarrow$ một VTPT của d là $\vec{n} = (-2; -1)$.

- » **Câu 7.** Vector chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ là:
- A. $\vec{u} = (-4; 3)$. B. $\vec{u} = (4; 3)$. C. $\vec{u} = (3; 4)$. D. $\vec{u} = (1; -2)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn A

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-4; 3)$.

- » **Câu 8.** Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox :
- A. $\vec{u} = (1; 0)$. B. $\vec{u} = (1; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 1)$. D. $\vec{u} = (0; 1)$.

🔍 *Lời giải*

Chọn A

Vector $\vec{i} = (1; 0)$ là một vector chỉ phương của trục Ox

Các đường thẳng song song với trục Ox có 1 vector chỉ phương là $\vec{u} = \vec{i} = (1; 0)$



» **Câu 9.** Cho đường thẳng $d: 7x + 3y - 1 = 0$. Vector nào sau đây là Vector chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u} = (7; 3)$. B. $\vec{u} = (3; 7)$. C. $\vec{u} = (-3; 7)$. D. $\vec{u} = (2; 3)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn C

Đường thẳng d có 1 VTPT là $\vec{n} = (7; 3)$ nên d có 1 VTCP là $\vec{u} = (-3; 7)$.

» **Câu 10.** Cho đường thẳng $d: 2x + 3y - 4 = 0$. Vector nào sau đây là vector pháp tuyến của đường thẳng d ?

- A. $\vec{n}_1 = (3; 2)$. B. $\vec{n}_1 = (-4; -6)$. C. $\vec{n}_1 = (2; -3)$. D. $\vec{n}_1 = (-2; 3)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

Vector pháp tuyến của đường thẳng $d: \vec{n}_1 = (-4; -6)$.

» **Câu 11.** Cho đường thẳng $d: 5x + 3y - 7 = 0$. Vector nào sau đây là một vector chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{n}_1 = (3; 5)$. B. $\vec{n}_2 = (3; -5)$. C. $\vec{n}_3 = (5; 3)$. D. $\vec{n}_4 = (-5; -3)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn D

Đường thẳng $d: 5x + 3y - 7 = 0$ có vector pháp tuyến là: $\vec{n} = (5; 3)$.

Ta có: $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

$\Rightarrow d$ có một vector chỉ phương là $\vec{n}_2 = (3; -5)$.

» **Câu 12.** Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$. Vector nào sau đây **không** là vector chỉ phương của Δ ?

- A. $\vec{n} = (4; -2)$. B. $\vec{v} = (-2; -1)$. C. $\vec{m} = (2; 1)$. D. $\vec{q} = (4; 2)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn A

Nếu $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}, \forall k \neq 0$ cũng là vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Từ phương trình đường thẳng Δ ta thấy đường thẳng Δ có một vector chỉ phương có toạ độ là $(2; 1)$. Do đó vector $\vec{u} = (4; -2)$ không phải là vector chỉ phương của Δ .

» **Câu 13.** Cho hai điểm $A = (1; 2)$ và $B = (5; 4)$. Vector pháp tuyến của đường thẳng AB là

- A. $(-1; -2)$. B. $(1; 2)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-1; 2)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2) = 2(2; 1)$

suy ra vector pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}_{AB} = (-1; 2)$.

» **Câu 14.** Cho đường thẳng $d: 7x + 3y - 1 = 0$. Vector nào sau đây là Vector chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (7; 3)$. B. $\vec{u} = (3; 7)$. C. $\vec{u} = (-3; 7)$. D. $\vec{u} = (2; 3)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn C



Đường thẳng d có 1 VTPT là $\vec{n} = (7; 3)$ nên d có 1 VTCP là $\vec{u} = (-3; 7)$

» **Câu 15.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

- A. $\vec{u} = (1; -2)$. B. $\vec{u} = (2; 1)$. C. $\vec{u} = (2; -1)$. D. $\vec{u} = (1; 2)$.

» **Lời giải**

Chọn B

Đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$. có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2) \Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 1)$.

» **Câu 16.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 3)$ và $B(4; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB ?

- A. $x + y - 3 = 0$. B. $y = 2x + 1$. C. $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-4}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.

» **Lời giải**

Chọn D

Bốn phương trình đã cho trong bốn phương án đều là phương trình của đường thẳng. Thay lần lượt tọa độ của A, B vào từng phương án ta thấy tọa độ của cả A và B đều thỏa phương án **D**.

» **Câu 17.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(2; 5)$ là

- A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 6t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$.

» **Lời giải**

Chọn D

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (0; 6)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (0; 6)$ là $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$

» **Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(-6; 2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng AB ?

- A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -6 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

» **Lời giải**

Chọn B

• **Cách 1:** Thay tọa độ các điểm A, B lần lượt vào các phương trình trong các phương án trên thì thấy phương án B không thỏa mãn.

• **Cách 2:** Nhận thấy rằng các phương trình ở các phương án A, C, D thì vectơ chỉ phương của các đường thẳng đó cùng phương, riêng chỉ có phương án B thì không.

» **Câu 19.** Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1; -2)$, $N(4; 3)$ là

- A. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.



Lời giải

Chọn D

Đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (3; 5)$ và đi qua $M(1; -2)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.

» **Câu 20.** Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -1), B(-6; 2)$ là

A. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -6 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-9; 3) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = (3; -1)$.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$.

» **Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3; 0), B(0; 2)$ và đường thẳng $d: x + y = 0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ qua A và song song với d .

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Ta có Δ song song với d nên $\Delta: x + y + C = 0 (C \neq 0)$.

Δ qua $A(3; 0)$, suy ra $3 + 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$ (nhận)

Như vậy $\Delta: x + y - 3 = 0$

Vậy Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

» **Câu 22.** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1; 2)$. Gọi A, B là hình chiếu của M lên Ox, Oy . Viết phương trình đường thẳng AB .

A. $x + 2y - 1 = 0$. B. $2x + y + 2 = 0$. C. $2x + y - 2 = 0$. D. $x + y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình chiếu của điểm $M(1; 2)$ lên Ox, Oy lần lượt là $A(1; 0)$ và $B(0; 2)$.

Do đó phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$.

» **Câu 23.** Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; -2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x - 2y + 1 = 0$ là:

A. $3x - 2y - 7 = 0$. B. $2x + 3y + 4 = 0$. C. $x + 3y + 5 = 0$. D. $2x + 3y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Do $d \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{n_d}(2; 3)$



Mà đường thẳng d đi qua $A(1; -2)$ nên ta có phương trình:
 $2(x-1) + 3(y+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng d : $2x + 3y + 4 = 0$.

» **Câu 24.** Cho đường thẳng $d: 8x - 6y + 7 = 0$. Nếu đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng d thì Δ có phương trình là

- A. $4x - 3y = 0$. B. $4x + 3y = 0$. C. $3x + 4y = 0$. D. $3x - 4y = 0$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

Vì Δ vuông góc với đường thẳng $d: 8x - 6y + 7 = 0$ nên phương trình $\Delta: 6x + 8y + C = 0$

Mà Δ đi qua gốc tọa độ nên ta có: $6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy phương trình $\Delta: 6x + 8y = 0$ hay $\Delta: 3x + 4y = 0$

» **Câu 25.** Đường thẳng đi qua điểm $A(1; 11)$ và song song với đường thẳng $y = 3x + 5$ có phương trình là

- A. $y = 3x + 11$. B. $y = (-3x + 14)$. C. $y = 3x + 8$. D. $y = x + 10$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

Gọi (d) là đường thẳng cần tìm. Vì (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 5$ nên (d) có phương trình $y = 3x + a$, $a \neq 5$.

Vì (d) đi qua điểm $A(1; 11)$ nên ta có $11 = 3 \cdot 1 + a \Rightarrow a = 8$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là $y = 3x + 8$.

» **Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; 2)$, $P(4; 0)$ và $Q(0; -2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là:

- A. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với PQ .

Ta có: $\begin{cases} A(3; 2) \in d \\ \vec{u}_d = \vec{PQ} = (-4; -2) = -2(2; 1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$\xrightarrow{t=-2} M(-1; 0) \in d \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

» **Câu 27.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2; 1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB .

- A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn B



$$\begin{cases} A(-2;1) \in AB, \vec{u}_{CD} = (4;3) \\ AB \parallel CD \rightarrow \vec{u}_{AB} = -\vec{u}_{CD} = (-4;-3) \end{cases} \longrightarrow AB: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

» **Câu 28.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn B

Góc phần tư (I) : $x - y = 0 \longrightarrow VTCP: \vec{u}(1;1) = \vec{u}_d \longrightarrow d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

» **Câu 29.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục Ox .

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -7t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$.

🔗 **Lời giải**

Chọn D

$\vec{u}_{Ox} = (1;0) \longrightarrow \vec{u}_d = (1;0) \longrightarrow d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -7 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(0;-7) \in d \rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$.

» **Câu 30.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0, d_2: x - 2y - 6 = 0$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (1;2)$. B. $\vec{u}_2 = (2;1)$. C. $\vec{u}_3 = (1;-2)$. D. $\vec{u}_4 = (2;-1)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn A

Vì $A \in d_1$, giả sử $A(a;3-a)$;

Vì $B \in d_2$, giả sử $B(2b+6;b)$

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a+2b+6}{2} = 1 \\ \frac{3-a+b}{2} = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = -4 \\ a-b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow A(2;1); B(0;-3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (2;4) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 2\vec{u}_1$.

Vậy đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;2)$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(1;2), N(3;-1), \vec{n} = (2;-1), \vec{u} = (1;1)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y = 0$		



(b)	Phương trình tham số của đường thẳng d_2 đi qua N và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng d_3 đi qua N và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y + 7 = 0$		
(d)	Phương trình tham số của đường thẳng d_4 đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$		

Lời giải

(a) Phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y = 0$
Đường thẳng d_1 có phương trình tổng quát là: $2(x-1) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình tham số của đường thẳng d_2 đi qua N và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình tham số của đường thẳng d_3 đi qua N và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x - y + 7 = 0$
 $2(x-3) - (y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0$

» **Chọn SAI.**

(d) Phương trình tham số của đường thẳng d_4 đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$

Phương trình tham số của đường thẳng d_4 đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 32.** Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 2 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$		
(b)	Đường thẳng Δ_2 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3)$		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$		
(d)	Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 là $x - 3y - 7 = 0$.		

Lời giải

(a) Đường thẳng Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$

Đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$

» **Chọn SAI.**

(b) Đường thẳng Δ_2 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3)$



Đường thẳng $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 1)$

Nên nhận $\vec{n} = (1; -3)$ là một vectơ pháp tuyến,

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

Nên nhận $\vec{u} = (1; 1)$ là một vectơ chỉ phương, lại có Δ_1 đi qua điểm $A(0; 2)$

Vậy phương trình tham số của Δ_1 là: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 là $x - 3y - 7 = 0$

Lại có Δ_2 đi qua điểm $M(1; -2)$

Vậy phương trình tổng quát của Δ_2 là: $(x - 1) - 3(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 7 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 2), B(3; 4)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{AB} = (2; 5)$		
(b)	Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -5)$		
(c)	Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - 5y + 14 = 0$		
(d)	Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(-1; 1)$ và song song với AB là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.		

» **Lời giải**

(a) Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{AB} = (2; 5)$

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{AB} = (5; 2)$

» **Chọn SAI.**

(b) Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -5)$

Nên nhận $\vec{n} = (2; -5)$ là một vectơ pháp tuyến

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - 5y + 14 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng AB đi qua $A(-2; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -5)$ là: $2(x + 2) - 5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 14 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(-1; 1)$ và song song với AB là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

Đường thẳng này song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{AB} = (5; 2)$ là một vectơ chỉ phương.



Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(-1;1)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{AB} = (5;2) \text{ là: } \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác DEF có $D(1;-1), E(2;1), F(3;5)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng vuông góc với đường thẳng EF nhận $\overrightarrow{EF}$ là một vectơ chỉ phương		
(b)	Phương trình đường cao kẻ từ D là: $x + y = 0$.		
(c)	Gọi I là trung điểm của DF . Tọa độ của điểm I là $(2;2)$.		
(d)	Đường trung tuyến kẻ từ E có phương trình là: $x - 2 = 0$.		

» **Lời giải**

(a) Đường thẳng vuông góc với đường thẳng EF nhận $\overrightarrow{EF}$ là một vectơ chỉ phương

Đường cao kẻ từ D là đường thẳng vuông góc với đường thẳng EF nên nhận $\overrightarrow{EF} = (1;4)$ là một vectơ pháp tuyến.

» **Chọn SAI.**

(b) Phương trình đường cao kẻ từ D là: $x + y = 0$.

Do đó, đường cao kẻ từ D có phương trình là: $(x-1) + 4(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + 4y + 3 = 0$.

» **Chọn SAI.**

(c) Gọi I là trung điểm của DF . Tọa độ của điểm I là $(2;2)$.

Gọi I là trung điểm của DF . Tọa độ của điểm I là $(2;2)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Đường trung tuyến kẻ từ E có phương trình là: $x - 2 = 0$.

Đường trung tuyến kẻ từ E có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{EI} = (0;1)$

Nên nhận $\vec{n} = (1;0)$ là một vectơ pháp tuyến.

Do đó, đường trung tuyến kẻ từ E có phương trình là: $x - 2 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 35.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4;3)$.		
(b)	Vectơ pháp tuyến của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4;3)$.		
(c)	Phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB là $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.		
(d)	Điểm $A(-2;1)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh CD .		

» **Lời giải**



Ta có: $\begin{cases} A(-2;1) \in AB, \vec{u}_{CD} = (4;3) \\ AB \parallel CD \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \vec{u}_{CD} = (4;3) \end{cases}$ nên phương trình $AB: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

(a) Vector chỉ phương của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4;3)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Vector pháp tuyến của đường thẳng chứa cạnh AB là $\vec{u}_{AB} = (4;3)$.

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB là $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Điểm $A(-2;1)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh CD .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 36.** Cho tam giác ABC có phương trình của đường thẳng BC là $7x + 5y - 8 = 0$, phương trình các đường cao kẻ từ B, C lần lượt là $9x - 3y - 4 = 0, x + y - 2 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm B có tọa độ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.		
(b)	Điểm C có tọa độ là $(-1; 3)$.		
(c)	Phương trình đường cao kẻ từ A là $5x - 7y - 6 = 0$		
(d)	Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A là $x - 13y + 4 = 0$.		

» **Lời giải**

(a) Điểm B có tọa độ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Toạ độ của điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 7x + 5y - 8 = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Suy ra điểm B có tọa độ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Điểm C có tọa độ là $(-1; 3)$.

Toạ độ của điểm C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 7x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Suy ra điểm C có tọa độ là $(-1; 3)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình đường cao kẻ từ A là $5x - 7y - 6 = 0$

Đường thẳng AB đi qua điểm $B\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và nhận vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1)$ của đường cao kẻ từ C làm vector pháp tuyến có phương trình là: $(x+1) + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$



» **Chọn SAI.**

(d) Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A là $x - 13y + 4 = 0$

Toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Suy ra điểm A có toạ độ là $(2; 2)$.

Phương trình đường cao kẻ từ $A(2; 2)$ và nhận vector chỉ phương $\vec{u} = (5; -7)$ của đường thẳng BC làm vector pháp tuyến là: $5(x - 2) - 7(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x - 7y + 4 = 0$.

Gọi I là trung điểm của BC , ta có toạ độ của điểm I là $\left(\frac{-1}{6}; \frac{11}{6}\right)$.

Do đó, ta có $\overrightarrow{IA} \left(\frac{13}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

Đường trung tuyến kẻ từ A nhận $\vec{n} = (1; -13)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là: $(x - 2) - 13(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 13y + 24 = 0$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 37.** Cho tam giác ABC , biết $A(1; 3), B(-1; -1), C(5; -3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - y + 1 = 0$.		
(b)	Phương trình tham số của đường thẳng BC là $x + 3y + 4 = 0$.		
(c)	Phương trình đường trung trực cạnh AB là $x + 2y - 2 = 0$		
(d)	Phương trình đường cao AH là $3x + y = 0$.		

» **Lời giải**

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -4), \overrightarrow{BC} = (6; -2), \overrightarrow{AC} = (4; -6)$$

(a) Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là $2x - y + 1 = 0$.

AB có vector chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1; -2)$ nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $2(x - 1) - 1(y - 3) = 0$ hay $2x - y + 1 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình tham số của đường thẳng BC là $x + 3y + 4 = 0$.

BC có vector chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (6; -2)$

Phương trình tham số đường thẳng BC là $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$.

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình đường trung trực cạnh AB là $x + 2y - 2 = 0$.

Gọi d là đường trung trực cạnh AB .

Lấy N là trung điểm của AB , suy ra $N(0; 1)$

d có một vector pháp tuyến là $\vec{q} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 2)$ ($AB \perp d$) và đi qua $N(0; 1)$.



Phương trình đường thẳng d là: $1(x-0)+2(y-1)=0$ hay $x+2y-2=0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình đường cao AH là $3x+y=0$.

Phương trình đường cao AH là $3x+y=0$;

AH có vector pháp tuyến $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (3;-1)$ ($BC \perp AH$)

Phương trình đường thẳng AH đi qua $A(1;3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{v} = (3;-1)$ là
 $3(x-1)-1(y-3)=0$ hay $3x-y=0$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 38.** Cho tam giác MNP có phương trình đường thẳng chứa cạnh MN là $2x+y+1=0$, phương trình đường cao MK ($K \in NP$) là $x+y-1=0$, phương trình đường cao NQ ($Q \in MP$) là $3x-y+4=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm M có tọa độ là $(-2;3)$.		
(b)	Điểm N có tọa độ là $(-1;1)$.		
(c)	Phương trình đường thẳng NP là $2x-y+3=0$.		
(d)	Phương trình đường thẳng MP là: $2x+3y-5=0$.		

» **Lời giải**

(a) Điểm M có tọa độ là $(-2;3)$.

Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$.

Suy ra điểm M có tọa độ là $(-2;3)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Điểm N có tọa độ là $(-1;1)$.

Tọa độ của điểm N là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$.

Suy ra điểm N có tọa độ là $(-1;1)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình đường thẳng NP là $2x-y+3=0$.

Các đường cao MK và NQ có vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1;1)$; $\vec{n}_2 = (3;-1)$.

Do đó các đường thẳng NP, MP lần lượt nhận $\vec{n}_3 = (1;-1)$, $\vec{n}_4 = (1;3)$ là vector pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh NP đi qua điểm $N(-1;1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_3 = (1;-1)$ là: $(x+1)-(y-1)=0 \Leftrightarrow x-y+2=0$.

