CHINH PHỤC 8,9,10 ĐIỂM THI ĐẠI HỌC

TOÀN TẬP HÀM SỐ

LỚP TOÁN THẦY HUY – NGỌC HỒI – THANH TRÌ – HN – 0969141404

Tham gia Group 8+ Free:https://www.facebook.com/groups/1632593617065392/

Page live: https://www.facebook.com/chinhphucdiemcao/

TOÀN TẬP HÀM SỐ - MỤC LỤC

PHẦN 1 - SỰ ĐƠN ĐIỆU VÀ ỨNG DỤNG ..... *Trang 3*

I Lý thuyết ..... *Trang 3*

II Các dạng bài tập ..... *Trang 3*

A. Bài Toán không chứa tham số ..... *Trang 3*

B. Bài toán chứa tham số ..... *Trang 13*

Dạng 1 : Đơn điệu trên $(-\infty;+\infty)$ ..... *Trang 13*

Dạng 2: Đơn điệu trên từng khoảng xác định ..... *Trang 16*

Dạng 3: Đơn điệu trên miền K ..... *Trang 18*

Dạng 4: Đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng l ..... *Trang 25*

C. Đơn điệu của hàm hợp, hàm ẩn ..... *Trang 27*

D. Ứng dụng đơn điệu vào giải pt, bất phương trình (hàm đặc trưng) ..... *Trang 33*

III. Bài tập vận dụng và đáp án ..... *Trang 38*

PHẦN 2 – CỰC TRỊ HÀM SỐ ..... *Trang 57*

I – Tóm tắt lý thuyết ..... *Trang 57*

II – Các dạng toán ..... *Trang 58*

BT1 – Tìm cực trị của một hàm cho trước ..... *Trang 58*

BT 2 – Tìm điều kiện để hàm số có cực trị ..... *Trang 62*

D1 - Tìm m để hàm số có không có cực trị ..... *Trang 62*

D2 – Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_0 ..... *Trang 62*

D3 – Tìm m để hàm số có n điểm cực trị ..... *Trang 62*

BT3 – Cực trị hàm số bậc 3 ..... *Trang 65*

D1 -Tìm điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu ..... *Trang 66*

D2 - Tìm điều kiện để cực trị nằm cùng phía, khác phía so với 1 đường ..... *Trang 68*

D3 - Tìm điều kiện để cực trị thỏa mãn điều kiện về hoành độ ..... *Trang 71*

D4 - Điều kiện liên quan đến góc, khoảng cách ..... Trang 75

D5 - Điều kiện liên quan đến tính chất hình học ..... Trang 78

D6 - Điều kiện liên quan diện tích, tâm đường tròn nội, ngoại tiếp ..... Trang 81

D7 - Điều kiện liên quan tiếp tuyến ..... Trang 82

D8 - Điều kiện liên quan đến Max – min ..... Trang 83

D9 - Điều kiện liên quan đến đối xứng ..... Trang 86

BT4 – Cực trị hàm trùng phương ..... Trang 88

a.Lý thuyết cần nhớ ..... Trang 88

Công Thức Tính nhanh ..... Trang 89

b.Ví dụ minh họa ..... Trang 90

BT5 - Cực Trị hàm hợp ..... Trang 95

BT6 – Cực trị hàm trị tuyệt đối ..... Trang 100

BÀI TẬP VẬN DỤNG ..... Trang 138

PHẦN 3 – MAX MIN HÀM SỐ ..... Trang 149

I – Kiến thức cần nhớ ..... Trang 149

II – Các dạng toán ..... Trang 150

Dạng 1: Max min trên miền $D=[a;b]$ *..... Trang 150*

Dạng 2: Miền D là một khoảng, nửa khoảng ..... Trang 153

Dạng 3: Max min hàm số lượng giác ..... Trang 155

Dạng 4: Biện luận max min theo tham số ..... Trang 158

Dạng 5: Max min hàm trị tuyệt đối ..... Trang 167

Dạng 6 : Ứng dụng max min vào giải pt – bpt ..... Trang 211

III – Bài tập vận dụng ..... Trang 214

PHẦN 4 – TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ..... Trang 225

I – Định nghĩa ..... Trang 225

II – Các ví dụ ..... Trang 229

Bài toán tiếp tuyến cắt 2 tiệm cận ..... Trang 237

III - Tiệm cận vd – vdc ..... Trang 244

Loại 1: Tìm tiệm cận qua đồ thị ..... Trang 244

Loại 2: Tìm tiệm cận qua bảng biến thiên ..... Trang 249

Loại 3: Tìm tiệm cận qua biểu thức ..... Trang 252

IV – Bài tập tự luyện ..... Trang 256

PHẦN 5 – TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ..... *Trang 262*

I – Tóm tắt lý thuyết ..... *Trang 262*

II – Các dạng bài tập ..... *Trang 263*

Loại 1: Tiếp tuyến tại điểm ..... *Trang 263*

Loại 2: Tiếp tuyến qua điểm ..... *Trang 267*

Loại 3: Tiếp tuyến biết hệ số góc ..... *Trang 271*

Loại 4: Một số bài toán khác ..... *Trang 273*

Loại 5: Tiếp tuyến có hệ số góc max min ..... *Trang 277*

Loại 6: Tìm điểm M trên d kẻ được n tiếp tuyến tuyến ..... *Trang 278*

Loại 7: Tìm điểm M kẻ được n tiếp tuyến thỏa mãn tính chất ..... *Trang 280*

Loại 8: Tìm điều kiện m để hai đường cong tiếp xúc ..... *Trang 283*

Loại 9: Tìm m liên quan tới phương trình tiếp tuyến ..... *Trang 284*

Loại 10: Tiếp tuyến đths bậc 3 cắt đồ thị tại điểm thứ hai ..... *Trang 286*

Loại 11: Tiếp tuyến hàm ẩn ..... *Trang 287*

III – Bài tập vận dụng ..... *Trang 289*

PHẦN 6 – SỰ TƯƠNG GIAO ..... *Trang 297*

I – Tóm tắt lý thuyết ..... *Trang 297*

II – Các dạng toán thường gặp ..... *Trang 297*

A: Bài toán không chứa tham số ..... *Trang 297*

B. Bài toán chứa tham số ..... *Trang 301*

Loại 1: Tương giao hàm bậc 3 và đường thẳng ..... *Trang 301*

Bài toán tổng quát 1 ..... *Trang 301*

a. Phương pháp 1 ..... *Trang 301*
b. Ví dụ minh họa ..... *Trang 301*
c. Phương pháp 2 ..... *Trang 302*
d. Ví dụ minh họa ..... *Trang 304*
e. Phương pháp 3 ..... *Trang 305*
f. Ví dụ minh họa ..... *Trang 305*

Bài toán tổng quát 2 ..... *Trang 307*

a. Phương pháp ..... *Trang 307*
b. Ví dụ minh họa ..... *Trang 307*

Bài toán tổng quát 3 ..... *Trang 312*

a. Phương pháp ..... *Trang 312*
b. Ví dụ minh họa ..... *Trang 313*

Bài toán tổng quát 4 ..... *Trang 313*

a. Phương pháp ..... Trang 313
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 314
Bài toán tổng quát 5 ..... Trang 315
a. Phương pháp ..... Trang 315
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 315
Loại 2 – Tương giao của hàm phân thức bậc 1/ bậc 1 ..... Trang 315
Bài toán tổng quát ..... Trang 315
a. Phương pháp ..... Trang 315
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 316
Loại 3 – Tương giao của hàm trùng phương ..... Trang 322
Bài toán tổng quát 1 ..... Trang 322
a. Phương pháp 1 ..... Trang 322
b. Phương pháp 2 (đồ thị) ..... Trang 323
c. Ví dụ minh họa ..... Trang 323
Bài toán tổng quát 2 ..... Trang 324
a. Phương pháp ..... Trang 324
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 325
Bài toán tổng quát 3 ..... Trang 327
a. Phương pháp ..... Trang 327
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 328
Bài toán tổng quát 4 ..... Trang 330
a. Phương pháp ..... Trang 330
b. Ví dụ minh họa ..... Trang 330
C – Tương giao hàm hợp, hàm ẩn ..... Trang 331
III – Bài tập vận dụng ..... Trang 343
a. Bài toán không chứa tham số ..... Trang 343
b. Bài toán chứa tham số ..... Trang 344
c. Bài toán hàm ẩn, hàm hợp vd vdc ..... Trang 353
d. Đáp án ..... Trang 384
PHẦN 7 – TÌM ĐIỂM ..... Trang 385
I – Tóm tắt lý thuyết ..... Trang 385
II – Các dạng bài tập ..... Trang 385
Loại 1. Tìm điểm cố định ..... Trang 385
Loại 2: Tìm điểm có tọa độ là những số nguyên ..... Trang 386
Loại 3: Tìm điểm liên quan đến đối xứng ..... Trang 387
Loại 4: Tìm điểm liên quan đến khoảng cách ..... Trang 389
Loại 5: Tìm điểm liên quan đến max – min ..... Trang 392

Loại 6: Tìm điểm liên quan đến tiếp tuyến ..... *Trang 396*

III – Bài tập vận dụng ..... *Trang 399*

PHẦN 8 – NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ - BẢNG BIẾN THIÊN ..... *Trang 403*

A – Nhận dạng đồ thị ..... *Trang 403*

Loại 1: Hàm số bậc 3 ..... *Trang 403*

Loại 2: Hàm trùng phương ..... *Trang 407*

Loại 3: Hàm bậc 1/bậc 1 ..... *Trang 410*

Loại 4: Hàm mũ – Loga ..... *Trang 413*

Loại 5: Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối ..... *Trang 419*

Loại 6: Hàm $f'(x)$ ..... *Trang 429*

B- Nhận dạng bảng biến thiên ..... *Trang 435*

C – Bài tập rèn luyện ..... *Trang 438*

PHẦN 9 – BÀI TẬP TỔNG HỢP VD VDC – 9+ ..... *Trang 468*

Chương 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}$ là một khoảng, một nửa khoảng hay một đoạn)

a. Hàm số $y=f(x)$ gọi là *đồng biến* (hay *tăng*) trên $\boldsymbol{K}$ nếu

$$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

b. Hàm số $y=f(x)$ gọi là *nghịch biến* (hay *giảm*) trên $\boldsymbol{K}$ nếu

$$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

2. Điều kiện cần và đủ hàm số đơn điệu:

Định lý: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\boldsymbol{I}$ thì:

+ Nếu $f'(x)>0,\forall x\in I$ thì hàm số tăng trên $\boldsymbol{I}$.

+ Nếu $f'(x)<0,\forall x\in I$ thì hàm số giảm trên $\boldsymbol{I}$.

+ Nếu $f'(x)=0,\forall x\in I$ thì hàm số không đổi trên $\boldsymbol{I}$, tức là $f(x)=C,\forall x\in I$

Ta có mở rộng của định lí như sau: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I

+ Nếu $f'(x)\geq 0,\forall x\in I$ và $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm trên khoảng I, thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng I.

+ Nếu $f'(x)\leq 0,\forall x\in I$ và $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm trên khoảng I, thì $f(x)$ nghịch biến trên khoảng I.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

A. Bài toán đơn điệu không chứa tham số

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

a. Phương pháp:

- Tìm tập xác định
- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định
- Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên
- Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số dựa vào bảng biến thiên

Một số chú ý khi giải toán:

Chú ý 1: Về tính đơn điệu của một số hàm

✧ Đối với hàm dạng: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì hàm số luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên từng khoảng xác định, nghĩa là luôn tìm được $y'>0$ (hoặc $y'<0$) trên trên từng khoảng xác định.

✧ Đối với hàm dạng: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ luôn có ít nhất hai khoảng đơn điệu.

✧ Đối với hàm dạng: $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.

✧ Cả ba hàm số trên **không thể** luôn **đơn điệu trên** $\mathbb{R}$.

Chú ý 2: Bảng xét dấu một số hàm thường gặp

✧ Nhị thức bậc nhất: $y=f(x)=ax+b,(a\neq 0)$

✧

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	Trái dấu với a		0	Cùng dấu với a	

✧ Tam thức bậc hai: $y=f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$

- Nếu $\Delta<0$ thì tam thức vô nghiệm, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	

- Nếu $\Delta=0$ thì tam thức có nghiệm kép $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a

- Nếu $\Delta>0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a		

✧ Đối với tam thức từ bậc 3 trở lên ta xét dấu theo nguyên tắc:

- Thay 1 điểm $x_o\in\mathbb{Z}$ gần x_n bên ô phải của bảng xét dấu vào $f(x)$ và xét theo nguyên tắc: Dấu của $f(x)$ ***đổi dấu khi đi qua nghiệm đơn, bội lẻ*** và ***không đổi dấu khi qua nghiệm bội chẵn.***.
- Nghiệm bội chẵn là có dạng $(x-a)^n=0$ (với $n=2,4,6,...$). Nghiệm đơn $x-b=0$, bội lẻ có dạng $(x-b)^n=0$ (với $n=1,3,5,...$).

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-2$

A. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ **B.** $(1;3)$

C. $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$ **D.** $(-3;-1)$

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$

- Đạo hàm $y'=x^2-4x+3; y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Chọn đáp án B

Nhận xét: Cách giải trên là giải theo tự luận, còn giải theo trắc nghiệm ta làm như sau:

Tính nhanh $y'=x^2-4x+3=0\overset{Mod\,5+3}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$. Sau đó lập trục xét dấu nhanh để suy ra tính đơn điệu

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi Thanh Trì - HN - 0969141404



Ví dụ 2. ***(Trường THPT Nguyễn Huệ lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$

- Đạo hàm $y'=-x^3+4x=-x\left(x^2-4\right);y'=0\Leftrightarrow -x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$

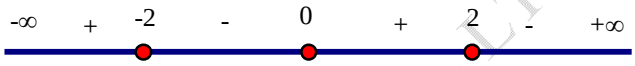
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(0;2)$ và $(-\infty;-2)$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Cách giải trên là giải theo tự luận, còn giải theo trắc nghiệm ta làm như sau:

Tính nhanh $y'=-x^3+4x=0\overset{Mod\,5+4}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$. Sau đó lập trục xét dấu nhanh để suy ra tính đơn điệu



Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề đúng là:

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- Đạo hàm $y'=\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y		↗	‖	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Chọn đáp án A

Gv. Lương Văn Huy - ĐT: 0969141404 - 0909 127 555 - TĐH Thanh Trì - HN

Nhận xét 1: Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định, từng khoảng xác định ở đây là $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$. Do đó để giải nhanh theo kiểu loại trừ như sau:

- Đáp án D sai vì hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Đáp án C sai vì hàm số chỉ đồng biến hoặc nghịch biến chứ không có vừa đồng biến và nghịch biến
- Đáp án B sai vì $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Nhận xét 2: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta chỉ cần nhớ như sau: Với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì dấu của y' phụ thuộc vào $ad-bc$ và hàm số chỉ đơn điệu trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$ nên ta chỉ cần tính $ad-bc$ và kết luận ngay được tính đơn điệu.

Nhận xét 3: Với hàm số này người ta có thể bẫy ở các đáp án sau

Hàm số đơn điệu trên tập xác định; hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; hàm số đơn điệu trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$. Các đáp án này đều sai

Ví dụ 4. ***(Sở GD và ĐT Phú Thọ năm 2017)*** Hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

- Bảng biến thiên

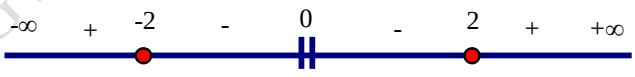
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. Chọn đáp án D

Nhận xét:

- Cách giải trên là giải theo tự luận, còn giải theo trắc nghiệm ta làm như sau

Tính nhanh $y'=1-\dfrac{4}{x}=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-4=0\overset{Mod\,5+3}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$. Sau đó lập trục xét dấu nhanh để suy ra tính đơn điệu "Dấu song song thể hiện hàm số không xác định tại 0"



- Khi sử dụng trục cần chú ý, hàm số không xác định tại $x=0$, do đó hàm số sẽ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$ chứ không phải là nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. Mệnh đề đúng là:

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$ và $(1;+\infty)$.

Gv. Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;5)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

- Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}, \forall x\in D$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$.

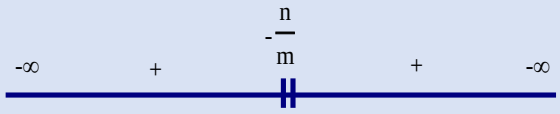
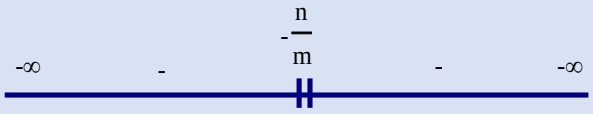
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↗		↘	

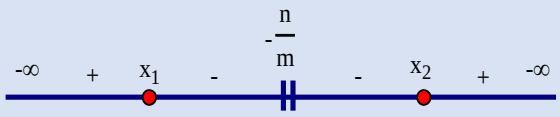
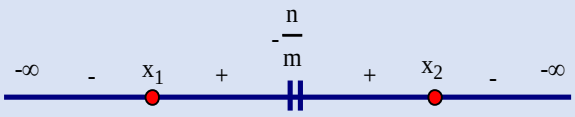
Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(-5;-2)$ và $(-2;1)$. Chọn đáp án B

Nhận xét: Với hàm $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$. Khi tính đạo hàm có dạng $y'=\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(mx+n)^2}$. Dấu y' phụ thuộc vào $Ax^2+Bx+C=0$, và thường xảy ra hai trường hợp hoặc *vô nghiệm* hoặc có *hai nghiệm phân biệt*, do đó khi làm trắc nghiệm ta chỉ cần tính nhanh ra $Ax^2+Bx+C=0$ theo công thức tính nhanh và lập trục xét dấu

TH1. $Ax^2+Bx+C=0$ vô nghiệm

$A>0$	$A<0$
	
Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{n}{m}\right)$ và $\left(-\dfrac{n}{m};+\infty\right)$	Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{n}{m}\right)$ và $\left(-\dfrac{n}{m};+\infty\right)$

TH2: $Ax^2+Bx+C=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$A>0$	$A<0$
	
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$ Hàm số nghịch biến $\left(x_1;-\dfrac{n}{m}\right)$ và $\left(-\dfrac{n}{m};x_2\right)$	Hàm số đồng biến trên $\left(x_1;-\dfrac{n}{m}\right)$ và $\left(-\dfrac{n}{m};x_2\right)$ Hàm số nghịch biến $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$

Ví dụ 6. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)***

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. Hàm số nghịch biến $(-2;0)$ và $(0;2)$. Chọn đáp án C

Ví dụ 7. ***(Trường THPT Phan Đình Phùng lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ và $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.**B.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Giải.

- Tập xác định $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}-\dfrac{(2x-3)x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{3x-2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. Hàm số không có đạo hàm tại $x=\pm1$

Cho $y'=0\Leftrightarrow 3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{2}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y		$\searrow$			$\min$			$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$. Chọn đáp án D

Ví dụ 8. Hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Giải.

- Tập xác định $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

- Đạo hàm $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $\forall x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0;x=2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y		$\searrow$			$\min$			$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(2;+\infty)$

Ví dụ 9. Hàm số $y=2\sin x+\cos 2x,\ x\in[0;\pi]$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$.

Giải.

- Hàm số xác định trên $[0;\pi]$.

- Đạo hàm $y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-4\cos x.\sin x=2\cos x(1-2\sin x),\ x\in[0;\pi]$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in[0;\pi]\\ \cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$+\infty$
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖				
y	‖	↗		↘		↗		↘	‖				

Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$. Chọn đáp án A

Ví dụ 10. Hàm số $y=\left|x^2-2x-3\right|$ nghịch biến biến biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Giải.

- Ta có $y=\left|x^2-2x-3\right|=\left\{\begin{array}{ll}x^2-2x-3 & khi\ \ x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)\\ -x^2+2x+3 & khi\ \ x\in(-1;3)\end{array}\right.$.

Tìm $y'=\left\{\begin{array}{ll}2x-2 & khi\ \ x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)\\ -2x+2 & khi\ \ x\in(-1;3)\end{array}\right.$. Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$

Trên khoảng $(-1;3)$: $y'=0\Leftrightarrow x=1$. Trên khoảng $(-\infty;-1)$: $y'<0$. Trên khoảng $(3;+\infty)$: $y'>0$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y		↘	‖	↗		↘	‖	↗	

Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$. Hàm số đồng biến trong các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. Chọn đáp án D

Nhận xét:

- Bảng biến thiên trên ở dạng thu gọn nên có phần khó hiểu, để hiểu rõ hơn về dấu của y' ta quan sát bảng phụ sau:

Xét dấu từng hàm số một và căn cứ vào phần ***không bị gạch*** của hàm số đó để lấy dấu cho y'

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Ngọc Hồi Thanh Trì - HN - 0969141404

y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$

- Tại $x=-1$ và $x=3$ hàm số không có đạo hàm vì đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải tại các điểm đó không bằng nhau.

Ví dụ 11. ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{mx-1-m^2}{x+1}$, (m là tham số). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Giải.

- Hàm số tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2+m+1}{(x+1)^2}>0,\forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Chọn đáp án A

Nhận xét: Với những bài toán chứa tham số thì ta cho m bằng một số bất kì và khảo sát tính đơn điệu thì kết quả vẫn không thay đổi, giả sử cho $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x-2}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$

Ví dụ 12. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

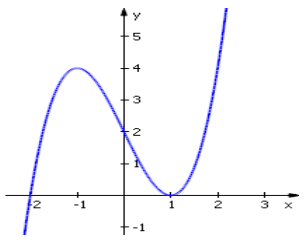
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Giải.

Vì $f'(x)=x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ hay $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay $(-\infty;+\infty)$. Chọn đáp án D

Ví dụ 13. [NTL] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Chọn đáp án C

Ví dụ 14. [NTL] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-2)^2(x-3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Giải.

Vì $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Lập trục xét dấu



Chọn đáp án C

Ví dụ 15. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Giải.

Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$. Lập trục



Dựa vào trục ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Nhận xét: Sau khi vẽ trục xong học sinh không biết chọn đáp án nào số -2 ở đâu, làm gì phải là nghiệm của y' mà xét đơn điệu, thực ra câu này là câu bẫy, vì hàm số nghịch trên khoảng $(-\infty;-1)$ mà $(-\infty;-2)\subset(-\infty;-1)$. Do đó đáp án đúng là đáp án B.

Dạng 2. Tìm các hàm đồng biến hoặc nghịch biến trên miền I

a. Phương pháp: Tuỳ vào đặc điểm cấu trúc từng hàm để chúng ta có thể dùng *loại trừ* hoặc *đạo hàm* ra và dựa vào định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số

- Với hàm $y=ax^4+bx^3+cx+d$ và $y=ax^2+bx+c$ luôn có ít nhất một khoảng đơn điệu
- Với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định
- Với hàm $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có tập xác định là $D=(-\infty;+\infty)$, ta có $y'=3ax^2+2bx+c$
  - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

    $\Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\leq 0 \end{cases}$
  - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

    $\Leftrightarrow y'\leq 0, \forall x\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\leq 0 \end{cases}$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - 0969141404

Chú ý: Với hàm bậc ba khi $ac<0\Rightarrow b^2-3ac>0\Rightarrow \Delta'>0\Rightarrow$ hàm bậc ba luôn có hai khoảng đơn điệu nên không thể đơn điệu trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

b. Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 16. ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^4+4x^2$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$ **C.** $y=x^3+4x$ **D.** $y=x^2+4x$

Giải.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

- Đáp án A sai vì $y'=4x^3+8x$ chưa chắc đã lớn hơn 0 với mọi x
- Đáp án B sai vì hàm phân thức bậc 1/bậc 1 chỉ đơn điệu trên từng khoảng chứ không thể đơn điệu trên khoảng $(-\infty;+\infty)$
- Đáp án D sai vì $y'=2x+4$ chưa chắc đã lớn hơn 0 với mọi x
- Đáp án C đúng vì $y'=3x^2+4>0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên

Nhận xét: Có thể dùng phương pháp loại trừ như sau:

- Với hàm $y=ax^4+bx^3+cx+d$ và $y=ax^2+bx+c$ luôn có ít nhất một khoảng đơn điệu nên loại ngay được đáp án A và C
- Với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định nên loại B

Chọn đáp án C

Ví dụ 17. ***(Trường THPT Trần Hưng Đạo – HCM năm 2017)*** Hàm số nào sau đây là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^3-3x^2+2$ **B.** $y=-2x^3+x^2-x+2$

C. $y=-x^4+2x^2-2$ **D.** $y=\dfrac{x+3}{x+1}$

Giải.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

- Đáp án C sai vì hàm trùng phương luôn có ít nhất khoảng đơn điệu
- Đáp án D sai vì hàm phân thức bậc 1/bậc 1 luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định
- Đáp án A sai vì có hệ số x^3 dương nên không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$
- Đáp án B đúng vì $y'=-6x^2+2x-1<0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Ví dụ 18. ***(Trường THPT Chuyên Bình lần 2 năm 2017)*** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=-x^3+3x^2+3x-2$ **B.** $y=-x^3+3x^2-3x-2$

C. $y=x^3+3x^2+3x-2$ **D.** $y=x^3-3x^2-3x-2$

Giải.

- Đáp án C, D loại vì có $a>0$ nên hàm số không thể nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$
- Đáp án A loại vì $ac<0$

Chọn đáp án B

Nhận xét: Đây là cách giải dựa vào lí thuyết kết hợp với phương pháp loại trừ, ngoài ra ta có thể tính đạo hàm từng hàm một hoặc sử dụng máy tính

Ví dụ 19. ***(Trường THPT Chuyên Hạ Long lần 1 năm 2017)*** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^3-2x^2+x-1$ **B.** $y=x^4+2x^2-2$

C. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ **D.** $y=x^3-x^2+x-1$

Giải.

- Loại ngay được đáp án A, C như các bài toán trên
- Đáp án A, D có $\begin{cases}a>0\\ac>0\end{cases}$. Do đó ta không sử dụng phương pháp loại trừ được mà phải sử dụng đạo hàm và chỉ ra $\Delta<0$.
  - Với đáp án A ta có $y'=3x^2-4x+1,\Delta'=4-3=1>0$ nên loại
  - Với đáp án D ta có $y'=3x^2-x+1,\Delta'=-3=-2<0\Rightarrow y'>0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nên hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ đồng biến trên tập xác định của nó. Chọn đáp án D

B. Bài toán đơn điệu chứa tham số

Dạng 1. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

a. Phương pháp:

***** Với hàm bậc 3 tổng quát $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

- Tập xác định $D=(-\infty;+\infty)$

- Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

- Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta'=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$$

- Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta'=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$$

Chú ý:

- Nếu hệ số a chứa tham số mà chưa xác định được khác 0 thì ta phải xét hai trường hợp $a=0$ hoặc $a\neq 0$
- Ngoài cách giải tổng quát trên ta có thể sử dụng công thức tính nhanh như sau

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$
$y'\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}\\\begin{cases}a>0\\b^2-3ac\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$	$y'\leq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b=0\\c<0\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\b^2-3ac\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

* Với hàm khác mà khi đạo hàm ra hàm bậc nhất tức là $y'=ax+b,\forall x\in[\alpha;\beta]$ thì

✧ Để hàm số $y=f(x,m)$ đồng biến trên $[\alpha;\beta]\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in[\alpha;\beta]\Leftrightarrow\begin{cases}y'(\alpha)\geq 0\\y'(\beta)\geq 0\end{cases}$

✧ Để hàm số $y=f(x,m)$ nghịch biến trên $[\alpha;\beta]\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in[\alpha;\beta]\Leftrightarrow\begin{cases}y'(\alpha)\leq 0\\y'(\beta)\leq 0\end{cases}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 20. ***(Trường THPT Chuyên Lam Sơn năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2+m)x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(1;2)$ **B.** $(-\infty;2)$ **C.** $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **D.** $[-1;2]$

Giải.

Ta có $y'=x^2-2mx+2+m$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-m-2\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq 2$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sử dụng công thức tính nhanh như sau

$$\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=-m\\ c=2+m\end{cases}\overset{ĐB}{\Rightarrow}\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-3.\frac{1}{3}(2+m)\Leftrightarrow m^2-m-2\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq 2$$

Ví dụ 21. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq -1\\ m\leq -2\end{array}\right.$ **B.** $-2\leq m\leq -1$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-2\end{array}\right.$ **D.** $-2<m<-1$

Giải.

Ta có $y'=-x^2+2mx+3m+2$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+3m+2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-2;-1]$

Nhận xét: Để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sử dụng công thức tính nhanh như sau

$$\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=m\\ c=3m+2\end{cases}\overset{NB}{\Rightarrow}\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-3.\left(-\frac{1}{3}\right)(3m+2)\Leftrightarrow m^2+3m+2\leq 0\Leftrightarrow m\in[-2;-1]$$

Ví dụ 22. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+2)}{3}x^3-(m+2)x^2-(3m-1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-2<m\leq -\frac{1}{4}$ **B.** $-2<m\leq 0$ **C.** $m\leq -\frac{1}{4}$ **D.** $-2\leq m\leq -\frac{1}{4}$

Giải.

Ta có $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x-(3m-1)\geq 0$.

Hàm số đồng biến biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

- Với $m=-2$, ta có $y'=7>0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nên $m=-2$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
- Với $m\neq -2$, ta có $y'\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\ (m+2)(4m+1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\leq -\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq -\frac{1}{4}$$

Vậy $-2\le m\le -\dfrac{1}{4}$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sử dụng công thức tính nhanh như sau

$$\left[\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}\right.\overset{DB}{\Rightarrow}\left[\begin{cases}\dfrac{m+2}{3}=-(m+2)\\-(3m-1)<0\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}a>0\\b^2-3ac\le 0\end{cases}\right.\qquad\left.\begin{cases}\dfrac{m+2}{3}>0\\(m+2)^2-3.\dfrac{m+2}{3}.(-(3m-1))=(m+2)(4m+1)\le 0\end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\-2<m\le -\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le m\le -\frac{1}{4}$$

Ví dụ 23. ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=mx^3+3mx^2-3x+1$. Tìm tập hợp tất cả các số thực m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-1<m<0$. **B.** $-1\le m<0$. **C.** $m\ge 0\vee m\le -1$. **D.** $-1\le m\le 0$.

Giải.

Ta có $y'=3mx^2+6mx-3$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

- Với $m=0$, ta có $y'=-3<0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nên $m=0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

- Với $m\ne 0$, ta có $y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m^2+m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\-1\le m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<0$$

Vậy $-1\le m\le 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án D

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng công thức tính nhanh như ví dụ trên.

Ví dụ 24. ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx-\sin 3x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\ge -3$ **B.** $m\in[-1;1]$ **C.** $m>3$ **D.** $m\ge 3$

Giải.

Đạo hàm $y=mx-\sin 3x$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m-3\cos 3x\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\cos 3x\le\frac{m}{3},\forall x\in(-\infty;+\infty)$$

Vì $-1\le\cos 3x\le 1\Rightarrow\dfrac{m}{3}\ge 1\Leftrightarrow m\ge 3$. Chọn đáp án D

Ví dụ 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x+m\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le -1$ **B.** $m\in[-1;1]$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $m\in(-1;1)$

Giải.

Cách 1. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow 1-m\sin x\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow m\sin x\le 1,\forall x\in(-\infty;+\infty)\quad(*)$$

- Với $m=0$ thì $(*)$ luôn đúng.

- Với $m>0$ thì $(*)\Leftrightarrow \sin x\le \dfrac{1}{m},\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow 1\le \dfrac{1}{m}\Leftrightarrow 0<m\le 1.$
- Với $m<0$ thì $(*)\Leftrightarrow \sin x\ge \dfrac{1}{m},\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow -1\ge \dfrac{1}{m}\Leftrightarrow -1\le m<0.$

Vậy $-1\le m\le 1$ thỏa yêu cầu bài toán. Chọn đáp án B

Cách 2. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow \min y'=\min\{(1-m);(1+m)\}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}1-m\ge 0\\1+m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1.$

Ví dụ 26. ***(Trường THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **B.** $m\le-\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **D.** $m\ge\sqrt{2}$.

Giải.

Ta có $y'=\cos x-\sin x+m=-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+m.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow -\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+m\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\dfrac{m}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{2}}\ge 1\Leftrightarrow m\ge\sqrt{2}$. Chọn đáp án D

Dạng 2. Tìm m để hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định

a. Phương pháp:

* Với hàm phân thức bậc 1/bậc 1 (nhất biến): $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\ne 0)$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{c}{d}\right\}$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Dấu y' phụ thuộc vào $ad-bc$

  - Để hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D\Leftrightarrow ad-bc>0$
  - Để hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow ad-bc<0$

Chú ý: Với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\ne 0)$ thì y' không có dấu "="

* Với hàm phân thức bậc 2/bậc 1: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$. Khi tính đạo hàm bằng công thức tính nhanh có dạng $y'=\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(mx+n)^2}$. Dấu của y' là phụ thuộc vào dấu của Ax^2+Bx+C, giống với hàm bậc 3 sau khi tính đạo hàm, do đó cách lập luận về tính đơn điệu và công thức tính nhanh cũng giống với hàm bậc ba.

b. Ví dụ minh hoạ:

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 27. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5 **B.** 4 **C.** Vô số **D.** 3

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+3>0\Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<3\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$. Vậy $S=\{0;1;2\}$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta sử dụng công thức tính nhanh sau

$\begin{cases}a=m;\ b=-2m-3\\ c=1;\ d=-m\end{cases}\xrightarrow{DB} ad-bc>0\Leftrightarrow -m^2+2m+3>0\Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<3\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$

Ví dụ 28. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5 **B.** 4 . **C.** Vô số **D.** 3

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow \begin{cases}0<m<4\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$. Vậy $S=\{1;2;3\}$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta sử dụng công thức tính nhanh sau

$\begin{cases}a=m;\ b=4m\\ c=1;\ d=m\end{cases}\xrightarrow{NB} ad-bc<0\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow \begin{cases}0<m<4\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

Ví dụ 29. ***(Trường THPT Chuyên KHTN lần 5 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-m^2+2m+1}{x-m}$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó?

A. $m<-\dfrac{1}{3}$ **B.** $m\le-\dfrac{1}{2}$ **C.** $m<-1$ **D.** $m<-\dfrac{1}{4}$

Giải.

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-(2m+1)}{(x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trên tập xác định khi $y'\ge 0,\forall x\ne m$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-(2m+1)\ge 0,\forall x\ne m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1>0\\ \Delta=8m+4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le-\dfrac{1}{2}$. Chọn đáp án B

Ví dụ 30. [NTL] Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx-(m^3-m^2+2)}{x-m}$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó?

A. $m<-1$ **B.** $m\le -1$ **C.** $m>-1$ **D.** $m\ge -1$

Giải.

- Tập xác định $D=R\setminus\{m\}$.

- Đạo hàm $y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m^2+m)x+m^3+m^2+2}{(x-m)^2}$

TH 1: $m=-1\Rightarrow y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\forall x\ne -1\Rightarrow m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán

TH 2: $m\ne -1$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y'\ge 0,\forall x\ne m$

$\Leftrightarrow g(x)=(m+1)x^2-2(m^2+m)x+m^3+m^2+2\ge 0,\forall x\ne m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m+1>0 \\ \Delta=-2m-2\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m\ge -1 \end{cases}\Leftrightarrow m>-1$

Vậy với $m\ge -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án D

Dạng 3. Tìm m để hàm số đơn điệu trên miền K

a. Phương pháp:

* Với hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a,c\ne 0)$. Tìm m để hàm số đơn điệu trên khoảng $(a;b)$

Bước 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

Bước 2: Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc>0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin(a;b) \end{cases}$
- Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc<0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin(a;b) \end{cases}$

Chú ý: Ta có thể sử dụng công thức tính nhanh khi làm trắc nghiệm như sau

- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc>0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin(a;b) \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc<0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin(a;b) \end{cases}$

* Với hàm đa thức bậc 3 hoặc hàm phân thức bậc 2/bậc 1 hoặc một hàm bất kì nào khác mà việc tách tham số một cách dễ dàng thì ta làm theo "*phương pháp tổng quát*" sau:

- Nếu $y'=f'(x)=ax^2+bx+c$ hoặc $y'=\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(mx+n)^2}$ hoặc $y'=f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y'=f'(x)\ge 0$ hay $y'=f'(x)\le 0$ trên khoảng (a,b) hoặc đoạn $[a,b]$ (hoặc nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của $y'=f'(x)$.

GV Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Bước 2: Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.

Tức là: Ta tách thành một trong hai loại $h(m) \ge g(x), \forall x \in K$ hoặc $h(m) \le g(x), \forall x \in K$

Bước 3: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0$ và lập bảng biến thiên của $g'(x)$.

Từ đó nếu $\begin{cases} h(m) \ge g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow \max\limits_K g(x) \le h(m) \\ h(m) \le g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow \min\limits_K g(x) \ge h(m) \end{cases}$

Chú ý:

- Để tìm ***max – min*** ta có thể sử dụng các phương pháp khác như tam thức bậc hai, bất đẳng thức, máy tính...
- Trong quá trình tách *m* sẽ phải chia cho biểu thức của *x*, cần phải căn cứ vào khoảng cho trước đó để xác định được dấu biểu thức của *x*, tức là nếu biểu thức của *x* dương thì không đổi chiều, âm thì đổi chiều
- Một số bài toán khác chứa *m* trong các hệ số nhưng số mũ của *m* có bậc ≥ 2, do đó tách *m* sẽ không được, khi đó ta sử dụng một số phương pháp khác như định lí về dấu tam thức bậc hai hoặc sử dụng trực tiếp định lí vi-et

b. Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 31. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Giải.

Hàm số xác định trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{2m-1}{(x+m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x \in (2;+\infty) \\ -m \notin (2;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m < \dfrac{1}{2}$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

$\begin{cases} a=2; b=1 \\ c=1; d=m \end{cases} \xrightarrow{NB(2;+\infty)} \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m < \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 32. ***(Sở GD và ĐT Hải Phòng năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $0 \le m < 2$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $0 \le m \le 2$. **D.** $0 < m < 2$.

Giải.

Hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x \in (0;+\infty) \\ -m \notin (0;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

$$\begin{cases} a=m; b=4 \\ c=1; d=m \end{cases} \xrightarrow{NB(0;+\infty)} \begin{cases} ad-bc<0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin (a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2$$

Ví dụ 33. ***(Sở GD và ĐT Điện Biên năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$

A. $m>-3$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$ **C.** $m<-3$ **D.** $\left[\begin{array}{l} -3<m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$

Giải.

Đặt $t=\cos x;\ t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'>0, \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right) \\ \dfrac{m}{2}\notin\left(\dfrac{1}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6>0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2}\le\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m}{2}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m<-3$$. Chọn đáp án C

Ví dụ 34. ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)*** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\tan x+m}{m\tan x+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

C. $(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

Giải.

Đặt $t=\tan x;\ t\in(0;1)$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên $(0;1)$

TH1: $m=0$ khi đó $y=t$ hiển nhiên hàm số đồng biến trên $(0;1)$ nên $m=0$ thoả mãn

TH2: $m\ne 0$. Để hàm số $y=\dfrac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'>0, \forall t\in(0;1) \\ \dfrac{1}{m}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2<0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{m}\le 0 \\ \dfrac{1}{m}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \\ m<0 \\ 0<m\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>1.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 35. ***(Trường THPT Quảng Xương 3 lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{e^x-1}{e^x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $(-\infty;2]$ **B.** $(-\infty;1)$ **C.** $(-\infty;1]$ **D.** $(-\infty;2)$

Giải.

Đặt $t=e^x, t\in(1;+\infty)$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{t-1}{t-m}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall t \in (1;+\infty) \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 \Leftrightarrow m \in (-\infty;1)$. Chọn đáp án B

Ví dụ 36. ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 1 năm 2017)*** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \dfrac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. 4 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 3

Giải.

- Hàm số xác định trên khoảng $(1;+\infty)$

- Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2+6x+9-m^2}{(x+3)^2}$. Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow m^2 \le x^2+6x+9, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow m^2 \le \min\limits_{[1;+\infty)} g(x)$

Xét hàm $g(x) = x^2+6x+9$ liên tục trên $[1;+\infty)$

Ta có $g'(x) = 2x+3 > 0, \forall x \in [1;+\infty)$ nên $g(x) \ge g(1) = 16, \forall x \in [1;+\infty)$

Do đó $\begin{cases} m^2 \le 16 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4\}$. Chọn đáp án A

Ví dụ 37. ***(Sở GD và ĐT Thanh Hoá năm 2017)*** Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - (m-3)x + 2017m$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(0;3)$ là đoạn $T = [a;b]$. Tính a^2+b^2.

A. $a^2+b^2 = 13$. **B.** $a^2+b^2 = 8$. **C.** $a^2+b^2 = 10$. **D.** $a^2+b^2 = 5$.

Giải.

Đạo hàm $y' = x^2 - 2(m-1)x - (m-3)$. Để hàm số đồng biến $(0;3)$ và $(-3;-1)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (0;3)$ và $(-3;-1) \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - (m-3) \ge 0, \forall x \in (0;3)$ và $(-3;-1)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3 \ge m(2x+1) \quad (*)$

+ Khi $x \in (0;3) \Rightarrow 2x+1 > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \ge m, \forall x \in (0;3)$. Sử dụng mode 7

Nhập $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên $(0;3)$ ta thấy $\min\limits_{(0;3)} f(x) = 2 \Rightarrow m \le 2$



+ Khi $x \in (-3;-1) \Rightarrow 2x+1 < 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \le m, \forall x \in (-3;-1)$. Sử dụng mode 7

Nhập $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên $(-3;-1)$ ta thấy $\max\limits_{(-3;-1)} f(x) = -1 \Rightarrow m \ge -1$



Do đó $m \in [-1;2] \Rightarrow a^2+b^2 = 5$. Chọn đáp án D

Nhận xét:

- Với bài toán này nhiều bạn mắc sai lầm là khi chia hai vế bất phương trình cho một biểu thức mà chưa xác định được dương hoặc âm nên
- Ví dụ tiếp theo đây sẽ xét các bài toán mà việc tách tham số m không đơn giản, khi đó ta sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 38. ***(Sở GD và ĐT Phú Thọ năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Giải.

Ta có $y'=x^2-2(m+1)x+m^2+2m;\ y'=0$ có $\Delta'=1$ nên có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l}x_1=m\\x_2=m+2\end{array}\right.\ (x_1<x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ thì $(0;1)\subset(m;m+2)$

$\Leftrightarrow x_1\le 0<1\le x_2\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\m+2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 0$

Chọn đáp án D

Ví dụ 39. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m^2-m$ đồng biến trên nửa khoảng $[2;+\infty)$ có dạng $[a;b]$. Tính $a+b$

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{7}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)$.

Nhận thấy $y'=0$ có $\Delta'=7m^2-7m+7>0,\forall m\in(-\infty;+\infty)$ nên $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là

$x_1=\frac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3};\ x_2=\frac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì $x_2\le 2\Leftrightarrow\frac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}\le 2\Leftrightarrow\sqrt{\Delta'}\le 5-m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 5\\\Delta'\le(5-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 5\\2m^2+m-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\frac{3}{2}$

Chọn đáp án D

Nhận xét: Cách giải trên là giải trực tiếp thông qua biệt số Δ. Ta có thể làm như sau

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì $x_1 < x_2 \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 \le 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \ge 0 \end{cases}$. Áp dụng định lý vi-et ta cũng tìm được tham số m

- Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì $x_1 < x_2 \le 2$. Đặt $t = x - 2$ quy về so sánh với số 0.

Ví dụ 40. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (2m-1)x + m^2 - 2$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

A. $m < 2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m \le \frac{11}{4}$ **D.** $2 < m \le \frac{11}{4}$

Giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1$

Cách 1. Hàm số đã cho đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \ge \frac{3}{2}$

$$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 \ge 0, \forall x \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 2} \ge m, \forall x \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \min_{\left[\frac{3}{2};+\infty\right)} g(x) \ge m \text{ với } g(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 2}, \forall x \ge \frac{3}{2}$$

Ta có $g'(x) = \frac{6x^2 - 12x + 6}{(2x-2)^2} > 0, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin \left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$					$-$		
$g(x)$					$\frac{11}{4}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{\left[\frac{3}{2};+\infty\right)} g(x) = \frac{11}{4} \Rightarrow m \le \frac{11}{4}$. Chọn đáp án C

Cách 2. $y' = 0$ có $\Delta' = (m-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2 \\ \Delta' > 0 \Leftrightarrow m \ne 2 \Rightarrow x = 1 < \frac{3}{2}; x = \frac{2m-1}{3} \end{cases}$

Hàm số đã cho đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \ge \frac{3}{2}$

- Với $\frac{2m-1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

- Với $m \ne 2$ thì hàm số đã cho đồng biến đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$$x_1 < x_2 \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < \frac{2m-1}{3} \le \frac{3}{2} \\ \frac{2m-1}{3} < 1 \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m \le \frac{11}{4} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \frac{11}{4}$$

Vậy các giá trị cần tìm là $m \le \frac{11}{4}$

Gv : Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 41. ***(Trường THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $(-\infty;1)$ **B.** $[1;+\infty)$ **C.** $[-1;1]$ **D.** $(-\infty;-1]$

Giải.

- Tập xác định $D=(-\infty;+\infty)$

- Đạo hàm $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$

- Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in R\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow m\le \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=g(x),\forall x\in(-\infty;+\infty)$$

Ta có $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên $m\le -1$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án D

Ví dụ 42. ***(Trường THPT Chuyên Lam Sơn lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}+1$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m\le -1$. **C.** $m<-1$. **D.** $-2\le m\le 1$.

Giải.

Ta có $y'=m+\dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, $x>2$.

Hàm số nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in[2;+\infty)\Leftrightarrow m+\frac{m+1}{2\sqrt{x-2}}\le 0,\forall x\in[2;+\infty)\quad(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow 2m\sqrt{x-2}+m+1\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{1}{2\sqrt{x-2}+1}=g(x),\forall x\in[2;+\infty)\Rightarrow m\le \min_{[2;+\infty)}g(x).$$

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}\left(2\sqrt{x-2}+1\right)^2}>0,\forall x>2\Rightarrow g(x)$ là hàm đồng biến.

$\Rightarrow \min\limits_{[2;+\infty)}g(x)=g(2)=-1\Rightarrow m\le -1$. Chọn đáp án B

Ví dụ 43. ***(Đề thi thử nghiệm của BGD năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $[-1;1]$ **D.** $[1;+\infty)$

Giải.

Đạo hàm $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\ge m,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow \min\limits_{x\in(-\infty;+\infty)} g(x)\ge m$

Ta có $g'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow -2x^2+2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Từ đó $\min\limits_{x\in(-\infty;+\infty)} g(x)=1\Rightarrow m\le 1$. Chọn đáp án A

Dạng 4: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ***đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng l***

a. Phương pháp:

- ***Bước 1:*** Tính $y'=f'(x,m)$.
- ***Bước 2:*** Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến

$\Leftrightarrow f'(x,m)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ (1)

- ***Bước 3:*** Biến đổi $|x_1-x_2|=l$ thành $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=l^2$ (2)
- ***Bước 4:*** Sử dụng định lý Viét đưa (2) thành phương trình theo m. Giải phương trình theo m, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm

Chú ý: Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$ nếu có hai nghiệm x_1,x_2 thì $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ hoặc $|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 44. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2?

A. $m=0,\ m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=0$ **D.** $m=2$

Giải.

Cách 1. Tự luận

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$. Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2

$\Leftrightarrow y'=0$ là hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=2$

$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2-9(2m-1)=9(m-1)^2>0\Leftrightarrow m\ne 1$

Theo định lí vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$

Khi đó $|x_1-x_2|=2\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=4\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4\Leftrightarrow 4m^2-4(2m-1)=4$

$\Leftrightarrow 4m^2-8m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

Vậy chọn đáp án A

Cách 2. Theo công thức tính nhanh

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}\Leftrightarrow 2=\dfrac{6|m-1|}{3}\Leftrightarrow |m-1|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m=0\end{array}\right.$ thoả mãn $m\neq 1$

Cách 3. Thử đáp án

Đáp án A chứa C và D nên t thử với đáp án A trước

- Với $m=0\Rightarrow y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ thoả mãn $|x_1-x_2|=2$ nên B loại
- Với $m=2\Rightarrow y'=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=3\end{array}\right.$ thoả mãn $|x_1-x_2|=2$

Ví dụ 45. ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{m+3}{2}x^2+(m+2)x+2017$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 2. Tìm S

A. $S=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **B.** $S=\mathbb{R}$

C. $S=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ **D.** $S=\{-4;0;2\}$

Giải.

Đạo hàm $y'=x^2-(m+3)+m+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=m+2\end{array}\right.$

Để $y'<0\Leftrightarrow x_1<x<x_2\Rightarrow$ Để đồ thị hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 2 thì

$|m+2-1|>2\Leftrightarrow |m+1|>2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1>2\\ m+1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-3\end{array}\right.\Rightarrow S=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. Chọn đáp án A

Ví dụ 46. ***(Trường THPT Ngô Gia Tự lần 3 năm 2017)*** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0\\ m>6\end{array}\right.$.

Giải.

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$ khi a,b là nghiệm của phương trình $y'=0$

Ta có $\Delta=m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\leq 0\Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\geq 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow m\neq 3$. Theo vi-et ta có $ab=1-m;ab=m-2$

Theo giả thiết $b-a>3\Leftrightarrow (b-a)^2>9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-4(m-2)>9\Leftrightarrow m^2-6m>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6\\ m<0\end{array}\right.$. Chọn đáp án D

Chú ý: Có thể thử đáp án với $m=7$ hoặc $m=-1$ để được 2 nghiệm phân biệt sao cho hiệu hai nghiệm lớn hơn 3.

Gv : Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

C. ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP

Kiến thức cần nhớ :

Định lí :

a. Nếu hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0=u(x_0)$ thì hàm số hợp $g(x)=f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0, và $\boxed{g'(x_0)=f'(u_0).u'(x_0).}$

b. Nếu giả thiết trong phần (a) được thỏa mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y=g(x)$ có đạo hàm trên J, và $\boxed{g'(x)=f'[u(x)].u'(x).}$

Lưu ý : Công thức thứ hai trong định lí trên còn được viết gọn là $\boxed{g'_x=f'_u.u'_x}$

Câu 1: **(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Từ $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018\Rightarrow f'(1-x)=x(3-x).g(1-x)+2018$

Nên đạo hàm của hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ là

$y'=-x(3-x).g(1-x)-2018+2018=-x(3-x)g(1-x)$.

Xét bất phương trình $y'<0\Leftrightarrow x(3-x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$, do $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 2: **(THPT NEWTON HÀ NỘI-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C.

Quan sát bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Với $y=f(x^2-2)$ ta có $y'=2x.f'(x^2-2)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=0\\x^2-2=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm2\end{array}\right.$.

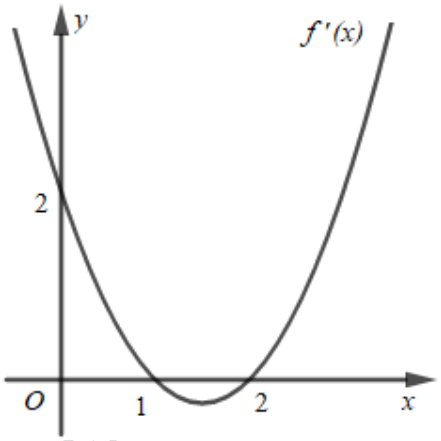
Bảng xét dấu

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - HN - 0969141404

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$f'(x^2-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

Dựa vào bảng xét dấu y' ta được $y'<0,\ \forall x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ nên hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 3: **(CHUYÊN HẠ LONG-LẦN 2-2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây.



A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $y=g\left(x\right)=f\left(x-x^2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x-x^2\right).\left(x-x^2\right)'=\left(1-2x\right)f'\left(x-x^2\right)$

Cho $g'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\x-x^2=1\left(\text{ptvn}\right)\\x-x^2=2\left(\text{ptvn}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

Với $x<\frac{1}{2}$ thì $\left\{\begin{array}{l}1-2x>0\\f'\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]>0\end{array}\right.$ nên $g'\left(x\right)>0$.

Với $x>\frac{1}{2}$ thì $\left\{\begin{array}{l}1-2x<0\\f'\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]>0\end{array}\right.$ nên $g'\left(x\right)<0$ hay hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - HN - 0969141404

Câu 4: **(THPT Phan Chu Trinh - Đaklak - L2 - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

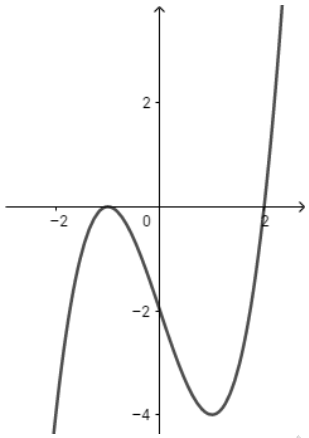
B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;2)$.

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

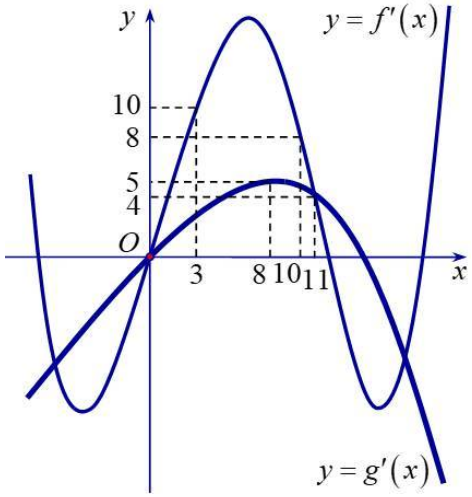
$$g'(x)\le 0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ -2\le x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ x\le -2\end{array}\right.$$

Như vậy đáp án B, C đều đúng và đáp án A sai. Tương tự chứng minh được đáp án D đúng.

Câu 5: **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x+4)>10, \text{khi } 3<x+4<a \\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5, \text{khi } 0\le 2x-\frac{3}{2}<11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4)>10, \text{khi } -1<x<4 \\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5, \text{khi } \frac{3}{4}\le x\le \frac{25}{4} \end{cases}.$$

Do đó $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)>0$ khi $\frac{3}{4}\le x<4$.

Kiểu đánh giá khác:

Ta có $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

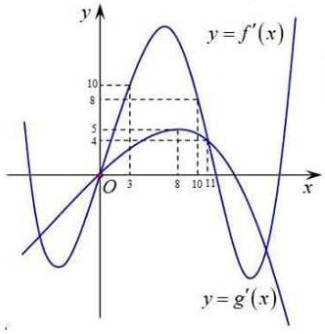
Dựa vào đồ thị, $\forall x\in\left(\frac{9}{4};3\right)$, ta có $\frac{25}{4}<x+4<7$, $f(x+4)>f(3)=10$;

$3<2x-\frac{3}{2}<\frac{9}{2}$, do đó $g\left(2x-\frac{3}{2}\right)<f(8)=5$.

Suy ra $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)>0, \forall x\in\left(\frac{9}{4};3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4};3\right)$.

Câu 6: **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. $\left(2;\frac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\frac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\frac{13}{4}\right)$.

Lời giải

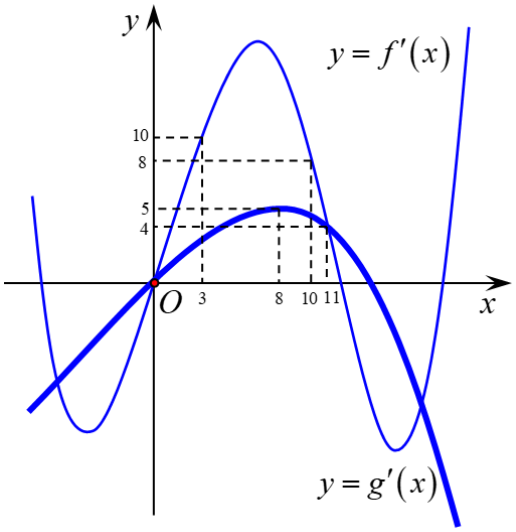
Chọn B.

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x+7)>10, \text{khi } 3<x+7<a \\ g\left(2x+\frac{9}{2}\right)\le 5, \text{khi } 0\le 2x+\frac{9}{2}\le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4)>10, \text{khi} -4<x<1 \\ g\left(2x+\frac{9}{2}\right)\le 5, \text{khi} -\frac{9}{4}\le x\le \frac{13}{4} \end{cases}.$$

Do đó $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)>0$ khi $-\frac{9}{4}\le x<1$.

Câu 7: **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+3)-g\left(2x-\frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{4};4\right)$. **B.** $\left(7;\frac{29}{4}\right)$. **C.** $\left(6;\frac{36}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{36}{5};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

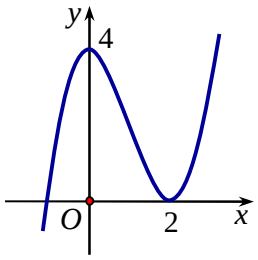
Ta có:

Gv : Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404

$$x\in\left(\frac{13}{4};4\right)\Rightarrow\begin{cases}x+7\in\left(\frac{25}{4};7\right)\Rightarrow f'(x+7)>10\\ 2x-\frac{7}{2}\in\left(3;\frac{9}{2}\right)\Rightarrow g'\left(2x-\frac{7}{2}\right)<5\end{cases}\Rightarrow h'(x)>0$$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{13}{4};4\right)$

Câu 8: **(Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **B.** $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$. **D.** $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0\Rightarrow d=4$; $x=2\Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$;

$f'(0)=0\Rightarrow c=0$. Tìm được $a=1;b=-3;c=0;d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có

$$g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right);$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

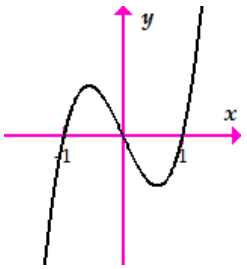
Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$	↘	4	↗	$+\infty$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

Câu 9: **(Thử nghiệm - MD4 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(1;\sqrt{2}\right)$. **D.** $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-1=0\\ x^2-1=-1\\ x^2-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Dựa vào bảng xét dấu y' suy ra hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình

Câu 1: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $(x+2)\left[\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right]+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)>0$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình đã cho có dạng

$f(x+2)>f(-x)$ trong đó $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$.

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$, $t\in\mathbb{R}$;

Ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+1+t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)=\sqrt{t^2+3}+1+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó $f(x+2)>f(-x)\Leftrightarrow x+2>-x\Leftrightarrow x>-1$.

Câu 2: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $(x+2)\left[\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right]+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)>0$ là

Gv : Lương Văn Huy - LTE - Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình đã cho có dạng

$f(x+2)>f(-x)$ trong đó $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$.

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$, $t\in\mathbb{R}$;

Ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+1+t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)=\sqrt{t^2+3}+1+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó $f(x+2)>f(-x)\Leftrightarrow x+2>-x\Leftrightarrow x>-1$.

Câu 3: **(THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018)** Tìm m để bất phương trình $x+2\sqrt{(2-x)(2x+2)}>m+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)$ có nghiệm?

A. $m<-8$. **B.** $m<-1-4\sqrt{3}$. **C.** $m<-7$. **D.** $-8<m<-7$.

Lời giải.

Chọn B.

- Điều kiện: $x\in[-1;2]$.

  Xét hàm số $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

  Có $g'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

  $g(-1)=\sqrt{3}$, $g(1)=3$, $g(2)=\sqrt{6}$.

  Suy ra $\max\limits_{[-1;2]}g(x)=3$, $\min\limits_{[-1;2]}g(x)=\sqrt{3}$.

- Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$, $t\in\left[\sqrt{3};3\right]\Rightarrow t^2=x+4+2\sqrt{(2-x)(2x+2)}$.

  Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-4>m+4t\Leftrightarrow t^2-4t-4>m$.

  Xét hàm số $f(t)=t^2-4t-4$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$.

  Có $f'(t)=2t-4$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

  $f\left(\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}-1$, $f(2)=-8$, $f(3)=-7$.

  Suy ra $\max\limits_{\left[\sqrt{3};3\right]}f(t)=-7$.

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $m<\max\limits_{\left[\sqrt{3};3\right]}f(t)$ hay $m<-7$.

Vậy $m<-7$.

Câu 4: **(THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm thực.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2

Lời giải

Chọn A.

Không mất tính tổng quát ta chỉ xét phương trình trên $[-\pi;\pi]$.

Gv : Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Điều kiện $\begin{cases}1+2\sin x\ge 0\\ 1+2\cos x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Phương trình đã cho tương đương với

$2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2\cos x}\sqrt{1+2\sin x}=\dfrac{m^2}{4}\ (*)\ (m>0)$.

Đặt $t=\sin x+\cos x$ với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì $\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}\le t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow t\in\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\sqrt{2}\right]$.

Mặt khác, ta lại có $t^2=1+2\sin x\cos x$.

Do đó $(*)\Rightarrow 2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}=\dfrac{m^2}{4}$

Xét hàm số $f(t)=2t+2+2\sqrt{2t^2+2t-1}, t\in\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\sqrt{2}\right]$

$f'(t)=2+\dfrac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0$

t	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\sqrt{3}+1$	$\nearrow$	$4\left(\sqrt{2}+1\right)$

Từ bảng biến thiên, ta kết luận rằng phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{3}+1\le\dfrac{m^2}{4}\le 4\left(\sqrt{2}+1\right)\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)}\le m\le 4\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Vậy có 3 giá trị của m.

Câu 5: **(PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018)** Tìm m để phương trình $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{\sin x+\dfrac{1}{2}}=m$ có nghiệm.

A. $\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $0\le m\le 1$. **C.** $0\le m\le\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\le m\le\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t=\sin x\ \left(\dfrac{-1}{2}\le t\le 1\right)$, phương trình trở thành $\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\dfrac{1}{2}}=m$

Nhận xét phương trình ban đầu có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-\dfrac{1}{2};\right]$. Xét hàm $f(t)=\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\dfrac{1}{2}}$, với $t\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Gv : Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có: $f'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{1-t}-\sqrt{t+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{2}-2t}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-t}+\sqrt{t+\frac{1}{2}}\right)}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(t)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2}\le m\le\sqrt{3}$.

Câu 6: **(SỞ GD -ĐT HẬU GIANG -2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}}=\cos x$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}}=\cos x\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{m+3\cos x}=\cos^3 x-m\ (1)$

Đặt $\cos x=u$. Điều kiện $-1\le u\le 1$ và $\sqrt[3]{m+3\cos x}=v\Rightarrow v^3=m+3u\ (2)$

(1) trở thành $u^3=m+3v\ (3)$

Từ (3) và (2) suy ra $u^3-3v=v^3-3u\ \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0\Leftrightarrow u=v$

Do $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+\dfrac{3v^2}{4}+3>0,\forall u,v\in\mathbb{R}$

Suy ra: $\sqrt[3]{m+3u}=u\Leftrightarrow m=u^3-3u$ với $u\in[-1;1]$.

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u$ với $u\in[-1;1]$. Ta có $f'(u)=3u^2-3$; $f'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm1$ do $u\in[-1;1]$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}f(u)=2$; $\min\limits_{[-1;1]}f(u)=-2$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2\le m\le 2$, mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;\pm1;\pm2\}$.

Câu 7: **(CHUYÊN HẠ LONG-LẦN 2-2018)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(\lvert x\rvert)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
$f(\lvert x\rvert)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

BBT thiếu giá trị $f'(|x|)$ tại $x=3$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $0<-m<4 \Leftrightarrow -4<m<0$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài ra.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG – TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. Bài toán đơn điệu không chứa tham số

Câu 1. ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Hàm số $y=2016x+12$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số $y=3x^4+x^2+4$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

C. Hàm số $y=-x^3-3x+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 2. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Trong các khẳng định sau về hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Khẳng định nào **đúng ?**

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 3. ***(Trường THPT Phan Đình Phùng lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 4. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định.

Câu 5. ***(Trường THPT Quảng Xương 3 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3-22$. Chọn khẳng định đúng

A. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

C. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 6. ***(Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu lần 2 năm 2017)*** Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 7. ***(Sở GD và ĐT Đà Nẵng năm 2017)*** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ **B.** $y=\cot x$ **C.** $y=x^3+3x$ **D.** $y=-x^4+x^2$

Câu 8. ***(Trường THPT Nguyễn Huệ lần 1 năm 2017)*** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $y=\dfrac{3x-4}{2x-1}$ **B.** $y=\sin 3x+4x$ **C.** $y=3x^2+4x-7$ **D.** $y=-3x+4$

Gv: Lương Văn Huy - ĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 9. ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-1;3)$

A. $y=x^4+18x-2$ **B.** $y=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x-2$

C. $y=2x^2-6x-2$ **D.** $y=\frac{2x-3}{3x+1}$

Câu 10. ***(Trường THPT Hai Bà Trưng lần 1 năm 2017)*** Hàm số nào sau đây nghịch biến khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $y=x^3-3x^2$. **B.** $y=-x^3+3x+1$. **C.** $y=-x^3+3x^2-3x+2$. **D.** $y=x^3$.

Câu 11. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có $f'(x)=x(x^2-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 12. ***(Trường THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{1+x}{1-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Câu 13. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến với mọi $x\neq -1$

C. Hàm số nghịch biến trên tập $(-\infty;+\infty)\setminus\{-1\}$

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Câu 14. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 15. ***(Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu lần 2 năm 2017)*** Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng.

A. $(0;1)$ **B.** $(-\infty;1)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(1;2)$

Câu 16. ***(Trường THPT Chuyên Hưng Yên lần 3 năm 2017)*** Cho các hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$, $y=-x^3+x^2-3x+1, y=x^4+2x^2+2$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 17. ***(Trường Sở GD và ĐT Hưng Yên lần 1 năm 2017)*** Trong các hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ *(I)*; $y=-x^4+x^2-2$ *(II)*; $y=x^3-3x-5$ *(III)*, hàm số nào luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. I và II **B.** Chỉ I **C.** I và III **D.** II và III

Gv: Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 18. ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **B.** $y=\tan x$

C. $y=\left(x^2-1\right)^2-3x+2$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Câu 19. ***(Trường THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu lần 1 năm 2017)*** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x+5}{-x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ **D.** $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$

Câu 20. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 3 năm 2017)*** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^2+1$ **B.** $y=-2x+1$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=x^2+1$

Câu 21. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\sin x-\cos x+\sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

C. Hàm số là hàm lẻ **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Câu 22. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 23. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$

Câu 24. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $y=\dfrac{x+1}{x+3}$. **B.** $y=x^3+x$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **D.** $y=-x^3-3x$.

Câu 25. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng -3

B. Hàm số có điểm cực tiểu là 2.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-3;-2)\cup(-2;-1)$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

Câu 27. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 28. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$

Câu 29. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 30. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 31. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia - BGD năm 2017)*** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=3x^3+3x-2$. **B.** $y=2x^3-5x+1$. **C.** $y=x^4+3x^2$. **D.** $y=\frac{x+2}{x+1}$.

Câu 32. ***(Sở GD và ĐT Kiên Giang năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 33. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi:

A. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\ge 0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\a>0;b^2-3ac<0\end{array}\right.$.

Gv: Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 34. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 4 năm 2017)*** Hàm số nào trong các hàm số sau nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=-x^2+x.$ **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1).$ **C.** $y=\dfrac{2}{x-1}.$ **D.** $y=-\dfrac{1}{x}.$

Câu 35. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-4x)(4^x-1).$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2).$

B. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;2).$

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2).$

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0).$

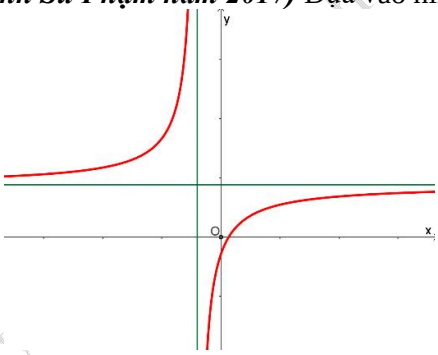
Câu 36. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 4 năm 2017)*** Hàm số nào trong bốn hàm số sau đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $y=1-x^2.$ **B.** $y=x\ln x.$ **C.** $y=e^x-\dfrac{1}{x}.$ **D.** $y=x.$

Câu 37. Hàm số nào dưới đây có tập xác định là khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $y=\sqrt{1+\ln x}$ **B.** $y=\tan x\cot x$ **C.** $y=e^{\ln x}$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{\ln(2+x^2)}$

Câu 38. ***(Trường THPT Thực Hành Sư Phạm năm 2017)*** Dựa vào hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;0)$ và có hai cực trị.

B. Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và có hai cực trị.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định và không có cực trị.

D. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định và không có cực trị.

Câu 39. ***(Trường THPT Sào Nam năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\ge 0, \forall x\in(0;3)$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in[1;2]$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. Hàm số đã cho là hàm hằng trên đoạn $[1;2]$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

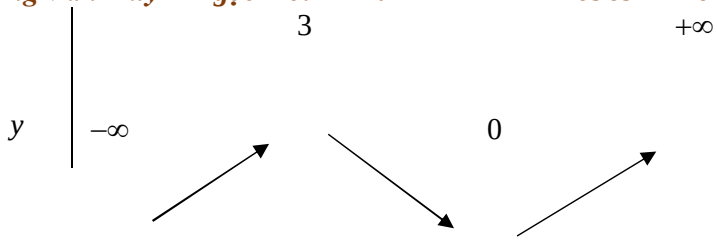
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Gv. Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404



A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

Câu 41. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Chọn khẳng định đúng. Hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

A. Đồng biến trên khoảng $(0;e)$ và nghịch biến trên khoảng $(e;+\infty)$

B. Nghịch biến trên khoảng $(0;e)$ và đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$

C. Đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

D. Nghịch biến trên $(0;+\infty)$

Câu 42. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Biết hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng (a,b). Giá trị của tổng a^2+b^2 bằng

A. 16 **B.** 4 **C.** 20 **D.** 17

Câu 43. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Đà Nẵng năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-m}{x-1}(m\neq 1)$. Chọn câu trả lời đúng

A. Hàm số luôn giảm trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ với $m<1$.

B. Hàm số luôn giảm trên tập xác định.

C. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ với $m>1$.

D. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 44. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

Câu 45. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm năm 2017)*** Cho hàm số $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số có tập xác định là $D=(-\infty;+\infty)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **D.** Hàm số có đạo hàm là $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Câu 46. ***(Sở GD và ĐT Đồng Tháp năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Câu 47. ***(Trường THPT Hồng Quang lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai?**

A. Hàm số $y=f(x+4)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

B. Hàm số $y=f(x)+4$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

C. Hàm số $y=2017-4f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

D. Hàm số $y=-f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Câu 48. ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có tính chất $f'(x)\le 0;\forall x\in(-1;5)$ và $f'(x)=0$ với $\forall x\in(2;4)$. Hỏi khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số $y=f(x)$ không đổi trên khoảng $(2;4)$

B. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;5)$

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;5)$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

B. Bài toán đơn điệu chứa tham số

Câu 1. ***(Trường THPT Triệu Sơn 1 lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2017$. Khi đó tập các giá trị của *m* để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là:

A. $\varnothing$ **B.** $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$ **D.** $(-\infty;+\infty)$

Câu 2. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 2

A. $m=0$. **B.** $m<2$. **C.** $m=2$. **D.** $m>2$.

Câu 3. ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $(-\infty;-3]$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;9)$. **D.** $[-3;9]$.

Câu 4. ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 1 năm 2017)*** Tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=x^3-mx^2+3x+4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là:

A. $-2\le m\le 2$ **B.** $-3\le m\le 3$ **C.** $m\ge 3$ **D.** $m\le -3$

Câu 5. ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 1 năm 2017)*** Tất cả các giá trị của *m* để hàm số $y=\frac{(2m^2-1)\tan x}{\tan^2 x+\tan x+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{-1}{\sqrt{2}}\le m\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $m<\frac{-1}{\sqrt{2}}$ hoặc $m>\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\frac{-1}{\sqrt{2}}<m<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $0<m<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 6. ***(Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=mx-\sin x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m>1$ **B.** $m\ge -1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $m\ge 0$

Câu 7. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 3 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x}{x-m}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m>1$ **B.** $0<m\le 1$ **C.** $0\le m<1$ **D.** $0<m<1$

Câu 8. ***(Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai năm 2017)*** Hàm số $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi:

A. $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m\le 3\end{array}\right.$ **B.** $m\ge 3$ **C.** m > 3 **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m<3\end{array}\right.$

Câu 9. ***(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 1 năm 2017)*** Có bao nhiêu tham số nguyên *m* để hàm số $y=\frac{mx^3}{3}-mx^2+3(3-2m)x+m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 10. ***(Trường Chuyên THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y=x+m(\sin x+\cos x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ **B.** $\frac{-1}{\sqrt{2}}\le m\le\frac{1}{\sqrt{2}}$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

C. $-3<m<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

Câu 11. ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}<m<3$. **C.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **D.** $m>3$.

Câu 12. ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\cos x+mx$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le 1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m<1$ **D.** $m>1$

Câu 13. ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

A. $m\ge 1$ **B.** $m\le 2$ **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$ **D.** $m\le 0$

Câu 14. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để hàm số $y=f(x)=m\sin x-\ln(\tan x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\left(-\infty;2\sqrt{2}\right]$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. **C.** $\left(-\infty;3\sqrt{3}\right]$. **D.** $\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Câu 15. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^3+mx^2+(m-2)x+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Bước 1: Ta có $y'=3mx^2+2mx+(m-2)$

Bước 2: Yêu cầu bài toán tương đương với

$y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow 3mx^2+2mx+(m-2)\le 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$

Bước 3: $y'\le 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=6m-2m^2\le 0\\ a=3m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 3\end{array}\right.\Leftrightarrow m<0\\ m<0\end{cases}$

Vậy $m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải của học sinh trên là đúng hay sai? Nếu lời giải sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 1 **B.** Sai từ bước 2 **C.** Sai từ bước 3 **D.** Đúng

Câu 16. ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $(-2;2)$ **B.** $(-\infty;2]$ **C.** $[-2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)$

Câu 17. ***(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $m>2$ **B.** $m\le 2$ **C.** $m<1$ **D.** $m\ge 1$

Câu 18. ***(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{mx^2}{2}+2x+2017$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$ **B.** $m\le 2\sqrt{2}$ **C.** $-2\sqrt{2}\le m$ **D.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

GV: Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 19. ***(Trường THPT Chuyên Vị Thanh năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{m\cos x-2}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $-2<m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $1\le m<2$.

C. $-2<m\le 0$. **D.** $m\ge 2$.

Câu 20. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2\le m\le 1$ **B.** $-2<m<1$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$

Câu 21. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m<0$ hoặc $m>6$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

Câu 22. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên năm 2017)*** Tìm m để hàm số $f(x)=\dfrac{mx+9}{x+m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $-3\le m\le -1$ **B.** $-3<m\le -1$ **C.** $-3\le m\le 3$ **D.** $-3<m<3$

Câu 23. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên năm 2017)*** Tìm m để hàm số $f(x)=(m+2)\dfrac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(m-8)x+m^2-1$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m<-2$ **B.** $m\ge -2$ **C.** $m\le -2$ **D.** $m\in(-\infty;+\infty)$

Câu 24. ***(Trường THPT Chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $m\le -1$ **B.** $m\le 0$ **C.** $m\le -3$ **D.** $m\le -2$

Câu 25. ***(Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx}$ đồng biến trên $[1,2]$.

A. $m>\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m>-8$.

Câu 26. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi lần 2 năm 2017)*** Hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-5)x-\dfrac{2}{3}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì điều kiện của m là

A. $m\le -2$ **B.** $-2\le m\le 2$ **C.** $m\ge 2$ **D.** $-2<m<2$

Câu 27. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=m\sin x+7x-5m+3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le -7$ **B.** $-7\le m\le 7$ **C.** $m\ge 7$ **D.** $m\le -1$

Câu 28. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-3\le m\le -\dfrac{1}{5}$. **B.** $-3<m<-\dfrac{1}{5}$. **C.** $m<-3$. **D.** $m\ge -\dfrac{1}{5}$.

Câu 29. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu lần 2 năm 2017)*** Tìm m nhỏ nhất để hàm số $y=x^3-3mx^2+x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $m=2$.

Câu 30. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$. Tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là:

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

A. $1 \le m \le 2.$ **B.** $m = 1.$ **C.** $1 < m < 2.$ **D.** $m = 2.$

Câu 31. ***(Trường THPT Chuyên Ngoại Ngữ năm 2017)*** Tìm tập nghiệm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$

A. $m \in (2;+\infty).$ **B.** $m \in (-2;0).$

C. $m \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty).$ **D.** $m \in (-\infty;-2).$

Câu 32. ***(Trường THPT Chuyên Hạ Long lần 1 năm 2017)*** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \ge \dfrac{5}{2}$ **B.** $m \le \dfrac{5}{2}$ **C.** $m \le \dfrac{5}{4}$ **D.** $m \ge \dfrac{5}{4}$

Câu 33. ***(Trường THPT Hùng Vương năm 2017)*** Xác định m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ có độ dài khoảng nghịch biến bằng $2\sqrt{5}$

A. $m = -2,\ m = 4.$ **B.** $m = 1, m = 3.$ **C.** $m = 0, m = -1.$ **D.** $m = 2, m = -4.$

Câu 34. ***(Trường THPT Chu Văn An – Gia Lai lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - (m+1).\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. Không có m **B.** $-1 \le m \le -\dfrac{1}{2}$ **C.** $m < -\dfrac{1}{2}$ **D.** $m > -1$

Câu 35. ***(Trường THPT Chuyên Lam Sơn năm 2017)*** Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \dfrac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

A. $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ **C.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ **D.** $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$

Câu 36. ***(Sở GD và ĐT Đà Nẵng năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 4mx + 4m^2 + 3}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$

A. $m \le -1$ **B.** $m > -1$ **C.** $m \le 2$ **D.** $m > 2$

Câu 37. [NTL] Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$ là đoạn $T = [a;b]$. Tính $a+b$.

A. $a+b=1$ **B.** $a+b=-\dfrac{1}{6}$ **C.** $a+b=\dfrac{1}{6}$ **D.** $a+b=-1$

Câu 38. ***(Sở GD và ĐT Hưng Yên lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

A. $m \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$ **B.** $m \ge 1$ **C.** $-1 < m < 2$ **D.** $1 \le m < 2$

Câu 39. ***(Sở GD và ĐT Hưng Yên lần 1 năm 2017)*** Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(2m-1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m = 1$ **B.** Không có giá trị của m

C. $m \ne 1$ **D.** Luôn thỏa mãn với mọi giá trị của m

Câu 40. ***(Sở GD và ĐT Hà Nam năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để hàm số $y = \ln(x^2+4) - mx + 2$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

A. $m \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right).$ **B.** $m \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right].$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

C. $m\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Câu 41. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia – BGD năm 2017)*** Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 5

Câu 42. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia – BGD năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$. **C.** $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$.

Câu 43. ***(Đề Thi Tham Khảo THPT Quốc Gia – BGD năm 2017)*** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-1)x+1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hàm số luôn đồng biến $\forall a\ge 2$

B. Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu $\forall a<-2$

C. Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(0;1)$ với $0<a<1$

D. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ với $1<a<2$

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2+\frac{x}{2}\sin 2\alpha+3$ với giá trị nào của α thì hàm số luôn luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $\alpha=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ **B.** $\alpha\ne\frac{\pi}{4}+k\pi$ **C.** $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$ **D.** $\alpha=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

Câu 46. ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\sin x-2m}{1-\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. $m\le\frac{5}{8}$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ \frac{1}{4}<m\le\frac{5}{8}\end{array}\right.$ **C.** $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$ **D.** $m\le 1$

Câu 47. ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2x^2+(m+3)x+m$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì giá trị m nhỏ nhất là

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=0$.

Câu 48. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=m(x^2-2x)-\frac{4}{3}(x-3)\sqrt{x-3}-3$ luôn đồng biến trên tập xác định.

A. $m\ge\frac{2}{3}$. **B.** $m\ge\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m\ge\frac{3}{2}$.

Câu 49. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\frac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

A. $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$ **C.** $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$ **D.** $\left[\frac{2}{9};+\infty\right)$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 50. ***(Trường THPT Hàm Rồng năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1-2\sin x}{2\sin x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $m>0$ **B.** $m<-1$ **C.** $m>-1$ **D.** $m\ge 0$

Câu 51. ***(Trường THPT Đoàn Thượng lần 2 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)+m^2x-3mx-3x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]\cup[4;5)$ **B.** $(-3;-1]\cup[4;+\infty)$

C. $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$ **D.** $[-1;4]$

Câu 52. ***(Trường THPT Chuyên Biên Hoà lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\setminus\{-1\}$. **B.** $m\in(-1;2]\setminus\{-1\}$. **C.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 53. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5 **B.** 9 **C.** 7 **D.** 3

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $[5;2)$ **B.** $(-\infty;2]$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;5)$

Câu 54. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\left(m-x^3\right)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $m\le -2$ **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>1$ **D.** $m<1$

Câu 55. ***(Trường THPT Hoà Bình – Bình Định năm 2017)*** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $m\le 0$ hoặc $m\ge 1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m\le 1$ **D.** $m\ge 1$

Câu 57. Cho hàm số $y=m\cot x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa $m^2-4<0$ và làm cho hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. Không có giá trị m **B.** $m\in(-2;2)\setminus\{0\}$ **C.** $m\in(0;2)$ **D.** $m\in(-2;0)$

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-2}{\cot x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$

C. $1\le m<2$ **D.** $m>2$

Gv. Lương Văn Huy - TTBH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 59. Gọi M là tập hợp tất cả các số nguyên dương sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-10)x-1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Số phần tử của tập M là:

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Câu 60. ***(Trường THPT Yên Lạc lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $-4\le m<-1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -6 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$ **D.** $-1<m<2$.

Câu 61. ***(Trường THPT Yên Lạc lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sin x-2}{\sin x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $-1<m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$

Câu 62. ***(Trường THPT Yên Lạc lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x}{2}-\sqrt{x^2-x+m}$ đồng biến trên $(-\infty;2)$.

A. $m=\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 7$.

Câu 63. ***(Trường THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $m\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ **B.** $m\in(-1;1)$. **C.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right)$ **D.** $m\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

Câu 64. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^4-2mx^2$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $m\le -1$ hoặc $m>1$ **B.** $m\le -1$ hoặc $m\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $m=-1$ hoặc $m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D.** $m\le -1$

Câu 65. ***(Trường THPT Chuyên Quang Trung năm 2017)*** Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1\le m<3e^4+1$. **B.** $m\ge 3e^4+1$. **C.** $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$. **D.** $m<3e^2+1$.

Câu 66. ***(Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Câu 67. ***(Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-3]$. **B.** $m\in[3;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in[-3;3]$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 68. ***(Trường THPT Bắc Giang năm 2017)*** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-m}$ đồng biến trên $(0;\pi)$.

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>-\dfrac{1}{2}$.

Câu 69. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 1 năm 2017)*** Các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^3-3mx^2-3x+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và đồ thị của nó không có tiếp tuyến song song với trục hoành là

A. $-1<m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $-1\le m<0$. **D.** $-1<m\le 0$.

Câu 70. ***(Trường THPT Nghĩa Hưng năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}<m<2$ **B.** $m\ge 2$ **C.** $m\le\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\\ m\ge 2\end{array}\right.$

Câu 71. ***(Trường THPT Việt Yên 1 lần 2 năm 2017)*** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+(1-m)\sin x.\cos^2 x+\cos^3 x}{\cos^3 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $-2<m\le 1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\le -2$ **D.** $m>0$

Câu 72. ***(Trường THPT Trần Hưng Đạo – HCM lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(4;16)$

A. $m\ge 4$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 3<m\le 4\\ m\ge 16\end{array}\right.$ **C.** $m>3$ **D.** $m=\dfrac{33}{16}$

Câu 73. ***(Trường THPT Thanh Thuỷ năm 2017)*** Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{e^x-1}{e^x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$

A. $\left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{1}{e^2}\\ \dfrac{1}{e}\le m<1\end{array}\right.$ **B.** $\dfrac{1}{e}\le m<1$ **C.** $m<1$ **D.** $m<\dfrac{1}{e^2}$

Câu 74. ***(Trường THPT Sào Nam năm 2017)*** Các giá trị của m để hàm số $y=x+m\left(\sin x+\cos x+m^{2017}\right)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $0\le m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le m\le 0$ **D.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$

Câu 75. ***(Trường THPT Chuyên Bình lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+mx}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $m>-2$ **B.** $m\ge -1$ **C.** $m>-1$ **D.** $m\ge -2$

Câu 76. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2+(a+3)x-4$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ thì giá trị cần tìm của tham số a là :

A. $a<-3$ **B.** $a>-3$ **C.** $-3<a<\dfrac{12}{7}$ **D.** $a\ge\dfrac{12}{7}$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 77. ***(Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu lần 1 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-3;-2]$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 78. ***(Trường THPT Chuyên Quang Trung năm 2017)*** Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1\le m<3e^4+1$ **B.** $m\ge 3e^4+1$ **C.** $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$ **D.** $m<3e^2+1$

Câu 79. ***(Sở GD và ĐT Đồng Tháp năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)$ hoặc $(1;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 80. ***(Sở GD và ĐT Đồng Tháp năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx-(2m-3)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[1;3]$. **B.** $[-3;-1]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 81. ***(Trường THPT Hàm Rồng lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1-2\sin x}{2\sin x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

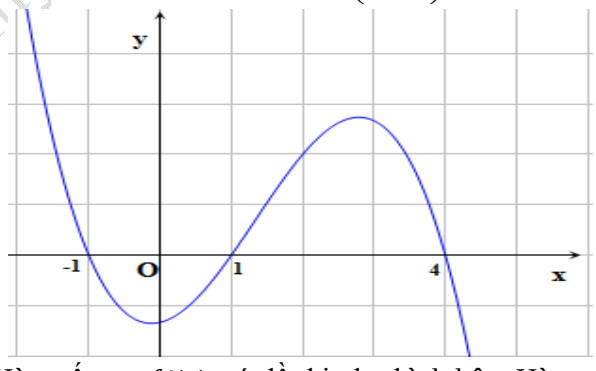
A. $m>-1$ **B.** $m<-1$ **C.** $m\ge 0$ **D.** $m>0$

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$

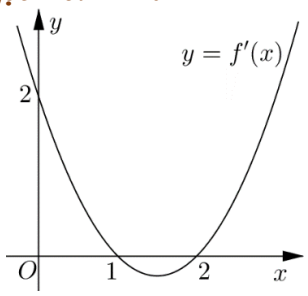
Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng

A. $\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$. **D.** $(-2;-1)$.



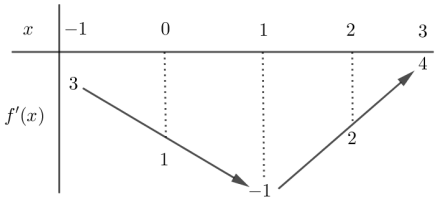
Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng?

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì – HN – 0969141404



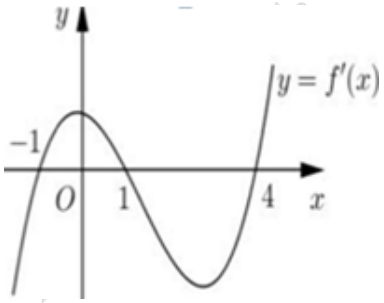
A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng



A. $(2;4)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

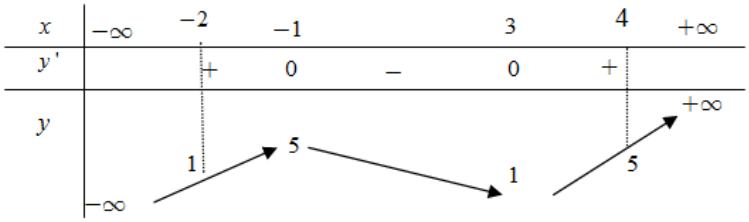
Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

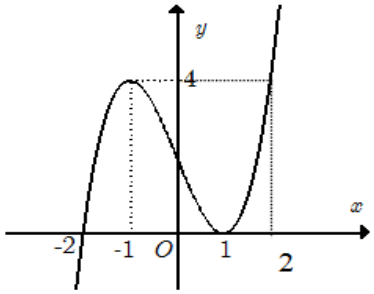


Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt

A. $m\in(-2;4)\setminus\{-1;3\}$. **B.** $m\in[-2;4]\setminus\{-1;3\}$. **C.** $m\in(1;5)$. **D.** $m\in(-2;4)$.

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ

Gv : Lương Văn Huy - 0969141404



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=f(m)$ có nghiệm duy nhất

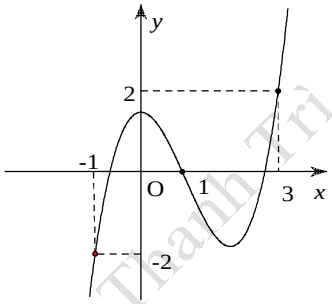
A. $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

B. $m\in(-2;2)$.

C. $m\in(0;4)$.

D. $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 89. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìmcác khoảng đơn điệu của hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2017$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(1;3)$.

B. Hàm số $g(x)$có 2 điểm cực trị đại.

C. Hàm số $g(x)$đồng biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

ĐÁP ÁN

A. Bài toán đơn điệu không chứa tham số

1. D	2. D	3. C	4. D	5. D	6. D	7. C	8. B	9. B	10. C
11. A	12. B	13. D	14. A	15. D	16. B	17. B	18. A	19. C	20. C
21. D	22. C	23. A	24. B	25. A	26. D	27. B	28. B	29. A	30. B
31. A	32. D	33. A	34. B	35. B	36. C	37. D	38. D	39. C	40. C
41. A	42. C	43. C	44. A	45. C	46. B	47. A	48. D		

B. Bài toán đơn điệu chứa tham số

1. C	2. A	3. A	4. C	5. C	6.	7. D	8. D	9. C	10. B
11. C	12. B	13. C	14. B	15. C	16. A	17. D	18. D	19. A	20. B
21. A	22. D	23. C	24. C	25. C	26. B	27. B	28. A	29. C	30. C
31. D	32. C	33. D	34. A	35. C	36. A	37. B	38. D	39. A	40. B
41. A	42. A	43. A	44. D	45. C	46. A	47. A	48. B	49. C	50. D
51. C	52. D	53. C	54. B	55. A	56. D	57. D	58. D	59. A	60. B
61. B	62. D	63. C	64. B	65. B	66. B	67. B	68. B	69. D	70. C
71. B	72. A	73. A	74. A	75. B	76. A	77. C	78. B	79. C	80. A
81. C	82.B	83.C	84.D	85.D	86.B	87.A	88.A	89.C	

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 2 - CỰC TRỊ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D\ (D\in\mathbb{R})$ và $x_0\in D$.

a. x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b)\subset D$ và $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

b. x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b)\subset D$ và $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$.

- Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Lưu ý:

- *Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp D; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứ điểm x_0.*
- *Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp D. Hàm số cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp số thực cho trước.*
- *Đôi khi ta cũng nói đến điểm cực trị của đồ thị hàm số.*

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

Bảng sau đây tóm tắt các khái niệm được sử dụng trong phần này:

x_0	$f(x_0)$	$(x_0;f(x_0))$
Điểm cực đại của hàm số f	Giá trị cực đại (cực đại) của hàm số f	Điểm cực đại của đồ thị hàm số f
Điểm cực tiểu của hàm số f	Giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số f	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số f
Điểm cực trị của hàm số f	Cực trị của hàm số f	Điểm cực trị của đồ thị hàm số f

2. Điều kiện cần và đủ để hàm số đạt cực trị

2.1Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÍ 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

Lưu ý :

- *Điều ngược lại có thể không đúng.*
- *Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.*
- *Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.*

2.2Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại

điểm x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (cực tiểu)	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (cực đại)	↘	

ĐỊNH LÍ 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

- Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
- Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Từ đó ta có quy tắc để tìm cực trị

☞ **Quy tắc 1**

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

☞ **Quy tắc 2**

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i\,(i=1,2,...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

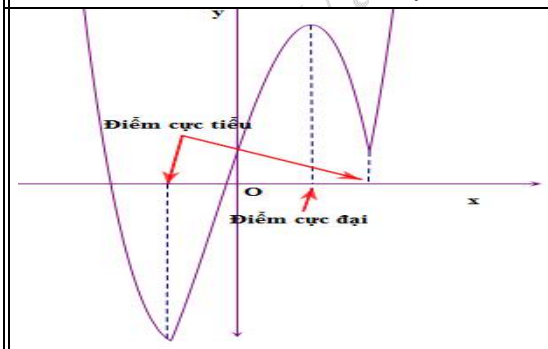
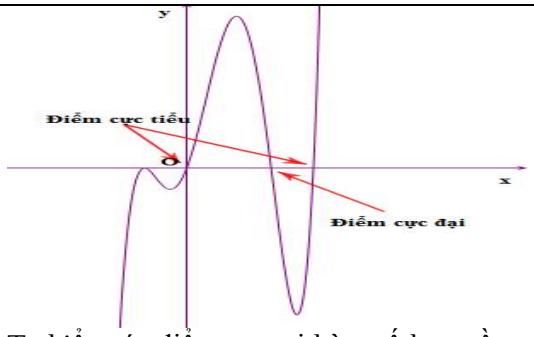
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

BÀI TOÁN 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA MỘT HÀM SỐ CHO TRƯỚC

a. Phương pháp:

- Áp dụng quy tắc 1 hoặc quy tắc 2 để tìm cực trị nếu đề bài cho dạng hàm số.
- Dùng dấu hiệu nhận biết để xác định cực trị nếu đề bài cho dạng bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số.
- Dùng dấu hiệu đổi dấu của f' nếu đồ thị cho biểu thức của f' hoặc đồ thị của hàm số f'

Dấu hiệu nhận biết cực trị khi cho đồ thị hàm số f hoặc đồ thị hàm số f'

Đồ thị hàm số f	Đồ thị hàm số f'
 Ta hiểu các điểm cực trị của đồ thị hàm số bao gồm các đỉnh và các điểm tại đó đồ thị gấp khúc	 Ta hiểu các điểm cực trị hàm số bao gồm các điểm làm cho f' đổi dấu (cắt xuyên trục Ox)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. ***(THPT Triệu Sơn 2)*** Hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây đúng ?

Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

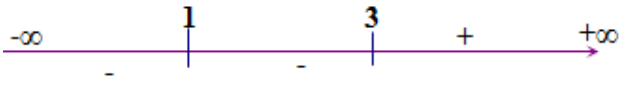
A. Hàm số có một điểm cực đại
B. Hàm số có hai điểm cực trị.
C. Hàm số có đúng một điểm cực trị.
D. Hàm số không có điểm cực trị.

Giải.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Dấu của f'



Nhận thấy f'chỉ đổi dấu qua $x=3$. Vậy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

Ví dụ 2. (*THPT Kim Thành – Hải Dương*) Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có điểm cực đại là

A. $I(2;3)$ **B.** $I(0;1)$ **C.** $I(0;2)$ **D.** Đáp án khác

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$$y'=3x^2-6x\ \Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=2\Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$$

Dấu của y'



Nhận thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x đi qua điểm $x=0$. Do vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I(0;2)$ (đáp án C).

Ví dụ 3. (*Thi thử Vinastudy.vn*) Số điểm cực trị của hàm số $y=x^4+2x^3+2017$ là ?

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

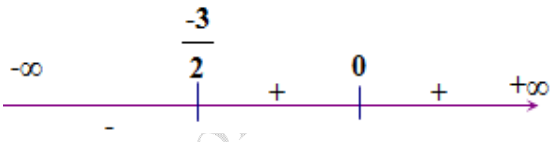
Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$$y'=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 2x^2(2x+3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Dấu của y'



Nhận thấy y' chỉ đổi dấu qua điểm duy nhất $x=-\dfrac{3}{2}$. Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị.

Đáp án A

Ví dụ 4. (*SGD Bắc Ninh*) Hàm số $y=x^2-2|x|+2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A.1. **B.**3. **C.**0. **D.**2.

Giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=x^2-2|x|+2=\left\{\begin{array}{l} x^2+2x+2 \text{ với } x<0 \\ x^2-2x+2 \text{ với } x\geq 0 \end{array}\right.\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l} 2x+2 \text{ với } x<0 \\ 2x-2 \text{ với } x>0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0 \text{ với } x<0\\2x-2=0 \text{ với } x>0\end{array}\right.$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$

Ta có bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra số điểm cực trị của hàm số $y=x^2-2|x|+2$ là 3 (đáp án B)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0 +		-	0 +
y	$+\infty$	CT 1	CĐ 2	CT 1	$+\infty$

Ví dụ 5. (*THPT Kiến An – Hải Phòng*) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	$\|$	$-$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -1 \nearrow$	3	$\searrow 1 \searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

B. Hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

C. Hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

Giải.

Nhận thấy $f'(x)=0$ tại hai điểm $x=-1$ và $x=5$. Đạo hàm của hàm số không xác định tại $x=2$ nhưng liên tục và xác định tại điểm $x=2$

f' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua hai điểm $x=-1\Rightarrow x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số

f' đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua hai điểm $x=2\Rightarrow x=2$ là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$. Và f' không đổi dấu khi x đi qua điểm $x=5$ nên $x=5$ không phải là điểm cực trị của hàm số

Vậy hàm số có 1 cực đại và 1 cực tiểu (đáp án B)

Lưu ý : Khi xét cực trị ta chỉ xét các điểm làm cho đạo hàm bằng không và đạo hàm không xác định.

Ví dụ 6. (*THPT Hà Trung – Thanh Hóa*) Số cực trị của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}-x$ là

A. Hàm số không có cực trị **B.** Có 3 cực trị

C. Có 1 cực trị **D.** Có 2 cực trị

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-1$ xác định với $\forall x\neq 0$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{27}$

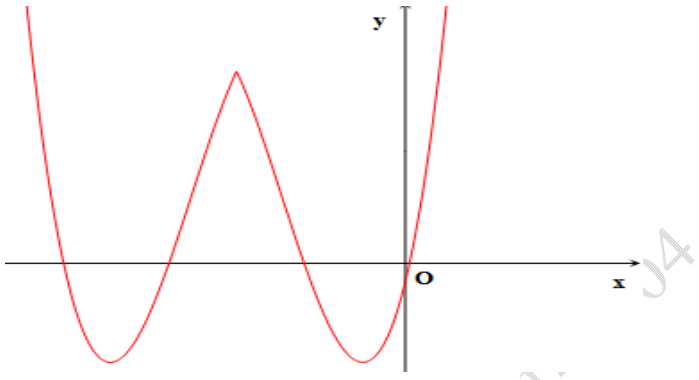
Bảng biến thiên như hình vẽ

Quan sát bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho có 2 cực trị (đáp án D)

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{27}$	$+\infty$
y'	$-$	$\|$ $+$	0 $-$	
y	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow -\infty$

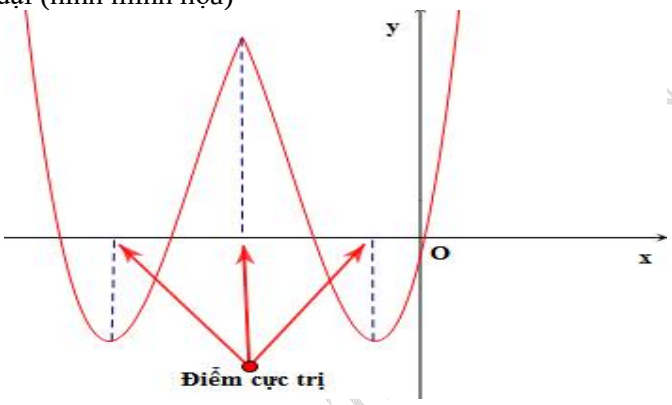
Gv. Lương Văn Huy - ĐTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên R, có đồ thị được mô ta như hình vẽ bên. Số cực trị của hàm số là?



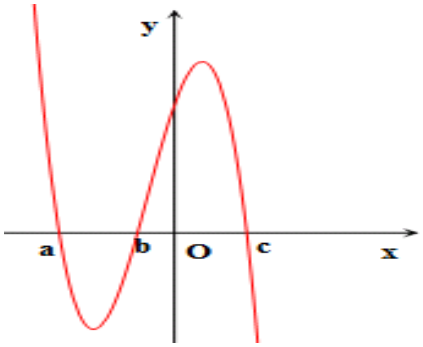
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

Giải.
Theo dấu hiệu nhận biết cực trị hàm số dựa vào đồ thị hàm số ta nhận thấy đồ thị hàm số đã cho có 3 cực trị. Gồm 2 cực tiểu và một cực đại (hình minh họa)



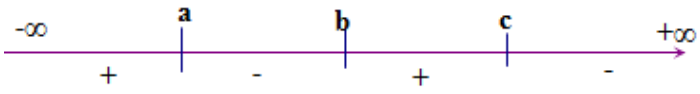
Vậy số cực trị của hàm số đã cho là 3 (đáp án C)

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A.Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại.
B. Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực đại.
C. Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.
D. Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị

Giải.
Theo đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0$ tại các điểm $x=a, x=b, x=c$



Bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$ như hình bên.Theo bảng xét dấu của f'ta có :
Hhàm số đạt cực đại tại $x=a$ và $x=c$
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=b$
Vậy đáp án đúng là B

BÀI TOÁN 2: TÌM ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ.

Dạng 1: Tìm *m* để hàm số không có cực trị

a. Phương pháp: Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị $\Leftrightarrow f'$ không đổi dấu khi x đi qua các điểm tới hạn,hoặc không xác định tại điểm đó (các điểm làm cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định). Do vậy ta có kết luận

- Hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac\le 0$.
- Hàm bậc nhất/bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0;ad-bc\neq 0\right)$ không có cực trị.
- Hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị

Dạng 2: Tìm *m* để hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại $x=x_0$

b. Phương pháp : Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=x_0 \Leftrightarrow f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định. Do vậy với các hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$, hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ đạt cực trị tại $x=x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$.

- Giải phương trình $f'(x_0)=0$ tìm được các giá trị m.
- Thay *m* vào hàm ban đầu để kiểm tra.

Hoặc

- Giải phương trình $f'(x_0)=0$ tìm được các giá trị m.
- Kết hợp với điều kiện $f''(x_0)<0$ với x_0 là điểm cực đại hoặc $f''(x_0)>0$ với x_0 là điểm cực tiểu suy ra điều kiện của *m*.

Dạng 3: Tìm m để hàm số có 2, 3 cực trị.

c. Phương pháp: Hàm số $y=f(x)$ có i điểm cực trị $\Rightarrow f'$ đổi dấu khi đi qua i điểm thuộc tập xác định.

Với các hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$, hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ ta có các nhận xét.

- Hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac>0$.
- Hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$,$(y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right))$ có

- Ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $2x\left(2ax^2+b\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $2ax^2+b=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab<0$
- Một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $2ax^2+b=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow ab\ge 0$.
- Một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$.
- Hai điểm cực đại một điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$.
- Chỉ có một điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b\le 0 \end{cases}$.
- Chỉ có một điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b\ge 0 \end{cases}$.

d. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+\dfrac{4}{3}x-2017$ không có điểm cực trị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m>-3$ **B.** $-2<m<1$ **C.** $m<1$ **D.** $-3\le m\le 1$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-2(m+1)x+\frac{4}{3}$.

Đồ thị hàm số đã cho không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $3x^2-2(m+1)x+\frac{4}{3}=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-4\le 0\Leftrightarrow (m+1)^2\le 4\Leftrightarrow -3\le m\le 1$ (đáp án D)

Ví dụ 2: ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=0$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=2$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=1\Rightarrow y'(1)=0\Leftrightarrow 1-2m+m^2-m+1=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\end{array}\right.$

Với $m=1$ hàm số có $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0(\forall x\in\mathbb{R})$ (loại)

Với $m=2$ hàm số có $y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=3\end{array}\right.$

Dấu y'



Dựa vào dấu của y' ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=1$ (thỏa mãn)

Vậy đáp án đúng là D.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng dấu hiệu 2 để xử lí bài toán như sau

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

$y''=2x-2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1\Rightarrow \begin{cases} y'(1)=0\\ y''(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2=0\\ 2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\Leftrightarrow m=2\\ m>1\end{array}\right.$ (đáp án D)

Nhận xét: Với dạng bài cho giá trị tham số cụ thể ta có thể sử dụng phương pháp thay đáp án

Thử với $m=0\Rightarrow y'=x^2+1>0(\forall x\in\mathbb{R})$ (loại A).

Thử với $m=1$ hàm số có $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0(\forall x\in\mathbb{R})$ (loại B)

Ví dụ 3: ***(Trường THPT Lê Lợi năm 2017)*** Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có ba cực trị

A. k = 3 **B.** k = -1 **C.** k = 1 **D.** k = 2

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow k(4k-5)<0\Leftrightarrow 0<k<\frac{5}{4}$

Vậy chọn đáp án C

Ví dụ 4: ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $f(x)=x^4-2(m-2)x^2+m^2-1$ có đúng một cực trị?

A. $m<2$ **B.** $m\le 2$ **C.** $m>2$ **D.** $m\ge 2$

© Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số có đúng một cực trị $\Leftrightarrow 1.\left(-2\left[m-2\right]\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(m-2\right)\le 0\Leftrightarrow m\le 2$

Vậy chọn đáp án B

Ví dụ 5: ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+\left(2m-1\right)x^2+m-2$ chỉ có một cực đại và không có cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m> \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m\le \frac{1}{2}$.

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với $m=0$ hàm số trở thành $y=-x^2-2\Rightarrow y'=-2x=0\Leftrightarrow x=0$. Nhận thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x đi qua điểm $x=0$. Vậy hàm số chỉ có một cực đại và không có cực tiểu.

Với $m\ne 0$ đồ thị hàm số chỉ có một cực đại và không có cực tiểu

$$\left\{\begin{array}{l} m<0 \\ 2m-1\le 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<0 \\ m\le \frac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow m<0$$

Kết hợp cả 2 trường hợp vậy ta có $m\le 0$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Ví dụ 6: ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=mx^2+2\left(m^2-5\right)x^4+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Dễ dàng nhận thấy với $m^2-5=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ hàm số chỉ có một cực trị (loại)

Với $m^2-5\ne 0$ khi đó hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\left(m^2-5\right)<0 \\ m>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{5}<m<\sqrt{5} \\ m>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m<\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=1;2$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài (đáp án A)

Ví dụ 7: ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{\left(m-1\right)x^3}{3}+\left(m-1\right)x^2+4x-1$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2 đồng thời $x_1<x_2$ khi và chỉ khi:

A. $m>5$ **B.** $m=1$ hoặc $m=5$ **C.** $m<1$ hoặc $m>5$ **D.** $m<1$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

- Với $m=1$ hàm số trở thành $y=4x-1$ và không có cực trị (loại)
- Với $m\ne 1$.

$y'=\left(m-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x+4$

$\Delta'_{y'}=\left(m-1\right)^2-4\left(m-1\right)=m^2-6m+5$

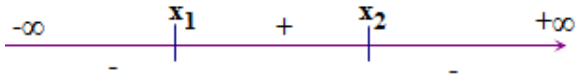
Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(m-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'}=m^2-6m+5>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>5 \end{array}\right.(1)$$

Khi đó hàm số đạt cực trị x_1 , x_2 (giả sử $x_1<x_2$)

Để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1 , đạt cực đại tại x_2 thì dấu của y' có dạng

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



$\Rightarrow (m-1)<0 \Rightarrow m<1 (2)$

Kết hợp (1) và $(2) \Rightarrow m<1$ là điều kiện cần tìm (đáp án D)

Ví dụ 8: ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{(m-1)x^3}{3}+x^2+(m-1)x+3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số đã cho không có cực trị là:

A. $\{1\}$ **B.** $[0;2]$

C. $[0;2]\backslash\{1\}$ **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\cup\{1\}$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với $m=1$ hàm số trở thành $y=3$ và không có cực trị (thỏa mãn)

Với $m\neq 1$ ta có

$y'=(m-1)x^2+2x+(m-1)$

$\Delta'_{y'}=1^2-(m-1)^2=-m^2+2m$

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'}=-m^2+2m\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$

Vậy $m\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\cup\{1\}$

Ví dụ 9: ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi:

A. $m<0$ **B.** $m\neq 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m=0$

Giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x+m; y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12-12+m=0 \\ 12-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=0$

Đáp án D

BÀI TOÁN 2. CỰC TRỊ HÀM SỐ BẬC BA $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d phụ thuộc vào tham số). Tìm giá trị của tham số để hàm số có cực đại, cực tiểu (cực trị) thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp tổng quát:

Bước 1: Tính $y'=3ax^2+2bx+c, y'=0 \Leftrightarrow g(x)=3ax^2+2bx+c=0$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ giá trị tham số thuộc miền D nào đó (*)

Bước 2:

Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình, một bất phương trình hoặc một biểu thức theo theo tham số, giải điều kiện này ta được tham số sau đó đối chiếu với điều kiện (*) và kết luận

Chú ý:

- Với những điều kiện liên quan tới hoành độ thì giả sử $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị thì

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$x_1;x_2$ là hai nghiệm của $g(x)=0$ theo viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$ và biến đổi điều kiện theo tổng và tích chứ không nên thay trực tiếp vào khi điều kiện phức tạp

- Với những điều kiện liên quan tới tung độ (giá trị cực trị) thì trong trường hợp Δ là một số chính phương thì tìm được cụ thể hai nghiệm $x_1;x_2$ và khi đó tung độ tương tứng là $y_1=f(x_1);\ y_2=f(x_2)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}} \text{ với } e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

- Đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là: $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)\xrightarrow{x=i}Ai+B\Rightarrow y=Ax+B$$

- Hoặc sử dụng công thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$
- Trong trường hợp nghiệm y' "xấu" ta nên thay gián tiếp vào phương trình đường thẳng cực trị để biểu diễn giá trị cực trị ở dạng tổng quát.

Bài toán 1: Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu

a. Phương pháp:

- Hàm số có cực trị và có hoành độ dương (hai cực trị nằm phía phải trục Oy)

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $0<x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \\ P=x_1x_2>0 \\ S=x_1+x_2>0 \end{cases}$

- Hàm số có cực trị và có hoành độ âm (hai cực trị nằm phía trái trục Oy)

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1<x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \\ P=x_1x_2>0 \\ S=x_1+x_2<0 \end{cases}$

- Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu (hai cực trị nằm hai phía trục *Oy*)

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P=x_1x_2<0$

- Hàm số có hai cực trị *có giá trị* cùng dấu (hai cực trị nằm cùng phía so với trục *Ox*)

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \\ y_1y_2>0 \end{cases}$$

- Hàm số có hai cực trị *có giá trị* trái dấu (hai cực trị nằm khác phía so với trục *Ox*)

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \\ y_1y_2<0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt (quay về bài toán tương giao của hàm bậc 3 và trục Ox)

- Hàm số có hai cực trị thỏa mãn điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số α cho

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

trước. Dạng này ta nên áp dụng tính các kết quả của bài toán so sánh nghiệm của tam thức bậc hai với một số hoặc đặt ẩn phụ đưa về dạng so sánh với 0

Chú ý: Với những bài toán liên quan tới hoành độ, để cho đơn giải ta có thể gộp bước 1 và bước 2 lại với nhau như bài toán tổng quát

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2\ \ (1)$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của hàm số có hoành độ dương

A. $\frac{5}{4}\le m\le 2$ **B.** $\frac{5}{4}<m<2$ **C.** $-1<m<2$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2(2m-1)x+2-m=0\ \ (*)$

Để hàm số có hoành độ các điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow 0<x_1<x_2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4m^2-m-5>0\\ \frac{2-m}{3}>0\\ \frac{2(2m-1)}{3}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<-1;m>\frac{5}{4}\\ m<2\\ m>\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2$$

Vậy $\frac{5}{4}<m<2$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho y_{CD} và y_{CT} trái dấu?

A. $0<m<4$ **B.** $m<4$ **C.** $m>0$ **D.** $0\le m\le 4$

Giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=3x^2-6x;y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$

Vậy hàm số luôn có cực đại, cực tiểu tại hai điểm $M_1(0;m);\ M_2(2;m-4)$

Để y_{CD} và y_{CT} trái dấu tức là $y_{CD}.y_{CT}<0\Leftrightarrow m(m-4)<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Vậy với $0<m<4$ hàm số luôn có cực đại, cực tiểu sao cho y_{CD} và y_{CT} trái dấu

Vậy đáp án đúng là A

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Xác định m sao cho hàm số có hai cực trị cùng dấu?

A. $-\frac{17}{4}\le m\le 2$ **B.** $m<2$ **C.** $m>-\frac{17}{4}$ **D.** $-\frac{17}{4}<m<2$

Giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2-12x+3(m+2);\ y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+m+2=0\ \ (*)$

$\Delta'=4-(m+2)=2-m$

Để hàm số có 2 cực trị thì: $\Delta'>0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$

Ta có

$$f(x)=\left[3x^2-12x+3(m+2)\right]\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)-4x+2mx+m-2$$

Gv . Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Rightarrow$ giá trị cực trị là: $f(x_0) = -4x_0 + 2mx_0 + m - 2 = 2x_0(m-2) + m - 2 = (m-2)(2x_0+1)$

Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị

Hàm số có 2 cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(2x_1+1)(m-2)(2x_2+1) > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1) > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2(4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1) > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+1) > 0$ (1)

Mặt khác: $x_1 + x_2 = \dfrac{12}{3} = 4$, $x_1.x_2 = m+2$

Do đó (1) $\Leftrightarrow (m-2)^2[4(m+2) + 2.4 + 1] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện có cực trị $m < 2$, ta được $-\dfrac{17}{4} < m < 2$ (đáp án D).

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2(2m+1)x^2 + (5m^2 + 10m - 3)x - 10m^2 - 4m + 6$ (1) (với m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số (1) có hai cực trị và các giá trị cực trị của hàm số (1) trái dấu nhau?

A. $m \in (-3;1)$ **B.** $m \neq \dfrac{1}{5}$ **C.** $m \in (-3;1) \setminus \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$ **D.** $m \in [-3;1] \setminus \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

Giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Hàm số (1) có hai cực trị mà giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 - 2(2m+1)x^2 + (5m^2 + 10m - 3)x - 10m^2 - 4m + 6 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4mx + 5m^2 + 2m - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4mx + 5m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases}$ (3)

Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - (5m^2 + 2m - 3) > 0 \\ 4 - 8m + 5m^2 + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Vậy với $m \in (-3;1) \setminus \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$ thì các giá trị cực trị của hàm số trái dấu. (đáp án C)

Bài toán 2: Điều kiện để đồ thị hàm số có điểm cực trị nằm về một phía, hai phía so với một đường nào đó

a. Phương pháp:

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Đồ thị có 2 điểm cực trị nằm cùng một phía đối với Ox

$\Leftrightarrow$ Hàm số có hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ y_1.y_2 > 0 \end{cases}$

- Đồ thị có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Ox

$\Leftrightarrow$ Hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ y_1.y_2 < 0 \end{cases}$

- Đồ thị có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung $\Leftrightarrow x_1.x_2 < 0$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Đồ thị có hai cực trị nằm phía trên trục hoành $\begin{cases} y_1 > 0 \\ y_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 > 0 \\ y_1.y_2 > 0 \end{cases}$

- Đồ thị có hai cực trị nằm phía dưới trục hoành $\begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 < 0 \\ y_1.y_2 > 0 \end{cases}$

- Đồ thị có cực trị tiếp xúc với trục hoành $\left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y_1.y_2 = 0$.

Trong trường hợp đồ thị có 2 điểm cực trị khác phía đối với đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$

Gọi t_1 và t_2 là các giá trị của M_1 và M_2 khi thay vào đường thẳng d:

$t_1 = Ax_1 + By_1 + C$; $t_2 = Ax_2 + By_2 + C$

Đồ thị có 2 điểm cực đại cực tiểu ở hai phía của đường thẳng d:

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 & \text{có 2 nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ t_1 t_2 < 0 \end{cases}$

Đồ thị có 2 điểm cực đại cực tiểu ở cùng phía của đường thẳng d:

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 & \text{có 2 nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (1). Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có các điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung?

A. $1 < m < 2$ **B.** $1 \le m \le 2$ **C.** $m < 1$ **D.** $m \ge 2$

Giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 4(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2 - 3m + 2}{3} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy $1 < m < 2$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành

A. $m \ge -\dfrac{5}{2}$ **B.** $-\dfrac{5}{2} < m < \dfrac{1}{2}$

C. $m \le -\dfrac{5}{2}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{2}$ **D.** $m < -\dfrac{5}{2}$ hoặc $m > \dfrac{1}{2}$

Giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 3m(m+2)$

Điều kiện có cực trị: Phương trình y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 9m(m+2) = 9(m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne -1$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m+2; -2m^3 - 9m^2 - 12m - 5)$; $B(-m; 2m^3 + 3m^2 - 1)$

Để A, B nằm về hai phía của trục hoành thì $y_A.y_B < 0$

$\Leftrightarrow (-2m^3 - 9m^2 - 12m - 5)(2m^3 + 3m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (2m^3 + 9m^2 + 12m + 5)(2m^3 + 3m^2 - 1) > 0$

$\Leftrightarrow (2m+5)(2m-1)(m+1)^4 > 0$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow (2m+5)(2m-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{5}{2} \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy $m<-\dfrac{5}{2}$ hoặc $m>\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm. Đáp án D

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m+4(1)$. Tìm m để hàm số có điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (1) nằm về hai phía đường phân giác góc phần tư thứ nhất

A. $m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$ **B.** $m\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

C. $m\in(-2;1)$ **D.** $m\in[-2;4]$

Giải.

Hàm số đã cho nếu $m\neq 0$ sẽ có hai điểm cực trị là: $A(0;2m+4)$ và $B(2m;-4m^3+2m+4)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình là $(t): y=x \Leftrightarrow x-y=0$

$\Rightarrow \begin{cases} t_A=-2m-4 \\ t_B=4m^3-4 \end{cases}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía của đường phân giác góc phần tư thứ nhất

$\Leftrightarrow t_A.t_B>0 \Leftrightarrow (-2m-4)(4m^3-4)<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Vậy $m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$ là giá trị cần tìm .(đáp án A)

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2-m)x+4$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $x=1$

A. $\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}<m<\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$ **B.** $\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}\le m\le\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$.

C. $\dfrac{6-\sqrt{35}}{2}<m<\dfrac{6+\sqrt{35}}{2}$ **D.** $\dfrac{3-\sqrt{23}}{2}<m<\dfrac{3+\sqrt{23}}{2}$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+m^2-m;\ y'=0 \Leftrightarrow g(x)=3x^2-6mx+m^2-m=0$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2-3(m^2-m)>0 \Leftrightarrow 2m^2+m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (2)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x)=0$. Khi đó cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng

$x=1 \Leftrightarrow x_1<1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<0<x_2-1 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)<0$

$\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2-m}{3}-2m+1<0 \Leftrightarrow m^2-7m+3<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7-\sqrt{37}}{2}<m<\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$

Kết hợp (2) ta được $\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}<m<\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$ là giá trị cần tìm

Chú ý:

- Ta có thể đặt $x=t+1$. Khi đó $g(x)=3(t+1)^2-6m(t+1)+m^2-m=0$ quy về bài toán $g(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Với bài toán nằm về hai phía với đường thẳng $y=ax+b$ ta có thể quy về bài toán tương giao như ví dụ dưới đây

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3+3(m-1)x^2-(2m+1)x-m+4$ (1), m là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị của hàm số (1) nằm về hai phía khác nhau của đường thẳng $y=1$

A. $m\neq 1$ **B.** $m\in\mathbb{R}$ **C.** $(-2;3)$ **D.** $m\neq 0$

Giải.

Ta có $y'=3x^2+6(m-1)x-(2m+1)$

Vì $\Delta'=9m^2-12m+12>0,\forall m$ nên y' có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số (1) luôn có các điểm cực đại, cực tiểu.

Các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) nằm về hai phía khác nhau của đường thẳng $y=1$ khi và chỉ khi đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt.

Điều này đương đương với phương trình tương giao $x^3+3(m-1)x^2-(2m+1)x+4-m=1$ (*) có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $(*)\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(3m-2)x+m-3\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(3m-2)x+m-3=0. \end{array}\right.$

(*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi g(x) có hai nghiệm phân biệt khác 1. Từ đó ta được

$\left\{\begin{array}{l} \Delta_{g(x)}=9m^2-16m+16>0 \\ g(1)=4m-4\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\neq 1.$

Vậy $m\neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán (đáp án A)

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-4$. Hãy tìm các giá trị của a để hai điểm cực trị của hàm số trên nằm về hai phía của đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4ay+a^2-1=0$

A. $a\in\mathbb{R}$ **B.** $-15<a<-1$ **C.** $-15\leq a\leq -1$ **D.** $a\neq 0$

Giải.

Ta có $y'=3x^2+6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;-4)$ và $B(-2;0)$.

Để hai điểm cực trị này nằm về hai phía của đường tròn (C) thì:

$P_{(A,(C))}.P_{(B,(C))}<0\Leftrightarrow (15+16a+a^2)(7+a^2)<0\Leftrightarrow -15<a<-1$ vì $a^2+7>0,\forall a$

Vậy $-15<a<-1$ là giá trị cần tìm

Chú ý: Ta có thể làm như sau

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2a)^2=3a^2+2$ có tâm $I(1;2a)$, bán kính $R=\sqrt{3a^2+2}$

Ta có $IB=\sqrt{9+4a^2}>R\Rightarrow$ Điểm B nằm ngoài đường tròn (C).

Vậy để hai điểm cực trị nằm hai phía

$\Leftrightarrow IA<R\Leftrightarrow 1+(4+2a)^2<3a^2+2\Leftrightarrow 15+16a+a^2<0\Leftrightarrow -15<a<-1$

Bài toán 3: Điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn một điều kiện về hoành độ

Tương tự phương pháp đã nói ở bài toán 2:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+(m-2)x^2+(m-1)x+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để hàm số có cực đại tại x_1, cực tiểu tại x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<1$?

A. $\frac{5}{4}\leq m<\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}<m<\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{5}{4}<m<\frac{4}{3}$ **D.** $m>\frac{4}{3}$

Gv: Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Ta có $y' = mx^2 + 2(m-2)x + m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-2)x + m - 1 = 0$ (1)

Hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$ khi $m > 0$ và (1) có 2 nghiệm phân biệt bé hơn 1

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ thay vào (1) ta có

$m(t+1)^2 + 2(m-2)(t+1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow mt^2 + 4(m-1)t + 4m - 5 = 0$ (2)

(1) có 2 nghiệm phân biệt bé hơn 1 khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4(m-1)^2 - m(4m-5) > 0 \\ \dfrac{4m-5}{m} > 0 \\ \dfrac{1-m}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m + 4 > 0 \\ 4m - 5 > 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < \dfrac{4}{3} \\ m > \dfrac{5}{4} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{4}{3}$$

Vậy $\frac{5}{4} < m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Chú ý: *Có thể giải bằng cách* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) < 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + mx$. Tìm m để hàm số đạt cực đại và cực tiểu có hoành độ lớn hơn m?

A. $m > 2$ **D.** $m \neq 0$ **C.** $m < -2$ **D.** $m > -2$

Giải.

Đạo hàm: $y' = x^2 + x + m$

Hàm số đạt cực trị tại những điểm có hoành độ $x > m$

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $m < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - m) + (x_2 - m) > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + x_2) - 2m > 0 \\ x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ 1 - 2m > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m < -2; m > 0 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy $m < -2$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm a để hàm số có cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ các điểm cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + 2x_2 = 1$

A. $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$ **B.** $m = 2$ hoặc $m = \frac{1}{3}$

C. $m = 1$ hoặc $m = 3$ **D.** $m = 2$ hoặc $m = \frac{4}{3}$

Giải.

Đạo hàm $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m\neq 0<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ (*)

Với điều kiện (*) thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ và hàm số đạt cực trị tại $x_1;x_2$

Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}; x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m}$

Ta có: $x_1+2x_2=1\Leftrightarrow x_2=1-\frac{2(m-1)}{m}=\frac{2-m}{m}; x_1=\frac{2(m-1)}{m}-\frac{2-m}{m}=\frac{3m-4}{m}$

$\Rightarrow \frac{2-m}{m}.\frac{3m-4}{m}=\frac{3(m-2)}{m}\Leftrightarrow (2-m)(3m-4)=3m(m-2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Cả 2 giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) vậy $m=2$ hoặc $m=\frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Chú ý: *Với điều kiện $\alpha x_1+\beta x_2=\gamma$ khi kết hợp với định lý viet ta làm như sau*

$\begin{cases} x_1+x_2=S & (1) \\ x_1x_2=P & (2) \\ \alpha x_1+\beta x_2=\gamma & (3) \end{cases}$. *Giải hệ (1) và (3) được $x_1;x_2$, sau đó thế vào (2) để tìm tham số*

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$ với m là tham số thực. Tìm m để hàm số đã cho có cực trị tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|\leq 2$

A. $-3<m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\leq 1$

B. $-3\leq m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\leq 1$

C. $-2<m<-1-\sqrt{2}$ hoặc $-1+\sqrt{2}<m\leq 1$

D. $-2\leq m\leq -1-\sqrt{2}$ hoặc $-1+\sqrt{2}\leq m\leq 1$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-2(m+1)x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (1)

Theo định lý Viet ta có $x_1+x_2=2(m+1)$; $x_1x_2=3$.

Khi đó $|x_1-x_2|\leq 2\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leq 4\Leftrightarrow 4(m+1)^2-12\leq 4\Leftrightarrow (m+1)^2\leq 4\Leftrightarrow -3\leq m\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m là $-3\leq m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\leq 1$

Vậy $-3\leq m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\leq 1$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3mx+2-2m$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có cực đại, cực tiểu tại $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$ thỏa mãn $\frac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}<0$

A. $2<m<5$ **B.** $-1<m<4$ **C.** $1<m<4$ **D.** $0<m<4$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-12x+3m; y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ (*)

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m<4$

Gọi $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ là cực đại, cực tiểu của hàm số với $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (*)

Theo viet $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m \end{cases}$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $y_1-y_2=(x_1-x_2)\left[\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)-6(x_1+x_2)+3m\right]$

Theo giả thiết $\dfrac{y_1-y_2}{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}<0\Leftrightarrow\dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6(x_1+x_2)+3m}{x_1x_2-1}<0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-x_1x_2+3m}{x_1x_2-1}<0$

$\Leftrightarrow\dfrac{16-24-m+3m}{m-1}<0\Leftrightarrow\dfrac{2m-8}{m-1}<0\Leftrightarrow 1<m<4$

Kết hợp với điều kiện ta được $1<m<4$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\dfrac{2}{3}$ (với m là tham số thực). Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$.

A. $m=\dfrac{2}{3}$ **B.** $m=\dfrac{2}{3}$ và $m=0$ **C.** $m=\dfrac{2}{3}$ và $m=2$ **D.** $m=0$

Giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=0\,(*)$

Hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

$\Leftrightarrow\Delta'=m^2+4\left(3m^2-1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\\ m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\end{array}\right.$ (1)

Ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=1-3m^2\end{cases}$. Theo bài ra $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1\Leftrightarrow 1-3m^2+2m=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta suy ra $m=\dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^3-\dfrac{3}{2}(m-2)x^2-3(m-1)x+1$ (1), m là tham số. Tìm $m>0$ để đồ thị hàm số (1) có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là y_{CD},y_{CT} thỏa mãn $2y_{CD}+y_{CT}=4$

A. $m=\pm 1,\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$ **B.** $m=-2,\ m=\dfrac{-2-\sqrt{33}}{2}$

C. $m=\pm 2,\ m=\dfrac{-2\pm\sqrt{33}}{2}$ **D.** $m=1,\ m=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-3(m-2)x-3(m-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-(m-2)x-m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1=-1\\ x=x_2=m-1\end{array}\right.$

Chú ý rằng với $m>0$ thì $x_1<x_2$

Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x_1=-1$ và đạt cực tiểu tại $x_2=m-1$.

Do đó $y_{CD}=y(-1)=\dfrac{3m}{2}$, $y_{CT}=y(m-1)=-\dfrac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1$.

GV: Lương Văn Huy - LĐĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Từ giả thiết ta có $2.\frac{3m}{2}-\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1=4\Leftrightarrow 6m-6-(m+2)(m-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu với yêu cầu $m>0$ ta có giá trị của m là $m=1,\ m=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ (đáp án D)

Chú ý: Với giả thiết $2y_{CD}+y_{CT}=4$ thì phải chỉ rõ đâu là điểm cực đại, đâu là điểm cực tiểu

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3ax+4$. Tìm a để hàm số (1) đạt cực trị tại x_1, x_2 phân biệt và thoả mãn điều kiện $\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{a^2}{x_2^2+2ax_1+9a}=2$?

A. $a=-4$ **B.** $a=\pm 4$ **C.** $a=\pm 2$ **D.** $a=-4$ hoặc $a=0$

Giải.

Đạo hàm $y'=x^2-2ax-3a=0\ (*)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\Leftrightarrow \Delta=4a^2+12a>0$

Theo Viét: $x_1+x_2=2a$

Vì x_1 là nghiệm của (*), do đó: $x_1^2+2ax_2+9a=2a(x_1+x_2)+12a=4a^2+12a>0$

Tương tự: $x_2^2+2ax_1+9a=4a^2+12a>0$

Từ đề bài, ta có $\frac{4a^2+12a}{a^2}+\frac{a^2}{4a^2+12a}=2$. Mặt khác theo bất đẳng thức cosi $VT\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4a^2+12a}{a^2}=1\Leftrightarrow 3a(a+4)=0\Leftrightarrow a=-4$ (do $4a^2+12a>0$)

Vậy $a=-4$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Bài toán 4: Điều kiện liên quan tới khoảng cách, góc

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x-2+m$ (1) (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của hàm số (1) tới trục Ox bằng khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số (1) tới trục Oy. Tổng các giá trị của m thỏa mãn là?

A. 3 **B.** -3 **C.** -2 **D.** 1

Giải.

Ta có $y'=3x^2+6(m+1)x+3m(m+2)$; $y'=0\Leftrightarrow x=m$ hoặc $x=m+2$

Hàm số có cực trị với mọi m. Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là:

$A(m;m^3+3m^2+m-2)$, $B(m+2;m^3+3m^2+m-6)$; A là điểm cực đại, B là điểm cực tiểu.

Ta có $d(A;Ox)=|m^3+3m+m-2|$, $d(B;Oy)=|m+2|$

Theo giả thiết ta có $|m^3+3m+m-2|=|m+2|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-1 \\ m=1 \\ m=0\end{array}\right.$

Tổng các giá trị của m thỏa mãn là $-2-1+1+0=-2$ (đáp án C)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx+2$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại và cực tiểu sao cho khoảng cách từ trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của (C_m) đến tiếp tuyến của

Gv. Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

(C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1 là 16 ?

A. $m=9$ **B.** $m=9$ hoặc $m=-9$ **C.** $m=9$ hoặc $m=1$ **D.** $m=9$ hoặc $m=0$

Giải.

Ta có $y'=3x^2+6x-m$

Hàm số có cực đại cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y'=3x^2+6x-m=0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0\Leftrightarrow m>-3$ (*)

Giả sử $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Theo định lý Viet ta có $x_1+x_2=-1$

$\Rightarrow$ Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(-1;m+4)$

Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ x = 1 có phương trình là $y=y'(1)(x-1)+y(1)$

$\Leftrightarrow (m-9)x+y+3=0$

Ta có $d=d(I,\Delta)=\dfrac{|(m-9)(-1)+m+4+3|}{\sqrt{(m-9)^2+1}}=\dfrac{16}{\sqrt{(m-9)^2+1}}$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{16}{\sqrt{(m-9)^2+1}}=16\Leftrightarrow\sqrt{(m-9)^2+1}=1\Leftrightarrow m=9$ (thỏa mãn (*))

Vậy m = 9 là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu cách đều gốc tọa độ O . Tổng các giá trị của m là?

A. 2 **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Giải.

Ta có $y'=-3x^3+6x+3(m^2-1), y'=0\Leftrightarrow -3x^3+6x+3(m^2-1)=0$ (1)

Để hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó tọa đọ hai điểm cực trị là $A(1-m;-2-2m^2)$ và $B(1+m;-2+2m^2)$

Theo giả thiết hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ $\Leftrightarrow OA=OB$

$\Leftrightarrow (1-m)^2+(-2-2m^2)^2=(1+m)^2+(2-2m^2)^2\Leftrightarrow 4m^3=m\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$ (vì $m\neq 0$) thỏa mãn

Vậy $m=\pm\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án D)

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+1$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu A, B của đồ thị hàm số cùng với điểm $M(-2;2)$ tạo thành góc $\widehat{AMB}=90^0$?

A. $m\in\{1;3;4\}$ **B.** $m\in\{0;\pm 3;4\}$ **C.** $m\in\{0;\pm 1\}$ **D.** $m\in\{0;-1\}$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=3>9,\forall m$ nên hàm số luôn có cực đại và cực tiểu

Khi đó $A(m-1;-3m+3); B(m+1;-3m-1)$ là các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số, để góc

$\angle AMB=90^0\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow (m+1)(m+3)+(-3m+1)(-3m-3)=0$

$\Leftrightarrow 10m^2+10m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy $m=0$ hoặc $m=-1$ là giá trị cần tìm (đáp án D)

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ (1). Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho $\widehat{AOB}=120^0$

A. $m=\dfrac{-12\pm 2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $-4<m<0$

C. $m=\dfrac{-13+2\sqrt{3}}{3}$ **và** $m=\dfrac{-13+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{-12+2\sqrt{3}}{3}$

Giải.

Ta có: $y'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=m+4\\x=0\Rightarrow y=m\end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị $A(0;m)$ và $B(-2;m+4)$

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;m),\overrightarrow{OB}=(-2;m+4)$. Để $\widehat{AOB}=120^0$ thì $\cos\widehat{AOB}=-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left[4+(m+4)^2\right]}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{m^2\left[4+(m+4)^2\right]}=-2m(m+4)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m(m+4)<0\\m^2\left[4+(m+4)^2\right]=\left[-2m(m+4)\right]^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<0\\(m+4)^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<0\\m=\dfrac{-12\pm2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{-12+2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $m=\dfrac{-12+2\sqrt{3}}{3}$ là giá trị cần tìm (đáp án D)

Ví dụ 6. Cho hàm số $2x^3+ax^2-12x-13$. Tìm *a* để hàm số có điểm cực đại, cực tiểu cách đều trục tung ?

A. $a>0$ **B.** $a=0$ **C.** $a\le 0$ **D.** $a\in(-2;\,2)$

Giải.

Đạo hàm $y'=6x^2+2ax-12$

Ta có: $\Delta'=a^2+72>0,\forall a\in R$

Vậy $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

Để hàm số có cực đại, cực tiểu cách đều trục tung thì: $x_1+x_2=0$ (trong đó x_1,x_2 là hoành độ các điểm cực trị và nó là nghiệm của phương trình $y'=0$) $\Leftrightarrow-\dfrac{2a}{6}=0\Leftrightarrow a=0$

Vậy với $a=0$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu cách đều trục *Oy* (đáp án B)

Chú ý: Hai điểm cực trị $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$ cách đều trục tung tức là $d(M_1;Oy)=d(M_2;Oy)$

$\Leftrightarrow|x_1|=|x_2|\Leftrightarrow x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1+x_2=0$ (vì $M_1\ne M_2$)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ (1). Tìm *m* để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O

A. $m=-3\pm2\sqrt{2}$ **B.** $m=-2\pm2\sqrt{2}$ **C.** $m=-1\pm2\sqrt{2}$ **D.** $m=\pm2\sqrt{2}$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Để hàm số có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$

Cực đại của đồ thị hàm số là $A(m-1;2-2m)$ và cực tiểu của đồ thị hàm số là $B(m+1;-2-2m)$

Theo giả thiết ta có $OA=\sqrt{2}OB\Leftrightarrow m^2+6m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m là $m=-3-2\sqrt{2}$ hoặc $m=-3+2\sqrt{2}$. (đáp án A)

Bài toán 5: Điều kiện liên quan tới các tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ (1), m là tham số. Tìm m để đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m=\pm 2$ B. $m=\pm\frac{1}{3}$ C. $m=\pm\frac{1}{4}$ D. $m=\pm\frac{1}{2}$

Giải.

Ta có $y'=-3x^2+6mx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$

Với m ≠ 0 thì đồ thị hàm số (1) có tọa độ 2 điểm cực trị là: $A(0;2)$ và $B(2m;-4m^3+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A, B là: $\frac{x}{2m}=\frac{y-2}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2+y-2=0$

Đường thẳng AB cắt Ox tại $C\left(\frac{1}{m^2};0\right)$, cắt Oy tại $A(0;2)$

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị tạo với các trục tọa độ tam giác OAC vuông tại O ta có:

$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}OA.OC=\frac{1}{m^2}$

Theo giả thiết $S_{\Delta OAC}=4\Rightarrow \frac{1}{m^2}=4\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$ (thỏa mãn $m\neq 0$)

Vậy $m=\pm\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án D)

Xét bài toán tương tự khi nghiệm không đẹp

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+m+2$. Tìm m đề đồ thị hàm số có hai điểm cực trị sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 1?

A. $m=0$ hoặc $m=-2$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-3$

C. $m=0$ hoặc $m=-3$ **D.** $m=0$ hoặc $m=\pm 3$

Giải:

Ta có $y'=3x^2-6x+3m$. Đặt $g(x)=x^2-2x+m$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_g=1-m>0\Leftrightarrow m<1$ (*)

Bằng phép chia y cho g(x) ta được

$y=(x^2-2x+m)(x-1)+2(m-1)x+2m+2$

Khi m < 1. Tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn hệ

$\left\{\begin{array}{l} x^2-2x+m=0 \\ y=(x^2-2x+m)(x-1)+2(m-1)x+2m+2 \end{array}\right.\Rightarrow y=2(m-1)x+2m+2$

Vậy khi m < 1 thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y=2(m-1)x+2m+2$

Tọa độ điểm $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(\frac{m+1}{1-m};0\right)\Rightarrow OA=\left|\frac{m+1}{m-1}\right|$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Tọa độ điểm $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B(0;2m+2)\Rightarrow OB=2|m+1|$

Theo giả thiết $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{(m+1)^2}{|m-1|}=1\Leftrightarrow (m+1)^2=1-m$ (vì (*))

$\Leftrightarrow m^2+3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=-3\end{array}\right.$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m=0$ hoặc $m=-3$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+(m^2-3)x$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số có x_{CD},x_{CT} đồng thời x_{CD},x_{CT} là độ dài 2 cạnh của 1 tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$?

A. $m=\frac{\sqrt{14}}{2}$ **B.** $m=\frac{\pm\sqrt{14}}{2}$ **C.** $m=\frac{\pm\sqrt{13}}{2}$ **D.** $m=\frac{\sqrt{14}}{2}$ và $m=\pm 2$

Giải.

Ta có $y'=x^2-mx+m^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow x^2-mx+m^2-3=0$ (*)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=m^2-4(m^2-)3>0\Leftrightarrow -3m^2+12>0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$ (1)

x_{CD},x_{CT} là 2 nghiệm của (*) và là độ dài 2 cạnh của 1 tam giác vuông

$\Rightarrow x_{CD}>0,x_{CT}>0\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P=x_{CD}.x_{CT}>0\\ S=x_{CD}+x_{CT}>0\end{array}\right.\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-3>0\\ m>0\end{array}\right.\Rightarrow m>\sqrt{3}$ (2)

x_{CD},x_{CT} là độ dài 2 cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow x_{CD}^2+x_{CT}^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow (x_{CD}+x_{CT})^2-2x_{CD}x_{CT}=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow m^2-2(m^2-3)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow m^2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

Kết hợp với điều kiện (1) và (2) được $m=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

Vậy $m=\frac{\sqrt{14}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^3-3mx+2$ (C_m). Số giá trị của m để hàm số có cực trị và đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (C_m) cắt đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ tại hai điểm A,B phân biệt sao cho $AB=\frac{2}{5}$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Ta có $y'=3x^2-3m$

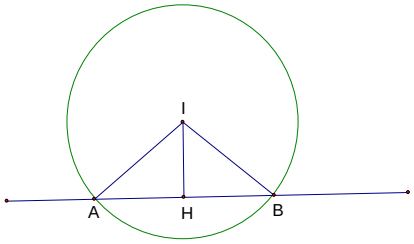
Để hàm số có cực trị thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu là

$\Delta: 2mx+y-2=0$

Điều kiện để đường thẳng Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt là :

$d(I,\Delta)<R\Leftrightarrow \frac{|2m+2-2|}{\sqrt{4m^2+1}}<1\Leftrightarrow |2m|<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow 0<1,\forall m$



Gv. Lương Văn Huy - ĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Gọi H là hình chiếu của I trên AB. Ta có $IH=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Theo bài ra $d\left(I,\Delta\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}\Leftrightarrow\frac{\left|2m\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}\Leftrightarrow m^2=6\Leftrightarrow m=\sqrt{6}$ hoặc $m=-\sqrt{6}$ (loại)

Vậy $m=\sqrt{6}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ (1) với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân

A. $m=-\frac{3}{2}$ **B.** $m=\pm6;m=-\frac{9}{2};m=\pm\frac{3}{2}$

D. $m=-\frac{3}{2},m=\pm2$ **D.** $m=-\frac{3}{2};m=\pm4$

Giải.

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=9+3m>0\Leftrightarrow m>-3$ (*)

$y=x^3-3x^2-mx+2\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\left(x-1\right).y'+\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$

Đường thẳng d qua 2 điểm cực trị có phương trình: $y=\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$

Đường thẳng d cắt 2 trục Ox và Oy lần lượt tại $A\left(\frac{6-m}{2\left(m+3\right)};0\right),B\left(0;\frac{6-m}{3}\right)$

Tam giác OAB cân $\Leftrightarrow OA=OB\Leftrightarrow\left|\frac{m-6}{2\left(m+3\right)}\right|=\left|\frac{6-m}{3}\right|\Leftrightarrow m=6;m=-\frac{9}{2};m=-\frac{3}{2}$

Với m = 6 thì $A\equiv B\equiv O$ do đó so với điều kiện (*) ta nhận $m=-\frac{3}{2}$ (đáp án A)

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tiếp xúc với đường tròn $\left(\Gamma\right):\left(x-m\right)^2+\left(y-m-1\right)^2=5$?

A. $m=\pm\frac{4}{3}$ B. $m=\pm\frac{5}{3}$ C. $m=\pm\frac{2}{3}$ D. $m=\pm\frac{7}{3}$

Giải.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $A\left(0;1\right)$, điểm cực tiểu $B\left(2;-3\right)$ suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A,B là $d:2x+y-1=0$

đường tròn $\left(\Gamma\right):\left(x-m\right)^2+\left(y-m-1\right)^2=5$ có tâm $I\left(m;m+1\right)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ điều kiện d tiếp xúc với

$\left(\Gamma\right)\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|2m+m+1-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|3m\right|=5\Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{3}$

Vậy $m=\pm\frac{5}{3}$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=2x^3-3\left(m-1\right)x^2+m$ (1), (với m là tham số thực). Tìm m để hàm số có điểm cực trị, ký hiệu là A, B sao cho ba điểm $A,B,I\left(3;1\right)$ thẳng hàng

A. $m=\frac{4}{3}$ **B.** $m=\frac{4}{3}$ hoặc $m=\pm1$

C. $m=\pm\frac{4}{3}$ hoặc $m=1$ **D.** $m=\frac{4}{3}$ hoặc $m=\pm2$

Giải.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m-1 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có cực trị khi y' có 2 nghiệm $\Leftrightarrow m \neq 1$

Toạ độ hai điểm cực trị $A(0;m)$ và $M\left(m-1;-(m-1)^3+m\right) \Rightarrow AB:\ y = -(m-1)^2 x + m$

Ba điểm $A, B, I(3;1)$ thẳng hàng khi $I \in AB \Leftrightarrow 1 = -(m-1)^2.3 + m \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$ hoặc $m = 1$ (loại)

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \dfrac{4}{3}$ (đáp án A)

Bài toán 6: Điều kiện liên quan tới diện tích, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ (1) (m là tham số thực). Giá trị gần nhất của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu cắt đường tròn $(C):(x-1)^2 + (y+3)^2 = 8$ theo một dây cung có độ dài bằng 4 là?

A. 1,16 **B.** 1 **C.** 1,9 **D.** 0,9

Giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Tức là cần có: $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ (*)

Chia đa thức y cho y', ta được: $y = y'.\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{2m}{3} - 2\right)x + \dfrac{m}{3} + 1$

Giả sử hàm số có cực đại, cực tiểu tại các điểm $(x_1;y_1), (x_2;y_2)$

Vì $y'(x_1) = 0; y'(x_2) = 0$ nên phương trình đường thẳng (Δ) qua hai điểm cực đại, cực tiểu là:

$y = \left(\dfrac{2m}{3} - 2\right)x + \dfrac{m}{3} + 1$ hay $(2m-6)x - 3y + m + 3 = 0$

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Giả sử Δ cắt (C) theo dây cung MN và h là khoảng cách từ I đến Δ

Ta có h = $\dfrac{|(2m-6)+9+m+3|}{\sqrt{(2m-6)^2+9}} = \dfrac{|3m+6|}{\sqrt{4m^2-24m+45}}$

Lại có $MN^2 = 4\left(R^2 - h^2\right)$

$\Leftrightarrow 4 = 8 - \dfrac{9m^2+36m+36}{4m^2-24m+45} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{9m^2+36m+36}{4m^2-24m+45} \Leftrightarrow 7m^2 - 132m + 144 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{66-6\sqrt{93}}{7} \\ m = \dfrac{66+6\sqrt{93}}{7} \end{array}\right.$

Kết hợp với (*) ta được $m = \dfrac{66-6\sqrt{93}}{7}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48. Số phần tử của S là.

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Giải.

GV: Lương Văn Huy - TTBH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx,\ y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$ (*)

Để hàm số có 2 cực trị (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ (**)

Vậy các điểm cực trị của hàm số là $A\left(0;3m^3\right)$ và $B\left(2m;-m^3\right)$

Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.d\left(B,OA\right) = 3m^4$ với $OA = \left|y_A\right| = 3\left|m\right|^3$ và $d\left(B,OA\right) = \left|x_B\right| = 2\left|m\right|$

Theo giả thiết $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|-6m^4\right| = 48 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn (**))

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Bài toán 7: Điều kiện liên quan tới hệ số góc của tiếp tuyến hoặc đường thẳng

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = x^3 + mx^2 + 7x + 3$. Tìm m để hàm số có cực trị và đường thẳng đi qua các điểm cực trị vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = 3x - 7$?

A. $m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $m = \pm\frac{5\sqrt{10}}{2}$ C. $m = \pm\frac{3\sqrt{15}}{2}$ D. $m = \pm\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Giải.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2mx + 7 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{21}$.

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta có:

$f(x) = \frac{1}{9}(3x + m)\, f'(x) + \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

Với $|m| > \sqrt{21}$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2.

Ta có: $f'\left(x_1\right) = f'\left(x_2\right) = 0$ suy ra

$y_1 = f\left(x_1\right) = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_1 + 3 - \frac{7m}{9}$; $y_2 = f\left(x_2\right) = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_2 + 3 - \frac{7m}{9}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu là $\Delta : y = \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

Ta có $\Delta \perp d \Leftrightarrow \frac{2}{9}(21 - m^2).3 = -1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{45}{2} > 21 \Leftrightarrow m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Vậy $m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - (m+1)x + 2$ có cực đại, cực tiểu. Đồng thời đường thẳng nối điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số tạo với đường thẳng $y = 2x + 3$ góc 45^0

Giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - (m+1)$ để hàm số có cực đại, cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt hay

$\Delta' = 9 + 12(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -4$

Ta có $y = \frac{1}{3}y'.(x+1) - \frac{2}{3}(m+4)x + \frac{1}{3}m + \frac{7}{3}$

Do các hoành độ của các cực trị là nghiệm của y' = 0 nên các điểm cực trị có tọa độ thỏa mãn đường thẳng

$y = -\frac{2(m+4)}{3}x + \frac{m}{3} + \frac{7}{3}$

Đường thẳng qua 2 cực trị tạo với đường thẳng y = 2x + 3 một góc 45^0 thì ta có

Cty Lương Văn Huy - TTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\frac{\left|2+\frac{2(m+4)}{3}\right|}{\left|1-\frac{4(m+2)}{3}\right|}=\tan 45^0=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{9}{2}\\ m=-\frac{19}{6}\end{array}\right.$$

Vậy $m=\frac{9}{2}$ hoặc $m=-\frac{19}{6}$ là giá trị cần tìm

Bài toán 6: Điều kiện liên quan tới max – min

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}mx^2-4mx-4\,(C)$. Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2. Đặt $A=\frac{m^2}{x_1^2+5mx_2+12m}+\frac{x_2^2+5mx_1+12m}{m^2}$. Giá trị nhỏ nhất của A là?

A. 1 **B.2** **C.3** **D.4**

Giải.

Ta có $y'=x^2-5mx-4m$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1,x_2\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

$\Leftrightarrow 25m^2+16m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-\frac{16}{25}\end{array}\right.$ (1) . Theo Viet, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=5m\\ x_1x_2=-4m\end{cases}$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $x_1^2-5mx_1-4m=0\Rightarrow x_1^2=5mx_1+4m$

$\Rightarrow x_1^2+5mx_2+12m=5m(x_1+x_2)+16m=25m^2+16m>0$

Tương tự ta cũng có: $x_2^2+5mx_1+12m=5m(x_1+x_2)+16m=25m^2+16m>0$

Khi đó $A=\frac{m^2}{x_1^2+5mx_2+12m}+\frac{x_2^2+5mx_1+12m}{m^2}=\frac{m^2}{25m^2+16m}+\frac{25m^2+16m}{m^2}\ge 2$ (Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{m^2}{25m^2+16m}=\frac{25m^2+16m}{m^2}\Leftrightarrow m^4=(25m^2+16m)^2$

$\Leftrightarrow m^2=25m^2+16m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện (1), ta có: $\min A=2$ khi $m=-\frac{2}{3}$. (đáp án B)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3-3mx+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất?

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ **C.** $m=\pm1$ **D.** $m=\pm\sqrt{3}$

Giải.

Cách 1. Ta có $y'=3x^2-3m$, $y'=0\Leftrightarrow g(x)=3x^2-3m=0$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Leftrightarrow\Delta'=9m>0\Leftrightarrow m>0$

Khi đó toạ độ 2 điểm cực trị của đồ thị là $M\left(\sqrt{m};2-2m\sqrt{m}\right)$, $N\left(-\sqrt{m};2+2m\sqrt{m}\right)$

Phương trình đường thẳng MN là: $2mx+y-2=0$

Đường thẳng MN cắt đường tròn $(I;R)$ tại 2 điểm A, B

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Diện tích tam giác $IAB = \frac{IA.IB.\sin AIB}{2} \le \frac{1}{2}$, dấu''='' xảy ra khi $\widehat{AIB} = 90^0$.

Lúc đó khoảng cách từ I đến MN bằng $\frac{\sqrt{2}}{2} < R$

Suy ra ta có $d(I,MN) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ (đáp án A)

Cách 2. Ta có $y' = 3x^2 - 3m$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Vì $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$ nên đường thẳng Δ đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -2mx + 2$

Ta có $d(I,\Delta) = \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1$ (vì m > 0), chứng tỏ đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn tâm I(1;1), bán kính R = 1 tại 2 điểm A, B phân biệt

Với $m \ne \frac{1}{2}$, đường thẳng Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}$

Nên $S_{\Delta IAB}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\widehat{AIB} = 1$ hay tam giác AIB vuông cân tại I $\Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (H là trung điểm của AB) $\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x_1x_2 - 2(x_1+x_2)|$ với x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số?

A. $A_{\min} = \frac{9}{2}$ **B.** $A_{\min} = \frac{7}{2}$ **C.** $A_{\min} = \frac{5}{2}$ **D.** $A_{\min} = \frac{11}{2}$

Giải.

Ta có $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -1$

Khi đó theo viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 - m \\ x_1x_2 = \frac{1}{2}(m^2+4m+3) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}|m^2+8m+7|$

Xét $t = \frac{1}{2}(m^2+8m+7)$ trên $(-5;-1) \Rightarrow -\frac{9}{2} \le t < 0$

Từ đó ta có $A \le \frac{9}{2}$ khi $m = -4$ (đáp án A)

Ví dụ 4. Cho hàm số y = $x^3 - 3x^2 + mx$ (1). Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B*, đồng thời khoảng cách từ gốc tọa độ *O* đến trọng tâm *G* của tam giác *AOB* nhỏ nhất?

A. $m = \pm 2$ **B.** $m = \pm 3$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 1$

Giải.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ (*)

Lấy y chia cho y' ta được: $y = (3x^2 - 6x + m)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)x + \frac{1}{3}m$

Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua điểm cực đại và điểm cực tiểu là $d: y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$.

Hai điểm cực trị và điểm O tạo thành tam giác khi và chỉ khi $0\neq m<3$

Hai điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ và trọng tâm G của tam giác OAB, $G(x_G;y_G)$ với

$x_G=\frac{x_1+x_2}{3}=\frac{2}{3}; y_G=\frac{y_1+y_2}{3}=\frac{2m-4}{3}\Rightarrow OG=\sqrt{\frac{4}{9}+\left(\frac{2m-4}{3}\right)^2}\geq\frac{2}{3},\forall m<3$

$MinOG=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2m-4=0\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn (*))

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Khi hàm số có cực đại, cực tiểu thì khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu nhỏ nhất là ?

A. $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Giải.

Do $f'(x)=x^2-2mx-1=0$ có $\Delta'=m^2+1>0$

Nên $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 với các điểm cực trị là $A(x_1,y_2)$; $B(x_2,y_2)$.

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta có:

$f(x)=\frac{1}{3}(x-m)f'(x)-\frac{2}{3}(m^2+1)x+\left(\frac{2}{3}m+1\right)$. Do $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ nên

$y_1=f(x_1)=-\frac{2}{3}(m^2+1)x_1+\left(\frac{2}{3}m+1\right); y_2=f(x_2)=-\frac{2}{3}(m^2+1)x_2+\left(\frac{2}{3}m+1\right)$

Ta có: $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+\frac{4}{9}(m^2+1)^2(x_2-x_1)^2$

$=\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]\left[1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2\right]=(4m^2+4)\left[1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2\right]\geq 4\left(1+\frac{4}{9}\right)$

$\Rightarrow AB\geq\frac{2\sqrt{13}}{3}$

Vậy xảy ra $\Leftrightarrow AB_{\min}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow m=0$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=mx^3-3mx^2+(2m+1)x+3-m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ điểm $N\left(\frac{1}{2};4\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của (C_m) lớn nhất

A. $m=\frac{5}{2}$ **B.** $m=\frac{1}{2}$ **C.** $m=\frac{3}{2}$ **D.** $m=\frac{7}{2}$

Giải.

Ta có $y'=3mx^2-6mx+2m+1$; $y'=0\Leftrightarrow 3mx^2-6mx+2m+1=0$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt tương đương điều kiện:

$\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=3m^2-3m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>1$(*)

Chia y cho y' viết được hàm số dưới dạng: $y=\frac{x-1}{3}y'+\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$

Từ đó dẫn đến toạ độ các diểm cực trị thoả mãn hệ:

$\begin{cases}y'=0\\ y=\frac{x-1}{3}y'+\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]\end{cases}\Rightarrow y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$

GV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Do đó đường thẳng qua hai điểm cực trị là $\Delta: y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$

Cách 1: Ta có $y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]\Leftrightarrow 3y=\left[(2-2m)x+10-m\right]$

$\Leftrightarrow (2x+1)m+3y-2x-10=0$

Do đó điểm cố định của Δ thoả mãn hệ $\begin{cases}2x+1=0\\3y-2x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=3\end{cases}$

Vậy Δ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};3\right)$ cố định. Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên Δ khi đó ta có $d(N,\Delta)\le NH\le NM$ (Không đổi).

Vậy khoảng cách từ N đến Δ lớn nhất bằng MN khi và chỉ khi $\Delta\perp MN$.

Đường thẳng MNcó hệ số góc bằng 1.

Suy ra điều kiện : $\frac{(2-3m)}{3}.1=-1\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thoả mãn (*)) (đáp án A)

Cách 2: Tìm được phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị $\Delta: y=\frac{1}{3}\left[(2-2m)x+10-m\right]$

Tính: $d(N,\Delta)=\frac{|2m+1|}{\sqrt{(2m-2)^2+9}}=\frac{|2m+1|}{\sqrt{(2m+1)^2-6(2m+1)+18}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{6}{2m+1}+\frac{18}{(2m+1)^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2m+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}}\le\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2m+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m=\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.(đáp án A)

Bài toán 9: Điều kiện đối xứng nhau qua một đường thẳng

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$?

A. $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $m=0$ **B.** $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $m=\frac{1}{2}$

C. $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $m=0$

Giải.

Ta có: $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\ne 0$ (*)

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$. Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $y=x$ và I thuộc đường thẳng $y=x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m-4m^3=0\\2m^3=m\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $m=0$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm

Nhận xét 1: Vì đây là đường thẳng đặc biệt nên ta có thể làm như sau
Để hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=y_B\\x_B=y_A\end{cases}\Leftrightarrow 4m^3=2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\m=0\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Nhận xét 2: Vì $A\in Oy, B\in Ox$ nên tam giác OAB là tam giác vuông. Để A, B đối xứng nhau qua đường thẳng

$$y=x\Leftrightarrow OA=OB\Leftrightarrow 4m^3=2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\m=0\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$

A. $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0$

Giải.

Ta có $y'=-3x^2+6mx;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu ⇔ phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt ⇔ m ≠ 0

Hai điểm cực trị là $A(0;-3m-1), B(2m;4m^3-3m-1)$

Trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(m;2m^3-3m-1)$

Vecto $\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(8;-1)$

Hai điểm cực đại, cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d $\Leftrightarrow\begin{cases}I\in d\\AB\perp d\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+8(2m^3-3m-1)-74=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x-2y-5=0$

A. $m=3$ B. $m=2$ C. $m=1$ D. $m=0$

Giải.

Ta có $y=x^3-3x^2+mx, y'=3x^2-6x+m$

Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu là y' = 0 có hai nghiệm phân biệt ⇔ $\Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$

Ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'+\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$

Tại các điểm cực trị thì y' = 0, do đó tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn phương trình $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$ Như vậy đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$, nên nó có hệ số góc

LV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$k_1 = \frac{2}{3}m - 2$

Ta có $d: x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ suy ra d có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{2}$

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có $d \perp \Delta$

Suy ra $k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m - 2\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$

Với $m = 0$ thì đồ thị có hai điểm cực trị là $(0;0)$ và $(2;-4)$, nên trung điểm của chúng là $I(1;-2)$, ta thấy $I \in$ d, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.
Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm (đáp án D)

BÀI TOÁN 4 - CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c phụ thuộc vào tham số m). Tìm m để hàm số có 3 cực trị và thỏa mãn điều kiện cho trước

a. Phương pháp:

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 2x.g(x)$ với $g(x) = 2ax^2 + b$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$ Từ đó ta có các nhận xét sau.

- Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 0 $\Leftrightarrow a.b < 0$.
- Để hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a.b > 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Hàm số có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- Nếu hàm số có 3 điểm cực trị thì tọa độ 3 điểm cực trị hàm số là $x = 0;\ x = \sqrt{\frac{-b}{2a}}; x = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$. Tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;c) \in Oy; B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right); B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ và ta có ΔABC luôn cân tại A,hai điểm B,C đối xứng nhau qua trục Oy $\cos\widehat{BAC} = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}; \cot^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{b^3}{8a}, S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{\frac{-b}{2a}}$. Độ dài các cạnh $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{\frac{-b}{2a}}$
- Phương trình đường BC: $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Phương trình AB,AC $y = \pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Một số công thức tính nhanh khi đề bài cho đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị A,B,C thỏa mãn tính chất cho trước.

Dữ kiện	Công thức	Chứng minh
ΔABC vuông cân	$8a+b^3=0$	ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}=0\Leftrightarrow b^3+8a=0$
ΔABC đều	$24a+b^3=0$	ΔABC đều $\Leftrightarrow \widehat{BAC}=60^0\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b^3+24a=0$
$\widehat{BAC}=\alpha$	$\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}=\cos\alpha$ $b^3+8a.\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=0$ $8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0$	-Ta có $\widehat{BAC}=\alpha\Rightarrow\cos\widehat{BAC}=\cos\alpha\Rightarrow\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}=\cos\alpha$ $-\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{b^3}{8a}\Rightarrow b^3+8a.\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=0$
$S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0$	$S_{\Delta ABC}=S_0\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert}\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}=S_0\Rightarrow\dfrac{-b^5}{32a^3}=\left(S_0\right)^2$ $\Rightarrow 32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0$
$Max\left(S_0\right)$	$Max\left(S_0\right)=\sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}$	Ta có $\dfrac{-b^5}{32a^3}=\left(S_0\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}S_0=\sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}\left(Max\right)\\S_0=-\sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}\left(Min\right)\end{array}\right.$
$r_\Delta=r_0$ (bán kính đường tròn nội tiếp)	$r_0=\dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left[1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right]}$	Hướng dẫn: Sử dụng công thức $r=\left(p-a\right)\tan\dfrac{A}{2}$
$BC=l$	$al^2+2b=0$	Ta có $BC=2\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}=l\Rightarrow\dfrac{-2b}{a}=l^2\Rightarrow al^2+2b=0$
$AB=AC=l$	$16a^2l^2-b^4+8ab=0$	Ta có $AB=AC=\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}}=l\Rightarrow\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}=l^2$ $\Rightarrow b^4-8ab=16a^2l^2\Rightarrow$ đpcm
$B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$	$B,C\in Ox\Leftrightarrow y_B=y_C=0$ $\Leftrightarrow\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0\Rightarrow b^2-4ac=0$
3 góc ΔABC nhọn	$b\left(b^3+8a\right)>0$	3 góc ΔABC nhọn $\Leftrightarrow\widehat{BAC}<90^0$ (do ΔABC cân tại A) $\Leftrightarrow\cos\widehat{BAC}>0\Leftrightarrow\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}>0\Leftrightarrow\dfrac{b\left(b^3+8a\right)}{b\left(b^3-8a\right)}>0$ $\xrightarrow{Do\ ab<0\Rightarrow b^4-8ab>0} b\left(b^3+8a\right)>0$
Trọng tâm $\equiv O$	$b^2=6ac$	Tọa độ trọng tâm $G\left(0;\dfrac{1}{3}\left[c+\dfrac{4ac-b^2}{4a}+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]\right)=\left(0;\dfrac{6ac-b^2}{12a}\right)$ $G\equiv O\Leftrightarrow\dfrac{6ac-b^2}{12a}=0\Rightarrow b^2-6ac=0$
Trực tâm $\equiv O$	$b^3+8a-4ac=0$	Gợi ý : $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}=0$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$R=l$	$l=\dfrac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$	Gợi ý $R=\dfrac{BC}{2\sin A}$
Tâm đường tròn ngoại tiếp $\equiv O$	$b^3-8a-8abc=0$	Gợi ý : Tâm đường tròn ngoại tiếp $\equiv O \Leftrightarrow OA=OB=OC$
Tâm đường tròn nội tiếp $\equiv O$	$b^3-8a-4abc=0$	Gợi ý : Sử dụng công thức diện tích $S=p.r \Rightarrow r=\dfrac{S}{p}$ (p là nửa chu vi tam giác)
Trục Ox chia ΔABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau	$b^2-4\sqrt{2}\lvert ac\rvert=0$	Gợi ý : điều kiện bài toán $\Leftrightarrow AH=\sqrt{2}OA \Leftrightarrow b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$ (H là trung điểm BC)
Điểm cực trị cách đều Ox	$b^2-8ac=0$	Gợi ý Điểm cực trị cách đều Ox $\Leftrightarrow$ O là trung điểm của AH (H là trung điểm BC) $\Leftrightarrow y_A+y_H=0 \Leftrightarrow \dfrac{4ac-b^2}{4a}+c=0$ $\Leftrightarrow b^2-8ac=0$
ABCO là hình thoi	$b^2-2ac=0$	Gợi ý ABCO là hình thoi $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của AO (H là trung điểm BC) $\Leftrightarrow y_A+y_O=2y_H \Leftrightarrow c+0=2\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ $\Leftrightarrow 2ac-b^2=0$

Tương tự như vậy ta có thể suy ra nhiều công thức tính nhanh khác tùy theo yêu cầu đề bài.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ (1), với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số (1) có ba cực trị, đồng thời các điểm cực trị của hàm số tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1

A. $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **B.** $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ **D.** $m=1$

Giải.

Đạo hàm $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\ (1)\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m>0$

Cách 1: Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m-1), B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right), C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$. Gọi H là trung điểm của BC nên $H\left(0;-m^2+m-1\right)$

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=m^2\sqrt{m}$; $AB=AC=\sqrt{m^4+m}$, $BC=2\sqrt{m}$; $AH=m^2$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1 \Leftrightarrow m^3-2m+1=0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^2+m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right. \text{ (đáp án A)}$$

Cách 2: B và C đối xứng qua Oy, A thuộc Oy nên tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC thuộc Oy.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giả sử $I(0;a)$

Theo giả thiết $IA = IC = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |1-2m-a| = 1 & (1) \\ \sqrt{m+(m^2-2m+1-a)^2} = 1 & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta được $\left[\begin{array}{l} 1-2m-a=1 \\ 1-2m-a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2m \\ a=2-2m \end{array}\right.$

TH 1. $a=-2m \Rightarrow \sqrt{m+\left(m^2-2m+1+2m\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow m+m^4+2m^2+1=1 \Leftrightarrow m^4+2m^2+m=0$ (loại do m > 0)

TH 2. $a=2-2m \Rightarrow \sqrt{m+\left(m^2-2m+1-2+2m\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow m+m^4-2m^2+1=1 \Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0, m=1 \\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với $m>0$ ta được $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (đáp án A)

Vậy với $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị cần tìm

Cách 3: Sử dụng định lý hàm số sin ta có $\sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{m^2}{\sqrt{m^4+m}}$ (vì ΔAHC vuông tại H)

$AB = 2R\sin C = 2\sin C \Leftrightarrow m^4+m=2m^2$

$\Leftrightarrow m^3-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)\left(m^2+m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$ vì $m>0$

Vậy $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ thì yêu cầu bài toán được thỏa (đáp án A)

Cách 4: sử dụng công thức tính nhanh

$R=\dfrac{b^3-8a}{8|a|b}=\dfrac{(-2m)^3-8}{8(-2m)}=1 \Leftrightarrow m^3-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)\left(m^2+m-1\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(tm) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(tm) \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l) \end{array}\right.$. Vậy $m=1$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (đáp án A)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^4-8m^2x^2+1$ (1), với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có 3 cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 64

A. $m=\pm\sqrt[5]{4}$ **B.** $m=\pm\sqrt[5]{2}$ **C.** $m=\pm\sqrt[5]{6}$ **D.** $m=\pm\sqrt[5]{8}$

Giải.

Cách 1: Ta có $y'=4x^3-16m^2x=4x\left(x^2-4m^2\right)$

Để hàm số có 3 cực trị là $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=x^2-4m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=2m\Rightarrow y=1-16m^4\\x=-2m\Rightarrow y=1-16m^4\end{array}\right.$

Giả sử 3 điểm cực trị là: $A(0;1);B\left(2m;1-16m^4\right);C\left(-2m;1-16m^4\right)$

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{(2m)^2+\left(16m^4\right)^2}$ nên tam giác ABC cân tại A

Gọi I là trung điểm của BC thì $I(0;1-16m^4)$ nên $AI=16m^4;\ BC=4|m|$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AI.BC=\frac{1}{2}16m^4.4|m|=64\Leftrightarrow|m^5|=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn $m\neq 0$)

Vậy $m=\pm\sqrt[5]{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh $S_0=64$

$32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0\Leftrightarrow 32.(64)^2+\left(-8m^2\right)^5=0\Leftrightarrow m^{10}=4\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (đáp án B)

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm m để hàm số có đại cực, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất

A. $m=\pm1$ B. $m=0$ C. $m=\pm2$ D. $m=\pm3$

Giải.

Cách 1: Ta có $y'=4x^3-4\left(1-m^2\right)x,\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1-m^2\end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $|m|<1$

Tọa độ các điểm cực trị:

$A(0;m+1);\ B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right);\ C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.d(A;BC)=\sqrt{1-m^2}\left|m^4-2m^2+1\right|=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1.$

$\Rightarrow S_{\max}\Leftrightarrow m=0$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh

$S_{Max}=\sqrt{\frac{-b^5}{32a}}=\sqrt{\frac{32\left(1-m^2\right)^5}{32}}=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1\Rightarrow S_{\max}\Leftrightarrow m=0$ (đáp án B)

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0

A. $m=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **B.** $m=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **C.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **D.** $m=1$

Giải.

Cách 1: Ta có $y'=4x^3+4mx;\ y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.\quad(m<0)$

Gọi $A\left(0;m^2+m\right);\ B\left(\sqrt{-m};m\right),C\left(-\sqrt{-m};m\right)$ là các điểm cực trị.

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right);\ \overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right)$. ΔABC cân tại A nên góc 120^0 chính là $\hat{A}$.

Theo giả thiết $\hat{A}=120^\circ\Leftrightarrow\cos A=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m}+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{m+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2m+2m^4=m-m^4\Leftrightarrow 3m^4+m=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ hoặc $m=0$ (loại)

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ là giá trị cần tìm (đáp án C)

Cách 2: ΔABC cân tại A nên góc 120^0 chính là $\hat{A}$.

Ta có $8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow 8+(2m)^3.\tan^2(60^0)=0\Rightarrow 8+8m^3.3=0\Rightarrow m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (đáp án C)

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+m+2\ (C_m)$. Giá trị gần nhất của tham số m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm?

A.0 **B.** -1 **C.** -2 **D.** 3

Giải.

Cách 1: Ta có $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1),\ y'=0\Leftrightarrow x_1=0;\ x_{2,3}=\pm 1$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$ là các điểm cực trị của (C_m) thì:

$A(0;m+2),B(-1;m+1),C(1;m+1)$

Gốc tọa độ $O(0;0)$ là trọng tâm của ΔABC

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_O=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_O=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0(\forall m)\\ 0=\frac{3m+4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$$

Giá trị của m cần tìm là $m=-\frac{4}{3}$ (đáp án B)

Cách 2: áp dụng công thức giải nhanh

đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm

$\Leftrightarrow b^2-6ac=0\Rightarrow 4-6(m+2)=0\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$ (đáp án B)

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m=0$ hoặc $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Giải.

Đạo hàm $y'=4x^3-4(m+1)x$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4(m+1)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=(m+1)\end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị $A(0;\ m^2);B(-\sqrt{m+1};-2m-1);C(\sqrt{m+1};-2m-1)$

Nhận xét: $A\in Oy$, B và C đối xứng qua Oy nên tam ABC cân tại A tức là AB = AC nên tam giác chỉ có thể vuông cân tại A.

Cách 1: Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(0;-2m-1)$

Do đó để tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow$ BC = 2AM (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m+1}=2(m^2+2m+1)=2(m+1)^2\ \Leftrightarrow 1=(m+1)\sqrt{m+1}=(m+1)^{\frac{3}{2}}$ (do $m>-1$)

$\Leftrightarrow 1=(m+1)\Leftrightarrow m=0$ (do $m>-1$) (đáp án B)

Cách 2: ABC vuông cân tại A. Theo định lý pitago ta có

$AB^2+AC^2=BC^2\Leftrightarrow(m+1)\left[(m+1)^3-1\right]=0\Leftrightarrow(m+1)^3-1=0\Leftrightarrow m=0$ (do $m>-1$)(đáp án B)

Cách 3: ABC vuông cân tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$. Với $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{m+1};-2m-1-m^2);\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{m+1};-2m-1-m^2)$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow -(m+1)+(-2m-1-m^2)^2=0 \Leftrightarrow m^4+4m^3+6m^2+3m=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=-1$ (loại)

Chú ý: Có thể không cần khai triển thành phương trình bậc 4 mà biến đổi thành tích như sau

$$-(m+1)+\left(-2m-1-m^2\right)^2=0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ (m+1)^3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=0$$

Cách 4: Sử dụng công thức tính nhanh

ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow 8a^2+b^3=0 \Rightarrow 8-8(m+1)^3=0 \Rightarrow (m+1)^3=1 \Rightarrow m=0$ (đáp án B)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có đồ thị (C_m). Giá trị gần nhất của tham số m để hàm số có 3 cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều là?

A. 1,5 **B.** 1,7 **C.** 1,9 **C.** 1,8

Giải.

Cách 1: Ta có $y'=4x^3-8(m-1)x=4x\left(x^2-2(m-1)\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2(m-1) \end{array}\right.$ nên hàm số có 3 cực trị khi $m>1$

Khi đó hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m-1), B\left(\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right), B\left(-\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right)$.

Tính $AB^2=AC^2=2(m-1)+16(m-1)^4; BC^2=8(m-1)$

Ta có tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB=BC \Leftrightarrow AB^2=BC^2$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)+16(m-1)^4=8(m-1) \Leftrightarrow (m-1)\left[8(m-1)^3-3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện có 3 cực trị ta suy ra $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án B).

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh

Ta có tam giác ABC đều $\Leftrightarrow 24a+b^3=0 \Leftrightarrow 24-64(m-1)^3=0 \Leftrightarrow (m-1)^3=\dfrac{3}{8} \Leftrightarrow m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2$ có đồ thị (C_m). Số giá trị của m thỏa mãn để đồ thị hàm số (C_m) có ba điểm cực trị A, B, C và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua điểm $M(1;1)$

A.1 B.2 C.3 D.4

Giải:

Ta có $y'=4x\left[x^2-(m+1)\right]; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m+1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị A, B, C khi và chỉ khi $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>-1$ (*)

Với $m>-1$ đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị

$A(0;2), B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-2m+1\right), C\left(\sqrt{m+1};-m^2-2m+1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC cân tại M nên $I\in Oy \Rightarrow I(0;b)$.

Từ $IA=IM$ tìm được $b=1$. Vậy $I(0;1)$

Ta có $IA=IC \Leftrightarrow IA^2=IC^2 \Leftrightarrow m+1+\left(-m^2-2m\right)^2=1 \Leftrightarrow m^4+4m^3+4m^2+m=0$

$$\Leftrightarrow m(m+1)\left(m^2+3m+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \text{ (vì (*))} \end{array}\right.$$

Cty Lương Văn Huy - TBH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy $m=0$ hoặc $m=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm (đáp án B)

Bạn đọc có thể áp dụng công thức tính nhanh.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m+1$ (1). Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho các điểm A,B,C và điểm O nằm trên một đường tròn, trong đó O là gốc tọa độ

A. $m=\pm1$ **B.** $m=\pm2$ **C.** $m=\pm3$ **D.** $m=\pm4$

Giải:

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3-4m^2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2\end{array}\right.$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq0$ (*).

Ba nghiệm phân biệt là $x=0;x=m;x=-m;$

Tọa độ 3 điểm cực trị $A\left(0;m^4+1\right)\in Oy, B\left(m;1\right), C\left(-m;1\right)$. Tính $\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right);\overrightarrow{OB}=\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn qua 4 điểm A, B, C, O; do tính đối xứng của đồ thị hàm số suy ra I, A, O thẳng hàng.

Bốn điểm A, B, C và điểm O nằm trên một đường tròn

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}A\equiv O & (2)\\AB\perp OB\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0 & (3)\end{array}\right.$

Giải (2): $m^4+1=0\Rightarrow$ vô nghiệm

Giải (3): $m^2-m^4=0\Leftrightarrow m=\pm1$ (do điều kiện (*)).

Vậy $m=\pm1$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

BÀI TOÁN 5. CỰC TRỊ HÀM HỢP.

Phương pháp :Sử dụng đạo hàm hàm hợp, có thể kết hợp kỹ thuật chọn hàm.

Ví dụ 1: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH -LẦN 1-2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Chọn A.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x^2-8x+m\right)$

$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(2x-8\right)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m-1=0\quad(1)\\x^2-8x+m=0\quad(2)\\x^2-8x+m-2=0\quad(3)\end{array}\right.$

Các phương trình $(1),(2),(3)$ không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-1\right)^2\geq0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

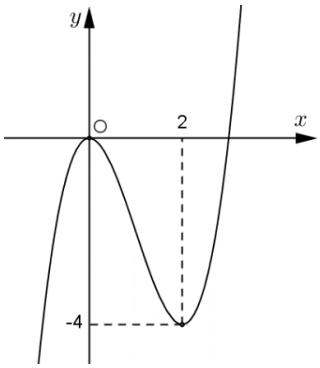
Suy ra $g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

Gv : Lương Văn Huy ĐHDH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m+2>0 \\ 16-32+m\neq 0 \\ 16-32+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m\neq 16 \\ m\neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16.$$

m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Ví dụ 2: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-Lần 1-2018) Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=a\in(2;+\infty) \\ x=b\in(a;+\infty) \end{array}\right.$$

Với $x>b$, ta có $f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$

Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

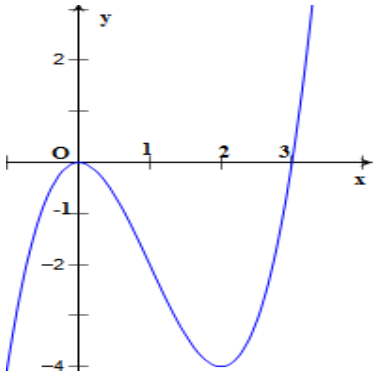
BBT:

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Ví dụ 3: (Đề thi giữa HKI THPT Chuyên Lê Hồng Phong năm học 2017-2018) Cho đồ thị (C): $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên .Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f\left(x^3 - 3x\right)$

$y' = \left(x^3 - 3x\right)' f'\left(x^3 - 3x\right) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x\right),$

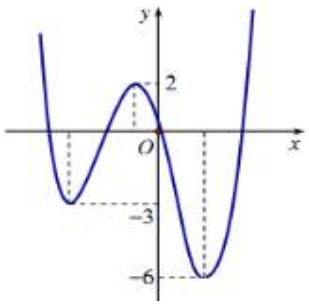
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'\left(x^3 - 3x\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \\ x^3 - 3x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

(do hàm số $y = f\left(x\right)$ đạt cực trị tại điểm $x = 0, x = 2$)

$y' = 0$ có 6 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua các điểm đó nên hàm số $y = f\left(x^3 - 3x\right)$ có 6 điểm cực trị

Ví dụ 4: (THPT Yên Định lần 1 năm học 2017-2018) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$



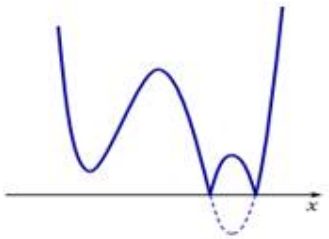
Ví dụ 5: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|f(x+1) + m\right|$ có 5 điểm cực trị. Giá trị của tổng tất cả các phần tử của S bằng:

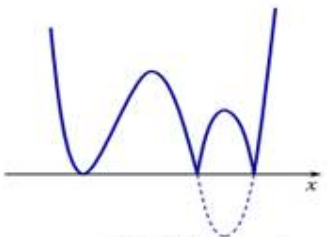
A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15 .

Lời giải

Chọn B

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404





Tịnh tiến đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ sang trái 1đơn vị và lên trên m đơn vị ta được đồ thị hàm số (C') $y=f(x+1)+m$.

Đồ thị hàm số $\left|y=f(x+1)+m\right|$ được suy ra từ (C') như sau:

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C') phía trên trục hoành.

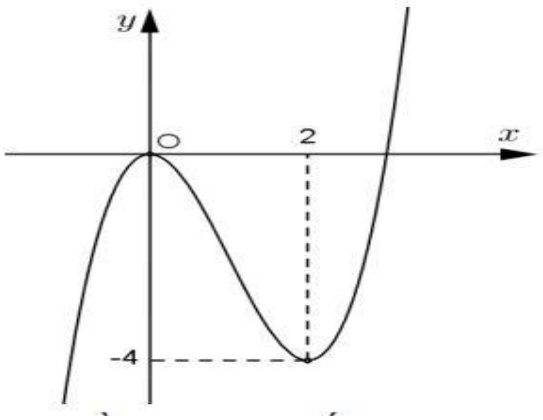
Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C') phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Do đó để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị thì $3\le m<6$, mà m nguyên dương nên $m\in\{3;4;5\}$.

Vậy giá trị của tổng tất cả các phần tử của S bằng 12.

Ví dụ 6: [THPT ĐẶNG THỪA HÚC] Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy tìm cực trị của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

+) Ta có với $u=f(x)$ thì $f'\left(f(x)\right)_x=f'_u.u_x=f'_u.f'_x$.

$$\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'_u=0\\f'_x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=f(x)=0\\u=f(x)=2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$$

+) Ta thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm $x_{1,2}=0\vee x_3>2$.

+) Ta thấy $f(x)=2$ có hai nghiệm $x_4>x_3$

$\Rightarrow f'\left(f(x)\right)=0$ có nghiệm $x=0$ bậc 3, $x=2,x_3,x_4$ bậc 1

$\Rightarrow$ hàm số có 4 cực trị.

Ví dụ : Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

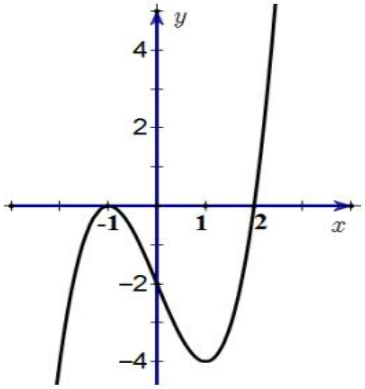
Đặt $g(x)=f(u), u=x^2-2x$ thì $g'(x)=2(x-1).f'(u)$ nên

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'(u)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow u=-2;u=-1;0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\,(\text{VN})\\ x^2-2x=-1\,(1)\\ x^2-2x=0\,(2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm kép là $x=1$; phương trình (2) có hai nghiệm đơn là $x=0;x=2$ nên phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm đơn là $x=0;x=2$ và một nghiệm bội ba là $x=1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có sáu cực trị. **B.** Hàm số có năm cực trị.