» **Chọn SAI.**

(d) Phương trình đường thẳng MP là: $2x+3y-5=0$



Phương trình đường thẳng chứa cạnh MP đi qua điểm $M(-2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_4 = (1;3)$ là: $(x+2)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-7=0$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 39.** Cho điểm $M(3;0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$, $d_2: x+y+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$		
(b)	Phương trình đường thẳng Δ không đi qua điểm $M(3;0)$		
(c)	Đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1)$		
(d)	Không tồn tại đường thẳng Δ .		

» **Lời giải**

(a) Tọa độ điểm $A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$

$$A(x_A; y_A), A \in d_1 \Rightarrow y_A = 2x_A - 2$$

$$B(x_B; y_B), B \in d_2 \Rightarrow y_B = -x_B - 3$$

$$M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên: } \begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ 2x_A - 2 - x_B - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_A = \frac{11}{3}, y_A = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right).$$

» **Chọn ĐÚNG**

(b) Phương trình đường thẳng Δ không đi qua điểm $M(3;0)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;0)$.

» **Chọn SAI.**

(c) Đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1)$

$d_1: 2x-y-2=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1)$.

» **Chọn ĐÚNG**

(d) Không tồn tại đường thẳng Δ .

Tìm được phương trình đường thẳng và tìm được là $8x-y-24=0$ là đường thẳng đi qua hai điểm $M(3;0)$ và $A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(2;-1)$.

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình đường cao AH có dạng là $x+5y-11=0$.		
(b)	Phương trình đường trung tuyến CM có dạng là $x+2=0$.		



(c)	Phương trình đường trung trực của đoạn AB có dạng là $x + y + 5 = 0$.		
(d)	Phương trình đường phân giác trong của góc A có dạng là $x + y - 3 = 0$.		

» **Lời giải**

(a) Phương trình đường cao AH có dạng là $x + 5y - 11 = 0$.

Ta có AH vuông góc với BC , nên AH nhận vectơ $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến.
Suy ra AH đi qua điểm $A(1; 2)$ và $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1; -5)$

$$AH: -1(x-1) - 5(y-2) = 0 \Leftrightarrow -x - 5y + 11 = 0 \Leftrightarrow x + 5y - 11 = 0$$

Vậy phương trình đường cao AH có dạng là $x + 5y - 11 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình đường trung tuyến CM có dạng là $x - 2 = 0$.

Ta có M là trung điểm đoạn thẳng AB . Suy ra $M(2; 3)$

Đường trung tuyến CM đi qua điểm C và M , nên nhận vectơ $\overrightarrow{CM}$ làm vectơ chỉ phương.

$$\text{Suy ra } \vec{u} = \overrightarrow{CM} = (0; 4) \text{ nên } \vec{n} = (1; 0)$$

Do đó CM đi qua điểm $C(2; -1)$ và có $\vec{n} = (1; 0)$

$$CM: 1(x-2) + 0(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$$

Vậy phương trình đường trung tuyến CM có dạng $x - 2 = 0$.

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình đường trung trực của đoạn AB có dạng là $x + y + 5 = 0$.

Ta có M là trung điểm đoạn thẳng AB . Suy ra $M(2; 3)$

Gọi Δ là đường trung trực của đoạn AB suy ra $\Delta \perp AB$, nên Δ nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ làm vectơ pháp tuyến.

$$\text{Suy ra } \Delta \text{ đi qua điểm } M(2; 3) \text{ và } \vec{n} = (2; 2)$$

$$\Delta: 2(x-2) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$$

Vậy phương trình đường trung trực của đoạn AB có dạng là $x + y - 5 = 0$.

» **Chọn SAI.**

(d) Phương trình đường phân giác trong của góc A có dạng là $x + y - 3 = 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -3)$$

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1; 2)$ nhận có $\vec{n} = (1; -1)$ nên

$$AB: 1(x-1) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - y + 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

Đường thẳng AC đi qua điểm $A(1; 2)$ nhận có $\vec{n} = (3; 1)$ nên

$$AC: 3(x-1) + 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$$

Đường phân giác xuất phát từ góc A sẽ có dạng:

$$\begin{cases} \Delta_1: 3x + y - 5 = x - y + 1 \\ \Delta_2: 3x + y - 5 = -x + y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: 2x + 2y - 6 = 0 \\ \Delta_2: 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: x + y - 3 = 0 \\ \Delta_2: x - 1 = 0 \end{cases}$$



Ta xét:
$$\begin{cases} \Delta_2(B) = 2 \\ \Delta_2(C) = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2(B) \cdot \Delta_2(C) = 2 > 0$$

Vậy đường phân giác trong của góc A là $\Delta_1: x + y - 3 = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 41.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3; -3), B(5; -1)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm M biết M thuộc Δ sao cho tam giác MAB cân tại M .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Vì $M \in \Delta$ nên $M(t; -1 + 2t)$.

Tam giác MAB cân tại M nên $MA = MB$

$$\Leftrightarrow (3-t)^2 + (-2-2t)^2 = (5-t)^2 + (-2t)^2 \Leftrightarrow 13 + 2t = 25 - 10t \Leftrightarrow 12t = 12 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy điểm M cần tìm là $M(1; 1) \Rightarrow 1 + 1 = 2$.

» **Câu 42.** Cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Phương trình của đường thẳng AB có dạng $ax + by - 4 = 0$ ($a; b \in \mathbb{N}$). Tính $a + b$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Do đó, điểm A có tọa độ $(1; 2)$.

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (1; -2)$ nên nhận $\vec{n} = (2; 1)$ là một vectơ pháp tuyến.

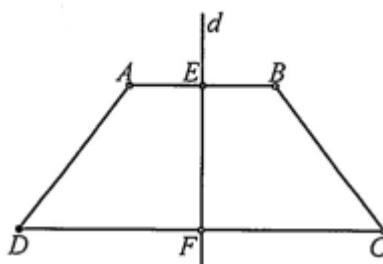
Phương trình đường thẳng AB là: $2(x - 1) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$.

Khi đó
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

» **Câu 43.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3; 1), B(1; 3), C(7; 1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -5**





Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$.

Lấy E là trung điểm AB ta được $E(-1; 2)$.

Đường trung trực d của cạnh AB có phương trình là: $2x + y = 0$.

Đường thẳng CD đi qua C và song song với AB có phương trình là: $x - 2y - 5 = 0$

Giao điểm F của hai đường thẳng CD và d có tọa độ là $(1; -2)$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD

Nên D là điểm đối xứng với C qua d , do đó F là trung điểm của đoạn CD .

Suy ra $D(-5; -5)$.

Nhận thấy, $\overrightarrow{DC} = (12; 6)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$ cùng hướng nên $D(-5; -5)$ thỏa mãn bài toán.

Vậy tung độ điểm D là -5 .

» **Câu 44.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 2)$, $B(1; 5)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$. Tìm hoành độ đỉnh C , biết rằng C có tung độ âm và diện tích tam giác ABC bằng 2.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,4**

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x + y - 8 = 0$.

C nằm trên đường thẳng d nên giả sử $C(t; 2t - 8)$.

Ta có: $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$.

Do $S_{\triangle ABC} = 2 \Rightarrow d(C, AB) = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

Khi đó $\frac{|3t + (2t - 8) - 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |5t - 16| = 4$ Suy ra $t = 4$ hoặc $t = \frac{12}{5}$.

Với $t = 4$ thì $2t - 8 = 0$ (loại vì C có tung độ âm).

Với $t = \frac{12}{5}$ thì $2t - 8 = \frac{-16}{5}$.

Vậy $C\left(\frac{12}{5}; \frac{-16}{5}\right) \Rightarrow x_C = \frac{12}{5} \approx 2,4$.

» **Câu 45.** Có bao nhiêu đường thẳng đi qua $A(2; 3)$ và tạo với đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$ một góc bằng 45° ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 > 0$).

Ta có: $(\Delta, d) = 45^\circ \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_d)| = \cos 45^\circ$

$$\Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\Delta, \vec{n}_d|}{|\vec{n}_\Delta| \cdot |\vec{n}_d|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2|2a + b| = \sqrt{10} \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0.$$



Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (loại).

Nếu $b \neq 0$ thì chia cả hai vế phương trình trên cho b^2 ta có: $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8 \cdot \frac{a}{b} - 3 = 0$

Giải phương trình ta được $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ hoặc $\frac{a}{b} = -3$.

Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, ta chọn $a = 1, b = 3$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $1(x-2) + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 11 = 0$

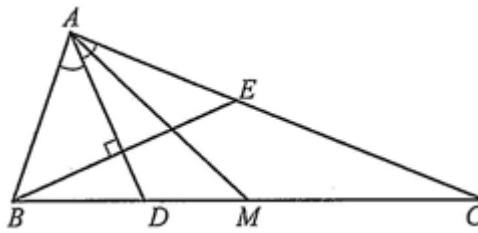
Với $\frac{a}{b} = -3$ ta chọn $a = -3, b = 1$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $-3(x-2) + 1(y-3) = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 3 = 0$.

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Gọi AM, AD lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác. Các đường thẳng AM, AD lần lượt có phương trình là $x - y - 2 = 0, y = 0$. Giả sử $B(1; 3)$. Xác định giá trị tung độ của điểm C .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -6**



Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Suy ra $A(2; 0)$.

Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD thì ta có $E \in AC$ và $E(1; -3)$

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A và E nên $AC: \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-0}{-3-0} \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$

Điểm C thuộc đường thẳng AC , M là trung điểm BC

Nên giả sử $C(c; 3c-6)$ và $M\left(\frac{c+1}{2}; \frac{3c-3}{2}\right)$

Điểm M thuộc đường thẳng AM nên $\frac{c+1}{2} - \frac{3c-3}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy $C(0; -6)$.

» **Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(0; 2), B(4; 3)$, giao điểm hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 3y = 0$. Khi đó có bao nhiêu điểm C có tọa độ nguyên?

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo.

Vì I thuộc Δ nên giả sử $I(3t; t)$.



Khi đó $\overrightarrow{IA} = (-3t; 2-t), \overrightarrow{IB} = (4-3t; 3-t)$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi

$$\text{Nên } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow (-3t)(4-3t) + (2-t)(3-t) = 0 \Leftrightarrow 10t^2 - 17t + 6 = 0$$

Suy ra $t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = \frac{6}{5}$.

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \text{ ta có: } \begin{cases} I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow C(3; -1) \text{ (nhận)} \\ A(0; 2) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{6}{5} \text{ ta có: } \begin{cases} I\left(\frac{18}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{36}{5}; \frac{2}{5}\right) \text{ (loại)} \\ A(0; 2) \end{cases}$$

» **Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \end{cases}$ và điểm $A(3; 10)$. Điểm $M(a; b)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng AM ngắn nhất. Tính $S = a + b$.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

$$M \in \Delta \Rightarrow M(3 + 2t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t; -t - 10)$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(2t)^2 + (-t - 10)^2} = \sqrt{5t^2 + 20t + 100} = \sqrt{5(t + 2)^2 + 80} \geq \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow AM \text{ ngắn nhất là } 4\sqrt{5} \text{ khi } t = -2 \Rightarrow M(-1; 2) \Rightarrow S = 1.$$

» **Câu 49.** Cho hai điểm $A(3; 0)$ và $B(0; 4)$. Tìm tung độ điểm M trên trục Oy sao cho B nằm giữa O và M đồng thời diện tích tam giác MAB bằng 1? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4,7**

$$\text{Ta có: } AB = 5, \text{ đường thẳng } AB \text{ có phương trình: } \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0$$

Gọi $M(0; m) \in Oy$, do B nằm giữa O và M nên $m > 4$.

$$\text{Vì diện tích tam giác } MAB \text{ bằng 1 nên } d(M, AB) = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{|3m - 12|}{5} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{14}{3} > 4 \\ m = \frac{10}{3} < 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy tung độ điểm M là $\frac{14}{3} \approx 4,7$.

» **Câu 50.** Một chiếc Phà chở khách qua sông từ điểm $A(3; 4)$ đến điểm $B(3; 50)$ bên kia sông. Nhưng vì có gió và nước chảy mạnh nên chiếc Phà qua bên kia sông tại điểm $C(38; 50)$. Góc lệch của con thuyền với lúc dự tính ban đầu là bao nhiêu độ? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

» **Lời giải**



✓ **Trả lời: 37**

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 46)$ nên véc tơ pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; 0)$

Phương trình tổng quát của AB là: $x - 3 = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (35; 46)$ nên véc tơ pháp tuyến của AC là $\overrightarrow{n_{AC}} = (46; -35)$

Phương trình tổng quát của AC là: $46(x - 3) - 35(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 46x - 35y + 2 = 0$.

$$\text{Ta có: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{|1 \cdot 46 + 0 \cdot (-35)|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{46^2 + (-35)^2}} = \frac{46}{\sqrt{3341}} \Rightarrow \hat{A} \approx 37^\circ$$



Chương 09

Bài 3.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A

Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn



Định nghĩa Vector chỉ phương:

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ bán kính R

Dạng 1. Phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Dạng 2. Phương trình: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



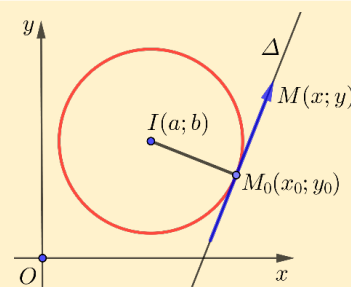
Phương trình tiếp tuyến tại M_0 thuộc (C)

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng $\begin{cases} \text{qua } M_0 \\ \text{VTPT: } \vec{n} = \overrightarrow{IM_0} \end{cases}$

Có dạng $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$



Phương trình tiếp tuyến tại M_0 không thuộc (C)

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*).

Giải (*) tìm được mối liên hệ giữa a & b . Chọn a & b phù hợp để kết luận.



Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax + By + C = 0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến $\parallel (D_1): Ax + By + C = 0$ nên có dạng $Ax + By + C' = 0$ ($C' \neq C$)

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*).

Giải (*) tìm được C' so với điều kiện để kết luận.



Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với $(D_1): Ax + By + C = 0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến $\perp (D_1): Ax + By + C = 0$ nên có dạng $Bx - Ay + C' = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R (*)$.

Giải $(*)$ tìm được C' so với điều kiện để kết luận.

3. Vị trí tương đối



Giữa đường thẳng & đường tròn

Cho $(D): Ax + By + C = 0$ và đường tròn $(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tâm $I(a; b)$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \{M; N\} \Leftrightarrow d(I; (D)) < R$$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \{M\} \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$$

$$\checkmark (D) \cap (C) = \emptyset \Leftrightarrow d(I; (D)) > R$$



Giữa đường tròn & đường tròn

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 . Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có:

$$\checkmark \text{ Hai đường tròn tiếp xúc } \Leftrightarrow I_1 I_2 = |R_1 \pm R_2|$$

$$\checkmark \text{ Hai đường tròn cắt nhau } R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Nhận diện phương trình đường tròn – tìm tâm & bán kính



Phương pháp

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ bán kính R

Dạng 1. Phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

» **Tìm tâm:** lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.

» **Tìm bán kính:** $R = \sqrt{\text{ve phải}}$.

Dạng 2. Phương trình: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

» **Tìm tâm:** lấy hệ số trước $x/y \div -2$.

» **Tìm bán kính:** $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

» **Điều kiện:** $a^2 + b^2 - c > 0$.



Ví dụ 1.1.

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

(1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1)

(2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

(3) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3)

(4) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

Lời giải

(1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1)

Ta có: $a = -1; b = 2; c = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

(2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

(3) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3)

Ta có: $(3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$. Suy ra: $P = a^2 + b^2 - c = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} > 0$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$

(4) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.



Ví dụ 1.2.

Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (C_m)

- (1) Tìm điều kiện của m để (C_m) là phương trình đường tròn.
- (2) Nếu (C_m) là phương trình đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính theo m

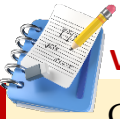
Lời giải

- (1) Tìm điều kiện của m để (C_m) là phương trình đường tròn.

$$\text{Điều kiện: } a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$$

- (2) Nếu (C_m) là phương trình đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính theo m

Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m; 2(m-2))$ và $R = \sqrt{5m^2 - 15m + 10}$



Ví dụ 1.3.

Cho phương trình đường cong (C_m): $x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$

- (1) Chứng minh rằng (C_m) là phương trình một đường tròn.
- (2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.
- (3) Chứng minh khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

- (1) Chứng minh rằng (C_m) là phương trình một đường tròn.

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 - c = \left(-\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - m - 1 = \frac{(m+2)^2 + 4}{2} > 0$$

Suy ra (C_m) là phương trình đường tròn với mọi m

- (2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.

$$\text{Đường tròn có tâm I: } \begin{cases} x_I = -\frac{m+2}{2} \\ y_I = \frac{m+4}{2} \end{cases} \text{ suy ra } x_I + y_I - 1 = 0$$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$

- (3) Chứng minh khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_0^2 + y_0^2 + (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$.



Dạng 2. Viết phương trình đường tròn



Phương pháp

▪ Cách 1:

- » Tìm tọa độ tâm $I(a; b)$ của đường tròn (C) .
- » Tìm bán kính R của đường tròn (C) .
- » Viết phương trình của đường tròn (C) theo dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

▪ Cách 2:

- » Giả sử phương trình của đường tròn (C) là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (hoặc dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$).
- » Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c .
- » Giải hệ để tìm a, b, c , từ đó tìm được phương trình của đường tròn (C) .

▪ Chú ý:

- » Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R , điểm $A \in (C) \Leftrightarrow IA = R$.
- » (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I, \Delta) = R$.
- » (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$.
- » (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a \Leftrightarrow [d(I, \Delta_3)]^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$.



Ví dụ 2.1.

Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3; -5)$, bán kính $R = 2$

✎ Lời giải

Phương trình đường tròn cần tìm là $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$.



Ví dụ 2.2.

Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

- (1) Có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$.
- (2) Nhận AB làm đường kính với $A(1; 1), B(7; 5)$.
- (3) Đi qua ba điểm: $M(-2; 4), N(5; 5), P(6; -2)$

✎ Lời giải

- (1) Có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$.

Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$

- (2) Nhận AB làm đường kính với $A(1; 1), B(7; 5)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4; 3)$



$$AI = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính

$$R = AI = \sqrt{13} \text{ nên có phương trình là } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$$

(3) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

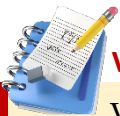
$$\begin{cases} 4+16+4a-8b+c=0 \\ 25+25-10a-10b+c=0 \\ 36+4-12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Nhận xét: Đối với ý (3) ta có thể làm theo cách sau:

Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

$$\text{Vì } IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases} \text{ nên ta có: } \begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$



Ví dụ 2.3.

Viết phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

- (1) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$
- (2) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy
- (3) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải

(1) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$

(2) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R; -R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

$$\text{Ta có: } R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = (2-R)^2 + (-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ và $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

(3) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$



Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10; a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R

$$\Rightarrow \frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{-70}{43} \end{cases}$$

» Với $a=0$ thì $K(10;0)$ suy ra (C): $(x-10)^2 + y^2 = 49$

» Với $a=\frac{-70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra (C): $\left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C): (x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (C): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$



Dạng 3. Vị trí tương đối giữa đường tròn & đường thẳng



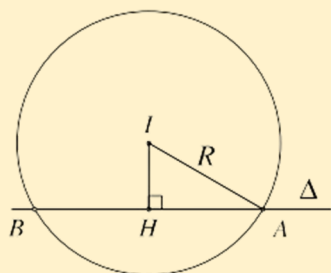
Phương pháp

Cho đường thẳng: $\Delta: ax + by + c = 0$ và đường tròn (C) có tâm $I(x_0; y_0)$, bán kính R .

Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có ba vị trí tương đối.

Hướng xử lý: so sánh $d(I, \Delta)$ và R .

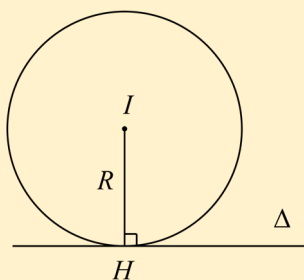
(1) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có **hai điểm chung**, ta nói Δ và (C) cắt nhau.



$$\Delta \quad d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R$$

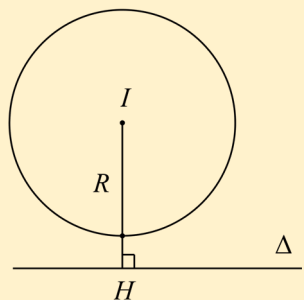
(2) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có **một điểm chung**, ta nói Δ **tiếp xúc** (C) .

Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn (C) .



$$\Delta \quad d(I; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

(3) Đường thẳng Δ và đường tròn (C) **không có điểm chung** nào, ta nói Δ và (C) không cắt nhau.



$$\Delta \quad d(I; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$$

Δ Chú ý:

** Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Để xét vị trí tương đối với đường tròn (C) ta có thể làm hai cách:

(1) Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.



(2) Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn (C) ta được phương trình bậc hai có ẩn t , kí hiệu phương trình $(*)$.

» Phương trình $(*)$ **vô nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *không cắt nhau*.

» Phương trình $(*)$ **có một nghiệm**. Ta nói Δ *tiếp xúc* với (C) .

» Phương trình $(*)$ **có hai nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *cắt nhau*.

❖❖ Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta: ax + by + c = 0$, để xét vị trí tương đối của Δ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, người ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \end{cases} (*).$$

» Hệ $(*)$ **vô nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *không cắt nhau*.

» Hệ $(*)$ **có một nghiệm**. Ta nói Δ *tiếp xúc* với (C) .

» Hệ $(*)$ **có hai nghiệm**. Ta nói Δ và (C) *cắt nhau*.



Ví dụ 3.1.

Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 5 = 0$ và đường tròn $(C): (x - 2)^2 + y^2 = 4$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

✎ **Lời giải**

(C) có tâm $I(2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = \frac{|2 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} > 2.$$

Vậy Δ và (C) không cắt nhau.



Ví dụ 3.2.

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = t \end{cases}$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

✎ **Lời giải**

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình:

$$(-5 - 2t)^2 + t^2 - 4(-5 - 2t) + 2t = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 30t + 45 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Vậy Δ tiếp xúc với (C) .



Ví dụ 3.3.

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) , tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Lời giải

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình:

$$20t^2 - 20t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } \Delta \text{ cắt } (C).$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (C) là $A(0;2); B(4;4)$.



Ví dụ 3.4.

Cho đường thẳng $\Delta: 6x + 8y - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$. Tìm m để Δ cắt (C) .

Lời giải

(C) có tâm $I(m; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Để Δ cắt (C) thì $d(I; \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|6m + 8 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{36 + 64}} < 3 \Leftrightarrow |6m - 17| < 30 \Leftrightarrow -30 < 6m - 17 < 30 \Leftrightarrow -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}.$$

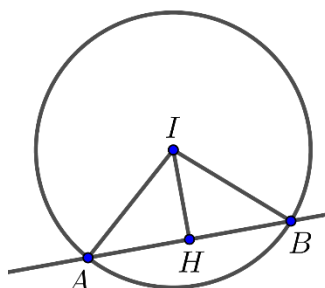


Ví dụ 3.5.

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

- (1) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B
- (2) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Lời giải



- (1) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B



Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 3$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3 \Leftrightarrow 5m^2 + 5m + 17 > 0 \text{ (đúng với mọi } m)$$

(2) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{9}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy } \max S_{IAB} = \frac{9}{2} \text{ khi và chỉ khi } \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } \Delta \text{ khi đó } \widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Vậy với $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Dạng 4. Vị trí tương đối giữa đường tròn & đường tròn



Phương pháp

Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường tròn (C') có tâm I' bán kính R'

- (1) Nếu $II' > R + R'$ suy ra hai đường tròn **không cắt nhau** và **ở ngoài** nhau.
- (2) Nếu $II' < |R + R'|$ suy ra hai đường tròn **không cắt nhau** và **lồng vào** nhau.
- (3) Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn **tiếp xúc trong** với nhau.
- (4) Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn **cắt nhau** tại hai điểm phân biệt.



Ví dụ 4.1.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$; $(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .

Lời giải

Cách 1: (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R = 5$, (C') có tâm $I'(3;1)$ và bán kính $R' = \sqrt{13}$.

Ta có $II' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.

Ta có $|R_1 - R_2| < II'_2 < |R_1 + R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3)^2 + y^2 - 2(y+3) - 6y - 15 = 0 \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 3 \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(1; -2), B(6; 3)$.



Ví dụ 4.2.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 4my - 5 = 0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C)

Lời giải

Để thấy (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 1$.

(C_m) có tâm $I(m+1; -2m)$ và bán kính $R' = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$.

Ta thấy $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} < R'$ điểm O nằm trong đường tròn tâm I suy ra (C) và (C_m) chỉ có thể tiếp xúc trong nhau



Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là

$$R - R' = OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}.$$

Giải phương trình ta được $m = -1; m = \frac{3}{5}$.



Ví dụ 4.3.

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

- (1) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B .
- (2) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải

- (1) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B .

(C) có tâm $O(1; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3 \Leftrightarrow 5m^2 + 5m + 17 > 0 \forall m \in \mathbb{R}.$$

- (2) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

$$\text{Ta có } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} \leq \frac{9}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta IAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ.$$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ .

$$\text{Khi đó } \widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy với $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Dạng 5. Tiếp tuyến của đường tròn



Phương pháp

* Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng $\begin{cases} \text{qua } M_0 \\ \text{VTPT: } \vec{n} = \overrightarrow{IM_0} \end{cases}$

** Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I của (C) .

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Bước 3. Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I; (D)) = R$ (*).

Giải (*) tìm được mối liên hệ giữa a & b . Chọn a & b phù hợp để kết luận.



Ví dụ 5.1.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ tại điểm $M(3; -1)$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $(3-2)(x-3) + (-1+3)(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3; -1)$ là $x + 2y - 1 = 0$.



Ví dụ 5.2.

Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm hai điểm $A(1; -1); B(1; 3)$

- (1) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn.
- (2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .
- (3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$ bán kính $R = \sqrt{3^2 + 1 - 6} = 2$.

- (1) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn.

Ta có: $IA = 2 = R; IB = 2\sqrt{5} > R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

- (2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .



Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1) + 0(y+1) = 0$ hay $x = 1$

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 \neq 0) \text{ hay } ax + by - a - 3b = 0$$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b = 4a \end{cases}$$

» Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x = 1$.

» Nếu $3b = 4a$, chọn $a = 3$, $b = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x + 4y - 15 = 0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x = 1$ và $3x + 4y - 15 = 0$



Ví dụ 5.3.

Cho đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my - 4 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với $(d): x - 2y - 1 = 0$.

Lời giải

Giả sử đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm $I(x_0; y_0)$ cố định khi m thay đổi.

Khi đó ta có $x_0^2 + y_0^2 + 2(m-1)x_0 - 2my_0 - 4 = 0, \forall m$.

$$\Leftrightarrow m(2x_0 - 2y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ 2x_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 = -1 \\ x_0 = y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow I(2; 2).$$

(C_m) có tâm $J(1-m; m)$. VTPT của tiếp tuyến của (C_m) tại I là $\overrightarrow{IJ} = (-m-1; m-2)$.

Để tiếp tuyến tại I song song với $(d): x - 2y - 1 = 0$ thì tồn tại k sao cho:

$$\overrightarrow{IJ} = k(1; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 = k \\ m-2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ k = 3 \end{cases}$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.



Ví dụ 5.5.

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường hợp:

(1) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$

(2) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°

Lời giải

(1) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 3$



Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u} = (-3; 2)$ làm VTPT do đó có phương trình: $-3x + 2y + c = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta_1: -3x + 2y + 10 + 3\sqrt{13} = 0$ và $\Delta_2: -3x + 2y + 10 - 3\sqrt{13} = 0$

(2) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°

Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°

$$\Rightarrow \cos(\Delta; Ox) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b$$

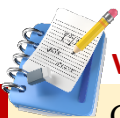
Trường hợp 1: Nếu $a = b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = c^2 \Leftrightarrow \pm c = 3\sqrt{2}a$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$

Trường hợp 2: Nếu $a = -b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = (4a + c)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = (3\sqrt{2} - 4)a \\ c = -(3\sqrt{2} + 4)a \end{cases}$

Với $c = (3\sqrt{2} - 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = (3\sqrt{2} - 4) \Rightarrow \Delta: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Với $c = -(3\sqrt{2} + 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = -(3\sqrt{2} + 4) \Rightarrow \Delta: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0, \Delta_3: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$ và $\Delta_4: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$



Ví dụ 5.6.

Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t (0 \leq t \leq 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2 + \sin t^\circ; 4 + \cos t^\circ)$.

- (1) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.
- (2) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Lời giải

(1) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

Vị trí ban đầu của vật thể tại thời điểm $t = 0$ có tọa độ $M(2; 5)$.

Vị trí kết thúc của vật thể tại thời điểm $t = 180$ có tọa độ $M(2; 3)$.

(2) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Quỹ đạo chuyển động của vật thể là các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn



$$\begin{cases} x = 2 + \sin t^\circ \\ y = 4 + \cos t^\circ \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thể là đường tròn (C) : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$, có tâm $I(2;4)$, bán kính $R=1$.



Chương 09

Bài 3.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$.

D. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$.

» Lời giải

Chọn B

Để là phương trình đường tròn thì điều kiện cần là hệ số của x^2 và y^2 phải bằng nhau nên loại được đáp án A và D.

Ta có: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 + 3 = 0$ vô lý.

Ta có: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ là phương trình đường tròn tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 5$.

» Câu 2. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$.

B. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y - 12 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$.

D. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

» Lời giải

Chọn D

Biết rằng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$.

Ta thấy phương trình trong phương án A và B có hệ số của x^2 , y^2 không bằng nhau nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Với phương án C có $a^2 + b^2 - c = 1 + 16 - 18 < 0$ nên đây không phải là phương trình đường tròn. Vậy ta chọn đáp án D.

» Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình đường tròn.

A. $1 < m < 2$.

B. $m < -2$ hoặc $m > -1$.

C. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

D. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

» Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ (1)

$\Rightarrow a = m+2; b = -2m; c = 19m - 6$.

Phương trình (1) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0$



$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 2.$$

» **Câu 4.** Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1). Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

- A. $m = 2$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$$(m)^2 + [2(m-2)]^2 - (6-m) > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

» **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy , đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ có tâm là.

- A. $I(-2; -3)$. B. $I(2; 3)$. C. $I(4; 6)$. D. $I(-4; -6)$.

🔍 **Lời giải**

Chọn A

Ta có phương trình đường tròn là: $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Vậy tâm đường tròn là: $I(-2; -3)$.

» **Câu 6.** Đường tròn $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

- A. 49. B. 7. C. 1. D. $\sqrt{29}$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

Đường tròn $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$ có tâm $I(0; 5)$, bán kính $R = \sqrt{0^2 + 5^2 - (-24)} = 7$.

» **Câu 7.** Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

- A. $I(-1; 2); R = 4$. B. $I(1; -2); R = 2$. C. $I(-1; 2); R = \sqrt{5}$. D. $I(1; -2); R = 4$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

(C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 1} = 2$.

» **Câu 8.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

- A. $I(2; 3), R = 9$. B. $I(2; -3), R = 3$. C. $I(-3; 2), R = 3$. D. $I(-2; 3), R = 3$.

🔍 **Lời giải**

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 3$.

» **Câu 9.** Phương trình đường tròn có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 5$ là

- A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 20 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 20 = 0$.

🔍 **Lời giải**

Chọn A



Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0.$$

» **Câu 10.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x+4)^2 + y^2 = 10$. **B.** $(x-4)^2 + y^2 = 10$. **C.** $(x-4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.

» **Lời giải**

Chọn B

Gọi $I(x;0) \in Ox$; $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + 1^2 = (5-x)^2 + 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 10x + 25 + 9$

$$\Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy tâm đường tròn là } I(4;0) \text{ và bán kính } R = IA = \sqrt{(1-4)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Phương trình đường tròn (C) có dạng $(x-4)^2 + y^2 = 10$.

» **Câu 11.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

A. $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

» **Lời giải**

Chọn C

Giả sử phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C có dạng

$$(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

Thay tọa độ 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$ ta được:

$$\begin{cases} 8b + c = -16 \\ 4a + 8b + c = -20 \\ 4a + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

Vậy (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

» **Câu 12.** Cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(3;2)$, $C(5;-5)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\left(\frac{47}{10}; -\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10}; \frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10}; -\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10}; \frac{13}{10}\right)$.

» **Lời giải**

Chọn A

Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y+5)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 11 \\ 8x - 8y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{47}{10} \\ y = -\frac{13}{10} \end{cases} \\ &\Rightarrow I\left(\frac{47}{10}; -\frac{13}{10}\right). \end{aligned}$$

» **Câu 13.** Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0)$, $B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$.



A. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

B. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

C. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

D. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

» **Lời giải**

Chọn A

$A(3;0), B(0;2), d: x + y = 0.$

Gọi I là tâm đường tròn vậy $I(x; -x)$ vì $I \in d$.

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3-x)^2 + x^2 = x^2 + (2+x)^2 \Leftrightarrow -6x + 9 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$IA = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ là bán kính đường tròn.}$$

Phương trình đường tròn cần lập là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

» **Câu 14.** Cho tam giác ABC biết $H(3;2), G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x + 2y - 2 = 0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 20.$

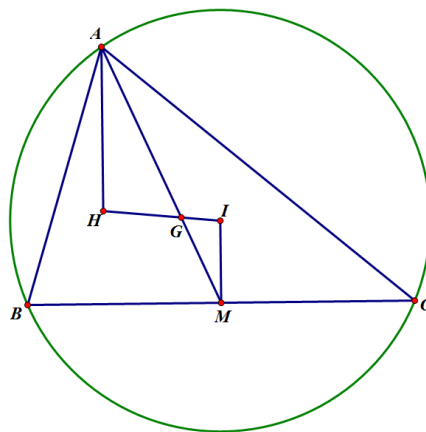
B. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20.$

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1.$

D. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25.$

» **Lời giải**

Chọn D



*) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG} \Rightarrow \begin{cases} x_I - 3 = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} - 3 \right) \\ y_I - 2 = \frac{3}{2} \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 3 \end{cases}.$$

*) Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow IM: 2x - y + 1 = 0.$

$$M = IM \cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1).$$



$$\text{Lại có: } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3, \frac{5}{3} \\ y_A - 1 = 3 \cdot \left(\frac{8}{3} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 6 \end{cases}.$$

Suy ra: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

» **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ là

A. $x^2 + y^2 = 2$.

B. $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

» **Lời giải**

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm O , bán kính R tiếp xúc với Δ nên có:

$$R = d(O; \Delta) = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Phương trình đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 2$.

» **Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y = -x$, bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S) , biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 9$.

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

» **Lời giải**

Chọn B

Do tâm I nằm trên đường thẳng $y = -x \Rightarrow I(a; -a)$, điều kiện $a > 0$.

Đường tròn (S) có bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ nên:

$$d(I; Ox) = d(I; Oy) = 3 \Leftrightarrow |a| = 3 \Leftrightarrow a = 3(n) \vee a = -3(l) \Rightarrow I(3; -3).$$

Vậy phương trình (S) : $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

» **Câu 17.** Một đường tròn có tâm $I(3; 4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 10 = 0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{3}$.

B. 5.

C. 3.

D. $\frac{3}{5}$.

» **Lời giải**

Chọn C

Đường tròn tâm $I(3; 4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 10 = 0$ nên bán kính đường tròn chính là khoảng cách từ tâm $I(3; 4)$ tới đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 10 = 0$.

$$\text{Ta có: } R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$



» **Câu 18.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x + 4y - 2 = 0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{5}$.

✎ **Lời giải**

Chọn C

Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có bán kính

$$R = d(I, d) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

Vậy đường tròn có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

» **Câu 19.** Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x + 4y - 9 = 0$. Viết phương trình của đường tròn (C) .

A. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$.

B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$.

C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

✎ **Lời giải**

Chọn D

Vì đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng Δ có phương trình là $3x + 4y - 9 = 0$ nên bán kính của đường tròn là

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$

» **Câu 20.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2 + y^2 = 1$.

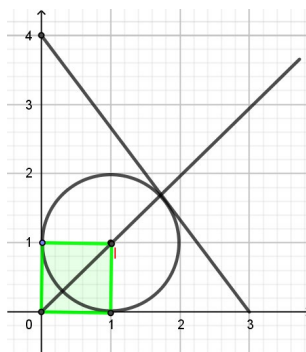
B. $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

✎ **Lời giải**

Chọn D





Vì các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nên tam giác OAB cũng nằm trong góc phần tư thứ nhất. Do vậy gọi tâm đường tròn nội tiếp là $I(a,b)$ thì $a > 0, b > 0$.

Theo đề ra ta có: $d(I;Ox) = d(I;Oy) = d(I;AB)$.