C. Hàm số có bốn cực trị. **D.** Hàm số có ba cực trị.

Lời giải

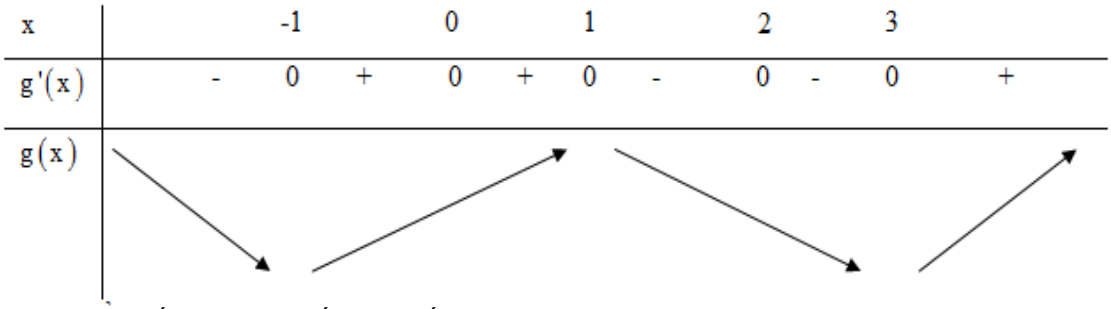
Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x-1)$

+ Nhận xét: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-1=-1\\ x^2-2x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0;x=\pm1;x=2;x=3$

Ta có bảng biến thiên:

Gv : Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

BT 6 – CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

DẠNG 1: CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Mà $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \ge 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$. Hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

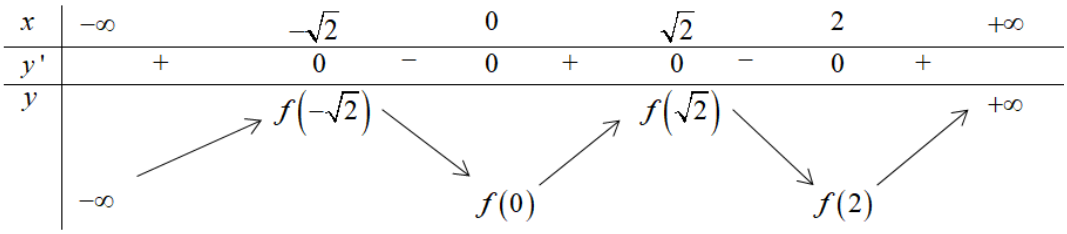
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = x^3(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Gv : Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị, suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có tối đa $4+5=9$ điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^2-1$. Hàm số $f\left(\left|x^2-2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 2. **B.** 5. **C.** 7. **B.** 4.

Lời giải

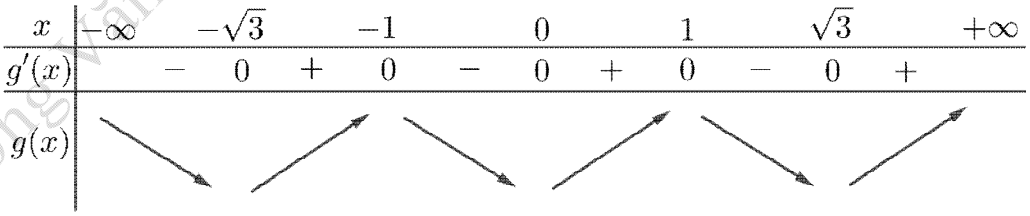
Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$.

Ta có $g'(x)=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Nhìn vào bảng biến thiên thì $g(x)$ có hai điểm cực tiểu $x\geq 0$. Do đó hàm $f\left(\left|x^2-2\right|\right)$ sẽ có 4 cực tiểu.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ Hàm số $|f(x)-x|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$

Ta có $g'(x)=f'(x)-1=(x+1)(x-1)^2(x-2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$.

Ta thấy $x=-1$ và $x=2$ là các nghiệm đơn còn $x=1$ là nghiệm kép $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị $\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm. Nên hàm số $|f(x)-x|$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-x^2-6x$ thoả mãn $f(0)=m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị . Tính tổng các phần tử của S.

A. 10. **B.** 28. **C.** 21. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=x^3-x^2-6x$

$\Rightarrow f(x)=\int(x^3-x^2-6x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2+C$.

Do $f(0)=m\Rightarrow C=m\Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2+m$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=3\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-\frac{63}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(0\right).f\left(-2\right)<0\\f\left(0\right).f\left(3\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{16}{3}$.

Vì m nguyên và $m\in\{1;2;3;4;5\}$. Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 15.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=12x\left(x^2-x-2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=f\left(\left|x\right|+m\right)$ có 7 điểm cực trị .

A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 12x\left(x^2-x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=2\end{array}\right.$

Do đó hàm số $f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là $x=0;x=-1;x=2$.

Hàm số $f\left(\left|x\right|+m\right)$ luôn có một điểm cực trị $x=0$.

$y=f\left(\left|x\right|+m\right)=\begin{cases}f\left(x+m\right);\left(x\ge 0\right)\\f\left(-x+m\right);\left(x<0\right)\end{cases}$.

Hàm số $f\left(x+m\right)$ có ba điểm cực trị là $x=-1-m;x=-m;x=2-m$.

Hàm số $f\left(-x+m\right)$ có ba điểm cực trị là $x=m+1;x=m;x=m-2$.

Do đó hàm số $f\left(\left|x\right|+m\right)$ có tối đa 7 điểm cực trị là

$x=0;x=m+1;x=m;x=m-2;x=-m-1;x=-m;x=2-m$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}-m-1>0\\-m>0\\-m+2>0\\m+1<0\\m<0\\m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow m<-1$.

Vì m nguyên và $m\in\left(-10;10\right)\Rightarrow m\in\{-9;-8;...;-2\}$.Vậy có 8 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^3\left[x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6\right],\forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Gv : Lương Văn Huy - TBH Thanh Trì - HN - 0969141404

Lời giải

Chọn B

Ta có:

+) $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trìnhnh $(x-1)^3=0$.

+) Hàm $g(x)=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do đó hàm $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ $y'=f'(x)$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu khi qua 2 nghiệm này

$\Leftrightarrow h(x)=x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1\le 0<x_2\ne 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(1)\ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} h(0)<0 \\ \begin{cases} h(0)=0 \\ S>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2\ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} m^2-7m+6<0 \\ \begin{cases} m^2-7m+6=0 \\ -(4m-5)>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1, m\ne 2 \\ \left[\begin{array}{l} 1<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right. \\ m<\dfrac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases} ..$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ và $f(0)=0$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-5;5)$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{3}{2}x+C.$

Do $f(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{3}{2}x$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ như sau:

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$

Với $g(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+m\right|$. Đặt $h(x)=f^2(x)+2f(x)+m=\left(f(x)+1\right)^2+m-1$.

$$h'(x)=2f'(x)f(x)+2f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=a<1,\left(f(a)=-1\right)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm $y=h(x)$:

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↘	$m-1$	↗	$h(1)$	↘	m	↗	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=h(x)$ luôn có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow m-1\geq 0\Leftrightarrow m\geq 1$.

Mà $m\in(-5;5)\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right)$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - 0969141404

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm.

Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Mà hàm số $y=|f(x)|$ và hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có cùng số điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A.3. **B.** 4. **C.**5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+1=0\\x-m=0\\x+3=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=m\\x=-3\end{bmatrix}$$

($x=-1$ là nghiệm bội 4, $x=m$ là nghiệm bội 5, $x=-3$ là nghiệm bội 3)

+ Nếu $m=-1$ thì phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x=-3;x=-1\Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị âm. Khi đó hàm số $g(x)=f(|x|)$ có một điểm cực trị là $x=0$ nên $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

+ Nếu $m=-3$ thì phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội chẵn $x=-1;x=-3\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ không có cực trị$\Rightarrow$ hàm số $g(x)=f(|x|)$ có một điểm cực trị là $x=0$ nên $m=-3$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

+ Nếu $m\neq-3;m\neq-1$ thì $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ $x=m;x=-3\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m;x=-3$.

Để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu$\Leftrightarrow m>0$ mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-5;5]$ nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in R$. Có bao nhiêu giá trị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN 0969141404

nguyên của tham số $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương.

Ta có:

$$f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x+1 = 0 \\ x^2+2mx+5 = 0 \end{array}\right.$$

Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương khi phương trình $x^2+2mx+5=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-5 > 0 \\ S = -2m > 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};+\infty) \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;-\sqrt{5}).$$

Giá trị nguyên của tham số $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là:

$m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Số giá trị nguyên của tham số $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là 7.

Câu 12. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x \in R$. Hàm số $y = |f(1-2020x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Số điểm cực trị tối đa của hàm số $y = |f(1-2020x)|$ bằng tổng số điểm cắt của đồ thị hàm số $y = f(1-2020x)$ với trục hoành và số điểm cực trị của hàm số $y = f(1-2020x)$.

Ta có: $f'(x) = x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\left[f\left(1-2020x\right)\right]'=-2020f'\left(1-2020x\right).$

Do đó: $\left[f\left(1-2020x\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(1-2020x\right)^2\left(1-2020x-1\right)\left(1-2020x+\sqrt{3}\right)\left(1-2020x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2020}\\x=0\\x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2020}\\x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2020}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $y=f\left(1-2020x\right)$

x	$-\infty$		$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2020}$		0		$\dfrac{1}{2020}$		$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2020}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↘		↗	

Do đó phương trình $f\left(1-2020x\right)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f\left(1-2020x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-2020x\right)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $f'\left(x\right)=6x^3-11x^2+6x-1$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2021}\left(\left|x\right|\right)-f^{2020}\left(\left|x\right|\right)+f^{2019}\left(\left|x\right|\right)$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g\left(x\right)=f^{2021}\left(x\right)-f^{2020}\left(x\right)+f^{2019}\left(x\right).$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Có $g'\left(x\right)=2021f^{2020}\left(x\right).f'\left(x\right)-2020f^{2019}\left(x\right).f'\left(x\right)+2019f^{2018}\left(x\right).f'\left(x\right)$

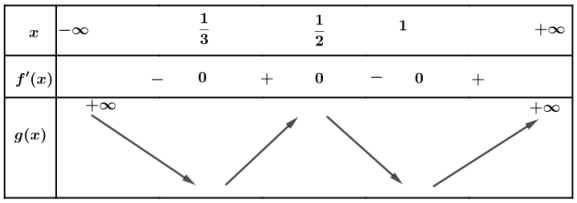
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$= f^{2018}(x).\left[2021.f^2(x)-2020f(x)+2019\right].f'(x)$

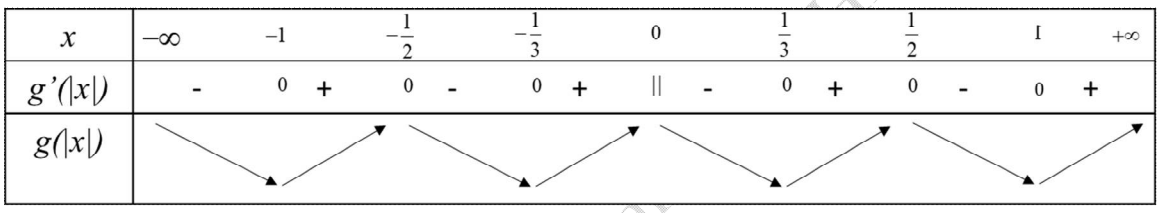
Nhận xét $f^{2018}(x).\left[2021.f^2(x)-2020f(x)+2019\right]\geq 0,\forall x$

Nên $g'(x)$ cùng dấu với $f'(x)=6x^3-11x^2+6x-1$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1;x=1/2;x=1/3$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



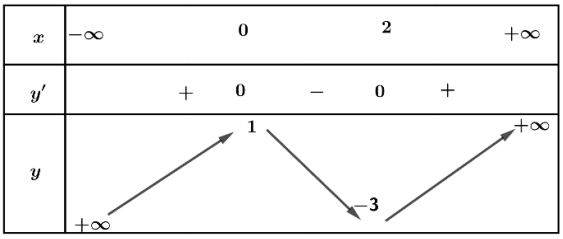
Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=g(|x|)$



Vậy hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

DẠNG 2: CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO BBT, BXD

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là:

A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=|f(x)|$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	$+$	0	$+$	0	-	

Hỏi hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu:

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	

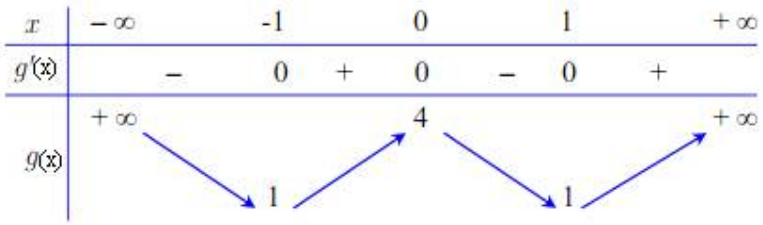
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(\lvert x\rvert)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	

Gv . Lương ... ĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$ và hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là giống nhau nên hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$ có một điểm cực tiểu.

Câu 16. Cho hàm số $y=g(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



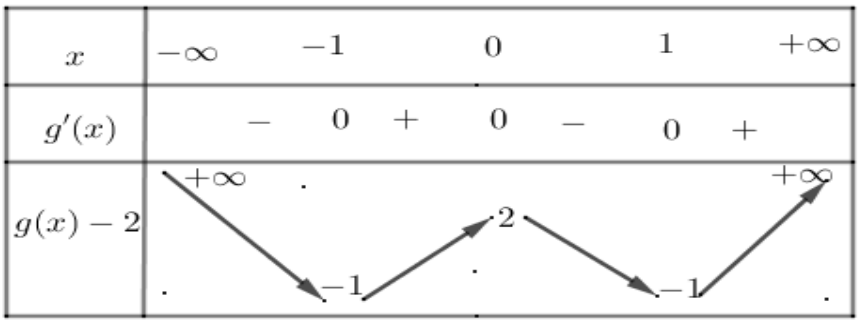
Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

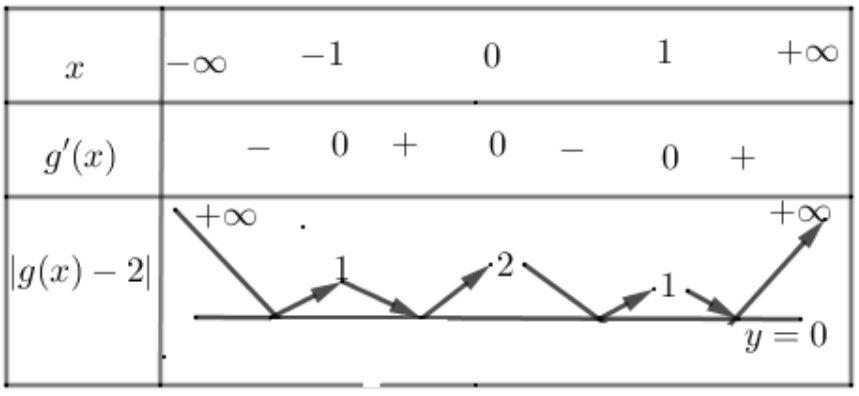
Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)-2$ như sau:

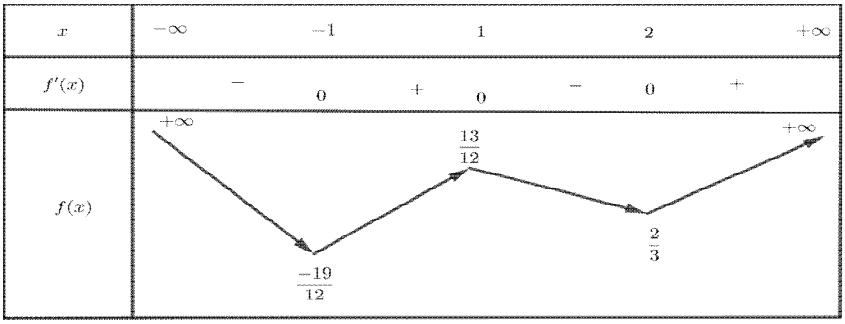


Từ đó suy diễn bảng biến thiên hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ như sau:



Vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ là 7 điểm.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



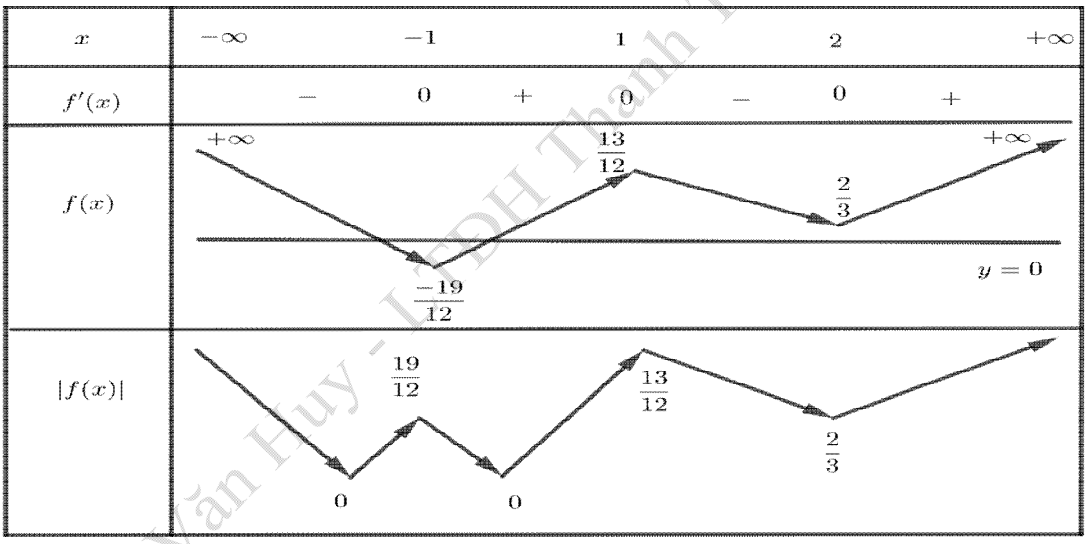
Số điểm cực đại của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng bến thiên ta thấy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 2 điểm cực đại.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm số $g(x)=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

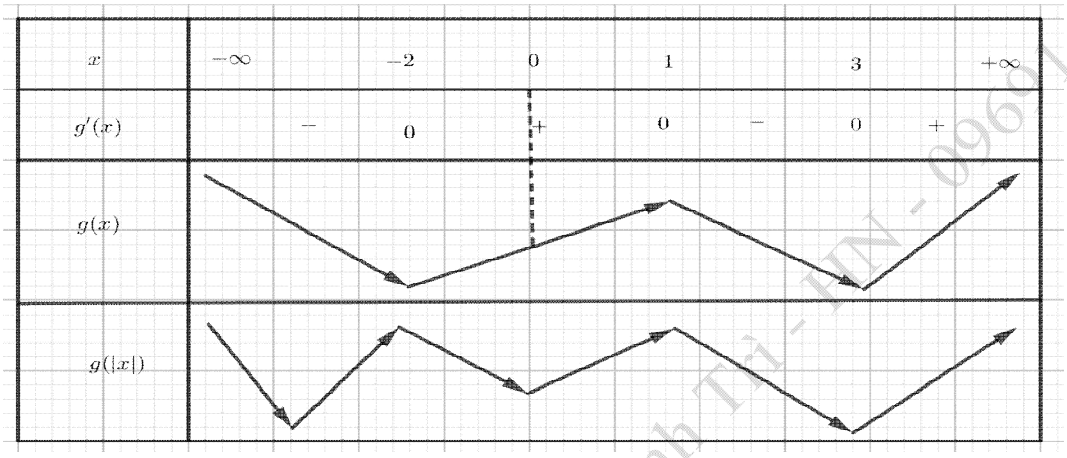
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Chọn D

Ta có $g'(x)=-3f'(2-x).e^{3f(2-x)+1}-f'(2-x)3^{f(2-x)}\ln 3=-f'(2-x).\left(3e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}\ln 3\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-1\\2-x=1\\2-x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		+	‖	-	0	+	0	-	‖	+	

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(|x-2|)+2020$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x)\ khi\ x\ge 0\\f(-x)\ khi\ x<0\end{cases}$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $y=f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	‖	+	

Gv. Lương Văn Huy - ĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(|x-2|\right)$ có 5 cực trị (Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ sang phải 2 đơn vị thì số điểm cực trị không thay đổi).

Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(|x-2|\right)+2020$ có 5 cực trị (Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(|x-2|\right)$ lên trên 2020 đơn vị thì số điểm cực trị không thay đổi).

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'\left(x\right)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(1-3x\right)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-3x\right)+1\Rightarrow g'\left(x\right)=-3f'\left(1-3x\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(1-3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

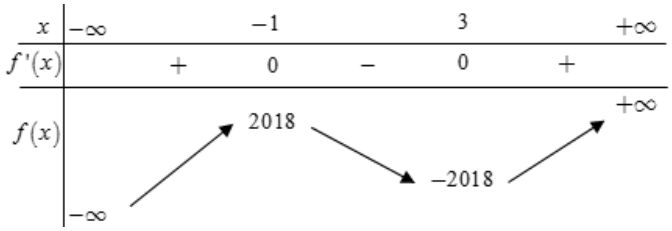
Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$	$+\infty$	↘	-2	↗	6	↘	$-\infty$
$\left\|g\left(x\right)\right\|$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘ 0 ↗ 6 ↘ 0 ↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - H... 141404

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.



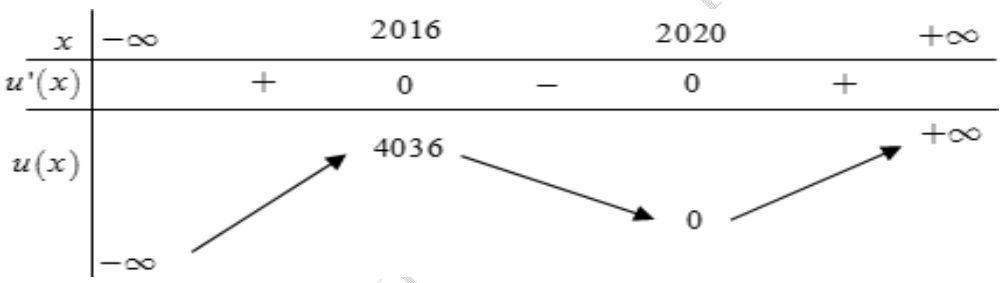
Hàm số $g(x)=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

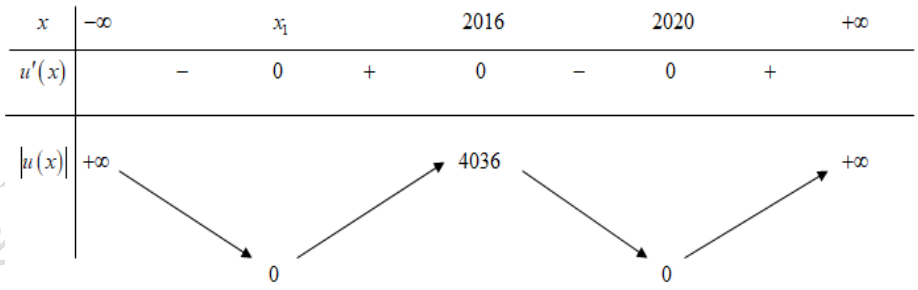
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2017)+2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$.



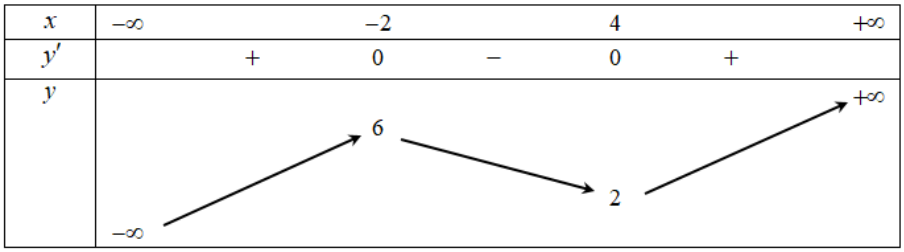
Dựa vào bảng biến thiên suy ra bảng biến thiên hàm số $u(x)=f(x-2017)+2018$ ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\left|u(x)\right|$ như hình vẽ bên dưới



Từ BBT của hàm số $g(x)=\left|u(x)\right|$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH HN: 0969141404



Đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

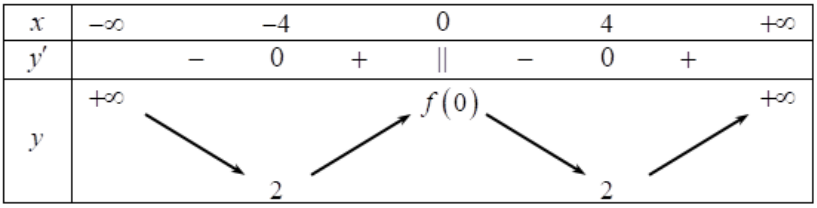
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

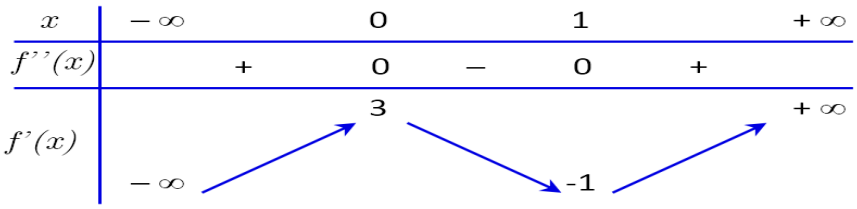
$\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)$ nên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhân trục tung làm trục đối xứng.

Lại có $y=f\left(|x|\right)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x<0 \end{cases}$ nên bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là



Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và BBT bên dưới là BBT của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương và 1 điểm có hoành độ âm.

$\Rightarrow f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị dương

$\Rightarrow f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị

$\Rightarrow f\left(\left|x\right|\right)+2020$ có 5 điểm cực trị (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Câu 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f(-2)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g\left(x\right)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $h\left(x\right)=15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2$

Ta có $h'\left(x\right)=15\left(-4x^3+4x\right).f'\left(-x^4+2x^2-2\right)-60x^5+60x$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=-60x\left(x^2-1\right)\left[f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1\right].$

Mà $-x^4+2x^2-2=-\left(x^2-1\right)^2-1\le -1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ ta suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)\ge 0.$

Suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó dấu của $h'\left(x\right)$ cùng dấu với $u\left(x\right)=-60x\left(x^2-1\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-1;x=0;x=1.$

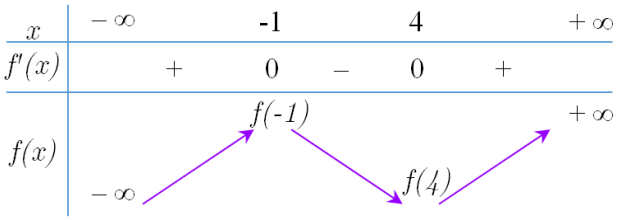
Vậy hàm số $h\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(0)=15f(-2)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại O và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y=g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|(C)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

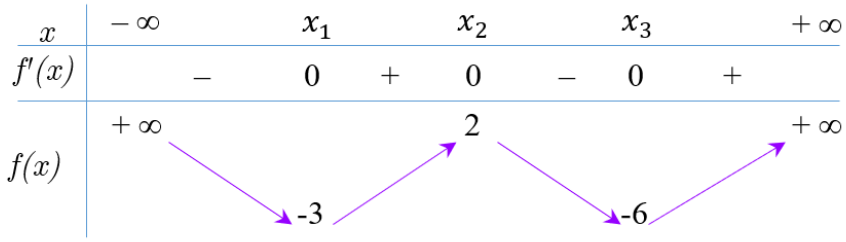
Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)(C')$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số $y=f(x)(C')$ sẽ cắt trục hoành tại tối đa hai điểm có hoành độ dương.

Khi đó đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)(C'')$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)(C')$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)(C'')$ sẽ cắt trục hoành tối đa 4 điểm phân biệt $\Rightarrow$ hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Vì đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|(C)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)(C'')$ nên đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|(C)$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



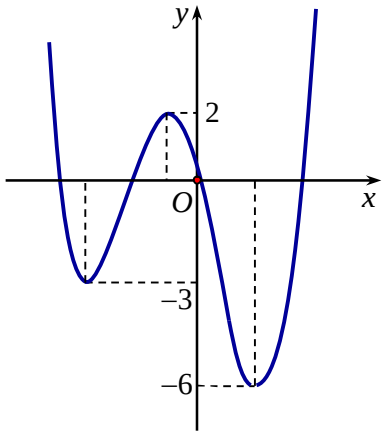
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

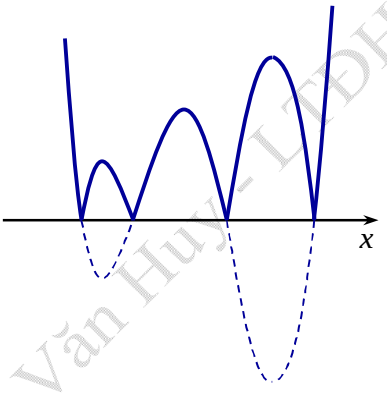
Từ bảng biến thiên ta có đồ thị của $(C): y = f(x)$



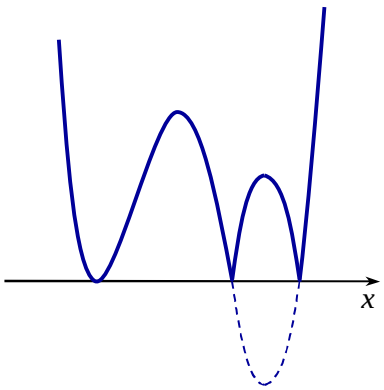
Nhận xét: Số giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của đồ thị $(C'): y = f(x-1)$ với Ox .

Vì $m > 0$ nên đồ thị hàm số $(C''): y = f(x-1)+m$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.

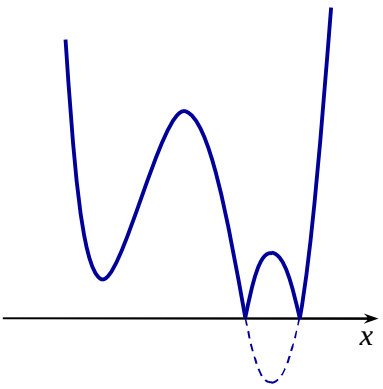
Đồ thị hàm số $y = |f(x-1)+m|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $(C''): y = f(x-1)+m$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox , lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox .



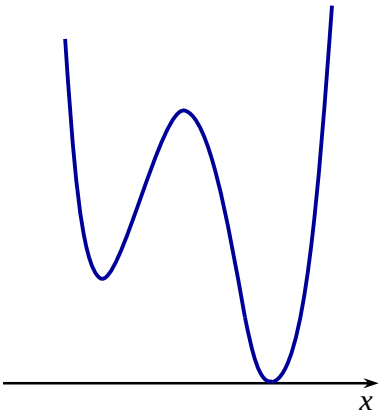
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

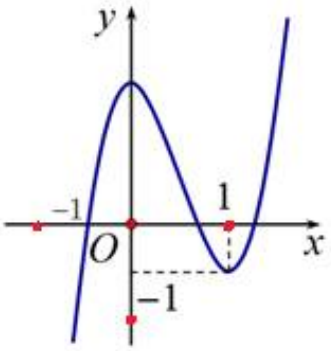
TH4: $m\ge 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\le m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

DẠNG 3: CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO ĐỒ THỊ

Câu 27. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(|x+1|-1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(|x+1|-1)$

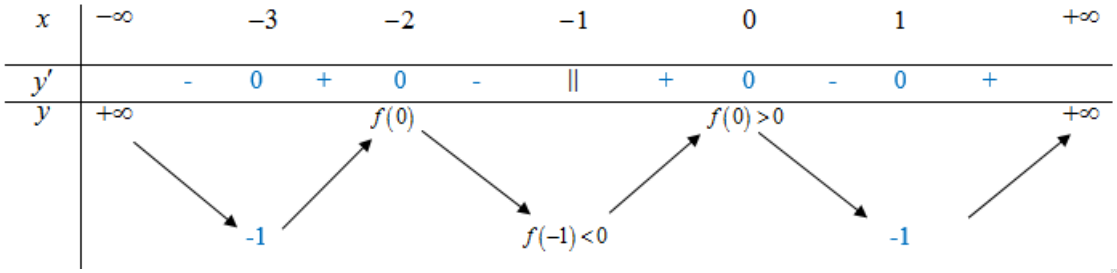
Ta có $y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'(|x+1|-1)$ (Điều kiện $x\neq -1$)

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+1|-1=0\\|x+1|-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

y' không xác định tại $x=-1$.

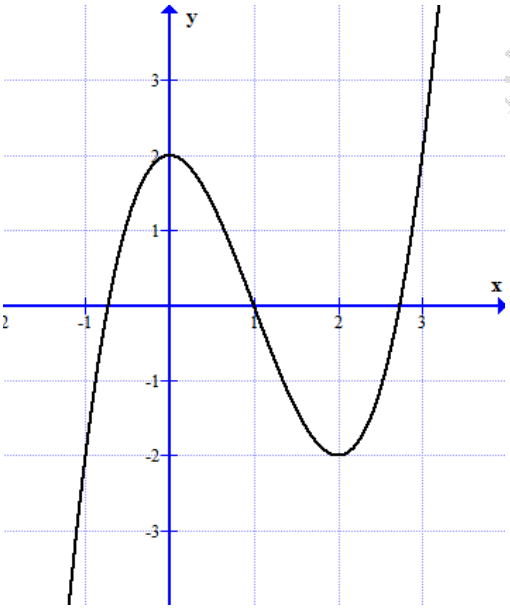
Gv : Lương Văn Huy - LHDi - HN - 0969141404

Bảng biến thiên



Dựa vào BBT của hàm số $y = f\left(|x+1|-1\right)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như sau. Hỏi hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5. **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 8.

Lời giải

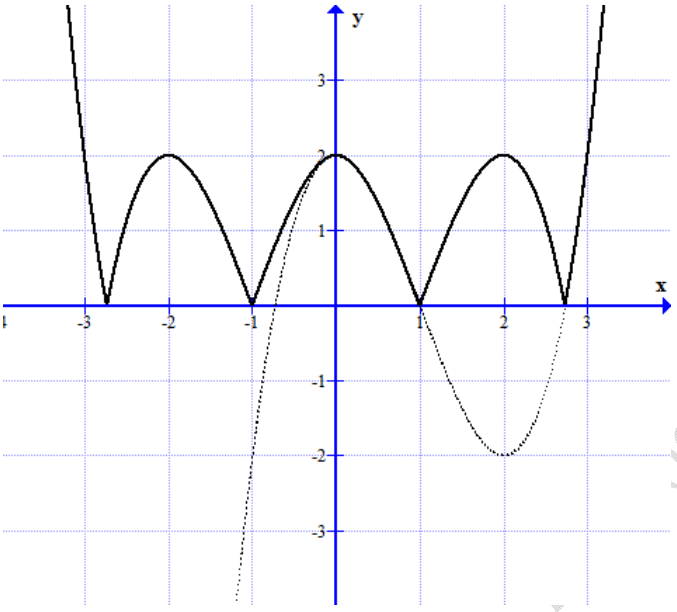
Chọn C

Do hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn nên từ đồ thị (C) của hàm số $y = f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ bằng cách xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung của đồ thị (C) , phần đồ thị còn lại thì lấy đối xứng qua trục tung.

Từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ ta suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía bên trên trục hoành của đồ thị (C_1) , phần đồ thị còn lại thì lấy đối xứng qua trục hoành và xóa phần đồ thị phía dưới trục hoành.

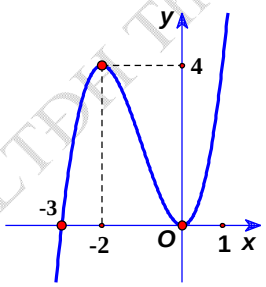
Gv : Lương Văn Huy - 0969141404

Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ ta thấy hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 29. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ có dạng như hình vẽ sau



Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 . **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

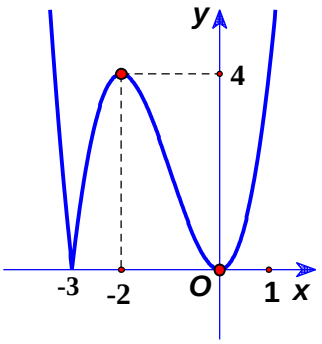
Ta có:

$$y=\left|x^3+3x^2\right|=\begin{cases}x^3+3x^2 \quad khi\, x^3+3x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3\\ -x^3-3x^2 \quad khi\, x^3+3x^2<0 \Leftrightarrow x<-3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^3+3x^2 \quad khi\ x\geq -3\\ -x^3-3x^2 \quad khi\ x<-3\end{cases}$$

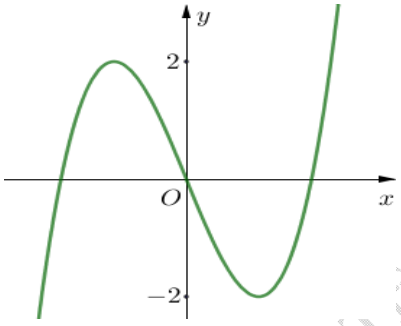
Nên ta giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ khi $x\geq -3$ (tức là phần đồ thị của hàm số $y=x^3+3x^2$ phía trên trục hoành), lấy phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ khi $x<-3$ (là phần đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ phía dưới trục hoành) qua trục hoành, rồi xóa bỏ phần đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ khi $x<-3$. Hình còn lại chính là đồ thị hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ như hình vẽ dưới đây:

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - 0969141404



Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

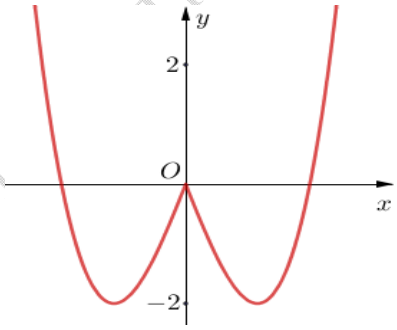
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $(C):y=f(x)$, khi ấy $(C'):y=f(|x|)$ được vẽ như sau:

+) Gọi (C_1) là phần của (C) ứng với $x\ge 0$.

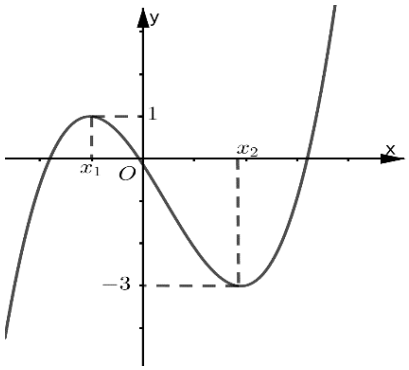
+) Gọi (C_2) là đối xứng của (C_1) qua trục tung.

Ta được $(C')=(C_1)\cup(C_2)$.

Dựa vào (C') ta thấy hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$ có đồ thị như hình dưới đây.

Gv. Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404



Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có đúng ba điểm cực trị là

A. $S=\left\{-1;3\right\}$.
B. $S=\left[1;3\right]$.
C. $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.
D. $S=\left(-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right)$

Lời giải

Chọn C

Giả sử $\left(C_1\right):y=f\left(x\right),\left(C_2\right):y=f\left(x\right)+m,\left(C_3\right):y=\left|f\left(x\right)+m\right|$. Ta nhận thấy:

+) Số điểm cực trị của $\left(C_3\right)$ bằng $A+B$ với A là số điểm cực trị của $\left(C_2\right)$ và B là số giao điểm của $\left(C_2\right)$ với trục hoành (không tính các tiếp điểm của $\left(C_2\right)$ và trục hoành).

+) $\left(C_2\right)$ có được là do tịnh tiến $\left(C_1\right)$ theo phương đứng và $\left(C_1\right)$ có hai điểm cực trị nên $\left(C_2\right)$ cũng có hai điểm cực trị.

Chú ý:

- Khi $\left(C_2\right)$ và trục hoành có một điểm chung thì điểm này được tạo ra là do $\left(C_2\right)$ cắt trục hoành.

- Khi $\left(C_2\right)$ và trục hoành có hai điểm chung thì một trong hai điểm này được tạo ra là do $\left(C_2\right)$ cắt trục hoành và điểm còn lại là do $\left(C_2\right)$ tiếp xúc trục hoành.

Từ tất cả các điều nêu ở trên ta có:

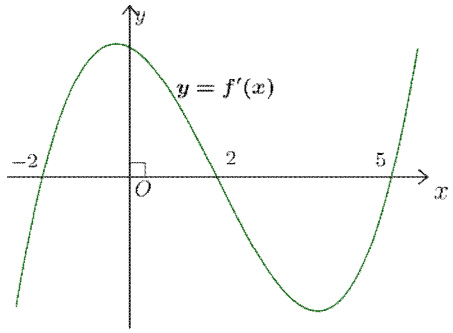
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $\left(C_2\right)$ và trục hoành có không quá hai điểm chung (*).

Dựa vào $\left(C_1\right)$, ta thấy (*) được thỏa mãn khi và chỉ khi ta tịnh tiến $\left(C_1\right)$ dọc theo phương đứng xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị hoặc lên trên tối thiểu 3 đơn vị.

Tức $\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

Vậy: $m\in\left(-\infty;-1\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-2020;2020\right]$ để hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-m\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 2024.
B. 2025.
C. 2018.
D. 2016.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của $f'(x)$ suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Đặt $g(x)=f\left(|x+1|-m\right)$

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'\left(|x+1|-m\right),\ \forall x\neq -1.$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x+1|-m=-2 & (1) \\ |x+1|-m=2 & (2). \\ |x+1|-m=5 & (3) \end{array}\right.$$

Chú ý:

- Hàm $g(x)$ đạt cực trị tại $x=-1$ vì $g'(x)$ đổi dấu khi qua $x=-1$.

- Mỗi phương trình $(1);(2);(3)$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt, khi tất cả đều có 2 nghiệm phân biệt thì tất cả chúng đôi một khác nhau và khác -1.

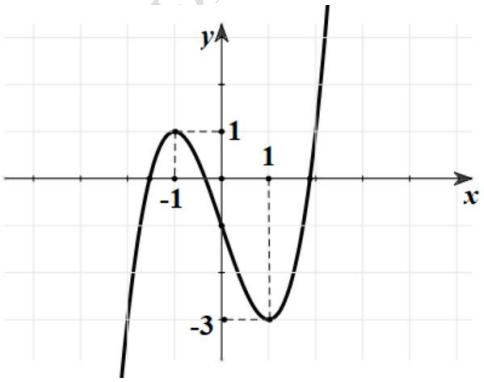
Từ tất cả những điều nêu ở trên ta thấy:

$g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất $\Leftrightarrow (1);(2);(3)$ đều có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ m+2>0 \\ m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$$

Kết hợp điều kiện $m\in[-2020;2020]$, $m\in\mathbb{Z}$ ta được $m\in\{3;\ 4;\ ....;\ 2018;\ 2019;2020\}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(|12x+1|+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Do tồn tại $[0;x_0)$ mà trên đó $f(x)$ không là hằng số nên số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của $f(x)$. Do đó hàm số $y=f\left(|12x+1|+m\right)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{1}{12}$ của hàm số $y=f\left((12x+1)+m\right)$.

Từ đồ thị đã cho ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=-1;x=1$. Do đó hàm số

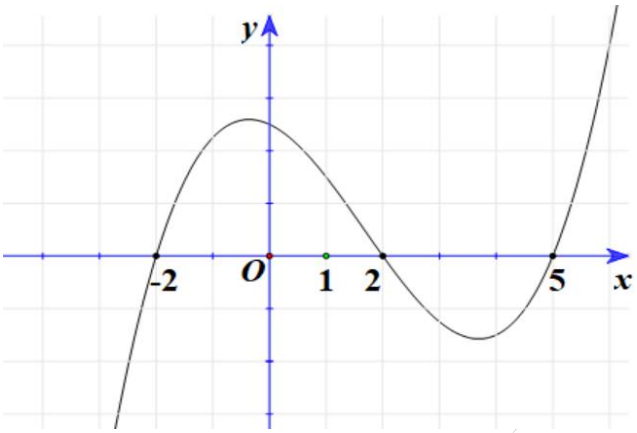
Gv : Lương Văn Huy Thanh Trì - HN - 0969141404

$y=f\left((12x+1)+m\right)$ có 2 điểm cực trị là $x=-\dfrac{m+2}{12}; x=-\dfrac{m}{12}$ (Tìm được từ $12x+1+m=-1;$ $12x+1+m=1$).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow$ hàm số $y=f\left(12x+1+m\right)$ có đúng 1 điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{1}{12}\Leftrightarrow -\dfrac{m+2}{12}\le -\dfrac{1}{12}<-\dfrac{m}{12}\Leftrightarrow -1\le m<1$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1,0\}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(|x+1|-m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của tập hợp S bằng

A. -12 . **B.** 9. **C.** -7. **D.** -14.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Do tồn tại $[0;x_0)$ mà trên đó $f(x)$ không là hằng số nên số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$. Do đó hàm số $y=f\left(|x+1|-m\right)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn -1 của hàm số $y=f\left((x+1)-m\right)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=-2; x=2; x=5$. Do đó hàm số $y=f\left((x+1)-m\right)$ có 3 điểm cực trị là $x=m-3; x=m+1; x=m+4$ (Tìm được từ $(x+1)-m=-2; (x+1)-m=2; (x+1)-m=5$).

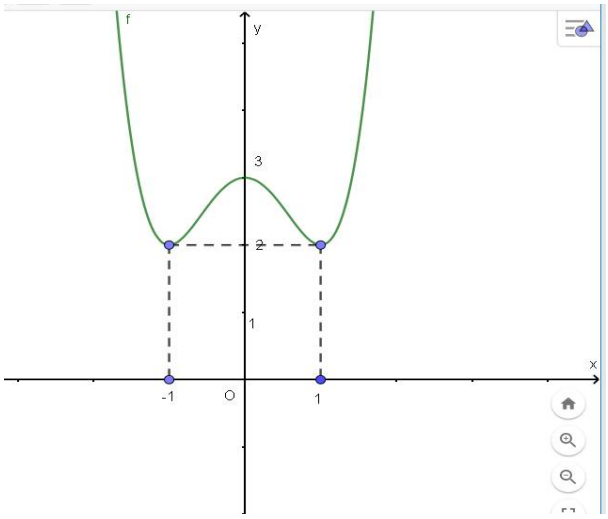
Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow$ hàm số $y=f\left((x+1)-m\right)$ có đúng 1 điểm cực trị lớn hơn $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m-3\le -1\\ m+1\le -1\\ m+4>-1\end{cases}\Leftrightarrow -5<m\le -2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -9.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh ... - 0969141404



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(x^2-2|x|\right)$, dễ thấy $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x\neq 0$ ta có:

+) $g'(x)=\left(2x-2\dfrac{x}{|x|}\right)f'\left(x^2-2|x|\right)=\dfrac{2x}{|x|}\left(|x|-1\right)f'\left(x^2-2|x|\right)$.

+) $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ f'\left(x^2-2|x|\right)=0\end{array}\right.$.

+) $f'\left(x^2-2|x|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2|x|=-1\\ x^2-2|x|=1\\ x^2-2|x|=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=1\\ |x|=1+\sqrt{2}\\ |x|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\\ x=\pm 2\end{array}\right.$.

Chú ý: $g'(x)$ đổi dấu khi qua $x=0$.

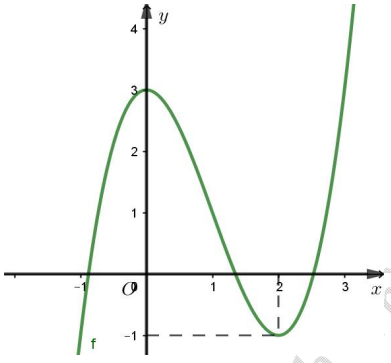
Bảng biến thiên của $g(x)$:

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-2	-1	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có 7 cực trị.

Câu 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Trong đoạn $\left[-20;20\right]$ có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|10f\left(x-m\right)-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 36. **B.** 32. **C.** 40. **D.** 34.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g\left(x\right)=10f\left(x-m\right)-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m$, ta có:

$g'\left(x\right)=10f'\left(x-m\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-m=0\\x-m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g\left(x\right)$:

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$30-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m$ ↘	$-10-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m$ ↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi:

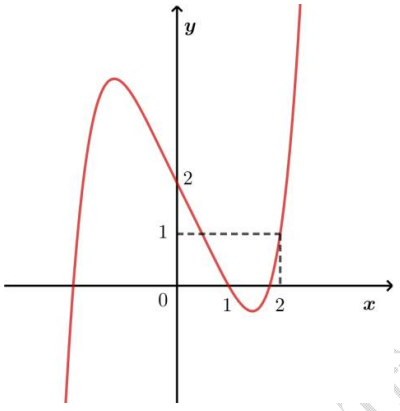
Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\left[\begin{array}{l} 30-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m\le 0 \\ -10-\frac{11}{3}m^2+\frac{37}{3}m\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \frac{-18}{11} \\ m\ge 5 \\ \frac{15}{11}\le m\le 2 \end{array}\right.$$

Do m là số nguyên thuộc $[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;...;-2;2;5;6;...;20\}$.

Vậy có 36 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $y=\left|4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Lời giải

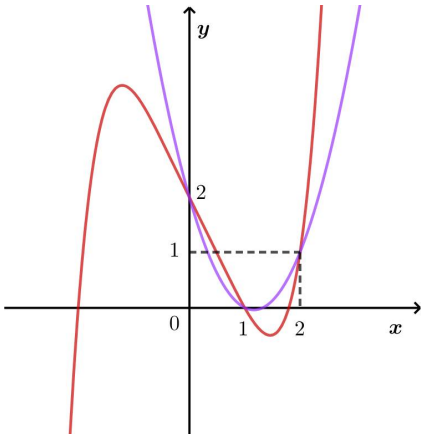
Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1$, ta có:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4f'(x)-6x^2+14x-8=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2\ (*).$$

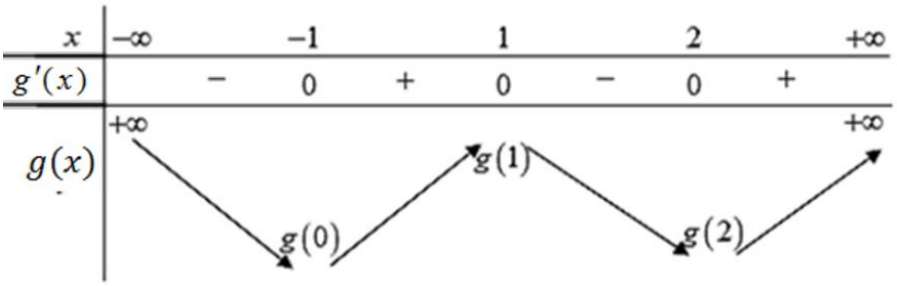
Đường cong $y=f'(x)$ cắt parabol $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2$ tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $x=0;x=1;x=2$. Do đó $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0;x=1;x=2$ nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.

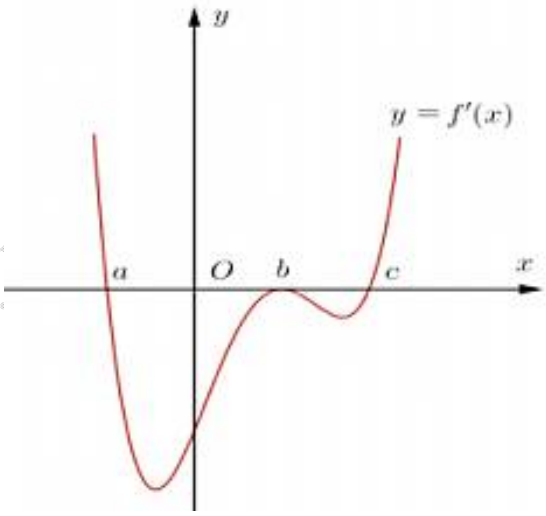
Ta có bảng biến thiên



Suy ra phương trình $g(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm .

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa $3+4=7$ điểm cực trị.

Câu 38 . Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=a;x=c$ và không đổi dấu khi đi qua điểm $x=b$.

Do đó $f'(x)=(x-a)^{2n+1}(x-b)^{2p}(x-c)^{2q+1}.g(x)$ với $n,p,q\in\mathbb{N};\ p>0;\ g(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

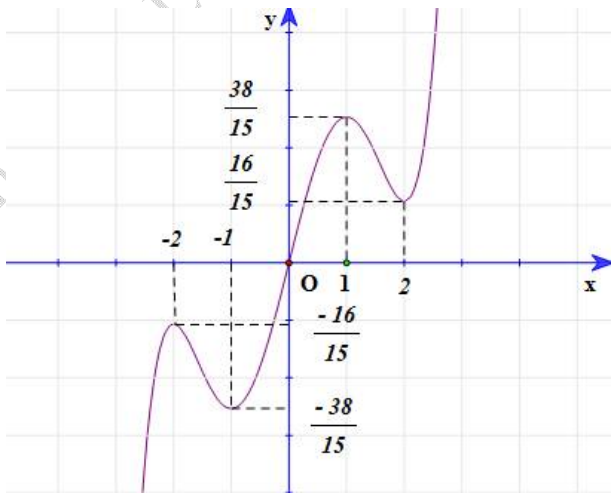
Xét hàm số $h(x)=f(x^3)$, ta có:

$$\begin{aligned}h'(x)&=3x^2f'(x^3)\\&=3x^2.(x^3-a)^{2n+1}.(x^3-b)^{2p}.(x^3-c)^{2q+1}.g(x^3)\\&=3x^2.(x^3-a)^{2n+1}.(x^3-b)^{2p}.(x^3-c)^{2q+1}.g(x^3)\end{aligned}$$

Nhận thấy $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=\sqrt[3]{a};x=\sqrt[3]{c}$ do đó $h(x)$ có hai điểm cực trị $x=\sqrt[3]{a};x=\sqrt[3]{c}$.

Mặt khác: chỉ có $x=\sqrt[3]{c}$ là điểm cực trị dương nên hàm số $g(x)$ có $2.1+1=3$ điểm cực trị.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm $g(x)=|15f(x)+1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

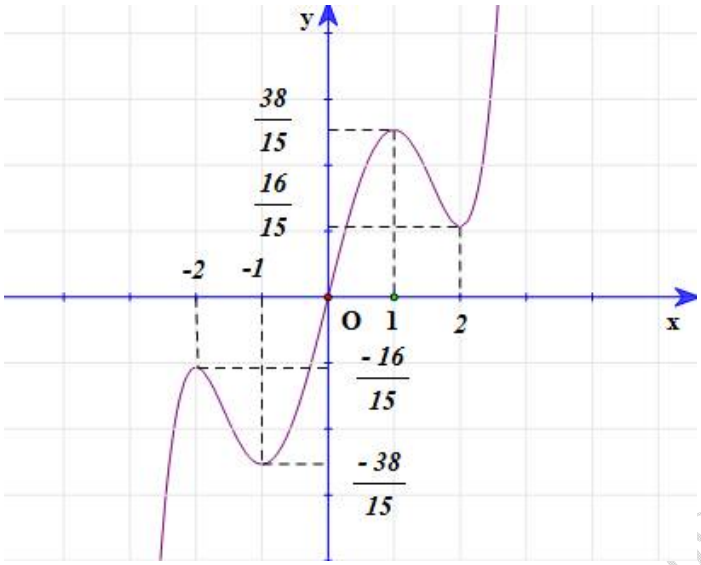


A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Gv : Lương Văn Huy - TTBH Thanh Trì - HN - 0969141404



Xét $h(x)=15f(x)+1\Rightarrow h'(x)=15f'(x)$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

$h(1)=39; h(-1)=-37; h(2)=17; h(-2)=-15$.

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-15	↘	-37	↗	39	↘	17	↗	$+\infty$

Ta thấy đồ thị hàm số $h(x)$ có 4 điểm cực trị và cắt trục Ox tại 1 điểm.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|15f(x)+1|$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 4: CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA HÀM ĐA THỨC CHỨA THAM SỐ

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3\right|-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x+1$, ta có $f'(x)=3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=m+2 \end{array}\right.$. Dễ thấy $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Đặt $g(x)=\left|x^3\right|-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$, dễ thấy $g(x)=f(|x|)$.

Do đó $g(x)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)$ có đúng một cực trị dương.

Tức $m-2\le 0<m+2\Leftrightarrow -2<m\le 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên ta được $m \in \{-1;0;1;2\}$.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left|3x^5 - 15x^3 - 60x + m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 289. **B.** 288. **C.** 287. **D.** 286.

Lời giải

Chọn C

Xét $y = 3x^5 - 15x^3 - 60x$ có $y' = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 45x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy hàm số $y = 3x^5 - 15x^3 - 60x$ có đúng 2 điểm cực trị $x = 2; x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	144	↘	-144	↗	$+\infty$

Vậy để hàm số có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow 3x^5 - 15x^3 - 60x + m = 0$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3.

$\Leftrightarrow 3x^5 - 15x^3 - 60x = -m$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3.

$\Leftrightarrow -144 < -m < 144$. Mặt khác $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-143;...;143\}$. Có 287 số nguyên thỏa mãn.

Câu 42. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$

Yêu cầu bài toán tương đương hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có 2 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow 3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(2m+1)^2-9m>0. \\ S=\dfrac{2(2m+1)}{3}>0 \\ P=\dfrac{3m}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ 0<m<\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty).$$

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Xét $x^2-2x+m=0$. Ta có: $\Delta'=1-m$

- TH1: $\Delta'\le 0 \Leftrightarrow m\ge 1$

$\Rightarrow x^2-2x+m\ge 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|x^2-2x+m\right|=x^2-2x+m$

$\Rightarrow y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$ có đúng một điểm cực trị $x=0$ (Loại).

- TH2: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m<1$

$\Rightarrow x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$

Khi đó: $y'=\dfrac{(2x-2)\left(x^2-2x+m\right)+2\left|x^2-2x+m\right|}{\left|x^2-2x+m\right|}$

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2+2=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-2)+2=0 \\ x^2-2x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x^2-2x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

+ Với $0<m<1 \Rightarrow$ Không có giá trị nguyên m thỏa mãn

+ Với $m<0 \Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

$\Rightarrow m\in\{-19,...,-1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 44. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=1;x=2;x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 17. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị dương

(Điều này luôn đúng do giả thiết). Do $m\in(-10;10)$ và $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-9,...,9\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=3^x+4^x-5^x$. Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có số điểm cực đại là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ là

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$ có dạng

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(\|x\|)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y=f(|x|)$ có hai điểm cực đại.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2-x-2$. Hàm số $y=|f(x)|$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$ với C là hằng số.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{6}+C$	↘	$-\frac{10}{3}+C$	↗	$+\infty$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - 0969141404

Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ có hai cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có ít nhất 3 điểm cực trị.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+2019$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2019;2020]$ để hàm số $y=f(|x+m-1|)+2020$ có 7 điểm cực trị.

A. 4039. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

Hàm số $y=f(|x+m-1|)+2020$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x+m-1)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $1-m$.

Ta có: $f'(x+m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+m-1=1\\x+m-1=2\\x+m-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-m\\x=3-m\\x=4-m\end{array}\right.$

Để hàm số $y=f(x+m-1)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $1-m$ thì $\left\{\begin{array}{l}2-m>1-m\\3-m>1-m\\4-m>1-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}$.

Do $m\in[-2019;2020]$ nên có 4040 số nguyên thỏa điều kiện bài toán.

Câu 48. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y=|-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2|$ có 5 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$.

Hàm số $y=|-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)+m^3-m^2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt (*).

Ta có: $f'(x)=-3x^2+6mx+3(1-m^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\Rightarrow y_1=-m^2+3m-2\\x=m+1\Rightarrow y_2=-m^2+3m+2\end{array}\right.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow(-m^2+3m-2).(-m^2+3m+2)<0$

$\Leftrightarrow(-m^2+3m-2).(-m^2+3m+2)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{17}}{2}<m<1\\2<m<\frac{3+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

Do m nguyên nên $m=0,\ m=3$. Vậy $S=\{0;3\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 3.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

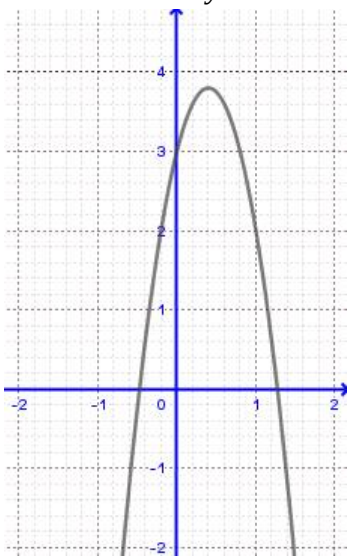
Lời giải

Chọn D

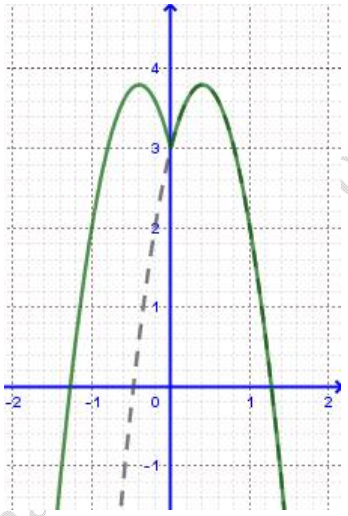
Ta có: $y=f(x)$ có đồ thị (C).

$y=f(|x|)$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có được bằng cách bỏ phần đồ thị (C) nằm phía trái trục tung, giữ nguyên đồ thị (C) nằm bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

+TH1: $m=1\Rightarrow y=-5x^2+4x+3$.



Đồ thị hàm số $y=-5x^2+4x+3$.



Đồ thị hàm số $y=-5|x|^2+4|x|+3$ có 3 cực trị.

Vậy $m=1$ thỏa yêu cầu.

+ TH2: $m\neq 1\Rightarrow f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$ là hàm số bậc 3.

Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

$\Leftrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1\leq 0<x_2$.

$\Leftrightarrow 3(m-1)x^2-10x+m+3=0(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1\leq 0<x_2$.

+ $x_1<0<x_2\Leftrightarrow 3(m-1)(m+3)<0\Leftrightarrow -3<m<1$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0\}$

+ Nếu $(*)$ có một nghiệm $x_1=0\Rightarrow m+3=0\Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó $(*)$ trở thành: $-12x^2-10x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{5}{6}\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn).

Vậy có 4 giá trị m.

Câu 50. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Cty : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì 0969141404

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{m}{2}$	↘	$\frac{m}{2}-32$	↗	$+\infty$

Để thỏa yêu cầu thì đồ thị $(C): y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3;...;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên m là: $S = 1+2+3+...+63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016$.

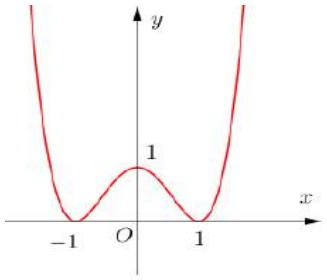
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

BÀI TẬP VẬN DỤNG – CỰC TRỊ HÀM SỐ

Câu 1: ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên *R* và đạo hàm $f'(x)=2(x-1)^2(2x+6)$. Khi đó hàm số $f(x)$

A. Đạt cực đại tại điểm $x=1$.
B. Đạt cực tiểu tạo điểm $x=-3$.
C. Đạt cực đại tại điểm $x=-3$.
D. Đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 2: ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu?



A. 0 **B.** -1
C. 1 **D.** 2

Câu 3: ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ có 2 điểm cực trị *A*, *B*. Tìm tọa độ trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB*

A. $M(-2;4)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(-1;0)$. **D.** $M(0;2)$.

Câu 4: ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$

A. $(3;1)$ **B.** $x=3$ **C.** $\left(1;\frac{7}{3}\right)$ **D.** $x=1$

Câu 5. ***(Trường THPT Hàm Rồng lần 2 năm 2017)*** Trong các mệnh đề sau, hãy tìm mệnh đề **sai**.

A. Hàm số $y=2x^3+3x^2-1$ có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số $y=x^3+x+2$ không có cực trị.

C. Hàm số $y=x+\frac{1}{x+1}$ có hai cực trị **D.** Hàm số $y=x^4+2x^2-3$ có ba điểm cực trị

Câu 6: ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số nào trong bốn đồ thị hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây có đúng một điểm cực trị?

A. $y=x^3-3x^2+1$ **B.** $y=\frac{x+1}{2-x}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-x+1}$ **D.** $y=\tan x$

Câu 7: ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(2x-1)^3$. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Câu 8. ***(Trường THPT Hồng Quang lần 4 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có 3 điểm cực trị là $A(0;-1)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$. Tính y_1+y_2.

A. -4. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -8.

Câu 9: ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x-\sin 2x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nhận $x=\frac{\pi}{6}$ làm điểm cực tiểu. **B.** Hàm số nhận $x=\frac{\pi}{6}$ làm điểm cực đại.

C. Hàm số nhận $x=-\frac{\pi}{2}$ làm điểm cực tiểu. **D.** Hàm số nhận $x=\frac{\pi}{2}$ làm điểm cực đại.

Câu 10: ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào **không có** cực trị?

A. $y=x^2+4x-3$ **B.** $y=-x^3+3x^2+1$ **C.** $y=-x^4+2x^2+2$ **D.** $y=x^3+3x-2$

Câu 11: ***(Trường THPT Lê Hồng Phong lần 1 năm 2017)*** Hàm số nào sau đây không có cực trị?

Gv. Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $y=x^3-3x+1$ **B.** $y=\dfrac{2-x}{x+3}$

C. $y=x^4-4x^3+3x+1$ **D.** $y=x^{2n}+2017x\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Câu 12: ***(Trường THPT Lê Lợi năm 2017)*** Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý. Trong bốn mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

(II) Nếu $f'(x_0)=0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại $x=x_0$

(III) Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x)>0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại $x=x_0$.

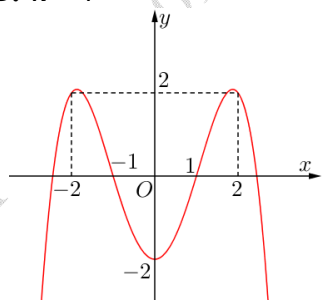
(IV) Nếu $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=x_0$ thì $f''(x)<0$

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 13: ***(Trường THPT Lê Quý Đôn năm 2017)*** Hàm số $y=-\dfrac{x^4}{4}+2x^2+1$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=-3.$ **B.** $x=0.$ **C.** $x=2.$ **D.** $x=4$

Câu 14: ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Đường thẳng qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-2x^2-3$ là:



A. $y=-5$ **B.** $y=-3$

C. $y=\sqrt{2}$ **D.** $y=0$

Câu 15: ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 16: ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ đạt cực đại tại:

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=0$

Câu 17: ***(Trường THPT Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$

C. Giá trị cực tiểu bằng -2

D. Hàm số có hai cực trị và $y_{CD}<y_{CT}$

Câu 18: ***(Trường THPT Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-2	↗		↗	2	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có ba điểm cực trị

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$

Câu 19: ***(Trường THPT Ngô Gia Tự lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x}$, tìm khẳng định đúng?

A. Hàm số đã cho có một cực tiểu duy nhất là $y=1.$

Gv : Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì 0969141404

B. Hàm số đã cho chỉ có cực đại duy nhất là $y=-\frac{1}{2}$.

C. Hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu duy nhất là $y=-\frac{1}{2}$.

D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 20: ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Kí hiệu d là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+2$. Tính d?

A. $d=2\sqrt{5}$ **B.** $d=2\sqrt{10}$ **C.** $d=2$ **D.** $d=4$

Câu 21: ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^3-9x^2+24x+4$ có điểm cực tiểu và cực đại lần lượt là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Giá trị $|y_1-y_2|$ bằng:

A. $|y_1-y_2|=2$. **B.** $|y_1-y_2|=4$. **C.** $|y_1-y_2|=0$. **D.** $|y_1-y_2|=44$.

Câu 22: ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị. **B.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 23. ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Số cực tiểu của hàm số $y=x^4-3x^2+1$ là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 24: ***(Trường THPT Nguyễn Công Trứ năm 2017)*** Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-12x-12$. Gọi x_1,x_2 lần lượt là hoành độ hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số. Kết luận nào sau đây là đúng ?

A. $(x_1-x_2)^2=8$. **B.** $x_1.x_2=2$.

C. $x_2-x_1=3$. **D.** ${x_1}^2+{x_2}^2=6$.

Câu 25: ***(Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai – HN năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0;2)$ có bảng biến thiên

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		↗	$f(1)$	↘	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$

C. Trên $(0;2)$, hàm số không có cực trị

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;2)$ là $f(0)$.

Câu 26: ***(Trường THPT Năng Khiếu HCM năm 2017)*** Gọi A,B,C là bao điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x+1$. Diện tích tam giác ABC là:

A. $\sqrt{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cô Lương Văn Huy - TTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 27: ***(Trường THPT Quỳnh Lưu 1 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

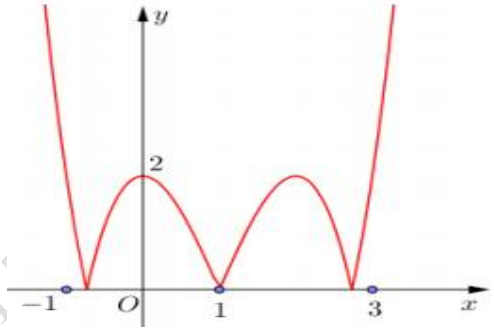
Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số có đúng hai cực trị
B. Hàm số không xác định tại $x=1$
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2
D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

Câu 28: ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{(x-1)^2(x+2)}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Điểm cực tiểu của hàm số là $x=1$
B. Hàm số có cả cực đại và cực tiểu
C. Điểm cực đại của hàm số là $x=-1$
D. Hàm số có cực đại và không có cực tiểu

Câu 29: ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)***
Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số là

A. 4
B. 2
C. 3
D. 5

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - 0969141404

Câu 30: ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Biết rằng hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1, f(1)=-3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $f(-2)=24$ **B.** $f(-2)=4$ **C.** $f(-2)=2$ **D.** $f(-2)=16$

Câu 31: ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Xác định các hệ số a,b,c để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, biết điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số

A. $a=-1;b=2;c=3$ **B.** $a=-\frac{1}{4};b=3;c=-3$

C. $a=1;b=3;c=-3$ **D.** $a=1;b=-2;c=3$

Câu 32: ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó điều kiện nào sau đây cho biết AB đi qua gốc tọa độ O?

A. $ab+9=3a$ **B.** $c=0$ **C.** $ab=9c$ **D.** $a=0$

Câu 33: ***(Trường THPT Kim Liên lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=-x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ và có điểm cực đại là $M(2;3)$. Tính $Q=a+2b+c$

A. $Q=0$ **B.** $Q=-4$ **C.** $Q=1$ **D.** $Q=2$

Câu 34: ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+(a-1)x^2+(a+3)x-4$. Tìm a để hàm số đạt cực đại tại $x=1$

A. $a=-1$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-3$ **D.** $a=0$

Câu 35: ***(Trường THPT Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 1 năm 2017)*** Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính $f(1)$

A. $f(1)=0$ **B.** $f(1)=5$ **C.** $f(1)=-6$ **D.** $f(1)=-7$

Câu 36: ***(Trường THPT Nguyễn Công Trứ năm 2017)*** Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=|ax^3+bx^2+cx+d|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 37: ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Biết hàm số đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x=-2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$. Khi đó tổng $2a+b+c$ bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

Câu 38: ***(Trường THPT Quỳnh Lưu 1 lần 2 năm 2017)*** Giả sử trên khoảng $(-\infty;0)$ thì hàm số $y=(a+1)(x+1)^4+(-2a+b-1)(x+1)^2-8a-4b$ đạt giác trị lớn nhất tại $x=-3$. Hỏi rằng trên đoạn $\left[\frac{1}{2};3\right]$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

A. 12 **B.** 11 **C.** 10 **D.** 13

Câu 39: ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh năm 2017)*** Tìm a,b để các cực trị của hàm số $y=ax^3+(a-1)x^2-3x+b$ đều là những số dương và $x_0=-1$ là điểm cực tiểu.

A. $\begin{cases}a=1\\b>1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=1\\b>2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=1\\b>-2\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=1\\b>-3\end{cases}$

Câu 40: ***(Sở GD và ĐT Đà Nẵng năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có $f(-2)=16$ và đạt cực trị tại các điểm $x=2, x=-2$. Tính $f(2)$

A. $f(2)=4$ **B.** $f(2)=-16$ **C.** $f(2)=0$ **D.** $f(2)=-12$

Câu 41: ***(Sở GD và ĐT Hà Nam năm 2017)*** Biết đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có các điểm cực trị là $E(0;-4), F(-1;-3)$. Tìm giá trị của hàm số tại điểm $x=-2$.

Gv: Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $y(-2)=-8.$ **B.** $y(-2)=-6.$ **C.** $y(-2)=-4.$ **D.** $y(-2)=-2.$

Câu 42: ***(Sở GD và ĐT Hà Nam năm 2017)*** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có các điểm cực trị thỏa mãn $x_1\in(-1;0), x_2\in(1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a<0,b>0,c<0,d<0.$ **B.** $a<0,b<0,c>0,d<0.$

C. $a>0,b>0,c>0,d<0.$ **D.** $a<0,b>0,c>0,d<0.$

Câu 43: ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Gọi *d* là đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+9x-1.$ Tìm tất cả các giá trị của m để *d* đi qua điểm $A\left(-\frac{9}{2};8\right)$

A. $m=-4$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=4$ **D.** $m=4$ hoặc $m=-3$

Câu 44: ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+\frac{4}{3}x-2017$ không có điểm cực trị

A. $m>-3$ **B.** $-2<m<1$ **C.** $m<1$ **D.** $-3\le m\le 1$

Câu 45: ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2$ (1). Gọi *M* là điểm cực đại của đồ thị hàm số số (1) ứng với một giá trị *m* thích hợp, đồng thời *M* cũng là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của *m*. Có bao nhiêu điểm *M* thỏa mãn yêu cầu đề bài?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 46: ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị *A* và *B*, sao cho đường thẳng *AB* vuông góc với đường thẳng $y=x+2$

A. $m=0$ và $m=2$ **B.** $m=0$, $m=-1$ và $m=-2$

C. $m=0$ và $m=-1$ **D.** $m=0$, $m=1$ và $m=2$

Câu 47: ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-4$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số ***không*** có cực trị

A. $0\le m\le\frac{1}{3}$ **B.** $m\ge\frac{1}{4}$ **C.** $0\le m\le\frac{1}{4}$ **D.** $0<m\le\frac{1}{4}$

Câu 48: ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+(m^2-3m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=0.$ Tìm tọa độ giao điểm *A* của đồ thị hàm số với trục tung.

A. $A(0;-2).$ **B.** $A(0;2).$ **C.** $A(0;-1).$ **D.** $A(0;1).$

Câu 49: ***(Trường THPT Kim Sơn A lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=0$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=2$

Câu 50. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+3)x+m-4$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m>1.$ **B.** $m>4.$ **C.** $-3<m<-1.$ **D.** $m>0.$

Câu 51: ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Tìm *m* để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+1$ có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 1 (*O* là gốc tọa độ).

A. $m=\pm 3.$ **B.** $m=\pm 1.$ **C.** $m=\pm 5.$ **D.** $m=\pm 2.$

Câu 52: ***(Trường THPT Ngô Gia Tự lần 3 năm 2017)*** Cho đường thẳng $d: y=-4x+1.$ Đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng *d* khi:

A. $m=1.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=2.$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN 0969141404

Câu 53. ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{(m-1)x^3}{3}+(m-1)x^2+4x-1$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2 đồng thời $x_1<x_2$ khi và chỉ khi:

A. $m>5$ **B.** $m=1$ hoặc $m=5$ **C.** $m<1$ hoặc $m>5$ **D.** $m<1$

Câu 54. ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{(m-1)x^3}{3}+(m-1)x+3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số đã cho không có cực trị là:

A. $\{1\}$ **B.** $[0;2]$

C. $[0;2]\setminus\{1\}$ **D.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Câu 55: ***(Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (*m* là tham số). Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành ?

A. $m<4$ **B.** $0<m<4$ **C.** $m>4$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>4\end{array}\right.$

Câu 56: ***(Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+m$ có cực trị là x_1,x_2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left|2x_1x_2-4(x_1+x_2)\right|$ bằng:

A. 0 **B.** 8 **C.** 9 **D.** $+\infty$

Câu 57: ***(Trường THPT Nguyễn Khuyến năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ (C_m), với *m* là tham số. Xác định tất cả giá trị của *m* để cho đồ thị hàm số (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$ **B.** $0<m<2$ **C.** $m\neq1$ **D.** $-\frac{1}{2}<m<1$

Câu 58: ***(Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai – HN năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị *A,B* mà tam giác *OAB* có diện tích bằng 48 (*O* là gốc tọa độ)

A. $m=2$ **B.** $m=\pm1$ **C.** $m=\pm2$ **D.** $m=1$

Câu 59: ***(Sở GD và ĐT Cần Thơ năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=-x^3+3m^2x$ có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho $AB=2\sqrt{5}$.

A. $m=\pm2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\pm1$.

Câu 60: ***(Sở GD và ĐT Điện Biên năm 2017)*** Giá trị của *m* để hàm số $y=x^3-3x+m$ có cực đại, cực tiểu sao cho giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số trái dấu nhau là:

A. $m<2$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $m<-2$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.$

Câu 61: ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Với giá trị nào của tham số *m* thì đồ thị hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m^4-3m^2+2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

A. $m=2$ **B.** $m=3$ **C.** $m=4$ **D.** $m=5$

Câu 62. ***(Trường THPT Hà Trung lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của *m* để hàm số $y=(m+1)x^4+2(m-2)x^2+1$ có ba cực trị.

A. $m<-1$ **B.** $-1\le m\le2$. **C.** $-1<m<2$. **D.** $m>2$.

Câu 63: ***(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+\sqrt{2}$. Tìm các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị *A, B, C* sao cho trục hoành chia tam giác *ABC* thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm\sqrt[4]{8}$. **C.** $m=\sqrt[4]{8}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 64: ***(Trường THPT Lạng Giang lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông khi *m* nhận giá trị

A. $m=-\sqrt{3}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=1$.

Câu 65: ***(Trường THPT Lê Lợi năm 2017)*** Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có ba cực trị

A. k = 3 **B.** k = -1 **C.** k = 1 **D.** k = 2

Câu 66: ***(Trường THPT Lê Quý Đôn năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2(m+1)x^2+m^2$. Tìm *m* để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 67: ***(Trường THPT Lục Ngạn 3 lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=-x^4+2mx^2-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với gốc tọa độ O.

A. $m=1$ hoặc $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **B.** $m=1$ hoặc $m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

C. $m=0$ hoặc $m=1$ **D.** $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Câu 68: ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$?

A. $m=2$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=\sqrt{2}$ **D.** $m=1$

Câu 69: ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Tìm các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=mx^4+(2m-1)x^2+m-2$ chỉ có một cực đại và không có cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m\le \dfrac{1}{2}$.

Câu 70: ***(Trường THPT Phan Đình Phùng năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^4+(m^2-2)x^2+2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

A. $m<-\sqrt{2}$ hoặc $0<m<\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}<m<0$.

C. $m>\sqrt{2}$. **D.** $0<m<\sqrt{2}$.

Câu 71. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 2 năm 2017)*** Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{4}(m-1)x^4$ đạt cực đại tại $x=0$ là:

A. $m<1$. **B.** $m>1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=1$.

Câu 72: ***(Sở GD và ĐT Phú Thọ năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có 3 điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m=1; m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 73: ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017)*** Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA+OB+OC=3$ là

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m=1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 74: ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $f(x)=mx^4-(m+1)x^2+(m+1)$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tất cả các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho nằm trên các trục tọa độ là

GV: Lương Văn Huy - LHDH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $\left[0;\frac{1}{3}\right]\cup\{-1\}$. **B.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$. **C.** $\left\{0;-1;\frac{1}{3}\right\}$. **D.** $[-1;0]\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 75. ***(Trường THPT Lương Văn Tuy năm 2017)*** Để đồ thị hàm số $y=x^4+2(m-4)x^2+m+5$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm trọng tâm là:

A. $m=0$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

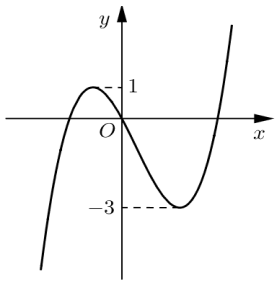
Câu 76: ***(Trường THPT Chuyên Hà Giang năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m^2+1)x^2+1$ có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=0$ **B.** $m=-\frac{1}{2}$ **C.** $m=1$ **D.** $m=\frac{2}{3}$

Câu 77: ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y=ax+\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu.

A. $-1<a<1$. **B.** $0\le a<1$. **C.** $-1<a<2$. **D.** $-2<a<0$.

Câu 78: ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.
B. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.
D. $1\le m\le 3$.

Câu 79: ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}\sin 3x+m\sin x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$.

A. $m>0$ **B.** $m=0$ **C.** $m=\frac{1}{2}$ **D.** $m=2$

Câu 80. ***(Trường THPT Bắc Trung Nam lần 9 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ và điểm $D(0;-3)$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho có ba điểm cực trị A, B, C sao cho tứ giác $ABDC$ hình thoi (trong đó $A\in Oy$).

A. $m=1$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m>0$. **D.** $m=1;\ m=\sqrt{3}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh ... 0969141404

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	B	21	B	41	A	61	D
2	C	22	C	42	D	62	C
3	D	23	A	43	C	63	A
4	A	24	C	44	D	64	D
5	D	25	B	45	D	65	C
6	C	26	B	46	A	66	D
7	A	27	C	47	C	67	A
8	A	28	D	48	A	68	D
9	A	29	D	49	D	69	B
10	D	30	A	50	A	70	D
11	B	31	D	51	B	71	A
12	C	32	C	52	D	72	D
13	C	33	D	53	D	73	A
14	A	34	D	54	D	74	C
15	B	35	B	55	B	75	C
16	A	36	A	56	C	76	A
17	D	37	B	57	A	77	A
18	B	38	A	58	A	78	A
19	C	39	B	59	D	79	B
20	A	40	B	60	B	80	D

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 3 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathbf{D}$ với $\mathbf{D}\subset\mathbb{R}$.

a. Nếu tồn tại một điểm $x_0\in\mathbf{D}$ sao cho $f(x)\le f(x_0)$ với mọi $x\in\mathbf{D}$ thì số $M=f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $f(x)$ trên $\mathbf{D}$ và kí hiệu là $M=\max\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)$.

Hoặc $M=\max\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le M\quad\forall x\in\mathbf{D}\\ \exists x_0\in\mathbf{D}: f(x_0)=M\end{cases}$.

b. Nếu tồn tại một điểm $x_0\in\mathbf{D}$ sao cho $f(x)\ge f(x_0)$ với mọi $x\in\mathbf{D}$ thì số $m=f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $f(x)$ trên $\mathbf{D}$ và kí hiệu là $m=\min\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)$.

Hoặc $m=\min\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge m\quad\forall x\in\mathbf{D}\\ \exists x_0\in\mathbf{D}: f(x_0)=m\end{cases}$.

Chú ý: Muốn chứng tỏ số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số $y=f(x)$ trên tập hợp $\mathbf{D}$ cần chỉ rõ:

- $f(x)\le M$ (hoặc $f(x)\ge m$) với mọi $x\in\mathbf{D}$.
- Tồn tại ít nhất một điểm $x_0\in\mathbf{D}$ sao cho $f(x_0)=M$ (hoặc $f(x_0)=m$)

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathbf{D}$.

Phương pháp: Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbf{D}$ ta tính $y'=f'(x)$ và tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định, sau đó lập bảng biến thiên trên $\mathbf{D}$ và từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Một số chú ý:

- Nếu hàm số luôn tăng trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{\mathbf{D}} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)=f(a)\end{cases}$.
- Nếu hàm số luôn giảm trên đoạn $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{\mathbf{D}} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)=f(b)\end{cases}$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a;b)$ thì ta lập bảng biến thiên và từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Nếu bài toán không cho tập $\mathbf{D}$ thì ta mặc định tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định của nó.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ T thì khi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbf{D}$ ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất một đoạn trên $\mathbf{D}$ có độ dài bằng T.
- Khi ta đặt ẩn phụ $x=u(t)$ thì với $x\in\mathbf{D}\Rightarrow t\in\mathbf{E}$ khi đó hàm số trở thành $y=g(t)$ và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathbf{D}$ cũng chính là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(t)$ trên $\mathbf{E}$.
- Chúng ta cần phân biệt rõ giữa giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số, hai giá trị này không phải lúc nào cũng trùng nhau.

Gv Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ ***trên miền*** $\mathbf{D}=[a;b]$.

a. Phương pháp:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$ và cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất như sau:

- ***Bước 1:*** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$ và tìm các điểm $x_i\in[a;b]$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác đinh.
- ***Bước 2:*** Tính các giá trị $f(x_i), f(a), f(b)$.
- ***Bước 3:*** So sánh $\begin{cases}\max\limits_{\mathbf{D}} f(x)=\max\{f(x_i), f(a), f(b)\}\\ \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)=\min\{f(x_i), f(a), f(b)\}\end{cases}$.

Chú ý:

- Để tính nhanh $f(x_i), f(a), f(b)$ ta nhập $f(x)\xrightarrow[x=x_i;x=a;x=b]{Calc}$ và so sánh các kết quả cho nhanh và chính xác
- Để sử dụng máy tính ngay từ đầu ta làm như sau: Sử dụng chức năng mod7

  Nhập $f(X)$; $Start=a$; $End=b$; $Step=\dfrac{b-a}{19}$; sau đó xuất hiện bảng, nhìn vào bảng đó ta sẽ tìm được max – min của hàm số.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. ***(THPT Lý Tự Trọng – Khánh Hòa – 2017)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$ lần lượt là?

A. 20 và -2. **B.** 40 và 31. **C.** 10 và -11. **D.** 40 và -41.

Giải.

Cách 1. Tự luận

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$ ta có $y'=3x^2-6x-9$

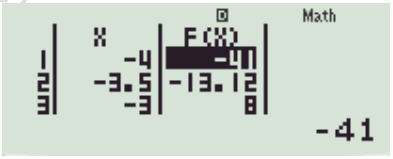
$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-4;4]\\ x=3\in[-4;4]\end{array}\right.$ khi đó $\begin{cases}y(-4)=-41; y(4)=15\\ y(-1)=40; y(3)=8\end{cases}$

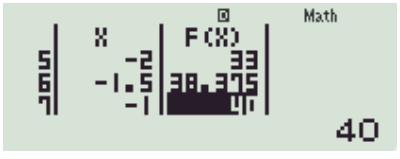
$\Rightarrow \max\limits_{[-4;4]} y=y(-1)=40$ và $\min\limits_{[-4;4]} y=y(-4)=-41$.

Chọn đáp án D.

Cách 2. Sử dụng máy tính với chức năng mod7

$f(x)=X^3-3X^2-9X+35; Start=-4; End=4; Step=0,5$ ta có bảng





Từ bảng ta thấy $\max\limits_{[-4;4]} y=40; \min\limits_{[-4;4]} y=-41$. Chọn đáp án D

Chú ý: Vì giá trị max – min ở các đáp án là số đẹp nên ta lấy bước nhảy là 0,5 thay vì lấy $\dfrac{4-(-4)}{19}\approx 0,42$.

Ví dụ 2. ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh – lần 1 – 2017)*** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ trên đoạn $[-3;-1]$?

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $\max\limits_{[-3;-1]} y=-\dfrac{13}{3}$ **B.** $\max\limits_{[-3;-1]} y=\dfrac{13}{3}$ **C.** $\max\limits_{[-3;-1]} y=-\dfrac{13}{6}$ **D.** $\max\limits_{[-3;-1]} y=-4$

Giải.

Cách 1. Tự luận

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có $y'=\dfrac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\notin[-3;-1]\\x=-2\in[-3;-1]\end{array}\right.\Rightarrow y(-3)=-\dfrac{13}{3};y(-1)=-5;y(-2)=-4$

$\Rightarrow\max\limits_{[-3;-1]} y=y(-2)=-4$. Chọn đáp án D.

Cách 2. Sử dụng máy tính với chức năng mod7

$f(x)=\dfrac{X^2+4}{X};Start=-3;End=-1;Step=0,2$ ta có bảng



Từ bảng ta thấy $\max\limits_{[-3;-1]} y=-4$. Chọn đáp án D

Chú ý:

- Vì giá trị max – min ở đáp án D là số đẹp nên ta lấy $\dfrac{-1-(-3)}{19}\approx 0,1053$ sau đó lấy bước nhảy là 0,2 ta thấy đáp án gần nhất là -4 nên chọn đáp án D.
- Các ví dụ tiếp theo độc giả tự dùng máy tính để tìm max – min.

Ví dụ 4. ***(THPT Chu Văn An – Hà Nội – Lần 2)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$?

A. 0. **B.** $-\dfrac{3}{7}$. **C.** -4. **D.** -1.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ ta có $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=-2\notin[0;3]\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y(0)=0;y(3)=-\dfrac{3}{7}\\y(1)=-1\end{array}\right.\Rightarrow\min\limits_{[0;3]} y=y(1)=-1$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 6. ***(THPT Bình Xuyên – Vĩnh Phúc – Lần 3)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\ \ \forall x\in[2;3]$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $[2;3] \Rightarrow \min\limits_{[2;3]} y = y(2) = 3$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 7. ***(THPT Hưng Nhân – Thái Bình – Lần 2)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ lần lượt là?

A. 2 và 0. **B.** 4 và 0. **C.** 3 và 0. **D.** 0 và -2.

Giải.

Xét hàm số $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ ta có $\mathbf{D} = [1;5]$ và $y' = \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = 0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [1;5]$

$\Rightarrow y(1) = 0; y(3) = 2; y(5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;5]} y = y(3) = 2 \\ \min\limits_{[1;5]} y = y(1) = y(5) = 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 10. ***(THPT Quỳnh Lưu – Nghệ An – Học kỳ II)*** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^x(x-1) - x^2$ trên đoạn $[0;2]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M + m = e^2 - 6$ **B.** $M + m = e^2 - \ln^2 2 + \ln 4$

C. $M + m = e^2 - \ln^2 2 + \ln 4 - 8$ **D.** $M + m = e^2 - \ln^2 2 + \ln 4 - 6$

Giải.

Xét hàm số $f(x) = e^x(x-1) - x^2$ trên đoạn $[0;2]$ ta có $y' = x.e^x - 2x$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x.e^x - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;2] \\ x = \ln 2 \in [0;2] \end{array}\right.$

Khi đó $\begin{cases} f(0) = -1; f(2) = e^2 - 4 \\ f(\ln 2) = \ln 4 - 2 - \ln^2 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(\ln 2) = \ln 4 - 2 - \ln^2 2 \\ m = \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = e^2 - 4 \end{cases}$

$\Rightarrow M + m = e^2 - \ln^2 2 + \ln 4 - 6$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 11. ***(Trường THPT Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Cho hàm số $y = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

A. $M = \dfrac{7}{8} + \ln 2$. **B.** $M = \dfrac{7}{8} - \ln 2$. **C.** $M = \ln 2 - 1$. **D.** $M = \dfrac{1}{2}$.

Giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Ta có $y' = \dfrac{1}{x} - x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases} y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{8} - \ln 2 \\ y(1) = \dfrac{1}{2};\ y(2) = \ln 2 - 1 \end{cases} \Rightarrow M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y = y(1) = \dfrac{1}{2}$. Chọn đáp án D

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 12. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 2 năm 2017)*** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $M+m=\dfrac{4}{3}$. **B.** $M+m=\dfrac{7}{2}$. **C.** $M+m=\dfrac{13}{6}$. **D.** $M+m=\dfrac{8}{3}$.

Giải.

Ta có $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\notin\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]\end{array}\right.$

Tính giá trị $\begin{cases}y(-1)=-\dfrac{2}{3}; y(3)=6\\ y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{2}{3}\\ M=6\end{cases}\rightarrow M+m=\dfrac{16}{3}$

Chọn đáp án C.

Ví dụ 13. $[NTL]$ Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên đoạn $[-10;10]$ bằng ?

A. 172 **B.** 0 **C.** 72 **D.** $\dfrac{1}{4}$

Giải.

- Ta có $y=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2 & khi\ \ x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)\\ -x^2+3x-2 & khi\ \ x\in(1;2)\end{cases}$.

Tìm $y'=\begin{cases}2x-3 & khi\ \ x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\\ -2x+3 & khi\ \ x\in(1;2)\end{cases}$. Hàm số không có đạo hàm tại $x=1$ và $x=2$

Trên khoảng $(1;2): y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Trên khoảng $(-\infty;1)$: $y'<0$. Trên khoảng $(2;+\infty)$: $y'>0$

- Bảng biến thiên:

x	-10		1		$\dfrac{3}{2}$		2		10
y'	||	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	||
y	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	||
		132							72

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[-10;10]} y=172; \min\limits_{[-10;10]} y=0$. Vậy tổng là 172.

Chọn đáp án A.

Dạng 2: Miền **D** ***là một khoảng, nửa khoảng ….***

Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a;b)$ và nửa khoảng $(a;+\infty);(-\infty;b)$ thì ta lập bảng biến thiên và từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 14. (Đề tham khảo lần 3) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$.

Giải.

Cách 1. Hàm số xác định trên $(0;+\infty)$.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

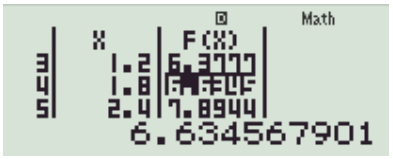
Đạo hàm $y'=3-\frac{8}{x^3}=\frac{3x^3-8}{x^3};y'=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$		$+\infty$
y'	‖		$-$		0	$+$	
y	‖	$+\infty$	↘		$3\sqrt[3]{9}$	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$. Chọn đáp án A

Cách 2. Bấm mod7 nhập $f(X)=3X+\frac{4}{X^2};Start=0;End=10;Step=\frac{10}{19}$ ta có bảng



Dựa vào bảng và so sánh với các đáp án lấy gần nhất ta được đáp án A

Chú ý: Bài này người ta ra để bẫy các e ở đáp án B, vì khi lấy khoảng cách từ 0 đến 10 lớn mà ta chọn bước nhảy bằng 1 thì dẫn tới $\min y=7$ dẫn đến đáp án sai, do đó khi làm bài phải cẩn thận để không bị bẫy.

Ví dụ 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là?

A. $1+2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $1+\sqrt{2}$. **D.** $1-2\sqrt{2}$.

Giải.

Cách 1. Xét hàm số $y=x+\frac{2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$1+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(1;+\infty)} y=y\left(1+\sqrt{2}\right)=1+2\sqrt{2}$. Chọn đáp án A.

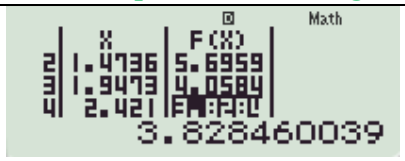
Cách 2. Áp dụng BĐT cauchy ta có

$y=x+\frac{2}{x-1}=x-1+\frac{2}{x-1}+1\overset{cauchy}{\geq}2\sqrt{(x-1).\frac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1$. Chọn đáp án A.

Từ đây ta có kết quả: Cho hàm số $y=x+\frac{k}{x-a}$ với $x>a$

Ta có $y=x+\frac{k}{x-a}=x-a+\frac{k}{x-a}+a\geq 2\sqrt{(x-a).\frac{k}{x-a}}+a=2\sqrt{k}+a$ hay $\boxed{y_{\min}=2\sqrt{k}+a}$

Cách 3. Bấm mod7 nhập $f(X)=X+\frac{2}{X-2};Start=1;End=10;Step=\frac{10-1}{19}$ ta có bảng



Dựa vào bảng và so sánh với các đáp án lấy gần nhất ta được đáp án A

Ví dụ 16. ***(Trường THPT Hạ Long lần 1 năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$

A. $\min\limits_{[-4;-2)} y=5$ **B.** $\min\limits_{[-4;-2)} y=6$ **C.** $\min\limits_{[-4;-2)} y=4$ **D.** $\min\limits_{[-4;-2)} y=7$

Giải.

Hàm số xác định trên $[-4;-2)$

Đạo hàm $y'=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow (x+2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[-4;-2) \\ x=-3\in[-4;-2) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
y'			‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y			‖ $\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	‖ $+\infty$				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-4;-2)} y=7$. Chọn đáp án D

Chú ý: Ta cũng có thể sử dụng chức năng mod7 như các ví dụ trên.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

a. Phương pháp:

- Chuyên đề tìm max – min của hàm lượng giác là một chuyên đề lớn, trong phần này tác giả chỉ giới hạn tìm max – min của hàm lượng giác bằng phương pháp đạo hàm
- Để tìm max – min của hàm lượng giác đầu tiên ta phải chuyển về cùng một hàm lượng giác bằng cách các công thức lượng giác và đặt ẩn phụ sau đó trở về hàm đa thức hoặc phân thức và khảo sát như dạng 1 hoặc dạng 2.

Chú ý:

- Nếu là phương trình bậc hai, ba… theo $\sin x$ hoặc $\cos x$ ta đặt $t=\sin x; t=\cos x$ với $t\in[-1;1]$
- Nếu là phương trình bậc hai, ba… theo $\sin^2 x$ hoặc $\cos^2 x$ ta đặt $t=\sin^2 x; t=\cos^2 x$ với $t\in[0;1]$
- Nếu là phương trình theo $\sin x$ hoặc $\cos x$ ta đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$

b. Ví dụ minh hoạ :

Ví dụ 17. ***(THPT Vĩnh Lộc – Thanh Hóa – Lần 2)*** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$?

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 7.

Giải.

Cách 1. Hàm số xác định và liên tục trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Đạo hàm $y'=3\cos x-4.3.\cos x.\sin^2 x=3\cos x\left(1-4\sin^2 x\right)=3\cos x\left(2\cos 2x-1\right)$

Cty Lương Văn Huy - NTBH Thanh Trì - 0969141404

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$. Vì $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2};x=0\\ x=\dfrac{\pi}{6};x=-\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$

Tính $y(0)=0;y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1;y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1;y\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$. Từ đó $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=1$. Chọn đáp án B

Cách 2. Đặt $\sin x=t$ với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$ khi đó hàm số thành $g(t)=3t-4t^3$

Xét hàm số $g(t)=3t-4t^3$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $g'(t)=3-12t^2$

$g'(t)=0\Leftrightarrow 3-12t^2=0\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{1}{2}\in[-1;1]$ khi đó $\left\{\begin{array}{l}g(-1)=1;g(1)=-1\\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1;g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\end{array}\right.$

$\Rightarrow\max\limits_{[-1;1]}g(t)=g(-1)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\Rightarrow\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=1$ dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}\sin x=t=-1\\ \sin x=t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ do $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 18. ***(Sở GD và ĐT Hà Tĩnh)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right]$?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Giải.

Xét hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right]$ ta có $y'=\cos x\Rightarrow y'=\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Do $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2};y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1;y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]}y=y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 19. ***(THPT Bình Xuyên – Vĩnh Phúc – Lần 3)*** Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+2\cos x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$. Khi đó giá trị $M+m$ bằng?

A. $2+\dfrac{17\pi^2}{4}$. **B.** $4+4\pi^2$. **C.** $2+\dfrac{\pi^2}{4}$. **D.** 2.

Giải.

Xét hàm số $f(x)=x^2+2\cos x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ ta có $f'(x)=2x-2\sin x$

Và $f''(x)=2-2\cos x\geq 0$ với mọi $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]\Rightarrow$ hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]\Rightarrow f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ mà $f'(0)=0$

$\Rightarrow x=0$ là nghiệm duy nhất của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}; y(0)=2; y(2\pi)=4\pi^2+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]} y=y(2\pi)=4\pi^2+2 \\ m=\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]} y=y(0)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=4\pi^2+4.$$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 20. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng

A. 1 **B.** $\frac{2}{11}$ **C.** 2 **D.** 4

Giải.

Cách 1. Tập xác định: $D=(-\infty;+\infty)$ vì $2\cos x-\sin x+4>0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$

Đặt $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ta thu được

$$f(t)=\frac{t^2+2t+2}{t^2-t+3}, \forall t\in(-\infty;+\infty) \Rightarrow f(t)'=\frac{-3t^2+2t+8}{\left(t^2-t+3\right)^2}, \forall t\in(-\infty;+\infty)$$

$$\Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2+2t+8=0 \Rightarrow t=-\frac{4}{3}; t=2$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$\frac{2}{11}$	↗	2	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\begin{cases} \max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(t)=2 \text{ khi } t=2 \\ \min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(t)=\frac{2}{11} \text{ khi } t=-\frac{4}{3} \end{cases}$. Chọn đáp án C

Cách 2. Tập xác định: $D=(-\infty;+\infty)$ vì $2\cos x-\sin x+4>0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$

Ta có: $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4} \Leftrightarrow 2y\cos x-y\sin x+4y=\cos x+2\sin x+3$

$\Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=3-4y \Leftrightarrow (y+2)\sin x+(1-2y)\cos x=4-3y$

Để phương trình có nghiệm thì: $(y+2)^2+(1-2y)^2\geq(4y-3)^2$

$\Leftrightarrow 11y^2-24y+4\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11}\leq y\leq 2 \Rightarrow y_{\max}=2$. Chọn đáp án C

Ví dụ 21. ***(Trường THPT Chuyên Hà Giang năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$

A. $\min y=\frac{11}{2}$ **B.** $\min y=-3$ **C.** $\min y=3$ **D.** $\min y=\frac{11}{4}$

Giải.

Cách 1. Ta có $y=\sin^4 x+1-\sin^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Đặt $t=\sin^2 x, t\in[0;1]$ ta thu được $f(t)=t^2-t+3, t\in[0;1]$

$f'(t)=2t-1; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Tính $f(0)=3; f(1)=3; f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{4}$. Vậy $\min\limits_{[0;1]} f(t)=\dfrac{11}{4}$. Chọn đáp án D

Cách 2. Ta có $y=\sin^4 x+1-\sin^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3=-\sin^2 x(1-\sin^2 x)+3$

$=-\sin^2 x\cos^2 x+3=-\dfrac{\sin^2 2x}{4}+3\ge-\dfrac{1}{4}+3=\dfrac{11}{4}$

$\Rightarrow \min y=\dfrac{11}{4}$ khi $\sin^2 2x=1\Leftrightarrow\cos^2 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

Chọn đáp án D.

Dạng 4: Biện luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất theo tham số.

a. Phương pháp:

- Dựa và tính đơn điệu của hàm số và bảng biến thiên của hàm số để biện luận.
- Nếu dùng máy tính ta có thể làm theo hai cách như sau:

Cách 1. Cho tham số $m=100$, sử dụng chức năng mod7 biểu diễn số Min – Max qua 100 và cho bằng Min – Max theo giả thiết từ đó tìm được tham số *m*.

Chú ý: Cách 1 chỉ dùng khi giá trị Min – Max là số đẹp và việc biểu diễn theo tham số đơn giản.

Cách 2. Thay lần lượt các giá trị của *m* ở 4 đáp án và sử dụng chức năng mod7 để tìm Min – Max, giá trị nào của *m* mà làm cho hàm số đạt Min – Max như trong giả thiết thì đó là đáp án đúng.

Chú ý: Cách 2 chỉ dùng khi 4 đáp án cho cụ thể *m* hoặc *m* nằm trong khoảng nào đó, còn nếu hỏi m nguyên hay có bao nhiêu giá trị *m*… thì nên dùng cách 1.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 22. ***(PTDTNT Phước Sơn – Quảng Nam)*** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0?

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Giải.

Xét hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y'=-3x^2-6x$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên của hàm số

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-2$	↗	$y(0)$	↘	$m-4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;1]} y=y(1)=m-4$

Theo giả thiết $\min\limits_{[-1;1]} y=0\Rightarrow m-4=0\Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án C.

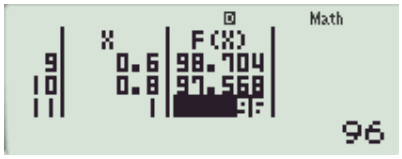
Nhận xét: Ta có thể dùng máy tính như sau

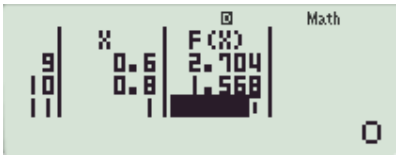
Cách 1: Cho $m=100$, sử dụng mod 7 với $f(X)=-X^2-3X^2+100; Start=-1; End=1; Step=0,2$ ta có bảng 1. Từ bảng 1 ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(X)=96=100-4=m-4$. Theo giả thiết $m-4=0\Leftrightarrow m=4$

Cách 2. Thử 4 đáp án

Gv. Lương Văn Huy - TDH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi $m=4$, sử dụng mod 7 với $f(X)=-X^2-3X^2+4; Start=-1; End=1; Step=0,2$ ta có bảng 2. Từ bảng 2 ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(X)=0$ (thoả mãn)





Chọn đáp án C.

Ví dụ 23. ***(THPT Anh Sơn 2 – Nghệ An – Lần 2)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2?

A. $m\in\{-1;2\}$. **B.** $m\in\{-2;1\}$. **C.** $m\in\{-2;-1\}$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ ta có $y'=\dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\in[0;1]$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=y(0)=-m^2+m$

Theo giả thiết $\min\limits_{[0;1]} y=-2\Rightarrow -m^2+m=-2\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$.

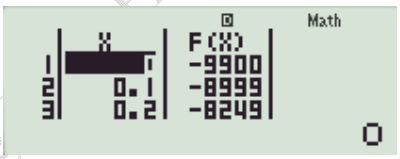
Chọn đáp án A.

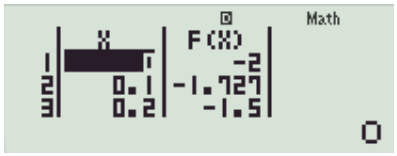
Nhận xét: Ta có thể sử dụng máy tính như sau:

Cách 1: Cho $m=100$, sử dụng mod 7 với $f(X)=\dfrac{X-100^2+100}{X+1}; Start=0; End=1; Step=0,1$ ta có bảng 1. Từ bảng 1 ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(X)=-9900=-100^2+100=-m^2+m$. Theo giả thiết $-m^2+m=-2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$

Cách 2. Thử 4 đáp án

- Khi $\left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$, sử dụng mod 7 với $f(X)=\dfrac{X-2}{X+1}; Start=-1; End=1; Step=0,2$ ta có bảng 2. Từ bảng 2 ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(X)=0$ (thoả mãn)





Ví dụ 24. ***(THPT Hà Trung – Thanh Hóa)*** Tìm tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3mx^2+6$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2?

A. $m=2$. **B.** $m=\dfrac{31}{27}$. **C.** $m>\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=1$.

Giải.

Xét hàm số $y=x^3-3mx^2+6$ trên đoạn $[0;3]$, hàm số liên tục trên $[0;2]$

Và có đạo hàm $y'=3x^2-6mx\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2m\end{array}\right.$

Trường hợp 1. Nếu $2m<0\Leftrightarrow m<0$ hay $2m$ nằm ngoài đoạn $[0;2]$

Xét $y'=3x^2-6mx$ ta có $y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;2m)\cup(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $[0;2]\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} y=y(0)=6\neq 2$ không thỏa mãn.

Gv: Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Trường hợp 2. Nếu $2m>3\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$ hay $2m$ nằm ngoài đoạn $[0;2]$

Xét $y'=3x^2-6mx$ ta có $y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2m;+\infty)$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;2]\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} y=y(2)=14-12m$

Theo giả thiết $\min\limits_{[0;2]} y=2\Rightarrow 14-12m=2\Leftrightarrow m=1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 3. Nếu $0<2m<3\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{3}{2}$ hay $2m\in[0;3]$

Xét $y'=3x^2-6mx$ ta có $y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2m;+\infty)$

Khi đó hàm số đồng biến trên $(2m;3)$ và nghịch biến trên $(0;2m)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;3]$ như sau:

x	0		$2m$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$y(0)$	↘	$y(2m)$	↗	$y(3)$

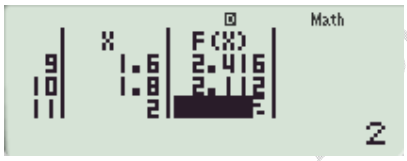
Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;2]} y=y(2m)=6-4m^3$, theo giả thiết $\min\limits_{[0;2]} y=2$

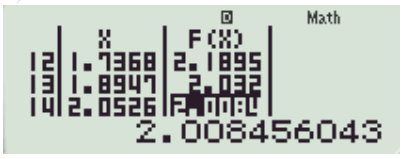
$\Rightarrow 6-4m^3=2\Leftrightarrow m^3=1\Leftrightarrow m=1$ thỏa mãn điều kiện

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án D.

Nhận xét: Ta có thể thử 4 đáp án bằng máy tính như sau

Với $m=1$, sử dụng mod7 với $f(X)=X^3-3X^2+6; Start=0; End=3; Step=0,2$ ta được bảng





Để chắc chắn hơn về kết quả thì lấy bước nhảy $Step=\dfrac{3-0}{19}$, ta thấy kết quả $f(x)_{\min}\approx 2$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 25. ***(THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang – Lần 3)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$?

A. $m=2$. **B.** $m>0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m<0$.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ trên đoạn $[-2;2]$ ta có $y'=\dfrac{m(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{m(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;2]\\ x=1\in[-2;2]\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(-2)=-\dfrac{2m}{5}; y(-1)=-\dfrac{m}{2}; y(1)=\dfrac{m}{2}; y(2)=\dfrac{2m}{5}$

Trường hợp 1. Nếu $m<0\Rightarrow \dfrac{m}{2}<\dfrac{2m}{5}<-\dfrac{2m}{5}<-\dfrac{m}{2}\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=y(-1)\Rightarrow$ loại

Trường hợp 2. Nếu $m>0\Rightarrow -\dfrac{m}{2}<-\dfrac{2m}{5}<\dfrac{2m}{5}<\dfrac{m}{2}\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=y(1)\Rightarrow$ thỏa mãn

Trường hợp 3. Nếu $m=0$ hàm số trở thành $y=0$ không thỏa mãn

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án B.

Nhận xét: Ta có thể thử 4 đáp án bằng máy tính như sau

Ở đáp án chia làm hai loại: $\begin{cases} m>0 \\ m=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} m<0 \\ m=-2 \end{cases}$. Thử từng đáp án ta thấy

- Với $m=2$, sử dụng mod với $f(X)=\dfrac{2X}{X^2+1}; Start=-2; End=1; Step=0,3$. Từ bảng 1 ta dự đoán được tại $x=1$ thì $f(x)_{\max}$

- Với $m=1$, sử dụng mod với $f(X)=\dfrac{X}{X^2+1}; Start=-2; End=1; Step=0,3$. Từ bảng 2 ta dự đoán được tại $x=1$ thì $f(x)_{\max}$



Bảng 1



Bảng 2

Vậy chọn đáp án là $m>0$

Ví dụ 26. ***(THPT Kim Sơn A – Ninh Bình)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^2+mx-1$ bằng 3?

A. $m\in\{-6;6\}$. **B.** $m\in\{-6;4\}$. **C.** $m\in\{-4;6\}$. **D.** $m\in\{-4;4\}$.

Giải.

Xét hàm số $y=-x^2+mx-1$ đây là hàm bậc hai có hệ số $a=-1<0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m}{2}\Rightarrow \max y=y\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}-1$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{4}-1=3\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow m=\pm 4$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 27. ***(THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Hà Tĩnh – Lần 1)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng -2?

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** Không có m.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-m}$ có tập xác định $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ thì hàm số phải liên tục trên đoạn đó $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

Khi đó hàm số có đạo hàm $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2}=-\dfrac{m^2+1}{(x-m)^2}<0$ với mọi $x\in[1;2]$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[1;2]\Rightarrow \max\limits_{[1;2]} y=y(1)=\dfrac{m+1}{1-m}$ theo giả thiết $\max\limits_{[1;2]} y=-2$

$\Rightarrow \dfrac{m+1}{1-m}=-2\Leftrightarrow m+1=2m-2\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 28. ***(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – Lần 1)*** Hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 2 khi:

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=1$.

Giải.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Xét hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ có tập xác định $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[0;1]$ thì hàm số phải liên tục trên đoạn đó $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m>1\\-m<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>0\end{array}\right.$. Khi đó hàm số có $y'=\dfrac{m^2+1}{(x+m)^2}>0$ với mọi $x\in[0;1]$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0;1]\Rightarrow\max\limits_{[0;1]}y=y(1)=\dfrac{m-1}{m+1}$, theo giả thiết $\max\limits_{[0;1]}y=2$

$\Rightarrow\dfrac{m-1}{m+1}=2\Leftrightarrow m-1=2m+2\Leftrightarrow m=-3$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 29. ***(THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang – Học kỳ II)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{mx+5}{x-m}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7?

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{5}{7}$.

Giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+5}{x-m}$ có tập xác định $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ thì hàm số phải liên tục trên đoạn đó $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.$

Khi đó hàm số có $y'=\dfrac{-m^2-5}{(x-m)^2}=-\dfrac{m^2+5}{(x-m)^2}<0$ với mọi $x\in[0;1]$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]\Rightarrow\min\limits_{[0;1]}y=y(1)=\dfrac{m+5}{1-m}$

Theo giả thiết có $\min\limits_{[0;1]}y=-7\Rightarrow\dfrac{m+5}{1-m}=-7\Leftrightarrow m+5=-7+7m\Leftrightarrow m=2$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 30. ***(THPT Quốc Oai – Hà Nội – Học kỳ II)*** Cho hàm số $y=\sqrt{3x-x^3}+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ bằng $3\sqrt{2}$?

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{2}$. **C.** $m=-\sqrt{2}$. **D.** $m=3\sqrt{2}$.

Giải.

Xét hàm số $y=\sqrt{3x-x^3}+m$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ có $y'=\dfrac{3-3x^2}{2\sqrt{3x-x^3}}$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\dfrac{3-3x^2}{2\sqrt{3x-x^3}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin\left[0;\sqrt{3}\right]\\x=1\in\left[0;\sqrt{3}\right]\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	0		1		$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	m	↗	$y(1)$	↘	m

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;\sqrt{3}]}y=y(1)=m+\sqrt{2}$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN: 0969141404

Theo giả thiết ta có $\max\limits_{[-1;1]} y = 3\sqrt{2} \Rightarrow m + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 31. ***(THPT Vĩnh Lộc – Thanh Hóa – Lần 2)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là lớn nhất?

A. $m = 2$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = -2$.

Giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 2}$ trên đoạn $[1;2]$ có $y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \in [1;2]$

$\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[1;2] \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y = y(1) = \dfrac{1 - m^2 + m}{3}$

Ta có $1 + m - m^2 = \dfrac{5}{4} - \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{1 + m - m^2}{3} \le \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;2]$ là $\dfrac{5}{12}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \dfrac{1}{2}$. Chọn đáp án C.

Ví dụ 32. ***(Trường THPT Chuyên ĐHV lần 4 năm 2017)*** Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. $(-6;-3) \cup (0;2)$. **B.** $(-4;3)$. **C.** $(-5;-2) \cup (0;3)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Giải.

Cách 1. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lại có $f(-1) = 3 + m;\ f(1) = m - 1;\ f(2) = m \Rightarrow f(x) \in [m-1; m+3]$.

Điều kiện để hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ đạt GTLN trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5 là

$$\begin{bmatrix} m - 1 = -5 \\ m + 3 = 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -4 \\ m = 2 \end{bmatrix}.$$

- Với $m = -4 \Rightarrow f(x) \in [-5;-1] \Rightarrow |f(x)| \in [1;5]$.
- Với $m = 2 \Rightarrow f(x) \in [1;5] \Rightarrow |f(x)| \in [1;5]$.

Vậy $m = -4; m = 2$ là các giá trị cần tìm thuộc $(-5;-2) \cup (0;3)$. Chọn đáp án C

Cách 2. Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, $x \in [-1;2] \Rightarrow t \in [0;4]$. Ta có: $y = f(t) = |t + m - 1|$.

$$\max_{[-1;2]} y = \max_{[0;4]} f(t) = \max_{[0;4]} \{f(0); f(4)\} = \max_{[0;4]} \{|m-1|, |m+3|\}$$

TH1: Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m-1|$ ta được $\begin{cases} |m-1| \ge |m+3| \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$

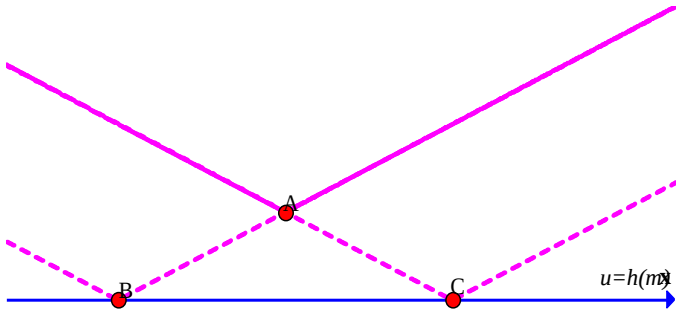
TH2: Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m+3|$ ta được $\begin{cases} |m+3| \ge |m-1| \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Vậy các giá trị của m tìm được thỏa mãn tập hợp $(-5;-2) \cup (0;3)$. Chọn đáp án C

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nhận xét : ***Tìm công thức cho bài toán tổng quát:*** *Cho hàm số* $y=\left|f(x)+h(m)\right|$ *với* $x\in[a;b]$*; hãy tìm GTLN của hàm số theo* m.

Giả sử khi $x\in[a;b]$ thì $f(x)\in[\alpha;\beta]$, và $y=\left|f(x)+h(m)\right|$ liên tục trên $[\alpha;\beta]$ nên ta có $\max\limits_{x\in[a;b]} y=max\left\{\left|\alpha+h(m)\right|;\left|\beta+h(m)\right|\right\}$. Đặt $u=h(m)$, đồ thị của hàm $g(u)=max\left\{\left|\alpha+u\right|;\left|\beta+u\right|\right\}$ được mô phỏng như hình vẽ:



Trong đó đồ thị của $g(u)$ được mô phỏng là đường liền nét; $B(-\beta;0);C(-\alpha;0);A\left(-\frac{\alpha+\beta}{2};\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$, dễ thấy hàm số $g(u)$ đạt gtnn bằng $\frac{\beta-\alpha}{2}$ tại $u=-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Cũng từ mô phỏng trên ta suy ra $g(u)=\begin{cases}\left|u+\alpha\right|;u\le-\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \left|u+\beta\right|;u\ge-\frac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}$

Ví dụ 33: [CHUYÊN HẠ LONG – QN] Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x$, ta xét hàm $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x$ với $x\in[0;2]$.

Có $g'(x)=x^3-19x+30=(x-2)(x+5)(x-3)\ge0;\forall x\in[0;2]$ do đó $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0;2]$; suy ra $t\in[0;26]$.

Đặt $f(t)=\left|t+m-20\right|$, khi $t\in[0;26]$ thì $f(t)$ liên tục trên $[0;26]$ nên

$$\max_{t\in[0;26]} f(t)=max\left\{\left|m-20\right|;\left|m+6\right|\right\}.$$

Nếu $m\ge7$ thì $\max\limits_{t\in[0;26]} f(t)=max\left\{\left|m-20\right|;\left|m+6\right|\right\}=\left|m+6\right|$, do đó ta có $\left|m+6\right|\le20\Leftrightarrow-26\le m\le14$ nên $m\in\{7;8;...;14\}$.

Nếu $m<7$ thì $\max\limits_{t\in[0;26]} f(t)=max\left\{\left|m-20\right|;\left|m+6\right|\right\}=\left|m-20\right|$, do đó ta có $\left|m-20\right|\le20\Leftrightarrow0\le m\le40$ nên $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên thỏa mãn là $1+2+\ldots+14=\frac{14.15}{2}=105$.

Gv. Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 34: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng 5.

A. $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Khi $x\in\left[-1;2\right]$ thì $x^2-2x\in\left[-1;3\right]$, suy ra $\alpha=-1;\beta=3;u=m$ nên ta có:

Nếu $m\le -1$ thì $\max y=\left|m-1\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-4\end{array}\right.$ nên $m=-4$ thỏa mãn.

Nếu $m\ge -1$ thì $\max y=\left|m+3\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-8\end{array}\right.$ nên $m=2$ thỏa mãn.

Ví dụ 35: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của m là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Khi $x\in\left[-2;1\right]$ thì $x^2+2x-4\in\left[-5;-1\right]$, suy ra $\alpha=-5;\beta=-1;u=m$ nên ta có gtnn của gtln của hàm số đã cho đạt được tại $m=-\dfrac{-5+(-1)}{2}=3$.

Ví dụ 36: [THPT ĐẶNG THỪA HÚC] Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$ trong đó a,b là các tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a<0,b<0$. **B.** $a>0,b>0$. **C.** $a<0,b>0$. **D.** $a>0,b<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=x^2$ với $t\in\left[0;1\right]$.

$f\left(t\right)=\left|8t^2+at+b\right|,t\in\left[0;1\right]$

Ta có:

$f\left(0\right)=\left|b\right|$

$f\left(1\right)=\left|8+a+b\right|$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|2+\dfrac{1}{2}a+b\right|$

$2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|-4-a-2b\right|$

Do $\max\limits_{[0;1]}f\left(t\right)=1$ nên

$1\ge\left|b\right|$

$1\ge\left|8+a+b\right|$

$2\ge\left|-4-a-2b\right|$

$4\ge\left|b\right|+\left|b+a+8\right|+\left|-2b-a-4\right|\ge 4$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} b=1 \\ 8+a+b=1 \\ -4-a-2b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-1 \\ 8+a+b=-1 \\ -4-a-2b=-2 \end{cases}$ (Loại)

Vậy $\begin{cases} b=1 \\ a=-8 \end{cases}$

Vậy $a<0, b>0$.

Ví dụ 37 : [THPT THANH CHƯƠNG 3] Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của m là:

A . 5 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 3 .

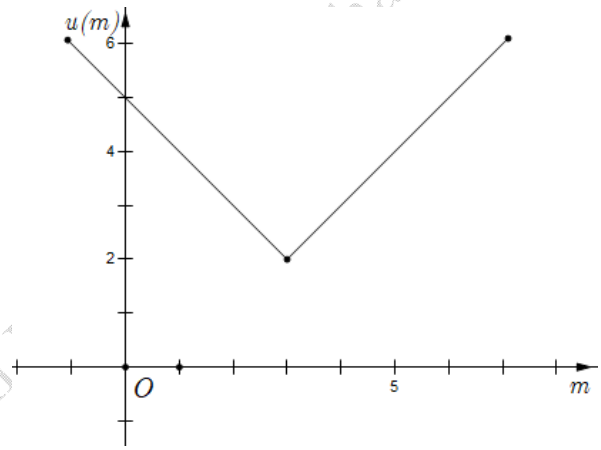
Lời giải

Chọn D.

Đặt $t=x^2+2x-4$, $x\in[-2;1]$ thì $t\in[-5;-1]$.

Khi đó $y=\left|x^2+2x+m-4\right|=\left|t+m\right|$. Hàm số $g(t)=t+m$ là hàm số đồng biến trên $[-5;-1]$ nên ta có : $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{t\in[-5;-1]} y=\max\left\{\left|m-5\right|;\left|m-1\right|\right\}=\begin{cases} m-1; m\geq 3 \\ 5-m; m<3 \end{cases}$

Hàm số : $u(m)=\begin{cases} m-1; m\geq 3 \\ 5-m; m<3 \end{cases}$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là đường gấp khúc như hình vẽ:



Từ đồ thị ta thấy $u(m)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $m=3$.

Ví dụ 38: Cho $y=\left|\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(m^2-2)x^3-m^2x^2+m\right|$ có bao nhiêu giá trị m nguyên để GTLN của hàm số trên [0; 2] luôn bé hơn hoặc bằng 5.

A. 11. **B.** 4 . **C.** 0 . **D.**Vô số

Lời giải

Chọn B.

Xét $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(m^2-2)x^3-m^2x^2+m$

$g'(x)=x(x-2)(x+m^2)\leq 0 \quad \forall x\in[0;2]$

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên (0; 2),

để $\max_y \le 5 \Rightarrow \begin{cases} -5 \le g(0) \le 5 \\ -5 \le g(2) \le 5 \end{cases} \Rightarrow m = -1, 0, 1, 2 \Rightarrow$ có 4 giá trị m

Dạng 5: Max min hàm trị tuyệt đối

CHINH PHỤC 8,9,10 ĐIỂM THI ĐẠI HỌC – GV: LƯƠNG VĂN HUY
MAX – MIN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI – BẢN BỔ SUNG
Đầy đủ dạng – full 7 cách mỗi bài cho các em lựa chọn.
LỚP TOÁN THẦY HUY – NGỌC HỒI – THANH TRÌ – HN – 0969141404
Tham gia Group 8+ Free:https://www.facebook.com/groups/1632593617065392/

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m| = a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k)$.

Kiểm tra $\max\{|m+K|,|m+k|\} \ge \dfrac{|m+K|+|m+k|}{2} \ge \dfrac{|m+K-m-k|}{2} = \dfrac{|K-k|}{2}$.

TH1: $\dfrac{|K-k|}{2} \le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+k=-a \\ m+K=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-a-k \\ m=a-K \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}$.

TH2: $\dfrac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \ge |m+k| \end{cases}$

TH2: $Max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \ge |m+K| \end{cases}$

Cách 3: Sử dụng đồ thị (khuyến khích nên làm – có 3 kĩ thuật đồ thị)

Cách 4: Xem ở hướng dẫn ^_^

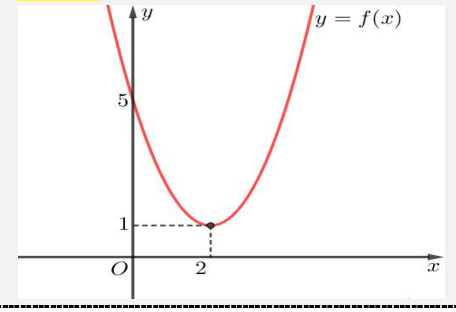
Cách 5: Sử dụng bđt trị tuyệt đối

Cách 6+7: Sử dụng đồ thị tối giản loại 2,3

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x)+m|$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 9.

A. -10. **B.** -6. **C.** 4. **D.** 8.



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ là trục đối xứng, mà $f(0)=5\Rightarrow f(4)=5$. Suy ra: $1\le f(x)\le 5, \forall x\in[0;4]$.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+m|$, $\forall x\in[0;4]$.

Ta có: $\max\limits_{[0;4]} g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$.

Cách 1:

Dễ dàng nhận ra đây là trường hợp 1

Do vậy $m\in\{-1-9;9-5\}\Leftrightarrow m\in\{-10;4\}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $-10+4=-6$

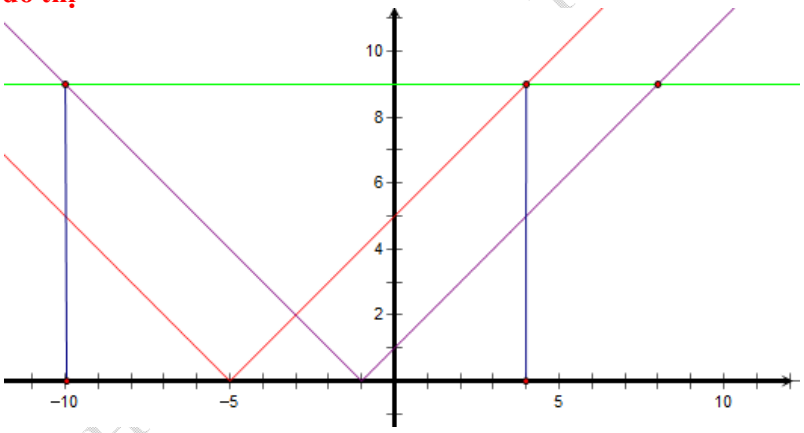
Cách 2:

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m+1|\ge|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ |m+1|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ \left[\begin{array}{l}m=8\\ m=-10\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-10$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+1|<|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ |m+5|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-14\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=4$.

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là: $-10+4=-6$.

Cách 3: Dựa vào đồ thị



Từ đồ thị suy ra $m\in\{-10;4\}$

Cách 4:

TH1: $|m+1|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-10\\ m=8\end{array}\right.\xrightarrow{k.tra|m+5|}m=-10$

TH2: $|m+5|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-14\end{array}\right.\xrightarrow{k.tra|m+5|}m=4$

Vậy $m\in\{-10;4\}$

Cách 5: Kỹ thuật đồ thị số 3 - xem video live

Ta có $\max\limits_{[0;4]} g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$

Đồ thị tối giản (kỹ thuật đồ thị số 3)



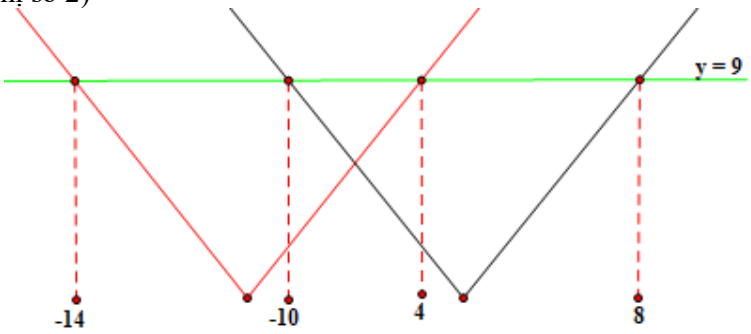
Từ đó suy ra $m\in\{-10;4\}$

Cách 6:Kỹ thuật đồ thị số 2 – xem video live

$\max\limits_{[0;4]} g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$

Trì - HN - 0969141404
Gv. Lương Văn Huy

Đồ thị tối giản (đồ thị số 2)



Từ đó suy ra $m\in\{-10;4\}$

Cách 7:

Ta có $\max\limits_{[0;4]} g(x)=max\{|m+1|;|m+5|\}=\dfrac{|m+1+m+5|+|m+1-m-5|}{2}=|m+3|+2$

Từ bài ra ta có $|m+3|+2=9\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-10\end{array}\right.$

Từ đó suy ra $m\in\{-10;4\}$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(\sin x+1)+m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $t=\sin x+1\ (t\in[0;2])$, khi đó $y=|f(\sin x+1)+m|=|f(t)+m|=|t^3-3t+m|$.

Xét hàm số $u(t)=t^3-3t+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $u'(t)=3t^2-3$.

$u'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in[0;2]\\t=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$.

Ta có $u(0)=m;\ u(1)=m-2;\ u(2)=m+2\ \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}u(x)=m+2,\ \min\limits_{[0;2]}u(x)=m-2$.

Khi đó $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$.

Cách 1:

TH1: $\left\{\begin{array}{l}|m-2|=4\\|m-2|\ge|m+2|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-2.\\m\le 0\end{array}\right.$

TH2: $\left\{\begin{array}{l}|m+2|=4\\|m+2|\ge|m-2|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2.\\m\ge 0\end{array}\right.$

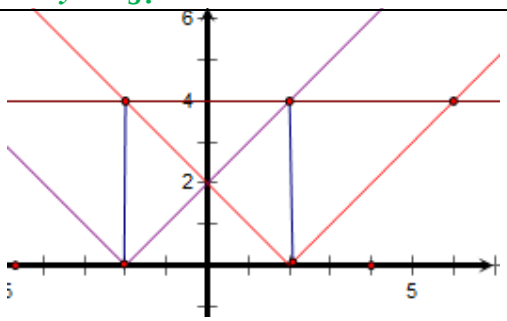
Vậy $S\in\{-2;2\}\Rightarrow -2+2=0$.

Cách 2: Dễ dàng nhận ra bài toán thỏa mãn trường hợp 1

Ta có $K=2,k=2$

$\Rightarrow m\in\{2-4;4-2\}\Leftrightarrow m\in\{-2;2\}$

Cách 3: Từ đồ thị



Suy ra $m\in\{-2;2\}$

Cách 4: Kỹ thuật đồ thị số 3

Ta có $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$

Đồ thị tối giản

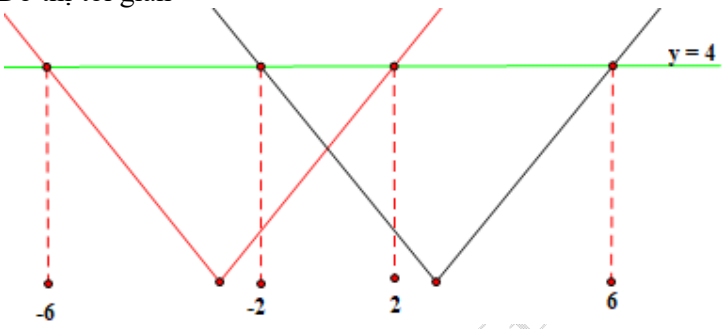


Từ đó Suy ra $m\in\{-2;2\}$.

Cách 5: Kỹ thuật đồ thị số 2

Ta có $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$

Đồ thị tối giản



Từ đó Suy ra $m\in\{-2;2\}$.

Cách 6:

Ta có $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}=|m|+2$

Từ đó ta có $|m|+2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

Từ đó Suy ra $m\in\{-2;2\}$.

Ví dụ 3. Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1)=-1;f'(1)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $|f(x)-m|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in[0;2]$. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 11. **C.** 11. **D.** 0.

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0)=0\Rightarrow c=0\,(I)$.

Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Theo giả thiết $\left\{\begin{array}{l}f(1)=-1\\f'(1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a+b+c=-1\\4a+2b=0\end{array}\right.(II)$.

Từ (I) và (II) suy ra $a=1;b=-2;c=0\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[0;2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0)=-m;\ y(1)=-m-1;\ y(2)=-m+8.\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[0;2]} y=-m+8 \\ \min\limits_{[0;2]} y=-m-1 \end{array}\right.$.

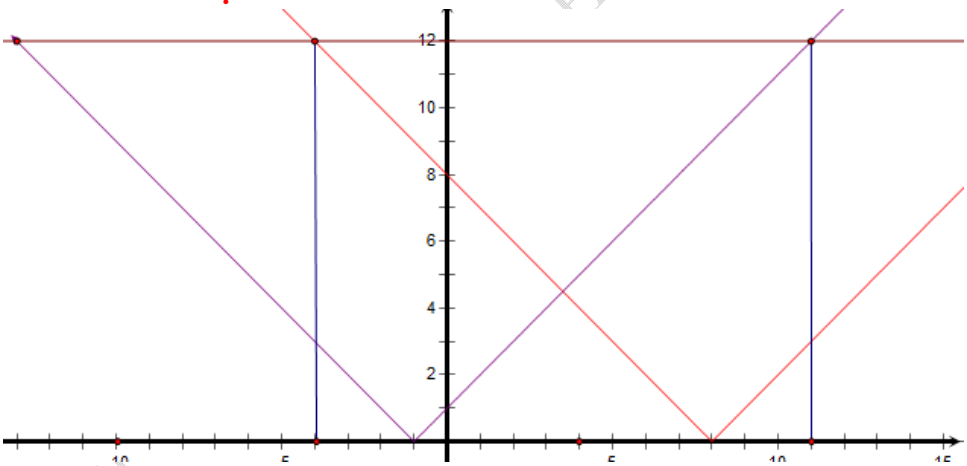
Cách 1:

Theo bài ra $\left|x^4-2x^2-m\right|\le 12,\forall x\in[0;2]\Leftrightarrow \max\left\{\left|-m-1\right|;\left|-m+8\right|\right\}\le 12\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left|-m+8\right|\le 12 \\ \left|-m+8\right|\ge\left|-m-1\right| \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left|-m-1\right|\le 12 \\ \left|-m-1\right|\ge\left|-m+8\right| \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -4\le m\le 20 \\ m\le\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -13\le m\le 11 \\ m\ge\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2}\le m\le 11 \end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le m\le 11$.

Suy ra S có 11 phần tử.

Cách 2: Từ đồ thị



Suy ra $-4\le m\le 11$

Cách 3: Đồ thị tối giản

$\max y=\max\left\{\left|m-8\right|;\left|m+1\right|\right\}$

Đồ thị tối giản

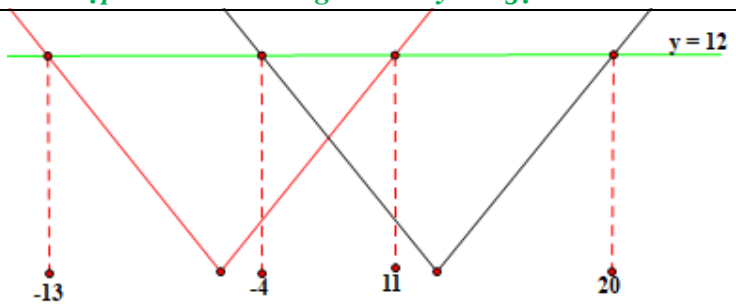


Từ đồ thị suy ra $-4\le m\le 11$

Cách 4: đồ thị tối giản 2

Ta có đồ thị

GV. Lê Thanh Trì - HN - 0969141404



Từ đồ thị suy ra $-4 \le m \le 11$

Cách 5:

$\max y = \max\left\{|m-8|;|m+1|\right\} = \dfrac{|2m-7|+9}{2}$.

Ta có $\dfrac{|2m-7|+9}{2} \le 12 \Leftrightarrow |2m-7| \le 15 \Leftrightarrow -4 \le m \le 11$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;2019]} |f(x)| = 2020$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

1) Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \ne m$.

2) *Nếu $m = -2020$ thì $f(x) = 1, \forall x \ne -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3) * Nếu $m \ne -2020$ thì $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán

4) $\max\limits_{[0;2019]} |f(x)| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \max\left\{|f(0)|;|f(2019)|\right\} = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \max\left\{\dfrac{2020}{|m|};\dfrac{4039}{|m-2019|}\right\} = 2020 \end{cases}$.

5) **Cách 1:**

6) Ta xét hai trường hợp sau:

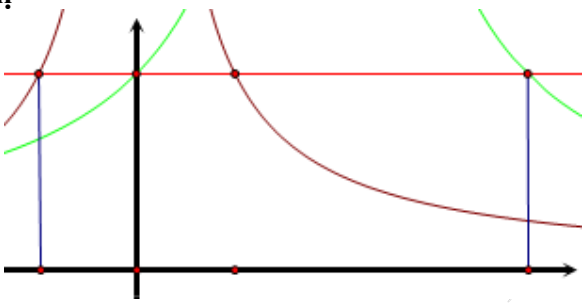
7) Trường hợp 1: $\begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \dfrac{2020}{|m|} = 2020 \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2019 \end{array}\right. \\ m = \pm 1 \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh - 0969141404

Trường hợp 2: $\begin{cases} m\notin[0;2019] \\ \dfrac{4039}{|m-2019|}=2020 \\ \dfrac{2020}{|m|}\le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2019 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{4082419}{2020}\approx 2021 \\ m=\dfrac{4074341}{2020}\approx 2017 \end{array}\right. \\ \dfrac{2020}{|m|}\le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{4082419}{2020}\approx 2021.$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Dựa vào đồ thị



Suy ra có 2 giá trị thỏa mãn

Ví dụ 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D=R\setminus\{-2\}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$. $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-4\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $g(0)=2m$; $g(-1)=2m+1$; $g(1)=2m+\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x)=2m+1$; $\min\limits_{[-1;1]} g(x)=2m$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\max\{|2m+1|;|2m|\}$.

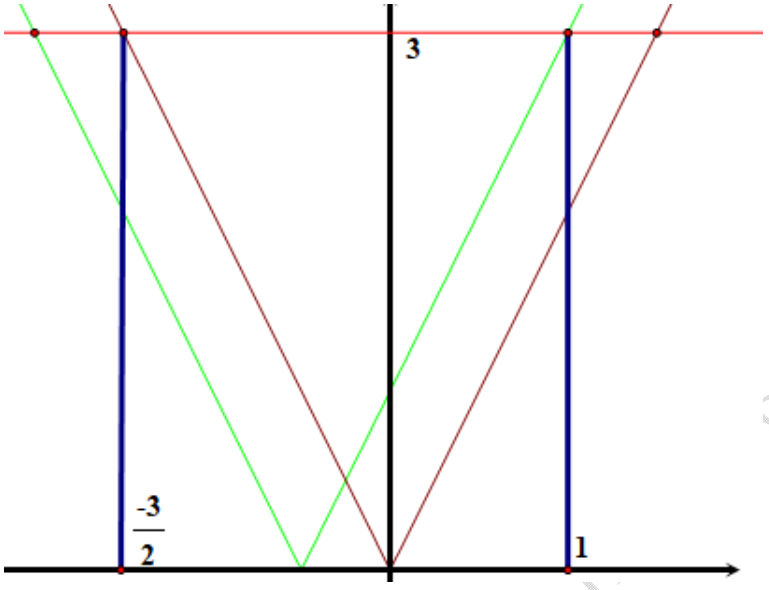
Cách 1:

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+1|=3 \\ |2m+1|\ge|2m| \end{cases} \\ \begin{cases} |2m|=3 \\ |2m|\ge|2m+1| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng $-\frac{1}{2}$.

Cách 2: Từ đồ thị

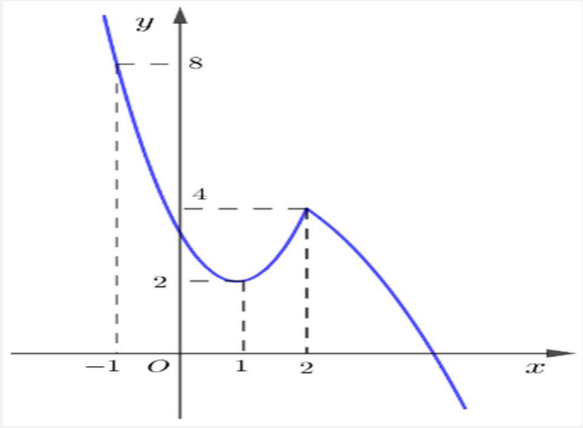


Suy ra $m \in \left\{1;-\frac{3}{2}\right\}$.

Cách 3: Bài toán thuộc vào trường hợp 1 nên ta có

$2m \in \{0-3;3-1\} \Leftrightarrow m \in \left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau.



Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[-1;1]}\left|f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)+m\right|=5$.

A. -20. **B.** -7. **C.** -10. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{8+4x-4x^2}-1$, $h(x)=f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)+m$

Xét hàm số $t=g(x)=\sqrt{8+4x-4x^2}-1$ trên $[-1;1]$.

$g'(x)=\frac{2-4x}{\sqrt{8+4x-4x^2}}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	2	↘	
	-1				$-1+2\sqrt{2}$

Khi đó ta có $t\in[-1;2]$ và $h(x)=f(t)+m$.

Dựa vào đồ thị ta có $\min\limits_{[-1;1]}h(x)=f(1)+m=m+2$, $\max\limits_{[-1;1]}h(x)=f(-1)+m=m+8$

Cách 1:

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}|h(x)|=max\{|m+2|,|m+8|\}$.

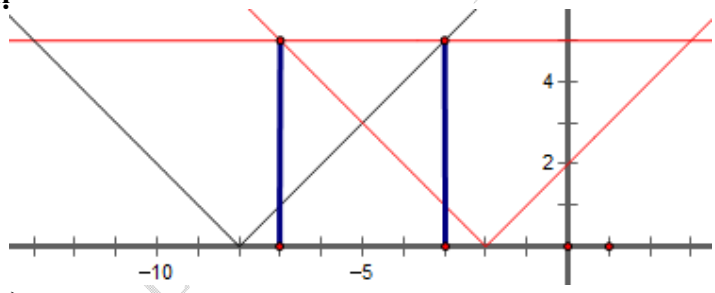
$$\max_{[-1;1]}|h(x)|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+2|=5\\|m+8|\le 5\end{cases}\\\begin{cases}|m+2|\le 5\\|m+8|=5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\m=-3\end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng -10.

Cách 2: Bài toán nằm trong trường hợp 1 nên ta có

$m\in\{-2-5;5-8\}\Leftrightarrow m\in\{-7;-3\}$.

Cách 3: Từ đồ thị



suy ra $m\in\{-7;-3\}$

Ví dụ 7: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** 5. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-mx+2m}{x-2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\notin[-1;1]\end{array}\right.$; $f(-1)=\frac{3m+1}{-3}$; $f(0)=-m$; $f(1)=\frac{m+1}{-1}$.

Bảng biến thiên

	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$

Cách 1:

Trường hợp 1. $f(0)\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$. Khi đó

$3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{|f(-1)|;|f(1)|\}\Leftrightarrow 3=\max\left\{\dfrac{3m+1}{3};m+1\right\}\Leftrightarrow m+1=3\Leftrightarrow m=2$.

Trường hợp 2. $f(0)>0\Leftrightarrow m<0$.

Khả năng 1. $\begin{cases}f(-1)\ge 0\\ f(1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$. Khi đó $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=f(0)\Leftrightarrow m=-3$.

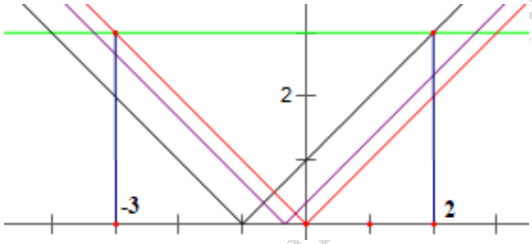
Khả năng 2. $-1<m\le -\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases}f(-1)\ge 0\\ f(1)<0\end{cases}$. $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{f(0);|f(1)|\}$

$\Leftrightarrow 3=\max\{-m;m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\dfrac{1}{3}<m<0$. Khi đó $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\{f(0);|f(1)|;|f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1=-3$, $m_2=2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1.

Cách 2: Sử dụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra có hai giá trị thỏa mãn là $m_1=-3$, $m_2=2$.

Cách 3: Bài toán nằm trong trường hợp 1

Do vậy $m\in\{0-3;3-1\}\Leftrightarrow m\in\{-3;2\}$

Ví dụ 8: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+3m}{x+3}\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 5. Gọi T là tổng tất cả các phần tử của S. Tính T.

A. $T=4$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

8) Chọn D

9) Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+mx+3m}{x+3}$,

10) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ và $f'(x)=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.

11) Xét $f'(x)=0\Rightarrow x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-6\end{array}\right.$.

12) Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

Gv : Lương Văn Huy - 0969141404

x	-2	0	2
$f'(x)$		$-\quad 0\quad +$	
$f(x)$		$f(-2)$ ↘ $f(0)$ ↗ $f(2)$	

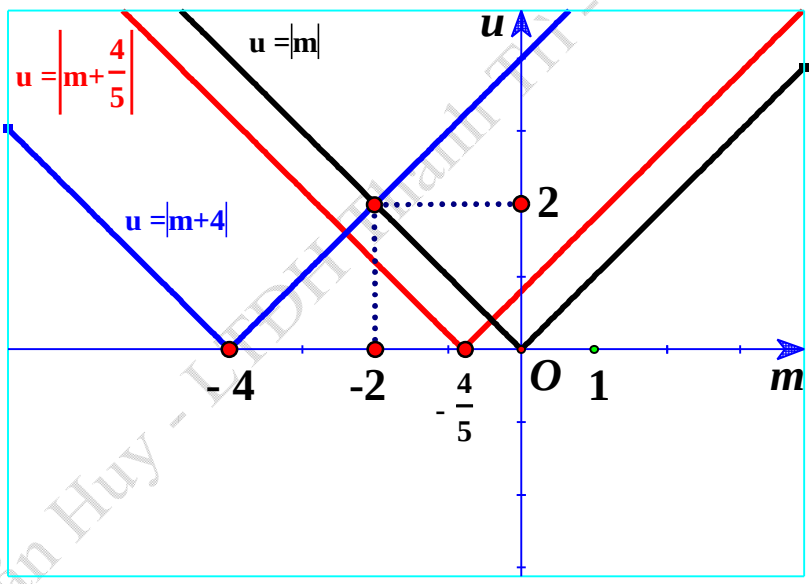
13)

Ta có: $f(-2)=m+4;\ f(0)=m;\ f(2)=m+\frac{4}{5}$.

Với $g(x)=|f(x)|=\left|\frac{x^2+mx+3m}{x+3}\right|$. Ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=\max\left\{|f(-2)|;|f(0)|;|f(2)|\right\}$.

Cách 1 :

Dựa vào đồ thị các hàm số $u=|m|;u=|m+4|;u=\left|m+\frac{4}{5}\right|$.



Xét với $m\ge -2$. Ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=|f(-2)|=|m+4|=m+4=5\Rightarrow m=1$.

Xét với $m<-2$ Ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=|f(0)|=|m|=-m=5\Rightarrow m=-5$.

Vậy $S=\{-5;1\}$ nên tổng $T=(-5)+1=-4$.

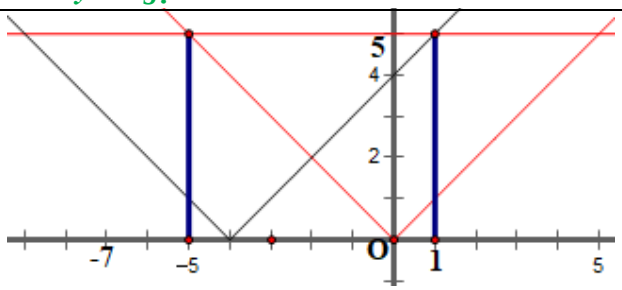
Cách 2 : ta có $|m|\le\left|m+\frac{4}{5}\right|\le|m+4|$

Vậy $Max=Max\{|m|;|m+4|\}$

Suy ra $m\in\{0-5;5-4\}\Leftrightarrow m\in\{-5;1\}$

Cách 3 : Từ đồ thị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Suy ra $m\in\{-5;1\}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)=x^2-2x-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)+m\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 8?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

14) Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x-1$ trên đoạn $[-1;3]$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1		1		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Đặt $t=f(x)$. Do $x\in[-1;3]$ nên ta có $t\in[-2;2]$.

Ta có hàm số $g(t)=\left|t^2-2t+m\right|$

Xét hàm số $u=t^2-2t$ trên đoạn $[-2;2]$ ta có bảng biến thiên

t	-2		1		2
u	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Xét hàm số $g(u)=\left|u+m\right|$, với $t\in[-1;8]$

Ta có $\max\limits_{[-1;8]}g(u)=\max\{|m-1|,|m+8|\}$.

Cách 1:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}|m-1|\ge|m+8|\\ \max\limits_{[-1;8]}g(u)=|m-1|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-1|\ge|m+8|\\ |m-1|=8\end{cases}\Leftrightarrow m=-7.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}|m+8|\ge|m-1|\\ \max\limits_{[-1;8]}g(u)=|m+8|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m+8|\ge|m-1|\\ |m+8|=8\end{cases}\Leftrightarrow m=0.$$

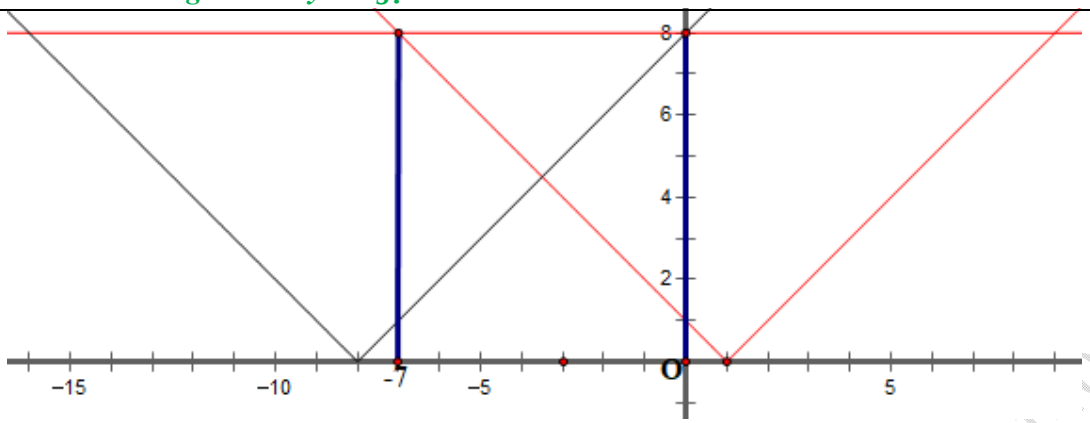
Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=0$ và $m=-7$.

Cách 2: Bài toán nằm trong trường hợp nên

$m\in\{1-8;8-8\}\Leftrightarrow m\in\{-7;0\}$.

Cách 3: Từ đồ thị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969...



Suy ra $m \in \{-7;0\}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

15) **Câu 1:** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4. **B.** 36. **C.** 140. **D.** 0.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng 150.

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 5. Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $\max y=3$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng $\dfrac{275}{2}$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Có bao nhiêu số thực m để $M=\dfrac{59}{2}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+mx+m}{x+1}\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 3. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 4 **C.** 2. **D.** 3.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

16) **Câu 10:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

17) **Câu 11:** Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x-m^2-m}{x+2}\right|$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[1;2]} y=1$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.C	2.B	3.A	4.C	5.A	6.B	7.D	8.A	9.C	10.C

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|=a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=a \\ m+k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K=-a \\ m+K<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a-k \\ m>-k \end{cases} \vee \begin{cases} m=-a-K \\ m<-K \end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Cách 2:Sử dụng đồ thị $\left|x+k\right|$ và $\left|x+K\right|$

Cách 3: Sử dụng bđt trị tuyệt đối

Cách 4: Sử dụng đồ thị tối giản loại 2,3

Ví dụ 1: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-2x+m\right|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

+) Đặt $g(x)=x^2-2x+m$.

+) Ta có: $g'(x)=2x-2 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$.

+) $\begin{cases} g(-1)=m+3 \\ g(1)=m-1 \\ g(2)=m \end{cases}$.

+) Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{[-1;2]} g(x)=m-1 \\ \max\limits_{[-1;2]} g(x)=m+3 \end{cases}$ .Vậy $\min\limits_{[-1;2]}\left|g(x)\right|=\min\left\{0;\left|m-1\right|;\left|m+3\right|\right\}$

Cách 1:

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: .

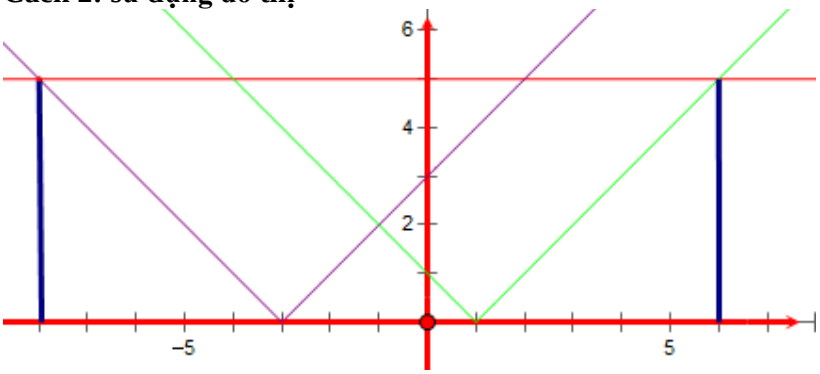
$\begin{cases} \left|m-1\right|=5 \\ \left|m-1\right|\le\left|m+3\right| \end{cases} \Leftrightarrow m=6$.

TH2: .

$\begin{cases}|m+3|=5\\ |m-1|\ge|m+3|\end{cases}\Leftrightarrow m=-8$

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Cách 2: sử dụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra $m\in\{-8;6\}$

Cách 3: Để

$$\min_{[-1;2]}|g(x)|=5\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m-1=5\\ m-1>0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}m+3=-5\\ m+3<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-8\end{array}\right.$$

Cách 4:

TH1: .

$|m-1|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-4\end{array}\right.\xrightarrow{k.tr|m+3|}m=6$.

TH2: .

$|m+3|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-8\end{array}\right.\xrightarrow{k.tr|m-1|}m=-8$

Cách 5: Đồ thị tối giản



Từ đồ thị suy ra $m\in\{-8;6\}$

Ví dụ 2. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y=\left|\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 18 là.

A. 432. **B.** -216. **C.** -432. **D.** 288.

Lời giải

+ Xét hàm số $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

+ Ta có $f'(x)=4x^2-12x+8$.

+ $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\ x=2\in[0;3]\end{array}\right.$.

+ $f(0)=m;\ f(1)=\frac{10}{3}+m;\ f(2)=\frac{8}{3}+m;\ f(3)=6+m$.

GV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]} f(x)=\max\{f(0);f(1);f(2);f(3)\}=f(3)=m+6\\ \min\limits_{[0;3]} f(x)=\min\{f(0);f(1);f(2);f(3)\}=f(0)=m\end{cases}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=\min\{0;|m|;|m+6|\}$.

TH1.

$\begin{cases}|m|=18\\ |m|\le|m+6|\end{cases}\Leftrightarrow m=18$.

TH2. .

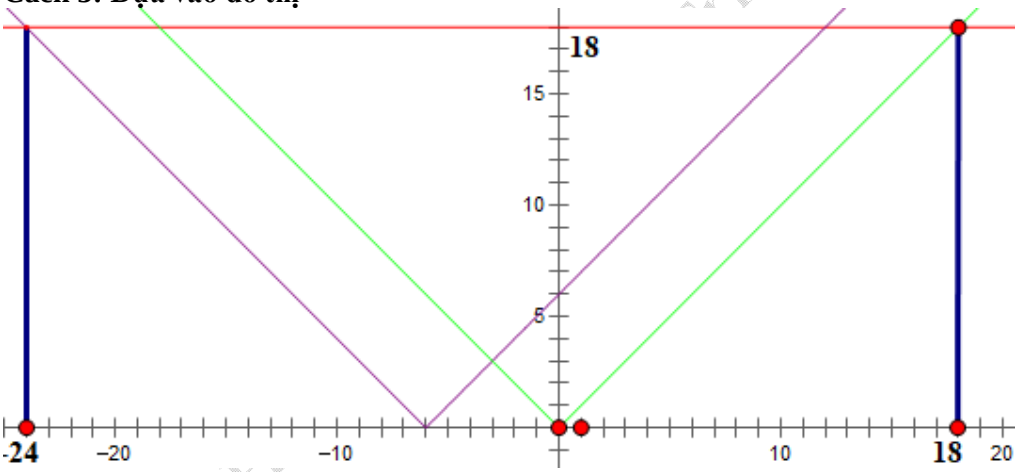
$\begin{cases}|m+6|=18\\ |m|\ge|m+6|\end{cases}\Leftrightarrow m=-24$.

Kết luận: tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-24.18=-432$.

Cách 2:

$\min\limits_{[0;3]} y=18\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=18\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m+6=-18\\ m+6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=18\\ m=-24\end{array}\right.$.

Cách 3: Dựa vào đồ thị



Suy ra $m\in\{-24;18\}$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=|x^4-2x^2+m-1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+m-1$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$g'(x)=4x^3-4x$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\ x=0\in[0;2]\\ x=1\in[0;2]\end{array}\right.$

$g(0)=m-1$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+7$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m-2$, $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m+7$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=\min\{0;|m-2|;|m+7|\}$.

Cách 1:

Trường hợp 1:

$\begin{cases}|m-2|=18\\ |m-2|\le|m+7|\end{cases}\Leftrightarrow m=20$.

Trường hợp 2: .

$\begin{cases}|m+7|=18\\ |m-2|\ge|m+7|\end{cases}\Leftrightarrow m=-25$.

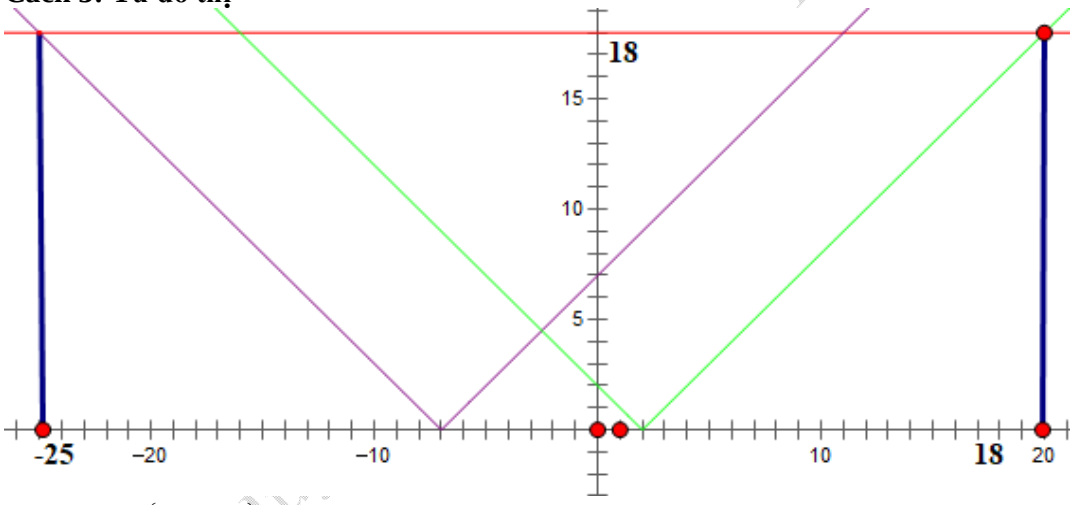
Suy ra $m\in\{20;-25\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.

Cách 2:

$$\min_{x\in[0;2]} f(x)=18\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m-2=18\\ m-2>0\end{cases}\begin{cases}m+7=-18\\ m+7<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=20\\ m=-25\end{array}\right.$$

Cách 3: Từ đồ thị



Suy ra $m\in\{-25;20\}$

Ví dụ 4*. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=2$.Tổng các phần tử của tập S là

A. 2. **B.** -8. **C.** -5. **D.** 3.

Lời giải

18)

19) +) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

20) *) Với $m=2$. Ta có $f(x)=\dfrac{2x-2}{1-x}=-2$ nên $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=2$. Vậy $m=2$.

21) *) Với $m\neq 2$. Khi đó, $f'(x)=\dfrac{2-m}{(1-x)^2}$, $\forall x\neq 1$.

22) +) Ta có $f(-2)=\dfrac{-m-4}{3}$, $f(0)=-m$; $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-m\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{2}$.

Ta xét các trường hợp sau:

23) **Cách 1 (Xem cho vui)**

24) TH1: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2;0]$, tức là $-2\le\frac{m}{2}\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 0$. Khi đó $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=0$.

25) TH2: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2;0]$, tức là $\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2}<-2\\ \frac{m}{2}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0\end{array}\right.$.

26) Khi đó:

27) $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=\min\left\{|f(-2)|;|f(0)|\right\}=\min\left\{\left|\frac{-m-4}{3}\right|;|-m|\right\}=\min\left\{\left|\frac{m+4}{3}\right|;|m|\right\}$.

28) +) Nếu $\left|\frac{m+4}{3}\right|\le|m|\Leftrightarrow|m+4|\le 3|m|\Leftrightarrow(m+4)^2\le(3m)^2\Leftrightarrow(4-2m)(4m+4)\le 0$

29) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=\left|\frac{m+4}{3}\right|$.

30) Ta có $\left|\frac{m+4}{3}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+4=6\\ m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (\text{loại, } m\ne 2)\\ m=-10\ (\text{nhận})\end{array}\right.$ và).

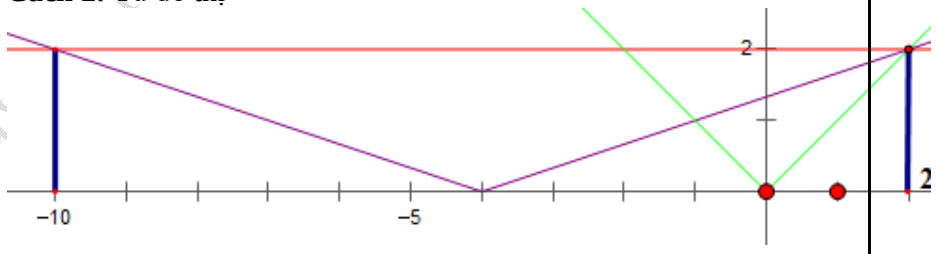
31) +) Nếu $\left|\frac{m+4}{3}\right|>|m|\Leftrightarrow -1<m<2$ thì $\min\limits_{[-2;0]}|f(x)|=|m|$.

32) Ta có $|m|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (\text{loại})\\ m=-2\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

33) Suy ra $S=\{2;-10\}$.

34) Vậy tổng các phần tử của S là -8.

35) **Cách 2:** Từ đồ thị



36) Vậy $m\in\{-10;2\}$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2}{x-1}+m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=5$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=\frac{x^2}{x-1}+m$ liên tục trên đoạn $[2;3]$.

$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$; $x=0, x=2\notin(2;3)$.

$f(2)=m+4,\ f(3)=m+\dfrac{9}{2}.$

+ Nếu $f(2).f(3)\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{9}{2}\le m\le -4$ thì $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=0$. Trường hợp này không thoả yêu cầu bài toán.

+ Ta xét trường hợp $f(2).f(3)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{9}{2} \\ m>-4 \end{array}\right.$.

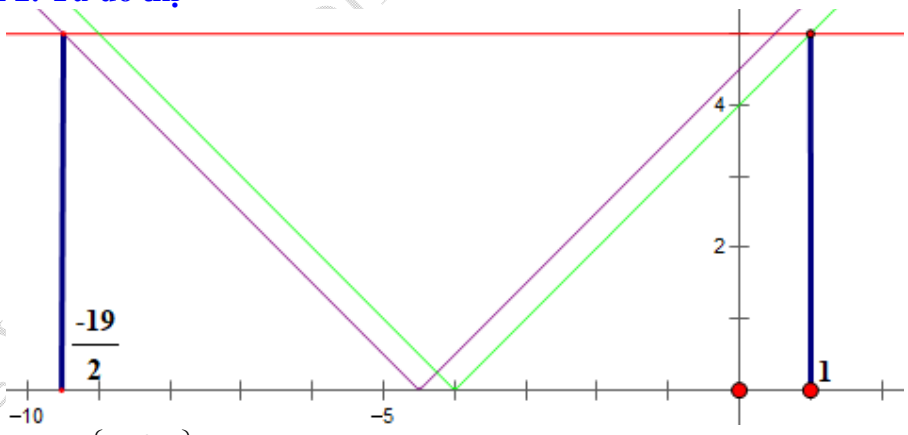
Khi đó $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\min\left\{|f(2)|;|f(3)|\right\}=\min\left\{|m+4|;\left|m+\dfrac{9}{2}\right|\right\}$.

TH1: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=|m+4|=5\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|m+4|=5\\ \left|m+\dfrac{9}{2}\right|\ge 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-9\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\le -\dfrac{19}{2}\\ m\ge \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1.$

TH2: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5\\ |m+4|\ge 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\ m=-\dfrac{19}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m\le -9\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{2}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

37) **Cách 2: Từ đồ thị**



38)

39) **Suy ra** $m\in\left\{-\dfrac{19}{2};1\right\}$

40) **Cách 3:**

41) $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m+4=5\\ m+4>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m+\dfrac{9}{2}=-5\\ m+\dfrac{9}{2}<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{19}{2}\end{array}\right.$

42)

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - HN - 0969141404

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng 2. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 20. **C.** 24. **D.** 40.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng 10.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 3. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^2+x+m\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-2;2]$ bằng 2. Tổng các phần tử thuộc S là

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** -8. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

43) **Câu 4:** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 3.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhỏ của hàm số $f(x)=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|e^{2x}-4e^x+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^2+mx+1\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1.

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.B	2.A	3.C	4.C	5.B	6.B	7.C	8.A	9.	10.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k).$

Cách 1:

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M \Rightarrow \begin{cases} m+k\ge -M \\ m+K\le M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k\le m\le M-K.$

Cách 2: Sử dụng đồ thị (nên dùng)

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y\le 11$.

A. -19. **B.** -37. **C.** -30. **D.** -11.

Lời giải

+ Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+m$ liên tục trên đoạn $[-1;\ 2]$.

+ Ta có $f'(x)=x^3-3x^2+2x$.

+ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=1\in[-1;2] \\ x=2\in[-1;2] \end{array}\right.$.

+ $f(-1)=\frac{9}{4}+m;\ f(0)=m;\ f(1)=\frac{1}{4}+m;\ f(2)=m.$

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[-1;2]} f(x)=\max\{f(-1);f(0);f(1);f(2)\}=f(-1)=m+\frac{9}{4} \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)=\min\{f(-1);f(0);f(1);f(2)\}=f(0)=f(2)=m \end{cases}$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y=\max\left\{\left|m+\frac{9}{4}\right|,|m|\right\}$

Cách 1:

theo yêu cầu bài toán $\max\limits_{[0;3]} y\le 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|m+\frac{9}{4}\right|\le 11 \\ \left|m+\frac{9}{4}\right|\ge |m| \end{cases} \\ \begin{cases} |m|\le 11 \\ |m|\ge \left|m+\frac{9}{4}\right| \end{cases} \end{array}\right.$

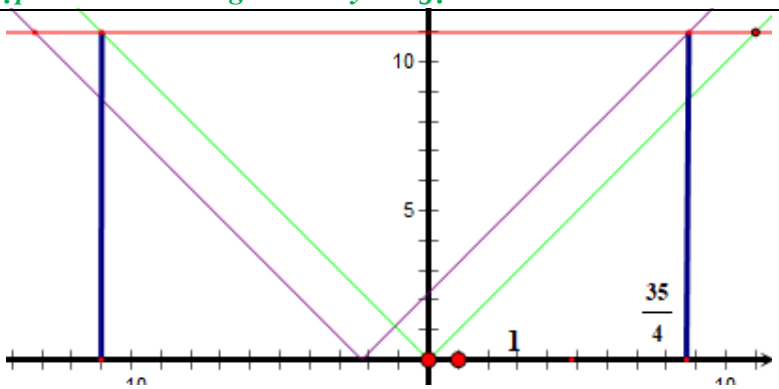
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{53}{4}\le m\le \frac{35}{4} \\ m\ge -\frac{9}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} -11\le m\le 11 \\ m\le -\frac{9}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{9}{8}\le m\le \frac{35}{4} \\ -11\le m\le -\frac{9}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow -11\le m\le \frac{35}{4}.$

Vì m nguyên nên $m=\{-11;-10;...;8\}$.

Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11-10-9-...+8=-30$.

Cách 2: Sử dụng đồ thị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 09691



Suy ra $-11\le m\le \dfrac{35}{4}\xleftrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-11;-10;...;7;8\}$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+3\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max\limits_{[1;2]} f(x)\le 3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2mx+3\le 3,\forall x\in[1;2]\\ x^2-2mx+3\ge -3,\forall x\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m\ge x,\forall x\in[1;2]\\ 2m\le \dfrac{x^2+6}{x},\forall x\in[1;2]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m\ge \max\limits_{[1;2]}(x) \quad (1)\\ 2m\le \min\limits_{[1;2]}\left(\dfrac{x^2+6}{x}\right) \quad (2)\end{cases}.$$

+) $(1)\Leftrightarrow 2m\ge 2\Leftrightarrow m\ge 1$.

+) Xét hàm $g(x)=\dfrac{x^2+6}{x}=x+\dfrac{6}{x}$ với $x\in[1;2]$ có $g'(x)=1-\dfrac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x)<0,\forall x\in[1;2]\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} g(x)=g(2)=5$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{2}$.

Vậy $1\le m\le\dfrac{5}{2}$, mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2\}$.

Cách 2: Cách trên dễ hiểu rồi nên cách sau các e tự làm

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y<50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0. **B.** 737. **C.** 759. **D.** -215.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Có $f(-2)=m-2;\ f(-1)=m+5;\ f(3)=m-27$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=m+5;\ \min\limits_{[-2;3]} f(x)=m-27$.

Do đó $M=\max\limits_{[-2;3]} y=\max\left\{|m+5|;|m-27|\right\}$.

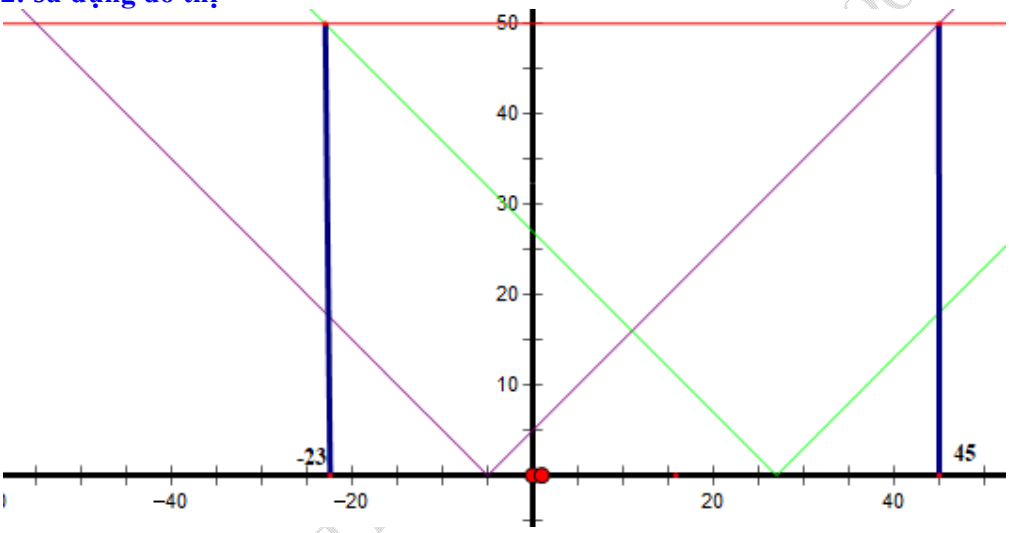
Cách 1:

$$M<50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+5|\ge|m-27|\\|m+5|<50\end{cases}\\\begin{cases}|m+5|<|m-27|\\|m-27|<50\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m-22\ge 0\\-50<m+5<50\end{cases}\\\begin{cases}2m-22<0\\-50<m-27<50\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\in[11;45)\\m\in(-23;11)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(-23;45).$$

Do đó $S=\{-22;-21;-20;...;-1;0;1;2;...;44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Cách 2: sử dụng đồ thị



Suy ra $m\in(-23;45)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-22;-21;...;44\}$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;2]} y\le 100$.

A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.

Lời giải

Xét $u=x^4-2x^3+x^2+a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

$u'=4x^3-6x^2+2x$.

$$u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\\x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2]\end{array}\right.$$

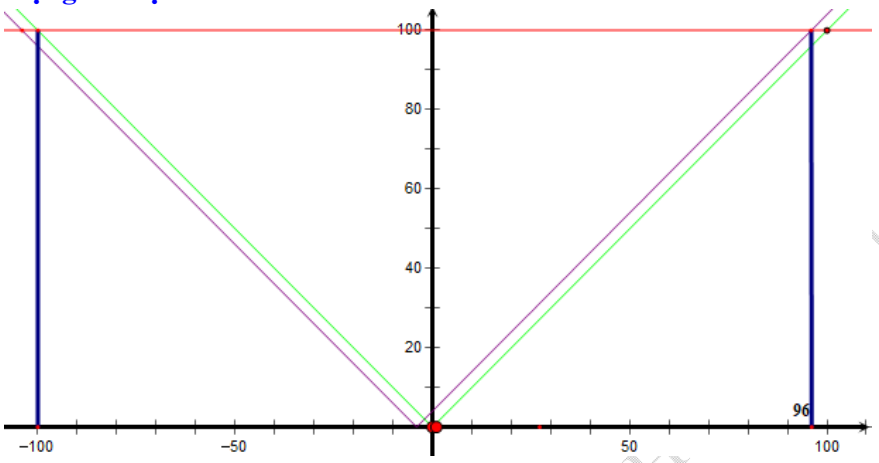
Suy ra $\begin{cases}M=\max\limits_{[-1;2]}u=\max\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4\\m=\min\limits_{[-1;2]}u=\min\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(0)=u(1)=a\end{cases}$.

Cách 1 :

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = \max\left\{|a+4|, |a|\right\} \le 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+4| \le |a| \le 100 \\ |a| \le |a+4| \le 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -100 \le a \le -2 \\ -2 \le a \le 96 \end{array}\right.$.

Vậy $a \in \{-100, -99, ..., 96\}$ có 197 số nguyên thỏa mãn.

Cách 2: Sử dụng đồ thị



Suy ra $-100 \le m \le 96$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = |\sin x + \cos x + m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + m$, có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-\sqrt{2} + m \le \sin x + \cos x + m \le \sqrt{2} + m,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2} + m \le f(x) \le \sqrt{2} + m,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

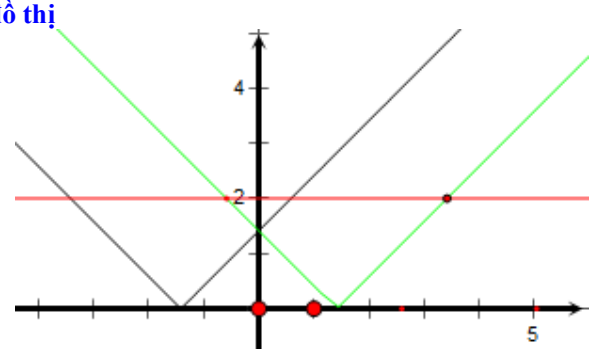
Vậy: $\max\limits_D y = |m + \sqrt{2}|$ hoặc $\max\limits_D y = |m - \sqrt{2}|$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |m+\sqrt{2}| < 2 \\ |m-\sqrt{2}| \le |m+\sqrt{2}| \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |m-\sqrt{2}| < 2 \\ |m+\sqrt{2}| \le |m-\sqrt{2}| \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -2-\sqrt{2} < m < 2-\sqrt{2} \\ m \ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -2+\sqrt{2} < m < 2+\sqrt{2} \\ m \le 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m < 2-\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2} < m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2+\sqrt{2} < m < 2-\sqrt{2}$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$. Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: sử dụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra $m = 0$

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - H 141404

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ **không** vượt quá 5. Số phần tử của S bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 2.

Câu 2. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ **không** vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]}\left|x^3-3x^2+m\right|\le 4$?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ **không** vượt quá 10.

A. 27. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 12.

Câu 5. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số nguyên a để $\max\limits_{[-1;2]} y\le 100$.

A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$ trên đoạn $[-3;2]$ **không** vượt quá 243.

A. 41. **B.** 103. **C.** 200. **D.** 212.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-x^2+\left(m^2+1\right)x-4m-7\right|$ trên đoạn $[0;2]$ **không** vượt quá 15.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=\left|\sin 3x+\sin x+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị lớn nhất của hàm số **không** vượt quá 30.

A. 59. **B.** 61. **C.** 57. **D.** 55.

Gv : Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.A	2.C	3.D	4.C	5.A	6.D	7.C	8.C	9.	10.

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k).$

Cách 1:

Để

$$\min_{[\alpha;\beta]} y\le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k\le a \\ m+k\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K\ge -a \\ m+K\le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le a-k \\ m\ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m\ge -a-K \\ m\le -K \end{cases} \vee -K<m<-k.$$

Cách 2: Sử dụng đồ thị

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-(m+1)x+m\right|$ trên $[2;m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.

Lời giải

Cách 1:

+) Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

Ta có: $f'(x)=2x-(m+1);\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m+1}{2}\in[2;m-1]$.

Khi đó: $f(2)=2-m;\ f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=-\dfrac{(m-1)^2}{4};\ f(m-1)=2-m.$

+) Vì $-\dfrac{(m-1)^2}{4}\le 2-m<0,\forall m>6$ nên

$$\max_{[2;m-1]} f(x)=\max\left\{f(2);f\left(\frac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=2-m;$$

và $\min\limits_{[2;m-1]} f(x)=\min\left\{f(2);f\left(\dfrac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=-\dfrac{(m-1)^2}{4}.$

Do đó: $\min\limits_{[2;m-1]} y=\min\left\{|2-m|;\left|-\dfrac{(m-1)^2}{4}\right|\right\}=|2-m|$

+) Theo yêu cầu bài toán: $|2-m|<2020\Leftrightarrow -2020<2-m<2020\Leftrightarrow -2018<m<2022$

+) Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m>6$ nên $m\in\{7;8;9;\cdots;2021\}$.

+) Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n=\dfrac{(7+2021)2015}{2}=2043210$.

Cách 2:

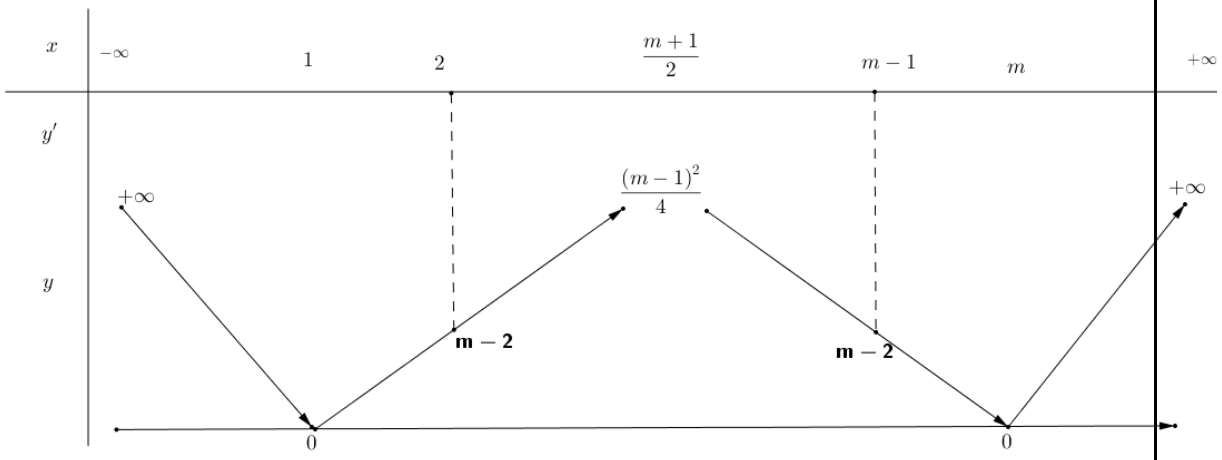
+) Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=m \end{cases}.$$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Do $m>6$ nên ta có: $\begin{cases}\dfrac{m+1}{2}>2\\ \dfrac{m+1}{2}<m-1\end{cases}$.

$$f(2)=2-m;\ f\left(\frac{m+1}{2}\right)=-\frac{(m-1)^2}{4};\ f(m-1)=2-m.$$



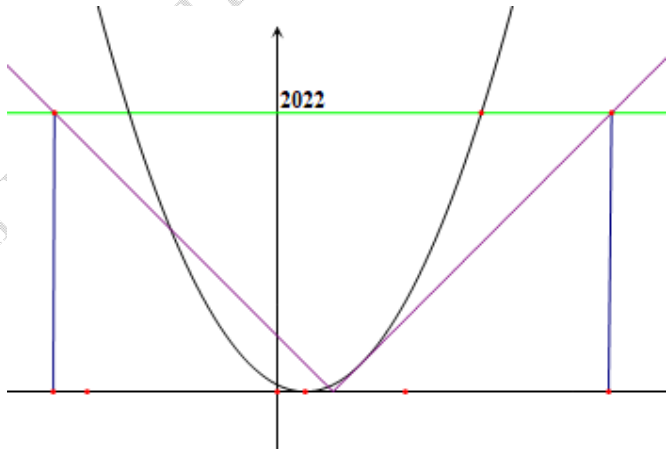
Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[2;m-1]}\left|f(x)\right|=m-2$

Theo bài ra ta có: $\min\limits_{[2;m-1]}\left|f(x)\right|<2020\Leftrightarrow m-2<2020\Leftrightarrow m<2022$.