Phương trình theo đoạn chắn của AB là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ hay $4x + 3y - 12 = 0$.

$$\text{Do vậy ta có: } \begin{cases} |a| = |b| \\ |4a + 3b - 12| = 5|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ 7a - 12 = 5a \\ 7a - 12 = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b > 0 \\ a = 6 \text{ (l)} \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

» **Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 1 = 0$.

- A.** $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$; $3x + 4y - 5\sqrt{2} + 11 = 0$.
B. $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$, $3x + 4y - 5\sqrt{2} - 11 = 0$.
C. $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$, $3x + 4y + 5\sqrt{2} + 11 = 0$.
D. $3x + 4y - 5\sqrt{2} + 11 = 0$, $3x + 4y - 5\sqrt{2} - 11 = 0$.

» **Lời giải**

Chọn B

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Do đó đường tròn có tâm $I = (1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Do d song song với đường thẳng Δ nên d có phương trình là $3x + 4y + k = 0$, ($k \neq 1$).

$$\text{Ta có } d(I;d) = R \Leftrightarrow \frac{|11+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |11+k| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 11+k = 5\sqrt{2} \\ 11+k = -5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5\sqrt{2} - 11 \\ k = -5\sqrt{2} - 11 \end{cases}$$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x + 4y + 5\sqrt{2} - 11 = 0$, $3x + 4y - 5\sqrt{2} - 11 = 0$.

» **Câu 22.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A .

- A.** $y - 5 = 0$. **B.** $y + 5 = 0$. **C.** $x + y - 5 = 0$. **D.** $x - y - 5 = 0$.

» **Lời giải**

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (0;3)$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm A , khi đó d đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}$ là một VTPT.

Chọn một VTPT của d là $\vec{n}_d = (0;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y - 5 = 0$.



» **Câu 23.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ và điểm $A(-1; 2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C) ?

- A.** $4x - 3y + 10 = 0$. **B.** $6x + y + 4 = 0$. **C.** $3x + 4y + 10 = 0$. **D.** $3x - 4y + 11 = 0$.

✎ **Lời giải**

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$ và có bán kính $R = 2$.

Họ đường thẳng Δ qua $A(-1; 2): a(x+1) + b(y-2) = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Điều kiện tiếp xúc $d(O; \Delta) = R$ hay $\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a-2b)^2 = 4(a^2+b^2)$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a = -4b \end{cases}$$

Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta có $\Delta_1: y - 2 = 0$.

Với $3a = -4b$, chọn $a = 4$ và $b = -3$ ta có $\Delta_2: 4(x+1) - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 10 = 0$.

Nhận xét: Thực ra bài này khi thay tọa độ điểm $A(-1; 2)$ vào các đường thẳng ở các phương án thì ta loại C. và D. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng thì chỉ có phương án A. thỏa.

» **Câu 24.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 2 = 0$ là

- A.** $4x - 3y + 18 = 0$. **B.** $4x - 3y + 18 = 0$.
C. $4x - 3y + 18 = 0; 4x - 3y - 2 = 0$. **D.** $4x - 3y - 18 = 0; 4x - 3y + 2 = 0$.

✎ **Lời giải**

Chọn C

Đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ có tâm $I(1; 4)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) .

Vì $d // \Delta$ nên đường thẳng $d: 4x - 3y + m = 0 (m \neq 2)$.

$$\begin{aligned} d \text{ là tiếp tuyến của } (C) &\Leftrightarrow d(I; (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + m|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2 \\ &\Leftrightarrow |m - 8| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 18 \\ m = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm: $4x - 3y + 18 = 0; 4x - 3y - 2 = 0$.

» **Câu 25.** Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

✎ **Lời giải**

Chọn C

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = 2$.



Đường tròn (C') : $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$ có tâm $I'(-3; 4)$ bán kính $R' = \sqrt{5}$.

$$II' = 2\sqrt{13}.$$

Vậy $II' > R + R'$ nên 2 đường tròn không có điểm chung suy ra 2 đường tròn có 4 tiếp tuyến chung.

» **Câu 26.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$.

A. $4x + 3y + 29 = 0$.

B. $4x + 3y + 29 = 0$ hoặc $4x + 3y - 21 = 0$.

C. $4x - 3y + 5 = 0$ hoặc $4x - 3y - 45 = 0$

D. $4x + 3y + 5 = 0$ hoặc $4x + 3y + 3 = 0$.

» **Lời giải**

Chọn B

Đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$ có tâm $I(2; -4)$, bán kính $R = 5$.

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$ có phương trình dạng: $4x + 3y + c = 0$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi: $d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 \Leftrightarrow |c - 4| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} c - 4 = 25 \\ c - 4 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 29 \\ c = -21 \end{cases}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $4x + 3y + 29 = 0$ và $4x + 3y - 21 = 0$.

» **Câu 27.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; -2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

B. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 2)$ và bán kính $R_2 = 2$.

C. Hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ không có điểm chung.

D. Hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc với nhau.

» **Lời giải**

Chọn B

Ta thấy đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; -2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 2)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Khi đó: $5 = R_1 + R_2 = I_1I_2 = \sqrt{(2+1)^2 + (2+2)^2} = 5 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc nhau.

» **Câu 28.** Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho hai đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 4$ và $(C'): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x + y - 2 = 0$.

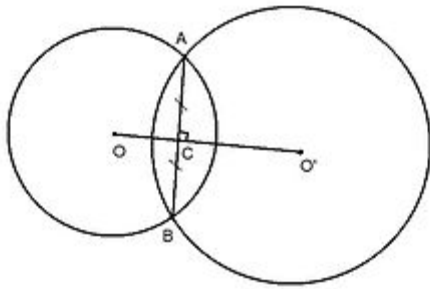
B. $x - y + 2 = 0$

C. $x + y + 2 = 0$.

D. $x - y - 2 = 0$.

» **Lời giải**

Chọn A



Cách 1: Xét hệ
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2-x)^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right), B\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

(C) có tâm $O(1;0)$, (C') có tâm $O'(4;3) \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = (3;3)$

Nên đường thẳng AB qua A và nhận $\vec{n}(1;1)$ là vécto pháp tuyến.

Phương trình: $1\left(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$. Chọn A.

Cách 2: Giả sử hai đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 4$ và $(C'): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi đó tọa độ của A và thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $6x + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ là phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A và B

» **Câu 29.** Cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 19 = 0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B , khi đó độ dài đoạn thẳng AB là

A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 8.

» **Lời giải**

Chọn A

Từ $\Delta: 3x - 4y - 19 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{19}{4} \quad (1)$.

Thế (1) vào (C) ta được

$$(x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{23}{4}\right)^2 = 25$$



$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - \frac{85}{8}x + \frac{145}{16} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{29}{5} \end{cases}$$

$$+) x_A = 1 \Rightarrow y_A = -4 \Rightarrow A(1; -4).$$

$$+) x_B = \frac{29}{5} \Rightarrow y_B = -\frac{2}{5} \Rightarrow B\left(\frac{29}{5}; -\frac{2}{5}\right).$$

$$\text{Độ dài đoạn thẳng } AB = \sqrt{\left(\frac{29}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} + 4\right)^2} = 6.$$

» **Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 5$. Biết rằng đường thẳng $(d): 3x - 4y + 8 = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 8$.

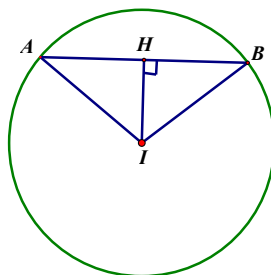
B. $AB = 4$.

C. $AB = 3$.

D. $AB = 6$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB . Ta có $IH \perp AB$ và

$$IH = d(I; AB) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3.$$

Xét tam giác vuông AHI ta có: $HA^2 = IA^2 - IH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow HA = 4 \Rightarrow AB = 2HA = 8$

» **Câu 31.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $M(2; 1)$. Dây cung của (C) đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6.

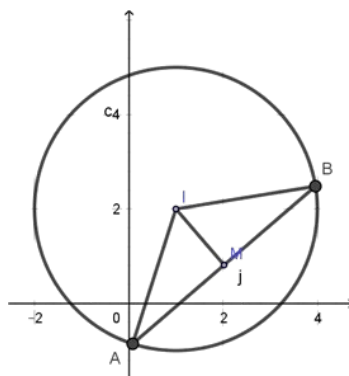
B. $\sqrt{7}$.

C. $3\sqrt{7}$.

D. $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ nên có tâm $I(1; 2)$, $R = 3$

Vì $IM = \sqrt{2} < 3 = R$.



Gọi d là đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (C) tại các điểm A, B .

Gọi J là trung điểm của AB . Ta có:

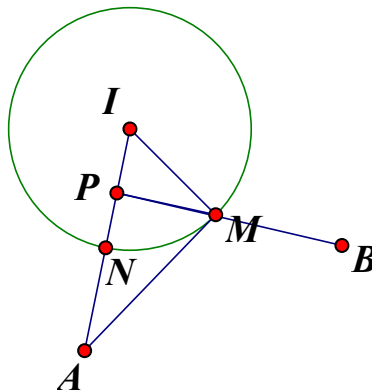
$$\text{Ta có: } AB = 2AJ = 2\sqrt{R^2 - IJ^2} \geq 2\sqrt{R^2 - IM^2} = 2\sqrt{9 - 2} = 2\sqrt{7}.$$

» **Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0; -3)$, $B(4; 1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** $(7, 7; 8, 1)$. **B.** $(7, 3; 7, 7)$. **C.** $(8, 3; 8, 5)$. **D.** $(8, 1; 8, 3)$.

Lời giải

Chọn D



Đường tròn $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 4$ có tâm $I(0; 1)$ bán kính $R = 2$.

$IA = IB = 4 > R$ nên A, B nằm ngoài đường tròn.

Gọi N là giao điểm của IA và đường tròn (C)

Trên đoạn IN lấy điểm P sao cho $IP = \frac{1}{2}IN \Rightarrow \overrightarrow{IP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow P$ trùng với gốc tọa độ.

$$\text{Ta có } \triangle IAM \sim \triangle IMP \Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{IM}{IP} = \frac{IN}{IP} = 2 \Rightarrow MA = 2MP.$$

$$\text{Do đó } P = MA + 2MB = 2MP + 2MB \geq 2PB \Rightarrow P_{\min} = 2PB = 2\sqrt{17} \Rightarrow P_{\min} \in (8, 1; 8, 3).$$

» **Câu 33.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$.

Tính độ dài nhỏ nhất của OM ?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

Đường tròn (C) có tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{OI} = (-4; 3)$ suy ra phương trình đường thẳng OI là $\begin{cases} x = -4t \\ y = 3t \end{cases}$.

$OI \cap (C) = \{M\}$ Tọa độ $(x; y)$ của M là nghiệm hệ



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0 \\ x = -4t \\ y = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25t^2 - 50t + 16 = 0 \\ x = -4t \\ y = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \\ x = -\frac{32}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} t = \frac{2}{5} \\ x = -\frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\frac{32}{5}; \frac{24}{5}\right), M_2\left(-\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$

Ta có $OM_1 = \sqrt{\left(-\frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = 8, OM_2 = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = 2 \Rightarrow OM_{\min} = OM_2 = 2.$

Cách 2

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R = \sqrt{4^2 + 3^2 - 16} = 3.$

Phương trình đường thẳng OI đi qua $O(0;0)$ có vtcp $\vec{n}(3;4)$ là:

$$3x + 4y = 0.$$

Tọa độ $M = OI \cap (C)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{32}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Ta có $OM_1 = \sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = 8; OM_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = 2.$ Vậy $OM_{\min} = 2.$

» **Câu 34.** Gọi I là tâm của đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x + y - m = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1.

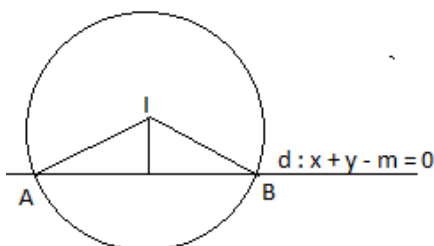
B. 3.

C. 2.

D. 0.

» **Lời giải**

Chọn C



Gọi: $d: x + y - m = 0$; tâm của (C) là $I(1;1)$, để $d \cap (C)$ tại 2 phân biệt khi đó:

$$0 \leq d(I; d) < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2-2\sqrt{2} < m < 2+2\sqrt{2} (*)$$

Xét $\triangle IAB$ có: $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2} \cdot R^2$



$$\begin{aligned} \text{Dấu "=" xảy ra khi: } \sin \widehat{AIB} = 1 &\Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow d(I; d) = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 & (TM) \\ m=4 & (TM) \end{cases} \end{aligned}$$

» **Câu 35.** Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$ có tọa độ $M(a; b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** $\sqrt{2}a = -b$. **B.** $a = -b$. **C.** $\sqrt{2}a = b$. **D.** $a = b$.

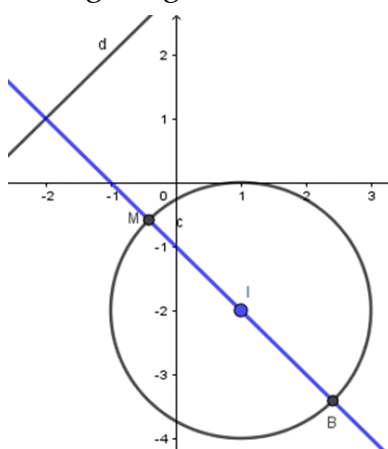
» **Lời giải**

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d .

Khi đó, điểm M cần tìm là một trong hai giao điểm của Δ và (C) .



Ta có phương trình $\Delta: x + y + 1 = 0$.

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ 2(x-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = -2 - \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ y = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } B(1 + \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2}) \Rightarrow d(B, d) = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\text{Với } C(1 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}) \Rightarrow d(C, d) = -2 + 3\sqrt{2} < d(B, d)$$

$$\text{Suy ra } M(1 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = 1 - \sqrt{2}; b = -2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}a.$$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 36.** Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường tròn (C) có tâm là $I(1; -2)$.		
(b)	Đường tròn (C) có bán kính $R = 4$		
(c)	Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1; 2)$.		



(d) Đường tròn (C) có đường kính bằng 4.

» **Lời giải**

(a) Đường tròn (C) có tâm là $I(1; -2)$.

Đường tròn (C) có tâm là $I(1; -2)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Đường tròn (C) có bán kính $R = 4$

Đường tròn (C) có bán kính $R = 2$.

» **Chọn SAI.**

(c) Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1; 2)$.

Do $(1-1)^2 + (2+2)^2 = 4$ là đúng nên đường tròn (C) đi qua điểm $A(1; 2)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Đường tròn (C) có đường kính bằng 4.

Đường tròn (C) có bán kính $R = 2$ nên đường kính $d = 2R = 4$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 37.** Cho (C): $(x-1)^2 + y^2 = 10$; và điểm $A(4; 1)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A \in (C)$.		
(b)	Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{10}$.		
(c)	Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4; 1)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1)$.		
(d)	Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4; 1)$ đi qua điểm $N(4; 3)$.		

» **Lời giải**

(a) Điểm $A \in (C)$.

Thay $x = 4, y = 1$ vào phương trình đường tròn (C) ta có: $(4-1)^2 + 1^2 = 10$.

Do đó $A \in (C)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{10}$.

Bán kính của (C) bằng $\sqrt{10}$. Do đó đường kính của (C) là $2\sqrt{10}$.

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4; 1)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1)$.

Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(4; 1)$ có $\vec{n} = \vec{IA} = (3; 1)$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4; 1)$ đi qua điểm $N(4; 3)$.



Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;4)$ có $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (3;1)$ nên có phương trình là $3x + y - 13 = 0$.

Thay $x = 4, y = 3$ vào phương trình tiếp tuyến ta có: $3 \cdot 4 + 3 - 13 = 2 \neq 0$.

Do đó N không thuộc tiếp tuyến.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 38.** Cho đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 2y + 7 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(I, \Delta) = \frac{3}{\sqrt{5}}$		
(b)	Đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$		
(c)	Phương trình đường tròn là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$		
(d)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		

» **Lời giải**

(a) $d(I, \Delta) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

(C) có tâm I và tiếp xúc Δ nên có bán kính $R = d(I, \Delta) = \frac{|-1 - 4 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

» **Chọn SAI.**

(b) Đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$

Từ $R = d(I, \Delta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình đường tròn là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

Xét $|\overrightarrow{OI}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5} > R = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên ngoài đường tròn (C)

» **Chọn SAI.**

» **Câu 39.** Đường tròn (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm của (C) có dạng $I(R; -R)$, R là bán kính đường tròn (C)		
(b)	$R^2 = (R-2)^2 + (R-1)^2$		



(c)	Có 2 đường tròn thỏa mãn		
(d)	Tổng bán kính các đường tròn thỏa mãn bằng 5		

» **Lời giải**

(a) Tâm của (C) có dạng $I(R; -R)$, R là bán kính đường tròn (C)

Vì điểm $A(2; -1)$ nằm ở góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ và đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ

Nên tâm của đường tròn có dạng $I(R; -R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C) .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $R^2 = (R-2)^2 + (R-1)^2$

$$\text{Ta có: } R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = (2-R)^2 + (-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Có 2 đường tròn thỏa mãn

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn đề bài là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tổng bán kính các đường tròn thỏa mãn bằng 5

$$\text{Ta có: } \begin{cases} R_1 = 1 \Rightarrow d_1 = 2 \\ R_2 = 5 \Rightarrow d_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow d_1 + d_2 = 12.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;3), B(-1;1)$ có tâm thuộc $\Delta: x-3y-11=0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm của đường tròn (C) là $I\left(7; -\frac{4}{3}\right)$		
(b)	Đường kính của đường tròn (C) bằng 65		
(c)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		
(d)	Đường tròn (C) đi qua điểm $N(0;2)$		

» **Lời giải**

(a) Tâm của đường tròn (C) là $I\left(7; -\frac{4}{3}\right)$

Gọi tâm đường tròn là $I(3t+11; t) \in \Delta$.

Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (3t+11-2)^2 + (t-3)^2 = (3t+11+1)^2 + (t-1)^2 \Leftrightarrow 22t = -55 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2}.$$

Suy ra $I\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$;

» **Chọn SAI.**

(b) Đường kính của đường tròn (C) bằng 65



Ta có bán kính đường tròn $R = IA = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 + \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{2}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

Vậy đường kính của đường tròn (C) bằng $2 \cdot \frac{\sqrt{130}}{2} = \sqrt{130}$

» **Chọn SAI.**

(c) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

$$\text{Xét } |\overrightarrow{OI}| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{2} < R = \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Đường tròn (C) đi qua điểm $N(0;2)$

$$\text{Thay điểm } N(0;2) \text{ vào (C): } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2} \Rightarrow \left(0 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2} = R^2$$

$$\text{Do đó } N(0;2) \text{ nằm trên đường tròn (C): } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 41.** Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2), B(3;4)$ và tiếp xúc $\Delta: 3x + y - 3 = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$IB = d(I, \Delta)$		
(b)	Tổng đường kính của các đường tròn (C) bằng: $2\sqrt{10}$		
(c)	Có hai đường tròn (C) thỏa mãn		
(d)	Điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)		

» **Lời giải**

(a) $IB = d(I, \Delta)$

Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2), B(3;4) \Rightarrow IA = IB = R$

Đường tròn (C) tiếp xúc $\Delta: 3x + y - 3 = 0 \Rightarrow d(I, \Delta) = R$

Vậy $IB = d(I, \Delta)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Có hai đường tròn (C) thỏa mãn

$$\text{Gọi tâm đường tròn là } I(a;b), \text{ ta có: } d(I, \Delta) = \frac{|3a + b - 3|}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = (d(I, \Delta))^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 = \frac{(3a+b-3)^2}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a^2 - 2a + 9b^2 - 34b + 41 - 6ab = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$



Thay (1) vào (2): $(5-b)^2 - 2(5-b) + 9b^2 - 34b + 41 - 6(5-b)b = 0$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 18b + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 & \Rightarrow a=4 \Rightarrow R_1 = \sqrt{10} \\ b=\frac{7}{2} & \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ và $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Tổng đường kính của các đường tròn (C) bằng: $2\sqrt{10}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} R_1 = \sqrt{10} \\ R_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 2\sqrt{10} \\ d_2 = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow d_1 + d_2 = 3\sqrt{10}$$

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)

$$\text{Thay điểm } N(1;0) \text{ vào đường tròn } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \neq \frac{5}{2}$$

$$\text{Do đó } N(1;0) \text{ không nằm trên đường tròn } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Thay điểm } N(1;0) \text{ vào đường tròn } (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10 \Rightarrow (1-4)^2 + (0-1)^2 = 10 = R^2$$

$$\text{Do đó } N(1;0) \text{ nằm trên đường tròn } (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Vậy điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 42.** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và hai điểm $A(1;-1), B(1;3)$

. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm A thuộc đường tròn		
(b)	Điểm B nằm trong đường tròn		
(c)	$x=1$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A		
(d)	Qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-12=0$		

» **Lời giải**

(a) Điểm A thuộc đường tròn

$$\text{Đường tròn (C) có tâm } I(3;-1) \text{ bán kính } R = \sqrt{9+1-6} = 2.$$

$$\text{Ta có: } IA = 2 = R$$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Điểm B nằm trong đường tròn

$$IB = 2\sqrt{5} > R$$

$\Rightarrow$ điểm B nằm ngoài đường tròn.



» **Chọn SAI.**

(c) $x=1$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .

Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{AI} = (2; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1) + 0(y+1) = 0 \Leftrightarrow x=1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-12=0$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng: $a(x-1) + b(y-3) = 0$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) hay $ax + by - a - 3b = 0$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b = 4a \end{cases}.$$

» Với $b=0$, chọn $a=1$; phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

» Với $3b=4a$, chọn $a=3 \Rightarrow b=4$; phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$.

Vậy qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-15=0$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 43.** Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(2;0), B(0;-3), C(5;-3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{26}$		
(b)	Hoành độ của tâm đường tròn (C) bằng $-\frac{5}{2}$		
(c)	Đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$		
(d)	Gọi I là tâm của đường tròn (C) khi đó độ dài đoạn $IO = 5\sqrt{2}$		

» **Lời giải**

Gọi tâm đường tròn là $I(a;b)$.

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = a^2 + (b+3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 = (a-5)^2 + (b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b = -5 \\ 6a - 6b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Bán kính đường tròn là } R = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

(a) Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{26}$

$$\text{Ta có } R = \sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{13}{2}} = \sqrt{26}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**



(b) Hoành độ của tâm đường tròn (C) bằng $-\frac{5}{2}$

Ta có tâm $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ hoành độ của tâm bằng $\frac{5}{2}$.

» **Chọn SAI.**

(c) Đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$

$$\text{Xét } |\overline{NI}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2} = R.$$

Do đó đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Độ dài đoạn $IO = 5\sqrt{2}$

$$\text{Xét } |\overline{IO}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 44.** Đường tròn (C) đi qua điểm $A(-2;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 15 = 0$ tại $B(1;-3)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường kính của đường tròn (C) bằng 10		
(b)	Tâm của đường tròn (C) có tung độ bằng -2		
(c)	Khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến đường thẳng Δ bằng 4		
(d)	Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)		

» **Lời giải**

Gọi tâm đường tròn $I(a;b)$.

Ta có vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (4;3)$ và $\overline{IB} = (1-a; -3-b)$.

Theo giả thiết: $\overline{IB} \perp \vec{u}_\Delta \Rightarrow \overline{IB} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow 4a + 3b + 5 = 0$ (1).

Ta lại có $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (-2-a)^2 + (6-b)^2 = (1-a)^2 + (-3-b)^2 \Leftrightarrow a - 3b + 5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ (1) và (2): } \begin{cases} 4a + 3b = -5 \\ a - 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } R = IA = \sqrt{(-2+2)^2 + (6-1)^2} = 5.$$

(a) Đường kính của đường tròn (C) bằng 10

Từ $R = IA = 5 \Rightarrow$ Đường kính của đường tròn (C) bằng 10.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tâm của đường tròn (C) có tung độ bằng -2

Ta có tâm $I(-2;1) \Rightarrow$ tung độ của tâm bằng 1.

» **Chọn SAI.**



(c) Khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến đường thẳng Δ bằng 4

$$d(I; \Delta) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

$$\text{Xét } |\overrightarrow{OI}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} < R = 5.$$

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 45.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $I(-2;3)$ và điểm $M(2;5)$ và hai đường thẳng

$$d: 12x - 5y + 13 = 0 \text{ và } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}. \text{ Các mệnh đề sau đúng hay sai?}$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường tròn tâm I và đi qua M có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.		
(b)	Đường tròn tâm I và đi qua M có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$.		
(c)	Đường tròn tâm I và tiếp xúc đường thẳng d có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.		
(d)	Phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ và đi qua hai điểm I và M là: $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 85$.		

» **Lời giải**

(a) Đường tròn tâm I và đi qua M có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;5)$ có bán kính

$$R = IM = \sqrt{(2+2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Đường tròn tâm I và đi qua M có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;5)$ có bán kính

$$R = IM = \sqrt{(2+2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}.$$

Suy ra phương trình đường tròn cần tìm: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 20$.

» **Chọn SAI.**

(c) Đường tròn tâm I và tiếp xúc đường thẳng d có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và tiếp xúc đường thẳng $d: 12x - 5y + 13 = 0$ có bán kính

$$R = d(I, d) = \frac{|12 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 13|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 2.$$



Phương trình đường tròn cần tìm: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$ và đi qua hai điểm I và M là:

$$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 85.$$

Gọi K là tâm của đường tròn, ta có $K \in \Delta$ và $KI = KM = R$.

$$K \in \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow K(t; -t).$$

$$KI = KM \Leftrightarrow KI^2 = KM^2 \Leftrightarrow (-2-t)^2 + (3+t)^2 = (2-t)^2 + (5+t)^2 \Leftrightarrow -4t+16=0 \Leftrightarrow t=4.$$

Suy ra đường tròn có tâm $K(4; -4)$ và bán kính $R = KM = \sqrt{85}$ có phương trình là:

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 85.$$

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , bán kính của đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-6=0$ bằng bao nhiêu?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

Ta có đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-6=0$

$$\text{Do đó } R = d(I; d) = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3.$$

» **Câu 47.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0 \leq t \leq 180)$ có tọa độ là $(3+2\cos t^\circ; 4+2\sin t^\circ)$. Quỹ đạo chuyển động của chất điểm K có phương trình dạng $(x-3)^2 + (y-4)^2 = a$. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x=3+2\cos t^\circ \\ y=4+2\sin t^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2\cos t^\circ \\ y-4=2\sin t^\circ \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4.$$

Vậy chất điểm K chuyển động theo quỹ đạo đường tròn $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=2$.

Khi đó $a=4$

» **Câu 48.** Có bao nhiêu đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$ và tiếp xúc với 2 trục tọa độ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Phương trình đường tròn (C) tâm $I(a;b)$ bán kính R có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Do (C) tiếp xúc $Ox, Oy \Leftrightarrow R = |a| = |b|$.



+ **Trường hợp 1:** Nếu $a = b \Rightarrow (C): (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Do (C) qua $A(1;1)$ suy ra $(1-a)^2 + (1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} \\ a = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy có 2 đường tròn:

$$(C_1): (x-2+\sqrt{2})^2 + (y-2+\sqrt{2})^2 = (2-\sqrt{2})^2$$

$$(C_2): (x-2-\sqrt{2})^2 + (y-2-\sqrt{2})^2 = (2+\sqrt{2})^2$$

+ **Trường hợp 2:** Nếu $a = -b \Rightarrow (C): (x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2$.

Do (C) qua $A(1;1)$ suy ra $(1-a)^2 + (1+a)^2 = a^2$ (vô nghiệm)

» **Câu 49.** Có bao nhiêu đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Gọi tâm đường tròn là $I(6a+10; a) \in d$.

Đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R , ta có: $d(I, d_1) = d(I, d_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow \begin{cases} 22a+35 = -21a-35 \\ 22a+35 = 21a+35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{70}{43} \end{cases}$$

» Với $a = 0$ thì $K(10;0)$ và $R = 7$ suy ra $(C): (x-10)^2 + y^2 = 49$.

» Với $a = -\frac{70}{43}$ thì $K(\frac{10}{43}; -\frac{70}{43})$ và $R = \frac{7}{43}$ suy ra $(C): (x-\frac{10}{43})^2 + (y+\frac{70}{43})^2 = (\frac{7}{43})^2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là:

$$(x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (x-\frac{10}{43})^2 + (y+\frac{70}{43})^2 = (\frac{7}{43})^2$$

» **Câu 50.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là một phương trình đường tròn.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 19**

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (-2m)^2 - (19m-6) > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

Với $m \in [-10; 10]$ thì có $11+8=19$ giá trị nguyên của tham số m .

» **Câu 51.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Xác định giá trị của tham số m để qua điểm $A(2; m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C) .



Lời giải

✓ *Trả lời: 2*

Qua điểm A chỉ có một tiếp tuyến với đường tròn (C) khi $A \in (C)$

$$\text{hay } 2^2 + m^2 + 2 \cdot 2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

» **Câu 52.** Cho đường tròn $(C): (x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$. Có bao nhiêu đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) và song song với đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*

Đường tròn (C) có tâm $I(6;7)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng d song song với Δ nên có dạng: $x+2y+m=0 (m \neq -5)$.

Mặt khác, đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) nên

$$d(I, \Delta) = \frac{|6+2 \cdot 7+m|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|20+m|}{\sqrt{5}} = 5 \Leftrightarrow m = 5\sqrt{5}-20 \text{ hoặc } m = -5\sqrt{5}-20.$$

$$\text{Vậy } d: x+2y+5\sqrt{5}-20=0 \text{ hoặc } d: x+2y-5\sqrt{5}-20=0.$$

» **Câu 53.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Biết rằng có hai đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của hai đường tròn ấy đến điểm B bằng 5. Tính tổng đường kính của hai đường tròn đã cho.

Lời giải

✓ *Trả lời: 16*

Gọi (C) là đường tròn cần tìm.

Đường tròn (C) tiếp xúc với trục Ox tại A nên ta có $I(2;b)$ và $d(I, Ox) = |b| = R$.

$$\text{Mặt khác, } IB = 5 \Leftrightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25 \Leftrightarrow b = 7 \text{ hoặc } b = 1.$$

$$\text{» } b = 7 \Rightarrow I_1(2;7), R_1 = 7 \Rightarrow d_1 = 14.$$

$$\text{» } b = 1 \Rightarrow I_2(2;1), R_2 = 1 \Rightarrow d_2 = 2.$$

Khi đó, tổng đường kính của hai đường tròn đã cho bằng 16

» **Câu 54.** Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và các đường thẳng $d_1: x-y=0$, $d_2: x-7y=0$. Tính bán kính đường tròn (C') có tâm I nằm trên đường tròn (C) và tiếp xúc với d_1, d_2 .

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,32*

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C') . Ta có: $I \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$.

Đường tròn (C') tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2

$$\Leftrightarrow d(I, d_1) = d(I, d_2) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow 5|a-b| = |a-7b|$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}b \text{ hoặc } a = 2b.$$



$$\gg a = \frac{-1}{2}b \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}b - 2\right)^2 + b^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}b^2 + 2b + \frac{16}{5} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\gg a = 2b \Rightarrow (2b - 2)^2 + b^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5b^2 - 8b + \frac{16}{5} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{8}{5}, R = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Vậy đường tròn } (C') \text{ có phương trình là: } \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}.$$

» **Câu 55.** Phương trình đường tròn (C) có tâm $B(1;1)$ và cắt $d: 3x + 4y + 8 = 0$ tại M, N thoả mãn $MN = 8$ có đường kính bằng bao nhiêu?

✎ Lời giải

✓ **Trả lời: 10**

Gọi H là hình chiếu của B lên $d: 3x + 4y + 8 = 0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là $BH = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$.

H là trung điểm của MN nên $HM = 4$.

Suy ra bán kính đường tròn (C) là: $R = \sqrt{BH^2 + HM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy đường kính đường tròn (C) là: 10.



Chương 09

Bài 4.

BA ĐƯỜNG CONIC

A

Lý thuyết

1. Elip



Định nghĩa:

Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$.

» Tập hợp tất cả điểm M thỏa $MF_1 + MF_2 = 2a$, với $a > c > 0$ là một elip.

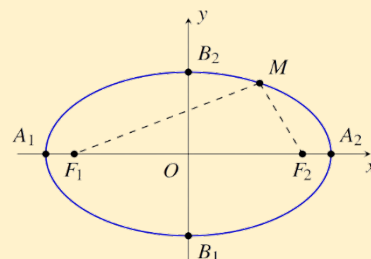
Phương trình Elip:

» Trong mặt phẳng Oxy , cho $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (hai tiêu điểm thuộc trục hoành).

» Với $b^2 = a^2 - c^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Từ hình bên ta có:

- » Trục lớn $A_1A_2 = 2a$; Trục bé $B_1B_2 = 2b$;
- » Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $a^2 = b^2 + c^2$.
- » Tọa độ đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
- » Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.



2. Hypebol



Định nghĩa:

Cho hai điểm phân biệt F_1 và F_2 . Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$.

» Tập hợp tất cả điểm M thỏa $|MF_1 - MF_2| = 2a$, với $0 < a < c$ là một hypebol.

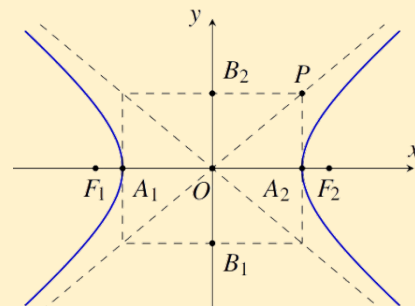
Phương trình Hypebol:

» Trong mặt phẳng Oxy , cho $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (hai tiêu điểm thuộc trục hoành).

» Với $b^2 = c^2 - a^2$, ta có phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Từ hình bên ta có:

- » Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là **trục thực**, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là **trục ảo** của hypebol.
- » Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $c^2 = a^2 + b^2$.
- » Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$.
- » Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.
- » Giao điểm O của hai trục là **tâm đối xứng** của hypebol.





3. Parabol



Định nghĩa:

Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

- » Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ là một đường parabol.
- » Điểm F gọi là **tiêu điểm** và Δ gọi là **đường chuẩn** của parabol (P) .

Phương trình Parabol:

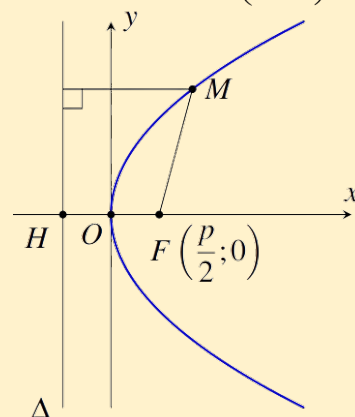
- » Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ .
- » Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là $p = HF$.
- » Chọn hệ trục tọa độ Oxy , với O là trung điểm HF (như hình vẽ) thì $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và

$$\Delta: x = -\frac{p}{2}.$$

- » Khi đó, phương trình (P) là: $y^2 = 2px$, với $p > 0$.

Hình dạng parabol và các đại lượng liên quan:

- » O là đỉnh; Ox gọi là **trục đối xứng** của parabol (P) .
- » p gọi là **tham số tiêu** của parabol (P) .
- » Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.





Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình Elip



Phương pháp

Cho Elip có phương trình chính tắc: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

Các yếu tố trong Elip:

- » Tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.
- » Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.
- » Độ dài trục lớn $2a$.
- » Độ dài trục bé $2b$.
- » Tiêu cự $2c$.



Ví dụ 1.1.

Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

Từ phương trình của $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ (E), ta có $a = 2, b = 1$. Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2; 0), A_2(2; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$.

Tâm sai của $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 1.2.

Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(3) $x^2 + 4y^2 = 1$

(4) $4x^2 + 25y^2 = 36$

Lời giải

(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Từ phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ta có: $a = 4, b = 2$.

Các đỉnh: $A_1(-4; 0), A_2(4; 0), B_1(0; -2), B_2(0; 2)$.



Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 8, B_1B_2 = 2b = 4$.

(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Từ phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ta có: $a^2 = 4, b^2 = 3$, suy ra $c = 1$.

Các tiêu điểm: $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$.

Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 2$.

(3) $x^2 + 4y^2 = 1$

Ta có $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1: a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Các đỉnh: $A_1(-1; 0), A_2(1; 0), B_1\left(0; -\frac{1}{2}\right), B_2\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 2, B_1B_2 = 2b = 1$.

(4) $4x^2 + 25y^2 = 36$

Ta có $4x^2 + 25y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{36}{25}} = 1$, suy ra: $a^2 = 9, b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{21}}{5}$.

Các tiêu điểm: $F_1\left(-\frac{3\sqrt{21}}{5}; 0\right), F_2\left(\frac{3\sqrt{21}}{5}; 0\right)$.

Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = \frac{6\sqrt{21}}{5}$.



Ví dụ 1.3.