Kết hợp với điều kiện $m>6$ suy ra $m\in\{7;8;...;2021\}$.

+) Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021}n=\dfrac{(7+2021)2015}{2}=2043210$.

Cách 3: Sử dụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra $\begin{cases}m-2<2020\\ m-2>-2020\\ m>6\end{cases}\Leftrightarrow 6<m<2022$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\left|x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-3+m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5.

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -7.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-3+m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-9x+6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=2\in[0;3]\end{array}\right.$.

$f(0)=-3+m$; $f(1)=-\frac{1}{2}+m$; $f(2)=-1+m$; $f(3)=\frac{3}{2}+m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]}f(x)=\frac{3}{2}+m$; $\min\limits_{[0;3]}f(x)=-3+m$.

Cách 1:

TH1: $\left(\frac{3}{2}+m\right)(-3+m)\le 0$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên đoạn $[0;3]$ là 0.

TH2: $\left(\frac{3}{2}+m\right)(-3+m)>0$. Khi đó: $\min\limits_{[0;3]}y=\min\left\{\left|\frac{3}{2}+m\right|;\left|-3+m\right|\right\}$.

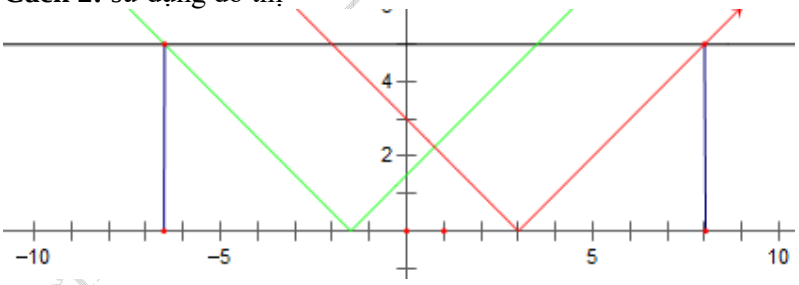
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left|\frac{3}{2}+m\right|\ge\left|-3+m\right|\\\left|-3+m\right|\ge 5\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}\left|\frac{3}{2}+m\right|\le\left|-3+m\right|\\\left|\frac{3}{2}+m\right|\ge 5\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\ge\frac{3}{4}\\\left[\begin{array}{l}m\ge 8\\m\le -2\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}m\le\frac{3}{4}\\\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{7}{2}\\m\le-\frac{13}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 8\\m\le-\frac{13}{2}\end{array}\right.$$

Suy ra các giá trị $m\in[-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{-10;-9;-8;-7;8;9;10\}$.

Vậy tổng các giá trị m cần tìm là -7.

Cách 2: sử dụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l}-10\le m\le 6,5\\8\le m\le 10\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\{-10;-9;-8;-7;8;9;10\}$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-4\cos^2x+2\sin x+m+4\right|$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải

Ta có: $y=\left|-4\cos^2x+2\sin x+m+4\right|=\left|4\left(1-\cos^2x\right)+2\sin x+m\right|=\left|4\sin^2x+2\sin x+m\right|$.

Đặt $t=\sin x$, do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t\in[0;1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|4t^2+2t+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2+2t+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có:

$f'(t)=8t+2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\notin[0;1]$.

$f(0)=m$; $f(1)=m+6$.

Cách 1:

Trường hợp 1: Nếu $m\ge 0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0\le m\le 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m+6\le 0 \Leftrightarrow m\le -6\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=-m-6$. Kết hợp với giả thiết ta có

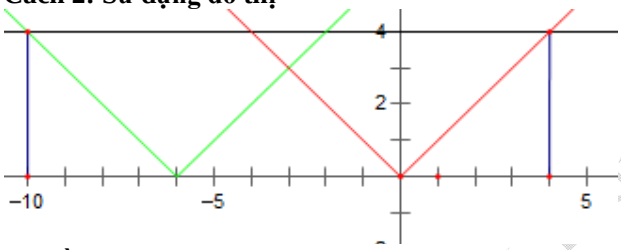
$\begin{cases}-m-6\le 4\\ m\le -6\end{cases}\Leftrightarrow -10\le m\le -6$. (2)

Trường hợp 3: Nếu $m(m+6)<0 \Leftrightarrow -6<m<0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=0\le 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $m\in[-10;4]$. Vì m là số nguyên nên $m\in\{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Sử dụng đồ thị



Từ đồ thị ra suy ra $m\in\{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$ trên đoạn $[-3;2]$ **không** vượt quá 100.

A. 478. **B.** 474. **C.** 476. **D.** 480.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[1;3]} f(x)\le 3$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 11.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[-1;3]} f(x)\le 3$.

A. 4. **B.** 8. **C.** 31. **D.** 39.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^4-2x^2+a\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ **không** vượt quá 3.

A. 8. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 5. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ **không** vượt quá 5. Số phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 16. **C.** 14. **D.** 2.

Câu 6. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ **không** vượt quá 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 39. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$.Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(2\sin x+1)+m\right|$ **không** vượt quá 10.

A. 45. **B.** 41. **C.** 39.. **D.** 43.

GV: Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.C	2.D	3.D	4.C	5.A	6.B	7.B	8.	9.	10.

Dạng 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Cách 2:Sử dụng đồ thị

Cách 3: Sử dụng bđt trị tuyệt đối.

Cách 4: Phương pháp xấp xỉ đều.

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+2m-3\right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m=b$. Tính $P=2b-a$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{-9}{4}$. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4x+2m-3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

+) $f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$.

+) $f(1)=2m-6$, $f(2)=2m-7$, $f(3)=2m-6$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|2m-6\right|;\left|2m-7\right|\right\}=M$.

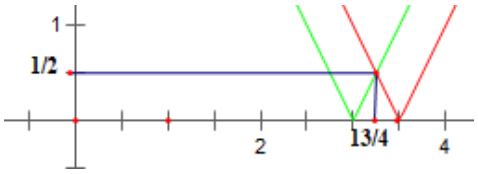
Cách 1:

Ta có: $\begin{cases}M\ge\left|2m-6\right|\\ M\ge\left|2m-7\right|=\left|7-2m\right|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge\left|2m-6\right|+\left|7-2m\right|\ge\left|2m-6+7-2m\right|=1\Rightarrow M\ge\dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\left|2m-6\right|=\left|2m-7\right|=\dfrac{1}{2}\\ (2m-6)(7-2m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{13}{4}$.

Do đó $M=\dfrac{1}{2}=a$ khi $m=\dfrac{13}{4}=b\Rightarrow P=2b-a=6$.

Cách 2: Sử đụng đồ thị



Từ đồ thị suy ra $\begin{cases}m=\dfrac{13}{4}=b\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow P=2b-a=6$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

A. 4. **B.** -4. **C.** 8. **D.** -8.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ liên tục trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+m^2+1>0$ với $\forall x\in[-3;-1]$.

Ta có $f(-3)=6-3m^2$; $f(-1)=26-m^2$.

Khi đó $\max\limits_{[-3;-1]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|6-3m^2\right|;\left|26-m^2\right|\right\}=M$.

Cách 1:

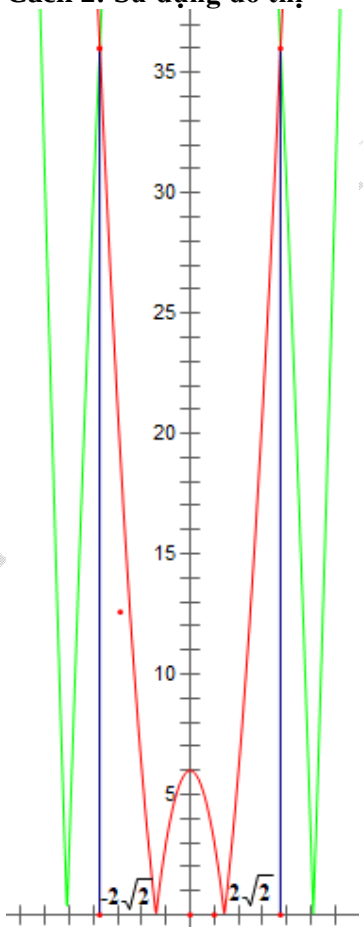
Lại có $\begin{cases}M\ge\left|6-3m^2\right|\\M\ge\left|26-m^2\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\ge\left|6-3m^2\right|\\3M\ge\left|3m^2-78\right|\end{cases}\Rightarrow 4M\ge 72\Leftrightarrow M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\left|6-3m^2\right|=\left|26-m^2\right|=18\\\left(6-3m^2\right)\left(3m^2-78\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2}.\left(-2\sqrt{2}\right)=-8$.

Cách 2: Sử dụng đồ thị



Gv : I . LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

Từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} m=2\sqrt{2} \\ m=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=x^3-19x+30$

+ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-5\notin[0;2] \\ x=3\notin[0;2] \\ x=2\in[0;2] \end{array}\right.$.

+ Ta có : $f(0)=m; f(2)=m+26$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} f(x)=\max\{m;m+26\}=m+26$; $\min\limits_{[0;2]} f(x)=\min\{m;m+26\}=m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|m|;|m+26|\}=M$.

Cách 1:

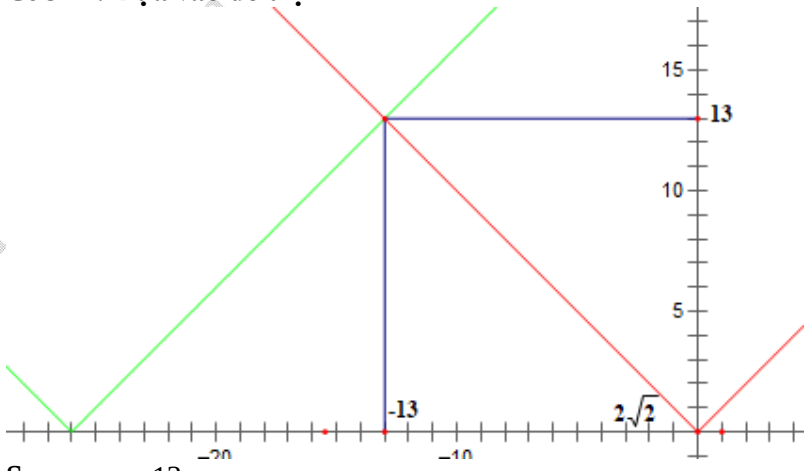
Ta có $\left\{\begin{array}{l} M\geq|m|=|-m| \\ M\geq|m+26| \end{array}\right.\Rightarrow 2M\geq|-m|+|m+26|\Leftrightarrow M\geq\frac{|-m|+|m+26|}{2}\geq\frac{|-m+m+26|}{2}=13.$

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l} |m|=|m+26|=13 \\ -m(m+26)>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow m=-13.$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m=-13$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2: Dựa vào đồ thị



Suy ra $m=13$

Gv : LHUY - LHDH Thanh Trì - HN - 0969141404

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Câu 2. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của tham số m bằng

A. -12. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -11.

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$ trên đoạn $[-3;2]$ đạt nhỏ nhất bằng

A. $\frac{211}{2}$. **B.** $\frac{275}{2}$. **C.** $\frac{137}{2}$. **D.** $\frac{115}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt nhỏ nhất. Mệnh đề nào dưới đây **đúng ?**

A. $0<m<1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $2<m<3$. **D.** $3<m<4$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số đạt nhỏ nhất bằng

A. $\frac{17}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{7}{8}$. **D.** $\frac{15}{8}$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất bằng

A. $\frac{59}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 16. **D.** $\frac{57}{2}$.

Câu 7. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^2}-3m+4\right|$ đạt nhỏ nhất

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=\frac{3}{8}$. **D.** $m=\frac{3}{16}$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ đạt nhỏ nhất

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 9. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Mệnh đề nào dưới đây **đúng ?**

A. $-1\le m\le 0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $\frac{2}{3}<m<2$. **D.** $-\frac{3}{2}<m<-1$.

44) **Câu 10:** Cho hàm số $y=\left|\frac{x-m^2-m}{x+2}\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

45) **Câu 11:** Cho hàm số $y=\left|\frac{x-m^2+m}{x+2}\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

46) **Câu 12:** Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. 26. **B.** 18. **C.** 28 **D.** 16.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.C	2.B	3.B	4.C	5.B	6.A	7.	8.A	9.B	10.D
11.C	12.B	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow\left(m+K\right)\left(m+k\right)\le 0\Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là 0.

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-mx^2-9x+9m\right|$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=x^3-mx^2-9x+9m$. Dễ thấy $\min\limits_{[-2;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 0$, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $x\in\left[-2;2\right]$.

Ta có: $f\left(x\right)=x^2\left(x-m\right)-9\left(x-m\right)=\left(x^2-9\right)\left(x-m\right)$.

$$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\\x=m\end{array}\right.$$

Do đó điều kiện cần và đủ để $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $x\in\left[-2;2\right]$ là $m\in\left[-2;2\right]$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;-1;0;1;2\right\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|-x^4+8x^2+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;\ 3\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Ta có $y=f\left(x\right)=\left|-x^4+8x^2+m\right|=\left|x^4-8x^2-m\right|=\left|\left(x^2-4\right)^2-16-m\right|$.

Đặt $t=\left(x^2-4\right)^2$, vì $x\in\left[-1;\ 3\right]$, suy ra $t\in\left[0;\ 25\right]$.

Khi đó $y=g\left(t\right)=\left|t-16-m\right|$.

Ta có $\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=\min\limits_{[-0;25]} g\left(t\right)=\min\left\{\left|m-9\right|,\left|m+16\right|\right\}$.

Nếu $m-9\ge 0\Leftrightarrow m\ge 9$, khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)=m-9\ge 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)\right)=0$, khi $m=9$.

Nếu $m+16\ge 0\Leftrightarrow m\ge -16$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f\left(x\right)=-m-16\ge 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)\right)=0$, khi $m=-16$.

Nếu $\left(m-9\right)\left(m+16\right)<0\Leftrightarrow -16<m<9$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f\left(x\right)=0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)\right)=0$.

Vậy $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f\left(x\right)\right)=0$, khi $-16\le m\le 9$.

Gv : Lương Văn Huy - ĐĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^4-38x^2+120x+4m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26 . **B.** 13. **C.** 14. **D.** 27 .

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất bằng

A. 60. **B.** 45. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 4. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2 .

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|2x^3-3x^2+m\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 33. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 7.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^4-2x^2+a\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\ln x-2x^2+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.D	2.A	3.C	4.B	5.A	6.C	7.B	8.	9.	10.

Dạng 7: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ .Tìm m để $\max\limits_{[a;b]}y\le h.\min\limits_{[a;b]}y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max=$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]}f(x)=K;\qquad\min\limits_{[a;b]}f(x)=k\ (K>k).$

TH1: $\left|K+m\right|\le h\left|k+m\right|\xrightarrow[K+m\ \text{cungdau}\ k+m]{|K+m|\ge|k+m|}m\in S_1.$

TH2: $\left|k+m\right|\le h\left|K+m\right|\xrightarrow[K+m\ \text{cungdau}\ k+m]{|k+m|\ge|K+m|}m\in S_2.$

Vậy $m\in S_1\cup S_2.$

BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 43. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]}y+\max\limits_{[-1;2]}y=10$

A. 1. **B.** 5 . **C.** 3 . **D.** 2 .

Lời giải

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Xét hàm số $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

$$u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = 1 \in [-1;2] \\ x = \dfrac{1}{2} \in [-1;2] \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = \max\limits_{[-1;2]} u = \max\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\dfrac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(-1) = u(2) = a + 4. \\ m = \min\limits_{[-1;2]} u = \min\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\dfrac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(0) = u(1) = a \end{array}\right.$$

+) Trường hợp 1: Nếu $m \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 0 \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = m; \max\limits_{[-1;2]} y = M$.

Ta có điều kiện $\left\{\begin{array}{l} a \ge 0 \\ a + a + 4 = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 3$.

+) Trường hợp 2: Nếu $M \le 0 \Leftrightarrow a \le -4$.

Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y = -M; \max\limits_{[-1;2]} y = -m$.

Ta có điều kiện $\left\{\begin{array}{l} a \le -4 \\ -(a+4) - a = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = -7$.

+) Trường hợp $3: m < 0 < M \Leftrightarrow -4 < a < 0$.

Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y = 0; \max\limits_{[-1;2]} y = \max\{|a+4|, |a|\} = \max\{a+4; -a\} < 10$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} y + \max\limits_{[-1;2]} y < 0 + 10 = 10$.

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn đề bài là $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -7 \end{array}\right.$.

Câu 44. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 + ax - 4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M + 2m = 7$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 + ax - 4}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2} > 0 \ \forall x \in [1;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;4]$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \min\limits_{[1;4]} g(x) = g(1) = a - 3 \\ \max\limits_{[1;4]} g(x) = g(4) = a + 3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > 3$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} |a-3| = a - 3 \\ |a+3| = a + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = \min\limits_{[1;4]} |g(x)| = a - 3 \\ M = \max\limits_{[1;4]} |g(x)| = a + 3 \end{array}\right.$.

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow a + 3 + 2(a - 3) = 7 \Leftrightarrow a = \dfrac{10}{3}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Trường hợp 2: $a+3<0\Leftrightarrow a<-3$.

Ta có $\begin{cases}|a-3|=-a+3\\|a+3|=-a-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a-3\\M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a+3\end{cases}$.

Khi đó $M+2m=7\Leftrightarrow -a+3+2(-a-3)=7\Leftrightarrow a=-\dfrac{10}{3}$.

Trường hợp 3: $a-3\le 0\le a+3\Leftrightarrow -3\le a\le 3$.

Ta có $\begin{cases}|a+3|=a+3\\|a-3|=-a+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=0\\M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=\max\{a+3;-a+3\}\end{cases}$

Khi đó $M+2m=7\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a+3+2.0=7\\a+3\ge -a+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\a\ge 0\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}-a+3+2.0=7\\-a+3>a+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\a<0\end{cases}\right]\Leftrightarrow a=\pm 4$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a=\pm\dfrac{10}{3}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$.

A. 4. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta xét $f(x)=x^4-2x^3+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x)=4x^3-6x^2$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;1]\\x=\dfrac{3}{2}\notin[0;1]\end{array}\right.$.

$f(0)=m;\ f(1)=m-1$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m\le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10\Leftrightarrow(1-m)+2(-m)=10\Leftrightarrow m=-3$.

- Nếu $m\ge 1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=m-1$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10\Leftrightarrow m+2(m-1)=10\Leftrightarrow m=4$.

- Nếu $\dfrac{1}{2}\le m<1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10\Leftrightarrow m=10$.

- Nếu $0<m<\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10\Leftrightarrow 1-m=10\Leftrightarrow m=-9$.

Do đó có hai giá trị $m=-3$ và $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$ là 1.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17$.

A. $m\in\{9;-5;29\}$. **B.** $m\in\left\{9;-5;\frac{-5}{3}\right\}$. **C.** $m\in\{9;-5\}$. **D.** $m\in\{9;-5;5\}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+m$

Ta có $y'=3x^2-6x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;3]\\x=2\in[1;3]\end{array}\right.$

Khi đó

$$\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} y=\min\{y(1);y(3);y(2)\}=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4\\ \max\limits_{[1;3]} y=\max\{y(1);y(3);y(2)\}=\max\{m-2;m;m-4\}=m\end{cases}$$

+) Nếu $m-4\ge 0\Leftrightarrow m\ge 4\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=m-4\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17\Leftrightarrow 3m-2(m-4)=17\Leftrightarrow m=9$.

+) Nếu $m\le 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=-m\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17\Leftrightarrow 3(4-m)+2m=17\Leftrightarrow m=-5$.

+) Nếu $0<m<2\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17\Leftrightarrow 3(4-m)=17\Leftrightarrow m=\frac{-5}{3}$.

+) Nếu $2\le m<4\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17\Leftrightarrow 3m=17\Leftrightarrow m=\frac{17}{3}$.

Vậy $m\in\{9;-5\}$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|+\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=6$ là

A. -16. **B.** -9. **C.** 16. **D.** 144.

Lời giải

Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x+m$ trên $[0;2]$

Ta có: $f'(x)=3x^2-3$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}f(0)=m\\f(1)=-2+m\\f(2)=2+m\end{array}\right.$ suy ra $\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{[0;2]}f(x)=-2+m\\\max\limits_{[0;2]}f(x)=2+m\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $(-2+m)(2+m)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6\Leftrightarrow|-2+m|+|2+m|=6$.

Nếu $m<-2$ ta có: $2-m-2-m=6\Leftrightarrow m=-3$.

Nếu $m>2$ ta có: $-2+m+2+m=6\Leftrightarrow m=3$.

Trường hợp 2: $(-2+m)(2+m)\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=0$ và

$\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6\Leftrightarrow\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|m+2|\ge|-2+m|\\|m+2|=6\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}|m+2|\le|-2+m|\\|-2+m|=6\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|m+2|\ge|-2+m|\\m=4\vee m=-8\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}|m+2|\le|-2+m|\\m=-4\vee m=8\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-4\end{array}\right.)$$

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là: $-3.3=-9$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $2\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+3\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=6$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta thấy hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(0)=\dfrac{m}{2}$; $f(1)=\dfrac{m+1}{3}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-m$.

Trường hợp 1: Nếu $0\le -m\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\left|\dfrac{m}{2}\right|;\left|\dfrac{m+1}{3}\right|\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Do đó $2\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+3\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\left|\dfrac{m}{2}\right|=6\\2\left|\dfrac{m+1}{3}\right|=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 6\\m=8\\m=-10\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: Nếu $-m<0\Leftrightarrow m>0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $\frac{m}{2}-\frac{m+1}{3}=\frac{m-2}{6}$ suy ra $\begin{cases}\frac{m}{2}\ge\frac{m+1}{3} & \text{khi } m\ge 2\\ \frac{m}{2}<\frac{m+1}{3} & \text{khi } 0<m<2\end{cases}$.

+ Với $m\ge 2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow m+m+1=6\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}.$$

+ Với $0<m<2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow 2.\frac{m+1}{3}+3.\frac{m}{2}=6\Leftrightarrow m=\frac{32}{13}.$$

Trường hợp 3: Nếu $-m>1\Leftrightarrow m<-1$ thì

$$\max_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\};\ \min_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\}.$$

Ta có $-\frac{m}{2}+\frac{m+1}{3}=\frac{-m+2}{6}>0,\forall m<-1$ suy ra $-\frac{m}{2}>-\frac{m+1}{3}$ khi $m<-1$. Do đó:

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow 2.\frac{-m}{2}+3.\frac{-m-1}{3}=6\Leftrightarrow m=-\frac{7}{2}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]}|f(x)|+2\min_{[0;2]}|f(x)|\ge 4$. Hỏi trong đoạn $[-30;30]$ tập S có bao nhiêu số nguyên?

47) **A.** 53. **B.** 52. **C.** 55. **D.** 54.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Có $f'(x)=\frac{4+m}{(x+2)^2}$

+ Nếu $m=-4$ thì $f(x)=2$ thỏa mãn $\max_{[0;2]}|f(x)|+2\min_{[0;2]}|f(x)|\ge 4$.

+ Xét $m\ne -4$. Ta có $f(0)=-\frac{m}{2};\ f(2)=\frac{4-m}{4}$, giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục hoành là $\left(\frac{m}{2};0\right)$.

- TH1: $0\le\frac{m}{2}\le 2\Leftrightarrow 0\le m\le 4$. Khi đó $\min_{[0;2]}|f(x)|=0$ và $\max_{[0;2]}|f(x)|=\frac{4-m}{4}$ hoặc $\max_{[0;2]}|f(x)|=\frac{m}{2}$. Theo giả thiết ta phải có $\left[\begin{array}{l}\frac{4-m}{4}\ge 4\\ \frac{m}{2}\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -12\\ m\ge 8\end{array}\right.$ (loại).

- TH2: $\frac{m}{2}\notin[0;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>4\end{array}\right.$. Khi đó:

+ Xét $-4<m<0$: hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0)=-\frac{m}{2}>0;\ f(2)=\frac{4-m}{4}>0$ nên

$\max_{[0;2]}|f(x)|+2\min_{[0;2]}|f(x)|\ge 4\Leftrightarrow\frac{4-m}{4}+2\left(-\frac{m}{2}\right)\ge 4\Leftrightarrow m\le-\frac{12}{5}$. Vậy $-4<m\le-\frac{12}{5}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

+ Xét $m<-4$: hàm số $f(x)$ nghịch biến, hơn nữa $f(0)=-\frac{m}{2}>0;\ f(2)=\frac{4-m}{4}>0$ nên

$\max\limits_{[0;2]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;2]}|f(x)|\ge 4\Leftrightarrow -\frac{m}{2}+2\left(\frac{4-m}{4}\right)\ge 4\Leftrightarrow m\le -2$. Vậy $m<-4$.

+Xét $m>4$: hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0)=-\frac{m}{2}<f(2)=\frac{4-m}{4}<0$ nên

$\max\limits_{[0;2]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;2]}|f(x)|\ge 4\Leftrightarrow \frac{m}{2}+2\left(\frac{m-4}{4}\right)\ge 4\Leftrightarrow m\ge 6$. Vậy $m\ge 6$.

Tóm lại: $m\in S=\left(-\infty;\frac{-12}{5}\right]\cup[6;+\infty)$. Nên trong $[-30;30]$, tập S có 53 số nguyên.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+3m+1$ (với m là tham số thực)

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\sqrt{\max\limits_{[0;1]}|f(x)|}+\sqrt{\min\limits_{[0;1]}|f(x)|}=2$. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6

Lời giải

*) Nếu $m=0$, thì $f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta có $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$,

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1\Rightarrow\sqrt{\max\limits_{[0;1]}|f(x)|}+\sqrt{\min\limits_{[0;1]}|f(x)|}=2\Rightarrow m=0$ thỏa mãn bài toán

*) Nếu $m\ne 0$ ta có $f'(x)=3mx^2-6mx=3mx(x-2)$

Vì $x(x-2)\le 0,\forall x\in[0;1]$ và $m\ne 0$ nên $f(x)$ là hàm đơn điệu trên $[0;1]$

Ta có $f(0)=3m+1;\ f(1)=m+1$

TH1: $f(0).f(1)\ge 0\Leftrightarrow(3m+1)(m+1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge-\frac{1}{3}\\ m\le -1\end{array}\right.$

Ta có $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\min\{|3m+1|;|m+1|\}$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\{|3m+1|;|m+1|\}$

Nên $\sqrt{\max\limits_{[0;1]}|f(x)|}+\sqrt{\min\limits_{[0;1]}|f(x)|}=2\Leftrightarrow\sqrt{|3m+1|}+\sqrt{|m+1|}=2$ (*)

+) Với $m\ge-\frac{1}{3}$, ta có (*) $\Leftrightarrow\sqrt{3m+1}+\sqrt{m+1}=2\Leftrightarrow m=0$ (loại vì không thỏa $m\ne 0$)

+) Với $m\le -1$, ta có (*) $\Leftrightarrow\sqrt{-3m-1}+\sqrt{-m-1}=2\Leftrightarrow -4m-2+2\sqrt{3m^2+4m+1}=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{3m^2+4m+1}=2m+3\Leftrightarrow m=-4+2\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

TH2: $f(0).f(1)<0\Leftrightarrow(3m+1)(m+1)<0\Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{3}$

Ta có $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\{|3m+1|;|m+1|\}$

Nên $\sqrt{\max\limits_{[0;1]}|f(x)|}+\sqrt{\min\limits_{[0;1]}|f(x)|}=2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{|3m+1|}=2\\ |3m+1|\ge|m+1|\end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{|m+1|}=2\\ |3m+1|<|m+1|\end{array}\right.$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ |3m+1| \geq |m+1| \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-5 \end{array}\right. \\ |3m+1| < |m+1| \end{cases}$ loại vì không thỏa mãn $-1 < m < -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $S=\left\{0;-4+2\sqrt{2}\right\}$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x^2+(m-2)x+2-m}{x-1}\right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;3]} f(x)+2\max\limits_{[2;3]} f(x)=\dfrac{7}{4}$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=\left|\dfrac{x^2+(m-2)x+2-m}{x-1}\right|=\left|\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}+m\right|$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$, ta có

$g'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\geq 0, \forall x\in[2;3]$ ($g'(x)=0$ tại $x=2$). Suy ra, tập giá trị của $g(x)$ trên $[2;3]$ là đoạn $\left[g(2);g(3)\right]=\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$.

Đặt $t=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, hàm số $f(x)$ trên $[2;3]$ trở thành hàm số $h(t)=|t+m|$ xét trên $\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$.

Khi đó:

$\min\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{\left[2;\frac{5}{2}\right]} h(t)$;

$\max\limits_{[2;3]} f(x)=\max\limits_{\left[2;\frac{5}{2}\right]} h(t)=\max\left\{|m+2|;\left|m+\dfrac{5}{2}\right|\right\}=\dfrac{\left|(m+2)+\left(m+\dfrac{5}{2}\right)\right|+\left|(m+2)-\left(m+\dfrac{5}{2}\right)\right|}{2}=\left|m+\dfrac{9}{4}\right|+\dfrac{1}{4}$

*) Xét $(m+2)\left(m+\dfrac{5}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{5}{2};-2\right]$ (1)

Khi đó, $\min\limits_{[2;3]} f(x)=0$. Suy ra

$\min\limits_{[2;3]} f(x)+2\max\limits_{[2;3]} f(x)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\left|2m+\dfrac{9}{2}\right|+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\left|2m+\dfrac{9}{2}\right|=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow\left|2m+\dfrac{9}{2}\right|=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{13}{8} \\ m=-\dfrac{23}{8} \end{array}\right.$ (không thỏa mãn (1))

*) Xét $(m+2)\left(m+\dfrac{5}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{5}{2} \\ m>-2 \end{array}\right.$ (2). Khi đó

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\min_{[2;3]} f(x)=\min_{\left[1;\frac{5}{2}\right]} h(t)=\min\left\{\left|m+2\right|;\left|m+\frac{5}{2}\right|\right\}=\frac{\left|(m+2)+\left(m+\frac{5}{2}\right)\right|-\left|(m+2)-\left(m+\frac{5}{2}\right)\right|}{2}=\left|m+\frac{9}{4}\right|-\frac{1}{4}$$

Suy ra

$$\min_{[2;3]} f(x)+2\max_{[2;3]} f(x)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\left|m+\frac{9}{4}\right|-\frac{1}{4}+2\left|m+\frac{9}{4}\right|+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\left|m+\frac{9}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{m}=-\frac{7}{4}\\ \mathrm{m}=-\frac{11}{4}\end{array}\right.\left(\text{thỏa m}\cdot\text{n}(2)\right).$$

Vậy $S=\left\{-\frac{7}{4};-\frac{11}{4}\right\}$. Suy ra, số phần tử của tập S bằng 2.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{m}{x-2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[0;1]}|f(x)|+\max_{[0;1]}|f(x)|=4$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{9}{32}$. **C.** 72. **D.** $\frac{128}{9}$.

Lời giải

48) Chọn D

49) + Trường hợp 1: $m=0$, khi đó $f(x)=0,\ \forall x\neq 2$ suy ra $\min_{[0;1]}|f(x)|+\max_{[0;1]}|f(x)|=0$. Vậy $m=0$ (loại).

50) + Trường hợp 2: $m\neq 0$, khi đó $y=f'(x)=\frac{-m}{(x-2)^2}\neq 0,\ \forall x\in[0;1]$ suy ra hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên $[0;1]$.

51) Ta có $\min_{[0;1]} f(x).\max_{[0;1]} f(x)=\frac{m^2}{2}>0,\ \forall m\neq 0$.

52) suy ra $\min_{[0;1]}|f(x)|=\min\{|f(0)|;|f(1)|\}=\min\left\{\left|\frac{m}{2}\right|;|m|\right\}$ và

53) $\max_{[0;1]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(1)|\}=\max\left\{\left|\frac{m}{2}\right|;|m|\right\}$.

54) Khi đó $\min_{[0;1]}|f(x)|+\max_{[0;1]}|f(x)|=4\Leftrightarrow\left|\frac{m}{2}\right|+|m|=4\Leftrightarrow\frac{3}{2}|m|=4\Leftrightarrow m=\pm\frac{8}{3}$.

55) Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của S là $\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{128}{9}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M\le 2m$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 2. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+\frac{a}{3}\right|$ trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-7;4]$ sao cho $M\le 2m$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 3. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$. Gọi α,β lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Số giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-30;30]$ sao cho $\alpha\le 2\beta$ là

A. 56. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 57.

Câu 4. Cho hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$. Gọi α,β lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;2]$. Số giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ sao cho $\alpha\le 2\beta$ là

A. 3209. **B.** 3215. **C.** 3211. **D.** 3213.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.B	2.A	3.B	4.D	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Dạng 8: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha \Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta \Leftrightarrow |m+K|*|m+k|=\beta$.

Câu 1. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa=12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** −2. **D.** 1

Câu 2. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng 300.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 3. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng 276.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 4. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y=10$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.A	2.A	3.D	4.A	5.	6.	7.	8.	9.	10.

TỔNG QUAN

Câu 1: Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** −4. **D.** 2.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\left|8\cos^4 x+a\cos^2 x+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b=-7$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=-8$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định **đúng ?**

A. $a<0$, $b<0$ **B.** $a>0$, $b>0$ **C.** $a<0$, $b>0$ **D.** $a>0$, $b<0$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c\in[1;3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đề kiểm tra (Xem ở phần sau)

Tài liệu có sử dụng nguồn bài tập sưu tập trên toàn quốc từ các thầy cô Strong Vd – VDC , nhóm VDC, nhóm giáo viên Toán và tùm lum các nguồn bài tập khác.

Dạng 6: Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất vào giải toán.

a. Phương pháp:

- Phương trình $f(x)=g(m)$ có nghiệm trên $\mathbf{D}\Leftrightarrow \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)\le g(m)\le \max\limits_{\mathbf{D}} f(x)$
- Bất phương trình $f(x)\ge g(m)$ có nghiệm trên $\mathbf{D}\Leftrightarrow g(m)\le \max\limits_{\mathbf{D}} f(x)$
- Bất phương trình $f(x)\le g(m)$ có nghiệm trên $\mathbf{D}\Leftrightarrow g(m)\ge \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)$
- Bất phương trình $f(x)\ge g(m)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbf{D}\Leftrightarrow g(m)\le \min\limits_{\mathbf{D}} f(x)$
- Bất phương trình $f(x)\le g(m)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbf{D}\Leftrightarrow g(m)\ge \max\limits_{\mathbf{D}} f(x)$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 33. ***(THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An – Lần 3)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau đây có nghiệm: $\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}\ge m$?

A. $(-\infty;3]$. **B.** $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right]$. **C.** $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right)$.

Giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}$, bất phương trình trở thành $f(x)\ge m$

Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\max\limits_{\mathbf{D}} f(x)\ge m$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}$ có tập xác định $\mathbf{D}=[-5;4]$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Khi đó $f(-5)=0; f(4)=0; f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\sqrt{2}\Rightarrow \max\limits_{[-5;4]} f(x)=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow m\le 3\sqrt{2}\Rightarrow m\in\left(-\infty;3\sqrt{2}\right]$. Chọn đáp án B.

Ví dụ 34. ***(THPT Xuân Trường – Nam Định – Lần 1)*** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x+\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm?

A. $-2<m<2$. **B.** $-2<m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\le m\le 2$. **D.** $-2\le m\le 2\sqrt{2}$.

Giải.

Đặt $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ có tập xác định $\mathbf{D}=[-2;2]$

Bất phương trình trở thành $f(x)=m$, bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

Gv. Lương Văn Huy - NBH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\min_D f(x) \le m \le \max_D f(x)$$

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in [-2;2]$

Khi đó $f(-2) = -2; f(2) = 2; f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = -2 \\ \max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow -2 \le m \le 2\sqrt{2}$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 35. ***(Sở GD và ĐT Phú Yên)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 - m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$?

A. $m < 5$. **B.** $m \le 5$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \le 1$.

Giải.

Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, bất phương trình trở thành $f(x) \ge m$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[-1;1]} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$ khi đó $\begin{cases} f(-1) = 3; f(1) = 5 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow m \le 1$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 36. ***(THPT Thường Tín – Hà Nội)*** Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $\log_3 x + \log_2(x+1) > m$ có nghiệm với mọi $x \in [1;3]$?

A. $m < 1$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \ge 1$.

Giải.

Đặt $f(x) = \log_3 x + \log_2(x+1)$, bất phương trình trở thành $f(x) > m$

Bất phương trình có nghiệm với mọi $[1;3] \Leftrightarrow m < \min\limits_{[1;3]} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x + \log_2(x+1)$ trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{1}{(x+1)\ln 2}$

Với mọi $x \in [1;3]$ ta có $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;3]$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = 1 \Rightarrow m < 1$. Chọn đáp án A.

Ví dụ 37. ***(THPT Hòa Bình – Tp Hồ Chí Minh)*** Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + x + m^2 - 4m + 1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$?

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{10}{3}\right]$.

Giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + x + m^2 - 4m + 1$ có $y' = x^2 - 2mx + 1$

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3] \Leftrightarrow y' \ge 0$ với mọi $x \in [1;3]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 \ge 0$ với mọi $x \in [1;3] \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x} \ge m$ với mọi $x \in [1;3]$

Đặt $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}$ bất phương trình trở thành $g(x) \ge m$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[1;3]}g(x)$

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[1;3]\\x=1\in[1;3]\end{array}\right.$

Khi đó $g(1)=1;g(3)=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\min\limits_{[1;3]}g(x)=g(1)=1\Rightarrow m\le1$. Chọn đáp án A.

Ví dụ 38. ***(Sở GD và ĐT Tuyên Quang)*** Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$: $\log_3^2x+\sqrt{\log_3^2x+1}-2m-5=0$?

A. $m\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$ **B.** $m\in[2;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;0)$ **D.** $m\in[-2;0]$

Giải.

Xét phương trình $\log_3^2x+\sqrt{\log_3^2x+1}-2m-5=0$ trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\log_3^2x+1\right)+\sqrt{\log_3^2x+1}-2m-6=0$

Đặt $\sqrt{\log_3^2x+1}=u$ với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow u\in[1;2]$

Phương trình trở thành $u^2+u-2m-6=0\Leftrightarrow u^2+u-6=2m\ \ (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm trên $[1;2]\Leftrightarrow\min\limits_{[1;2]}f(u)\le2m\le\max\limits_{[1;2]}f(u)$

Ta có $f'(u)=2u+1>0$ với mọi $u\in[1;2]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{[1;2]}f(u)=f(1)=-4\\\max\limits_{[1;2]}f(u)=f(2)=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow-4\le2m\le0\Leftrightarrow-2\le m\le0\Rightarrow m\in[0;2]$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 39. ***(THPT Chuyên Thái Bình – Lần 5)*** Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2-4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+4m-4=0$?

A. $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$. **B.** $m\ge-3$. **C.** $-2\le m\le\dfrac{7}{3}$. **D.** $m\ge-2$.

Giải.

Đặt $u=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ ta có $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow u\in[-1;1]$ ta được phương trình

$4(m-1)u^2-4(m-5)u+4m-4=0\Leftrightarrow u^2-5u+1=m\left(u^2-u+1\right)\ \ (*)$

Với $u\in[-1;1]\Rightarrow(*)\Leftrightarrow g(u)=\dfrac{u^2-5u+1}{u^2-u+1}=m\ \ (1)$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm thuộc $[-1;1]\Leftrightarrow\min\limits_{[-1;1]}g(u)\le m\le\max\limits_{[-1;1]}g(u)$

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{u^2-5u+1}{u^2-u+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $g'(u)=\dfrac{4u^2-4}{\left(u^2-u+1\right)^2}$

$g'(u)=0\Leftrightarrow\dfrac{4u^2-4}{\left(u^2-u+1\right)^2}=0\Leftrightarrow u=\pm1\in[-1;1]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}g(-1)=\dfrac{7}{3}\\g(1)=-3\end{array}\right.$

$\Rightarrow\min\limits_{[-1;1]}g(u)=g(1)=-3$ và $\max\limits_{[-1;1]}g(u)=g(-1)=\dfrac{7}{3}\Rightarrow-3\le m\le\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án A.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 40. ***(Sở GD và ĐT Bà Rịa Vũng Tàu)*** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $y \le 0$ và $x^2 + x = y + 6$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = xy - 5x + 2y + 27$. Tính tổng $S = M + m$?

A. $S = 52$. **B.** $S = 59$. **C.** $S = 58$. **D.** $S = 43$.

Giải.

Từ giả thiết $x^2 + x = y + 6 \Rightarrow y = x^2 + x - 6$ mà $y \le 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-3;2]$

Thay vào T ta được $T = x(x^2 + x - 6) - 5x + 2(x^2 + x - 6) + 27 = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$

Ta có $T' = 3x^2 + 6x - 9 \Rightarrow T' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-3;2] \\ x = -3 \in [-3;2] \end{array}\right.$

$\Rightarrow T(-3) = 42; T(1) = 10; T(2) = 17 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = \max\limits_{[-3;2]} T = T(-3) = 42 \\ m = \min\limits_{[-3;2]} T = T(1) = 10 \end{array}\right. \Rightarrow M + m = 52$.

Chọn đáp án A.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Câu 1. ***(Sở GD và ĐT Hà Nội)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 1$ trên đoạn $[-3;2]$?

A. $\min\limits_{[-3;2]} y = 8$. **B.** $\min\limits_{[-3;2]} y = -1$. **C.** $\min\limits_{[-3;2]} y = 3$. **D.** $\min\limits_{[-3;2]} y = -3$.

Câu 2. ***(Sở GD và ĐT Hà Nội)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$. Tính $M + m$?

A. $M + m = 16$. **B.** $M + m = 18$.

C. $M + m = \dfrac{16 + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{10}}{2}$. **D.** $M + m = \dfrac{12 + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{10}}{2}$.

Câu 3. ***(THPT Chuyên Lam Sơn)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-5}{x-3}$ trên đoạn $[4;7]$ lần lượt là?

A. 1 và $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$ và -1. **C.** 1 và $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. ***(THPT Chuyên Lam Sơn)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4x + 5 + \dfrac{4}{x}$ trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2};3\right]$ là?

A. 13. **B.** -5. **C.** 15. **D.** -3.

Câu 5. ***(THPT Chuyên Lam Sơn)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1;1]$ là?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6. ***(THPT Lý Thái Tổ Lần 4)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ là?

A. 4. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 7. ***(THPT Lý Thái Tổ Lần 4)*** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$?

A. $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$. **B.** $\max\limits_{[2;4]} y = 6$. **C.** $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{11}{3}$. **D.** $\max\limits_{[2;4]} y = 7$.

Câu 8. ***(THPT Trần Hưng Đạo)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ bằng?

A. -1. **B.** 6. **C.** $\dfrac{23}{27}$. **D.** 1.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 9. ***(THPT Trần Hưng Đạo)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là?

A. 1. **B.** $4 - 2\ln 2$. **C.** e . **D.** $-2\ln 2$.

Câu 10. ***(THPT Kim Sơn A)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{7 - 4x}$ trên đoạn $[-1;1]$?

A. $\min\limits_{[-1;1]} y = \sqrt{3}$. **B.** $\min\limits_{[-1;1]} y = \sqrt{11}$. **C.** $\min\limits_{[-1;1]} y = 0$. **D.** $\min\limits_{[-1;1]} y = 3$.

Câu 11. ***(THPT Chuyên Phan Bội Châu Lần 2)*** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ là?

A. $2 - \sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2 + \sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 12. ***(THPT Đồng Đậu Lần 3)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ bằng?

A. 2 . **B.** $\sqrt{3} - 1$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 13. ***(THPT Đồng Đậu Lần 3)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$. Giá trị $M - m$ bằng?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4 .

Câu 14. ***(THPT Đồng Đậu Lần 3)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là?

A. 51 và 1. **B.** 51 và -3. **C.** 1 và -1. **D.** 51 và -1.

Câu 15. ***(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – Lần 1)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ là?

A. 4. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 16. ***(THPT Nguyễn Khuyến – TP Hồ Chí Minh)*** Hàm số $y = \cos 2x - 2\cos x + 2$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ là?

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $2 - \sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 17. ***(THPT Hà Trung)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên đoạn $[1;2]$?

A. $\min\limits_{[1;2]} y = 2e^2$. **B.** $\min\limits_{[1;2]} y = e^2$. **C.** $\min\limits_{[1;2]} y = \frac{e}{2}$. **D.** $\min\limits_{[1;2]} y = e$.

Câu 18. ***(THPT Chuyên Lam Sơn)*** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x$ trên đoạn $[0;2]$?

A. $\max\limits_{[0;2]} y = 1$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y = -2$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} y = 0$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y = 2$.

Câu 19. ***(THPT Chuyên ĐH Khoa Học Huế – Lần 1)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$?

A. $\sqrt{10}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $-3\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

Câu 20. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+m^2}$ trên đoạn $[2;5]$ bằng $\frac{1}{6}$?

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = \pm 3$. **D.** $m = 4$.

Câu 21. Gọi $T = [a;b]$ là tập giá trị của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ với $x \in [2;4]$. Khi đó $b - a$?

A. 6. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 22. Trên đoạn $[-1;2]$. Hàm số $y = -x - \frac{4}{x}$.

A. Có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 2.
B. Có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.
C. Không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất là 2.
D. Không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 23. ***(Tạp chí THTT – Lần 6)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;1]$ là?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 24. ***(Tạp chí THTT – Lần 4)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hám số $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó?

A. $M=\dfrac{1}{e};m=0$. **B.** $M=e;m=0$. **C.** $M=e;m=\dfrac{1}{e}$. **D.** $M=e;m=1$.

Câu 25. ***(Tạp chí THTT – Lần 5)*** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$. Ký hiệu $M=\max\limits_{[0;2]}y$ và $m=\min\limits_{[0;2]}y$. Khi đó giá trị $M-m$ bằng?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** Đáp án khác.

Câu 26. ***(THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Lần 1)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ trên đoạn $[1;3]$ là?

A. $\max\limits_{[1;3]}y=3;\min\limits_{[1;3]}y=1$. **B.** $\max\limits_{[1;3]}y=\dfrac{2}{7};\min\limits_{[1;3]}y=0$

C. $\max\limits_{[1;3]}y=1;\min\limits_{[1;3]}y=0$. **D.** $\max\limits_{[1;3]}y=0;\min\limits_{[1;3]}y=-\dfrac{2}{7}$

Câu 27. Trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hàm số $f(x)=x^3+x-\cos x-4$.

A. Có giá trị lớn nhất là -5, không có giá trị nhỏ nhất.
B. Không có giá trị lớn nhất, có giá trị nhỏ nhất là -5.
C. Có giá trị lớn nhất là -5, giá trị nhỏ nhất là -5.
D. Không có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 28. Xét hàm số $y=\sqrt{4-3x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.

B. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x=1$, giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ khi $x=-1$.

Câu 29. Khi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$, một học sinh làm như sau:

(1). Tập xác định $D=[-1;4]$ và $y'=\dfrac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$.

(2). Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1;x=4$ và $\forall x\in(-1;4):y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

(3). Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{5}{2}$ khi $x=\dfrac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x=-1;x=4$.

Cách giải trên:

A. Sai ở bước (3). **B**. Sai từ bước (1).

C. Sai từ bước (2). **D**. Cả ba bước $(1),(2),(3)$ đều đúng.

Câu 30. Khi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{2-x^2}$, một học sinh làm như sau:

(1). Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ và $y'=\dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}$.

(2). $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\2-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

(3). Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 khi $x=1$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\sqrt{2}$ khi $x=-\sqrt{2}$.

Cách giải trên:

A. Sai từ bước (1). **B**. Sai từ bước (2).

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

C. Sai ở bước (3). **D**. Cả ba bước $(1),(2),(3)$ đều đúng.

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ lần lượt là:

A. 0 và 2. **B**. $-\sqrt{2}$ và $\sqrt{2}$. **C**. -2 và 2. **D**. 0 và $\sqrt{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Câu 33. Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M-m$ bằng:

A. -5. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 34. Trên đoạn $[-1;1]$, hàm số $y=-\dfrac{4}{3}x^3-2x^2-x-3$

A. Có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất tại $x=1$.
B. Có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.
C. Có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và không có giá trị lớn nhất.
D. Không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Câu 35. ***(Đề minh họa lần 1 – 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=6$. **B**. $\min\limits_{[2;4]} y=-2$. **C**. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. **D**. $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$.

Câu 36. Trong các số dưới đây, đâu là số ghi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+4x-5\right|$ trên đoạn $[-6;6]$?

A. 0. **B**. 9. **C**. 55. **D**. 110.

Câu 37. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|-x$ trên đoạn $[-4;4]$ bằng:

A. 2. **B**. 17. **C**. 34. **D**. 68.

Câu 38. Cho hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$. Với $x>0$ hàm số:

A. Có giá trị nhỏ nhất là -1. **B**. Có giá trị nhỏ nhất là 0.
C. Có giá trị nhỏ nhất là 3. **D**. Không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 39. Tập giá trị của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ với $x\in[3;5]$ là:

A. $\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{526}{15}\right]$. **B**. $\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{142}{5}\right]$. **C**. $\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{127}{5}\right]$. **D**. $\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{526}{15}\right]$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3 x-\dfrac{9}{2}\cos^2 x+3\cos x+\dfrac{1}{2}$ là:

A. 1. **B**. -24. **C**. -12. **D**. -9.

Câu 41. Khi tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x$. Một học sinh làm như sau

(I). Với mọi x ta đều có $0\le\sin^4 x\le 1$ (1) và $0\le\cos^2 x\le 1$ (2).

(II). Cộng (1) và (2) theo vế ta được $0\le\sin^4 x+\cos^2 x\le 2$.

(III). Vậy **GTLN** của hàm số là 2 và **GTNN** của hàm số là 0.

Cách giải trên

A. Sai từ bước (I). **B**. Sai từ bước (II).
C. Sai từ bước (III). **D**. Cả ba bước (I), (II) và (III) đều sai.

Câu 42. Giá trị nào sau đây của x để tại đó hàm số $y=x^3-3x^2-9x+28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 43. Hàm số nào sau đây không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$?

A. $y=x^3+2$. **B.** $y=x^4+x^2$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=-x+1$.

Câu 44. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ trên $[0;1]$ bằng:

A. $\dfrac{1+m^2}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1-m^2}{2}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$ trên $[-1;0]$ bằng:

A. $\dfrac{m^2-1}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1-m^2}{2}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 46. Trên đoạn $[-1;1]$, hàm số $y=-x^3-3x^2+a$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 thì a bằng:

A. $a=2$. **B.** $a=6$. **C.** $a=0$. **D.** $a=4$.

Câu 47. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng -2?

A. $m=4$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=1$.

Câu 48. Đâu là số ghi giá trị của m trong các số dưới đây, nếu 10 là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^2+4x-m$ trên đoạn $[-1;3]$?

A. 3. **B.** -6. **C.** -7. **D.** -8.

Câu 49. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2?

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$.

Câu 50. ***(Sở GD và ĐT Hưng Yên – Lần 1)*** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng đinh đúng?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 51. ***(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$ là?

A. 40. **B.** 8. **C.** -41. **D.** 15.

Câu 52. ***(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+2x}$ là?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 53. ***(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x-5\right|$ trên đoạn $[-2;6]$ là?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 54. ***(THPT Thăng Long – Hà Nội – Học kỳ I)*** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2\ln x=m$ có nghiệm trên đoạn $\left[e^{-2};e^2\right]$?

CVL Lương Văn Huy TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $-2<m<2$. **B.** $-\frac{2}{e^4}\le m\le 2e^4$. **C.** $m\le 2e^4$. **D.** $-\frac{1}{2e}\le m\le 2e^4$.

Câu 55. ***(THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Học kỳ I)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}.8^x$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng?

A. $\frac{50}{81}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 56. ***(THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Học kỳ I)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}$. Có bao nhiêu số nguyên nằm giữa m và M ?

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 0.

Câu 57. ***(THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Học kỳ I)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin 2x-5x+1$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ bằng?

A. $3-\frac{5\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $1-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 58. ***(Sở GD và ĐT Ninh Thuận – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-3x^2+2$ trên đoạn $[0;2]$ là?

A. $\max\limits_{[0;2]} y=6;\min\limits_{[0;2]} y=-\frac{1}{4}$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y=4;\min\limits_{[0;2]} y=\frac{1}{4}$.

C. $\max\limits_{[0;2]} y=5;\min\limits_{[0;2]} y=2$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y=5;\min\limits_{[0;2]} y=-\frac{1}{2}$.

Câu 59. ***(Sở GD và ĐT Ninh Thuận – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{5-x^2}+2x$ là?

A. 5. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $-2\sqrt{5}$. **D.** 6.

Câu 60. ***(THPT Gang Thép – Học kỳ I)*** Kết luận nào sau đây đúng về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$?

A. Có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
B. Có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
C. Không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
D. Có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Câu 61. ***(THPT Gang Thép – Học kỳ I)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^2\frac{x}{2}$ trên đoạn $[0;\pi]$?

A. 0. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 62. ***(THPT Chu Văn An – Hà Nội – Học kỳ I)*** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+2017x^2+1$?

A. $m=0$. **B.** $m=2017$. **C.** $m=\frac{1}{4}$. **D.** $m=1$.

Câu 63. ***(THPT Chu Văn An – Hà Nội – Học kỳ I)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{x^2-2x}$ trên đoạn $[0;2]$?

A. e. **B.** $\frac{1}{e^2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{e}$.

Câu 64. ***(THPT Nguyễn Du – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2.e^{1-x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};3\right]$ là?

A. $\frac{4}{e}$ và $\frac{\sqrt{e}}{4}$. **B.** $\frac{4}{e}$ và 0. **C.** $\frac{9}{e^2}$ và $\frac{\sqrt{e}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{e}}{4}$ và 0.

GV: Lương Văn Huy - ĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 65. ***(THPT Nguyễn Du – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x-7$ trên đoạn $[-4;3]$ là?

A. 21. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 66. ***(THPT Nguyễn Du – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2.\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e\right]$ là?

A. e và $-\frac{1}{2e}$. **B.** e^2 và $-\frac{1}{e^2}$. **C.** $-\frac{1}{e^2}$ và $-\frac{1}{2e}$. **D.** e^2 và 0.

Câu 67. ***(THPT Vân Hội – Hà Nội – Học kỳ I)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+1$ trên đoạn $[-2;2]$ là?

A. -6. **B.** -4. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 68. ***(THPT Vân Hội – Hà Nội – Học kỳ I)*** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{(2-x)(x-1)}$ bằng?

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 69. ***(THPT Vân Hội – Hà Nội – Học kỳ I)*** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x+\ln(1-2x)$ trên đoạn $[-1;0]$ là?

Câu 71. ***(Đề thi THPT Quốc gia – mã đề 124)*** Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ với m là tham số thực thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]}y+\max\limits_{[1;2]}y=\frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $m>4$. **C.** $2<m\le 4$. **D.** $m\le 0$.

Câu 72. ***(Đề thi THPT Quốc gia – mã đề 112)*** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m=\frac{17}{4}$. **B.** $m=10$. **C.** $m=3$. **D.** $m=5$.

Câu 73. ***(Đề thi THPT Quốc gia – mã đề 123)*** Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ với m là tham số thực thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]}y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$. **B.** $3<m\le 4$. **C.** $m<-1$. **D.** $1\le m<3$.

Câu 74. ***(THPT Nguyễn Khuyến – Tp Hồ Chí Minh)*** Giá trị của tham số m để phương trình $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ có nghiệm là?

A. $m\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 75. ***(Sở GD và ĐT Hà Nội)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3-mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. $m\ge -2\sqrt{3}$. **B.** $m\le 2\sqrt{3}$. **C.** $m\ge -\frac{13}{2}$. **D.** $m>\frac{13}{2}$.

Câu 76. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$

A. $m=\frac{51}{4}$. **B.** $m=\frac{49}{4}$. **C.** $m=13$ **D.** $m=\frac{51}{2}$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 77. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$ **B.** $m = 10$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Câu 78. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$

A. $m = 11$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = 3$

Câu 79. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia năm 2017)*** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào sau dưới đây đúng?

A. $m < -1$ **B.** $3 < m \le 4$ **C.** $m > 4$ **D.** $1 \le m < 3$

Câu 80. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} = 6.$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} = -2.$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} = -3.$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} = \frac{19}{3}.$

Câu 81. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên lần 2 năm 2017)*** Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ trên đoạn $[0;\pi]$

A. $M = \frac{3\sqrt{3}}{2};\ m = 1$ **B.** $M = \frac{3\sqrt{3}}{4};\ m = 0$ **C.** $M = 3\sqrt{3};\ m = 1$ **D.** $M = \sqrt{3};\ m = 1$

Câu 82. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 0$

Câu 83. ***(Trường THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên năm 2017)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x}+1}$. Khi đó giá trị của $M - m$ là:

A. $-2.$ **B.** $-1.$ **C.** $1.$ **D.** $2.$

Câu 84. ***(Trường THPT Phù Cát năm 2017)*** Hàm số $y = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là:

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.**-1.

Câu 85. ***(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)*** Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+\sqrt{k}}{x-1}$ trên đoạn $[-1;0]$. Tìm k để $M + 4m = 0.$

A. $k = \frac{3}{10}.$ **B.** $k = \frac{1}{243}.$ **C.** $k = \frac{1}{9}.$ **D.** $k = \frac{1}{81}.$

Câu 86. ***(Trường THPT Hà Trung lần 1 năm 2017)*** Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$.

A. $[0;1].$ **B.** $\left[0;\frac{1}{4}\right].$ **C.** $[0;2].$ **D.** $\left[0;\frac{1}{2}\right].$

Câu 87. ***(Trường THPT Hàm Rồng lần 2 năm 2017)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$. Tỉ số $\frac{M}{m}$ bằng:

A. -2 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** -3

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 88. ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ trên đoạn $[2;3]$

A. $\min\limits_{[2;3]} y = \dfrac{15}{2}$ **B.** $\min\limits_{[2;3]} y = \dfrac{19}{2}$ **C.** $\min\limits_{[2;3]} y = 4$ **D.** $\min\limits_{[2;3]} y = 28$

Câu 89. ***(Trường THPT Hồng Quang lần 4 năm 2017)*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 3}$.

A. -3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 90. ***(Trường THPT Lê Hồng Phong lần 1 năm 2017)*** Kí hiệu M và m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị của tỉ số $\dfrac{M}{m}$

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{5}{3}$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{2}{3}$

Câu 91. ***(Trường THPT Lục Ngạn 3 lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất là :

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** -3 **D.** -1

Câu 92. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó tích $M.m$ là:

A. $M.m = 0$ **B.** $M.m = \dfrac{25}{4}$ **C.** $M.m = \dfrac{25}{8}$ **D.** $M.m = 2$

Câu 93. ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Cho số thực không dương y và số thực x thỏa mãn $x^2 - 3x - y = 4$. Kí hiệu min A là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 y + 3xy + 5y + 27x + 35$. Tìm min A?

A. $\min A = 8$ **B.** $\min A = -1$ **C.** $\min A = -8$ **D.** $\min A = 15$

Câu 94. ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{m^2 x - m + 2}{x - 2}$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 2 ?

A. $m = 6$ **B.** $m = 2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Câu 95. ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$. Ta có $M^2 - m^2$ bằng

A. 10. **B.** 100. **C.** 25. **D.** 75.

Câu 96. ***(Trường THPT Ngô Gia Tự lần 3 năm 2017)*** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6 - x}$ trên đoạn $[-3;6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

A. 18. **B.** -6. **C.** -12. **D.** -4.

Câu 97. ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 4}{x - m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;4]$ tại một điểm $x_0 \in (0;4)$.

A. $-2 < m < 2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $m > 2$. **D.** $0 < m < 2$.

Câu 98. ***(Trường THPT Ngô Quyền lần 2 năm 2017)*** Tìm x để hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{2}$. **B.** $x = 2\sqrt{2}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 99. ***(Trường THPT An Lão lần 2 năm 2017)*** Tìm x để hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = 2\sqrt{2}$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = \sqrt{2}$.

GV. Lương Văn Huy - Ngọc Hồi Thanh Trì HN - 0969141404

Câu 100. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng:

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 101.(Trích đề Đặng Thúc Hứa-2018). Cho hàm số $f(x) = \left|8x^4 + ax^2 + b\right|$ Trong đó a,b là các tham số thực .Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1,1]$ bằng 1.Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b < 0$ C. $a > 0, b < 0$ D. $a < 0, b > 0$

Câu 102.(Trích đề THPT Hoàng Quốc Việt lần 2 2018). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20\right|$ trên đoạn $[0,2]$ không vượt quá 20.Tổng các phần tử của S là .

A.210 B.105 C.-195 D.300

Câu 103.(Trích THPT Chuyên Lam Sơn 2018).Xét hàm số $y = f(x) = \left|x^2 + ax + b\right|$ với a,b là các tham số ,Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1,3]$ .Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được,Tính $a - b$.

A.1 B.2 C.-1 D.3

Câu 104.(Nguồn Internet 2018) . Xét hàm số $f(x) = \left|e^x + ax^2 + bx + c\right|$ và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1,3]$ .Khi M nhận giá trị bé nhất có thể .Tính a+b+c

Câu 105.(Nguồn Sưu Tầm 2018).Xét hàm số $f(x) = \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|$ với a,b,c là các tham số .Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1,1]$ .Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được .Tính $4a + 6b + 2018c$.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C, $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{4}$

Câu 106.(Trích Đề Phan Bội Châu 2018).Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 - 2x + m\right|$ trên đoạn $[-1,2]$ bằng 5.

A.1 B.2 C.3 D.4

Câu 107.(Trích Đề Olimpic toán 30/4).Tìm $a, b, c \in R^3$ để giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|$ trên đoạn $(-1,1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = b = 0, c = \frac{-3}{4}$ B. $a = c = 0, b = \frac{-3}{4}$ C. $a = 0, b = 1, c = \frac{-3}{4}$ D. $a = -1, b = 1, c = \frac{1}{2}$

Câu 108.(Trích THPT -Thanh Chương I -Thanh Hóa).Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + 2x + m - 4\right|$ trên đoạn $[-2,1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.Tìm giá trị của m.

A.5 B.4 C.1 D.3

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

ĐÁP ÁN

1. B	**2. A**	**3. B**	**4. A**	**5. B**	**6. D**	**7. D**	**8. C**	**9. B**	**10. A**
11. A	**12. D**	**13. A**	**14. B**	**15. A**	**16. C**	**17. D**	**18. D**	**19. C**	**20. B**
21. D	**22. D**	**23. A**	**24. B**	**25. B**	**26. B**	**27. B**	**28. D**	**29. D**	**30. D**
31. C	**32. A**	**33. D**	**34. B**	**35. A**	**36. A**	**37. C**	**38. C**	**39. C**	**40. D**
41. C	**42. B**	**43. C**	**44. C**	**45. B**	**46. D**	**47. A**	**48. B**	**49. D**	**50. D**
51. A	**52. A**	**53. A**	**54. D**	**55. D**	**56. A**	**57. D**	**58. A**	**59. A**	**60. A**
61. A	**62. D**	**63. D**	**64. A**	**65. D**	**66. A**	**67. B**	**68. D**	**69. B**	**70. C**
71. B	**72. C**	**73. A**	**74. A**	**75. A**	**76. A**	**77. D**	**78. C**	**79. C**	**80. A**
81. B	**82. A**	**83. D**	**84. D**	**85. D**	**86. D**	**87. D**	**88. B**	**89. A**	**90. A**
91. C	**92. A**	**93. B**	**94. C**	**95. B**	**96. B**	**97. B**	**98. A**	**99. B**	**100. C**

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 4 - TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

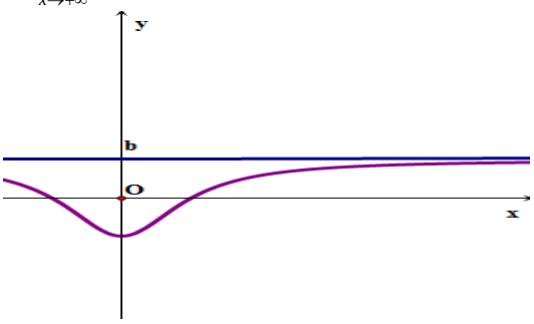
I. ĐỊNH NGHĨA.

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D

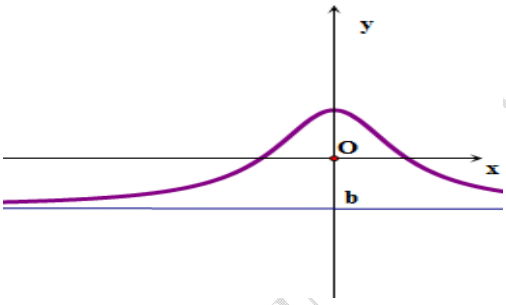
1. Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y=b$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ (Hình minh họa)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$



Chú ý:

- Cho hàm số cho hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$, trong đó $u(x),v(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung. Khi đó
  - ✓ Nếu bậc $u(x)<$ bậc $v(x)\Leftrightarrow n<m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$
  - ✓ Nếu bậc $u(x)=$ bậc $v(x)\Leftrightarrow n=m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a_n}{b_m}$
  - ✓ Nếu $u(x)>$ bậc $v(x)\Leftrightarrow n>m$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
  - ✓ Đồ thị hàm số tối đa có hai tiệm cận ngang.
- Với các hàm số chứa căn bậc hai, khi tìm tiệm cận ngang ta lưu ý xét các giới hạn khi $x\longrightarrow-\infty$ và khi $x\longrightarrow+\infty$

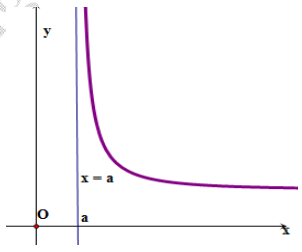
2. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=a$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ***ít nhất*** một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

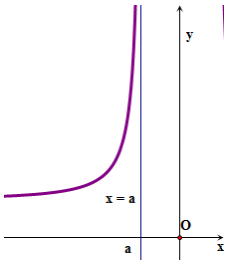
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (Hình minh họa)

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

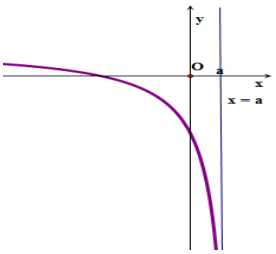


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

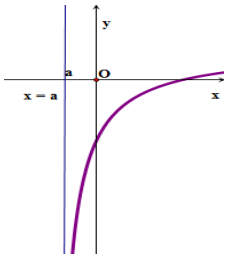


Gv : Lương Văn Huy - LĐ ĐT Thanh Trì - HN - 0969141404

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



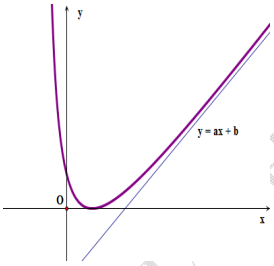
Chú ý: Cho hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, trong đó $u(x),v(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung. Khi đó

- Nếu phương trình $v(x)=0$ có nghiệm $x=x_0$, thì đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Số nghiệm phân biệt của phương trình $v(x)=0$ là số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Để $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì $\begin{cases} v(x_0)=0 \\ u(x_0)\neq 0 \end{cases}$
- Đồ thị hàm số có thể không có tiệm cận đứng hoặc có vô số tiệm cận đứng

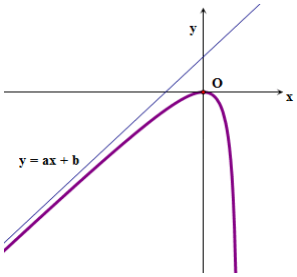
3. Tiệm cận xiên (đọc thêm)

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (Hình minh họa)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$



$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$



Chú ý: Cho hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, trong đó $u(x),v(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung. Khi đó

- Nếu bậc $u(x)\leq$ bậc $v(x)$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.
- Nếu bậc $u(x)=$ bậc $v(x)+1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên.
- Nếu hàm số viết được dưới dạng $y=(ax+b)+\dfrac{c}{u(x)}, a\neq 0, c\neq 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=ax+b$
- Ta có thể tìm các hệ số a,b bằng các công thức sau

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] \text{ hoặc } a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

(Nếu $a=0$ ta có tiệm cận ngang)

4. Nhận xét:

- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ***(Tiệm cận ji nên nói rõ)*** thì miền xác định hoặc miền giá trị của hàm số $y=f(x)$ phải chứa ∞ (ta hiểu là chứa 1 trong các yếu tố $-\infty$ hoặc $+\infty$).
- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận ngang nếu tập xác định D chứa khoảng vô hạn có dạng $(-\infty;a)$ hoặc $(a;+\infty)$ trong đó $a\in\mathbb{R}$.
- Đường thẳng $y=b$ được coi như tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=b$.

Gv : Lương Văn Huy - L... Thanh Trì - HN - 0969141404

- Để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta cần xét các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
- Đồ thị một hàm số tùy ý chỉ có thể có tối đa hai tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số có thể có nhiều tiệm cận đứng.
- Nếu đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ xác định trên D thì hoặc $x\notin D$ (nhưng có các khoảng $(c;a)$ với $c<a$ hoặc có khoảng $(a;b)$ với $a<b$ nằm trong D), hoặc $a\in D$ và f không liên tục tại a. Để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ xác định trên D, ta cần xét các giới hạn $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ tại các điểm a
- Tiệm cận và đồ thị hàm số vẫn có thể cắt nhau.
- Dấu hiệu nhận biết tiệm cận khi biết bảng biến thiên.

- Tại vị trí $x\longrightarrow-\infty; x\longrightarrow+\infty$
Nếu y nhận các giá trị cụ thể b,c thì khi đó $y=b, y=c$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số
- Tại $x\longrightarrow a^+$ hoặc $x\longrightarrow a^-$ mà y tiến tới $\pm\infty$ thì khi đó đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

x	$-\infty$		a		$+\infty$
y	a ↓ TCN	$\pm\infty$ ↓ TCĐ	$\pm\infty$ ↓ TCĐ		b ↓ TCN

5. Một số quy tắc tìm giới hạn cần nhớ.

❖ Các kết quả thường dùng

- $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=\dfrac{c}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$
- $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty \text{ khi } k=2n+1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty \text{ khi } k=2n\end{array}\right. \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

❖ Quy tắc về giới hạn vô cực

a. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		−	$+\infty$

Việc tính các giới hạn ở dạng vô đinh $(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0.\infty...)$ ta thường biến đổi các biểu thức bằng cách

- Đặt thừa số chung rồi rút gọn

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN 0969141404

- Chia đồng thời tử, mẫu cho số khác không và áp dụng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^k}=\infty$ (ta hiểu kết quả là có thể $+\infty,-\infty$ còn tùy thuộc vào $x\longrightarrow 0^+, x\longrightarrow 0^-$ và k chẵn, lẻ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$
- Nhân liên hợp trong những bài chứa căn .
- Sử dụng các kết quả đã biết.
- Dùng casio

❖ CÁCH DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ TÍNH GIỚI HẠN

a. Ghi nhớ cách nhập giá trị của x

+ Khi $x\to+\infty$ thì nhập $x=10^6$ (ta hiểu là nhập 1 số dương rất lớn)
+ Khi $x\to-\infty$ thì nhập $x=-10^6$
+ Khi $x\to x_0$ (1 số thực) thì nhập $x_0+0,0000001$
+ Khi $x\to x_0^+$ (1 số thực) thì nhập $x_0+0,0000001$
+ Khi $x\to x_0^-$ (1 số thực) thì nhập $x_0-0,0000001$

b. Ghi nhớ cách hiện thị kết quả

+ Hiển thị một số thực (kết quả cần tìm)
+ Hiện thị $10^{\text{mũ dương}}$ kết quả là $+\infty$
+ Hiện thị $-10^{\text{mũ dương}}$ kết quả là $-\infty$
+ Hiện thị $10^{\text{mũ âm}}$ kết quả là 0

CÁCH DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ ĐỂ TÌM TIỆN CẬN (THỰC CHẤT LÀ TÍNH GIỚI HẠN) + KẾT HỢP VỚI ĐỊNH NGHĨA VỀ GIỚI HẠN

1. Tìm tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận ngang tức là đi tính $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$

Nhập $\begin{cases} f(x)\xrightarrow[X=10^6]{Calc} a \\ f(x)\xrightarrow[X=-10^6]{Calc} b \end{cases}$.

Nếu $a=b$ thì có 1 tiệm cận ngang $y=a$, nếu $a\neq b$ thì có hai tiệm cận ngang là $y=a$ và $y=b$

Chú ý:

- Trong nhiều bài toán khi cho $x=10^6$ *hoặc* $x=-10^6$ thì máy tính báo Math EROR 1 trường hợp, trường hợp còn lại vẫn có kết quả tức là chỉ có 1 tiệm cận ngang, còn khi cho $x=10^6$ hoặc $x=-10^6$ thì máy tính báo *đồng thời* Math EROR tức là không có tiệm cận ngang.
- Khi $f(x)\xrightarrow[X=\pm 10^6]{Calc}10^{mu\ am}$ thì chỉ có duy nhất 1 tiệm cận ngang là $y=0$

2. Tìm tiệm cận đứng

Để tìm tiệm cận đứng tức là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$, trong đó x_0 là nghiệm của mẫu

Nhập $\begin{cases} f(x)\xrightarrow[X=x_0+0,0000001]{Calc}\pm\infty \\ f(x)\xrightarrow[X=x_0-0,0000001]{Calc}\pm\infty \end{cases}$

Chú ý:

- Nếu mẫu có *nghiệm đơn* và lân cận nghiệm đó thuộc tập xác định (Ví dụ mẫu có nghiệm đơn $x=2$ và tập xác đinh là $(2;+\infty)$) và nghiệm đó *không trùng* với nghiệm của tử thì chắc chắn đó là tiệm cận đứng và khi tính bằng máy tính thì kết quả là $\pm\infty$ (vô cùng lớn)
- Nếu mẫu là *nghiệm đơn* có lân cận nghiệm đó thuộc tập xác định và nghiệm đó *trùng* với nghiệm của tử thì đó không phải là tiệm cận đứng và và khi tính bằng máy tính thì kết quả là một số thực rất bé
- Nếu mẫu có *nghiệm kép* có lân cận nghiệm đó thuộc tập xác định và nghiệm đó *trùng* với nghiệm của tử thì *có thể* có tiệm cận đứng và khi tính bằng máy tính thì kết quả là Math EROR. Đến đây kết luận không có tiệm cận đứng là sai lầm, bởi vì chưa rút gọn triệt để nghiệm của tử và mẫu. Do đó để bấm máy tính trong trường hợp này thì phải rút gọn nghiệm của tử và mẫu triệt để thì mới được kết quả là $\pm\infty$ (vô cùng lớn)

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Nghiệm của mẫu: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=2\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=2$

$\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-3}{x-2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-3}{x-2}=-\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=2$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận. (đáp án B)

Nhận xét:

- Ta có thể tìm nhanh tiệm cận của hàm phân thức trên như sau
  - Bậc tử = bậc mẫu $\Rightarrow$ tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{2}{1}=2$
  - Nghiệm mẫu là $x=2\Rightarrow$ tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$
- Dùng Casio để tìm tiệm cận

Nhập $\dfrac{2x-3}{x-2}$ $\xrightarrow{CALC\,10^6}2$; $\xrightarrow{CALC\,-10^6}2$; $\xrightarrow{CALC\,2+10^{-6}}100000002(+\infty)$; $\xrightarrow{CALC\,2-10^{-6}}-999999998(-\infty)$

Vậy hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$, tiệm cận đứng $x=2$

Ví dụ 2. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ là?

A.2 **B.**3 **C.**4. **D.**5

Giải.

Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$

Ta có $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=0$

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x}{(x-2)(x-3)}=-\infty\\\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x}{(x-2)(x-3)}=+\infty\end{array}\right.\Rightarrow$ đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x}{(x-2)(x-3)}=+\infty\\\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x}{(x-2)(x-3)}=-\infty\end{array}\right.\Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Nhận xét: Ta có thể tìm nhanh số tiệm cận như sau

- Hàm số có bậc tử < bậc mẫu $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $=0$
- Mẫu số có 2 nghiệm phân biệt $x=2$ và $x=3$ và không có nghiệm nào là nghiệm của tử $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=3$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 3. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI - 2017) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-3}{x^2+x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-3}{x^2+x-2}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-3}{x^2+x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^-} y=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x-3}{x^2+x-2}=-\infty\end{cases}\Rightarrow$ đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hạm số có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-2$ (đáp án C)

Nhận xét:

- Với dạng bài này ta có thể nhìn ra nhanh số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Nhận thấy mẫu trong biểu thức của hàm số là x^2+x-2 có hai nghiệm $x=1$ và $x=-2$ và không có nghiệm nào là nghiệm của tử. Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-2$.
- Sử dụng Casio cho bài toán như sau

Nhập $\dfrac{X-3}{X^2+X-2}$ $\begin{cases}\xrightarrow{CALC\ 1+10^{-6}} -66666666(-\infty)\\ \xrightarrow{CALC\ 1-10^{-6}} +66666666(+\infty)\\ \xrightarrow{CALC\ -2+10^{-6}} +16666666(+\infty)\\ \xrightarrow{CALC\ -2-10^{-6}} -16666666(-\infty)\end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-2$

Ví dụ 4. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hàm số được viết lại $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=1$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{x-1}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x=1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận (đáp án A)

Nhận xét:

- Sai lầm hay mắc phải dạng này là khi thấy $x=1$ là nghiệm mẫu và cũng là nghiệm tử nên kết luận luôn là $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị
- Lưu ý với hàm phân thức ta nên rút gọn triệt để xong rồi mới tìm tiệm cận

Ví dụ 5. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-4x+3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ne 1 \\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ne 3 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đã cho có tập xác định

$[2;+\infty)\setminus\{3\}$

Nghiệm của mẫu: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}=0 \Rightarrow$ đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)(x-3)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)(x-3)}=-\infty \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận

Nhận xét:

- *Sai lầm mắc phải dạng này là kết luận nghiệm của mẫu chính là tiệm cận đứng.*
- Muốn tìm tiệm cận của đồ thị hàm số trước hết ta phải tìm tập xác định của hàm số trước.
- Sử dụng Casio cho bài toán như sau

Nhập $\dfrac{\sqrt{X-2}}{X^2-4X+3}\left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{CALC\ 10^6} 10^{-9}(0) \\ \xrightarrow{CALC\ -10^6} Math\ ERROR \end{array}\right. \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$

$\dfrac{\sqrt{X-2}}{X^2-4X+3}\left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{CALC\ 3+10^{-6}} +50000000(+\infty) \\ \xrightarrow{CALC\ 3-10^{-6}} -49999999(-\infty) \end{array}\right. \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$

Ví dụ 6. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI - 2017) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải.

Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=-1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$ (đáp án C)

Nhận xét:

- Ta có thể sử dụng nhanh Casio để xác định tiệm cận ngang như sau

Nhập $\dfrac{X}{\sqrt{X^2-1}}\left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{CALC\ 10^6} 1 \\ \xrightarrow{CALC\ -10^6} -1 \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$

- Tổng quát hóa bài toán như sau.

Nếu hàm số $y=\dfrac{ax+\sqrt{bx^2+cx+d}}{ex+f}(C)$ có tập xác định là $(-\infty;n)\cup(m;+\infty)(n\le m)$ thì đồ thị hàm số (C) có

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

hai tiệm cận ngang là $y=\frac{a+\sqrt{b}}{e}$ và $y=\frac{a-\sqrt{b}}{e}$. Tương tự với trường hợp căn bậc hai ở dưới mẫu.(Ví dụ đồ thị hàm số $y=\frac{3x+\sqrt{6x^2+2x+1}}{5x-2}$ có hai tiệm cận ngang là $y=\frac{3\pm\sqrt{6}}{5}$)

Ví dụ 7. (THPT QUẢNG XƯƠNG – THANH HÓA) Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=-3$ và $x=-2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=3$ và $x=2$. **D.** $x=3$.

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

Nhận thấy $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow$ đồ thị hàm số nếu có tiệm cận đứng thì tiệm cận đứng phải là đường thẳng $x=2$ hoặc $x=3$

$\lim\limits_{x\to3^+}y=+\infty;\lim\limits_{x\to3^-}y=-\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to2}y=\lim_{x\to2}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{\left[2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right](x-2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(3x+1)(x-2)}{\left[2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right](x-3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(3x+1)}{\left[2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right](x-3)}=-\frac{7}{6}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất 1 tiệm cận đứng là $x=3$ (đáp án D)

Nhận xét: Ta có thể dùng Casio để xử lí bài toán như sau

Nhập $\frac{2X-1-\sqrt{X^2+X+3}}{X^2-5X+6}$ $\left\langle\begin{array}{l}\xrightarrow{CALC\ 2+10^{-6}}-\frac{7}{6}\\\xrightarrow{CALC\ 2-10^{-6}}-\frac{7}{6}\end{array}\right.\Rightarrow$ đường thẳng $x=2$ không phải tiệm cận đứng

$\frac{2X-1-\sqrt{X^2+X+3}}{X^2-5X+6}$ $\left\langle\begin{array}{l}\xrightarrow{CALC\ 3+10^{-6}}+112701666(+\infty)\\\xrightarrow{CALC\ 3-10^{-6}}-112701666(-\infty)\end{array}\right.\Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Hoặc ta thấy $x=2$ là nghiệm đơn của mẫu và đồng thời cũng là nghiệm của tử $\Rightarrow x=2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. $x=3$ là nghiệm đơn của mẫu và không là nghiệm của tử $\Rightarrow$ đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Ví dụ 8. (THPT QUẢNG XƯƠNG – THANH HÓA) Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Giải.

Tập xác định $D=[-3;+\infty)\setminus\{-1;1\}$

Hàm số $y=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\frac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x+1)}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-}y=-\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to1}y=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x+1)}=\frac{1}{8}$$

$\Rightarrow x=1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Cty Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng (đáp án D)

Nhận xét:

- Ta có thể dùng Casio để xử lí bài toán như sau

Nhập $\dfrac{\sqrt{X+3}-2}{X^2-1}$ $\xrightarrow{CALC\,1+10^{-6}}$ $\dfrac{1}{8}$; $\xrightarrow{CALC\,1-10^{-6}}$ $\dfrac{1}{8}$; $\xrightarrow{CALC\,-1+10^{-6}}$ $+2928321(+\infty)$; $\xrightarrow{CALC\,-1-10^{-6}}$ $-2928321(-\infty)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=-1$

- Nếu hàm số chứa căn thì ta phải kiểm tra nghiệm mẫu có phải là nghiệm của tử hay không?

Ví dụ 9. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI - 2017) Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$. Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giá trị của tham số m là:

A. $m=0$ **B.** $m=0;\ m=1$

C. $m=1$ **D.** Không tồn tại m

Giải.

Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Tiệm cận đứng (nếu có) của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=m$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì $x=m$ phải là nghiệm của $2x^2-3x+m$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m+m=0\Leftrightarrow 2m^2-2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=1\end{array}\right.$

Vậy với $m=0$ hoặc $m=1$ thì đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể thử đáp án như sau

- Với $m=0\Rightarrow y=\dfrac{2x^2-3x}{x}=2x-3$ không có tiệm cận đứng
- Với $m=1\Rightarrow y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x-1}=2x-1$ không có tiệm cận đứng

Chọn đáp án B

Ví dụ 10. (THPT HÀ TRUNG – THANH HÓA - 2017) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. $m=1$ hoặc $m=4$. **B.** $m=1$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$

Nghiệm của mẫu: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\\ x=2\end{array}\right.$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$ do đó đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

Mẫu trong biểu thức của đồ thị hàm số có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Do vậy để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ phải là nghiệm của x^2-m

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 1^2-m=0\\ 2^2-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1\\ m=4\end{array}\right.$ (đáp án A)

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể thử đáp án như sau

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Với $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$ có hai tiệm cận
- Với $m=4\Rightarrow y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+2}{x-1}$ không có tiệm cận đứng

Chọn đáp án A

Ví dụ 11. (SỞ GD BÌNH ĐỊNH - 2017) Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có 2 tiệm cận đứng

A. $m<1$ và $m\neq -8$ **B.** $m\neq 1$ và $m\neq -8$ **C.** $m>1$ và $m\neq -8$ **D.** $m>1$

Giải.

Nhận thấy cả tử và mẫu trong biểu thức của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ đều là tam thức bậc hai trong đó tử x^2+x-2 có hai nghiệm phân biệt là $x=1$ và $x=-2$

Do vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và khác -2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\1^2-2.1+m\neq 0\\(-2)^2-2.(-2)+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\neq 1\\m\neq -8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\neq -8\end{cases}$$ (đáp án A)

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể thử đáp án như sau

- Với $m>1$ ta chọn $m=2\Rightarrow y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+2}$ mẫu vô nghiệm nên không có tiệm cận đứng loại đáp án C, D.
- Với $m\neq -8$ thì cả đáp án A, B đều có nên không cần thử với $m\neq -8$
- Với $m<1$ ta chọn $m=0\Rightarrow y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x-2)}$ tử và mẫu không có nghiệm chung nên có hai tiệm cận đứng

Chọn đáp án A

Ví dụ 12. (THPT PHÙ CÁT – BÌNH ĐỊNH - 2017) Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m\neq\pm 2$.

Giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow 2m.1+m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$

Với $m\neq 0$ đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang $y=2m$ và tiệm cận đứng $x=1$.

Khi đó hai đường tiệm cận cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh lần lượt là 1 và $|2m|$.

Diện tích của hình chữ nhật trên là $S=|2m|.1=|2m|$.

Theo bài ra ta có $S=|2m|=8\Leftrightarrow m=\pm 4$ (đáp án C)

Ví dụ 13. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI - 2017) Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\varnothing$ **D.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Giải.

Gv. Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nhận thấy bậc tử < bậc mẫu nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$

Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)=0$ (1) vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó phương trình (1) trở thành

$\left(-2x+1\right)\left(4x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Hoặc khi $m=0$ hàm số đã cho trở thành $y=\dfrac{2x-1}{\left(-2x+1\right)\left(4x^2+1\right)}=\dfrac{-1}{4x^2+1}.$

Đồ thị hàm số có duy nhất 1 đường tiệm cận là tiệm cận ngang $y=0$

Trường hợp 2: $m\neq 0$ khi đó phương trình (1) vô nghiệm

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m<0\\4m^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\-1<m<1\end{cases}$ (loại)

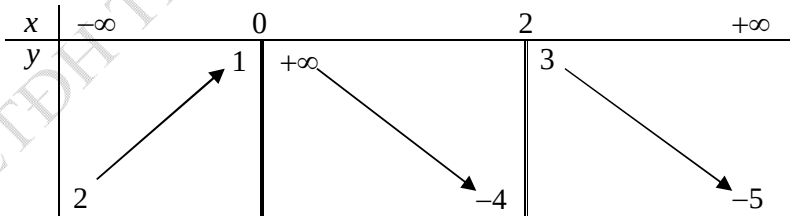
Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm (đáp án A)

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể thử đáp án như sau

- Với $m=0\Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{\left(-2x+1\right)\left(4x^2+1\right)}=-\dfrac{1}{4x^2+1}$ có đúng 1 tiệm cận đứng nên loại đáp án B, C
- Với $m=2\Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{\left(2x^2-2x+1\right)\left(4x^2+8x+1\right)}$. Ta thấy mẫu có hai nghiệm và các nghiệm này không trùng với nghiệm của tử nên loại D

Chọn đáp án A

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0;2\right\}$ có bảng biến thiên như hình bên. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là ?



A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5

Giải.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-5$ $\longrightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-5$.

$\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}y=1$; $\lim\limits_{x\to2^-}y=-4$; $\lim\limits_{x\to2^+}y=3$ $\longrightarrow$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=0$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận

Ví du 15. (SGD BẮC NINH) Xét các mệnh đề sau:

1) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x-3}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

2) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có hai đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

3) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$ có một đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng.

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Giải.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Xét mệnh đề 1. Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x-3}=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\frac{1}{2x-3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}\frac{1}{2x-3}=-\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là $x=\frac{3}{2}$.

Xét mệnh đề 2. Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}=-\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là $x=0$

Xét mệnh đề 3. Hàm số đã cho được viết

$y=\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}=\frac{x^2-2x+1}{\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\left(x^2-1\right)}=\frac{x-1}{\left(x+\sqrt{2x-1}\right)(x+1)}$. Tập xác định $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}y=1+\sqrt{7} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy số mệnh đề đúng là 2 (đáp án C)

Nhận xét: Trong mệnh đề 3 ta rất dễ mắc sai lầm khi nhìn vào nghiệm của mẫu là $x=\pm1$ và kết luận đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng. Để tìm tiệm cận trước hết ta phải tìm tập xác định của hàm số.

Ví dụ 16. (THPT TRẦN HƯNG ĐẠO – NAM ĐỊNH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang.

A. Không tồn tại m.
B. $m=2$ và $m=-2$.
C. $m=-1$ và $m=2$.
D. $m=-2$.

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$

Ta có $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{m}{2}x=\frac{x^2+1-\frac{m^2x^2}{4}}{\sqrt{x^2+1}+\frac{m}{2}x}=\frac{\left(1-\frac{m^2}{4}\right)x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\frac{m}{2}x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow$ bậc của tử $\le$ bậc của mẫu.

$\Leftrightarrow 1-\frac{m^2}{4}=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm2$ (đáp án B)

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể thử đáp án như sau

Nhập $\sqrt{X^2+1}-\frac{M}{2}X \xrightarrow[\left[\begin{array}{l}X=10^2;M=2\\X=-10^2;M=2\end{array}\right.]{Cacl}\approx\left(4,99.10^{-3}\right);200$

Nhập $\sqrt{X^2+1}-\frac{M}{2}X \xrightarrow[\left[\begin{array}{l}X=10^2;M=-2\\X=-10^2;M=-2\end{array}\right.]{Cacl}\approx 200;\left(4,99.10^{-3}\right)$

Vậy $m=\pm2$ thoả mãn. Chọn đáp án B

Chú ý: Với giới hạn $\infty-\infty$ thì khi bấm máy tính ta cho $x=10^2$ chứ không cho $x=10^6$ vì khi đó máy tính tràn bộ nhớ và báo kết quả giới hạn bằng 0 là sai.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 17. (THPT GIA LỘC – HẢI DƯƠNG) Cho hàm số $y=\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, ($m$ *là tham số thực*). Tìm m để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$

Do hàm số chỉ chứa x^2, x^4 (mũ chẵn) nên khi $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$ giá trị của y đều tương đương nhau.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2m+1)+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=2m+1$

Vậy hàm số có tiệm cận ngang là $y=2m+1$

Để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$ thì $-3=2m+1\longrightarrow m=-2$ (đáp án D)

Nhận xét: Bài toán tìm tham số m nhưng thực chất là đi tìm tiệm cận ngang với giá trị m cho ở 4 đáp án do đó ta có thể thử đáp án như sau:

Nhập $\dfrac{(2M+1)X^2+3}{\sqrt{X^4+1}}\xrightarrow[M=-2;X=\pm 10^6]{\text{Calc}}-3$ chỉ có đáp án D cho kết quả giới hạn bằng -3

Ví dụ 18. (CHUYÊN ĐH VINH) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+a}{x^3+ax^2}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $a\neq 0, a\neq\pm 1$. **B.** $a\neq 0, a\neq -1$.