Lập phương trình chính tắc của elip (E) , biết

- (1) Độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.
- (2) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.
- (3) Elip đi qua hai điểm $M(1; 0), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

Lời giải

(1) Độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Độ dài trục lớn bằng 6 $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

Độ dài trục nhỏ bằng 4 $\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Vậy phương trình elip là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



(2) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Độ dài trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Độ dài tiêu cự bằng 6 $\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Ta có $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = 4$.

Vậy phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(3) Elip đi qua hai điểm $M(1;0)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Điểm $M \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$.

Điểm $N \in (E) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$.



➤ Dạng 2. Phương trình Hypebol



Phương pháp

Cho Hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Các yếu tố trong Hypebol:

- » Độ dài trục thực: $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục ảo: $B_1B_2 = 2b$. Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
- » Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.
- » Tiêu điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.



Ví dụ 2.1.

Xác định tiêu cự, tiêu điểm, các đỉnh, độ dài 2 trục của hypebol sau:

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$

(2) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

(3) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$

✎ Lời giải

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 21 \Rightarrow b = \sqrt{21}$

Suy ra: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

+ Có hai tiêu điểm $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$

+ Tiêu cự $2c = 10$

+ Hai điểm $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$ được gọi là hai đỉnh.

+ Độ dài trục thực: $2a = 4$.

+ Độ dài trục thực: $2b = 2\sqrt{21}$ trục ảo.

(2) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

$a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

Suy ra: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$

+ Có hai tiêu điểm $F_1(-13;0)$, $F_2(13;0)$

+ Tiêu cự $2c = 26$

+ Hai điểm $A_1(-12;0)$, $A_2(12;0)$ được gọi là hai đỉnh.

+ Độ dài trục thực: $2a = 24$.

+ Độ dài trục thực: $2b = 10$ trục ảo.

(3) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$

$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$

$b^2 = 45 \Rightarrow b = 3\sqrt{5}$



Suy ra: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{2}$

+ Có hai tiêu điểm $F_1(-5\sqrt{2}; 0)$, $F_2(5\sqrt{2}; 0)$

+ Tiêu cự $2c = 10\sqrt{2}$

+ Hai điểm $A_1(-\sqrt{5}; 0)$, $A_2(\sqrt{5}; 0)$ được gọi là hai đỉnh.

+ Độ dài trục thực: $2a = 2\sqrt{5}$.

+ Độ dài trục ảo: $2b = 6\sqrt{5}$ trục ảo.



Ví dụ 2.2.

Lập phương trình chính tắc của (H) biết:

- (1) Độ dài trục thực là 8 và tiêu cự bằng 10.
- (2) Độ dài trục ảo là 8 và tiêu cự bằng 12.
- (3) Tiêu cự bằng 20 và một đỉnh trên trục thực là $(-3, 0)$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > 0$, $b > 0$.

- (1) Độ dài trục thực là 8 và tiêu cự bằng 10.

Độ dài trục thực là 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$ và tiêu cự bằng 10 nên $2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$.

Ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2 \Rightarrow b = 3$

Phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- (2) Độ dài trục ảo là 8 và tiêu cự bằng 12.

Độ dài trục ảo là 8 nên $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$ và tiêu cự bằng 12 nên $2c = 12 \Leftrightarrow c = 6$.

Ta có $a^2 = c^2 - b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

Phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- (3) Tiêu cự bằng 20 và một đỉnh trên trục thực là $(-3, 0)$.

Tiêu cự bằng 20 nên $2c = 20 \Leftrightarrow c = 10$ và một đỉnh trên trục thực là $(-3, 0)$ nên $a = 3$.

Ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 3^2 = 91$

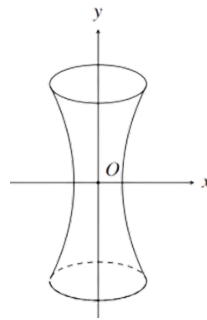
Phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{91} = 1$.



Ví dụ 2.3.

Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là 100m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Lời giải



Do tính đối xứng của hypebol nên ta có hai bán kính của nóc và đáy tháp đều bằng r .
Do điểm $M(r; 50)$ nằm trên hypebol nên thay tọa độ của điểm M vào phương trình của hypebol ta có:

$$\frac{r^2}{18^2} - \frac{50^2}{36^2} = 1 \Rightarrow r = 18\sqrt{1 + \frac{50^2}{36^3}} \approx 31 \text{ (m)}.$$

Vậy bán kính của nóc và đáy của tháp bằng 31 m.



Dạng 3. Phương trình Parabol



Phương pháp

Cho Parabol có phương trình: $y^2 = 2px$, với $p > 0$.

Các yếu tố trong Hypebol:

» p gọi là tham số tiêu của parabol (P)

» Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.



Ví dụ 3.1.

Tìm phương trình chính tắc của parabol (P). Biết:

(1) (P) nhận đường thẳng $x + 4 = 0$ làm đường chuẩn.

(2) (P) có tiêu điểm là $F(2; 0)$.

(3) (P) có đường chuẩn là $x = -3$.

Lời giải

Giả sử Parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ (với $p > 0$).

(1) (P) nhận đường thẳng $x + 4 = 0$ làm đường chuẩn.

Đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{p}{2}$.

Mà (P) có đường chuẩn là $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Do đó $-\frac{p}{2} = -4 \Leftrightarrow p = 8$.

Vậy phương trình chính tắc của (P): $y^2 = 16x$.

(2) (P) có tiêu điểm là $F(2; 0)$.

(P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Mà (P) có tiêu điểm là $F(2; 0)$.

Do đó $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của (P): $y^2 = 8x$.

(3) (P) có đường chuẩn là $x = -3$.

Đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{p}{2}$.

Mà (P) có đường chuẩn là $x = -3$.

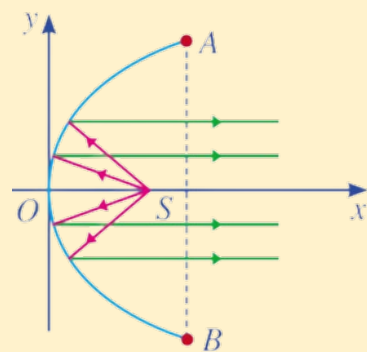
Do đó $-\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = 6$.

Vậy phương trình chính tắc của (P): $y^2 = 12x$.

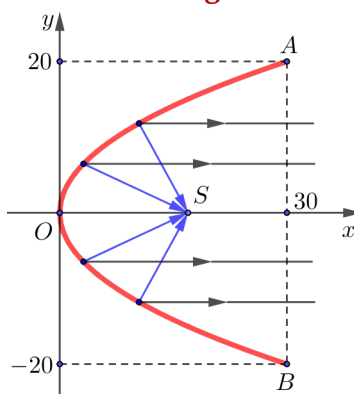


Ví dụ 3.2.

Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol như hình bên. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40\text{ cm}$ và chiều sâu $h = 30\text{ cm}$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Lời giải



Gắn hình parabol vào hệ trục như đề bài, dựa vào giả thiết bài toán ta có tọa độ điểm $A(30; 20)$.

Parabol đi qua điểm A

Nên ta có phương trình $20^2 = 2p \cdot 30 \Leftrightarrow p = \frac{20}{3}$.

Vậy ta có phương trình chính tắc của parabol đó là $y^2 = \frac{40x}{3}$.



Chương 09

Bài 4.

BA ĐƯỜNG CONIC



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?

- A.** $F_{1,2} = (0; \pm 1)$. **B.** $F_{1,2} = (\pm 1; 0)$. **C.** $F_{1,2} = (\pm 3; 0)$. **D.** $F_{1,2} = (1; \pm 2)$.

✎ **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $a^2 = 5; b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F_{1,2} = (\pm 1; 0)$.

» **Câu 2.** Cho Elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** (E) có trục lớn bằng 6.
C. (E) có trục nhỏ bằng 4. **D.** (E) có tiêu cự $\sqrt{5}$.

✎ **Lời giải**

Chọn D

$$(E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Suy ra: $a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$

Tiêu cự của (E) là $2c = 2\sqrt{5}$.

» **Câu 3.** Cho elip $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.** Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{3}$. **B.** Tiêu cự bằng 4.
C. Tâm sai $e = \frac{2}{3}$. **D.** Hai tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$.

✎ **Lời giải**

Chọn A

$$\text{Ta có } (E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \end{cases}$$

» **Câu 4.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

- A.** $4x^2 + 8y^2 = 32$. **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{5}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = -1$. **D.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$.

✎ **Lời giải**



Chọn A

Vì $4x^2 + 8y^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

» **Câu 5.** Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

» *Lời giải*

Chọn B

Ta có: $a^2 = 5, b^2 = 4$ suy ra $\begin{cases} c^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow c = 3 \\ a = \sqrt{5}, b = 2 \end{cases}$

Tâm sai của Hyperbol là $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

» **Câu 6.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 4.

B. 2.

C. 12.

D. 6.

» *Lời giải*

Chọn C

Ta có: $a^2 = 20, b^2 = 16$ suy ra $c^2 = 20 + 16 = 36 \Rightarrow c = 6$.

Khi đó Hyperbol có tiêu cự là $2c = 12$.

» **Câu 7.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Chọn khẳng định **sai**

A. Điểm $A(3;0) \in (E)$.

B. (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.

C. Trục lớn của (E) có độ dài bằng 6.

D. (E) có tâm sai bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

» *Lời giải*

Chọn D

Có $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \end{cases}$.

Khi đó (E) có tâm sai bằng $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

» **Câu 8.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

A. $x^2 - y^2 = 2$.

B. $x^2 + y^2 = 2$.

C. $x^2 + 2y^2 = 2$.

D. $x^2 = 2y^2$.

» *Lời giải*

Chọn C

Vì $x^2 + 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

» **Câu 9.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{12} = 1$?



A. $x + 8 = 0$.

B. $x - \frac{3}{4} = 0$.

C. $x + 2 = 0$.

D. $x + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$.

✎ **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{12} = 1$ suy ra $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow c = \sqrt{b^2 + a^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$.

» **Câu 10.** Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và điểm M thuộc (E) . Biết chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18. Khi đó tâm sai của (E) bằng

A. $\frac{4}{18}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $-\frac{4}{5}$.

D. $-\frac{4}{9}$.

✎ **Lời giải**

Chọn B

Ta có $F_1F_2 = 8$ và $c = 4$.

$C_{\Delta MF_1F_2} = MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 18 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10 = 2a \Rightarrow a = 5$.

Tâm sai của elip: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

» **Câu 11.** Phương trình chính tắc của Elip là

A. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.

B. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

C. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

D. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

✎ **Lời giải**

Chọn C

» **Câu 12.** Phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

B. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

✎ **Lời giải**

Chọn D

Gọi phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì trục lớn bằng 10 nên $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Elip có tiêu cự bằng 6 nên $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = 3 \Rightarrow b = 4$.

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

» **Câu 13.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 6.

✎ **Lời giải**



Chọn D

Ta có: $a^2 = 5$ và $b^2 = 4$ nên $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

Vậy tiêu cự là: $2c = 6$

» **Câu 14.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{33}$.

C. 3.

D. 9.

» **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$ suy ra $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 23$.

Tiêu cự là $2c = 2\sqrt{23}$.

» **Câu 15.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1; 2)$.

A. $y^2 = 4x$.

B. $y^2 = 2x$.

C. $y = 2x^2$.

D. $y = x^2 + 2x - 1$.

» **Lời giải**

Chọn A

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

$A(1; 2) \in (P) \Rightarrow 2p = 4$

Vậy phương trình $(P): y^2 = 4x$.

» **Câu 16.** Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + 1 = 0$.

A. $y^2 = 2x$.

B. $y^2 = 4x$.

C. $y = 4x^2$.

D. $y^2 = 8x$.

» **Lời giải**

Chọn B

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Đường chuẩn $x + 1 = 0$ suy ra $\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow y^2 = 4x$.

Vậy $y^2 = 4x$.

» **Câu 17.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng 10.

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn B

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} a = 2b \\ 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{5b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.



» **Câu 18.** Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây?

- A. $(-5; 0)$. B. $(0; \sqrt{7})$. C. $(\sqrt{7}; 0)$. D. $(0; 5)$.

» **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ suy ra $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow c = 5$.

Tiêu điểm $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$.

» **Câu 19.** Cho điểm M nằm trên Hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. Nếu điểm M có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

- A. 8. B. 10; 6. C. $4 \pm \sqrt{7}$. D. 14; 22.

» **Lời giải**

Chọn D

Ta có $a^2 = 16; b^2 = 20 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 36$

Vậy $a = 4; b = 2\sqrt{5}, c = 6$

Tiêu điểm $F_1(-6; 0); F_2(6; 0)$

M có hoành độ $x = 12$ khi đó $MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 + \frac{6}{4} \cdot 12 \right| = 22; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 - \frac{6}{4} \cdot 12 \right| = 14$

» **Câu 20.** Phương trình của Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

- A. $9x^2 + 16y^2 = 144$. B. $9x^2 + 16y^2 = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn A

Gọi $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; (a > b)$

Độ dài trục lớn là: $A_1A_2 = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Độ dài trục nhỏ là: $B_1B_2 = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Vậy phương trình Elip là: $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144$

» **Câu 21.** Cho (E) có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 8, chu vi bằng 6 thì phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.
C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} 2a \cdot 2b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.



» **Câu 22.** Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

- A.** $y = x^2 - 3x - 12$. **B.** $y = x^2 - 27$. **C.** $y^2 = \frac{4x}{5}$. **D.** $y^2 = 5x - 21$.

» **Lời giải**

Chọn C

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

$$A(5;2) \in (P) \Rightarrow 2p = \frac{4}{5}$$

Vậy phương trình $(P): y^2 = \frac{4}{5}x$.

» **Câu 23.** Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng 6, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ là

- A.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{5} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn B

* Do độ dài trục lớn bằng 6 nên $2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

* Do tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ nên $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c \Rightarrow c = 1$.

* Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

» **Câu 24.** Elip có hai đỉnh $(-3;0); (3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$ có phương trình chính tắc là

- A.** $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn B

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 8$.

Vậy phương trình chính tắc của Elip đã cho là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

» **Câu 25.** Phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ là

- A.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn D

* Do độ dài trục lớn gấp 2 lần độ dài trục nhỏ nên $2a = 2.2b \Rightarrow a = 2b$.

* Do tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ nên $2c = 4\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$.

* Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 4b^2 - 12 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.



» **Câu 26.** Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

- A. 6 và 14. B. 5 và 13. C. $8 \pm \sqrt{5}$. D. $8 \pm 4\sqrt{2}$.

» **Lời giải**

Chọn A

Ta có $a^2 = 16; b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25$

Vậy $a = 4; b = 3, c = 5$

Tiêu điểm $F_1(-5; 0); F_2(5; 0)$

M có hoành độ $x = 8$ khi đó $MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 + \frac{5}{4} \cdot 8 \right| = 14; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 - \frac{5}{4} \cdot 8 \right| = 6$

» **Câu 27.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường tiệm cận là $x - 2y = 0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng 24.

- A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$. C. $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} = 1$. D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn A

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Tiệm cận $x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ (1).

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24 $\Leftrightarrow 2a \cdot 2b = 24 \Leftrightarrow a \cdot b = 6$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 2b \\ a \cdot b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$.

» **Câu 28.** Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm là $(5; 4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x + y = 0$.

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. B. $x^2 - y^2 = 9$. C. $x^2 - y^2 = 1$. D. $x^2 - y^2 = 3$.

» **Lời giải**

Chọn B

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Đường tiệm cận $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow a = b$ (1).

Hyperbol đi qua điểm $(5; 4) \Rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$ (2).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = b \\ \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 9.$$



» **Câu 29.** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Với M là điểm bất kì nằm trên (E) , khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** $4 \leq OM \leq 5$. **B.** $OM \geq 5$. **C.** $OM \leq 3$. **D.** $3 \leq OM \leq 4$.

» **Lời giải**

Chọn D

Từ $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, suy ra $a = 4, b = 3$.

Với một điểm bất kì trên (E) , ta luôn có $b \leq OM \leq a \Rightarrow 3 \leq OM \leq 4$.

» **Câu 30.** Elip đi qua điểm $M\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ thì có phương trình chính tắc là:

- A.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. **C.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

» **Lời giải**

Chọn B

Giả sử (E) có PTCT là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Ta có: $\begin{cases} M\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \\ 2c = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ Vậy PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

» **Câu 31.** Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$?

- A.** $x + 4\sqrt{5} = 0$. **B.** $x + 4 = 0$. **C.** $x - \frac{4\sqrt{35}}{7} = 0$. **D.** $x + 2 = 0$.

» **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$ suy ra $a = 2\sqrt{5}; b = \sqrt{15} \Rightarrow c = \sqrt{35} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{4\sqrt{35}}{7} = 0$.

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{10}}{5}} = 0$.

» **Câu 32.** Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

» **Lời giải**

Chọn D

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).



Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$.

Do hai đường tiệm cận vuông góc với nhau nên ta có

$$\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}.$$

Vậy tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

- » **Câu 33.** Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Các điểm M, N lần lượt di động trên tia Ox và tia Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E) . Tọa độ điểm M để đoạn MN ngắn nhất là
- A.** $M(5;0)$. **B.** $M(-5;0)$. **C.** $M(0;5)$. **D.** $M(\sqrt{5};0)$.

» **Lời giải**

Chọn A

Gọi $M(m;0), N(0;n)$ với $m, n > 0$.

Phương trình đường thẳng $MN: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn$

MN luôn tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ nx + my = mn \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Từ đó suy ra $16n^2 + 9m^2 = m^2n^2$ (1)

Mặt khác $MN = \sqrt{m^2 + n^2}$. Ta có MN bé nhất $\Leftrightarrow \triangle OMN$ cân tại $O \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow m = n$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 16m^2 + 9m^2 = m^4 \Leftrightarrow m = 5$

Vậy $\min MN = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ khi $M(5;0)$.

- » **Câu 34.** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu điểm M có hoành độ bằng -13 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng:

- A.** $8; 18$. **B.** $13 \pm \sqrt{5}$. **C.** $10; 16$. **D.** $13 \pm \sqrt{10}$.

» **Lời giải**

Chọn A

Ta có $a = 13, b = 12 \Rightarrow c = 5$

Vậy $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 8$ $MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = 18$

- » **Câu 35.** Cho (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7};0), F_2(\sqrt{7};0)$ và điểm $M(-\sqrt{7}; \frac{9}{4})$ thuộc (E) . Gọi N là điểm đối xứng với M qua gốc tọa độ O . Khi đó

- A.** $NF_1 + MF_2 = \frac{9}{2}$. **B.** $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$. **C.** $NF_2 - NF_1 = \frac{7}{2}$ **D.** $NF_1 + MF_2 = 8$.

» **Lời giải**

Chọn B



N đối xứng với M qua gốc tọa độ O nên $N\left(\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right)$.

Ta có: $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{23}{4}; NF_1 = \frac{23}{4}; NF_2 = \frac{9}{4}$.

Do đó $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$.

» **Câu 36.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $M(-5; -1), N(-1; 1)$. Điểm K thay đổi trên elip (E) . Diện tích tam giác MNK lớn nhất bằng

A. $9\sqrt{5}$.

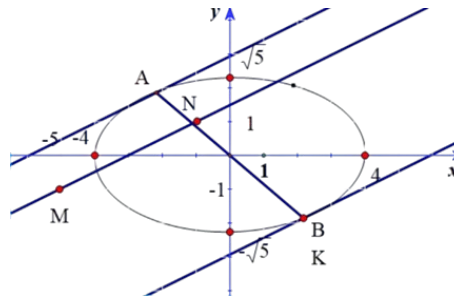
B. $\frac{9}{2}$.

C. 9.

D. 18.

» **Lời giải**

Chọn C



+ Ta có

$$\overrightarrow{MN} = (4; 2) \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$$

$$MN: x - 2y + 3 = 0 \text{ hay } MN: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$S_{\Delta KMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot d(K, MN) \\ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{5}} = |x_0 - 2y_0 + 3| \text{ với } K(x_0; y_0)$$

$\Rightarrow S_{\Delta KMN}$ lớn nhất khi $d(K, MN)$ lớn nhất.

+ Nhận thấy (E) có hai tiếp tuyến song song với MN , gọi A, B là hai tiếp điểm tương ứng. Khi đó $d(K, MN)$ lớn nhất khi $K \equiv B$.

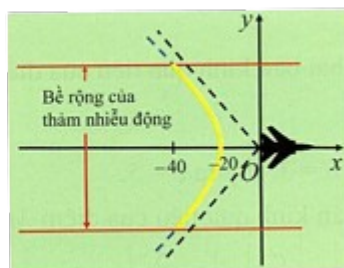
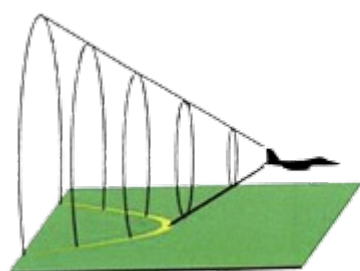
+ Mà tiếp tuyến tại $K(x_0; y_0)$ có phương trình là: $\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{5} = 1$ hay $y = -\frac{5x_0}{16y_0}x + \frac{5}{y_0}$.

$$\text{+ Từ đó ta có: } \begin{cases} \frac{-5x_0}{16y_0} = \frac{1}{2} \\ \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\frac{5}{8}x_0 \\ x_0 = \pm \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow S_{\Delta KMN} = 9$$

» **Câu 37.** Khi bay với vận tốc siêu thanh (tốc độ chuyển động lớn hơn tốc độ âm thanh trong cùng môi trường), một máy bay tạo ra một vùng nhiễu động trên mặt đất dọc theo một nhánh của hypebol (H) (Hình bên dưới). Phần nghe rõ nhất tiếng ồn của vùng nói trên được gọi là thảm nhiễu động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Biết bề



rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng là 40 mile (mile (dặm) là đơn vị đo khoảng cách, 1 mile $\approx$ 1,6 km) và (H) có phương trình: $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$.
Cao độ của máy bay là



- A. $15\sqrt{3}$ mile. B. $10\sqrt{3}$ mile. C. $20\sqrt{3}$ mile. D. $4\sqrt{3}$ mile.

» Lời giải

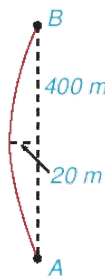
Chọn D

$$\text{Khi } x = 40 \text{ thì } \frac{40^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} = 3 \Rightarrow y^2 = 300 \Rightarrow \begin{cases} y = 10\sqrt{3} \\ y = -10\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Bề rộng của thảm nhiễu là $20\sqrt{3}$ (mile)

$\Rightarrow$ Cao độ của máy bay là $\frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}$ (mile)

» Câu 38. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol (P), điểm đầu vào của khúc cua là A và điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 320m$. Đỉnh của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B (hình bên). Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế. Phương trình chính tắc của parabol (P) đó là



- A. $y^2 = 640x$. B. $y^2 = 320x$ C. $x^2 = 1280y$. D. $y^2 = 1280x$.

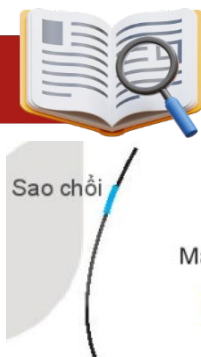
» Lời giải

Chọn D

Ta có $B(20;160)$. Suy ra $160^2 = 2p \cdot 20 \Rightarrow p = 640$.

Phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 2 \cdot 640x = 1280x$

» Câu 39. Một sao chổi đi qua hệ Mặt Trời theo quỹ đạo là một nhánh hypebol nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm, khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là $3 \cdot 10^8$ km và tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6.



Hãy lập phương trình chính tắc của hypebol chứa quỹ đạo, với 1 đơn vị đo trên mặt phẳng tọa độ ứng với 10^8 km trên thực tế.

A. $\frac{x^2}{60,84} - \frac{y^2}{55,8} = 1$. **B.** $\frac{x^2}{6,4} - \frac{y^2}{5,8} = 2$. **C.** $\frac{x^2}{55,88} - \frac{y^2}{60,84} = 1$. **D.** $\frac{x^2}{5,8} - \frac{y^2}{6,4} = 2$.

» **Lời giải**

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ sao cho tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm F_1 của hypebol.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$.

Theo đề bài, ta có:

Khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là $3 \cdot 10^8$ km $\Rightarrow c - a = 3$

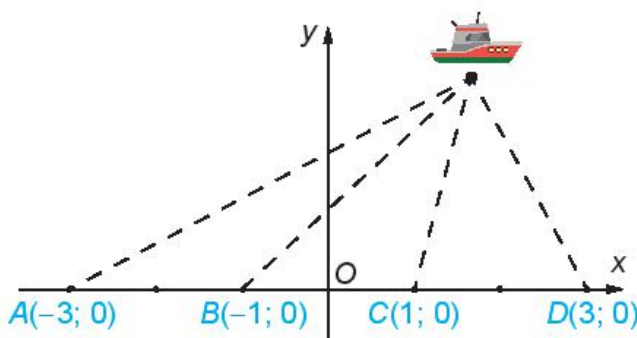
Tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = 3,6 \Rightarrow \frac{a+3}{3} = 3,6 \Rightarrow a = 7,8 \Rightarrow a^2 = 60,84$$

$$\Rightarrow c = 10,8 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 10,8^2 - 7,8^2 = 55,8$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{60,84} - \frac{y^2}{55,8} = 1$.

» **Câu 40.** Bốn trạm phát tín hiệu vô tuyến có vị trí A, B, C, D theo thứ tự đó thẳng hàng và cách đều với khoảng cách 200 km. Tại một thời điểm, bốn trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292000 km/s. Một tàu thủy nhận được tín hiệu từ trạm C trước 0,0005s so với tín hiệu từ trạm B và nhận được tín hiệu từ trạm D sớm 0,001s so với tín hiệu từ trạm A. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như trong hình bên dưới (1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ ứng với 100 km trên thực tế). Tổng khoảng cách từ tàu đến các trạm B và trạm C bằng bao nhiêu (đáp số được làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo đơn vị km) bằng cách lập phương trình chính tắc của hai hypebol đi qua vị trí M của tàu?



A. 150.

B. 255.

C. 452.

D. 18.

» **Lời giải**

Chọn C



Gọi vận tốc phát tín hiệu là v (theo đề bài $v = 292000 \text{ km/s}$);

t_A, t_B, t_C, t_D lần lượt là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ các trạm A, B, C, D;

M là vị trí của tàu thủy.

Hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm B, C là:

$$MB - MC = v.t_B - v.t_C = v(t_B - t_C) = 292000.0,0005 = 146 \text{ (km)}.$$

Hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm A, D là:

$$MA - MD = v.t_D - v.t_A = v(t_D - t_A) = 292000.0,001 = 292 \text{ (km)}.$$

Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H_1) nhận B, C làm tiêu điểm

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (a_1 > 0, b_1 > 0).$$

Vì $MB - MC = 146$ nên $2a_1 = 146 \Rightarrow a_1 = 73 \Rightarrow a_1^2 = 5329$.

Ta thấy $B(-100; 0)$ và $C(100; 0)$ là hai tiêu điểm của hypebol nên $c_1 = 100$

$$\Rightarrow b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 = 100^2 - 73^2 = 4671.$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol (H_1) là $\frac{x^2}{5329} - \frac{y^2}{4671} = 1$.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H_2) nhận A, D làm tiêu điểm là:

$$\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 \quad (a_2 > 0, b_2 > 0).$$

Vì $MA - MD = 29,2$ nên $2a_2 = 292 \Rightarrow a_2 = 146 \Rightarrow a_2^2 = 21316$.

Ta thấy $A(-300; 0); D(300; 0)$ là hai tiêu điểm của hypebol nên $c_2 = 300$

$$\Rightarrow b_2^2 = c_2^2 - a_2^2 = 300^2 - 146^2 = 68684.$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol (H_2) là $\frac{x^2}{21316} - \frac{y^2}{68684} = 1$.

Gọi toạ độ của M là $(x; y)$.

$$\text{Vì } M \text{ thuộc cả } (H_1) \text{ và } (H_2) \text{ nên ta có: } \begin{cases} \frac{x^2}{5329} - \frac{y^2}{4671} = 1 \\ \frac{x^2}{21316} - \frac{y^2}{68684} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{341125277}{12500} \\ y^2 = \frac{240617223}{12500} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 165 \\ y \approx 139 \end{cases}$$

(vì theo hình vẽ $x, y > 0$)

$$MB = \sqrt{[165 - (-100)]^2 + (139 - 0)^2} \approx 299 \text{ (km)};$$

$$MC = \sqrt{(165 - 100)^2 + (139 - 0)^2} \approx 153 \text{ (km)}.$$

Khi đó tổng khoảng cách từ tàu đến các trạm B và trạm C bằng: $\approx 299 + 153 \approx 452$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai



» **Câu 41.** Cho elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), đi qua điểm $A(2;0)$ và có một tiêu điểm $F_2(\sqrt{2};0)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu cự của elip (E) bằng $\sqrt{2}$		
(b)	$a = 2$		
(c)	$a^2 - b^2 = 2$		
(d)	Điểm $B(0;\sqrt{2})$ thuộc elip (E)		

» **Lời giải**

(a) Tiêu cự của elip (E) bằng $\sqrt{2}$

Elip (E) có tiêu điểm $F_2(\sqrt{2};0) \Rightarrow c = \sqrt{2} \Rightarrow$ Tiêu cự $= 2\sqrt{2}$

» **Chọn SAI.**

(b) $a = 2$

Có $A \in (E) \Leftrightarrow \frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $a^2 - b^2 = 2$

Từ $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Điểm $B(0;\sqrt{2})$ thuộc elip (E)

Vậy elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Thay tọa độ $B(0;\sqrt{2})$ vào $(E): \frac{0^2}{4} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$, do đó $B(0;\sqrt{2})$ thuộc (E)

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 42.** Cho hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), đi qua điểm $A(\sqrt{3};0)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu cự bằng 2		
(b)	$a = \sqrt{3}$		
(c)	$b^2 = 2$		
(d)	Điểm $B(0;1)$ thuộc hypebol (H)		

» **Lời giải**

(a) Tiêu cự bằng 2

Hypebol (H) có tiêu điểm $F_1(-2;0) \Rightarrow c = 2 \Rightarrow$ Tiêu cự $= 4$

» **Chọn SAI.**



(b) $a = \sqrt{3}$

Có $A \in (H) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $b^2 = 2$

Mà $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{3 + b^2} \Rightarrow b^2 = 1$.

» **Chọn SAI.**

(d) Điểm $B(0;1)$ thuộc hypebol (H)

Vậy hypebol $(H): \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

Thay tọa độ $B(0;1)$ vào $(H): \frac{0^2}{3} - 1^2 = -1 \neq 1$, do đó $B(0;1)$ không thuộc (H)

» **Chọn SAI.**

» **Câu 43.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .		
(b)	Tiêu cự elip (E) bằng $\sqrt{7}$		
(c)	Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{7};0)$, $F_2(2\sqrt{7};0)$		
(d)	Cho M là điểm thuộc (E) thỏa mãn $MF_1 + 2MF_2 = 11$. Khi đó $2MF_1 + MF_2 = 13$.		

» **Lời giải**

(a) Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .

Điểm $A(4;0)$ thuộc elip (E) .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tiêu cự elip (E) bằng $\sqrt{7}$

Ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$. Suy ra $c = \sqrt{7}$.

Elip (E) có tiêu cự $2c = 2\sqrt{7}$

» **Chọn SAI.**

(c) Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{7};0)$, $F_2(2\sqrt{7};0)$

Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7};0)$; $F_2(\sqrt{7};0)$

» **Chọn SAI.**

(d) Cho M là điểm thuộc (E) thỏa mãn $MF_1 + 2MF_2 = 11$. Khi đó $2MF_1 + MF_2 = 13$.

Ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 2 \cdot 4 = 8$.

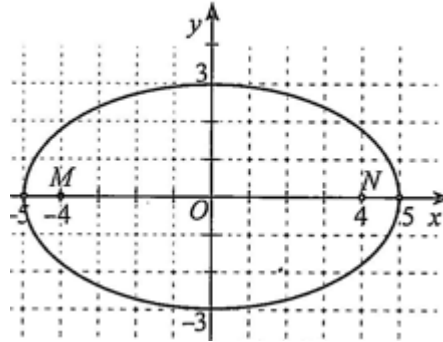
Suy ra $3MF_1 + 3MF_2 = 24$ hay $(2MF_1 + MF_2) + (MF_1 + 2MF_2) = 24$.

Vì $MF_1 + 2MF_2 = 11$ nên $2MF_1 + MF_2 = 24 - 11 = 13$.

» **Chọn ĐÚNG.**



- » **Câu 44.** Trước một tòa nhà, người ta làm một cái hồ bơi có dạng hình elip với độ dài hai bán trục lần lượt là $3m$ và $5m$. Xét hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét) có hai trục tọa độ chứa hai trục của elip, gốc tọa độ O là tâm của elip (hình)



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.		
(b)	Xét các điểm M, N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O . Tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $10m$		
(c)	Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ		
(d)	Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Khi đó vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5}{3}m$		

» **Lời giải**

- (a) Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Phương trình chính tắc của đường elip là: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

- (b) Xét các điểm M, N cùng thuộc trục lớn của elip và đều cách O một khoảng bằng $4m$ về hai phía của O . Tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $10m$

Ta có: $a = 5, b = 3$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, suy ra $c = 4$.

Các tiêu điểm của elip có tọa độ là $(-4; 0)$ và $(4; 0)$.

Vậy M và N chính là các tiêu điểm của elip.

Vì vậy, tổng khoảng cách từ mọi điểm trên đường elip đến M và N luôn bằng $2a = 10m$ không đổi.

» **Chọn ĐÚNG.**

- (c) Một người đứng ở vị trí P cách O một khoảng bằng $6m$. Người đó đứng ở trong hồ
Gọi giao điểm của đường thẳng OP và elip là Q .

Vì độ dài bán trục lớn là $5m$ nên $OQ \leq 5$. Suy ra $OQ < OP = 6m$.

Vậy vị trí P ở ngoài hồ.

» **Chọn SAI.**



(d) Xét vị trí C trên mép hồ cách trục lớn một khoảng bằng $2m$. Khi đó vị trí C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5}{3}m$

$$\text{Giả sử } C(x_0; y_0). \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ |y_0| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{4}{9} = 1 \\ |y_0| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_0| = \frac{5\sqrt{5}}{3} \\ |y_0| = 2 \end{cases}$$

Vậy C cách trục nhỏ một khoảng bằng $\frac{5\sqrt{5}}{3}m$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 45.** Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 12x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	(P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$		
(b)	Một điểm nằm trên (P) có hoành độ $x = 2$. Khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm bằng 4		
(c)	Độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F bằng 12		
(d)	Qua $I(2;0)$ vẽ một đường thẳng thay đổi cắt (P) tại hai điểm A và B . Khi đó tích số khoảng cách từ A và B tới trục Ox bằng 12.		

» **Lời giải**

(a) (P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$.

$$\text{Ta có: } p = 6 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vậy (P) có tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $x = -3$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Một điểm nằm trên (P) có hoành độ $x = 2$. Khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm bằng 4

$$\text{Gọi } M \text{ là điểm trên } (P) \text{ có hoành độ } x = 2 \Rightarrow MF = x_M + \frac{p}{2} = 2 + 3 = 5$$

» **Chọn SAI.**

(c) Độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F bằng 12

Đường thẳng đi qua $F(3;0)$ và vuông góc với trục đối xứng có dạng: $x = 3$ (d).

$$\text{Tọa độ giao điểm của } (P) \text{ và } (d) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (d) \text{ cắt } (P) \text{ tại } M(3;-6), N(3;6) \Rightarrow MN = \sqrt{(3-3)^2 + (6+6)^2} = 12.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Qua $I(2;0)$ vẽ một đường thẳng thay đổi cắt (P) tại hai điểm A và B . Khi đó tích số khoảng cách từ A và B tới trục Ox bằng 12.

Phương trình đường thẳng đi qua $I(2;0)$ có dạng:

$$A(x-2) + B(y-0) = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \Leftrightarrow Ax + By - 2A = 0 \quad (d)$$



Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} Ax + By - 2A = 0 & (1) \\ y^2 = 12x & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{12}$$

Thế vào (1) ta được $A \frac{y^2}{12} + By - 2A = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + 12By - 24A = 0$

Do $\Delta' = 36B^2 + 24A^2 > 0, \forall A^2 + B^2 \neq 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi y_A và y_B là nghiệm của phương trình trên nên $d(A; Ox) \cdot d(B; Ox) = |y_A \cdot y_B| = 24$ (không đổi).

» **Chọn SAI.**

» **Câu 46.** Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 8x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tiêu điểm $F(2;0)$		
(b)	Có 2 điểm M trên (P) , cách F một khoảng là 3		
(c)	Điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$, có hoành độ bằng 6		
(d)	Tồn tại một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất, khi đó AB ngắn nhất bằng $\frac{1}{5}$		

» **Lời giải**

(a) Tiêu điểm $F(2;0)$

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (P)$ suy ra $y_M^2 = 8x_M$.