C. $a<0, a\neq -1$. **D.** $a>0$.

Giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{0,-a\}$

Ta có $y=\dfrac{x^2+a}{x^3+ax^2}=\dfrac{x^2+a}{x^2(x+a)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=0\longrightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=0$

Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai tiệm cận đứng phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Mẫu trong biểu thức của hàm số phải có hai nghiệm phân biệt và không phải là nghiệm của tử (*)

Nhận thấy phương trình $x^2(x+a)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-a$

Vậy $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-a\neq 0\\(-a)^2+a\neq 0\\0^2+a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a\neq -1\end{cases}$ (đáp án B)

MỞ RỘNG: BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN CẮT HAI TIỆM CẬN

Bài toán 1: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, với $a,c\neq 0$ và a,b,c,d phụ thuộc vào tham số thực m

Tìm giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị cắt trục hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn một điều kiện cho trước

a. Phương pháp:

Bước 1:

- Xác định các đường tiệm cận của (C), với tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Gọi $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận

- Giả sử $M_0\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ với $y_0=f\left(x_0\right)=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M_0 có dạng

$d:y=k\left(x-x_0\right)+y_0$ với $k=f'\left(x_0\right)=\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)^2}$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M_0

- Tọa độ điểm $A=d\cap TCĐ$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\\x=-\frac{d}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{d}{c}\\y=-\frac{2}{c}.\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)}+\frac{a}{c}\end{cases}\Rightarrow A\left(-\frac{d}{c};-\frac{2}{c}.\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)}+\frac{a}{c}\right)$$

- Tọa độ điểm $B=d\cap TCN$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\\y=\frac{a}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\left(cx_0+d\right)}{c}\\y=\frac{a}{c}\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{2\left(cx_0+d\right)}{c};\frac{a}{c}\right)$$

Bước 2: Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình hoặc một bất phương trình theo x_0, giải phương trình này ta được x_0

Chú ý: Tính hoành độ điểm A và tung độ điểm B theo x_0

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}\left(C\right)$. Tổng hoành độ tất cả các điểm thuộc đồ thị sao cho tiếp tuyến tại đó lập với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi bé nhất là?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$ và $I\left(1;1\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận

Giả sử $M_0\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ với $y_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$ và $y'\left(x_0\right)=-\frac{2}{\left(x_0-1\right)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng $d:y=-\frac{2}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{x_0+1}{x_0-1}$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến tại M với tiệm cận đứng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=1\\y=-\frac{2}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{x_0+1}{x_0-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{x_0+3}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow A\left(1;\frac{x_0+3}{x_0-1}\right)$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến tại M với tiệm cận ngang là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y=1\\y=-\frac{2}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{x_0+1}{x_0-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x_0-1\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow B\left(2x_0-1;1\right)$$

Ta có chu vi tam giác IAB là $P_{IAB}=IA+IB+AB$

Vì IAB vuông tại I nên theo định lý Pitago và BĐT cosi ta có $AB^2=IA^2+IB^2\ge2IA.IB=16$

Mặt khác cũng theo BĐT cosi ta có $IA+IB\ge2\sqrt{IA.IB}=4\sqrt{2}$

Vậy $P_{IAB}=IA+IB+AB\ge4\sqrt{2}+4$

Vậy $P_{IAB\min}=4\sqrt{2}+4$, dấu "=" xảy ra khi

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$IA = IB \Leftrightarrow \left|\frac{4}{x_0-1}\right| = 2|x_0-1| \Leftrightarrow |x_0-1|^2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M \equiv M_1\left(1+\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right) \\ M \equiv M_2\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$$

Hoặc: Ta có thể làm như sau

Gọi I là giao điểm của 2 tiệm cận, $I(1;1)$. Ta có: $IA = \frac{4}{|x_0-1|}$, $IB = 2|x_0-1|$

$$AB = \sqrt{(2x_0-2)^2 + \frac{16}{(x_0-1)^2}} = 2\sqrt{(x_0-1)^2 + \frac{4}{(x_0-1)^2}}.$$

Khi đó chu vi của ΔAIB là $P = 2|x_0-1| + \frac{4}{|x_0-1|} + 2\sqrt{(x_0-1)^2 + \frac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng Bđt AM – GM, ta có $P \ge 2.2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} = 4\sqrt{2}+4$.

Vậy P nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}+4$, khi

$$\left\{\begin{array}{l} 2|x_0-1| = \frac{4}{|x_0-1|} \\ (x_0-1)^2 = \frac{4}{(x_0-1)^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow |x_0-1|^2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M \equiv M_1\left(1+\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right) \\ M \equiv M_2\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right) \end{array}\right. \text{(đáp án B)}$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất là?

A. 2π **B.** 4π **C.** $2\pi - 1$ **D.** π

Giải.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C), x_0 \ne 2$ với $y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là $\Delta: y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của Δ và hai tiệm cận là: $A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right); B(2x_0-2;2)$

Ta có $\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+2x_0-2}{2} = x_0 = x_M$, $\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M$

$\Rightarrow M$ là trung điểm AB.

Mặt khác $I(2;2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp ΔIAB có diện tích:

$$S = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \ge 2\pi \text{ (Đáp án A)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow M(1;1)$ hoặc $M(3;3)$ hỏi diện tích

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại một điểm thuộc (C) biết tiếp tuyến này cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại các điểm A, B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất

A. $d_1: y = x + 2\left(1+\sqrt{3}\right)$; $d_2: y = x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

B. $d_1: y = x - 2\left(1+\sqrt{3}\right);\ d_2: y = x - 2\left(1-\sqrt{3}\right)$

C. $d_1: y = 2x + 2\left(1+\sqrt{3}\right);\ d_2: y = 2x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)$

D. $d_1: y = \frac{1}{2}x + 2\left(1+\sqrt{3}\right);\ d_2: y = \frac{1}{2}x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)$

Giải.

Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 1$ và $I(-1;1)$

Giả sử $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ với $y_0 = \frac{x_0+1}{x_0-1}$ và $y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng $d: y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1}$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến tại M_0 với tiệm cận đứng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{x_0-5}{x_0+1} \end{cases} \Rightarrow A\left(-1; \frac{x_0-5}{x_0+1}\right)$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến tại M_0 với tiệm cận ngang là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_0+1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B(2x_0+1;1)$$

Ta có $IA = \left|\frac{x_0-5}{x_0+1} - 1\right| = \frac{6}{|x_0+1|}$, $IB = |2x_0+1-(-1)| = 2|x_0+1| \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{6}{|x_0+1|}.2|x_0+1| = 6$

Gọi P là nửa chu vi tam giác IAB thì bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{S}{P} = \frac{6}{P}$. Vậy $r_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$

Ta có chu vi tam giác IAB là $P_{IAB} = IA + IB + AB$

Vì ABC vuông tại I nên theo định lý Pitago và BĐT cosi ta có $AB^2 = IA^2 + IB^2 \ge 2IA.IB = 12$

Mặt khác cũng theo BĐT cosi ta có $IA + IB \ge 2\sqrt{IA.IB} = 4\sqrt{6}$

Vậy $2P_{IAB} = IA + IB + AB \ge 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

Vậy $2P_{IAB\min} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$, dấu "=" xảy ra khi $IA = IB \Leftrightarrow \frac{6}{|x_0+1|} = 2|x_0+1| \Leftrightarrow |x_0+1|^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1: y = x + 2\left(1+\sqrt{3}\right);\ d_2: y = x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)$ **(đáp án A)**

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (*C*). $M \in (C)$ tiếp tuyến tại *M* của (*C*) cắt hai tiệm cận của (*C*) tại *A*, *B*. Độ dài ngắn nhất của *AB* là?

A. $\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $5\sqrt{2}$

Giải.

Lấy điểm $M\left(x_0; 2 + \frac{1}{x_0-2}\right) \in (C)$. Ta có: $y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-2)^2}$.

Tiếp tuyến *d* tại *M* có phương trình: $y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{x_0-2}$

Giao điểm của *d* với tiệm cận đứng là: $A\left(2; 2 + \frac{2}{x_0-2}\right)$

Giao điểm của *d* với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-2; 2)$

GV: Lương Văn Huy - ĐT DH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $AB^2 = 4\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 4.2.(x_0-2)^2.\frac{1}{(x_0-2)^2} \geq 8 \Rightarrow AB \geq 2\sqrt{2}$. **(đáp án C)**

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow M(3;3) \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(1;1) \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi *I* là giao điểm các đường tiệm cận của (*C*). Điểm *M* trên (*C*) tiếp tuyến với (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) lần lượt tại *A* và *B*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có chu vi nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}\pi$ **B.** $2\sqrt{2}\pi$ **C.** $3\sqrt{2}\pi$ **D.** $2\sqrt{2}\pi - 1$

Giải.

Với $x_0 \neq 1$, tiếp tuyến d với (*C*) tại $M\left(x_0; \frac{x_0}{x_0-1}\right)$ có phương trình $d: y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0}{x_0-1}$

Đường thẳng d cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$

Đường thẳng d cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1;1)$

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có đường kính là AB.

Gọi P là chu vi của đường tròn, ta có: $P = \pi.AB$

P nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất khi và chỉ khi AB nhỏ nhất, ta có :

$AB = \sqrt{(2x_0-2)^2 + \left(\frac{-2}{x_0-1}\right)^2} = \sqrt{4(x_0-1)^2 + 4\left(\frac{1}{x_0-1}\right)^2} \geq 2\sqrt{2}$ **(đáp án B)**

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $4(x_0-1)^2 = 4\left(\frac{1}{x_0-1}\right)^2 \Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm trên đồ thị (C) điểm M có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại M với đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thoả mãn $IA^2 + IB^2 = 40$

A. $M(-2;-1)$ **B.** $M(-2;1)$ **C.** $M(2;-1)$ **D.** $M(2;1)$

Giải.

Tiệm cận đứng $d_1: x = -1$, tiệm cận ngang $d_2: y = 2 \Rightarrow I(-1;2)$

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), (x_0 > 0)$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1}$

Tọa độ điểm $A = \Delta \cap d_1$ là nghiệm của hệ $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1} \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(-1; \frac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$

Tọa độ điểm $B = \Delta \cap d_2$ là nghiệm của hệ $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1} \\ y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow B(2x_0+1;2)$

Gv : Lương Văn Huy - LPĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Theo giả thiết $IA^2+IB^2=40 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{36}{(x_0+1)^2}+4(x_0+1)^2=40 \\ x_0>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0+1)^4-10(x_0+1)^2+9=0 \\ x_0>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(2;1)$. **(đáp án D)**

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (C). Gọi I là giao điểm 2 tiệm cận của đồ thị (C). Gọi S là tập hợp các điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho $\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=2\sqrt{10}$. Số phần tử của S là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Ta có $y=\dfrac{2x-1}{x+1}=2-\dfrac{3}{x+1}$. Giao điểm hai tiệm cận $I(-1;2)$

Gọi $M\left(m;2-\dfrac{3}{m+1}\right)\in(C)$ đường thẳng Δ là tiếp tuyến tại M . Ta có :

$\Delta: y=\dfrac{3}{(m+1)^2}(x-m)+2-\dfrac{3}{m+1}$

A là giao điểm của Δ và tiệm cận đứng. Tọa độ A thỏa mãn

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2-\dfrac{6}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow A\left(-1;2-\dfrac{6}{m+1}\right)$

B là giao điểm của Δ và tiệm cận ngang . Tọa độ B thỏa mãn

$\begin{cases} y=2 \\ x-m=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow B(2m+1;2)$

Trung điểm AB có tọa độ $I\left(m;2-\dfrac{3}{m+1}\right)\equiv M$. Vậy M là trung điểm AB

Theo bài $\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=2\sqrt{10} \Rightarrow 2IM=2\sqrt{10} \Leftrightarrow IM^2=10$

$\Leftrightarrow (m+1)^2+\dfrac{9}{(m+1)^2}=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)^2=9 \\ (m+1)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-4 \\ m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Vậy có 4 điểm M cần tìm là : $M_1(2;1), M_2(-4;3), M_3(0;-1), M_4(-2;5)$ (đáp án D)

Ví dụ 8. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình hai đường thẳng $d_1;d_2$ đi qua giao điểm I của hai tiệm cận và cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt là các đỉnh của một hình chữ nhật biết đường chéo hình chữ nhật đó có độ dài bằng $\sqrt{30}$

A. $d_1: 2x-2y-1=0$ hoặc $d_2: 2x-2y+1=0$

B. $d_1: 3x-y-1=0$ hoặc $d_2: x-3y+1=0$

C. $d_1: 2x-y-1=0$ hoặc $d_2: x-2y+1=0$

D. $d_1: 2x-y-2=0$ hoặc $d_2: x-2y+2=0$

Giải.

Do $I(1;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số

Giả sử d_1 cắt (C) tại A và B; d_2 cắt (C) tại C và D thì I là trung điểm của AB và CD

Do đó, ACBD là hình bình hành. Để ACBD là hình chữ nhật thỏa mãn đề bài thì $AB=CD=\sqrt{30}$.

GV: Lương Văn Huy - TTBH Thanh Trì - HN - 0969141404

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I có hệ số góc k có phương trình d_1 là: $y=k(x-1)+1 \Leftrightarrow y=kx-k+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là: $\frac{x+2}{x-1}=kx-k+1 \Leftrightarrow kx^2-2kx+k-3=0\,(1)$

Để d_1 cắt (C) tại 2điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thì (1) có 2nghiệm phân biệt $\neq 1 \Leftrightarrow k>0$

Áp dụng định lý Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{k-3}{k} \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} y_1=kx_1-k+1 \\ y_2=kx_2-k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=2 \\ y_1y_2=k^2x_1x_2-k(k-1)(x_1+x_2)+(k-1)^2=1-3k \end{cases}$

Để $AB=\sqrt{30}$ thì: $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=30 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-4x_1x_2-4y_1y_2=30$

$\Leftrightarrow 12k^2-30k+12=0 \Leftrightarrow k=2$ hoặc $k=\frac{1}{2}$

Vậy các đường thẳng thỏa mãn là $d_1: 2x-y-1=0$ hoặc $d_2: x-2y+1=0$ hoặc ngược lại

(đáp án C)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp gồm các điểm $M\in(C)$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{5}{2}$ bán kính đường tròn nội tiếp (Với I là giao điểm của hai đường tiệm cận). Số phần tử của S là

A. 1. **B.**2 **C.**3 **D.**4

Giải.

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $\Delta: y=\frac{3x}{(x_0+1)^2}+\frac{x_0^2-4x_0-2}{(x_0+1)^2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $A\left(-1;\frac{x_0+5}{x_0+1}\right)$ và $B(2x_0+1;1)$

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-1;1)$

Khi đó $IA=\frac{6}{|x_0+1|}; IB=2|x_0+1|; AB=2\sqrt{(x_0+1)^2+\frac{9}{(x_0+1)^2}}$

Diện tích tam giác IAB là

$S=pr=\frac{IA.IB.AB}{4R} \Leftrightarrow 4pRr=IA.IB.AB \Leftrightarrow \frac{8}{5}pR^2=12AB \Leftrightarrow \frac{2}{5}\frac{AB^2}{4}p=3AB$

$\Leftrightarrow AB.p=30 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x_0+1)^2+\frac{9}{(x_0+1)^2}}\left(\frac{3}{|x_0+1|}+|x_0+1|+\sqrt{(x_0+1)^2+\frac{9}{(x_0+1)^2}}\right)=15$

Đặt $t=\frac{3}{|x_0+1|}+|x_0+1|, t\geq 2\sqrt{3}$, phương trình trở thành

$\sqrt{t^2-6}\left(t+\sqrt{t^2-6}\right)=15 \Leftrightarrow 6\sqrt{t^2-6}=15\left(t-\sqrt{t^2-6}\right) \Leftrightarrow 7\sqrt{t^2-6}=5t \Leftrightarrow t=\frac{7}{2}$

Với $t=\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{3}{|x_0+1|}+|x_0+1|=\frac{7}{2} \Leftrightarrow x_0=1; x_0=-3; x_0=\frac{1}{2}; x_0=-\frac{5}{2}$

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn là $M_1\left(1;-\frac{1}{2}\right); M_2\left(-3;\frac{5}{2}\right); M_3\left(\frac{1}{2};-1\right); M_4\left(-\frac{5}{2};3\right)$

KẾT LUẬN CHUNG

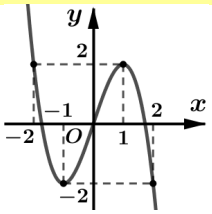
Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Nếu hàm số có dang phân thức (đa thức/đa thức) thì tiệm cận đứng (nếu có) của đồ thị hàm số phải là nghiệm của mẫu.
- Các bước tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số dạng phân thức.
  - Tìm nghiệm mẫu
  - Kiểm tra nghiệm chung của cả tử và mẫu và phân tích thành dạng $\dfrac{(x-x_0)^m A(x)}{(x-x_0)^n B(x)}$
  - Rút gọn nhân tử chung
    - Nếu $m \ge n$ thì đường thẳng $x=x_0$ không phải là nghiệm tiệm cận đứng.
    - Nếu $m < n$ thì đường thẳng $x=x_0$ là nghiệm tiệm cận đứng.
- Kiểm tra các phía bên trái, bên phải của điểm $x=x_0$ có thuộc tập xác định hay không? Nếu thuộc thì tìm các giới hạn bên trái, bên phải của hàm số
- Tiệm cận đứng có thể không phải là nghiệm mẫu
- Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số phải chú ý
  - Tìm tập xác định của hàm số, nếu không chứa yếu tố vô cùng thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
  - Nếu hàm số có dạng phân thức $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}$ thì ta so sánh n,m
    - $n>m$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
    - $n<m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.
    - $n=m$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a_0}{b_0}$
  - Nếu hàm số chứa căn thức dạng $y=f(x)\pm\sqrt{g(x)}$, $y=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$ thì ta nhân liên hợp rồi xét giới hạn.
- Nên kết hợp với kỹ năng Casio để tìm giới hạn và tiệm cận.

III - TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Vấn đề 1) Tìm số đường tiệm cận thông qua đồ thị cho trước

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x+2}{f(x)+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

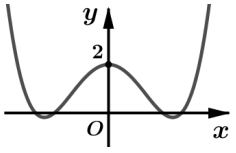


A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x)=-1$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=a\ (-2<a<-1)$, $x=b\ (-1<b<0)$ và $x=c\ (1<c<2)$. Nhận thấy các nghiệm này đều khác -2. Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCĐ. **Chọn D.**

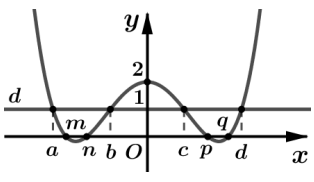
Câu 2. Cho hàm trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2018x}{f(x)\left[f(x)-1\right]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải. Ta có $f(x)\left[f(x)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)\left[f(x)-1\right]=0$ có 8 nghiệm phân biệt trong đó không có nghiệm nào bằng 0

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số có 8 đường tiệm cận đứng.



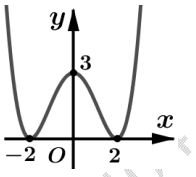
GV: Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Lại có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2018x}{f(x)\left(f(x)-1\right)}$ có 9 đường tiệm cận. **Chọn D.**

Câu 3. Cho hàm trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{f(x)}+2019$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

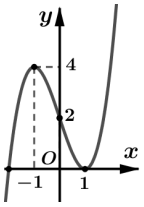
Lời giải. Ta có $g(x)=\dfrac{2018}{f(x)}+2019=\dfrac{2018+2019f(x)}{f(x)}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow 2018+2019f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.\longrightarrow$ ĐTHS có 2 TCĐ: $x=-2$ và $x=2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2019$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=2019\longrightarrow$ ĐTHS có TCN $y=2019$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

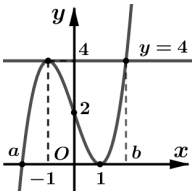


A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $f^2(x)-4f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\quad(1)\\f(x)=4\quad(2)\end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

• (1) có nghiệm $x_1=a<-1$ (nghiệm đơn) và $x_2=1$ (nghiệm kép)



$\longrightarrow f(x)=(x-a)(x-1)^2$.

• (2) có nghiệm $x_3=-1$ (nghiệm kép) và $x_4=b>1$ (nghiệm đơn)

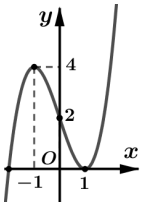
$\longrightarrow f(x)-4=(x+1)^2(x-b)$.

Do đó

$$g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)\left[f(x)-4\right]}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-a)(x-1)^2.(x+1)^2(x-b)}=\frac{1}{(x-a)(x-1).(x+1)(x-b)}$$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCĐ. **Chọn D.**

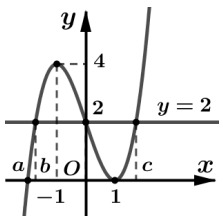
Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\quad(1)\\f(x)=2\quad(2)\end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy



• (1) có nghiệm $x_1=a<-1$ (nghiệm đơn) và $x_2=1$ (nghiệm kép)

$\longrightarrow f(x)=(x-a)(x-1)^2$.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

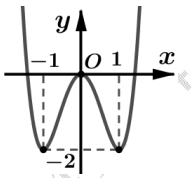
• (2) có nghiệm $x_3=b\in(a;-1)$, $x_4=0$ và $x_5=c>1$

$\longrightarrow f(x)-2=(x-b)x(x-c)$.

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2.(x-b)x(x-c)}=\dfrac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCĐ. **Chọn D.**

Câu 6. Cho hàm trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x(x-1)(x+1)^2}{f^2(x)+2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



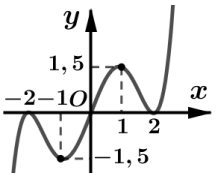
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $f^2(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=0 & (1)\\ f(x)=-2 & (2)\end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có

• $(1)\longrightarrow f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$. • $(2)\longrightarrow f(x)=(x-a)x^2(x-b)$.

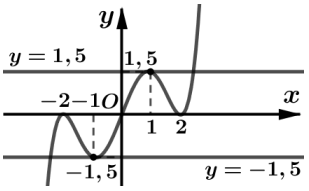
Do đó $g(x)=\dfrac{1}{x(x-1)(x-a)(x-b)}$ $\longrightarrow$ ĐTHS $g(x)$ có 4 đường TCĐ. **Chọn D.**

Câu 7. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^3-x}{4f^3(x)-9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Ta có $4f^3(x)-9f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=0 & (1)\\ f(x)=-1{,}5 & (2)\\ f(x)=1{,}5 & (3)\end{array}\right.$.



Dựa vào đô thị, ta có

• $(1)\longrightarrow f(x)=(x+2)^2x(x-2)^2$.

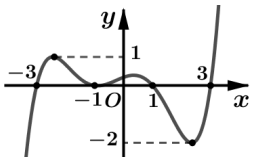
• (2) có nghiệm $x=a<-2$ (nghiệm bội lẻ) và $x=-1$ (nghiệm bội chẵn). (4)

• (3) có nghiệm $x=b>2$ (nghiệm bội lẻ) và $x=1$ (nghiệm bội chẵn). (5)

Do đó $g(x)=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{4f^3(x)-9f(x)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)^2(x-2)^2\left[4f^2(x)-9\right]}$. (6)

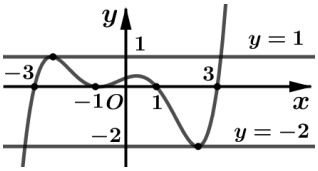
Từ (4), (5) và (6) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường TCĐ. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f^2(x)+f(x)-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa là $x\ge 0$.



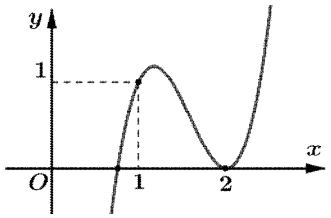
Xét $f^2(x)+f(x)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=1 & (1)\\ f(x)=-2 & (2)\end{array}\right.$.

• (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\in(-3;-1)\ (\text{loại})\\ x=b>3\ (\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

• (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=c<-3\ (\text{loại})\\ x=d\in(1;3)\ (\text{thỏa})\end{array}\right.$.

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCĐ. **Chọn B.**

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

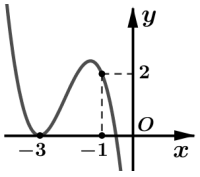
Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x-1}$ có nghĩa là $x\ge 1$. Xét $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1)\\ f(x)=1 \quad (2)\end{array}\right.$.

• (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1=a<1 \ (\text{loai})\\ x_2=2 \ (\text{nghiem kep})\end{array}\right.$. • (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_3=1\\ x_4=c\in(1;2).\\ x_5=d>2\end{array}\right.$

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.(x-a)(x-2)^2.(x-1)(x-c)(x-d)}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x-a)(x-2)(x-c)(x-d)}$

$\xrightarrow{x\ge 1}$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCĐ. **Chọn B.**

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x^2+x}$ có nghĩa là $x\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.

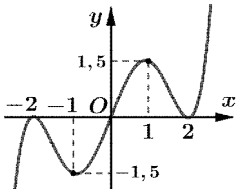
Xét $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1)\\ f(x)=2 \quad (2)\end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị, ta có

• (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1=-3 \ (\text{nghiem kep})\\ x_2=a\in(-1;0) \ (\text{loai})\end{array}\right.$. • (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_3=-1\\ x_4=b\in(-3;-1).\\ x_5=c<-3\end{array}\right.$

Do đó $g(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.(x+3)^2(x-a).(x+1)(x-b)(x-c)}=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x.(x+3)(x-a).(x-b)(x-c)}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCĐ là $x=0,\ x=b,\ x=-3,\ x=c$. **Chọn C.**

Câu 11. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x-2\sqrt{x-1}}{4f^3(x)-9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x-1}$ có nghĩa là $x\ge 1$.

Ta có $g(x)=\dfrac{x-2\sqrt{x-1}}{4f^3(x)-9f(x)}=\dfrac{(x-2)^2}{f(x)\left[4f^2(x)-9\right]\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}$.

• $x+2\sqrt{x-1}>0,\ \forall x\ge 1$. • $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2(\text{loai})\\ x=0(\text{loai})\\ x=2(\text{nghiem kep})\end{array}\right.\rightarrow$ triet tieu.

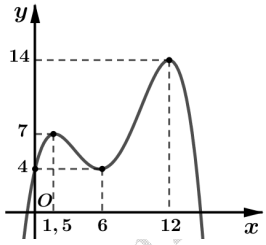
GV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

• $f(x)=-1,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<-2 \text{ (loại)} \\ x=-1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

• $f(x)=1,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=b>2 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCĐ. **Chọn A.**

Câu 12. Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x^2+5x-4x\sqrt{2x+1}}{f^2(x)-11f(x)+28}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 3. **B.** 4.
C. 5. **D.** 6.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{2x+1}$ có nghĩa là $x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có $g(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{2x+1}-2\right)^2}{f^2(x)-11f(x)+28}=\dfrac{x(2x-3)^2}{\left[f(x)-7\right]\left[f(x)-4\right]\left(\sqrt{2x+1}+2\right)^2}$.

• $f(x)=4$ có nghiệm $x=0$, $x=6$ (nghiệm kép) và $x=a>12$

$\longrightarrow f(x)-4=x(x-6)^2(x-a)$.

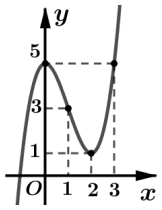
• $f(x)=7$ có nghiệm $x=1,5$ (nghiệm kép), $x=b\in(6;12)$ và $x=c\in(12;a)$

$\longrightarrow f(x)-7=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2(x-b)(x-c)$.

Suy ra $g(x)=\dfrac{4}{(x-6)^2(x-a).(x-b)(x-c).\left(\sqrt{2x+1}+2\right)^2}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)-2\sqrt{x^2-3x+1}}{f^2(x)-6f(x)+5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x^2-3x+1}$ có nghĩa là $x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x+1}-1\right)^2}{\left[f(x)-1\right]\left[f(x)-5\right]}=\dfrac{x^2(x-3)^2}{\left[f(x)-1\right]\left[f(x)-5\right]\left(\sqrt{x^2-3x+1}+1\right)^2}$.

• $f(x)=1$ có nghiệm $x=a<0$ (nghiệm đơn) và $x=2$ (nghiệm kép).

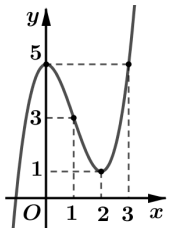
• $f(x)=5$ có nghiệm $x=0$ (nghiệm kép) và $x=3$ (nghiệm đơn).

Suy ra $g(x)=\dfrac{x^2(x-3)^2}{(x-a)(x-2)^2x^2(x-3)\left(\sqrt{x^2-3x+1}+1\right)^2}=\dfrac{x-3}{(x-2)^2(x-a)\left(\sqrt{x^2-3x+1}+1\right)^2}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x=a$. **Chọn A.**

Cv. Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141...

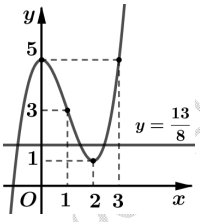
Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{10x+9}+\sqrt{5-2x}}{8f^2(x)-13f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Điều kiện để căn thức có nghĩa là $\begin{cases}10x+9\ge 0\\5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{9}{10}\le x\le \dfrac{5}{2}$.

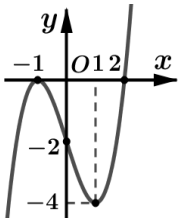
Từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta tìm được $f(x)=x^3-3x^2+5$.



- $f(x)\ne 0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{9}{10};\dfrac{5}{2}\right]$.
- $f(x)=\dfrac{13}{8}\xrightarrow{-\frac{9}{10}\le x\le\frac{5}{2}}\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(2;\dfrac{5}{2}\right)\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & (\text{nghiem kep})\\x=2 & (\text{nghiem don})\end{array}\right.$

$\longrightarrow f(x)=(x+1)^2(x-2)$. Khi đó $g(x)=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2(x-2)}}{(x+1)^2(x-1)(x-3)}$.

Vì hàm số $\sqrt{f(x)}$ xác định trên $\{-1\}\cup[2;+\infty)$ nên $x=-1,\ x=1$ không là các đường TCĐ. Vậy ĐTHS $g(x)$ có 1 đường TCĐ là $x=3$. **Chọn A.**

Vấn đề 2) Tìm số đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	↗	4	↘	-5	↗	4	↘	$-\infty$

Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có ba đường tiệm cận đứng ?

A. $m<-5$. **B.** $m=-5$. **C.** $-5<m<4$. **D.** $-5\le m<4$.

Lời giải. Để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có ba tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)-m=0$ có ba nghiệm phân biệt. Dựa vào BBT $\longrightarrow m=-5$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận (chỉ tính đường tiệm đứng và đường tiệm cận ngang) ?

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'			$+$		$-$
f	$-\infty$		↗ $+\infty$	↘ 1	↘ 0

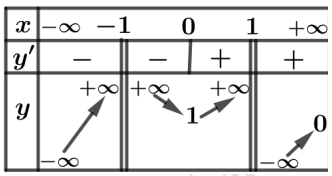
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \longrightarrow \text{TCD}: x=-1\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty \longrightarrow \text{TCD}: x=3\end{cases}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \longrightarrow$ TCN: $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 18. Hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có bảng biến thiên như hình bên. Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-1}$. Tính $k+l$.



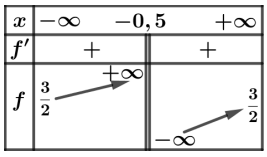
A. $k+l=2$. **B.** $k+l=3$. **C.** $k+l=4$. **D.** $k+l=5$.

Lời giải. Dựa vào BBT, ta thấy $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=a<-1\end{array}\right.\longrightarrow$ ĐTHS $g(x)$ có hai TCĐ.

Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=0\longrightarrow y=0 \text{ TCN}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=-1\longrightarrow y=-1 \text{ TCN}\end{cases}$.

Vậy $k=2$, $l=2\longrightarrow k+l=4$. **Chọn C.**

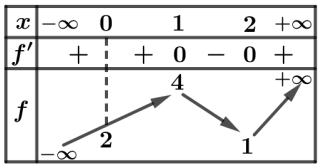
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f^2(x)-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $f^2(x)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=-1 & (1)\\ f(x)=1 & (2)\end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy mỗi phương trình (1) và (2) đều có một nghiệm (hai nghiệm này khác nhau) $\longrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCĐ. **Chọn C.**

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{f^2(x)-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $f^2(x)-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=-2 & (1)\\ f(x)=2 & (2)\end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

• (1) có nghiệm duy nhất $x=a<0$

$\longrightarrow f(x)+2=h(x).(x-a)$ với $h(x)$ là hàm bậc hai và $h(x)=0$ vô nghiệm.

• (2) có nghiệm $x=0$, $x=b\in(1;2)$ và $x=c\in(2;+\infty)$

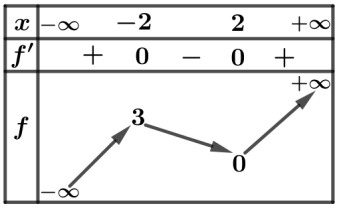
$\longrightarrow f(x)-2=x(x-b)(x-c)$.

Do đó $g(x)=\dfrac{x(x-2)}{h(x)(x-a).x(x-b)(x-c)}=\dfrac{(x-2)}{h(x)(x-a).(x-b)(x-c)}$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng. **Chọn C.**

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?



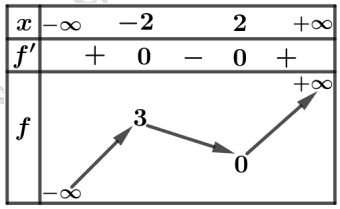
A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải. Dựa vào BTT, ta thấy phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-2,\\ x=b\in(-2;2).\\ x=c>2\end{array}\right.$

Suy ra $f(3-x)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x=a\\ 3-x=b\\ 3-x=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-a\\ x=3-b\\ x=3-c\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCĐ. **Chọn D.**

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(3-x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?



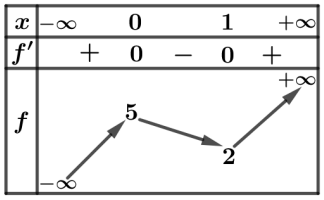
A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải. Dựa vào BTT, ta thấy phương trình $f(x)=4$ có duy nhất nghiệm $x=a>2$.

Suy ra $f(3-x)-4=0\Leftrightarrow 3-x=a\Leftrightarrow x=3-a$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường TCĐ. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\log_2 f^2(x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $\log_2 f^2(x)-4=0\Leftrightarrow f^2(x)=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-4\ \ (1)\\ f(x)=4\ \ \ (2)\end{array}\right.$.

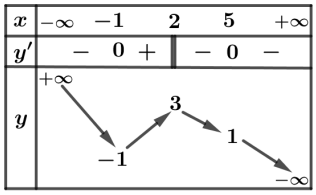
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

• (1) có 1 nghiệm $x=a<0$.

• (2) có 3 nghiệm $x=b\in(a;0)$, $x=c\in(0;1)$ và $x=c>1$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{e^{f^2(x)}-e}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?



A. 3. **B.** 4.
C. 5. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $e^{f^2(x)}-e=0\Leftrightarrow f^2(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\ \ (1)\\ f(x)=1\ \ \ (2)\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

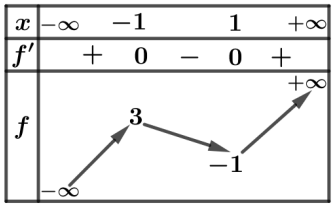
• (1) có 2 nghiệm $x=-1$ và $x=a>5$.

• (2) có 3 nghiệm $x=b<-1$, $x=c\in(-1;2)$ và $x=5$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng. **Chọn C.**

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 25. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{4x+5}$ có nghĩa là $x\ge -\dfrac{5}{4}$.

Từ bảng biến thiên, ta xác định được hàm số $f(x)=x^3-3x+1$.

Ta có $g(x)=\dfrac{4(x-1)^2}{(|f(x)|-1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$.

• $2x+7+3\sqrt{4x+5}>0,\ \forall x\ge -\dfrac{5}{4}$.

• $|f(x)|-1=0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}\,(\text{loai}) \end{array}\right.$ hoặc $f(x)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\text{nghiemkep})\longrightarrow \text{triet tieu}\\ x=-2\,(\text{loai}) \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCĐ là $x=0,\ x=\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Vấn đề 3) Tìm số đường tiệm cận thông qua biểu thức của hàm số

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m\in\{-1;-2\}$. **D.** $m\in\{-1;2\}$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=\dfrac{1}{-1+2}=1\longrightarrow$ đồ thị hàm số luôn có TCN $y=1$.

Do đó để ycbt thỏa mãn khi $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{m+2}\Leftrightarrow m=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+2}=\infty\Leftrightarrow m=-2 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên của tham số thực $m\in[-3;6]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m+2}-x-1}$ có đúng 4 đường tiệm cận ?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\dfrac{1}{-\sqrt{2}-1}$ nên ĐTHS có 2 đường TCN.

Do đó để yêu cầu bài toán thỏa mãn khi ĐTHS có đúng 2 TCĐ

$\Leftrightarrow$ phương trình $\sqrt{2x^2-2x-m+2}-x-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Ta có $\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x-m+2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -1\\ x^2-4x-m+1=0 \end{cases}$. (*)

Để (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 4.1 - m + 1 \neq 0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ m \neq -2 \\ (x_1+1)(x_2+1) \geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) \geq 0 \end{cases} \xleftrightarrow[x_1x_2=-m+1]{x_1+x_2=4} (**) \begin{cases} -3 < m \leq 6 \\ m \neq 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 28. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in (-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - mx - 3m > 0 \end{cases}$. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình $x^2 - mx - 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) \geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) \geq 0 \end{cases} \xleftrightarrow[x_1x_2=-3m]{x_1+x_2=m} \begin{cases} m^2 + 12m > 0 \\ -3m + m + 1 \geq 0 \\ m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \dfrac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 29. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in \left[4; \dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $m \in \left(4; \dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $m \in [8; 9)$. **D.** $m \in (0; 9]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}$. Tương tự như bài trên, yêu cầu phương trình $x^2 - 6x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 4] \longrightarrow 4 \leq m < \dfrac{9}{2}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\left[x^2 - (2m+1)x + 2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $m \in (0; 1)$. **B.** $m \in [0; 1]$. **C.** $m \in (0; 1) \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $m \in (-\infty; 1) \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có TCN: $y = 0$.

Do đó để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận $\longrightarrow$ đồ thị hàm số phải có 3 TCĐ $\longrightarrow$ phương trình $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - m > 0 \\ x_2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ (x_1 - m)+(x_2 - m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-1; 3]$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - \sqrt{mx^2+1}}{(x-1)^2}$ có đường tiệm cận đứng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x \to 1}\left(2x - \sqrt{mx^2+1}\right) = 2 - \sqrt{m+1}$ với $m \geq -1$. Do đó với $m < -1$ thì hàm số không có giới hạn khi $x \to 1$ nên ĐTHS không có TCĐ.

Gv. Lương Văn Huy - T.TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

• Với $\begin{cases} m \ge 1 \\ m \ne 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1}\left(2x-\sqrt{mx^2+1}\right)=2-\sqrt{m+1}\ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0 \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} y=\pm\infty$ nên ĐTHS có TCĐ là $x=1$.

• Với $m=3$ ta có $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+1}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2\left(2x+\sqrt{3x^2+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\left(2x+\sqrt{3x^2+1}\right)(x-1)}=\infty$ nên ĐTHS có TCĐ là $x=1$.

Vậy để ĐTHS có TCĐ thì $m\ge -1 \xrightarrow[m\in[-1;3]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1;0;1;2;3\}$. **Chọn D.**

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y=ax+\sqrt{4x^2+1}$ có tiệm cận ngang ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax+\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(a^2-4\right)x^2-1}{ax-\sqrt{4x^2+1}}$.

Với $a^2-4\ne 0$ ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(a^2-4\right)x^2-1}{ax-\sqrt{4x^2+1}}=\infty\longrightarrow$ ĐTHS không có TCN.

Với $a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2$ ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(a^2-4\right)x^2-1}{ax-\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{ax-\sqrt{4x^2+1}}=0\longrightarrow$ ĐTHS có TCN là $y=0$. Vậy $a=\pm 2$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m<0$. **B.** $m=0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải. Khi $m>0,$ ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}\longrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\longrightarrow y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN.

Với $m=0$ suy $y=\dfrac{x+1}{1}\longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m<0$ thì hàm số có TXĐ là một đoạn nên đồ thị hàm số không có TCN.
Vậy với $m>0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng một tiệm cận ngang ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{m}}$ với $m\ge 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}}=\dfrac{1}{1-\sqrt{m}}$ với $m\ge 0,\ m\ne 1$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nếu $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{4}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2.\dfrac{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1\right)}{4}=-\infty$, suy ra hàm số chỉ có đúng một TCN là $y=\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{do } \lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{1}{2} \text{ khi } m=1\right)$. Do đó giá trị $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu $\begin{cases} m\ge 0 \\ m\ne 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{m}}=\dfrac{1}{1-\sqrt{m}}\Leftrightarrow m=0.$

Vậy $m=0,\ m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=e^{\frac{3x-\sqrt{mx^2+1}}{x-\sqrt{(2018-m)x^2+1}}}$ có hai tiệm cận ngang ?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải. Nếu $m<0$ hoặc $m>2018$ thì TXĐ không chứa $\pm\infty$ nên không có TCN.

Xét $0\le m\le 2018$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=e^{\frac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}}}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=e^{\frac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{2018-m}}}$.

Để đồ thị hàm số có hai TCN ta cần $\begin{cases} 0\le m\le 2018 \\ 1-\sqrt{2018-m}\ne 0 \\ \dfrac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}}\ne\dfrac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{2018-m}} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le m\le 2018 \\ m\ne 2017 \\ m\ne\dfrac{9081}{5} \end{cases}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;...;2018\}\setminus\{2017\}$. **Chọn C.**

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN – TIỆM CẬN - GV : LƯƠNG VĂN HUY - 0969141404

Câu 1. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 2. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$ là?

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Câu 3. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-4}$ là ?

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Câu 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x^3-1}$ là ?

A.0 **B.1** **C.2** **D.4**

Câu 5. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$ là?

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Câu 6. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+2017}}{4x-1}$ là ?

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Câu 7. Trong số các hàm số sau, đồ thị hàm số nào có tiệm cận ngang ?

A. $y=\dfrac{x}{2}+2018$ **B.** $y=\dfrac{2017x^2+10}{2016x-1}$ **C.** $y=\dfrac{-x+2017}{x+2}$ **D.** $y=\dfrac{x^2+2}{4x-5}$

Câu 8. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{1-4x^2}}{5x+1}$ là ?

A.1 **B.2** **C.3** **D.0**

Câu 9. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+1}$ là?

A.1 **B.2** **C.3** **D.0**

Câu 10. ***(Đề thi thử THPT Chu Văn An 2017)*** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$ là

A. $y=1$ **B.** $x=\pm 1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=1$

Câu 11. ***(Thi thử chuyên Hạ Long 2017)*** Tìm số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+5}}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 12. ***(Thi thử chuyên HN – lần 3)*** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. ***(Đề khảo sát sở GD & ĐT HN 2017)*** Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

A. $y=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=1$ **D.** $x=2$

Câu 14. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-1}{x^4-4x^2+3}$ là ?

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$ là ?

A.1 B.2 C.3 D.4

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 16. ***(Trường THPT Triệu Sơn 2 lần 1 năm 2017)*** Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 17. ***(Trường THPT Triệu Sơn 1 lần 1 năm 2017)*** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x+1}$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 18. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}$

A. $y=2.$ **B.** $x=1.$ **C.** $y=-2$ và $y=0.$ **D.** $y=1.$

Câu 19. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 1 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 20. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+6}}$

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 21. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{x+d}$ đi qua điểm $M(2;5)$ và có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ thì tổng $a+d$

A. 1 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 3

Câu 22. ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-16\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-16\\m=0\\m=4\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-16\\m=-8\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=16\end{array}\right.$.

Câu 23. ***(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 1 năm 2017)*** Tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng 1 tiệm cận ngang là

A. $m=0$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=0\end{array}\right.$ **C.** $m=4$ **D.** $0\le m\le 4$

Câu 24. ***(Sở GD và ĐT Quảng Ninh năm 2017)*** Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x^2+20}{x^2-5x-14}$

A. $\left\{\begin{array}{l}x=-2\\x=7\end{array}\right.$ **B.** $x=-2$ **C.** $\left\{\begin{array}{l}x=2\\x=-7\end{array}\right.$ **D.** $x=7$

Câu 25. ***(Sở GD và ĐT Hà Nam năm 2017)*** Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}.$

A. $x=2.$ **B.** $x=-2.$ **C.** $x=-2$ và $x=-1.$ **D.** $x=2$ và $x=1.$

Câu 26. ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh năm 2017)*** Tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2017+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có hai đường tiệm cận đứng là:

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-12)\cup(0;+\infty)$

Câu 27. ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)*** Đồ thị hàm số $f(x)=\frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A. Tiệm cận đứng $x=2$, $x=1$; tiệm cận ngang $y=2$.

B. Tiệm cận đứng $x=2$; tiệm cận ngang $y=2$.

C. Tiệm cận đứng $x=2$, $x=1$; tiệm cận ngang $y=2$, $y=3$.

D. Tiệm cận đứng $x=2$,; tiệm cận ngang $y=2$, $y=3$.

Câu 28. ***(Trường THPT Quỳnh Lưu 1 lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ có tất các bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 29. ***(Trường THPT Quảng Xương 3 lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-6}$

A. Đồ thị không có tiệm cận đứng. **B.** $x=-3$ và $x=2$

C. $x=-3$ **D.** $x=2$

Câu 30. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 3 năm 2017)*** Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-1}{x^2+2mx-m}$ có ba tiệm cận là:

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$ **B.** $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$

C. $m\in(-1;0)\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **D.** $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Câu 31. ***(Trường THPT Phan Đình Phùng năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$. **B.** $(-\infty;+\infty)\setminus\{-1;0\}$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 32. ***(Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{(x-m)^2(2x-m)}{\sqrt{4x-x^2}-2}$ có tiệm cận đứng:

A. $m\neq 4$ **B.** $m\in\mathbb{R}$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $m\neq\{2;4\}$

Câu 33. ***(Trường THPT Ngô Sỹ Liên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$, các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình lần lượt là:

A. $x=\sqrt{2}, y=\frac{1}{2}$ **B.** $x=4, y=1$ **C.** $x=4, y=-\frac{1}{2}$ **D.** $x=2, y=1$

Câu 34. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh năm 2017)*** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-4}+x^2-2}{3x^2-10x+3}$ là

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 35. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $m=0$ **B.** $m\leq 0$ **C.** $m\in\{0;4\}$ **D.** $m\geq 4$

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 36. ***(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng một tiệm cận đứng

A. $m\in\{-1;-4\}$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{1;4\}$

Câu 37. ***(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh năm 2017)*** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$ là

A. bốn **B.** ba **C.** một **D.** hai

Câu 38. ***(Trường THPT Lê Hồng Phong năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có 3 tiệm cận

A. $0<m<\dfrac{1}{2}$ **B.** $0<m\le\dfrac{1}{2}$ **C.** $m\le 0$ **D.** $m\ge\dfrac{1}{2}$

Câu 39. ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m>-1\\ m\neq 8\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}m=1\\ m=-8\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq -8\end{cases}$.

Câu 40. ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{3x+2}{|x|+1}$

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3, y=3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1, x=1.$

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

Câu 41. ***(Trường THPT Hai Bà Trưng lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-6x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

A. -27. **B.** 9 hoặc -27. **C.** 0. **D.** 9.

Câu 42. ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m>1$ **B.** $m\neq 0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=1$ và $m=0$

Câu 43. ***(Trường THPT Đông Anh năm 2017)*** Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-6x+m}{4x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. $m=16$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=8\end{array}\right.$ **C.** $m=2$ **D.** $m=1$

Câu 44. ***(Trường THPT Đoàn Thượng năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 2016.

A. $m=1008$. **B.** $m=\pm 504$. **C.** $m=\pm 252$. **D.** $m=\pm 1008$.

GV : Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 45. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2-2x+1}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị (C) có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

C. Đồ thị (C) có 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 46. ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Biết rằng các đường tiệm cận của đường cong $(C): y=\dfrac{5x-1-\sqrt{x^2-1}}{x-4}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (H) là một hình vuông có chu vi bằng 16.
B. (H) là một hình chữ nhật có chu vi bằng 8.
C. (H) là một hình chữ nhật có chu vi bằng 12.
D. (H) là một hình vuông có chu vi bằng 4.

Câu 47. ***(Trường THPT Chuyên Vị Thanh năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\left(m^2-1\right)x^2+x+2}}{x+1}$ có đúng một tiệm cận ngang.

A. $m<1$ hoặc $m>1$.
B. $m>0$.
C. $m=\pm 1$.
D. Với mọi giá trị m.

Câu 48. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của m để (C) không có tiệm cận đứng.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=0$ hoặc $m=1$ **D.** $m=0$

Câu 49. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên lần 2 năm 2017)*** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 50. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên lần 2 năm 2017)*** Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^3-2}{x^2-3x+2}$ có 2 tiệm cận đứng?

A. $m\neq 2;\ m\neq \dfrac{1}{4}$ **B.** $m\neq 1;\ m\neq 2$ **C.** $m\neq 1$ **D.** $m\neq 0$

Câu 51. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{bx-2}$. Xác định a và b để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng và đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận ngang.

A. $a=1;b=2$. **B.** $a=-1;b=-2$. **C.** $a=2;b=-2$. **D.** $a=2;b=2$.

Câu 52. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 2 năm 2017)*** Tìm số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\sqrt{x^2+1}-x$

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 53. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017)*** Tìm các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng

A. $m=0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ **C.** $m>-1$ **D.** $m>1$

Câu 54. ***(Trường THPT Chuyên SPHN lần 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$y=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

A. $x=\pm 1, y=0$ **B.** $x=\pm 1, y=1$ **C.** $y=0$ **D.** $x=\pm 1$

Câu 55. ***(Trường THPT Chuyên SPHN lần 4 năm 2017)*** Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

A. $x=1, y=0$ **B.** $y=0$ **C.** $x=\pm 1, y=0$ **D.** $x=\pm 1, y=1$

ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.A	5.A	6.C	7.C	8.D	9.A	10.C
11.C	12.C	13.C	14.D	15.A	16.B	17.B	18.C	19.B	20.C
21.A	22.A	23.A	24.D	25.B	26.B	27.B	28.D	29.A	30.D
31.A	32.C	33.B	34.A	35.C	36.A	37.B	38.A	39.D	40.A
41.B	42.D	43.B	44.C	45.C	46.C	47.C	48.C	49.C	50.A
51.A	52.B	53.B	54.C	55.B	56.	57.	58.	59.	60.
61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
91.	92.	93.	94.	95.	96.	97.	98.	99.	100.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

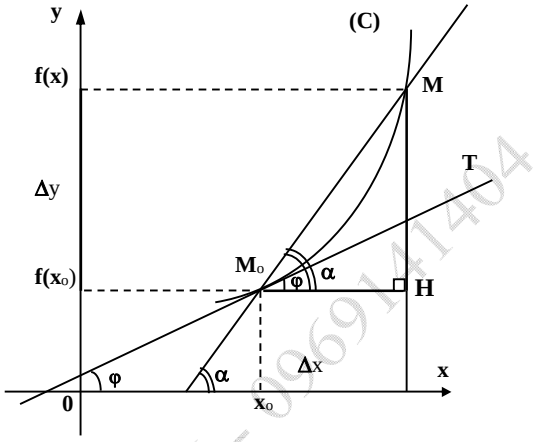
PHẦN 5 - TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tiếp tuyến của đường cong

a. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc đồ thị (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta kí hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x_M\to x_0} k_M = k_0$



Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua điểm M_0 và có hệ số góc k_0 là vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi M chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0, còn M_0 gọi là tiếp điểm.

Ta có hệ số góc của đường thẳng M_0M là $k_M = \dfrac{f(x_M)-f(x_0)}{x_M-x_0}$

Vì hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 nên theo định nghĩa đạo hàm có

$$f'(x_0)=\lim_{x_M\to x_0}\frac{f(x_M)-f(x_0)}{x_M-x_0}=\lim_{x_M\to x_0}k_M=k_0$$

b. Ý nghĩa hình học của tiếp tuyến: Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Chú ý: Góc tạo bởi tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M(x_0;f(x_0))$ người ta còn gọi là độ dốc của đồ thị (C) tại M (hay tại x_0).

2. Phương trình tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị hàm số

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;f(x_0))$ có phương trình là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Trong đó $k=f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M

3. Các bước giải bài toán tiếp tuyến

- **Bước 1:** Tiếp điểm $M_0(x_0,f(x_0))$
- **Bước 2:** Tính $y'\Rightarrow K=y'(x_0)$
- **Bước 3:** Phương trình tiếp tuyến: $y=K(x-x_0)+f(x_0)$

4. Hệ thống nhận xét về tiếp tuyến

- **Nhận xét 1:** Nếu đã biết hoành độ tiếp điểm thì thay vào hàm số ở đề bài để tìm tung độ và ngược lại.
- **Nhận xét 2:** Nếu tiếp tuyến song song với $y=ax+b$ thì $k=a$. Nếu tiếp tuyến vuông góc với $y=ax+b\Leftrightarrow k.a=-1$
- **Nhận xét 3:** Nếu tiếp tuyến đi qua điểm nào thì thay toạ độ điểm ấy vào phương trình tiếp tuyến.
- **Nhận xét 4:** Nếu tiếp tuyến tạo với trục hoành 1 góc α thì $k=\pm\tan\alpha$

5. Sự tiếp xúc của đường cong

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Ta nói rằng hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0,y_0)$ nếu M là 1 điểm chung của 2 đường cong đó và hai đường cong có tiếp tuyến chung tại tiếp điểm M.
- Hai đường cong tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;f(x_0))$ (Điểm này thuộc đồ thị)

Bài toán tổng quát. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ thuộc đồ thị (C).

a. Phương pháp: Dựa vào định nghĩa, phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M_0 là:

$$y=k(x-x_0)+f(x_0) \quad (*)$$

- Với x_0 là hoành độ tiếp điểm
- Với $y_0=y(x_0)=f(x_0)$ là tung độ tiếp điểm
- Với $k=y'(x_0)=f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến

Để viết được phương trình tiếp tuyến ta phải xác định được x_0; y_0 và k

Một số loại cơ bản

Loại 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\in(C)$

- Tính đạo hàm của hàm số, thay x_0 ta được hệ số góc k

Áp dụng $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm

Loại 2: Cho trước hoành độ tiếp điểm x_0

- Tính đạo hàm của hàm số, thay x_0 ta được hệ số góc k
- Thay x_0 vào hàm số ta tìm được tung độ tiếp điểm

Áp dụng $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm

Loại 3: Cho trước tung độ tiếp điểm y_0

- Giải phương trình $y_0=f(x_0)$ để tìm x_0
- Tính đạo hàm của hàm số, thay x_0 ta được hệ số góc k

Áp dụng $(*)$ ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm

Chú ý: Có bao nhiêu giá trị của x_0 thì có bấy nhiêu tiếp tuyến

b. Hướng dẫn sử dụng máy tính:

Cách 1. Tiếp tuyến của hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 thì có tung độ y_0 và hệ số góc k là

$$\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ k=y'(x_0)=\dfrac{d(f(X))}{dx}\Big|_{x=x_0} \end{cases} \Rightarrow PTTT: y=k(x-x_0)+y_0$$

Chú ý: Cũng có thể tính luôn một lần bằng cách nhập

$$\frac{d(f(X))}{dx}\Big|_{x=X} : f(X) \xrightarrow[X=x_0]{Calc} k; y_0 \Rightarrow PTTT: y=k(x-x_0)+y_0$$

Cách 2. Giả sử phương trình tiếp tuyến cần lập có dạng $y=kx+m$

* Tìm hệ số góc k : Nhập $\dfrac{d(f(X))}{dx}\Big|_{x=X} \xrightarrow[X=x_0]{Cacl}$, bấm dấu "=" tìm được k

GV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

* Tìm m: Bấm mũi tên sang trái $\boxed{\leftarrow}$ sửa thành $\left.\frac{d\left(f\left(X\right)\right)}{dx}\right|_{x=X}\times\left(-X\right)+f\left(X\right)\xrightarrow[X=x_0]{Cacl}$, bấm dấu "=" tìm được m

c. Với hàm bậc ba thì tiếp tuyến tại các điểm cực trị song song với trục hoành tức là có bao nhiêu cực trị thì có bấy nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành.

d. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\ \left(C\right)$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm trên $\left(C\right)$ có hoành độ x_0, với $f''\left(x_0\right)=6$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải:

Tính $f'\left(x_0\right)=-x_0^{\ 2}+4x_0-3\ ;\ f''\left(x_0\right)=-2x_0+4$

Theo giả thiết $f''\left(x_0\right)=6\Leftrightarrow-2x_0+4=6\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0\left(-1\right)=\frac{16}{3}$

$k=f'\left(x_0\right)=f'\left(-1\right)=-\left(-1\right)^2+4\left(-1\right)-3=-8$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y-\frac{16}{3}=-8\left(x+1\right)\Leftrightarrow y=-8x-\frac{8}{3}$

Chọn đáp án A.

Nhận xét: Để dùng máy tính ta làm như sau: Sau khi tìm được $x_0=-1$

Cách 1: Nhập $\left.\frac{d\left(-\frac{X^3}{3}+2X^2-3X\right)}{dx}\right|_{x=X}:-\frac{X^3}{3}+2X^2-3X\xrightarrow[X=x_0]{Cacl}-8;\frac{16}{3}$

$\Rightarrow PTTT:y-\frac{16}{3}=-8\left(x+1\right)\Leftrightarrow y=-8x-\frac{8}{3}$

Cách 2: Nhập $\left.\frac{d\left(-\frac{X^3}{3}+2X^2-3X\right)}{dx}\right|_{x=X}\xrightarrow[X=x_0]{Cacl}-8$. Bấm mũi tên sang trái $\boxed{\leftarrow}$ sửa thành

$\left.\frac{d\left(-\frac{X^3}{3}+2X^2-3X\right)}{dx}\right|_{x=X}\times\left(-X\right)-\frac{X^3}{3}+2X^2-3X\xrightarrow[X=x_0]{Cacl}-\frac{8}{3}$

$\Rightarrow PTTT:y=-8x-\frac{8}{3}$

Chú ý: Khi đã quen với việc bấm máy thì các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ tự thực hành bấm máy.

Ví dụ 2. ***(THPT Xuân Trường – Nam Định – học kỳ I năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+x+1$ có đồ thị $\left(C\right)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại giao điểm với trục tung là:

A. $y=-x-1$ **B.** $y=x+1$ **C.** $y=x-1$ **D.** $y=-x+1$

Giải.

Đồ thị $\left(C\right)$ cắt trục tung tại điểm $M\left(0;1\right)$, ta có $y'=3x^2+6x+1\Rightarrow y'\left(0\right)=1$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại $M\left(0;1\right)$ là $y=y'\left(0\right)\left(x-0\right)+y\left(0\right)=x+1.$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 3. ***(THPT Xuân Trường – Nam Định – học kỳ I năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ có phương trình là:

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $2x+2y=3$ **B.** $2x-2y=-1$ **C.** $2x+2y=-3$ **D.** $2x-2y=1$

Giải.

Ta có $x_0=\frac{1}{2}$ và $y'=-\frac{1}{2x\sqrt{2x}}\Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ là $y=-1\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\Rightarrow 2x+2y=3$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 4. ***(THPT Hiệp Hòa – Bắc Giang – học kỳ I năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có phương trình là:

A. $y=x+2$ **B.** $y=x-1$ **C.** $y=-x-3$ **D.** $y=-x+2$

Giải.

Ta có $y'=-\frac{4}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(x_0)=y'(-1)=-1$ và $y(x_0)=y(-1)=-2$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=-1(x+1)-2=-x-3$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 5. ***(Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc năm 2017)*** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ tại điểm $M(1;0)$.

A. $y=-\frac{1}{3}(x-1)$ **B.** $y=3(x+1)$ **C.** $y=\frac{1}{3}(x-1)$ **D.** $y=\frac{1}{9}(x-1)$

Giải.

Tại điểm $M(1;0)$ có $x_0=1$ và $y'=\frac{3}{(x+2)^2}\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại M là $y=\frac{1}{3}(x-1)+0=\frac{1}{3}(x-1)$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 6. ***(Sở GD và ĐT Bạc Liêu năm 2017)*** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-2}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 4 là:

A. $y=-x+\frac{2}{3}$ **B.** $y=-5x+\frac{40}{3}$ **C.** $y=-\frac{5}{9}x+\frac{39}{9}$ **D.** $y=-x+6$

Giải.

Ta có $y_0=4\Rightarrow y(x_0)=\frac{3x_0-2}{x_0-1}=4\Leftrightarrow 3x_0-2=4x_0-4\Leftrightarrow x_0=2\Rightarrow M(2;4)$

Khi đó $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-(x-2)+4=-x+6$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 7. ***(THPT Chuyên Thái Bình năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là điểm $A(1;0) \Rightarrow x_0 = 1$

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 0 = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 8. ***(THPT Mỹ Đức A – Hà Nội năm 2017)*** Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của nó với trục hoành. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;3)$ **B.** $N(7;3)$ **C.** $P(10;3)$ **D.** $Q(10;-3)$

Giải.

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là điểm $A(1;0)$

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 0 = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

Thử các điểm ta thấy điểm $P(10;3) \in d$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x+3}$ có đồ thị (C). Để tại điểm $A\left(0;-\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc (C), tiếp tuyến của (C) có hệ số góc bằng $\dfrac{10}{9}$, các giá trị của a và b là:

A. $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$

Giải.

Điểm $A\left(0;-\dfrac{4}{3}\right) \in (C) \Rightarrow y(0) = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{b}{3} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow b = -4$

Tại điểm $A\left(0;-\dfrac{4}{3}\right)$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = y'(0)$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 6x + 3a - b}{(x+3)^2} \Rightarrow y'(0) = \dfrac{3a-b}{9} = \dfrac{10}{9}$ với $b = -4$

$\Rightarrow 3a + 4 = 10 \Rightarrow a = 2$. Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B.

Nhận xét: Đáp án cho các giá trị của a, b cụ thể nên ta có thể thử đáp án như sau:

Nhập $\left.\dfrac{d\left(\dfrac{X^2 + AX + B}{X+3}\right)}{dx}\right|_{x=X} : \dfrac{X^2 + AX + B}{X+3} \xrightarrow[X=0;A=-2;B=4]{Cacl} \dfrac{10}{9}; -\dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 10. ***(THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0;-4)$ và đạt cực đại tại điểm $B(1;0)$. Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

A. $k = 0$ **B.** $k = 24$ **C.** $k = -18$ **D.** $k = 18$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-4) \Rightarrow c=-4$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $B(1;0) \Rightarrow$ điểm B thuộc đồ thị hàm số

$\Rightarrow 1+a+b+c=0 \Rightarrow a+b=3 \quad (1)$. Ta có $y'=3x^2+2ax+b$ và $y''=6x+2a$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 6+2a<0 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-3 \\ a<-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-6x^2+9x-4$

Khi đó hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 là $k=y'(-1)=24$.

Chọn đáp án B.

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm. (Điểm này có thể thuộc đồ thị hoặc không thuộc đồ thị)

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$.

a. Phương pháp:

Cách 1. Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Phương trình đường thẳng *đi qua một điểm* $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc k có dạng:

$d: y=k(x-x_0)+y_0 \quad (*)$

Điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=f(x)$ là hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} f(x)=k(x-x_0)+y_0 \\ f'(x)=k \end{cases}$. Giải hệ này tìm $x \Rightarrow k$ thế vào $(*)$ thu được phương trình tiếp tuyến

Cách 2: Dùng toạ độ tiếp điểm

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ của đồ thị (C) là

$$d: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Theo giả thiết ta có tiếp tuyến đi qua điểm $A \Rightarrow A(x_A;y_A) \in d$

$$\Rightarrow y_A=f'(x_0)(x_A-x_0)+f(x_0)$$

Đây là phương trình chỉ còn một ẩn x_0, giải phương trình ta được $x_0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến d.

Chú ý 1:

- Cần phân biệt rõ câu nói tiếp tuyến ***tại*** một điểm và tiếp tuyến ***đi qua*** điểm
- Tiếp tuyến tại một điểm thì điểm đó luôn thuộc đồ thị và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị
- Tiếp tuyến đi qua một điểm thì điểm đó có thể thuộc đồ thị hoặc không thuộc đồ thị và có thể có ít nhất một tiếp tuyến với đồ thị (nếu có tiếp tuyến)

Chú ý 2: Trong trường hợp cho trước phương trình tiếp tuyến ta có thể thử đáp án bằng cách kiểm tra tiếp tuyến đó có đi qua điểm không và nếu có hai đáp án đi qua điểm thì ta kiểm tra điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đồ thị.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 12. ***(THPT Nguyễn Khuyến – Bình Dương năm 2017)*** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+1$ mà tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(1;0)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Cách 1. Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(1;0)$ có hệ số góc k có phương trình là

$y=k(x-1)+0=kx-k$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x+1=kx-k & (1) \\ 3x^2-2=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thế (2) vào (1) ta được

$$x^3-2x+1=(3x^2-2)(x-1)\Leftrightarrow (x-1)(-2x^2+x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

- Với $x=1\Rightarrow k=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=x-1$
- Với $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{5}{4}$

Cách 2. Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y'=3x^2-2\Rightarrow y'(x_0)=3x_0^2-2$ và $y_0=y(x_0)=x_0^3-2x_0+1$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Rightarrow d: y=(3x_0^2-2)(x-x_0)+x_0^3-2x_0+1$. Ta có tiếp tuyến đi qua $A\Rightarrow A(1;0)\in d$

$$\Rightarrow 0=(3x_0^2-2)(1-x_0)+x_0^3-2x_0+1\Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ x_0=1 \end{array}\right.$$

- Với $x_0=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=x-1$
- Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{5}{4}$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số kẻ từ điểm $A(1;0)$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+2}$ có đồ thị (H). Qua điểm $A(0;-2)$ có thể kẻ đến (H) hai tiếp tuyến, phương trình của hai tiếp tuyến này là:

A. $\left[\begin{array}{l} 9x+2y-4=0 \\ x+2y-4=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 9x+2y+4=0 \\ x+2y+4=0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} 9x-2y-4=0 \\ x-2y-4=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} 9x-2y+4=0 \\ x-2y+4=0 \end{array}\right.$

Giải.

Cách 1. Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(0;-2)$ có hệ số góc k có phương trình là

$y=k(x-0)-2=kx-2$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2}=kx-2 & (1) \\ \dfrac{-2}{(x+2)^2}=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thế (2) vào (1) ta được

$$\frac{x+4}{x+2}=\frac{-2x}{(x+2)^2}-2\Leftrightarrow 3x^2+16x+16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

- Với $x=-4\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-\dfrac{1}{2}x-2\Leftrightarrow x+2y+4=0$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Với $x=-\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{9}{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-\frac{9}{2}x-2\Leftrightarrow 9x+2y+4=0$

Cách 2. Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$

Ta có $y'=\frac{-2}{\left(x+2\right)^2}\Rightarrow y'\left(x_0\right)=\frac{-2}{\left(x_0+2\right)^2}$ và $y_0=y\left(x_0\right)=\frac{x_0+4}{x_0+2}$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$

$\Rightarrow d: y=\frac{-2}{\left(x_0+2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{x_0+4}{x_0+2}$. Ta có tiếp tuyến đi qua $A\Rightarrow A\left(0;-2\right)\in d$

$$\Rightarrow -2=\frac{-2}{\left(x_0+2\right)^2}\left(-x_0\right)+\frac{x_0+4}{x_0+2}\Leftrightarrow 3x_0^2+16x_0+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-4\\x_0=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

- Với $x_0=-4\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y=-\frac{1}{2}\left(x+4\right)\Rightarrow x+2y+4=0$
- Với $x_0=-\frac{4}{3}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $9x+2y+4=0$.

Chọn đáp án C.

Chú ý:

- Với bài toán tác giả giới thiệu với bạn đọc 1 kĩ thuật tìm k mà không cần tìm x như sau:

Từ hệ trên ta có $\left\{\begin{array}{l}1+\frac{2}{x+2}=kx-2\\\frac{-2}{x+2}=k\left(x+2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{x+2}=kx-3\\\frac{-2}{x+2}=kx+2k\end{array}\right.$.

Trừ theo từng vế ta được $\frac{4}{x+2}=-3-2k\Leftrightarrow x+2=\frac{4}{-3-2k}$, thế vào (2) và rút gọn ta được

$$4k^2+20k+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{9}{2}\end{array}\right.$$

- Ngoài ra ta cũng có thể thử đáp án như sau:

Nhập $\left[\begin{array}{l}9X+2Y+4:X+2Y+4\xrightarrow[X=0;y=-2]{Calc}0;0\\9X-2Y-4:X-2Y-4\xrightarrow[X=0;y=-2]{Calc}0;0\end{array}\right.$ còn lại hai đáp án B, C. Tiếp tục thử với điều kiện tiếp xúc. Xét phương trình $\frac{X+4}{X+2}=\frac{1}{2}X-2$ có hai nghiệm phân biệt nên loại đáp án C, còn với đáp án B có nghiệm kép, nên chọn đáp án B.

- Với các ví dụ tiếp theo đọc giả tự rút ra cách giải ở hai ví dụ trên

Ví dụ 14. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ điểm $A(0;3)$, đó là các đường thẳng:

A. $\left[\begin{array}{l}y=3x+3\\y=-4x+3\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-3x+3\\y=\frac{15}{4}x+3\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}y=4x+3\\y=\frac{13}{4}x+3\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}y=-2x+3\\y=\frac{5}{4}x+3\end{array}\right.$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$

Ta có $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0$ và $y_0=y\left(x_0\right)=x_0^3-3x_0^2+2$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm M là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Rightarrow d: y=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$. Ta có tiếp tuyến đi qua $A\Rightarrow A(0;3)\in d$

$$\Rightarrow \left(3x_0^2-6x_0\right)(-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2=3\Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

- Với $x_0=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-3x+3$
- Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y=\dfrac{15}{4}x+3$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến là: $y=-3x+3$ và $y=\dfrac{15}{4}x+3$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 15. Cho hàm số $y=-x^4+6x^2+5$ có đồ thị (C). Các tiếp tuyến không song song với trục Ox, vẽ từ điểm $A(0;5)$ đến (C) là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=2\sqrt{2}x+5 \\ y=-2\sqrt{2}x+5\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3\sqrt{2}x+5 \\ y=-3\sqrt{2}x+5\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=4\sqrt{2}x+5 \\ y=-4\sqrt{2}x+5\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=5\sqrt{2}x+5 \\ y=-5\sqrt{2}x+5\end{array}\right.$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y'=-4x^3+12x\Rightarrow y'(x_0)=-4x_0^3+12x_0$ và $y_0=y(x_0)=-x_0^4+6x_0^2+5$

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Rightarrow d: y=\left(-4x_0^3+12x_0\right)(x-x_0)-x_0^4+6x_0^2+5$. Ta có d đi qua $A\Rightarrow A(0;5)\in d$

$$\Rightarrow 5=\left(-4x_0^3+12x_0\right)(-x_0)-x_0^4+6x_0^2+5\Rightarrow 3x_0^4-6x_0^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Với $x_0=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=5$
- Với $x_0=\sqrt{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=4\sqrt{2}x+5$
- Với $x_0=-\sqrt{2}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=-4\sqrt{2}x+5$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $y=4\sqrt{2}x+5$ và $y=-4\sqrt{2}x+5$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+4x}{x-1}$ có đồ thị (H). Từ điểm $A(1;-4)$ kẻ được đến (H) một tiếp tuyến duy nhất, phương trình tiếp tuyến này là:

A. $y=-4x$ **B.** $y=4x$ **C.** $y=-4x+1$ **D.** $y=4x+1$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-x_0^2+2x_0-4}{(x_0-1)^2}$ và $y_0=y(x_0)=\dfrac{-x_0^2+4x_0}{x_0-1}$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Rightarrow d: y=\dfrac{-x_0^2+2x_0-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{-x_0^2+4x_0}{x_0-1}$. Ta có tiếp tuyến qua $A\Rightarrow A(1;-4)\in d$

$$\Rightarrow -4=\frac{-x_0^2+2x_0-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\frac{-x_0^2+4x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0=0$$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $d: y = -4x$.

Chọn đáp án A.

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k.

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k_0.

a. Phương pháp: Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ của đồ thị (C) là

$$d: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Và hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$, theo giả thiết $k = k_0 \Rightarrow f'(x_0) = k_0$

Đây là phương trình chỉ còn một ẩn x_0, giải phương trình ta được $x_0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến d.

Chú ý 1: Hệ số góc k một số trường hợp đặc biệt

- Hệ số góc cho ở dạng trực tiếp: $k = 5; k = \pm 1; k = \pm\sqrt{3}; k = \pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}...$
- Hệ số góc cho ở dạng gián tiếp

- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = a$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = -\dfrac{1}{a}$
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc φ với $\varphi \in \left\{15^0; 30^0; 45^0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}....\right\} \Rightarrow$ hệ số góc $|k| = \tan\varphi$
- Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc $\varphi \Rightarrow \tan\varphi = \left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right|$.

Chú ý 2: Có bao nhiêu giá trị của x_0 thì tối đa có bấy nhiêu tiếp tuyến, tuy nhiên tiếp tuyến nào trùng với đường thẳng *d* thì ta loại đi.

Chú ý 3: Ngoài ra ta có thể sử dụng máy tính hoặc thử đáp án

- Dùng máy tính: Biết hệ số góc nên đường thẳng tiếp tuyến có dạng $y = kx + m$

  Để tìm m ta nhập $m = k \times (-X) + f(X) \xrightarrow[X = x_0]{Calc}$
- Thử đáp án: Khi cho trước các đáp án ta thử với hai điều kiện: Điều kiện có hệ số góc và điều kiện tiếp xúc (nghiệm kép)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 17. ***(THPT Xuân Trường – Nam Định – học kỳ I năm 2017)*** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $2x + y + 1 = 0$ là:

A. $2x + y - 7 = 0$ **B.** $2x + y + 7 = 0$ **C.** $2x + y = 0$ **D.** $-2x - y - 1 = 0$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0 - 1)^2}$ và $y_0 = y(x_0) = \dfrac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = -\dfrac{2}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \dfrac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc $k = y'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0-1)^2}$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $2x-y+1=0 \Rightarrow k=-2$

$\Rightarrow \dfrac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x+7$
- Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x-1$ (loại)

Vậy phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $2x+y-7=0$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 18. ***(THPT Hàn Thuyên – học kỳ I năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2-3x+2$ vuông góc với đường thẳng $y = x+1$ là:

A. $y = -x+1$ **B.** $y = -2x-1$ **C.** $y = -2x+1$ **D.** $y = -x-1$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y' = 2x-3 \Rightarrow y'(x_0) = 2x-3 \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến là $k = 2x_0-3$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Rightarrow k=-1 \Rightarrow 2x_0-3=-1 \Leftrightarrow x_0=1$

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = -(x-1) = -x+1$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 19. ***(THPT Hàn Thuyên – học kỳ I năm 2017)*** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4-2x^2+3$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3$ là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y' = 4x^3-4x \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3-4x_0 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến $k = 4x_0^3-4x_0$

Theo giả thiết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3 \Rightarrow k=0$

$\Rightarrow 4x_0^3-4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ có 3 phương trình tiếp tuyến thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 20. ***(THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – học kỳ I năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4+x^2-5$ vuông góc với đường thẳng $x+6y+1999=0$ có phương trình là:

A. $y = 6x-9$ **B.** $y = -6x+6$ **C.** $y = 6x-6$ **D.** $y = -6x+9$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y' = 4x^3+2x \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = y'(x_0) = 4x_0^3+2x_0$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+6y+1999=0 \Rightarrow k=6$

$\Rightarrow 4x_0^3+2x_0 = 6 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=1$ khi đó $y_0 = y(1) = -3$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 6(x-1)-3 = 6x-9$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 21. ***(Trung tâm GDTX Huyện Nhà Bè năm 2017)*** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x+6}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -2x+3$?

A. $y = \dfrac{1}{2}x$ **B.** $y = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ **C.** $y = 2x$ **D.** $y = 2x+\dfrac{5}{4}$

Gv. Lương Văn Huy - TTLTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Xét hàm số $y=\sqrt{2x+6}$ có tập xác định $D=[-3;+\infty)$

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\dfrac{1}{\sqrt{2x_0+6}}$

Theo giả thiết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-2x+3\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x_0+6}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2x_0+6}=2\Leftrightarrow x_0=-1$

Với $x_0=-1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 22. ***(THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc bằng -5 là:

A. $\left[\begin{array}{l}y=-5x+2\\y=-5x+22\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-5x-2\\y=-5x+22\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}y=-5x+2\\y=-5x-22\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}y=5x+2\\y=-5x+22\end{array}\right.$

Giải.

Giả sử tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$

Ta có $y'=\dfrac{-5}{(x-2)^2}\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=y'(x_0)=\dfrac{-5}{(x_0-2)^2}$

Theo giả thiết có $k=-5\Rightarrow \dfrac{-5}{(x_0-2)^2}=-5\Leftrightarrow (x_0-2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=1\end{array}\right.$

- Với $x_0=3\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y_0=y(3)=7\\y'(3)=-5\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=-5x+22$
- Với $x_0=1\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y_0=y(1)=-3\\y'(1)=-5\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=-5x+2$.

Chọn đáp án A.

Dạng 4: Một số bài toán khác liên quan tới viết phương trình tiếp tuyến

a. Phương pháp:

- Từ giả thiết của bài toán thiết lập một phương trình theo x_0
- Giải phương trình này tìm được x_0, quay về bài toán ở dạng 1

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 23. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị *(C)*. Gọi *I* là giao điểm của hai đường tiệm cận của *(C)*. Có bao nhiêu tiếp tuyến của *(C)* biết khoảng cách từ *I* đến tiếp tuyến đó bằng $\sqrt{2}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Giao điểm của hai đường tiệm cận của *(C)* là $I(1;1)$

Gọi $M\left(x_0,\dfrac{x_0-2}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\neq 1)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với *(C)*.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y=\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0-1}\Leftrightarrow d: x-(x_0-1)^2 y+x_0^2-4x_0+2=0$$

Theo giả thiết $d(I,d)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{\left|1-(x_0-1)^2+x_0^2-4x_0+2\right|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 2(1-x_0)^2=1+(x_0-1)^4$$

Đặt $t=(x_0-1)^2$, $t>0$ nên phương trình có dạng: $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1$ (thỏa mãn)

Với $t=1\Rightarrow (x_0-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-y+2=0\\x-y-2=0\end{array}\right.$

Vậy có 2 tiếp tuyến. Chọn đáp án B

Ví dụ 24. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến tại điểm bất kỳ thuộc (C). Biết hình chiếu vuông góc của hai điểm $A(1;1)$, $B(0;-3)$ lên tiếp tuyến trùng nhau.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Giả sử $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ với $y_0=\frac{x_0+3}{x_0+2}$

Hệ số góc tại điểm M_0 là $k=y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0+2)^2}$

Theo giả thiết hình chiếu vuông góc của hai điểm $A(1;1)$, $B(0;-3)$ lên tiếp tuyến trùng nhau điều này tương đương với tiếp tuyến tại M_0 của (C) vuông góc với đường thẳng $AB\Leftrightarrow k.k_{AB}=-1$. Hệ số góc của AB là $k_{AB}=4$

Ta có $k.k_{AB}=-1\Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0+2)^2}.4=-1\Leftrightarrow (x_0+2)^2=4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}\\x_0=-4\Rightarrow y_0=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}d: y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\\d: y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

. Chọn đáp án B

Ví dụ 25. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C). Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết nó cắt đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x-4y-\frac{11}{5}=0$ tại hai điểm M, N sao cho tam giác IMN có diện tích lớn nhất, trong đó $I(1;2)$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Đường tròn (T) có tâm $I(1;2)$ và có bán kính $R=\frac{6}{\sqrt{5}}$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M\left(x_0;\frac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ có phương trình là

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$y-\frac{2x_0+1}{x_0-1}=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)\Leftrightarrow \Delta: 3x+(x_0-1)^2 y-2x_0^2-2x_0+1=0$

$\Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{6|x_0-1|}{\sqrt{9+(x_0-1)^4}}$ (1)

Diện tích tam giác *IMN*

$S_{IMN}=\frac{1}{2}IM.IN.\sin MIN\le \frac{1}{2}IM.IN=\frac{18}{5}\Rightarrow \max S_{IMN}=\frac{18}{5}\Leftrightarrow \widehat{MIN}=90^0$

Khi đó tam giác *IMN* vuông cân với cạnh $IM=R=\frac{6}{\sqrt{5}}$

Gọi *H* là trung điểm của cạnh *BC* ta có $IH=\frac{6}{\sqrt{10}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{6|x_0-1|}{\sqrt{9+(x_0-1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow (x_0-1)^4-10(x_0-1)^2+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_0-1)^2=1\\(x_0-1)^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=0\\x_0=4\\x_0=-3\end{array}\right.$

Tương ứng ta có các tiếp tuyến với các phương trình sau:

$3x+y+1=0;\ 3x+y-11=0;\ 3x+9y-25=0;\ 3x+y-11=0$. Chọn đáp án D

Ví dụ 26. Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (*C*). Gọi *I* là giao điểm hai tiệm cận của (*C*), đường thẳng $d: x-2y+5=0$ cắt (*C*) tại hai điểm *A*, *B* với *A* có hoành độ dương. Số các tiếp tuyến của (*C*) vuông góc với *IA*

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải:

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(1;2)$. Viết lại đường thẳng $d: y=\frac{x+5}{2}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (*C*) và *d* là $\frac{2x+2}{x-1}=\frac{x+5}{2}$

$\Leftrightarrow x=3\Rightarrow A(3;4)$ hoặc $x=-3$ (loại)

Hệ số góc của *IA* là $k'=\frac{3-1}{4-2}=1$. Hệ số góc của đồ thị tại điểm x_0 là $k=\frac{-4}{(x_0-1)^2}$

Do tiếp tuyến vuông góc với *IA*

$\Leftrightarrow k.k'=-1\Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2}=-1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=3\Rightarrow y=-x+7\\x_0=-1\Rightarrow y=-x-1\end{array}\right.$. Chọn đáp án B

Ví dụ 27. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ có đồ thị (*C*). Số phương trình tiếp tuyến với (*C*) tại điểm *M* thuộc (*C*), biết rằng *M* cùng với hai điểm cực trị của (*C*) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 6.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Điểm cực đại, cực tiểu $A(1;2), B(3;-2)$

Phương trình $AB: 2x+y-4=0$, $AB=\sqrt{20}$

Giả sử $M(x_0; x_0^3-6x_0^2+9x_0-2)\ (x_0\ne 3,\ x_0\ne 1)$

Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Chiều cao tam giác *ABM*: $h = d\left(M, AB\right) = \dfrac{\left|x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6\right|}{\sqrt{5}}$

Từ $S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2}h.AB$ suy ra $\left|x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6\right| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y = 9x - 2 \\ x_0 = 4 \Rightarrow y = 9x - 34 \end{array}\right.$

Chọn đáp án B

Ví dụ 28. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ (*C*). Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (*C*), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (*C*) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải:

Giả sử $M\left(x_0; \dfrac{x_0}{x_0 - 1}\right) \in (C)\ \left(x_0 \neq 1\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại *M* có dạng :

$$y = -\frac{1}{\left(x_0 - 1\right)^2}\left(x - x_0\right) + \frac{x_0}{x_0 - 1} \Leftrightarrow -\frac{1}{\left(x_0 - 1\right)^2}x - y + \frac{x_0^2}{\left(x_0 - 1\right)^2} = 0$$

Ta có $d\left(I, tt\right) = \dfrac{\dfrac{2}{\left|x_0 - 1\right|}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\left(x_0 - 1\right)^4}}}$. Đặt $t = \dfrac{1}{\left|x_0 - 1\right|} > 0$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{2t}{\sqrt{1 + t^4}}\ \left(t > 0\right)$ ta có $f'\left(t\right) = \dfrac{\left(1 - t\right)\left(1 + t\right)\left(1 + t^2\right)}{\left(1 + t^4\right)\sqrt{1 + t^4}}$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - t\right)\left(1 + t\right)\left(1 + t^2\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -1$ (loại)

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\sqrt{2}$	↘	

Bảng biến thiên từ bảng biến thiên ta có $d\left(I, tt\right)$ lớn nhất khi và chỉ khi $t = 1$ hay

$\left|x_0 - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y = -x \\ x_0 = 0 \Rightarrow y = -x + 4 \end{array}\right.$. Chọn đáp án B

Chú ý: Để tìm $d\left(I, tt\right)$ lớn nhất ta có thể làm như sau

$$d\left(I; tt\right) = \frac{\dfrac{2}{\left|x_0 - 1\right|}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\left(x_0 - 1\right)^4}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(x_0 - 1\right)^2 + \dfrac{1}{\left(x_0 - 1\right)^2}}} \overset{\cos i}{\leq} \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\left(x_0 - 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y = -x \\ x_0 = 0 \Rightarrow y = -x + 4 \end{array}\right.$

Ví dụ 29. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A\left(2;4\right), B\left(-4;-2\right)$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giải.

Cách 1: Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}$

Vì tiếp tuyến cách đều hai điểm *A, B* nên tiếp tuyến đi qua trung điểm *I* của *AB* hoặc song song hoặc trùng với *AB*.

TH 1: Nếu tiếp tuyến đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của *AB* thì ta có:

$$\frac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}=1\Leftrightarrow x_0=1$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

TH 2: Nếu tiếp tuyến song song hoặc trùng với *AB* thì hệ số góc của tiếp tuyến $k = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$$

- Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=x+1$
- Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=x+5$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ y=x+1;\ y=x+5$. Chọn đáp án C

Cách 2: Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm $(x_0\neq -1)$

Phương trình tiếp tuyến *d* là $y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}$

$$\Leftrightarrow x-(x_0+1)^2y+2x_0^2+2x_0+1=0$$

Theo giả thiết $d(A,d)=d(B,d)$

$$\Leftrightarrow \left|2-4(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|=\left|-4+2(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|$$

$$\Leftrightarrow x_0=1\vee x_0=0\vee x_0=-2$$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ y=x+1;\ y=x+5$. Chọn đáp án C

Dạng 5. ***Tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất, nhỏ nhất.***

a. Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c=3a\left(x^2+\frac{2b}{3a}x\right)+c=3a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{3ac-b^2}{3a}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm x_0 là $k=y'(x_0)=3a\left(x_0+\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{3ac-b^2}{3a}$. Ta thấy

- $k\geq\frac{3ac-b^2}{3a}$ khi $a>0$ hay $k_{\min}=\frac{3ac-b^2}{3a}$. Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l}x_0=-\frac{b}{3a}\\a>0\end{array}\right.$
- $k\leq\frac{3ac-b^2}{3a}$ khi $a<0$ hay $k_{\max}=\frac{3ac-b^2}{3a}$. Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l}x_0=-\frac{b}{3a}\\a<0\end{array}\right.$

Mặt khác $y''=6ax+2b;\ y''=0\Leftrightarrow 6ax+2b=0\Leftrightarrow x_U=-\frac{b}{3a}=x_0$.

Từ đó ta có kết quả coi như công thức tính nhanh

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Hệ số góc của tiếp tiếp đạt giá trị lớn nhất khi

$$a<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{b}{3a} \\ k=y'\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=\dfrac{3ac-b^2}{3a} \\ y_0=y\left(-\dfrac{b}{3a}\right) \end{cases}$$

Hệ số góc của tiếp tiếp đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$a>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{b}{3a} \\ k=y'\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=\dfrac{3ac-b^2}{3a} \\ y_0=y\left(-\dfrac{b}{3a}\right) \end{cases}$$

Tiếp tuyến tại điểm uốn của hàm bậc ba có công thức tổng quát là

$$y=\left[c+b\left(-\frac{b}{3a}\right)\right]x+\left[d+a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3\right]$$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 30. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y=-12x+4$ **B.** $y=-12x-4$ **C.** $y=-9x+4$ **D.** $y=9x-4$

Giải:

Cách 1. Tự luận

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C) \Leftrightarrow y_0=x_0^3+3x_0^2-9x_0+5$

Ta có $y'=3x^2+6x-9$. Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc:

$k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2+6x_0-9=3\left(x_0+1\right)^2-12\ge -12 \Rightarrow \min k=-12$ đạt được khi $x_0=-1 \Rightarrow y_0=16$

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại $M\left(-1;16\right)$ có hệ số góc nhỏ nhất

Phương trình tiếp tuyến là $y=-12x+4$.

Cách 2. Công thức tính nhanh kết hợp máy tính

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{b}{3a}=-1 \\ k=y'(-1)=\left.\dfrac{d\left(X^3+3X^2-9X+5\right)}{dx}\right|_{x=X} \xrightarrow[X=1]{Calc} -12 \Rightarrow PTTT: y=-12x+4. \\ y_0=y(-1)=16 \end{cases}$$

Nhận xét:

- Tiếp tuyến của hàm bậc ba có hệ số góc nhỏ nhất khi $a>0$ và lớn nhất khi $a<0$
- Tiếp tuyến hàm bậc ba có hệ số góc nhỏ nhất và lớn nhất chính là tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị
- Qua điểm uốn chỉ có một tiếp tuyến, tất cả các tiếp tuyến còn lại đều không đi qua điểm uốn.
- Qua mỗi điểm còn lại trên đồ thị đều có hai tiếp tuyến

Dạng 6: Cho hàm số $y=f(x)$ (C). Tìm những điểm M trên đường thẳng d mà từ đó có thể kẻ được n tiếp tuyến đến đồ thị hàm số

a. Phương pháp:

Giả sử $d: ax+by+c=0$ với $M\left(x_M;y_M\right)\in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

Thế k từ (2) vào (1) ta được $f(x)=\left(x-x_M\right).f'\left(x_M\right)+y_M$ (3)

Cô. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M là số nghiệm x của (3)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho qua M có một tiếp tuyến.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$. Phương trình đường thẳng qua M có dạng $y = a(x-x_0)+y_0$

Đường thẳng là tiếp tuyến khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = a(x-x_0) + y_0 & (1) \\ y' = 3x^2 - 6x + 5 = a & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (3x^2 - 6x + 5)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 5x_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x_0^3 - 3(x^2 - x_0^2) + 5(x - x_0) - (3x^2 - 6x + 5)(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2(-2x - x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = \dfrac{-x_0 + 3}{2} \end{array}\right.$$

Qua M có một tiếp tuyến khi $x_0 = \dfrac{-x_0 + 3}{2} \Leftrightarrow x_0 = 1 \Leftrightarrow M(1;2)$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Điểm $M(1;2)$ là điểm uốn hay tâm đối xứng của (C).