Từ phương trình (P) có $p = 4$ nên $F(2;0)$.

Ta có $FM = x_M + \frac{p}{2}$ suy ra $x_M = 1$, thay vào $y_M^2 = 8x_M \Rightarrow y_M = \pm 2\sqrt{2}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Có 2 điểm M trên (P) , cách F một khoảng là 3.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(1; 2\sqrt{2}); M_2(1; -2\sqrt{2})$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$, có hoành độ bằng 6

Ta có $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$.

$$S_{\Delta OMF} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OF \cdot d(M; OF) = 8 \Leftrightarrow a = 8.$$

Vậy điểm cần tìm là $M(8;8)$.

» **Chọn SAI.**

(d) Tồn tại một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất, khi đó AB ngắn nhất bằng $\frac{1}{5}$



Với mọi điểm $A \in (P); B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$.

$$A \in (P) \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8}; a\right) \text{ với } a \geq 0,$$

$$\text{Khi đó } d(A; \Delta) = \frac{\left|4 \cdot \frac{a^2}{8} - 3 \cdot a + 5\right|}{5} = \frac{(a-3)^2 + 1}{10} \geq \frac{1}{10}.$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ .

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u} = (3; 4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x - \frac{9}{8}\right) + 4(y - 3) = 0$ hay $24x + 32y - 123 = 0$.

$$\text{Do đó tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 24x + 32y - 123 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{209}{200} \\ y = \frac{153}{50} \end{cases}.$$

Vậy $A\left(\frac{9}{8}; 3\right), B\left(\frac{209}{200}; \frac{153}{50}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 47.** Quỹ đạo của sao hỏa là elip có bán trục lớn 227,9 triệu km, bán trục nhỏ bằng 226,9 triệu km và quay quanh mặt trời một vòng hết 687 ngày. Các số liệu trong các khẳng định dưới đây được làm tròn tới 5 chữ số thập phân. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tâm sai của elip là 0,09358.		
(b)	Tiêu cự của elip bằng 21,32604.		
(c)	Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 249,22604.		
(d)	Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 206,57396.		

» **Lời giải**

$$\text{Ta có } a = 227,9; \quad b = 226,9 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21,32604 \Rightarrow e = \frac{c}{a} \approx 0,09358$$

(a) Tâm sai của elip là 0,09358.

$$\text{Tâm sai của elip là } e = \frac{c}{a} \approx 0,09358.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tiêu cự của elip bằng 21,32604.

$$\text{Tiêu cự của elip bằng } 2c \approx 2 \cdot 21,32604 = 42,65208.$$

» **Chọn SAI.**

(c) Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 249,22604.

$$\text{Khoảng cách xa nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng là } a + c \approx 249,22604.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng 206,57396.

$$\text{Khoảng cách gần nhất giữa sao hỏa và mặt trời bằng } a - c \approx 206,57396.$$

» **Chọn ĐÚNG.**



» **Câu 48.** Gọi phương trình chính tắc của parabol có dạng $(P): y^2 = 4x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm $A(1; y_A)$ thuộc (P) thì $y_A = 2$ hoặc $y_A = -2$.		
(b)	Điểm M thuộc (P) và $MF = 3$ thì hoành độ của M là $\frac{3}{4}$.		
(c)	Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B . Nếu $A(1; -2)$ thì tọa độ của $B(1; 2)$.		
(d)	Một điểm A thuộc (P) . Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 4.		

» **Lời giải**

(a) Điểm $A(1; y_A)$ thuộc (P) thì $y_A = 2$ hoặc $y_A = -2$.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 4x$

$$A(1; y_A) \Rightarrow y_A = 2 \text{ hoặc } y_A = -2.$$

» **Chọn ĐÚNG**

(b) Điểm M thuộc (P) và $MF = 3$ thì hoành độ của M là $\frac{3}{4}$.

$$M \in (P): y^2 = 4x \Rightarrow M(m^2; 2m), \text{ tiêu điểm } F(1; 0)$$

$$\text{Ta có: } MF^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = 9 \Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -4 \end{cases}$$

Vậy hoành độ điểm M là 2.

» **Chọn SAI.**

(c) Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B . Nếu $A(1; -2)$ thì tọa độ của $B(1; 2)$.

(P) có tiêu điểm $F(1; 0)$

Đường thẳng $AF: x = 1$

Đường thẳng AF cắt parabol tại $B(1; 2)$.

» **Chọn ĐÚNG**

(d) Một điểm A thuộc (P) . Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng 4.

$$\text{Ta có: } A \in (P) \Rightarrow A(m^2; 2m), \text{ đường chuẩn } \Delta: x = -1$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến đường chuẩn } d(A, \Delta) = |m^2 + 1| = m^2 + 1 = 5 \Rightarrow m^2 = 4$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ } A \text{ đến trục hoành bằng } |2m| = 4.$$

» **Chọn ĐÚNG**

» **Câu 49.** Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112 km.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol, tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm của parabol, đơn vị trên các trục là kilômét.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ tiêu điểm là $F(224;0)$.		
(b)	Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -224$.		
(c)	Phương trình chính tắc của parabol (P) là $y = 448x$.		
(d)	Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) là 224km .		

✎ **Lời giải**

(a) Tọa độ tiêu điểm là $F(224;0)$

Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Gọi F là tiêu điểm của (P) , $(x; y)$ là tọa độ của sao chổi A .

Khi đó khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là $AF = x + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2}$ (vì $x > 0$)

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là $\frac{p}{2}$ (km)

$\Rightarrow \frac{p}{2} = 112 \Rightarrow p = 224$.

Khi đó: tọa độ tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ hay $F(112; 0)$

» **Chọn SAI.**

(b) Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -224$.

Phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -\frac{p}{2} = -112$

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình chính tắc của parabol (P) là $y = 448x$.

Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 448x$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) là 224km .

Khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) thì sao chổi có hoành độ là $x = \frac{p}{2}$

Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi đó là:

$AF = x + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p = 224$ (km)

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn



» **Câu 50.** Cho parabol (P) có tiêu điểm $F(1;0)$ và đường thẳng $d: x+6m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 10**

Gọi phương trình parabol (P) có dạng: $y^2 = 2px (p > 0)$.

$$\text{Parabol } (P) \text{ có tiêu điểm } F(1;0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}.$$

$$\text{Ta có phương trình đường thẳng } d: x+6m=0 \Rightarrow x = -6m.$$

$$\text{Phương trình tung độ giao điểm của } (P) \text{ và } d \text{ là: } \frac{y^2}{4} = -6m \Leftrightarrow y^2 = -24m. (*)$$

Để (P) và d có hai giao điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt hay $-24m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó với $m \in [-10;10]$ có 10 giá trị nguyên thỏa mãn

» **Câu 51.** Cho parabol $(P): y^2 = 2x$. Có bao nhiêu điểm thuộc (P) có hoành độ dương sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm của (P) bằng 4.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

$$\text{Parabol } (P) \text{ có đường chuẩn là } \Delta: x + \frac{1}{2} = 0 \text{ và tiêu điểm } F\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Có } M \in (P) \text{ nên } y_0^2 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}y_0^2 \Rightarrow x_0 \geq 0.$$

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến tiêu điểm } F \text{ bằng 4 nên } MF = d(M; \Delta) = \frac{\left|x_0 + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4.$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{7}{2} \text{ hoặc } x_0 = \frac{-9}{2}.$$

$$\text{Mà } x_0 \geq 0 \text{ nên } x_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow y_0^2 = 7 \Rightarrow y_0 = \pm\sqrt{7}.$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{7}{2}; \sqrt{7}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{7}{2}; -\sqrt{7}\right).$$

» **Câu 52.** Tìm tọa độ điểm M (có hoành độ dương) thuộc elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60° .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Từ phương trình chính tắc của elip (E) ta có $a=5, b=3, c=4$.

Elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$ và $F_1F_2 = 2c = 8$.



Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Có } MF_1^2 - MF_2^2 = (x_0 + 4)^2 + y_0^2 - [(x_0 - 4)^2 + y_0^2] = 16x_0.$$

Lại có, $M \in (E)$ nên $MF_1 + MF_2 = 2a = 10$. (1)

$$\text{Có } MF_1 - MF_2 = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} = \frac{16x_0}{10} = \frac{8}{5}x_0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x_0$; $MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x_0$.

Áp dụng định lí côsin cho $\triangle MF_1F_2$, ta được:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 64 = \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 - 2\left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)\left(5 - \frac{4}{5}x_0\right) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 64 = 25 + \frac{48}{25}x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{13}}{4} \text{ hoặc } x_0 = \frac{-5\sqrt{13}}{4}.$$

Từ đó tính được $y_0^2 = \frac{27}{16} \Rightarrow y_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ hoặc $y_0 = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$.

Khi đó có bốn điểm $M: \left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

Vậy chỉ có 2 điểm $M: \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ thỏa mãn yêu cầu

» **Câu 53.** Có bao nhiêu điểm N có tung độ lớn hơn 1 thuộc hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho N nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Từ phương trình chính tắc của hypebol (H) ta có $a = 4, b = 3, c = 5$.

Hypebol (H) có tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 10$.

Gọi $N(x_0; y_0)$ là điểm cần tìm.

Ta có $N \in (H)$ nên $\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1$. (1)

Theo đề bài: $\triangle NF_1F_2$ vuông tại N , có O là trung điểm của F_1F_2 (O là gốc tọa độ)

$$\text{Nên } ON = \frac{F_1F_2}{2} = c = 5 \Rightarrow ON^2 = 25 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 25 \Rightarrow y_0^2 = 25 - x_0^2 \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1): } \frac{x_0^2}{16} - \frac{25 - x_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x_0^2 - 400 + 16x_0^2 = 144 \Leftrightarrow 25x_0^2 = 544 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{544}{25}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{4\sqrt{34}}{5} \text{ hoặc } x_0 = \frac{-4\sqrt{34}}{5}.$$

Từ đó tính được $y_0^2 = \frac{81}{25} \Rightarrow y_0 = \frac{9}{5}$ hoặc $y_0 = \frac{-9}{5}$.



Khi có bốn điểm N là: $\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), \left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Vậy chỉ có 2 điểm $N: \left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu

» **Câu 54.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M chuyển động trên đường elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của OM .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 9**

Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc đường elip.

Ta có: $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$.

Vì $x_0^2 \geq 0, y_0^2 \geq 0$ nên $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{25} \leq \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} \leq \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{16} \Rightarrow \frac{x_0^2 + y_0^2}{25} \leq 1 \leq \frac{x_0^2 + y_0^2}{16}$

$\Rightarrow 16 \leq x_0^2 + y_0^2 \leq 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq 5 \Rightarrow 4 \leq OM \leq 5$

M thuộc (E) và $OM = 4$ khi M có tọa độ $(0; -4)$ hoặc $(0; 4)$.

M thuộc (E) và $OM = 5$ khi M có tọa độ $(-5; 0)$ hoặc $(5; 0)$.

Khi đó OM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 và đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

Vậy tổng giá trị nhỏ nhất giá trị lớn nhất bằng 9

» **Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M chuyển động trên đường elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của DM , trong đó $D(6; 0)$.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 12**

Ta có: $\begin{cases} DO - OM \leq DM \leq DO + OM \\ OM \leq 5, DO = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 - 5 \leq DM \leq 6 + 5 \Rightarrow 1 \leq DM \leq 11$

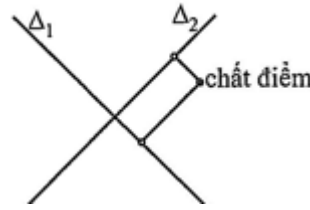
$DM = 1$ khi M có tọa độ $(5; 0)$,

$DM = 11$ khi M có tọa độ $(-5; 0)$.

Khi đó DM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 11.

Vậy tổng giá trị nhỏ nhất giá trị lớn nhất bằng 12

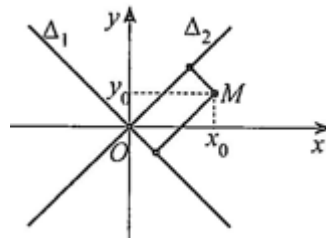
» **Câu 56.** Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau. Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4. Biết rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol có dạng $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ ($a; b \in \mathbb{N}^*$). Tính $S = a + b$



» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 16**

Xét hệ trục tọa độ Oxy như Hình, trong đó các trục Ox, Oy lần lượt là các đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 . Phương trình hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\Delta_1: x + y = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$.



Giả sử chất điểm ở vị trí $M(x_0; y_0)$ và chỉ chuyển động trong một góc vuông tương ứng với miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$ (điểm có tọa độ $(1; 0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình $x + y > 0$ và $x - y > 0$).

Khoảng cách từ M đến hai đường thẳng $\Delta_1: x + y = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$ lần lượt là:

$$d(M, \Delta_1) = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}};$$

$$d(M, \Delta_2) = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } d(M, \Delta_1) \cdot d(M, \Delta_2) = \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}} = \frac{x_0^2 - y_0^2}{2}.$$

$$\text{Do đó } d(M, \Delta_1) \cdot d(M, \Delta_2) = 4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{8} - \frac{y_0^2}{8} = 1.$$

Vậy chất điểm M chuyển động trên một phần của đường hypebol $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = 8 \\ b = 8 \end{cases} \rightarrow S = a + b = 16$$

» **Câu 57.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Biết rằng M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông. Khi đó có bao nhiêu điểm M có tổng tọa độ lớn hơn 3?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; b^2 = 1 \Rightarrow b = 1; c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow F_1F_2 = 4\sqrt{2}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$ thì $MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x = 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x$.



Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ nên $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt{2})^2 = \left(3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2 + \left(3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2 \Leftrightarrow 32 = 18 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{63}{8} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{14}}{4}$$

Thay vào (E), ta được: $y^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn là $\left(\pm \frac{3\sqrt{14}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(\pm \frac{3\sqrt{14}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Khi đó

$$\frac{3\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 3,15; \frac{3\sqrt{14}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 2,45; -\frac{3\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \approx -2,45; -\frac{3\sqrt{14}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx -3,15$$

Vậy có 1 điểm $\left(\frac{3\sqrt{14}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ thỏa mãn

» **Câu 58.** Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 8m, rộng 20m. Khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 5m lên đến nóc nhà vòm là bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm



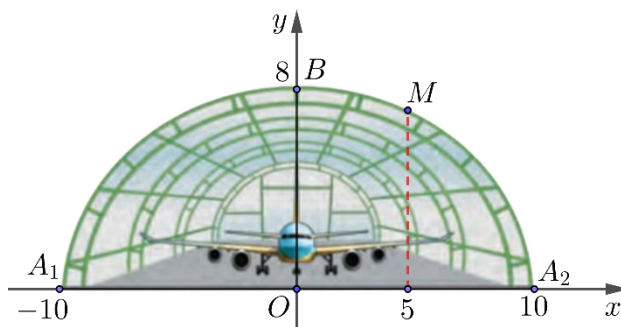
» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 6,29**

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, gọi phương trình chính tắc elip là

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0, y \geq 0).$$

Ta có : $2a = 20 \Rightarrow a = 10, b = 8$.



Vậy phương trình elip mô tả nhà vòm là $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad (y \geq 0)$.

Gọi M là điểm thuộc (E) có hoành độ bằng 5 (hoặc -5), chiều cao cần tìm chính là tung độ của điểm M.

Thay hoành độ M vào phương trình (E): $\frac{(\pm 5)^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$



$$\Rightarrow y^2 = 48 \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \approx 6,92m.$$

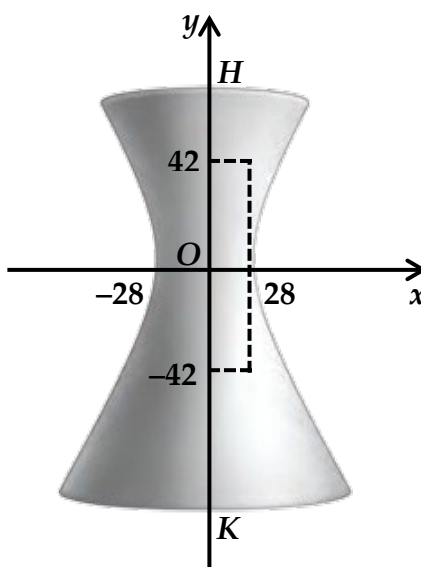
» **Câu 59.** Một cái tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính tổng bán kính nóc và bán kính đáy của tháp theo đơn vị mét. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 115**

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có:
$$\begin{cases} HK = 150 \\ OH = \frac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OH + OK = 150 \\ OH = \frac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow OH = 60m, OK = 90m.$$

Đường thẳng qua H , vuông góc Oy là $\Delta_1: y = 60$.

Δ_1 cắt hypebol tại điểm có hoành độ dương và thỏa mãn $\frac{x^2}{28^2} - \frac{60^2}{42^2} = 1 \Rightarrow x = 4\sqrt{149}$.

Đường thẳng qua K , vuông góc với Oy là $\Delta_2: y = -90$.

Δ_2 cắt hypebol tại điểm có hoành độ dương và thỏa mãn $\frac{x^2}{28^2} - \frac{90^2}{42^2} = 1$

$$\Rightarrow x = 4\sqrt{274}$$

Vậy bán kính nóc của tháp xấp xỉ $48,826m$, bán kính đáy của tháp xấp xỉ $66,212m$.

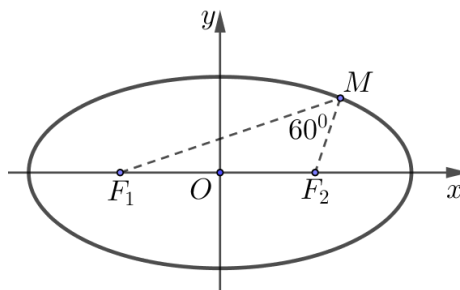
Khi đó tổng bán kính nóc và bán kính đáy của tháp bằng $4\sqrt{149} + 4\sqrt{274} \approx 115m$



» **Câu 60.** Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 . Có bao nhiêu điểm M có tung độ dương thuộc (E) sao cho góc $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**



Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2; b^2 = 1 \Rightarrow b = 1; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3} \Rightarrow F_1F_2 = 2\sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$ thì $MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 4 + 2\sqrt{3}x + \frac{3}{4}x^2 + 4 - 2\sqrt{3}x + \frac{3}{4}x^2 - \left(4 - \frac{3}{4}x^2\right) \Leftrightarrow 8 = \frac{9}{4}x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Thay vào (E) , ta được: $\frac{32}{9 \cdot 4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{3}$.

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn là: $\left(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.