Từ đây ta có kết quả tổng quát sau: Với đường cong bậc ba, điểm uốn là điểm duy nhất trên (C) mà qua nó ta chỉ có thể vẽ duy nhất một tiếp tuyến đến (C). Do đó ta áp dụng công thức tính nhanh tìm điểm uốn là $\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{3a} = 1 \\ y = y\left(-\dfrac{b}{3a}\right) = 2 \end{cases}$

Ví dụ 32. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C). Tìm điều kiện của m để điểm $M(m, y(m))$ thuộc đường thẳng $y = 9x - 7$ mà qua đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C)

A. $\left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{3} \\ m < -5 \end{array}\right.$ **B.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{3} \\ m < -5 \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases}$ **C.** $-5 < m < \dfrac{1}{3}$ **D.** $m \neq 1$

Giải.

Gọi $M(m;9m-7)$ là điểm bất kì nằm trên đường thẳng $y = 9x - 7$.

Vì mọi đường thẳng có dạng $x = m$ không là tiếp tuyến của đồ thị (C) nên ta xét d là đường thẳng đi qua M và có dạng $y = k(x-m) + 9m - 7$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = k(x-m) + 9m - 7 \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = (3x^2 + 6x)(x-m) + 9m - 7 \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases}$$

Qua M kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) khi hệ trên có ba nghiệm phân biệt hay phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$2x^3+3x^2-3mx^2-6mx+9m-5=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2+(5-3m)x+5-9m\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=2x^2+(5-3m)x+5-9m=0 \end{array}\right.$

Do đó điều kiện của m là là $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\left\{\begin{array}{l} (5-3m)^2-8(5-9m)>0 \\ g(1)=2.1^2+(5-3m).1+5-9m\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9m^2+42m-15>0 \\ m\neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{3} \\ m<-5 \end{array}\right. \\ m\neq 1 \end{array}\right.$

Vậy các điểm M cần tìm có tọa độ $(m;9m-7)$ với $m<-5$ hoặc $m>\dfrac{1}{3}$ và $m\neq 1$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 33. Cho đồ thị hàm số (C): $y=\left(|x|+1\right)^2\left(|x|-1\right)^2$. Tìm điều kiện của a để điểm $M(a;0)$ nằm trên trục hoành mà từ đó kẻ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

A. $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ a\neq -1 \end{array}\right.$ **B.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ a\neq 1 \end{array}\right.$ **C.** $\left\{\begin{array}{l} a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vee\left\{\begin{array}{l} a>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a\neq 1 \end{array}\right. \\ a\neq -1 \end{array}\right.$ **D.** $a\neq\pm 1$

Giải.

Gọi $A(a;0)$ là điểm trên trục hoành mà từ A kẻ được đến (C) ba tiếp tuyến

Phương trình đường thẳng đi qua A và có hệ số góc k là $d: y=k(x-a)$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi hệ sau có nghiệm

$\left\{\begin{array}{l} x^4-2x^2+1=k(x-a) \\ 4x^3-4x=k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x^3-4x=k \\ x^4-2x^2+1=(4x^3-4x)(x-a) \end{array}\right.$

Phương trình $x^4-2x^2+1=(4x^3-4x)(x-a)\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4ax+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2-4ax+1=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Với $x=\pm 1$ chỉ cho ta một tiếp tuyến duy nhất là $d_1: y=0$

Vì vậy để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác ± 1

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vee\left\{\begin{array}{l} a>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a\neq 1 \end{array}\right. \\ a\neq -1 \end{array}\right.$. Chọn đáp án C

Dạng 7: Cho hàm số $y=f(x)$ (C). Tìm những điểm M mà từ đó có thể kẻ được n tiếp tuyến đến đồ thị hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

a. Phương pháp:

Gọi $M(x_M;y_M)$. Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k là $y=k(x-x_M)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm: $\left\{\begin{array}{ll} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{array}\right.$

Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x)=(x-x_M).f'(x_M)+y_M$ (3)

Điều kiện:

Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2) = -1$. Từ đó tìm được M.

- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < x_2$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 34. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Cho điểm $A(0;a)$. Xác định a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

A. $a > -\dfrac{2}{3}$ **B.** $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$ **C.** $a \neq 1$ **D.** $\begin{cases} a > -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Giải.

Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;a)$ có dạng $y = kx + a \quad (1)$

Đường thẳng qua A là tiếp tuyến với đồ thị $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx - a \quad (2) \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2} = k \quad (3) \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được $g(x) = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 = 0 \quad (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x \neq 1$ là $\begin{cases} a \neq 1 \\ g(1) = -3 \neq 0 \\ \Delta' = 3a + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases}$

Hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4). Theo vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{a+2}{a-1} \end{cases}$

Tung độ tiếp điểm là $y_1 = \dfrac{x_1 + 2}{x_1 - 1}; y_2 = \dfrac{x_2 + 2}{x_2 - 1}$

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục Ox là $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-2)} < 0$

$\dfrac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{2}{3}$

Vậy $-\dfrac{2}{3} < a \neq 1$ thoả mãn điều kiện bài toán. Chọn đáp án B

Ví dụ 35. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm điều kiện của m để điểm $M(0;m)$ thuộc Oy kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng có hoành độ dương.

A. $m > 1$ **B.** $m \neq 1$ **C.** $m \geq 1$ **D.** $m < 1$

Giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0;m)$ với hệ số góc k là $y = kx + m$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Đường thẳng là tiếp tuyến của đồ thị

$\Leftrightarrow \begin{cases} kx+m=\dfrac{x+1}{x-1} \\ k=\dfrac{-2}{(x-1)^2} \end{cases}$ có nghiệm $x\neq 1$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2(m+1)-2x(m+1)+m+1=0 \ (x\neq 1)$.

Để từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng có hoành độ dương

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt dương và khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \\ m-1\neq 0 \\ m-1-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 2m+2>0 \\ 2\dfrac{m+1}{m-1}>0 \\ \dfrac{m+1}{m-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$

Vậy từ điểm $M(0;m), m>1$ luôn kẻ hai tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện. Chọn đáp án A

Ví dụ 36. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{7}{3}$ có đồ thị (*C*). Tìm điều kiện của *m* để điểm $M\left(m;y(m)\right)$ thuộc đường thẳng $d: y=\dfrac{5x}{4}+\dfrac{61}{24}$ để từ đó kẻ đến đồ thị (*C*) ba tiếp tuyến tương ứng với ba tiếp điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<x_2<0<x_3$.

A. $m<-\dfrac{5}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{6}<m<\dfrac{5}{18}$ **C.** Đáp số khác **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{6}<m<\dfrac{5}{18} \end{array}\right.$

Giải.

Điểm $M\in d$ nên $M\left(m;\dfrac{5m}{4}+\dfrac{61}{24}\right)$. Phương trình tiếp tuyến của (*C*) tại $M_0(x_0;y_0)$

$y-\left(-\dfrac{x_0^3}{3}-\dfrac{x_0^2}{2}+2x_0+\dfrac{7}{3}\right)=\left(-x_0^2-x_0+2\right)(x-x_0)$

Tiếp tuyến đi qua $M \Leftrightarrow \dfrac{5m}{4}+\dfrac{61}{24}-\left(-\dfrac{x_0^3}{3}-\dfrac{x_0^2}{2}+2x_0+\dfrac{7}{3}\right)=\left(-x_0^2-x_0+2\right)(m-x_0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x_0^3+\left(\dfrac{1}{2}-m\right)x_0^2-mx_0+\dfrac{3m}{4}-\dfrac{5}{24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3}x_0^2+\left(\dfrac{5}{6}-m\right)x_0+\dfrac{5}{12}-\dfrac{3n}{2}=0 \ (*) \end{array}\right.$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+\dfrac{7m}{3}-\dfrac{5}{12}>0 \\ \dfrac{5}{18}-m>0 \\ \dfrac{3}{2}m-\dfrac{5}{4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\dfrac{5}{2}; m>\dfrac{1}{6} \\ m<\dfrac{5}{18} \\ m<\dfrac{5}{6} \end{cases}$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Những điểm M nằm trên d phải có hoành độ thỏa: $m<-\frac{5}{2}$ hoặc $\frac{1}{6}<m<\frac{5}{18}$. Chọn đáp án D

Ví dụ 37. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $y=-2$ mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Giải.

Gọi $M(a;-2)$ là điểm thuộc đường thẳng $y=-2$

Đường thẳng đi qua M với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)-2$

Đường thẳng này là tiếp tuyến với đồ thị (C) chỉ khi hệ:

$\begin{cases}x^3-3x^2+2=k(x-a)-2 & (1)\\ 3x^2-6x=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) ta được

$$(x-2)\left[2x^2-(3a-1)x+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=2\\ g(x)=2x^2-(3a-1)x+2=0\end{array}\right.$$

Với $x=2$ có tiếp tuyến $y=-2$ thì không thể có tiếp tuyến nào của (C) vuông góc với tiếp tuyến này

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm a để phương trình $2x^2-(3a-1)x+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn

$$k_1.k_2=-1\Leftrightarrow(3x_1^2-6x_1)(3x_2^2-6x_2)=-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(3a-1)^2-16>0\\ a=\frac{55}{27}\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{55}{27}$$

Vậy $M\left(\frac{55}{27};-2\right)$ là điểm cần tìm. Chọn đáp án C

Dạng 8: Tìm điều kiện của tham số để hai đường cong tiếp xúc với nhau

a. Phương pháp: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đường cong

Hai đường cong tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây có nghiệm: $\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f'(x)=g'(x)\end{cases}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 38. Cho hàm số $y=x^3-m(x-1)-1$ có đồ thị (C_m). Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường cong (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

A. 3 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{15}{4}$ **D.** Đáp số khác

Giải:

Trục Ox có phương trình $y=0$ có hệ số góc $k=0$. Đường cong (C_m) tiếp xúc với Ox

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases}x^3-m(x-1)-1=0 & (1)\\ 3x^2-m=0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm

Từ (2) suy ra $m=3x^2$ thay vào (1) ta có phương trình

$x^3-3x^2(x-1)-1=0\Leftrightarrow-2x^3+3x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)(-2x^2+x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow m=3\\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{3}{4}\end{array}\right.$$

Vậy $m=3,\ m=\frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm. Tổng các giá trị là $\frac{15}{4}$. Chọn đáp án C

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2-mx}{x+1}$ (1), m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $d: y=-3x+2$

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Giải:

Đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng d khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\dfrac{2-mx}{x+1}=-3x+2\\ \dfrac{-2-m}{(x+1)^2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ m=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x\neq 0,x\neq -1\\ m=\dfrac{(3x-2)(x+1)+2}{x}\\ m=3(x+1)^2-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ m=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x\neq 0,x\neq -1\\ 3x^2(x+1)=0\\ m=3(x+1)^2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ m=1\end{cases}$$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án C

Dạng 9. Tìm giá trị của tham số m liên quan tới phương trình tiếp tuyến

a. Phương pháp:

- Từ điều kiện của giả thiết, thiết lập một phương trình hoặc bất phương trình theo m
- Giải phương trình và bất phương trình này tìm được m (đối chiếu điều kiện nếu có)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 40. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m}{2}x^2+\dfrac{1}{3}$. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng – 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x-y=0$.

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Giải.

Đặt $M(x_0;y_0)\in(C_m)$, theo giả thiết $x_0=-1\Rightarrow y_0=-\dfrac{m}{2}$

Đạo hàm $y'=x^2-mx\Rightarrow y'(x_0)=m+1$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm M có dạng: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y+\dfrac{m}{2}=(m+1)(x+1)\Leftrightarrow y=(m+1)x+\dfrac{1}{2}(m+2)$.

Δ song song với đường thẳng $5x-y=0$ hay $y=5x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1=5\\ m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=4$. Chọn đáp án C

Ví dụ 41. Cho hàm số $y=-\dfrac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\dfrac{5}{3}$ có đồ thị (C_m), m là tham số. Tìm m để trên (C_m) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1x_2>0$ và tiếp tuyến của (C_m) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x-3y+1=0$.

A. $-1<m<-\dfrac{1}{3}$ **B.** $m<-3$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-3\\ -1<m<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m\leq -3\\ -1\leq m<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Giải:

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Hệ số góc của $d: x-3y+1=0$ là $k_d=\frac{1}{3}$.

Hệ số góc của đồ thị là $k=y'(x)=-2x^2+2(m-1)x+3m-2$

Do đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $y'=-3$ hay

$-2x^2+2(m-1)x+3m-2=-3\Leftrightarrow 2x^2-2(m-1)x-3m-1=0$ (1)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+2(3m+1)>0\\ \frac{-3m-1}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\ -1<m<-\frac{1}{3}\end{array}\right.$. Chọn đáp án C.

Ví dụ 42. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4m-3)x+1$ có đồ thị (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên (C_m) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y-3=0$.

A. $0<m<\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}<m<\frac{2}{3}$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{2}\\ 0<m<\frac{2}{3}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}0<m<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}<m<\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Giải.

Hệ số góc của đồ thị hàm số là $k=y'(x)=mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ là $k'=-\frac{1}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y'(x)=2$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}<m<\frac{2}{3}\end{array}\right.$. Chọn đáp án D

Ví dụ 43. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (1). Tính tổng các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có chu vi $2\pi\sqrt{\frac{5}{18}}$

A. 0 **B.** -2 **C.** 2 **D.** Đáp số khác

Giải.

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=m-2\Rightarrow M(1;m-2)$

Tiếp tuyến tại M là $d: y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+m-2\Rightarrow d: y=-3x+m+1$

Đường thẳng d cắt trục Ox tại A: $0=-3x_A+m+1\Leftrightarrow x_A=\frac{m+1}{3}\Rightarrow A\left(\frac{m+1}{3};0\right)$

Đường thẳng d cắt trục Oy tại B: $y_B=m+1\Rightarrow B(0;m+1)$

Tam giác vuông tại O, trung điểm I của AB là tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(\frac{m+1}{6};\frac{m+1}{2}\right)$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Bán kính $OI=\sqrt{\frac{5}{18}}|m+1|$. Giả thiết có $2\pi OI=2\pi\sqrt{\frac{5}{18}}\Leftrightarrow|m+1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$

Tổng các giá trị của tham số mà là -2. Chọn đáp án B

Ví dụ 44. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (1), m là tham số. Biết A là điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4};1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A lớn nhất.

A. -1 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Đáp số khác

Giải.

Điểm $A\in(C_m)$ nên $A(1;1-m)$

Đạo hàm $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'(1)=4-4m$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A có phương trình

$y-(1-m)=y'(1).(x-1)\Leftrightarrow(4-4m)x-y-3(1-m)=0$

Khi đó $d(B,\Delta)=\frac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}}\le 1\Rightarrow d(B,\Delta)_{\max}=1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$

Chọn đáp án B

Dạng 10. Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (C). Tiếp tuyến tại điểm $N\in(C)$ cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là M $(M\ne N)$. Tìm tọa độ điểm M.

a. Phương pháp:

- Viết phương trình tiếp tuyến d tại điểm N như dạng 1
- Tìm toạ độ điểm M bằng cách xét hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C).

Chú ý: Ta có thể sử dụng công thức tính nhanh như sau: $\left\{\begin{array}{l}x_M=-2x_N-\frac{b}{a}\Rightarrow M\\y_M=y(x_M)\end{array}\right.$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 45. Cho đồ thị $(C):y=x^3-x+3$. Tiếp tuyến tại $N(1;3)$ cắt (C) tại điểm thứ 2 là M $(M\ne N)$. Tọa độ M là:

A. $M(-1;3)$ **B.** $M(1;3)$ **C.** $M(2;9)$ **D.** $M(-2;-3)$

Giải.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm N là $d:y=2x+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^3-x+3=2x+1\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-3\Rightarrow M(-2;-3)\\x=1\Rightarrow y=3\Rightarrow M(1;3)\equiv N\end{array}\right.$$

Chọn đáp án D

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta áp dụng công thức tính nhanh như sau:

$$\left\{\begin{array}{l}x_M=-2x_N-\frac{b}{a}=-2\\y_M=y(x_M)=-3\end{array}\right.\Rightarrow M(-2;-3)\Rightarrow\boxed{D}$$

Câu 46. ***(Trường THPT Hồng Quang lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C) và điểm $M(x_M;y_M)$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai là $N(x_N;y_N)$ (khác M) sao cho $x_N^2-4x_M^2=5$. Giá trị y_M thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Giải.

Gọi $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của (C) tại M, phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$x^3-3x^2+2=ax+b \Leftrightarrow (x-x_M)^2(x-x_N)=0$. Đồng nhất hệ số ta được $2x_M+x_N=3$ (1).

Theo giả thiết $x_N^2-4x_M^2=5$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $x_M=\frac{1}{3}, x_N=\frac{7}{3}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $y_M=y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{46}{27}$, giá trị này thuộc khoảng $(1;2)$

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta áp dụng công thức tính nhanh như sau:

$$\begin{cases} x_M+2x_N=-\frac{b}{a}=3 \\ x_N^2-4x_M^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\frac{1}{3} \\ x_N=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow y_M=y(x_M)=\frac{46}{27}\in(1;2)\Rightarrow \boxed{A}$$

Dạng 11: Tiếp tuyến hàm ẩn

Ví dụ 1: [THPT YÊN ĐỊNH 2 THANH HÓA LẦN 1 - 2018] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2=x-[f(1-x)]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **B.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{8}{7}$. **D.** $y=-x+\frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình $[f(1+2x)]^2=x-[f(1-x)]^3$ (*)

Chọn $x=0$ ta được $[f(1)]^2+[f(1)]^3=0\Rightarrow \left|\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right.$

Đạo hàm haivế của phương trình (*) ta có:

$$2.2.f'(1+2x).f(1+2x)=1-3.(-1).f'(1-x)[f(1-x)]^2 \quad (1)$$

Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta sẽ được : $4.f'(1).f(1)=1+3f'(1)[f(1)]^2$ (2)

Từ phương trình (2) suy ra $f(x)=0$ không thỏa mãn. Vậy $f(x)=-1$, do đó ta thu được $f'(x)=\frac{-1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. Chọn A.

Ví dụ 2 : Cho hàm số f xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f^2(-x)=(x^2+2x+4)f(x+2)$ và $f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=0$ là:

A. $y=-2x$. **B.** $y=-2x+4$. **C.** $y=2x+4$. **D.** $y=2x$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Lời giải

Chọn B.

Xét đẳng thức $f^2(-x)=\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)$ $(*)$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào $(*)$, ta có $\begin{cases} f^2(0)=4.f(2) \\ f^2(2)=4.f(0) \end{cases} \Leftrightarrow f(0)=f(2)=4$, vì $f(0)\neq 0$.

Đạo hàm 2 vế của $(*)$, ta được $\left[f^2(-x)\right]'=\left[\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)\right]'$

$\Leftrightarrow 2f(-x)f'(-x)=(2x+2)f(x+2)+\left(x^2+2x+4\right)f'(x+2)$ $(**)$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào $(**)$, ta có $\begin{cases} -2f(0)f'(0)=2.f(2)+4f'(2) \\ -2f(2)f'(2)=-2.f(0)+4f'(0) \end{cases}$

Mà $f(0)=f(2)=4$ nên suy ra $\begin{cases} -8f'(0)=8+4f'(2) \\ -8f'(2)=-8+4f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=-2 \\ f'(2)=2 \end{cases}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=0$ là :

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

III : BÀI TẬP VẬN DỤNG – TIẾP TUYẾN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là:

A. $y=f'(x_0)(x-x_0)$. **B.** $y=f'(x_0)(x-x_0)-y_0$.

C. $y-y_0=f'(x_0)x$. **D.** $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$, đồ thị là đường cong (C). Để đường thẳng $\Delta: y=ax+b$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$, điều kiện cần và đủ là:

A. $a=f'(x_0)$. **B.** $ax_0+b=f'(x_0)$.

C. $\begin{cases}a=f'(x_0)\\ax_0+b=f(x_0)\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=f'(x_0)\\ax_0+b=f'(x_0)\end{cases}$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3-2x+3$ tại điểm $M(1;2)$ là:

A. $y=2x+2$. **B.** $y=3x-1$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=2-x$.

Câu 4. Tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x\sqrt{x}$ tại điểm $M(1;1)$ có phương trình:

A. $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. **B.** $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. **C.** $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$. **D.** $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

Câu 5. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\frac{4}{x-1}$ tại điểm với hoành độ $x=-1$ có phương trình:

A. $y=-x-3$. **B.** $y=-x+2$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=x+2$.

Câu 6. Cho hàm số $y=-x^2+5$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có tung độ $y_0=-1$, với hoành độ $x_0<0$ là kết quả nào sau đây?

A. $y=2\sqrt{6}(x+\sqrt{6})-1$. **B.** $y=-2\sqrt{6}(x+\sqrt{6})-1$.

C. $y=2\sqrt{6}(x-\sqrt{6})+1$. **D.** $y=2\sqrt{6}(x-\sqrt{6})-1$.

Câu 7. Cho hàm số $y=x^2+5x+4$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục Ox, có phương trình:

A. $y=3x-3$ hoặc $y=-3x+12$. **B.** $y=3x+3$ hoặc $y=-3x-12$.

C. $y=2x-3$ hoặc $y=-2x+3$. **D.** $y=2x+3$ hoặc $y=-2x-3$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2, có hệ số góc:

A. -1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 9. Cho đường cong $(C): y=x^3$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k=12$, có phương trình:

A. $y=12x\pm16$. **B.** $y=12x\pm8$. **C.** $y=12x\pm2$. **D.** $y=12x\pm4$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^2-2x+3$ có đồ thị (C). Tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$, tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2 thì x_0+y_0 bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 11. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x+1$. Có hai tiếp tuyến của (C) cùng có hệ số góc bằng $\frac{3}{4}$. Đó là các tiếp tuyến:

A. $y=\frac{3}{4}x+\frac{29}{24}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+3$. **B.** $y=\frac{3}{4}x-\frac{37}{12}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x-3$.

GV. Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

C. $y=\frac{3}{4}x+\frac{37}{12}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$. **D.** $y=\frac{3}{4}x-\frac{29}{24}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+3$.

Câu 12. Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-4x+5$ có đồ thị là (C). Trong số các tiếp tuyến của (C), có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng:

A. $-3,5$. **B.** $-5,5$. **C.** $-7,5$. **D.** $-9,5$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y=9x$ có phương trình:

A. $y=9x+40$. **B.** $y=9x-40$. **C.** $y=9x+32$. **D.** $y=9x-32$.

Câu 14. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^4+x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x+5y=0$ có phương trình là:

A. $y=5x-3$. **B.** $y=3x-5$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=x+4$.

Câu 15. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C). Diện tích tam giác OAB bằng:

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** $6\sqrt{82}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(-1;-9)$ có phương trình:

A. $y=24x+15$. **B.** $y=\frac{15}{4}x+\frac{21}{4}$.

C. $y=24x+15$ hoặc $y=\frac{15}{4}x-\frac{21}{4}$. **D.** $y=24x+33$.

Câu 17. Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị là (C). Các tiếp tuyến không song song với trục hoành kẻ từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến (C) là:

A. $y=2x$ hoặc $y=-2x$. **B.** $y=x$ hoặc $y=-x$.

C. $y=\frac{4}{3}x$ hoặc $y=-\frac{4}{3}x$. **D.** $y=3x$ hoặc $y=-3x$.

Câu 18. Cho hàm số $y=\frac{x^2}{4}-x+1$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(2;-1)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình:

A. $y=-x+1$ hoặc $y=x-3$. **B.** $y=-x+3$ hoặc $y=x+1$.

C. $y=-x-3$ hoặc $y=x-1$. **D.** $y=-x-1$ hoặc $y=x+3$.

Câu 19. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C), biết d đi qua điểm $A(4;-1)$. Gọi M là tiếp điểm của d và (C), tọa độ điểm M là:

A. $M(2;5)$, $M(0;-1)$. **B.** $M(2;5)$, $M(-2;1)$.

C. $M(0;-1)$, $M(-2;1)$. **D.** $M\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $M(-2;1)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến thỏa mãn khoảng cách từ giao điểm của hai tiệm cận đến nó là lớn nhất, có phương trình:

A. $y=-x+2$ hoặc $y=-x-2$. **B.** $y=-x+2$ hoặc $y=-x-1$.

C. $y=x+2$ hoặc $y=x-2$. **D.** $y=-x+1$ hoặc $y=-x-1$.

Câu 21. Từ điểm $A\left(\frac{2}{3};0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm số $y=\frac{5}{6}x^3+mx-\frac{2m}{3}$ hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì tập tất cả các giá trị của m bằng:

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m=\frac{1}{2}$ hoặc $m=2$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$ hoặc $m=-2$.

C. $m=\frac{1}{2}$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$ hoặc $m=2$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $M(0;a)$ thì a nhận những giá trị nào?

A. $a=10$. **B.** $a=9$. **C.** $a=3$. **D.** $a=1$.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m+1$ có đồ thị (C). Tập tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d:x=1$ song song với đường thẳng $\Delta:y=-12x+4$ là?

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=3$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3+x+2$ có đồ thị (C). Để đường thẳng $d:y=4x+m$ tiếp xúc với (C) thì tập tất cả các giá trị của m là:

A. $m=0$ và $m=4$. **B.** $m=1$ và $m=2$.

C. $m=3$. **D.** Không có giá trị của m.

Câu 25. Cho hàm số $y=x^4-(3m+5)x^2+4$ có đồ thị là (C_m). Để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y=-6x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 thì giá trị thích hợp của m:

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$.

C. $m=2$. **D.** Không có giá trị của m.

Câu 26. Cho hàm số $y=\frac{ax+2}{bx+3}$ có đồ thị là (C). Tại điểm $M(-2;-4)$ thuộc (C), tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d:7x-y+5=0$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa a và b là:

A. $b-2a=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $b-3a=0$. **D.** $a-3b=0$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị là (C). Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;-2)$ song song với đường thẳng $d:3x+y-4=0$. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{2x+3}$ có đồ thị là (C). Nếu (C) đi qua $A(1;1)$ và tại điểm B trên (C) có hoành độ bằng -2, tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k=5$ thì các giá trị của a và b là:

A. $a=2;b=3$. **B.** $a=3;b=2$. **C.** $a=2;b=-3$. **D.** $a=3;b=-2$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị là (C). Nếu (C) đi qua $A(3;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:y=2x-4$, thì các cặp số $(a;b)$ theo thứ tự là:

A. $(2;4)$ hoặc $(10;28)$. **B.** $(2;-4)$ hoặc $(10;-28)$.

C. $(-2;4)$ hoặc $(-10;28)$. **D.** $(-2;-4)$ hoặc $(-10;-28)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{ax^2-bx}{x-2}$ có đồ thị là (C). Để (C) qua điểm $A\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3 thì mối liên hệ giữa a và b là:

A. $4a-b=1$. **B.** $a-4b=1$. **C.** $4a-b=0$. **D.** $a-4b=0$.

Câu 31. ***(THPT Thị xã Quảng Trị - Lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4+x^2-5$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+6y-2017=0$.

A. $y=-6x+9$. **B.** $y=6x-6$. **C.** $y=6x-9$. **D.** $y=-6x+6$.

Gv. Lương Văn Huy - NTDH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 32. ***(THPT Chuyên Sơn La – Lần 4 năm 2017)*** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y=-9x-27$. **B.** $y=-9x-43$. **C.** $y=-9x+11$. **D.** $y=-9x-11$.

Câu 33. ***(THPT Xuân Trường – Nam Định – học kỳ I năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

A. Không có. **C.** $M(2;3)$.

B. $M_1(2;3), M_2(0;1)$. **D.** $M(0;1)$.

Câu 34. ***(Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Tiền Giang năm 2017)*** Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+2$ và có hệ số góc nhỏ nhất?

A. $y=-3x-3$. **B.** $y=-x-3$. **C.** $y=-3x+3$. **D.** $y=-5x+10$.

Câu 35. ***(THPT Chuyên Bắc Kạn năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-x^2+1$. Tìm điểm nằm trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại điểm đó có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3};\frac{23}{27}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3};\frac{8}{9}\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{3};\frac{25}{27}\right)$.

Câu 36. ***(Toán học tuổi trẻ - lần 5 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để mỗi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2-2mx+2017$ đều là đồ thị của hàm số bậc nhất đồng biến.

A. $-6\le m\le 0$. **B.** $-24<m<0$. **C.** $-\frac{3}{2}<m<0$. **D.** $-6<m<0$.

Câu 37. ***(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)*** Biết rằng đường thẳng $d: y=3x+m$ (với m là tham số thực) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^2-5x-8$ tại M. Tìm tọa độ điểm M.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-4;28)$. **C.** $(1;-12)$. **D.** $(4;-12)$.

Câu 38. ***(Trường THPT Hà Trung lần 1 năm 2017)*** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x-2$ tại điểm có hoành độ bằng 0.

A. $y=-3x-2$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-3x+2$.

Câu 39. ***(Trường THPT Hà Trung lần 1 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 40. ***(Trường THPT AmsTerDam năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m+2$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì Δ vuông góc với đường thẳng $d: y=\frac{1}{4}x-2016$?

A. $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Câu 41. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;-6)$ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 42. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(0;-1)$ là:

A. $y=3x+1$ **B.** $y=3x-1$ **C.** $y=-3x-1$ **D.** $y=-3x+1$

Câu 43. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=2x^4-8x^2+1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành:

GV: Lương Văn Huy - TĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 44. ***(Trường THPT Chuyên Hà Giang năm 2017)*** Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-10$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. d song song với trục hoành
B. d song song với đường thẳng $y=1$
C. d có hệ số góc bằng 0
D. d có hệ số góc dương

Câu 45. ***(Trường THPT Hạ Long lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm với trục tung.

A. $y=-2x+1$ **B.** $y=3x-2$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=-3x-2$

Câu 46. ***(Trường THPT Hạ Long lần 2 năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x+4$ tại giao điểm của nó với trục hoành có phương trình là

A. $y=6x-6$ **B.** $y=7x-7$ **C.** $y=6x+6$ **D.** $y=7x+7$

Câu 47. ***(Trường THPT Hai Bà Trưng lần 2 năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị tại điểm thứ hai là B. Điểm B có tọa độ là

A. $B(-1;0)$. **B.** $B(1;10)$. **C.** $B(2;33)$. **D.** $B(-2;1)$.

Câu 48. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017)*** Cho hàm số $y=3\ln\left(x^2+x+1\right)$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=3x+3 \\ y=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=3x+3 \\ y=3x \end{array}\right.$

Câu 49. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Cho hàm số $y=x\ln x+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0=2e$

A. $y=(2+\ln 2)x-2e-1$ **B.** $y=(2+\ln 2)x+2e+1$

C. $y=-(2+\ln 2)x-2e+1$ **D.** $y=(2+\ln 2)x-2e+1$

Câu 50. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;5)$ cắt hai đường tiệm cận tại E và F. Khi đó độ dài EF là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 51. ***(Trường THPT Chuyên Quang Trung năm 2017)*** Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-5$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. Δ song song với đường thẳng $d: x=1$. **B.** Δ song song với trục tung.
C. Δ song song với trục hoành. **D.** Δ có hệ số góc dương.

Câu 52. ***(Trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai – HN năm 2017)*** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ có phương trình

A. $2x-2y=-1$ **B.** $2x-2y=1$ **C.** $2x+2y=-3$ **D.** $2x+2y=3$

Câu 53. ***(Trường THPT Nguyễn Khuyến năm 2017)*** Hai tiếp tuyến tại hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ cách nhau một khoảng là

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 54. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$. Biết đường thẳng $y=ax+b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 3. Tính giá trị của $T=a+b$

A. $T=1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=3$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 55. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-8x^2+7\ (C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=60x+m$ tiếp xúc với (C)

A. $m=-164$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-60$ **D.** Đáp án khác

Câu 56. ***(Trường THPT Lê Hồng Phong lần 1 năm 2017)*** Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x), y=\dfrac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $f(1)\le -\dfrac{11}{4}$ **B.** $f(1)<-\dfrac{11}{4}$ **C.** $f(1)>-\dfrac{11}{4}$ **D.** $f(1)\ge -\dfrac{11}{4}$

Câu 57. ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Tiếp tuyến tại một điểm bất kì trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$ tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông có diện tích S không đổi. Tìm S.

A. $S=4$ **B.** $S=8$ **C.** $S=2$ **D.** $S=1$

Câu 58. ***(Trường THPT Hàn Thuyên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x+1\ (C)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Không có tiếp tuyến nào với đồ thị hàm số có hệ số góc bằng -4

B. Tồn tại tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là đường thẳng song song với trục tung.

C. Tồn tại tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là đường thẳng song song với trục hoành.

D. Tiếp tuyến với (C) tại điểm $(0;1)$ có dạng $y=-3x+1$

Câu 59. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI) Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^4-2x^2$ đi qua gốc toạ độ O?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 60. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI) Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2x-5$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến với đồ thị tại chúng là hai đường thẳng song song?

A. Không tồn tại cặp điểm nào **B.** 1

C. 2 **D.** Vô số cặp điểm

Câu 61. (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI) Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}(C)$. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thoả mãn $OA=4OB$ là:

A. $-\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $-\dfrac{1}{4}$ hoặc $\dfrac{1}{4}$ **D.** 1

Câu 62. $[NTL]$ Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M\in(C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y=2m-1$

A. $m=-\dfrac{1}{3}$ **B.** $m=\dfrac{1}{3}$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 63. (THPT AN LÃO – BÌNH ĐỊNH) Gọi $M\in(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy tính diện tích tam giác OAB?

A. $\dfrac{121}{6}$. **B.** $\dfrac{119}{6}$. **C.** $\dfrac{123}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Câu 64. (CHUYÊN KHTN HÀ NỘI) Đường thẳng $y=6x+m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=x^3+3x-1$ khi m bằng

GV: Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Câu 65. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y-16=-9(x-3)$. **B.** $y+16=-9(x+3)$.

C. $y-16=-9(x+3)$. **D.** $y=-9x-27$.

Câu 66. THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH ĐỊNH) Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng:

A. -3. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 67. (THPT YÊN LẠC – VĨNH PHÚC) Tập tất cả các giá trị của tham số m để qua điểm $M(2;m)$ kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ là

A. $m\in(4;5)$. **B.** $m\in(-2;3)$. **C.** $m\in(-5;-4)$. **D.** $m\in(-5;4)$.

Câu 68. (SGD BẮC NINH) Cho hàm số $y=x^3-m^2x^2-m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ song song với đường thẳng $d:y=-5x$.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** Không có giá trị của m.

Câu 69. (THPT DỊU HIỀN) Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Gọi $M(x_0,y_0)$, $x_0>0$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn $AI^2+IB^2=40$. Khi đó tích x_0y_0 bằng:

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 70. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tiếp tuyến tại giao điểm của (C_m) với trục tung cắt trục Ox và Oy tại A và B sao cho diện tích ΔOAB bằng $\frac{1}{8}$

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 71. $[NTL]$ Cho hàm số $y=-x^3+(2m+1)x^2-m-1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m để đồ thị của hàm số đã chi tiếp xúc với đường thẳng $y=2mx-m-1$

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 72. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^3+3x^2$ (C). Co bao nhiêu điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 73. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $y=4$, sao cho từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C)

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 74. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ (C) và điểm $A(x_0,y_0)\in(C)$, tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A cắt (C) tại điểm B khác điểm A. Tìm hoành độ điểm B theo x_0

A. $x_B=2x_0$. **B.** $x_B=-2x_0$. **C.** $x_B=1-2x_0$. **D.** $x_B=-1+2x_0$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 75. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+6mx-3m+4$ có đồ thị (C_m). Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hoành độ là 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để Δ cắt đồ thị tại một điểm B khác A sao cho ΔOAB là tam giác vuông cân tại O.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 76. $[NTL]$ Cho hàm số $y=x^4-4x^2+3$ (C). Gọi (C_1) là đồ thị đối xứng của đồ thị (C) qua điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C_1) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:16x+y-2=0$

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

ĐÁP ÁN

1. D	**2. C**	**3. C**	**4. C**	**5. A**	**6. A**	**7. B**	**8. B**	**9. A**	**10. D**
11. C	**12. B**	**13. D**	**14. A**	**15. C**	**16. C**	**17. A**	**18. A**	**19. B**	**20. A**
21. B	**22. A**	**23. C**	**24. A**	**25. D**	**26. D**	**27. A**	**28. B**	**29. B**	**30. C**
31. C	**32. D**	**33. B**	**34. C**	**35. D**	**36. D**	**37. D**	**38. A**	**39. D**	**40. C**
41. D	**42. D**	**43. C**	**44. D**	**45. B**	**46. C**	**47. C**	**48. A**	**49. D**	**50. D**
51. C	**52. A**	**53. B**	**54. A**	**55. A**	**56. A**	**57. A**	**58. B**	**59. B**	**60. D**
61. B	**62. B**	**63. A**	**64. A**	**65. C**	**66. A**	**67. A**	**68. B**	**69. D**	**70. D**
71. C	**72. C**	**73. B**	**74. B**	**75. C**	**76. C**				

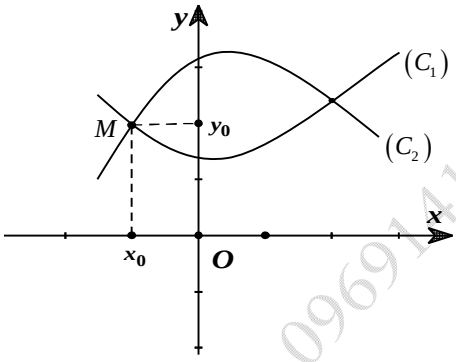
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 6 - GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ (SỰ TƯƠNG GIAO)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=g(x)$ có đồ thị (C_2)

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)$ (1)
- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là số nghiệm của phương trình (1)
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) là hoành độ giao điểm
- Để tìm tung độ y_0 ta thay vào $y=f(x)$ hoặc $y=g(x)$ sao cho việc thay đơn giản
- Điểm $M(x_0;y_0)$ gọi là toạ độ giao điểm



Chú ý: Nếu một trong hai đồ thị trên có dạng hữu tỉ và có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$. Khi đó, để (C_1) cắt (C_2) tại n điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm [phương trình (1)] có n nghiệm phân biệt khác α.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

A. Bài toán không chứa tham số

Dạng 1. Từ phương trình hoành độ giao điểm tìm

- Hoành độ giao điểm x_0
- Tung độ giao điểm $y_0=f(x_0)$
- Toạ độ giao điểm $M(x_0;y_0)$
- Mối quan hệ giữa hoành độ, tung độ, độ dài các giao điểm

  $x_1+x_2=?;\ y_1+y_2=?;\ AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ldots$
- Số giao điểm (số điểm chung) là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

a. Phương pháp:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)$ (1)
- Giải phương trình (1) này tìm $x_0\Rightarrow y_0\Rightarrow M(x_0;y_0)$

Chú ý:

- Để giải được phương trình (1) cần nắm chắc kĩ năng giải phương trình bậc 2, bậc 3, trùng phương, vô tỷ…, kĩ năng phân tích đa thức thành nhân tử, lược đồ hooc-ne
- Ngoài ra có thể sử dụng nhanh máy tính bằng cách chức năng $Mod\,5+2;Mod\,5+3$ để giải phương trình bậc hai, bậc ba, trùng phương; $Mod\,7$ để dò nghiệm của phương trình khi nghiệm đẹp; $Shift+Calc$ dò nghiệm của phương trình khi nghiệm đó xấu.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Đồ thị hàm số $y=-\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$-\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{3}{2}=0\overset{\text{mod}\,5+3}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}x^2=-1\\x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Chọn đáp án B

Cty Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - TH Thanh Trì - 0969141404

Nhận xét: Khi hỏi số nghiệm của phương trình mà không hỏi nghiệm cụ thể ta nên dùng mod7 nếu bên $f(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần sẽ có bấy nhiêu nghiệm.

Dùng mod7 nhập $f(X)=-\frac{X^4}{2}+X^2+\frac{3}{2}$; $Start=-9; End=9; Step=1$



Từ bảng ta thấy $f(x)$ đổi dấu 2 lần nên có 2 giao điểm

Ví dụ 2. ***(Sở GD và ĐT Quảng Ninh năm 2017)*** Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+5$ và đường thẳng và đường thẳng $y=9$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$. Tính x_1+x_2

A. $x_1+x_2=3$ **B.** $x_1+x_2=0$ **C.** $x_1+x_2=18$ **D.** $x_1+x_2=5$

Giải.

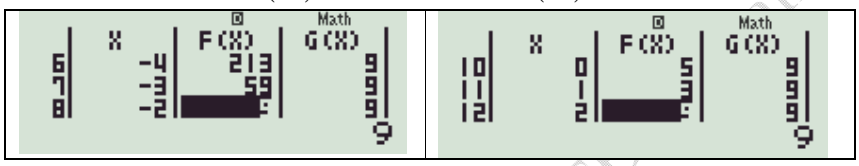
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$x^4-3x^2+5=9\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-1\\x^2=4\end{array}\right.\Rightarrow x^2=4$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-2\end{array}\right.\Rightarrow x_1+x_2=0$$. Chọn đáp án B

Nhận xét: Ta có thể sử dụng mod7 như sau

Dùng mod7 nhập $f(X)=X^4-3X^2+5; g(X)=9$; $Start=-9; End=9; Step=1$



Từ bảng $\Rightarrow x_1+x_2=0$

Ví dụ 3. ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh năm 2017)*** Gọi *A, B* là giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x-1}$ và $y=1-x$. Độ dài đoạn thẳng *AB* bằng.

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{2}$

Giải.

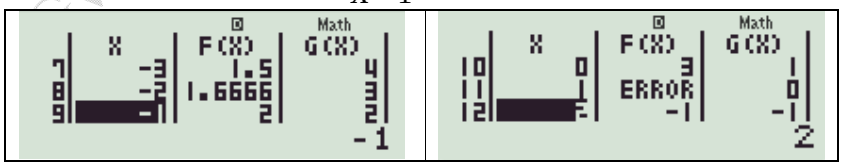
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$\frac{x-3}{x-1}=1-x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq 1\\x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=2\Rightarrow A(-1;2)\\x=2\Rightarrow y=-1\Rightarrow B(2;-1)\end{array}\right.$$.

Khi đó $AB=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Ta có thể sử dụng mod7 như sau

Dùng mod7 nhập $f(X)=\frac{X-3}{X-1}; g(X)=1-X$; $Start=-9; End=9; Step=1$



Từ bảng $\Rightarrow A(-1;2); B(2;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

Chú ý: Với máy 570vn plus sẽ có hai hàm $f(x);g(x)$ thì tìm luôn được cả tung độ, còn máy 570vn plus chỉ có hàm $f(x)$ thì ta nhập $f(X)=\dfrac{X-3}{X-1}-1+X$ chỉ tìm được hoành độ.

Ví dụ 4. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu lần 2 năm 2017)*** Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ và đường thẳng $y=x-2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có tung độ lần lượt là y_1,y_2. Khi đó y_1+y_2 bằng

A. $y_1+y_2=-4$. **B.** $y_1+y_2=2$. **C.** $y_1+y_2=4$. **D.** $y_1+y_2=-2$.

Giải.

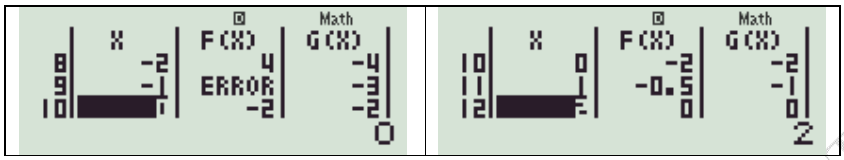
Hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là nghiệm của phương trình

$$x-2=\frac{x-2}{x+1}\Leftrightarrow(x-2)\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$$

Vậy 2 giao điểm là $M_1(2;0),M_2(0;-2)\Rightarrow y_1+y_2=-2$. Chọn đáp án D

Nhận xét: Ta có thể sử dụng mod7 như sau

Dùng mod7 nhập $f(X)=\dfrac{X-2}{X+11};g(X)=X-2$; $Start=-9;End=9;Step=1$



Từ bảng $\Rightarrow y_1+y_2=-2$

Ví dụ 5. ***(Sở GD và ĐT Bắc Giang năm 2017)*** Đồ thị hai hàm số $f(x)=-x^4+x^2$ và $g(x)=2(m+1)x^3+2mx^2-2(m+1)x-2m$, ($m$ là tham số khác $-\dfrac{3}{4}$) có bao nhiêu giao điểm

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số là

$$2(m+1)x^3+2mx^2-2(m+1)x-2m=-x^4+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+2(m+1)x^3+(2m-1)x-2m=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)\left[x^2+(2m+2)x+2m\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x^2+(2m+2)x+2m=0\ (*)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$ ta có $\Delta'=(m+1)^2-2m=m^2+1>0\Rightarrow(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó hai nghiệm của $(*)$ là $\begin{cases}x_1=m+1-\sqrt{m^2+1}\\x_2=m+1+\sqrt{m^2+1}\end{cases},m\neq-\dfrac{3}{4}\Rightarrow x_1,x_2\neq\pm1$.

Suy ra hai đồ thị có 4 giao điểm. Chọn đáp án B

Nhận xét: Với dạng toán tìm giao điểm mà chứa tham số khi làm trắc nghiệm ta có thể cho tham số bằng một giá trị bất kì thoả mãn đề bài thì kết quả không thay đổi, giả sử $m=-1$ khi đó $g(x)=-2x^2+2$

Phương trình hoành độ $x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Chọn đáp án B

Ví dụ 6. ***(Sở GD và ĐT Thanh Hoá năm 2017)*** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+2x-1$ và đồ thị của hàm số $y=3x^2-2x-1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Giải.

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

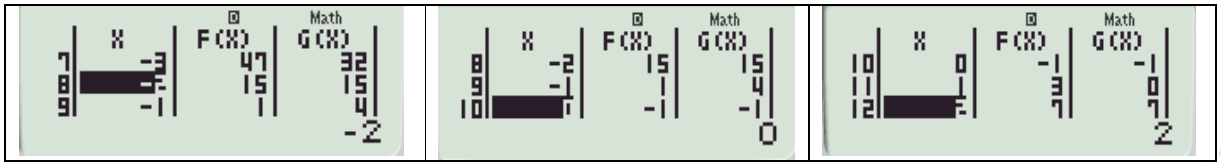
GV Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì - HN - 0969141404

$-x^3+3x^2+2x-1=3x^2-2x-1$

$\Leftrightarrow -x^3+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{B}$

Cách 2: Dùng mod7 nhập $f(X)=-X^3+3X^2+2X-1; g(X)=3X^2-2X-1$

$Start=-9; End=9; Step=1$



Vậy hai đồ thị có ba điểm chung $\Rightarrow \boxed{B}$

Nhận xét: Cách 2 có ưu điểm là khi nghiệm đẹp ta tìm luôn được hoành độ và tung độ, nhược điểm nghiệm xấu thì khó tìm được đáp án

Ví dụ 7. ***(Trường THPT Chuyên Ngoại Ngữ năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$ và đường thẳng $y=x-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Tìm hoành độ trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB*.

A. $x_I=1$. **B.** $x_I=-2$. **C.** $x_I=2$. **D.** $x_I=-1$.

Giải.

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$\frac{2x-1}{x+5}=x-1\Leftrightarrow x^2+2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

I là trung điểm của *AB* nên $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-1$. Chọn đáp án D.

Chú ý: Để tính nhanh mà không cần tìm ra nghiệm cụ thể ta áp dụng định lí vi-et như sau

$x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}=-1$

Cách 2: Vì nghiệm của phương trình là nghiệm xấu nên ta sử dụng chức năng $Shift+Calc$

Nhập $\dfrac{2x-1}{x+5}-x+1\xrightarrow[x=1]{Shift+Calc} A$ (lưu biến A)

Nhập $\left(\dfrac{2x-1}{x+5}-x+1\right):(x-A)\xrightarrow[x=1]{Shift+Calc} B$ (lưu biến B)

Nhập $\dfrac{A+B}{2}=-1$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 8. ***(Trường THPT Việt Yên 1 lần 2 năm 2017)*** Đường thẳng $d: y=-x+2$ cắt đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Khi đó diện tích tam giác *OAB* là:

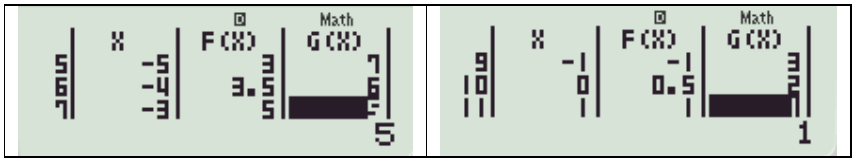
A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** $\dfrac{3}{2}$

Giải.

Dùng mod7 nhập $f(X)=\dfrac{2X+1}{X+2}; g(X)=-X+2;$

$Start=-9; End=9; Step=1$ ta có bảng

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Từ đó ta được $A(-3;5); B(1;1) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = 4$. Chọn đáp án B

B. Bài toán chứa tham số

Dạng 1. Tương giao của hàm bậc ba và đường thẳng

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số bậc ba $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ và đường thẳng $\Delta: y = a'x + b'$. Tìm giá trị của tham số để đồ thị của hai hàm số (C) và Δ cắt nhau tại k điểm

a. Phương pháp 1:

Nhẩm một một nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

- Cho hàm số bậc ba $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ và đường thẳng $\Delta: y = a'x + b'$

Đồ thị của hai hàm số (C) và Δ cắt nhau tại k điểm khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có k nghiệm phân biệt và nghiệm đó chính là hoành độ của các giao điểm

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ là

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a'x + b' \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (c - a')x + d - b' = 0 \ (1)$

- Nếu phương trình (1) có một nghiệm là x_0 thì giả sử

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = Ax^2 + Bx + C \ (2) \end{array}\right.$$

- Đồ thị (C) cắt đường thẳng Δ tại một điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_g < 0 \\ \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- Đồ thị (C) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có một nghiệm kép khác x_0 hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là $x_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- Đồ thị (C) cắt đường thẳng Δ tại ba điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$

Chú ý:

- Trong nhiều trường hợp x_0 không phải là một số thực mà chính là tham số m.
- Có thể thay đường thẳng Δ bằng trục Ox. Khi đó ta làm tương tự như đường thẳng Δ.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 7. ***(Trường THPT Triệu Sơn 1 lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 \ (C_m)$ và đường thẳng $d: y = x + 4$. Khi đó tập các giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt là:

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(2;+\infty)$

C. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

Giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\g(x)=x^2+2mx+m+2=0\ (*)\end{array}\right.$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow\begin{cases}g(0)\neq 0\\\Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2\neq 0\\m^2-m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(2;+\infty)$. Chọn đáp án B

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2x-m^3$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=3x-3m$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt

A. 0 **B.** Không có **C.** 1 **D.** Vô số

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$x^3-3mx^2+3m^2x-m^3=3x-3m\qquad(1)$

$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+3m=0\Leftrightarrow(x-m)(x^2-2mx+m^2-3)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x^2-2mx+m^2-3=0\qquad(2)\end{array}\right.$

Đặt $g(x)=x^2-2mx+m^2-3$. Ta có $\Delta=3>0,\forall m$ và $g(m)=-3\neq 0,\forall m$

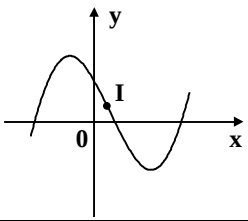
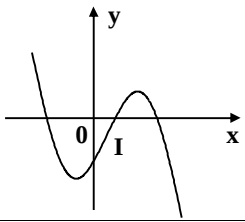
Suy ra phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác m, khi đó phương trình (1) luôn có ba nghiệm phân biệt.

Vậy (C) luôn cắt d tại ba điểm phân biệt với mọi m. Chọn đáp án D

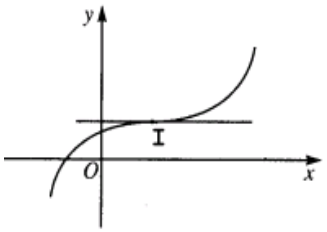
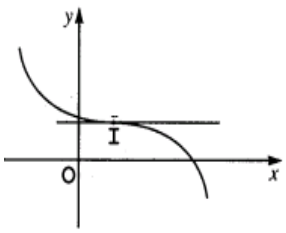
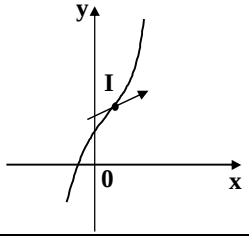
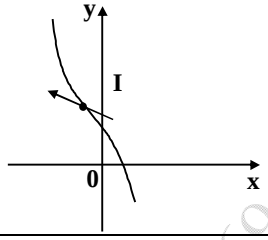
c. Phương pháp 2: Sử dụng đồ thị hàm số bậc 3 và vị trí cực trị.

- Nếu trường hợp phương trình hoành độ giao điểm không dễ dàng trong việc nhẩm nghiệm hay bài toán không có các điều kiện phức tạp về toạ độ giao điểm thì ta có thể sử dụng đồ thị hàm số bậc ba để giải quyết bài toán.
- Giao điểm của đồ thị hàm số bậc ba $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ và đường thẳng $\Delta: y=a'x+b'$ đưa về bài toán xét giao điểm của đồ thị hàm số $(C'): y=ax^3+bx^2+(c-a')x+d-b'\ \ (a\neq 0)$ với trục hoành.
- Hai đồ thị của hai hàm số (C) và Δ cắt nhau tại k điểm khi và chỉ khi đồ thị hàm số (C') cắt trục hoành tại k điểm.

*** Bảng tóm tắt dạng đồ thị hàm số** $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$

	$a>0$	$a<0$
$y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=b^2-3ac>0$		

GV: Lương Văn Huy - TĐL Thanh Trì - HN - 0969141404

$y'=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2-3ac=0$		
$y'=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2-3ac<0$		

*** Một số câu hỏi thường gặp về số giao điểm của hàm bậc ba và trục hoành**

Phương trình hoành độ giao điểm là $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (*)$

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 1 điểm $\Leftrightarrow (*)$ có 1 nghiệm

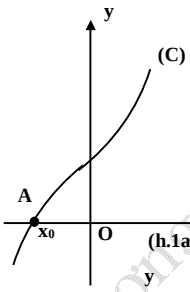
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ không có cực trị } (h.1a) \\ \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}>0 \end{cases} \quad (h.1b) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \le 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'}>0 \\ y_{CĐ}.y_{CT}>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

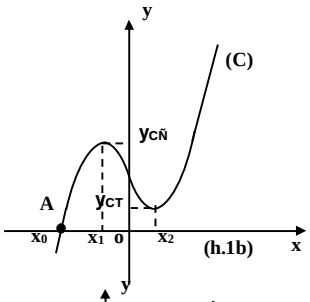
- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 2 điểm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm

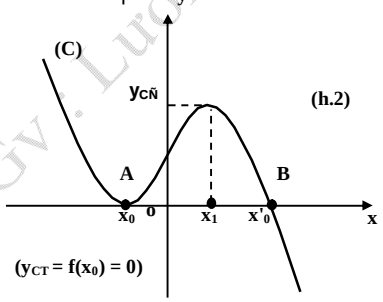
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}=0 \end{cases} \quad (h.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'}>0 \\ y_{CĐ}.y_{CT}=0 \end{cases}$$

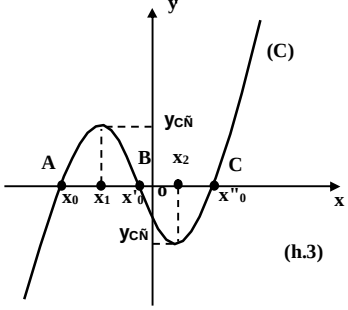
- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \end{cases} \quad (h.3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'}>0 \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \end{cases}$$









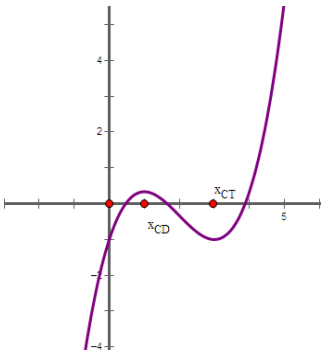
Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương

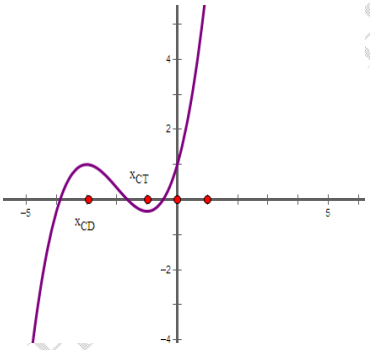
$a>0$	$a<0$
$\begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \\ x_{CĐ}>0 \\ y(0)<0 \end{cases} \quad (h4)$	$\begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \\ x_{CT}>0 \\ y(0)<0 \end{cases} \quad (h4)$

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm

$a>0$	$a<0$
$\begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \\ x_{CT}<0 \\ y(0)>0 \end{cases} \quad (h5)$	$\begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT}<0 \\ x_{CĐ}<0 \\ y(0)>0 \end{cases} \quad (h5)$



H.4 $(a>0)$



H.5 $(a>0)$

- Các trường hợp (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $>\alpha(<\alpha)$ thì ta đặt $t=x-\alpha$ khi đó bài toán trở về dạng quen thuộc. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=f(t)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương (âm).

d. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 9. Tìm m để đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1-m$ cắt trục hoành $Ox: y=0$

a. Tại 3 điểm phân biệt.
b. Tại 2 điểm.
c. Tại 1 điểm.

Giải.

Nhận xét: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là $x^3-3x+1-m=0 \ (1)$

Ta không nhẩm được nghiệm của phương trình (1)

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1-m$

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-1-m \\ x=-1\Rightarrow y=3-m \end{array}\right.$

Do đó hàm số luôn có cực đại, cực tiểu

a. Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, ta có

$y_{cd}.y_{ct}<0\Leftrightarrow y(1).y(-1)<0\Leftrightarrow (-m-1)(3-m)<0\Leftrightarrow (m+1)(m-3)<0\Leftrightarrow -1<m<3$

b. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm, ta có

$y_{cd}.y_{ct}=0\Leftrightarrow y(1).y(-1)=0\Leftrightarrow (-m-1)(3-m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

c. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm, ta có

$$y_{cd}.y_{ct} > 0 \Leftrightarrow y(1).y(-1) > 0 \Leftrightarrow (-m-1)(3-m) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$$

Vì hàm số luôn có cực đại cực tiểu nên không xảy ra trường hợp hàm số luôn đồng biến.

Nhận xét: Bài toán trên là trường hợp đặc biệt khi Δ ta tính ngay được tung độ các điểm cực trị nên việc tính toán trở nên đơn giản, trong trường hợp không tính được tung độ các điểm cực trị thì ta phải tìm đường thẳng qua các điểm cực trị "*Xem lại phần bài toán cực trị*"

e. Phương pháp 3: Phương pháp hàm số

- Nếu phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ $(*)$ biến đổi được về dạng $f(x)=g(m)$ trong đó $f(x)$ là hàm số có đồ thị (C) còn $g(m)$ là hàm hằng (phụ thuộc tham số m) có đồ thị là đường thẳng d song song trục hoành và đi qua $(0;g(m))$
- Khi đó ta có thể giải bài toán như sau:
  - **Bước 1**: Lập bảng biến thiên của hàm số
  - **Bước 2**: Dựa vào BBT $\Rightarrow$ Số giao điểm của (C) và d

Đặc biệt: Khi $y=f(x)$ là hàm bậc ba có cực đại và cực tiểu thì ta sử dụng kết quả như sau

Phương trình $F(x,m)=0$ $(*)$	Kết quả
o $(*)$ có ba nghiệm phân biệt	o $y_{CT} < g(m) < y_{CD}$
o $(*)$ có hai nghiệm (1 đơn, 1 kép)	o $\left[\begin{array}{l} g(m)=y_{CD} \\ g(m)=y_{CT} \end{array}\right.$
o $(*)$ có một nghiệm đơn duy nhất	o $\left[\begin{array}{l} g(m)>y_{CD} \\ g(m)<y_{CT} \end{array}\right.$
o $(*)$ có ít nhất hai nghiệm	o $y_{CT} \le g(m) \le y_{CD}$
Chú ý: Với hàm bậc ba thì $x_{CD} > x_{CT}$ hoặc $x_{CD} < x_{CT}$ thì $y_{CD} < y_{CT}$. Do đó ta chỉ cần tính ra tung độ các điểm cực trị và so sánh chứ không cần phải lập bảng biến thiên để chỉ rõ y_{CD} hoặc y_{CT}.	

f. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 10. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m): $y=f(x)=x^3+x^2+mx+3$ cắt trục hoành Ox tại ba điểm phân biệt.

A. $m \le -5$ **B.** $m < -5$ **C.** $m \ge -5$ **D.** $m > -5$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+x^2+mx+3=0 \Leftrightarrow -m=\dfrac{x^3+x^2+3}{x}$

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^3+x^2+3}{x}$ (C_m'). Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g'(x)=\dfrac{2x^3+x^2-3}{x^2}$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (vì $2x^2+3x+3=0$ vô nghiệm)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'			‖		0		
g	$+\infty$	$\searrow$	‖	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	‖	$+\infty$			

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì đường thẳng $y=-m$ phải cắt (C_m') tại ba điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-m>5\Leftrightarrow m<-5$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 11. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m): $y=f(x)=(m-1)x^3-3mx^2+3mx-m+4$ cắt trục hoành Ox tại một điểm

A. $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{4}{9} \\ m>4 \end{array}\right.$ **B.** $\dfrac{4}{9}<m<4$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{4}{9} \\ m\ge 4 \end{array}\right.$ **D.** $\dfrac{4}{9}\le m\le 4$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$(m-1)x^3-3mx^2+3mx-m+4=0\Leftrightarrow m=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$$

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$ (C_m'). Tập xác định: $D=R\setminus\{1\}$

$$g'(x)=\frac{3(4-x^2)}{(x-1)^4};\ g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3(4-x^2)}{(x-1)^4}=0\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
g	1	$\searrow$	$\dfrac{4}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	4	$\searrow$	1

Để (C_m) cắt trục hoành tại một điểm thì đường thẳng $y=m$ phải cắt (C_m') một điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m>4$ hoặc $m<\dfrac{4}{9}$. Chọn đáp án A

Ví dụ 12. ***(Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hai hàm số $y=x^3+x^2$ và $y=x^2+3x+m$ cắt nhau tại nhiều điểm nhất.

A. $-2\le m\le 2$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $m=2$ **D.** $0<m<2$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+x^2=x^2+3x+m\Leftrightarrow x^3-3x=m$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ và đường thẳng $y=m$

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=2 \\ x=1\Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$

Để có hai đồ thị có nhiều điểm chung thì (1) có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow -2<m<2$

Chọn đáp án B

Ví dụ 13. ***(Trường THPT Ngô Gia Tự lần 3 năm 2017)*** Điều kiện của tham số m để đồ thị của hàm số $y=2x^3-6x+2m$ cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm phân biệt là

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-6x+2m=0\Leftrightarrow 2x^3-6x=-2m$ $(*)$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Đặt $f(x)=2x^3-6x;\ f'(x)=6x^2-6x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow y=\mp 4$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=-2m$. Để có ít nhất hai nghiệm phân biệt thì $-4\le -2m\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

Chọn đáp án D

Ví dụ 14. ***(Trường THPT Hai Bà Trưng lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x-\log_2 m=0$ có đúng một nghiệm.

A. $\frac{1}{4}<m<4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\frac{1}{4}$. **D.** $0<m<\frac{1}{4}$ và $m>4$.

Giải.

Phương trình $x^3-3x-\log_2 m=0\Leftrightarrow x^3-3x=\log_2 m$ với $m>0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ và đường thẳng $y=\log_2 m$.

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=2\\x=1\Rightarrow y=-2\end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l}\log_2 m<-2\\\log_2 m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m<\frac{1}{4}\\m>4\end{array}\right.$

Chọn đáp án D

Bài toán tổng quát 2: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với a,b,c,d phụ thuộc vào tham số). Tìm giá trị của tham số để đồ thị cắt đường thẳng $y=\alpha x+\beta$ (hoặc trục Ox) tại 3 điểm phân biệt và thỏa mãn điều kiện cho trước.

a. Phương pháp:

- **Bước 1:** Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$ax^3+bx^2+cx+d=\alpha x+\beta\Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-\alpha)x+d-\beta=0$ (1)

Giả sử ta đoán trước được phương trình (1) có một nghiệm $x=x_0$ khi đó (*) phân tích thành

$(x-x_0)(Ax^2+Bx+C)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\g(x)=Ax^2+Bx+C=0\end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt và khác x_0

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_g\ (\Delta'_g)>0\\g(x_0)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$ giá trị tham số thuộc miền D nào đó (*)

Giả sử đường thẳng cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ với $x_A=x_0$ và hai điểm B, C với x_B,x_C là nghiệm của phương trình $g(x)=0$

- **Bước 2:** Từ điều kiện cho trước ta biến đổi theo tổng và tích các nghiệm thay tổng và tích vào từ đó dẫn tới một phương trình hoặc một bất phương trình theo tham số, giải phương trình này ta được tham số sau đó đối chiếu với điều kiện (*) và kết luận

Chú ý: Thường thì ban đầu giả thiết sẽ cho một số đặc điểm để từ đó chúng ta có thể đoán được nghiệm như " điểm có hoành độ cho trước, có tọa độ cho trước, điểm cố định…). Còn những trường hợp không đoán được nghiệm thì phải giải theo trường hợp tổng quát như bài toán tổng quát 1 đã nêu trên

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $(C_m):y=x^3+3x^2+(m+2)x+2m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

GV Lương Văn Huy - LHSJ Thanh Trì - HN - 0969141404

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$$x^3+3x^2+(m+2)x+2m=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+x+m=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Đồ thị (C_m) cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm âm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ \Delta>0 \\ P<0 \\ S<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ 1-4m>0 \\ m>0 \\ -1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ m<\dfrac{1}{4} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của m. Chọn đáp án A

Ví dụ 16. ***(Trường THPT Chuyên Lam Sơn lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị $(C_m): y=x^3+3mx^2-m^3$ cắt đường thẳng $d: y=m^2x+2m^3$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Ta có kết quả:

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $\begin{cases} m=-1 \\ m=1 \end{cases}$.

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3 \Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x^2+4mx+3m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \Rightarrow x_1=m \\ g(x)=x^2+4mx+3m^2=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(m)\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m^2+3m^2\neq 0 \\ 4m^2-3m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0$$. Theo vi-et ta có $\begin{cases} x_2+x_3=-4m \\ x_2x_3=3m^2 \end{cases}$

Ta có $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_1^4+\left[(x_2+x_3)^2-2x_2x_3\right]^2-2(x_2x_3)^2=m^4+(16m^2-6m^2)^2-18m^4=83m^4$.

Theo giả thiết $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83 \Leftrightarrow 83m^4=83 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$ thoả mãn $m\neq 0$

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án D

Ví dụ 17. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ và $d: y=x+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt d tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1$.

A. $m\geq 5$ **B.** Không tồn tại m **C.** $0\leq m\leq 5$ **D.** $5\leq m\leq 10$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng d là:

$$x^3-3x^2+mx+1=x+1 \ (*)$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+(m-1)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=x^2-3x+(m-1)=0 \ (**) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì (*) phải có 3 nghiệm phân biệt hay (**) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-4(m-1)>0 \\ g(0)=m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{5}{4} \ (1) \\ m\neq 1 \end{cases}$

Giả sử 3 giao điểm là $A(0;1), B(x_1;x_1+1), C(x_2;x_2+1)$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Giả thiết $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2\le 1\Leftrightarrow 9-2m+2\le 1\Leftrightarrow m\ge 5\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B

Ví dụ 18. Cho hàm số $y=2x^3-3mx^2+(m-1)x+1\ (1)$. Để đường thẳng $y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm A, B, C phân biệt thỏa mãn điểm $C(0;1)$ nằm giữa A và B đồng thời đoạn thẳng AB có độ dài bằng $\sqrt{30}$ thì tổng các giá trị của tham số m bằng bao nhiêu.

A. $\frac{8}{9}$ **B.** $\frac{9}{8}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{8}{9}$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C_m) là

$2x^3-3mx^2+(m-1)x+1=2x+1$

$\Leftrightarrow x(2x^2-3mx+m-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ 2x^2-3mx+m-3=0\ (*) \end{array}\right.$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm $A; C; B$ phân biệt và C nằm giữa A và B khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2.(m-3)<0\Leftrightarrow m<3\ (*)$

Khi đó tọa độ A và B thỏa mãn $\begin{cases} x_A+x_B=\frac{3m}{2} \\ x_A.x_B=\frac{m-3}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} y_A=2x_A+1 \\ y_B=2x_B+1 \end{cases}$ (vì A và B thuộc d)

Theo giả thiết $AB=\sqrt{30}\Leftrightarrow \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{30}$

$\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2=6\Leftrightarrow (x_B+x_A)^2-4x_Bx_A=6\Leftrightarrow \frac{9m^2}{4}-4.\frac{m-3}{2}=6$

$\Leftrightarrow 9m^2-8m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=0 \\ m_2=\frac{8}{9} \end{array}\right.$ (thỏa mãn (*)) nên $m_1+m_2=\frac{8}{9}$. Chọn đáp án A

Ví dụ 19. ***(Trường THPT Hai Bà Trưng lần 1 năm 2017)*** Đường thẳng $d: y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C): $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow A(0;4). \\ g(x)=x^2+2mx+m+2=0\quad (1) \end{array}\right.$

Đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0)=m+2\ne 0 \\ \Delta'=m^2-m-2>0 \end{cases}\ (*)$

GV: Lương Văn Huy - LIFE Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B(x_B; x_B+2), C(x_C; x_C+2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1). Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B x_C = m+2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} BC.d(M, BC) = 4$. Phương trình d là $d: x - y + 4 = 0$.

Mà $d(M, BC) = d(M, d) = \frac{|1-3+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow BC = \frac{8}{d(M, BC)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$

Ta lại có: $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 2(x_C - x_B)^2 = 32$

$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B.x_C = 16 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) = 16$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2.$

Đối chiếu với điều kiện ta được $m = 3$. Chọn đáp án C

Ví dụ 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 1$ (1) có đồ thị (C_m) với m là tham số. Tính tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt $P(0,1), M, N$ sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN bằng $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ với $O(0;0)$

A. 0 **B.** 3 **C.** −3 **D.** −2

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là

$x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(0;1) \\ x^2 - 3x + m = 0 \ (2) \end{array}\right.$

Để (C_m) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{4} \end{cases}$

Giả sử $M(x_1; x_1+1), N(x_2; x_2+1)$ khi đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (2)

Ta có $S_{OMN} = \frac{1}{2} MN.d(O,d) = \frac{OM.ON.MN}{4R}$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN)

$\Rightarrow \frac{1}{2} d(O,d) = \frac{OM.ON.}{4R} \Leftrightarrow OM.ON = 2R.d(O,d) = 5\sqrt{2} d(O,d)$ (3)

Mà ta có $OM.ON = \sqrt{(2x_1^2 + 2x_1 + 1)(2x_1^2 + 2x_1 + 1)}$ với $x_1^2 = 3x_1 - m; x_2^2 = 3x_2 - m$

$\Rightarrow OM.ON = \sqrt{4m^2 + 12m + 25}$. Mặt khác $d(O,d) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Khi đó thế vào (3) ta được $\sqrt{4m^2 + 12m + 25} = 5\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -3 \end{array}\right.$ thỏa đề chỉ có $m = -3$

Chọn đáp án C

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m-4)x + m$, m là tham số thực (1). Tính tổng các giá trị của tham số m để đồ thị (1) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $k_A + \frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_C} = 0$, trong đó k_A, k_B, k_C lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (1) tại A, B, C

A. −4 **B.** −6 **C.** −10 **D.** 10

Giải.

Cty: Lương Văn Huy - TBH Thanh Trì - HN 0969141404

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3-3x^2+(m-4)x+m=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2-4x+m)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+1=0\\g(x)=x^2-4x+m=0\ (1)\end{bmatrix}$$

Ta thấy đồ thị luôn cắt trục Ox tại điểm $A(-1;0)$ với mọi giá trị của m

Để đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4-m>0\\g(-1)=5+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\m\neq -5\end{cases}\ (*)$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) theo vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1x_2=m\end{cases}$

Khi đó là hoành độ của B và C là $x_1;x_2$, hệ số góc của A, B, C là

$k_A=m+5;k_B=3x_1^2-6x_1+m-4;k_C=3x_2^2-6x_2+m-4$

Theo giả thiết $k_A+\dfrac{1}{k_B}+\dfrac{1}{k_C}=0\Leftrightarrow m+5+\dfrac{1}{3x_1^2-6x_1+m-4}+\dfrac{1}{3x_2^2-6x_2+m-4}=0$

$$\Leftrightarrow m+5+\frac{(3x_1^2-6x_1+m-4)+(3x_2^2-6x_2+m-4)}{(3x_1^2-6x_1+m-4)(3x_2^2-6x_2+m-4)}=0\Leftrightarrow m+5+\frac{4(4-m)}{4(m-4)(m+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow m+5-\frac{1}{m+5}=0\Leftrightarrow(m+5)^2=1\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m_1=-4\\m_2=-6\end{bmatrix}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $m_1=-4$ hoặc $m_2=-6$. Tổng $m_1+m_2=-10$

Chọn đáp án C

Ví dụ 22. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có đồ thị (C). Để đường thẳng $d:y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2;2),B,C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào?

A. $(-2;0)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(-2;-1)$ **D.** $(0;1)$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2\ \ (1)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\g(x)=x^2-x-2-m=0\ \ (1)\end{bmatrix}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=4m+9>0\\g(2)-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{9}{4}\\m\neq 0\end{cases}$$

Hoành độ điểm B và C là nghiệm của phương trình (1). Theo định lý viet: $\begin{cases}x_B+x_C=1\\x_Bx_C=-m-2\end{cases}$

Tích hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C là:

$$y'(x_B).y'(x_C)=(3x_B^2-6x_B)(3x_C^2-6x_C)=9(m+1)^2-9\geq -9,\forall m\in\left(-\frac{9}{4};+\infty\right)\setminus\{0\}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$.

Vậy $y'(x_B).y'(x_C)$ nhỏ nhất bằng -9 đạt được khi $m=-1\in(-2;0)$. Chọn đáp án A

Ví dụ 23. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Giả sử $(C_m):y=x^3-3mx^2+(m-1)x+3m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Khi đó giá trị nhỏ nhất $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ của biểu thức là:

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $-\frac{17}{9}$ **B.** $\frac{7}{9}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{17}{9}$

Giải.

Nhận xét: Trước tiên chúng ta phải nhớ lại định lý vi-et đối với hàm bậc ba

Cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ x_1x_2x_3=\dfrac{-d}{a} \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là $y=x^3-3mx^2+(m-1)x+3m$

Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=(3m)^2-2.(m-1)$

$=9m^2-2m+2=\left(3m-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{17}{9}\geq\frac{17}{9}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 24. ***(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị – 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Giả sử (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 (với $x_1<x_2<x_3$). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$ **B.** $1<x_1<x_2<3<x_3<4$

C. $1<x_1<3<x_2<4<x_3$ **D.** $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$

Giải.

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

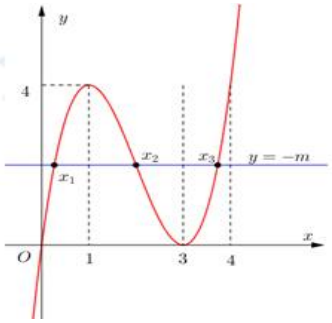
Khi đó phương trình $x^3-6x^2+9x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $x^3-6x^2+9x=-m$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ tại 3 điểm phân biệt.

Ta có đồ thị hai hàm số như hình bên.

Hai đồ thị có 3 giao điểm khi và chỉ khi $-4<m<0$

Khi đó $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$



Bài toán tổng quát 3: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị $(C): y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng hay cách đều nhau.

a. Phương pháp:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục Ox là $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1)

Điều kiện cần: Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng.

Viết (1) dưới dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=a\left[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3\right]$

Đồng nhất thức hai vế ta được $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ (2)

Ba nghiệm x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1+x_3=2x_2$ (3)

Từ (2) và (3) ta được $x_2=-\frac{b}{3a}$ là một nghiệm của (1)

Cty Toán Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

Điều kiện đủ: Với $x_2=-\dfrac{b}{3a}$ thế vào phương trình (1) để tìm ra tham số và thử lại nghiệm từ đó kết luận

Chú ý:

- Ba số a,b,c lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a+c=2b$
- Nếu đa thức $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có các nghiệm là $x_1;x_2;x_3$ thì $y=f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
- Để làm nhanh trắc nghiệm ta có thể sử dụng cách tính nhanh theo hai hướng sau:

Điều kiện để đồ thị $(C): y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng hay cách đều nhau.

Hướng 1. $\begin{cases}\exists CĐ;CT\\ y_U=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0;\ b^2-3ac>0\\ y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0\end{cases}\Rightarrow m$

Với $x_U=-\dfrac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình $y''=0$

Hướng 2. $y_U=0\Leftrightarrow y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0\Rightarrow m$ thay vào phương trình ban đầu và dùng máy tính kiểm tra điều kiện lập thành 1 cấp số cộng

b. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 25. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m\ (C_m)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2-9x+m=0$ (*).

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ thì $x_1,\ x_2,x_3$ là nghiệm của phương trình (*). Khi đó:

$x^3-3x^2-9x+m=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3$ (1)

Ta có x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1+x_3=2x_2$ (2).

Thế (2) vào (1) ta có $x_2=1$. Khi $x_2=1$ (*) ta được $m=11$

Với $m=11$: (*) $\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+11=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-11)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-2\sqrt{3}\\ x_2=1\\ x_3=1+2\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow x_1+x_3=2x_2.$

Vậy $m=11$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án B

Nhận xét: Để làm nhanh bằng trắc nghiệm ta làm như sau

$\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ c=-9\\ x=-\dfrac{b}{3a}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2-3ac=36>0\\ y_U=-11+m=0\end{cases}\Rightarrow m=11$

Bài toán tổng quát 4: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị $(C): y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số nhân.

a. Phương pháp:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục Ox là $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1)

Điều kiện cần: Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số nhân.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Viết (1) dưới dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

$=a\left[x^3-\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x-x_1x_2x_3\right]$

Đồng nhất thức hai vế ta được $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$ (2)

Ba nghiệm x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1x_3=\left(x_2\right)^2$ (3)

Từ (2) và (3) ta được $x_2=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là một nghiệm của (1)

Điều kiện đủ: Với $x_2=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ thế vào phương trình (1) để tìm ra tham số và thử lại nghiệm từ đó kết luận

Chú ý:

- Ba số a,b,c lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow ac=b^2$
- Để làm nhanh trắc nghiệm ta có thể sử dụng cách tính nhanh theo hai hướng sau:

Điều kiện để đồ thị $(C):y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số nhân.

Hướng 1.

$$\begin{cases}\exists CĐ;CT\\ y\left(\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0;\ b^2-3ac>0\\ y\left(\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}\right)=0\end{cases}\Rightarrow m$$

Với $x_U=-\dfrac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình $y''=0$

Hướng 2. $y\left(\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}\right)=0\Rightarrow m$ thay vào phương trình ban đầu và dùng máy tính kiểm tra điều kiện lập thành 1 cấp số cộng

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 26. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8$ (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải.

Giả sử (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ khi đó:

$x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

$=x^3-\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x-x_1x_2x_3$

Từ đó đồng nhất thức ta được $x_1x_2x_3=8$

Vì $x_1;x_2;x_3$ tạo thành cấp số nhân nên $x_1x_3=\left(x_2\right)^2$ khi đó $x_1x_2x_3=\left(x_2\right)^3=8\Leftrightarrow x_2=2$

Vì x_2 là hoành độ giao điểm nên $f\left(x_2\right)=f(2)=0\Leftrightarrow 2(2-m)=0\Leftrightarrow m=2$

Với $m=2$ thì $f(x)=x^3-7x^2+14x-8=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-6x+8\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x^2-6x+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=4\end{array}\right.$$

Ta thấy các số 1; 2; 4 tạo thành cấp số nhân với công bội bằng 2

Vậy $m=2$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án B

Nhận xét: Để giải nhanh bằng trắc nghiệm ta làm như sau

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-(3m+1) \\ c=5m+1 \\ x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}=\sqrt[3]{-\dfrac{-8}{1}}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3m+1)^2-3(5m+1)=9m^2-7m-2>0 \\ y(2)=2(2-m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$$

Bài toán tổng quát 5: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị $(C): y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục *Ox* có diện tích phần nằm phía trên trục *Ox* và phần nằm phía dưới trục *Ox* bằng nhau

a. Phương pháp:

Để thoả mãn yêu cầu của bài toán thì $\begin{cases} \exists CĐ;CT \\ y_u=0 \end{cases}$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$

$\Rightarrow y_u=y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=b^2-3ac>0 \end{cases}$

Vậy từ đây ta có công thức tính nhanh như sau $\boxed{\begin{cases} a\neq 0;b^2-3ac>0 \\ y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0 \end{cases}}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 27. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $x^3-3x^2+3mx+m-1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục *Ox* có diện tích phần nằm phía trên trục *Ox* và phần nằm phía dưới trục *Ox* bằng nhau. Giá trị của m là:

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{3}{4}$ **C.** $\dfrac{4}{5}$ **D.** $\dfrac{3}{5}$

Giải.

Áp dụng công thức tính nhanh

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-3ac=9-27m>0 \\ y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=y(1)=4m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

Vậy chọn đáp án C.

Dạng 2. Tương giao của hàm phân thức bậc 1/bậc 1 và đường thẳng

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (C)$, với $a,c\neq 0$, a,b,c,d phụ thuộc vào tham số thực và đường thẳng $d: y=\alpha x+\beta$ với $\alpha\neq 0,\alpha,\beta$ cũng có thể phụ thuộc vào tham số thực. Tìm giá trị của tham số để đường thẳng *d* cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M,N thỏa mãn một điều kiện cho trước

a. Phương pháp:

- **Bước 1:** Phương trình trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta \Leftrightarrow g(x)=c\alpha x^2+(c\beta+d\alpha-a)x+d\beta-b=0$$

Hay $g(x)=Ax^2+Bx+C$ ($x=-\dfrac{d}{c}$ không là nghiệm)

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0 \\ \Delta_g\left(\Delta_g'\right) > 0 \Leftrightarrow m \in D \quad (*) \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x)=0$ và $\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta \\ y_2 = \alpha x_2 + \beta \end{cases}$

Theo định lý viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{(c\beta + d\alpha - a)}{c\alpha} \\ x_1.x_2 = \dfrac{d\beta - b}{c\alpha} \end{cases}$

- **Bước 2:** Từ điều kiện cho trước ta biến đổi theo tổng và tích các nghiệm dẫn tới một phương trình hoặc một bất phương trình theo x_0, giải phương trình này ta được x_0 sau đó đối chiếu với điều kiện (*) và kết luận

Chú ý: Từ bài toán tổng quát này ta xây dựng công thức tính nhanh cho độ dài hai điểm MN như sau

- Độ dài $MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\alpha^2+1)(x_2-x_1)^2}$

$= \sqrt{(\alpha^2+1)\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right]} = \sqrt{(\alpha^2+1)\left(\dfrac{B^2}{A^2} - 4\dfrac{C}{A}\right)}$

$= \sqrt{\dfrac{\alpha^2+1}{A^2}(B^2-4AC)} = \sqrt{\dfrac{\alpha^2+1}{A^2}}.\Delta_g$ với α là hệ số của phương trình đường thẳng; A là hệ số của phương trình bậc hai.

- Vì $\dfrac{\alpha^2+1}{A^2} = const$ nên $MN_{\min} \Leftrightarrow \Delta_{\min}$

- Diện tích tam giác MNP với $P(x_P;y_P)$ cho trước

$S_{MNP} = \dfrac{1}{2}MN.PH = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{\alpha^2+1}{A^2}}.\Delta_g.d(P,\Delta)d$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 28. ***(Trường THPT Trần Hưng Đạo lần 3 năm 2017)*** Những giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt MN sao cho $MN = 2\sqrt{3}$ là

A. $m = 4 \pm \sqrt{10}$ **B.** $m = 4 \pm \sqrt{3}$ **C.** $m = 2 \pm \sqrt{3}$ **D.** $m = 2 \pm \sqrt{10}$

Giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình:

$\dfrac{2x+1}{x+1} = x + m - 1 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m-2)x + m - 2 = 0 \quad (x \neq -1)$.

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m + 12 > 0 \\ g(-1) = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < 2 \\ m > 6 \end{bmatrix} (*)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$. Theo vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1;x_1+m-1), B(x_2;x_2+m-1) \Rightarrow AB=\sqrt{2}|x_2-x_1|$.

Theo giả thiết $AB=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}|x_2-x_1|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6 \Leftrightarrow m^2-8m+6=0$

$\Leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m=4\pm\sqrt{10}$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Ta có thể áp dụng công thức tính nhanh như sau

$MN=\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{A^2}.\Delta_g}=\sqrt{\frac{1^2+1}{1^2}(m^2-8m+12)}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2-8m+6=0 \Leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$

Ví dụ 29. ***(Trường THPT Chuyên Thái Nguyên năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{x-1}{2x}$ tại 2 điểm phân biệt A, B với AB ngắn nhất?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{5}{9}$ **C.** 5 **D.** $-\frac{1}{2}$

Giải.

Cách 1. Phương trình hoành độ giao điểm là:

$-x+m=\frac{x-1}{2x} \Leftrightarrow g(x)=2x^2+(1-2m)x-1=0$ ($x=0$ không phải là nghiệm)

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(1-2m)^2+8=4m^2-4m+9=(2m-1)^2+8>0, \forall m\in\mathbb{R}\\ g(0)=-1\neq 0\end{cases}$

Khi đó gọi $A(x_1;-x_1+m); B(x_2;-x_2+m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của $g(x)=0$ và $\begin{cases}y_1=-x_1+m\\ y_2=-x_2+m\end{cases}$

Theo định lí vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2m-1}{2}\\ x_1x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Theo giả thiết ta có $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(-x_1+m+x_2-m)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$\sqrt{2}\sqrt{\frac{4m^2-4m+1}{4}+2}\geq 2$. Dấu "=" khi $m=\frac{1}{2}$

Chọn đáp án A

Cách 2. Áp dụng công thức tính nhanh đã xây dựng trong phần lí thuyết thì

$MN_{\min} \Leftrightarrow \Delta_{\min}$ mà $\Delta=4m^2-4m+9=(2m-1)^2+8\geq 8$ hay $\Delta_{\min}=8 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Cách 3. Để $AB_{\min} \Leftrightarrow AB$ đi qua tâm đối xứng của đồ thị. Gọi $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

$AB_{\min} \Leftrightarrow I\in d \Leftrightarrow \frac{1}{2}=0+m \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$. Chọn đáp án D

Ví dụ 30. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tính tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ)

A. 2 **B.** -1 **C.** 4 **D.** 0

Giải:

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là:

$\frac{2x+1}{x+1}=-2x+m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+(4-m)x+1-m=0$ ($x=-1$ không phải là nghiệm)

Để đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2+8>0, \forall m\in\mathbb{R}\\ g(-1)=-1\neq 0\end{cases}$ (*)

$\Leftrightarrow g(x)=0$ luôn có 2 nghiệm nên đường thẳng luôn cắt đồ thị (*C*) tại hai điểm *A*, *B*.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x)=0$ và $y_1=-2x_1+m;\ y_2=-2x_2+m$

Theo định lý vi ét ta có $x_1+x_2=-\frac{4-m}{2}$ và $x_1.x_2=\frac{1-m}{2}$

Ta có $d(O,AB)=d(O,d)=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$ và $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5(x_2+x_1)^2-20x_1x_2}$

$=\sqrt{5\left(-\frac{4-m}{2}\right)^2-20\frac{1-m}{2}}=\frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$

Theo giả thiết $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}d(O,AB)AB=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{|m|}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow m^4+8m^2-48=0\Leftrightarrow m^2=4$ hoặc $m^2=-12<0$ (loại) $\Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=\pm 2$ là giá trị cần tìm hay tổng các giá trị của *m* bằng 0. Chọn đáp án D

Nhận xét:

- Ta có thể tính AB theo công thức tính nhanh trên $AB=\sqrt{\frac{2^2+1}{2^2}(m^2+8)}=\frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$

- Để làm nhanh trắc nghiệm ta có thể sử dụng công thức tính diện tích khác

$S_{\Delta OAB}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}|x_Ay_B-x_By_A|=\sqrt{3}\ \Leftrightarrow|x_A(-2x_B+m)-x_B(-2x_A+m)|=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow|m(x_A-x_B)|=2\sqrt{3}\ \Leftrightarrow m^2(x_A-x_B)^2=12\Leftrightarrow m^2\frac{m^2+8}{4}=12$

$\Leftrightarrow m^4+8m^2-48=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$

Ví dụ 31. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (*H*). Với các giá trị nào của *m*, đường thẳng d_m đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc *m* cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị?

A. $m<0$ **B.** $m=0$ **C.** $m>0$ **D.** $m<1$

Giải.

Phương trình của đường thẳng d_m đi qua điểm *A* và có hệ số góc *m* là $y=m(x+2)+2$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d_m và đồ thị (*H*) là nghiệm của phương trình

$mx+2m+2=\frac{2x-1}{x+1}\quad(x\neq -1)$

$\Leftrightarrow(mx+2m+2)(x+1)=2x-1\Leftrightarrow mx^2+3mx+2m+3=0$ (1)

Hai nhánh của (*H*) nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x=-1$ nên đường thẳng d_m cắt hai nhánh của (*H*) khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<-1<x_2$.

Đặt $t=x+1\Rightarrow x=t-1$ phương trình (1) trở thành:

$m(t-1)^2+3m(t-1)+2m+3=0\Leftrightarrow mt^2+mt+3=0$ (2)

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Bài toán đã cho trở thành tìm m để phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$ hay $3m < 0$ $\Leftrightarrow m < 0$. Chọn đáp án A

Nhận xét: Nếu điều kiện là thuộc về nhánh trái, nhánh phải, hai thuộc về một nhánh ta giải quyết như sau

TH 1: Thuộc về nhánh trái tức là $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$

TH 2: Thuộc về nhánh phải tức là $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$

TH 3: Thuộc về một nhánh, chưa nói rõ nhánh nào thì phải xét đồng thời cả hai trường hợp **TH 1** và **TH 2** sau đó lấy hợp lại

TH 4: Thuộc về hai nhánh khác nhau tức là $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$

Ví dụ 32. ***(Sở GD và ĐT Điện Biên năm 2017)*** Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho hai điểm A, B cách đều đường thẳng $\Delta: 2x - 4y + 5 = 0$

A. $m = 3$ **B.** $m = -5$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 5$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$$\frac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - mx + m = 0 \ (1) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ g(1) = 1 - m + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > 4 \\ m < 0 \end{bmatrix} (*)$$

Khi đó được hai giao điểm là $\begin{cases} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{cases}$ với $\begin{cases} y_A = -x_A + m \\ y_B = -x_B + m \end{cases}$

Hai điểm A, B cách đều đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow d(A, \Delta) = d(B, \Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x_A - 4y_A + 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|2x_B - 4y_B + 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \Leftrightarrow 2x_A - 4y_A + 5 = -(2x_B - 4y_B + 5) \text{ (vì } x_A \neq x_B)$$

$\Leftrightarrow 3(x_A + x_B) - 4m + 5 = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$ (thoả mãn $(*)$). Chọn đáp án D

Ví dụ 33. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. Xác định m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$

A. $\begin{bmatrix} m = -3 \\ m = \dfrac{2}{15} \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} m = -3 \\ m = \dfrac{15}{2} \end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix} m = \dfrac{2}{15} \\ m = 0 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} m = -1 \\ m = 0 \end{bmatrix}$

Giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+1}{x-2} = x + m$

$\Leftrightarrow x + 1 = (x + m)(x - 2) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 \ (x \neq 2) \ (*)$

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 + 4(2m+1) = m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m \\ g(2) = -3 \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m)$ là toạ độ giao điểm

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3-m \\ x_1x_2=-2m-1 \end{cases}$

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, I là trung điểm của AB

$\Rightarrow OG=\frac{2}{3}OI$ với $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1+x_2+2m}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{3-m}{2};\frac{3+m}{2}\right)$

Khi đó $G\left(\frac{3-m}{3};\frac{3+m}{3}\right)$ do $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$

Mà G thuộc đường tròn $x^2+y^2-3y=4$. Thay tọa độ của G vào ta được:

$\left(\frac{3-m}{3}\right)^2+\left(\frac{3+m}{3}\right)^2-3.\frac{3+m}{3}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\frac{15}{2} \\ m=-3 \end{array}\right.$. Chọn đáp án B

Ví dụ 34. ***(Trường THPT Chu Văn An lần 2 năm 2017)*** Biết rằng đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đồ thị (C), với $O(0;0)$ là gốc tọa độ. Khi đó giá trị của tham số m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(-\infty;-3]$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-2;3]$ **D.** $(-5;-2]$

Giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là

$\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m\Leftrightarrow g(x)=-3x^2+(m+1)x-m-1=0\ (x\neq 1)\ (1)$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4.3.(m+1)=m^2-10m-11>0 \\ g(1)=-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-11 \end{array}\right.(*)$

Với điều kiện như trên thì d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $A(x_A;-3x_A+m);B(x_B;-3x_B+m)$

Theo Viet ta có: $x_A+x_B=\frac{1+m}{3}$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khi đó:

$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_O}{3}=\frac{m+1}{9} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_O}{3}=\frac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}=\frac{m-1}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$

Vì điểm G thuộc (C) nên

$\frac{m-1}{3}=\frac{2.\frac{m+1}{9}+1}{\frac{m+1}{9}-1}\Leftrightarrow m^2-15m-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{15-5\sqrt{13}}{2}\approx -1,51 \\ x=\frac{15+5\sqrt{13}}{2}\approx 16,51 \end{array}\right.$ (thoả mãn $(*)$)

Chọn đáp án B

Ví dụ 35. ***(Trường THPT Triệu Sơn 1 lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y=-x+m$. Khi đó số giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\frac{x}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=x^2-mx+m=0\\x\neq 1\end{cases}(*)$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (*). Suy ra $A(x_1;-x_1+m),B(x_2;-x_2+m)$

Ta có $OA=\sqrt{x_1^2+(m-x_1)^2}=\sqrt{2x_1^2-2mx_1+m^2}=\sqrt{m^2-2m}$. Tương tự: $OB=\sqrt{m^2-2m}$

Mặt khác $R=\frac{OA.OB}{2d(O,(d))}\Leftrightarrow|m-2|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-2\end{array}\right.$ (thoả mãn). Chọn đáp án B

Ví dụ 36. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ (C). Số các giá trị của m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Giải:

Cách 1. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$\frac{2x-1}{x-1}=x+m\Leftrightarrow g(x)=x^2+(m-3)x+1-m=0$ ($x=1$ không là nghiệm)

Để đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-2m+5>0,\forall m\\g(1)=-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow g(x)=0$ luôn có 2 nghiệm nên đường thẳng luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $g(x)=0$ và $y_1=x_1+m;\ y_2=x_2+m$

Theo định lý viét ta có $x_1+x_2=-m+3$ và $x_1.x_2=1-m$

Để ΔOAB vuông tại O thì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2\Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=0$

$\Leftrightarrow 2x_Ax_B+m(x_A+x_B)+m^2=0\Leftrightarrow m=-2$. Chọn đáp án C

Cách 2. Áp dụng kết quả và coi như công thức tính nhanh

Hệ số góc của đường thẳng OA là $k_{OA}=\frac{y_1-y_O}{x_2-x_O}=\frac{x_1+m}{x_1}$

Hệ số góc của đường thẳng OB là $k_{OB}=\frac{y_2-y_O}{x_2-x_O}=\frac{x_2+m}{x_2}$

Để ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow k_{OA}.k_{OB}=-1\Leftrightarrow\frac{x_1+m}{x_1}.\frac{x_2+m}{x_2}=-1\Leftrightarrow\boxed{x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=0}$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án C

Ví dụ 37. Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$\frac{2x+3}{x-2}=2x+m\Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m-6)x-2m-3=0$ ($x=2$ không là nghiệm của phương trình)

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2$ khác 2 thoả mãn

Gv: Lương Văn Huy - THPT Thanh Trì HN - 0969141404

$y'(x_1)=y'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{-7}{(x_1-2)^2}=\dfrac{-7}{(x_2-2)^2}$

$\Leftrightarrow(x_1-2)^2=(x_2-2)^2\Leftrightarrow x_1-2=\pm(x_2-2)\Leftrightarrow x_1+x_2=4$ hoặc $x_1=x_2$ (loại) (vì $x_1\neq x_2$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m-6)^2+8(2m+3)=m^2+4m+60>0,\forall m\\ x_1+x_2=\dfrac{6-m}{2}=4\\ g(2)=-7\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án C

Nhận xét: Ta có thể xây dựng công thức tính nhanh như sau

Để tiếp tuyến tại M,N song song nhau

$f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{ad-bc}{(cx_1+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx_2+d)^2}$

$\Leftrightarrow(cx_1+d)^2=(cx_2+d)^2\Leftrightarrow cx_1+d=-cx_2-d\Leftrightarrow\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{2d}{c}}$

Áp dụng và được $m=-2$

Dạng 3. Tương giao của hàm trùng phương và đường thẳng

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ (với $a\neq 0$ và a,b,c phụ thuộc tham số). Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng d (hoặc là trục Ox) tại n điểm

a. Phương pháp 1: Sử dụng kiến thức lớp 10

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $ax^4+bx^2+c=0\ (1)$ (Số giao điểm của đồ thị và trục Ox là nghiệm của phương trình (1))
- Đặt $t=x^2$ ta được phương trình $at^2+bt+c=0\ (2)$
- Một nghiệm dương của (2) ứng với hai nghiệm của (1)
- Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm tức là

$$\boxed{\begin{aligned}&ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}t=x^2\geq 0\\ g(t)=at^2+bt+c=0\end{cases}\\ &t=x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{t}\end{aligned}}$$

- **Một số yêu cầu về nghiệm**

o (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ \dfrac{S}{2}>0\end{cases}$

o (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\ \dfrac{S}{2}>0\end{cases}$

o (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow P<0$ hoặc $\begin{cases}\Delta=0\\ \dfrac{S}{2}>0\end{cases}$

o (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm thỏa $t_1<0=t_2$ hoặc $t_1=t_2=0$

Gv : Lương Văn Huy - LHĐT Thanh Trì - HN - 0969141404

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ \dfrac{S}{2}<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta=0 \\ \dfrac{S}{2}=0 \end{cases}$

- o (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta<0$ hoặc $\begin{cases} \Delta\ge 0 \\ P>0 \\ \dfrac{S}{2}<0 \end{cases}$

Nhận xét: Trong nhiều trường hợp mà ta đoán trước được 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm… thì việc biện luận số nghiệm trong các trường hợp sẽ trở nên đơn giản hơn.

b. Phương pháp đồ thị: Chỉ áp dụng khi cô lập được *m* sang một bên và hàm số sang một bên

- Nếu hàm số tách được là hàm trùng phương ta có kết quả

$a>0$	$a<0$
o (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT}<f(m)<y_{CĐ}$	o (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT}<f(m)<y_{CĐ}$
o (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow f(m)=y_{CĐ}$	o (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow f(m)=y_{CT}$
o (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m)=y_{CT} \\ f(m)>y_{CĐ} \end{array}\right.$	o (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m)=y_{CĐ} \\ f(m)<y_{CT} \end{array}\right.$
o (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(m)<y_{CT}$	o (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(m)>y_{CĐ}$

- Nếu hàm số tách được là hàm bất kì thì ta sử dụng phương pháp hàm số, tuy nhiên phương pháp này chỉ nên áp dụng khi hàm tách được là hàm đơn giản.

c. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 38. ***(Sở GD và ĐT Điện Biên năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^4-8x^2+5-2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $-\dfrac{11}{2}\le m\le\dfrac{5}{2}$ **B.** $m\le\dfrac{5}{2}$ **C.** $m\ge-\dfrac{11}{2}$ **D.** $-\dfrac{11}{2}<m<\dfrac{5}{2}$

Giải.

Cách 1. Đặt $t=x^2,\ t\ge 0$ ta được phương trình $t^2-8t+5-2m=0\ (*)$

Phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15-(5-2m)>0 \\ 8>0 \\ 5-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{2}<m<\dfrac{5}{2}$

Cách 2. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y=x^4-8x^2+5$ và đường thẳng $y=2m$

Ta có $y'=4x^3-16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=5 \\ x=\pm 2\Rightarrow y=-11 \end{array}\right.$.

Để có 4 giao điểm thì $-11<2m<5\Leftrightarrow -\dfrac{11}{2}<m<\dfrac{5}{2}$. Chọn đáp án D

Ví dụ 39. ***(Trường THPT Chuyên Bình lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $(C_m): y=x^4-mx^2+m-1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. $m>1$ **B.** $\begin{cases} m>1 \\ m\ne 2 \end{cases}$ **C.** không có *m* **D.** $m\ne 2$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^4-mx^2+m-1=0\ (1)$

Cách 1. Đặt $t=x^2,\ t\ge 0$ ta được phương trình $t^2-mt+m-1=0\ (2)$

Cty Lương Văn Huy LTĐH Thanh Trì - HN 0969141404

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m-1) > 0 \\ t_1 + t_2 = m > 0 \\ t_1 t_2 = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Cách 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 = m(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) = m(x^2-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^2 = m - 1 \ (*) \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt d tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Chọn đáp án B

Nhận xét: Việc tách tham số m để khảo sát là đơn giản nhưng hàm khảo sát lại là hàm phân thức nên trong trường hợp này ta không nên tách để khảo sát.

Ví dụ 40. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 3 năm 2017)*** Tất cả các giá trị $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1-m)x^2 + m^2 - 3$ không cắt trục hoành là:

A. $m < 2$ **B.** $m \geq \sqrt{3}$ **C.** $m > \sqrt{3}$ **D.** $m > 2$

Giải.

Xét phương trình $x^4 - 2(1-m)x^2 + m^2 - 3 = 0$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - 2(1-m)t + m^2 - 3 = 0 \ (*)$

Đồ thị không cắt trục hoành $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm âm hoặc vô nghiệm

TH1. $\begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - m^2 + 3 > 0 \\ S = 2(1-m) < 0 \\ P = m^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m \leq 2$

TH2. $\Delta = (m-1)^2 - m^2 + 3 < 0 \Leftrightarrow m > 2$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m > \sqrt{3}$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án C

Bài toán tổng quát 2: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (với $a \neq 0$ và a, b, c phụ thuộc tham số). Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng d (hoặc là trục Ox) tại 4 điểm phân biệt và thỏa mãn điều kiện cho trước

a. Phương pháp:

Bước 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1)$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Khi đó ta được phương trình $at^2 + bt + c = 0 \ (2)$

Để đồ thị cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(\Delta') > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D \ (*)$

Nhận xét: Phương trình (2) có hai nghiệm dương (giả sử $0 < t_1 < t_2$), ứng với mỗi giá trị dương của t ta sẽ được 2 giá trị đối nhau của x tức là $x = \pm\sqrt{t}$. Khi đó phương trình (1) sẽ có 4 nghiệm phân biệt và các nghiệm

Gv Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

này sắp xếp theo thứ tự $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$ (do tính chất đối xứng của hàm chẵn) với t_1,t_2 là nghiệm của phương trình (2)

Bước 2: Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình hoặc một bất phương trình theo tham số, giải phương trình này ta được tham số sau đó đối chiếu với điều kiện (*) và kết luận

b. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 41. Cho hàm số $y=x^4-\left(m^2+10\right)x^2+9$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Số các giá trị của tham số m để đồ thị $\left(C_m\right)$ của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=8$

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ và Ox là $x^4-\left(m^2+10\right)x^2+9=0\ (1)$

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$. Phương trình (1) trở thành: $t^2-\left(m^2+10\right)t+9=0\ (2)$

Để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn

$$0<t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(m^2+10\right)^2-36=\left(m^2+4\right)\left(m^2+16\right)>0,\forall m\\ P=9>0\\ S=m^2+10>0\end{cases}$$

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn và theo giả thiết

$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=8\Leftrightarrow\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=4\Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16$ (*)

Áp dụng Viet $t_1+t_2=\dfrac{-b}{a}=m^2+10,\ t_1t_2=\dfrac{c}{a}=9$.

Thay vào phương trình (*) ta được: $m^2+10=10\Leftrightarrow m=0$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án C

Ví dụ 42. [NTL] Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2+m+2\ (1)$ (với m là tham số thực). Giả sử đồ thị (1) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4. Đặt $T=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T=0$ **B.** $T\le 0$ **C.** $T\ge 0$ **D.** $T<0$

Giải.

Cách 1. Tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục Ox là

$x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2+m+2=0$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$, ta được phương trình $t^2-2\left(m+1\right)t+m^2+m+2=0\ (2)$

Để đồ thị cắt đường thẳng tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương thỏa mãn

$$t_2>t_1>0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m-1>0\\ P=2\left(m+1\right)>0\\ S=m^2+m+2>0,\forall m\end{cases}\Leftrightarrow m>1\ (*)$$

Gọi t_1,t_2 là hai nghiệm dương phân biệt của (2), khi đó $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}, x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$

Nhận thấy 4 nghiệm phân biệt này có 2 cặp đối dấu nhau nên $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

Mặt khác $\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>0$

$\Rightarrow 0-2T>0\Rightarrow T<0$ (do 4 điểm phân biệt nên không xảy ra dấu bằng)

Chọn đáp án D

Cách 2: Chọn hàm đại diện để kiểm tra

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Chọn $y=x^4-4x^2+3$. Dễ thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm lần lượt có hoành độ là $x_1=-\sqrt{3};x_2=-1;x_3=1;x_4=\sqrt{3}$ do vậy

$T=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\sqrt{3}-\sqrt{3}-3-1+\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4$. Chọn đáp án D

Ví dụ 43. Tìm m để đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $m\neq 0$ **B.** $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$ **C.** $m\geq -\dfrac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{3}\\ m>1\end{array}\right.$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng $y=-1$ là

$$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1\Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x^2=3m+1\ (*)\end{array}\right.$$

Đường thẳng $y=-1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và <2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<3m+1<4\\ 3m+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. Chọn đáp án B

Ví dụ 44. Cho hàm số $y=x^4-(m-1)x^2+2m-3$ với m là tham số. Tính tổng các giá trị của tham số m để đường đồ thị cắt đường thẳng $y=3$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=10$.

A. -2 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -4

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng $y=3$ là

$$x^4-(m-1)x^2+2m-3=3\Leftrightarrow x^4-(m-1)x^2+2m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=2\\ x^2=m-3\ (1)\end{array}\right.$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và khác ± 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3>0\\ m-3\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\ m\neq 5\end{cases}(*)$$

Với điều kiện $(*)$ thì ta có 4 nghiệm của phương trình là $x=\pm\sqrt{2};x=\pm\sqrt{m-3}$

Ta có $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=10\Leftrightarrow 2\left[\left(\pm\sqrt{2}\right)^4+\left(\pm\sqrt{m-3}\right)^4\right]=10\Leftrightarrow 4+(m-3)^2=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m=4$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án B

Ví dụ 45. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m+3$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ thoả mãn $x_1<x_2<x_3<1<2<x_4$

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m+3=0$ (1)

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Đặt $t=x^2$ điều kiện $t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0$ (2)

Giả sử nếu phương trinh (2) có 2 nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ thì phương trình (1) sẽ có các nghiệm là $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn: $t_1<1<4<t_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-3>0\\ S=-2m>0\\ P=m+3>0\\ t_1<1<4<t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ m<\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\\ m<0\\ m>-3\\ t_1<1<4<t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ t_1<1<4<t_2\end{cases}\quad(*)$$

Ta có $t_1<1<4<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}t_1<1<t_2\\ t_1<4<t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(t_1-1)(t_2-1)<0\\ (t_1-4)(t_2-4)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0\\ t_1t_2-4(t_1+t_2)+16<0\end{cases}$

Thay m từ định lý Vi-et ta có

$$\begin{cases}m+3+2m+1<0\\ m+3+8m+16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{4}{3}\\ m<-\dfrac{19}{9}\end{cases}\Leftrightarrow m<-\frac{19}{9}$$

Kết hợp với (*) ta có $\begin{cases}-3<m<-\dfrac{19}{9}\approx-2,1\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m=2$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án D

Bài toán tổng quát 3: Tìm điều kiện để đồ thị $(C):y=ax^4+bx^2+c=0\ (a\ne 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

a. Phương pháp:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục Ox là $ax^4+bx^2+c=0\ (1)$

Đặt $t=x^2$ ta được phương trình $at^2+bt+c=0\ (2)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt t_1,t_2 (giả sử $t_1<t_2$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in D\ (*)$$

Khi đó các nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$.

Vì $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng nên $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)\Leftrightarrow t_2=9t_1$.

Theo định lý vi-et ta có hệ $\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{b}{a};\ t_1t_2=\dfrac{c}{a}\\ t_1=9t_2\end{cases}\Rightarrow m$ đối chiếu với $(*)$ và kết luận.

Từ phương pháp giải này ta có thể xây dựng công thức tính nhanh như sau

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$$\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-4ac>0\\-\dfrac{b}{a}>0\\\dfrac{c}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-4ac>0\\ab<0\\ac>0\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0;b<0;c>0\\b^2-4ac>0\end{cases}\\\begin{cases}a<0;b>0;c<0\\b^2-4ac>0\end{cases}\end{array}\right.}$$

$$\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}\\t_1=9t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-\dfrac{b}{10a}\\t_2=-\dfrac{9b}{10a}\end{cases}\xrightarrow{t_1t_2=\frac{c}{a}}\boxed{b^2=\dfrac{100ac}{9}}$$

Ta có bảng về điều kiện để phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq0)$ cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành cấp số cộng là

$\begin{cases}a>0;b<0;c>0\\b^2-4ac>0\\b^2=\dfrac{100ac}{9}\end{cases}$	$\begin{cases}a<0;b>0;c<0\\b^2-4ac>0\\b^2=\dfrac{100ac}{9}\end{cases}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 46. Cho hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3\ (C_m)$. Tính tổng các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. 3 **B.** $-\dfrac{13}{9}$ **C.** $\dfrac{14}{9}$ **D.** $\dfrac{40}{9}$

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^4+2(m+2)x^2-2m-3=0\ (1)$

Đặt $t=x^2, t\geq0$ ta được phương trình $-t^2+2(m+2)t-2m-3=0\ (2)$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có bốn nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ $\Leftrightarrow(2)$ có hai nghiệm dương phân biệt $0<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m+2)^2-2m-3>0\\S=2(m+2)>0\\P=2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2>0\\m>-2\\m>-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{3}{2}\\m\neq-1\end{cases}$$

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=2(m+2)\ \ (a)\\t_1t_2=2m+3\ \ \ \ \ \ (b)\end{cases}$. Khi đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt:

$x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$. Ta có x_1,x_2,x_3,x_4 lập thành một cấp số cộng

$\Leftrightarrow x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3\Leftrightarrow-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1\ \ (c)$

Từ (a) và (c), ta có $t_1=\dfrac{1}{5}(m+2)$, $t_2=\dfrac{9}{5}(m+2)$. Thế vào (b), ta được:

$$\frac{1}{5}(m+2).\frac{9}{5}(m+2)=2m+3\Leftrightarrow9m^2-14m-39=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-\dfrac{13}{9}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn (*)).}$$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Vậy $m_1=3$ hoặc $m_2=-\dfrac{13}{9}$ là giá trị cần tìm

Tổng các giá trị của tham số là $m_1+m_2=3-\dfrac{13}{9}=\dfrac{14}{3}$. Chọn đáp án C

Nhận xét: Cách giải để ta hiểu được bản chất còn để thi trắc nghiệm ta giải nhanh như sau

Áp dụng công thức tính nhanh:

$$\begin{cases} a<0;b>0;c<0 \\ b^2-4ac>0 \\ b^2=\dfrac{100ac}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ -2m-3<0 \\ (m+2)^2-2m-3>0 \\ 4(m+2)^2=\dfrac{100.(-1)(-2m-3)}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{3}{2};m\neq -1 \\ 9m^2-14m-39=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$$

Ví dụ 47. Cho hàm số $y=-x^4+5x^2-4\ (1)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho $AB=BC=CD$

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số (1) là

$-x^4+5x^2-4=m \Leftrightarrow x^2-5x+4+m=0$

Đặt $t=x^2, t\geq 0$, ta được phương trình $t^2-5t+4+m=0$ (2)

Để đồ thị cắt đường thẳng tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương thỏa mãn $t_2>t_1>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-4m>0 \\ P=4+m>0 \\ S=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<m<\frac{9}{4}\ (*)$$

Khi đó 4 điểm tương ứng có tọa độ là $A\left(-\sqrt{t_2};m\right),B\left(-\sqrt{t_1};m\right),C\left(\sqrt{t_1};m\right),D\left(\sqrt{t_2};m\right)$ với t_1,t_2 là 2 nghiệm của phương trình (2)

Theo giả thiết $AB=BC=CD \Leftrightarrow -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$

Theo định lý viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=5 \\ t_1.t_2=4+m \\ t_2=9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{1}{2} \\ t_2=\dfrac{9}{2} \\ t_1.t_2=4+m \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4}=4+m \Leftrightarrow m=-\frac{7}{4}$ thỏa mãn $(*)$

Vậy $m=-\dfrac{7}{4}$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án D

Nhận xét: Bài toán trên thực chất là bài toán 4 điểm lập thành cấp số cộng do đó ta có thể áp dụng công thức tính nhanh như sau:

$$\begin{cases} a>0;b<0;c>0 \\ b^2-4ac>0 \\ b^2=\dfrac{100ac}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+m>0 \\ 9-4m>0 \\ 25=\dfrac{100.1.(4+m)}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<\dfrac{9}{4} \\ m=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{7}{4}$$

Ví dụ 48. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-5x^2+2$ và đồ thị của hàm số $y=15x^2-\left(m^2+10m+10\right)$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $\begin{cases} m=-12 \\ m=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m=8 \\ m=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m=1 \\ m=-12 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m=-12 \\ m=\pm 2 \end{cases}$.

Giải.

Áp dụng công thức tính nhanh ta có

$$\begin{cases} a>0;b<0;c>0 \\ b^2-4ac>0 \\ 9b^2=100ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+10m+12>0 \\ 100-\left(m^2+10m+12\right)>0 \\ 9.(-20)^2=100.1.\left(m^2+10m+12\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2+10m-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-12 \\ m=2 \end{array}\right.$. Chọn đáp án A

Do các phương trình bậc hai trên có nghiệm xấu nên giải lâu, ta có thể kiểm tra bằng máy tính như sau

Nhập $m^2+10m+12:100-\left(m^2+10m+12\right) \xrightarrow[m=-12;m=2]{Calc} >0;>0$

Bài toán tổng quát 4: Tìm m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị (C), cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành có diện tích trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành.

a. Phương pháp giải:

Cách 1. Để thoả mãn yêu cầu của bài toán thì $\begin{cases} \exists CĐ;CT \\ y_u=0 \end{cases}$

Ta có $y'=4ax^3+2bx \Rightarrow y''=12ax^2+2b=0 \Leftrightarrow x^2=-\dfrac{b}{6a}$

$$\Rightarrow y_u=a\left(-\frac{b}{6a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{6a}\right)+c=\frac{-5b^2+36ac}{36a^2};\ y_u=0 \Leftrightarrow -5b^2+36ac=0 \Leftrightarrow b^2=\frac{36}{5}ac$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow ab<0$

Vậy từ đây ta có công thức tính nhanh như sau $\boxed{\begin{cases} ab<0 \\ b^2=\dfrac{36}{5}ac \end{cases}}$

Cách 2. Ứng dụng tích phân. (Xem ở ví dụ 48)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 49. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$, có đồ thị (C_m). Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\ (m>1)$ để đồ thị (C_m) cắt trục tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m), trục hoành có diện tích trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành.

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Giải.

Cách 1. Ứng dụng tích phân.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là $x^4-(m+1)x^2+m=0\ (1)$

Đặt $t=x^2\ (t\geq 0)$ ta được phương trình $t^2-(m+1)t+m=0\ (2)$

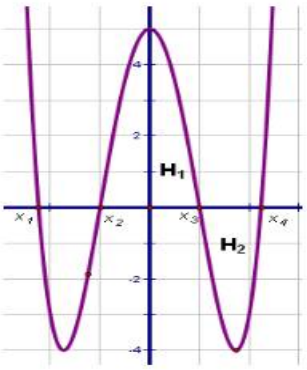
Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m+1)^2-4m>0 \\ P=m>0 \\ S=m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\neq 1 \end{cases}$$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là $t=1;t=m$ nên phương trình (1) có 4 nghiệm là $x_1=-\sqrt{m}<x_2=-1<x_3=1<x_4=\sqrt{m}$

Nhận xét rằng hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$ là hàm chẵn (nhận *Oy* làm trục đối xứng) nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục hoành có phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau khi $S_{H_1}=S_{H_2}$



$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left|x^4-(m+1)x^2+m\right|dx=\int_1^{\sqrt{m}} \left|x^4-(m+1)x^2+m\right|dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^4-(m+1)x^2+m\right)dx=-\int_1^{\sqrt{m}} \left(x^4-(m+1)x^2+m\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{m}} \left(x^4-(m+1)x^2+m\right)dx=0\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5}-(m+1)\frac{x^3}{3}+mx\right)\Bigg|_0^{\sqrt{m}}=0$$

$\Leftrightarrow \frac{m}{5}-\frac{m+1}{3}-m=0\Leftrightarrow m=5$ (thoả mãn). Chọn đáp án D

Chú ý: Trong trường hợp không tính được các nghiệm cụ thể ta làm như sau

$$\int_0^{\sqrt{t_2}} \left(x^4-(m+1)x^2+m\right)dx=0\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5}-(m+1)\frac{x^3}{3}+mx\right)\Bigg|_0^{\sqrt{t_2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{t_2}\right)^5}{5}-(m+1)\frac{\left(\sqrt{t_2}\right)^3}{3}+m\left(\sqrt{t_2}\right)=0\Leftrightarrow \frac{t_2^2}{5}-(m+1)\frac{t_2}{3}+m=0\ (3)$$

Vì t_2 là nghiệm của (2) nên $t_2^2-(m+1)t_2+m=0$ (4). Từ (3) và (4) ta tìm được $m=5$

Cách 2. Áp dụng công thức tính nhanh

Với $m>1\Rightarrow ab=-(m+1)<0$ nên hàm số luôn có cực đại và cực tiểu

Áp dụng công thức

$$b^2=\frac{36}{5}ac\Leftrightarrow (m+1)^2=\frac{36}{5}.1.m\Leftrightarrow 5m^2-26m+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=\frac{1}{5}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm. Chọn đáp án D

Ví dụ 50. ***(Trường THPT Chu Văn An – 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$, có đồ thị (C_m), với *m* là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục *Ox* tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi $S_1;S_2;S_3$ là diện tích các miền gạch chéo như hình vẽ. Tìm *m* để $S_1+S_2=S_3$

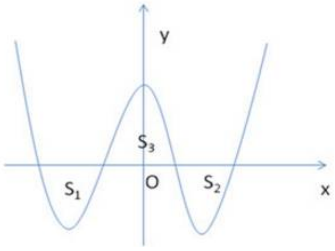
A. $m=-\frac{5}{2}$ **B.** $m=-\frac{5}{4}$

C. $m=\frac{5}{2}$ **D.** $m=\frac{5}{4}$

Giải.

Áp dụng công thức tính nhanh

Vì $ab<0$ hàm số luôn có cực đại và cực tiểu

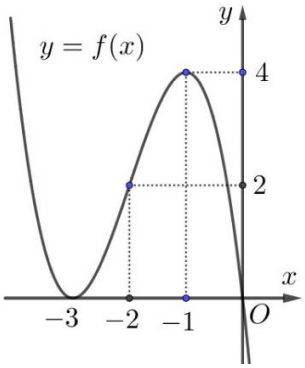


Để $S_1+S_2=S_3\Leftrightarrow b^2=\frac{36}{5}ac\Leftrightarrow 9=\frac{36}{5}m\Leftrightarrow m=\frac{5}{4}\Rightarrow \boxed{D}$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 404

C- Tương giao hàm hợp, hàm ẩn

Câu 1: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x^2-1\right)-5=0$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

$2f\left(x^2-1\right)-5=0(1)$

Đặt $t=x^2-1\ \left(t\ge -1\right)$

Phương trình (1) trở thành $2f(t)-5=0\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=a & (a<-3)\quad (l)\\ t=b & (b\in(-2;-1))\quad (l)\\ t=c & (c\in(-1;0))\quad (tm)\end{array}\right.$$

$\Rightarrow c=x^2-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{c+1}$

Vậy số nghiệm thực của phương trình (1) là 2.

Câu 2: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $1<m<2$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

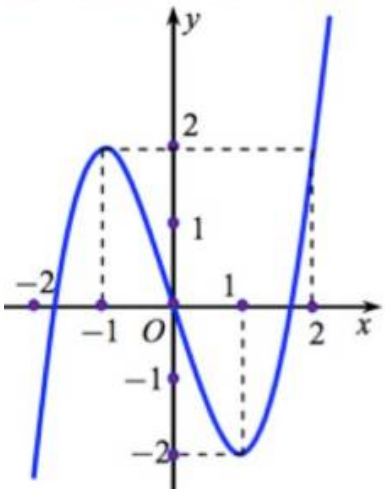
Ta có: $f(x)+1=m\Leftrightarrow f(x)=m-1\ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng $y=m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi $0<m-1<1\Leftrightarrow 1<m<2$.

Câu 3: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

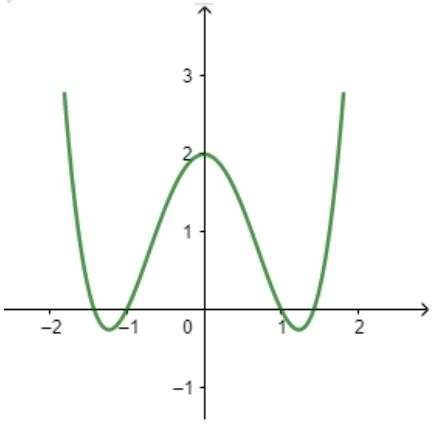
Lời giải

Đặt $t=\cos x\in(-1;0],\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow u=\sqrt{2f\left(\cos x\right)}\in[0;2)$.

Phương trình trở thành: $f\left(u\right)=m\quad(*)$. Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ $\in[0;2)$.

Dựa vào đồ thị suy ra $-2\le m<2$. Vì m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 4: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như sau.



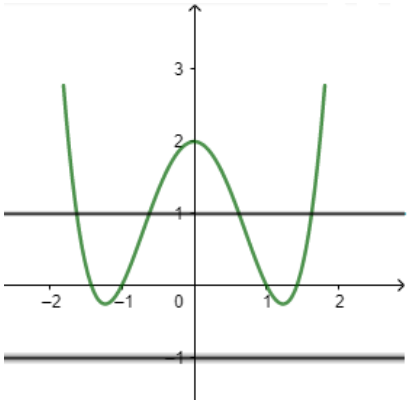
Số nghiệm thực của phương trình $f^2\left(x\right)-1=0$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $f^2\left(x\right)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=-1\end{array}\right.$

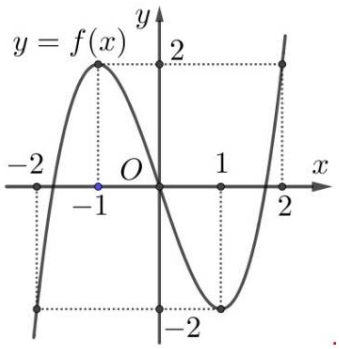
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x)=1$ có 4 nghiệm thực và phương trình $f(x)=-1$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f^2(x)-1=0$ có 4 nghiệm thực.

Câu 5: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=0$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Đặt $t=f(x)\,(t\in\mathbb{R})$, phương trình $f(f(x))=0$ trở thành $f(t)=0$.

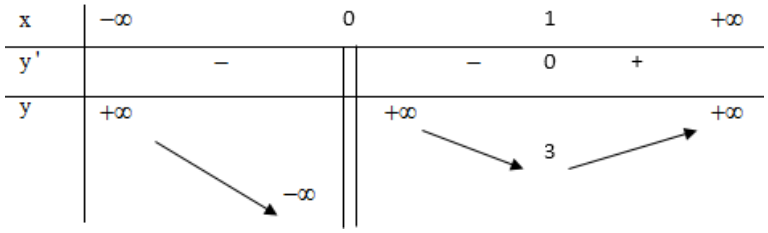
Qua đồ thị hàm số $y=f(x)$ đã cho ta thấy: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, 0, b với $a\in(-2;-1)$, $b\in(1;2)$.

Khi đó: $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\\t=0\\t=b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\\f(x)=0\\f(x)=b\end{array}\right.$. Nhận thấy mỗi đường thẳng trong 3 đường thẳng $y=a$ với $a\in(-2;-1)$; $y=0$; $y=b$ với $b\in(1;2)$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ lần lượt tại 3 điểm phân biệt và 9 điểm này có hoành độ khác nhau.

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(3-2x)|-10=0$ là

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH HN 0969141404



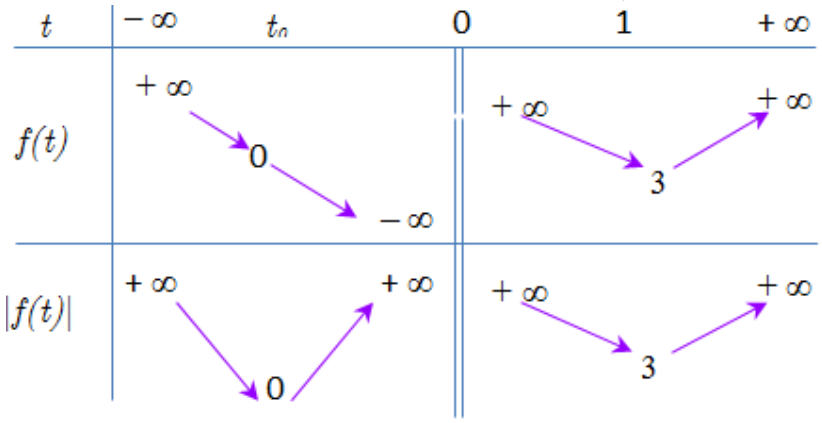
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $3-2x=t$ phương trình đã cho trở thành $3\left|f\left(t\right)\right|-10=0\Leftrightarrow\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểu của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\frac{10}{3}$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$.

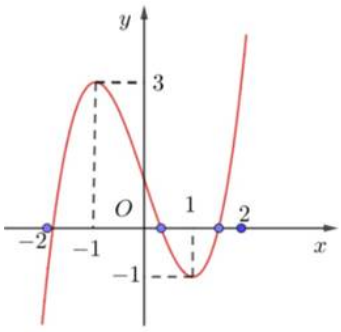


Dựa vào BBT ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Do hàm số $t=3-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình bằng số nghiệm x của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 7: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, $f(2)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên

A. 2. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 19.



Gv : Lương Văn Huy
FB - 0969141404

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $f\left(|x|+m\right)=3$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

Ta có: $f\left(|x|+m\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|+m=-1\\|x|+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=-1-m\\|x|=2-m\end{array}\right.$.

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1-m>0\\2-m>0\end{cases}\Rightarrow m<-1\Rightarrow m\in\{-19,...,-2\}$.

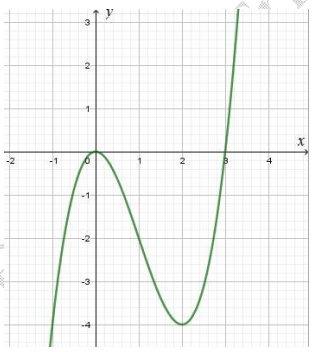
Vậy có tất cả 18 số nguyên thoả mãn.

Câu 8: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2$. Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:



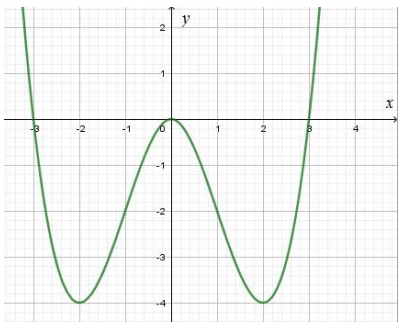
Như ta đã biết: để vẽ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ từ đồ thị $y=f\left(x\right)$ ta thực hiện:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ gồm các điểm bên phải và các điểm nằm trên trục Oy; bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy. Ta được phần đồ thị P_1

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị P_1 qua trục Oy ta được phần đồ thị P_2

Khi đó: Đồ thị $y=f\left(|x|\right)$ bao gồm đồ thị P_1 và P_2.

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)=|x|^3-3|x|^2$ như sau:



Gv : Lương Văn Huy - LTF - 0969 141404

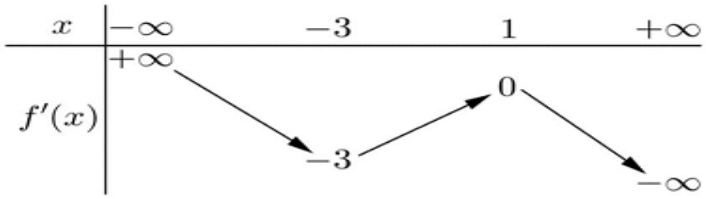
Để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f(|x|)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt hay đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3|x|^2$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ suy ra bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $-4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Kết hợp yêu cầu đề bài $m\in\mathbb{Z}$, do đó $m\in\{1;2;3\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $1+2+3=6$.

Câu 9: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên



Bất phương trình $f(\sin x)<-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)+\frac{3\pi}{2}$. **B.** $m>f(-1)-\frac{3\pi}{2}$. **C.** $m>f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3\pi}{2}$. **D.** $m>f(1)+\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(\sin x)<-3x+m,\ \forall x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow m>g(x)=3x+f(\sin x),\ \forall x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$g'(x)=3+\cos x.f'(\sin x)$.

Do $x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên $-1<\sin x<1$, kết hợp với BBT của $f'(x)$ ta có $0<-f'(\sin x)<3$.

Ta lại có $0<\cos x\leq 1$ nên $0<-\cos x<3$.

Suy ra $3+\cos x.f'(\sin x)>0$

Do đó hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

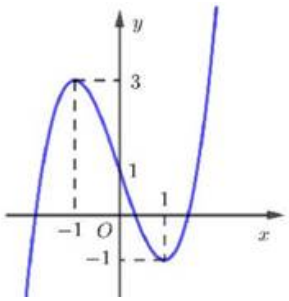
$\Rightarrow g(x)<g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1)+\frac{3\pi}{2}$.

$\Rightarrow m>g(x)=3x+f(\sin x),\ \forall x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow m\geq g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1)+\frac{3\pi}{2}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - 0969141404

Câu 10: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x)=2\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



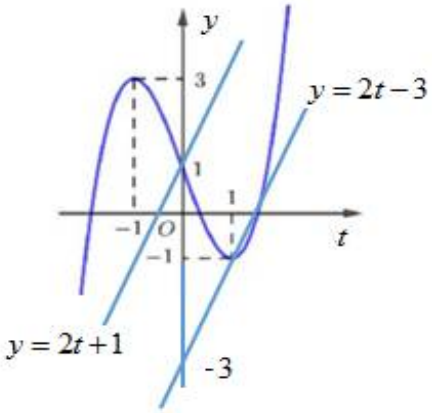
A. -10 **B.** -8. **C.** -6. **D.** -5.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$ với $x\in(0;\pi)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Xét phương trình $f(t)=2t+m$.

Để phương trình có nghiệm thì đồ thị hàm $y=f(t)$ cắt đồ thị hàm số $y=2t+m$ tại ít nhất một điểm có hoành độ t thuộc $(0;1]$.

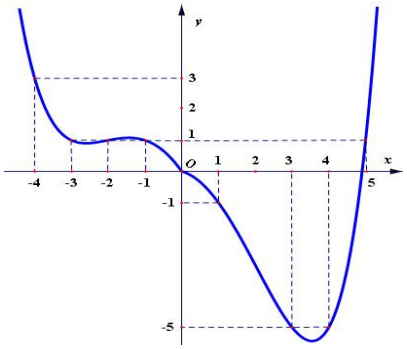


Từ đồ thị ta suy ra đồ thị hàm số $y=2t+m$ nằm ở phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số $y=2t+1$ và $y=2t-3$.

Từ đó suy ra $-3\le m<1\Rightarrow m=-3;-2;-1;0$.

Vậy tổng các phần tử bằng -6.

Câu 11: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Điều kiện: $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Xét phương trình: $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019\ (1)$.

Ta có: $-9x^2+30x-21=4-(3x-5)^2 \Rightarrow 0\le\sqrt{4-(3x-5)^2}\le 2\Rightarrow -3\le 3-3\sqrt{4-(3x-5)^2}\le 3$.

Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}$, $t\in[-3;3]$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $2.f(t)=m-2019\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-2019}{2}\ (2)$.

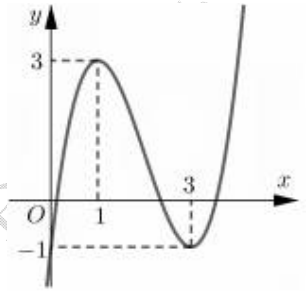
Phương trình (1) có nghiệm $x\in\left[1;\frac{7}{3}\right]\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$, phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$ khi và chỉ khi $-5\le\frac{m-2019}{2}\le 1\Leftrightarrow 2009\le m\le 2021$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2009,2010,...,2021\}$.

Vậy số giá trị nguyên của m là: $2021-2009+1=13$.

Câu 12: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=|x+m|\ (t\ge 0)\Rightarrow f(t)=m\ (*)$.

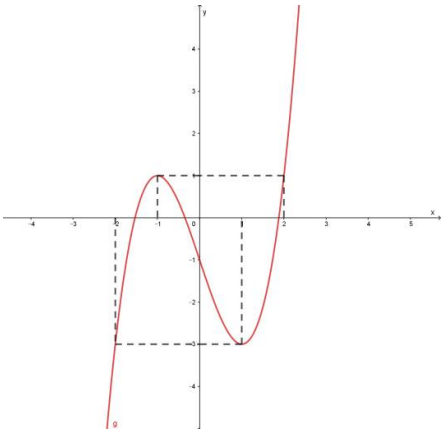
Với $t=0\Leftrightarrow x=-m$; với $t>0\Leftrightarrow x=-m\pm t$.

Vậy phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow -1<m<3$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;0;2\}$.

Câu 13: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

GV: Lương Văn Huy - LTF - Thanh Trì - HN - 0969141404



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-2;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;2) \end{array}\right.$

Do đó $f\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=a\,(1) \\ f(x)-1=b\,(2) \\ f(x)-1=c\,(3) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow f(x)=a+1\in(-1;0)$

$\Rightarrow$ pt $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1<a<-1<b<x_2<0<x_3<c$

$(2) \Leftrightarrow f(x)=b+1\in(0;1) \Rightarrow$ pt $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm x_4,x_5,x_6 thỏa mãn

$x_1<a<x_4<-1<x_5<b<x_2<0<x_3<c<x_6$

$(3) \Leftrightarrow f(x)=c+1\in(1;3) \Rightarrow$ pt $f(x)=c+1$ có nghiệm duy nhất $x_7>x_6$

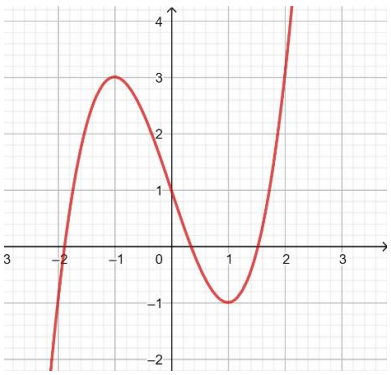
Vậy phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 14: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ là:

A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$ có dạng:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm $x_1\in(-2;-1),x_2\in(0;1),x_3\in(1;2)$

Gv : Lương Văn Huy - TTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nếu phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0)\in\{x_1,x_2,x_3\}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

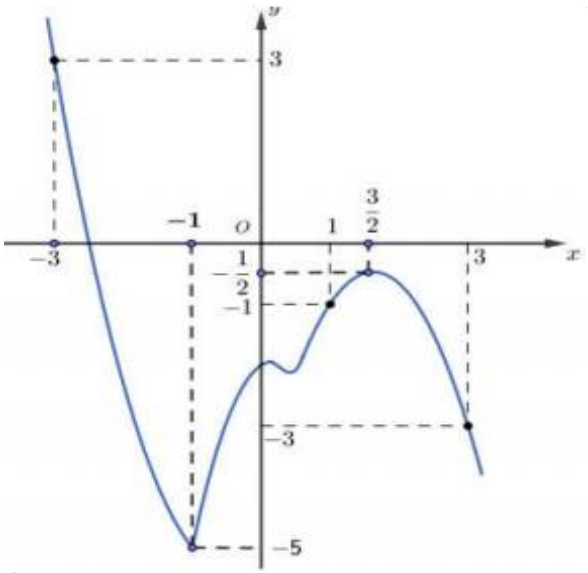
+ $f(x)=x_1, x_1\in(-2;-1)$ có 1 nghiệm duy nhất.

+ $f(x)=x_2, x_2\in(0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x)=x_3, x_3\in(1;2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 15: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là



A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}=3-4\sqrt{1-(3x-1)^2}\Rightarrow t\in[-1;3]$.

Dựa vào đồ thị ta có khi $t\in[-1;3]$ thì $f(t)\in\left[-5;-\frac{1}{2}\right]$.

Khi đó phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=-1-m^2$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$.

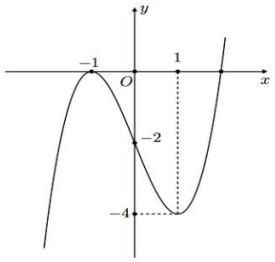
$\Leftrightarrow -5\le -1-m^2\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m^2\le 4\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gv : Lương Văn Huy 0969141404

Câu 16: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $[-4;0]$. **B.** $[-4;0)$. **C.** $[0;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

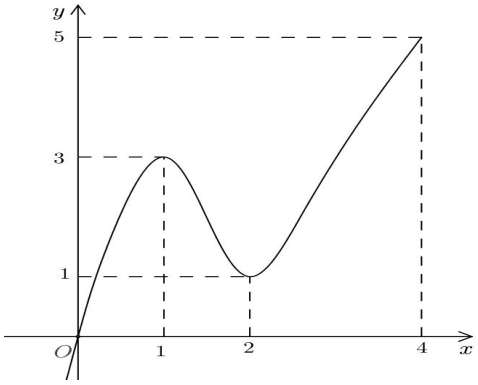
Đặt $t=1-2\cos x$, khi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in[-1;1)$.

Khi đó phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ trở thành phương trình $f(t)=-m$.

Như vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì phương trình $f(t)=-m$ phải có nghiệm $t\in[-1;1)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-4<-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m<4$.

Câu 17: **[Lớp Toán Thầy Huy]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

$f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m\ \ (1)$

Đặt $t=4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=3+\cos 4x$. Do đó $t\in[2;4]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\forall t\in[2;4]$ thì $1\le f(t)\le 5$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le 5\overset{m\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.

Gv : Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

A. Bài toán không chứa tham số

Câu 1. ***(Trường THPT Hà Trung lần 1 năm 2017)*** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-2)(x^2+x+1)$ và trục hoành là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2. ***(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)*** Điểm nào dưới đây là giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ và trục tung?

A. $M(-2;0)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $M(0;-2)$.

Câu 3. ***(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)*** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2-1$ với trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 4. ***(Trường THPT Quỳnh Lưu 1 lần 2 năm 2017)*** Đường thẳng $y=-3x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-1$ tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0)$ thì

A. $y_0=2$ **B.** $y_0=-1$ **C.** $y_0=-2$ **D.** $y_0=1$

Câu 5. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 3 năm 2017)*** Tổng tung độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và $y=\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$ bằng:

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 2

Câu 6. ***(Trường THPT Hoằng Hoá 4 năm 2017)*** Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-x+2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2-x+5$ cắt nhau tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_o;y_o)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_o

A. $y_o=4$ **B.** $y_o=3$ **C.** $y_o=-1$ **D.** $y_o=0$

Câu 7. ***(Trường THPT Đoàn Thượng lần 1 năm 2017)*** Đồ thị của hàm số $y=x^3+2x^2-x+1$ và đồ thị của hàm số $y=x^2-x+3$ có bao nhiêu điểm chung?

A. Có một điểm chung. **B.** Có hai điểm chung.
C. Không có điểm chung. **D.** Có ba điểm chung.

Câu 8. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4-3x^2+2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Không cắt.

Câu 9. ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 1 năm 2017)*** Đồ thị của hàm số $y=4x^4-3x^2+3$ và đường thẳng $y=x+3$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 10. ***(Trường THPT Chuyên Quốc Học Huế lần 2 năm 2017)*** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2-4}+5$ và đường thẳng $y=x$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 11. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi lần 2 năm 2017)*** Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó, tìm tọa độ trung điểm I của MN.

A. $I(1;2)$. **B.** $I(-2;-3)$. **C.** $I(1;3)$. **D.** $I(2;3)$.

Câu 12. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu lần 1 năm 2017)*** Đường thẳng $y=ax+b$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}$ tại hai điểm A và B có hoành độ lần lượt bằng -1 và 0. Lúc đó giá trị của a và b là:

A. $a=1$ và $b=2$. **B.** $a=4$ và $b=1$.
C. $a=-2$ và $b=1$. **D.** $a=-3$ và $b=2$.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có đồ thị cắt trục hoành tại duy nhất một điểm?

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $y=-x^4-2x^2+3$ **B.** $y=-x^3+3x^2-4x+2$

C. $y=x^3-3x$ **D.** $y=x^4-2x^2$

Câu 14. ***(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017)*** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ với đường thẳng $y=3x-6.$

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 15. ***(Trường THPT Chuyên Hạ Long lần 1 năm 2017)*** Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B* có hoành độ lần lượt x_A,x_B hãy tính tổng x_A+x_B

A. $x_A+x_B=2$ **B.** $x_A+x_B=1$ **C.** $x_A+x_B=5$ **D.** $x_A+x_B=3$

Câu 16. ***(Trường THPT Chu Văn An – Gia Lai lần 2 năm 2017)*** Tìm số giao điểm *n* của đồ thị hàm số $y=x^2\left|x^2-3\right|$ và đường thẳng $y=2$

A. $n=6$ **B.** $n=8$ **C.** $n=2$ **D.** $n=4$

Câu 17. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ và đồ thị hàm số $y=2x^2-2x+1$

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 2

Câu 18. ***(Trường THPT Triệu Sơn 1 lần 1 năm 2017)*** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+2x-1$ và đồ thị hàm số $y=3x^2-2x-1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 19. ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B

A. $x_B+y_B=4$ **B.** $x_B+y_B=7$ **C.** $x_B+y_B=-5$ **D.** $x_B+y_B=-2$

Câu 20. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$. Hỏi hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt.

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 4

Câu 21. ***(Trường THPT Việt Yên 1 lần 2 năm 2017)*** Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ dương

A. $y=x^3-4x^2-x+2$ **B.** $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$ **C.** $y=-x^4+5x^2-4$ **D.** $y=\dfrac{-2x+3}{x-2}$

Câu 22. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 4 năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Khi đó độ dài *AB* là bao nhiêu?

A. $AB=3$ **B.** $AB=2$ **C.** $AB=2\sqrt{2}$ **D.** $AB=1$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

B. Bài toán chứa tham số

Câu 1. ***(Trường THPT Kim Liên lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả tất cả các giá trị y_0 để đường thẳng $y=y_0$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt.

A. $0<y_0<\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}<y_0<0$. **C.** $y_0>\frac{1}{4}$. **D.** $y_0<-\frac{1}{4}$.

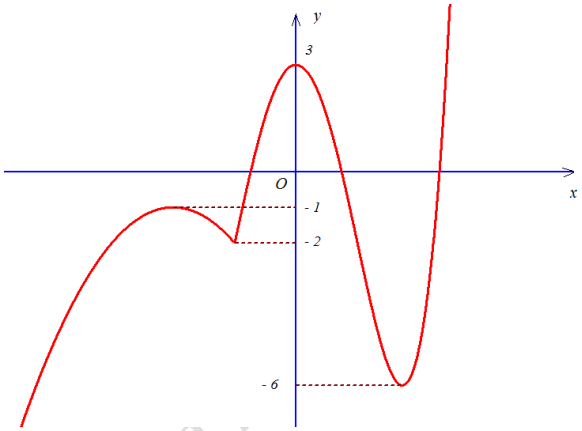
Câu 2. ***(Trường THPT Sào Nam năm 2017)*** Giá trị của m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất là

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 3. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d có giao điểm nằm trên trục hoành.

A. $m=2$ **B.** $m\geq 2$ **C.** $m=0$ **D.** $m\in\{0;2\}$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm m để phương trình $f(x)=3-m$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

A. $-5<m<-4$ **B.** $4<m<5$ **C.** $-2<m<-1$ **D.** $-6<m<3$

Câu 5. ***(Trường THPT AmsTerDam năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+m$. Các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt là:

A. $m>2$ **B.** $m<6$ **C.** $m=2$ **D.** $m<2$ hoặc $m>6$

Câu 6. ***(Trường THPT Chuyên AmsTerDam năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ có đồ thị (C). Để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm A, B, C sao cho B là trung điểm của AC thì giá trị tham số m là:

A. $m=-2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-4$ **D.** $-4<m<0$

Câu 7. ***(Trường THPT Chuyên AmsTerDam năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2(2m+1)x^2+4m^2$ (1). Các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=6$ là:

A. $m=\frac{1}{4}$ **B.** $m>-\frac{1}{2}$ **C.** $m>-\frac{1}{4}$ **D.** $m\geq-\frac{1}{4}$

Câu 8. ***(Trường THPT An Lão năm 2017)*** Tìm m để đường thẳng $y=4m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $-\frac{13}{4}<m<\frac{3}{4}$. **B.** $m\leq\frac{3}{4}$. **C.** $m\geq-\frac{13}{4}$. **D.** $-\frac{13}{4}\leq m\leq\frac{3}{4}$.

Câu 9. ***(Trường THPT An Nhơn năm 2017)*** Để phương trình $x^3+3x^2=m^3+3m^2$ (m là tham số) có đúng ba nghiệm thực phân biệt thì giá trị của m là

A. $m\in(-3;1)\setminus\{0;-2\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<1$.

Câu 10. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ tại ba điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm phân biệt có hoành độ dương

A. $-1<m<3$. **B.** $1<m<3$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $m=1$.

Câu 11. ***(Trường THPT Nguyễn Huệ lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x=m^2+m$ có ba nghiệm phân biệt

A. $-2<m<1$ **B.** $-1<m<2$ **C.** $-2<m<-1$ **D.** $1<m<2$

Câu 12. ***(Trường THPT Gia Lộc năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}(C)$ và đường thẳng $d_m: y=x+m$. Tìm m để (C) cắt d_m tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

A. $m=\dfrac{1}{3}$. **B.** $m=\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=\dfrac{2}{3}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 13. ***(Trường THPT Quảng Xương 3 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{5}$

A. $m\in(-2;10)$ **B.** $m=10$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=10\\m=-2\end{array}\right.$ **D.** $m=-2$

Câu 14. ***(Trường THPT Ngô Gia Tự năm 2017)*** Điều kiện của tham số m để đồ thị của hàm số $y=2x^3-6x+2m$ cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm phân biệt là

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 2\end{array}\right.$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 15. ***(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3;20)$ và có hệ số góc m. Giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

A. $m<\dfrac{15}{4}, m\ne 24$ **B.** $m\ge\dfrac{15}{4}$ **C.** $m>\dfrac{15}{4}, m\ne 24$ **D.** $m<\dfrac{15}{4}$

Câu 16. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả giá trị m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\dfrac{1}{2}$

A. $0<m<2$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $\dfrac{9}{8}<m<2$ **D.** $-2\le m\le 2$

Câu 17. ***(Trường THPT Phan Đình Phùng lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-m$ cắt trục hoành tại đúng một điểm.

A. $m<0$. **B.** $m>\dfrac{32}{27}$.

C. $m<0$ hoặc $m>\dfrac{32}{27}$. **D.** $0<m<\dfrac{32}{27}$.

Câu 18. ***(Trường THPT Phan Đình Phùng lần 1 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: x-2y+m=0$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $\dfrac{3-4\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{3+4\sqrt{2}}{2}$. **B.** $3-4\sqrt{2}<m<3+4\sqrt{2}$.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

C. $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{3-4\sqrt{2}}{2} \\ m>\dfrac{3+4\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<3-4\sqrt{2} \\ m>3+4\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 19. ***(Trường THPT Chuyên Trần Phú năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (*C*). Tìm tất cả các giá trị của *m* để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $m=4\pm\sqrt{10}$ **B.** $m=4\pm\sqrt{3}$ **C.** $m=2\pm\sqrt{10}$ **D.** $m=2\pm\sqrt{3}$

Câu 20. ***(Trường THPT Chuyên Hạ Long lần 2 năm 2017)*** Cho *m* là một số thực. Hỏi đồ thị của hàm số $y=2x^3-x$ và đồ thị của hàm số $y=x^3+mx^2-m$ cắt nhau tại ít nhất mấy điểm?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Câu 21. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu lần 2 năm 2017)*** Biết rằng đường thẳng $d: y=-x+m$ luôn cắt đường cong $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Độ dài đoạn *AB* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{6}$ **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** 4

Câu 22. ***(Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu lần 2 năm 2017)*** Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho có một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó *m* thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Câu 23. ***(Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^2(x^2-2)+3=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m<3$. **B.** $m>2$. **C.** $m>3$. **D.** $m>3$ hoặc $m=2$.

Câu 24. ***(Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong năm 2017)*** Đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=\sqrt{5}$ khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ **D.** $m=3$

Câu 25. ***(Trường THPT Kiến An năm 2017)*** Đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} m>\dfrac{1}{3} \\ m\neq 1 \end{cases}$ **B.** $-1\le m\le 0$ **C.** $\begin{cases} m>-\dfrac{1}{3} \\ m<0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m>-\dfrac{1}{3} \\ m\neq 0 \end{cases}$

Câu 26. ***(Trường THPT Kiến An năm 2017)*** Dựa vào bảng biến thiên sau, tìm *m* để phương trình $f(x)=2m+1$ có 3 nghiệm phân biệt:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $0<m<1$ **B.** $0<m<2$ **C.** $-1<m<0$ **D.** $-1<m<1$

Câu 27. ***(Trường THPT Lục Ngạn năm 2017)*** Đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ thoả mãn $x_1<1<x_2<x_3$ khi:

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m>5$ **B.** $3<m<5$ **C.** $m<3$ **D.** $m=3$

Câu 28. ***(Trường THPT Nguyễn Diêu năm 2017)*** Cho hàm số d có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho diện tích tam giác OBC bằng 1.

A. $k=2$ **B.** $k=1$ **C.** $k=-1$ **D.** $k=-2$

Câu 29. ***(Trường THPT Quang Trung năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}(C)$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc $\widehat{AOB}$ nhọn là :

A. $m<5$ **B.** $m>0$ **C.** $m>5$ **D.** $m<0$

Câu 30. ***(Trường THPT Trần Quang Diệu năm 2017)*** Để đường thẳng $d:y=mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ tại 3 điểm phân biệt $M(-1;0)$, A, B sao cho $AB=2MB$ khi:

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=9\end{array}\right.$. **B.** $\left\{\begin{array}{l}m>0\\m\neq 9\end{array}\right.$. **C.** $\left\{\begin{array}{l}m<0\\m=9\end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l}m<0\\m\neq 9\end{array}\right.$.

Câu 31. ***(Trường THPT Trần Quang Diệu năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ và $d:y=x+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt d tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thoả mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$.

A. $m\ge 5$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $0\le m\le 5$. **D.** $5\le m\le 10$.

Câu 32. ***(Trường THPT Trưng Vương năm 2017)*** Gọi (H) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+2}$ và đường thẳng $d:y=kx+1$. Để d cắt (H) tại hai điểm phân biệt A và B, sao cho $M(-1;-4)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Thì giá trị thích hợp của k là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

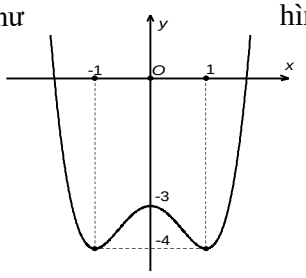
Câu 33. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho đồ thị $(C):y=\dfrac{2x+1}{2x-m}$ và $A(-2;3)$, $C(4;1)$. Tìm m để đường thẳng $d:y=3x-1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt B, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

A. $m=\dfrac{8}{3}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=-1$.

Câu 34. ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ bằng 10.

A. $m=-1+\sqrt{5}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

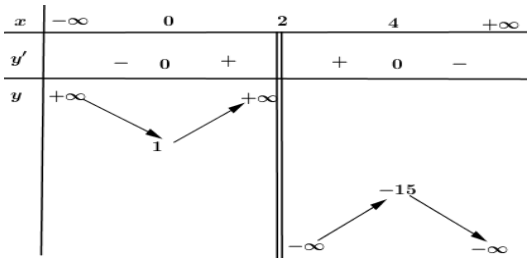
Câu 35. ***(Sở GD và ĐT Bắc Ninh năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-m+1=0$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-3<m<-2$.
B. $-4<m<-3$.
C. $-3\le m\le -2$.
D. $-4\le m\le -3$.

Câu 36. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Tìm m để phương trình $f(x)+m=0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 15 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-15 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>15 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -15 \end{array}\right.$.

Câu 37. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y=-x^3+bx^2+cx+d$ có $\begin{cases} 1+b-c+d<0 \\ -8+4b+2c+d>0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm phân biệt của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38. ***(Trung Tâm Diệu Hiền)*** Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m\ (C)$, với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$. **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

C. $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$. **D.** $1<x_1<3<x_2<4<x_3$.

Câu 39. ***(Trường THPT Chuyên Quang Trung năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+2017$. Định m để phương trình $y'=m^2-m$ có đúng hai ngiệm thuộc đoạn $[0;m]$.

A. $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};2\right)$. **B.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3};2\right)$. **C.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$.

Câu 40. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 41. Cho hàm số $(C): y=x^3-3mx^2-mx$ và đường thẳng $d: y=x+2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt lập thành cấp số nhân.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 42. Cho hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2-(m+1)^2(1-m)^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số trên cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành 1 cấp số cộng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 43. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m\ (C_m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** Không có m **D.** $m=2$

Câu 44. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2-m$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A,B,C bằng 3.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 45. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+1$ có đồ thị (C_m). Để đồ thị (C_m) cắt đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+(3m+1)x+m$ tại 2 điểm phân biệt mà tiếp tuyến của (C_m) tại 2 điểm đó vuông góc với nhau thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào?

A. $(-1;0)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(1;2)$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN 0969141404

Câu 46. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{1}{3}$ có đồ thị (C). Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $\Delta: y=mx-\frac{1}{3}$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho A cố định và diện tích tam giác OBC gấp hai lần diện tích tam giác OAB.

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 0 **D.** 3

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+x^2+1\,(1)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng Δ có phương trình $y=(m+1)x+1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C, biết hai điểm B, C có hoành độ lần lượt là x_1; x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1^3-(m+2)x_1}{x_2^2+1}+\frac{x_2^3-(m+2)x_2}{x_1^2+1}=-1$

A. -3 **B.** $-\frac{5}{4}$ **C.** 0 **D.** 3

Câu 48. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m): $y=x^3-2x^2+mx-4$ cắt trục hoành Ox tại ba điểm phân biệt thoả mãn $x_1<-3<x_2<x_3$

A. $m>-\frac{49}{3}$ **B.** $m\ge-\frac{49}{3}$ **C.** $m<-\frac{49}{3}$ **D.** $m\le-\frac{49}{3}$

Câu 49. ***(Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm lần 1 năm 2017)*** Các giá trị m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-x^2+3$ tại 4 điểm phân biệt là:

A. $\frac{5}{2}<m<3.$ **B.** $\frac{1}{2}<m<3.$ **C.** $m>3.$ **D.** $\frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}.$

Câu 50. ***(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3 năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt:

A. $-2\le m\le\frac{-3}{2}$ **B.** $3<m<4$ **C.** $-2<m<\frac{-3}{2}$ **D.** $\frac{-3}{2}<m<2$

Câu 51. ***(Trường THPT Lương Thế Vinh năm 2017)*** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-1$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d có giao điểm nằm trên trục hoành.

A. $m=2$ **B.** $m\ge2$ **C.** $m=0$ **D.** $m\in\{0;2\}$

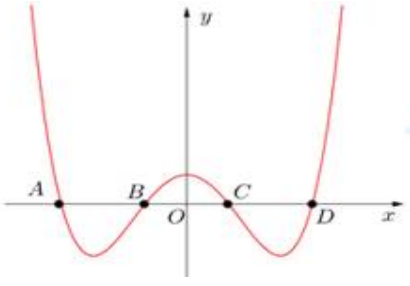
Câu 52. ***(Trường THPT Chuyên Bắc Kan năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm thuộc về hai nhánh của đồ thị.

A. $m<0$ **B.** $m=0$ **C.** $m>0$ **D.** $m<1$

Câu 53. ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 4 năm 2017)*** Cho hàm số $y=(x-m)(m^2x^2-x-1)$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Khi m thay đổi (C_m) cắt trục Ox tại ít nhất bao nhiêu điểm?

A. 1 điểm **B.** 4 điểm **C.** 2 điểm **D.** 3 điểm

Câu 54. ***(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị – 2017)*** Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c>0,100b^2=9ac$

B. $a>0,b>0,c>0,0,9b^2=100ac$

C. $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$

D. $a>0,b>0,c>0,100b^2=9ac$

Lương Văn Huy - TTDH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 55. ***(Sở GD và ĐT Đà Nẵng lần 2 năm 2017)*** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-4x^2-\log_3 m=0$ có 4 nghiệm phân biệt, trong đó có 3 nghiệm lớn hơn -1.

A. $\left(\frac{1}{27};1\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{27};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{1}{27};1\right)$.

Câu 56. ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 1 năm 2017)*** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt đều có hoành độ dương.

A. $\left(4-\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $(-1;0)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(4-\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 57. ***(Trường THPT Tiên Du lần 1 năm 2017)*** Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ và đường cong $y=\frac{x+1}{x-1}$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt sao cho hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB bằng $\frac{5}{2}$

A. 9 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 1

Câu 58. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=mx-11$ cắt (C) tại A, B phân biệt sao cho $S_{\Delta OAB}=2S_{\Delta OBM}$ với $M(0;-11)$

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}(C)$. Đường thẳng $y=x$ cắt (C) tại 2 điểm A, B. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 60. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) và điểm $P(3;3)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác PAB đều.

A. 3 **B.** 6 **C.** $2\sqrt{33}$ **D.** $\sqrt{33}$

Câu 61. Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)

A. -2 **B.** 6 **C.** 4 **D.** -4

Câu 62. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia – BDG năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$

A. $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$ **B.** $m\in\mathbb{R}$

C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in(-2;+\infty)$

Câu 63. ***(Đề Thi THPT Quốc Gia – BDG năm 2017)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;3)$ **B.** $m\in(-\infty;-1)$ **C.** $m\in(-\infty;+\infty)$ **D.** $m\in(1;+\infty)$

Câu 64. Cho hàm số $y=\frac{m-x}{x+2}(H_m)$. Tìm m để đường thẳng $d: 2x+2y-1=0$ cắt (H_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{3}{8}$.

A. $m=3\sqrt{10}$ **B.** $m=2\sqrt{10}$ **C.** $m=-2\sqrt{10}$ **D.** $m=\pm2\sqrt{10}$

Câu 65. ***(Trường THPT Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Cho hàm số $y=-x^3+(2m+1)x^2-m-1$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d_m: y=2mx-m-1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng d_m cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng $OA^2+OB^2+OC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (O là gốc tọa độ)

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m=-\frac{1}{4}.$ **B.** $m=0.$ **C.** $m=\frac{1}{4}.$ **D.** $m=\frac{1}{2}.$

Câu 66. ***(Trường THPT Lương Văn Tài lần 1 năm 2017)*** Tìm đầy đủ các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+2(1-m)x+16+2m=0$ có nghiệm nằm trong đoạn $[2;4]$?

A. $m\le 8$ **B.** $m\ge\frac{11}{2}$ **C.** $\frac{20}{3}\le m\le 8$ **D.** $\frac{11}{2}\le m\le 8$

Câu 67. ***(Trường THPT Nguyễn Khuyến lần 1 năm 2017)*** Phương trình $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

A. $-6\le m\le -\frac{3}{2}.$ **B.** $-1\le m\le 3.$ **C.** $m\ge 3.$ **D.** $-\frac{1}{4}\le m\le\frac{3}{4}.$

Câu 68. ***(Trường THPT Tĩnh Gia 3 năm 2017)*** Tìm các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-(4m+2)x^2+4m+1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ lập thành cấp số cộng

A. $m=-3$ **B.** $m=0,m=2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=3$

Câu 69. [NTL] Tìm mối liên hệ giữa b,c,d sao cho hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$ $(d\ne 0)$ có đồ thị (C) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt lập thành một cấp số nhân?

A. $c^3=bd^3$ **B.** $c=b^3d^3$ **C.** $c=bd$ **D.** $c^3=b^3d$

Câu 70. ***(Trường THPT Khai Minh năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng đường thẳng $d:y=2x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm m để trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.

A. $m=\frac{1}{2}$ **B.** $m=-5$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=5$

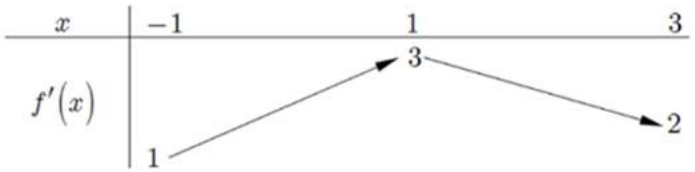
Câu 71. Cho hàm số $y=(x+1)(x^2+mx+1)$ có đồ thị (C). Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m=2$ **B.** $m=4$ **C.** $m=3$ **D.** $m=1$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

C. Bài toán Hàm ẩn, hàm hợp vd – vdc

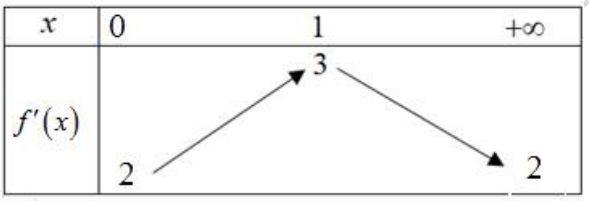
Câu 1: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$.

A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(0)$. **C.** $m\le f(3)$. **D.** $m<f(1)-\frac{2}{3}$.

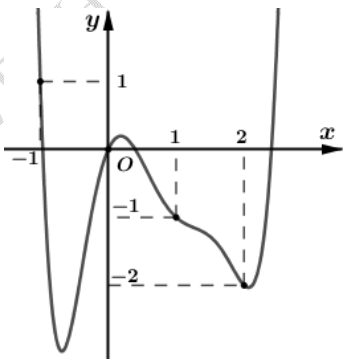
Câu 2: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m+2\sin x\le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. $m\ge f(0)$. **B.** $m\le f(1)-2\sin 1$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\ge f(1)-2\sin 1$.

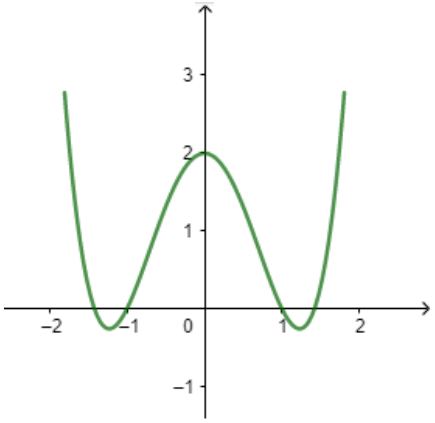
Câu 3: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để bất phương trình $m-x^2\le 2f(x+2)+4x+3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-3;+\infty)$.

A. $m\ge 2f(0)-1$. **B.** $m\le 2f(0)-1$. **C.** $m\le 2f(-1)$. **D.** $m\ge 2f(-1)$.

Câu 4: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



Gv : Lương Văn Huy - LT - Thanh ... - 0969141404

Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)-1=0$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

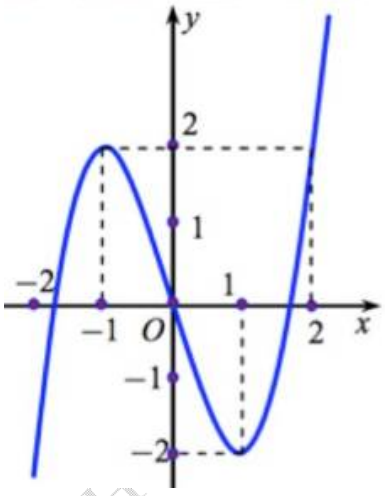
Câu 5: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $f(x)+1=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $1<m<2$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

Câu 6: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

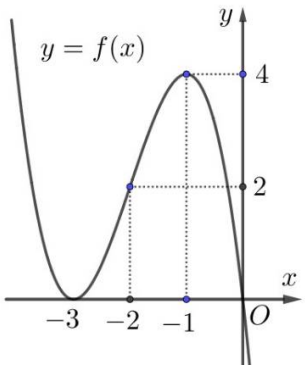
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 7: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tìm m để phương trình $\left|x^4-5x^2+4\right|=\log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

A. $0<m<\sqrt[4]{2^9}$. **B.** $-\sqrt[4]{2^9}<m<\sqrt[4]{2^9}$.

C. Không có giá trị của m. **D.** $1<m<\sqrt[4]{2^9}$.

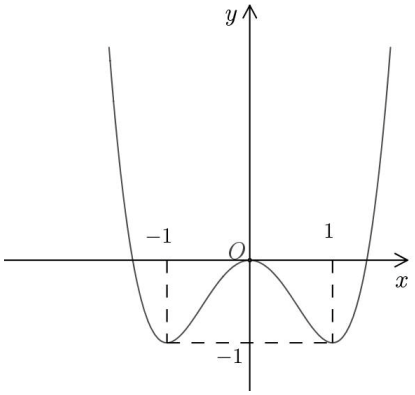
Câu 8: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x^2-1\right)-5=0$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH
HN - 0969141404

Câu 9: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $5f(x)+4=0$ là

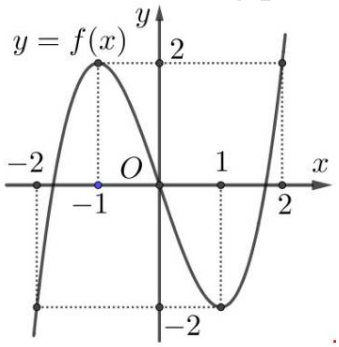


A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 10: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+mx+3$ có hai điểm cực trị $x_1,x_2\le 3$. Số phần tử của S bằng

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 11: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=0$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

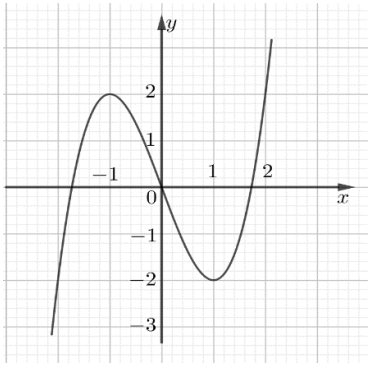
Câu 12: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(1;2]$. **B.** $m\in[1;2)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in[1;2]$.

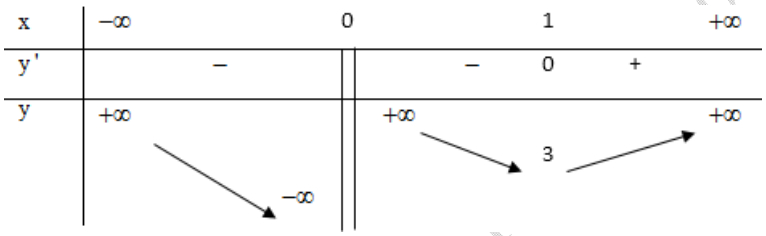
Câu 13: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 14: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3\left|f\left(3-2x\right)\right|-10=0$ là



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho phương trình $(m+2)\left(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\right)+3x+4\sqrt{4-x^2}=m+12.$ Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

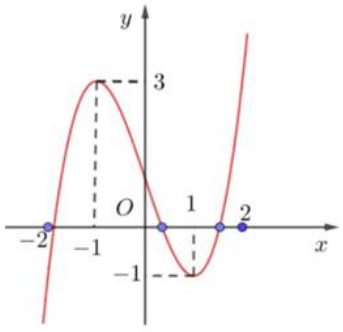
Câu 16: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $\left(-2019;2019\right)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 2017. **B.** 2016. **C.** 4035. **D.** 4037.

Câu 17: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y=2m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|+1$ tại 4 điểm phân biệt

A. $0\le m\le 1.$ **B.** $m\ge 1.$ **C.** $0<m<1.$ **D.** $m<0.$

Câu 18: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R, $f\left(2\right)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $f\left(\left|x\right|+m\right)=3$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

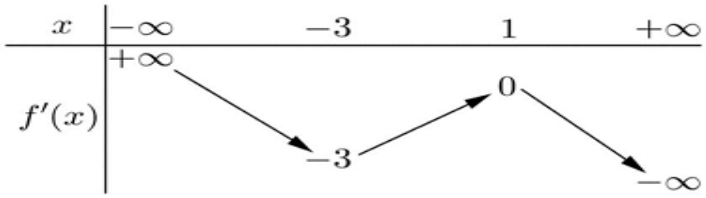
A. 2. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 19.

Câu 19: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 3. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Gv : Lương Văn Huy - LĐH Thanh ... 0969141404

Câu 20: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên



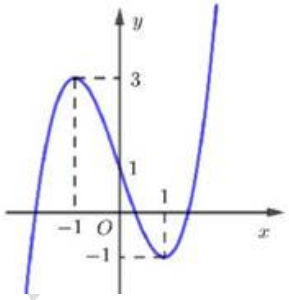
Bất phương trình $f(\sin x)<-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)+\frac{3\pi}{2}$. **B.** $m>f(-1)-\frac{3\pi}{2}$. **C.** $m>f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3\pi}{2}$. **D.** $m>f(1)+\frac{3\pi}{2}$.

Câu 21: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $(C):y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ và đường thẳng $d:y=2m-m^2$. Tìm số giá trị của tham số thực m để đường thẳng d và đồ thị (C) có hai điểm chung.

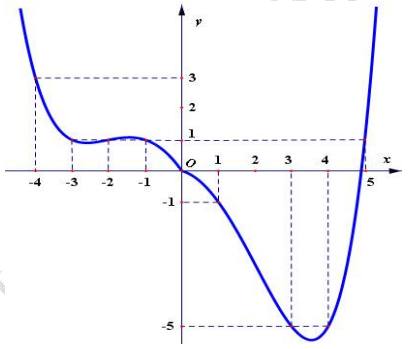
A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** Vô số.

Câu 22: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x)=2\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng:



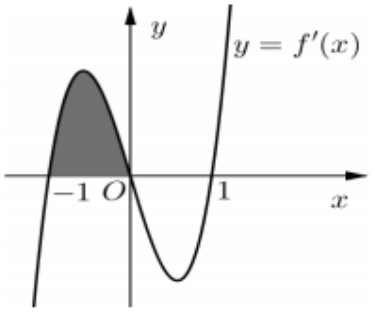
A. -10 **B.** -8. **C.** -6. **D.** -5.

Câu 23: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 24: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{8}$. Phương trình $8f(x)+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?

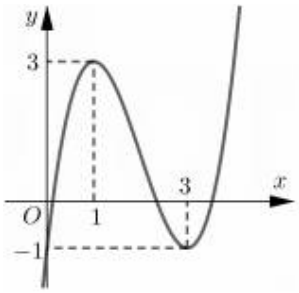


A. 0 . **B.** 4 . **C.** 3. **D.** 2 .

Câu 25: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Phương trình $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}=11$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 26: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt là

A. 1 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Câu 27: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

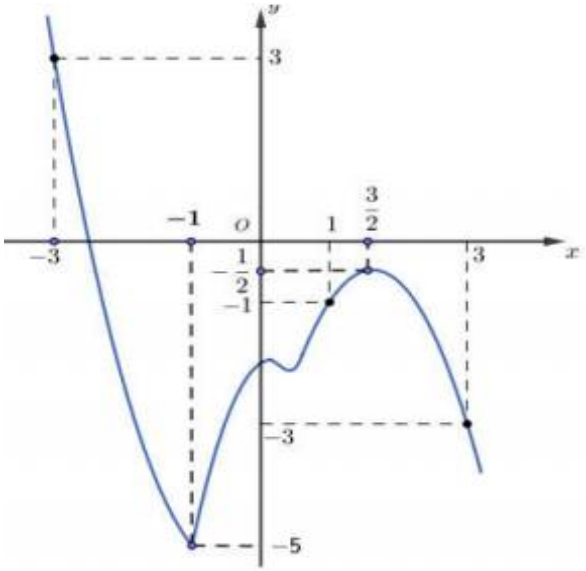
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 28: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x+1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(x\right)\right]^3-3f\left(x\right)+1=0$ là:

A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

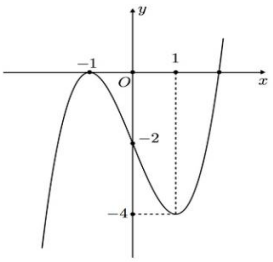
Câu 29: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0$ có nghiệm là

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 30: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-2\cos x)+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $[-4;0]$. **B.** $[-4;0)$. **C.** $[0;4)$. **D.** $(0;4)$.

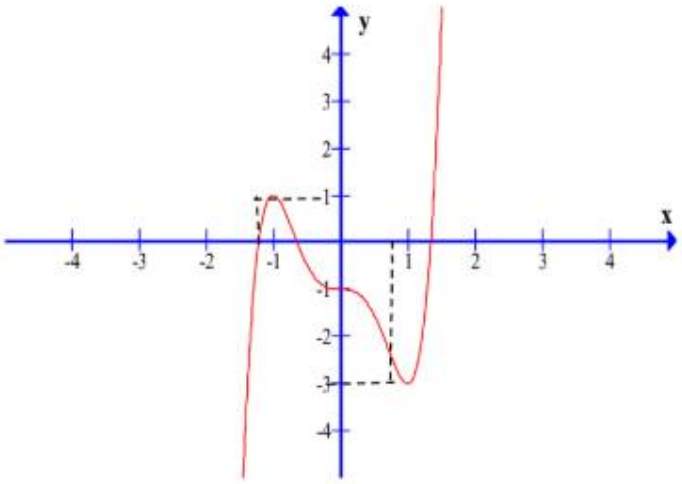
Câu 31: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

Số các số nguyên m thỏa mãn phương trình $f(3\sin x+4\cos x+5)=m$ có nghiệm là

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	10000	↘	0	↗	$+\infty$

A. 10001. **B.** 20000. **C.** 20001. **D.** 10000.

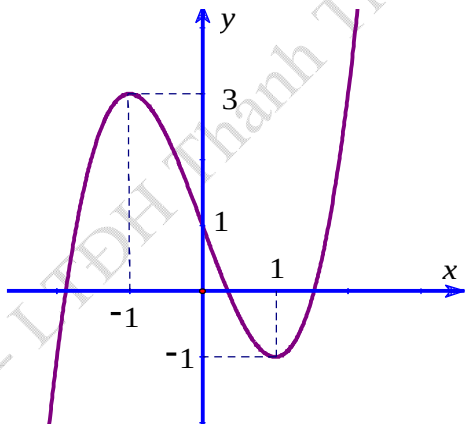
Câu 32: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|-1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(-1;1]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1]$.

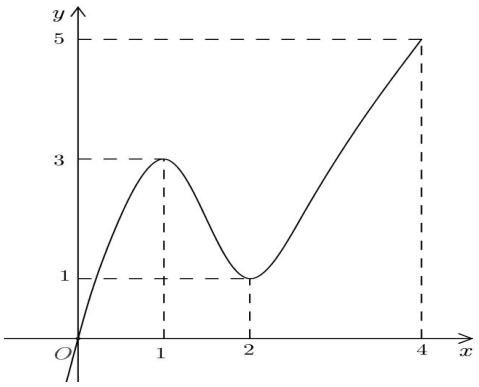
Câu 34: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x+1)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $(-2;0]$. **B.** $(0;2]$.

C. $[-2;2)$. **D.** $(-2;0)$.

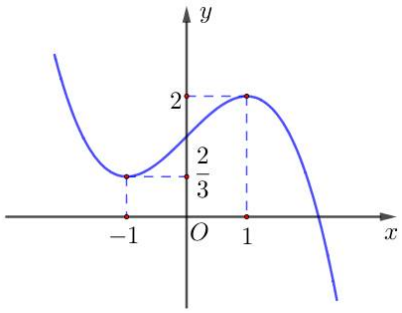
Câu 35: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm?

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

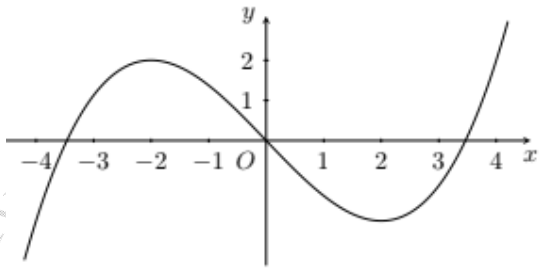
Câu 36: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

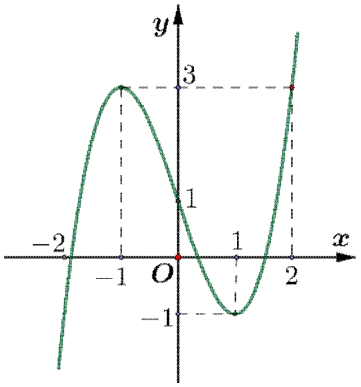
Câu 37: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+2\right)=1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây

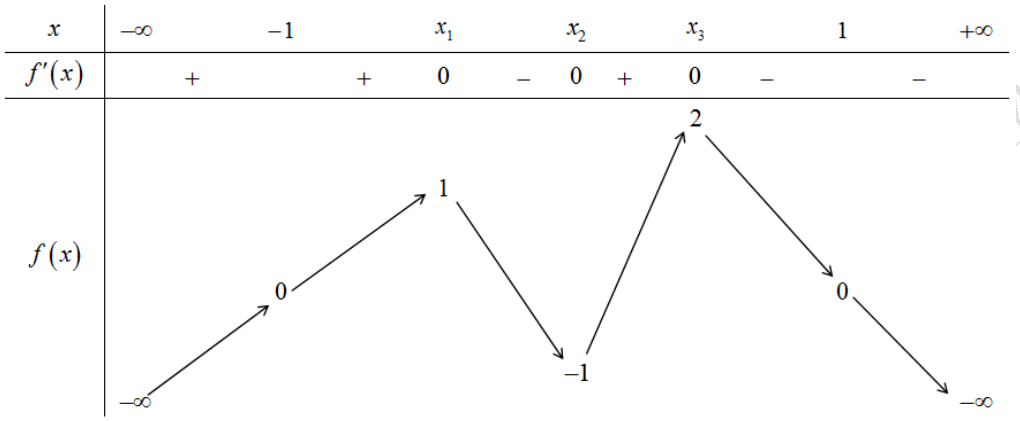


Gv : Lương Văn Huy - Thanh ... HN - 0969141404

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. $(-1;3]$. **B.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

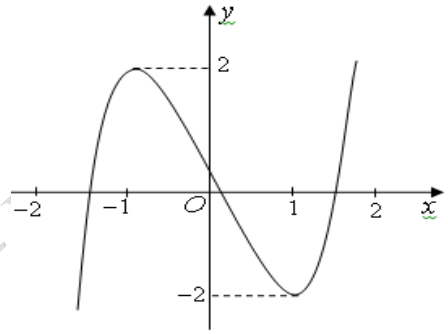
Câu 39: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:



Để phương trình $3f\left(2x-1\right)=m-2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[0;1]$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$ **B.** $(1;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-3;1)$

Câu 40: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

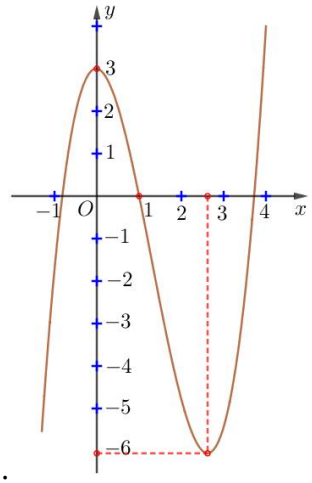
Câu 41: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)<\dfrac{7}{6}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\dfrac{15}{13}$	↘	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)-\frac{1}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A. e^2. **B.** $e^{\frac{15}{13}}$. **C.** e^4. **D.** e^3.

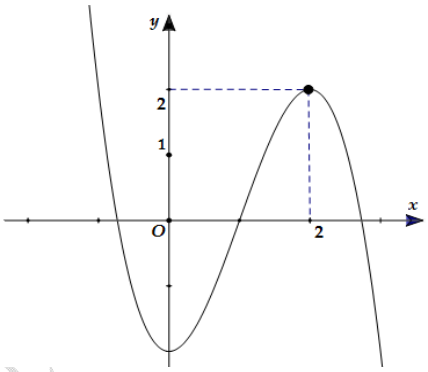
Câu 42: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

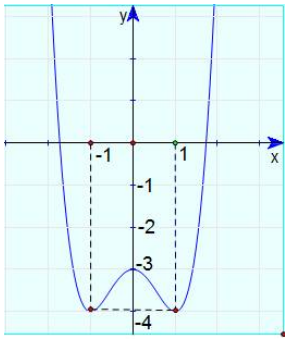
Câu 43: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $\left|x^3-3x^2+2\right|=1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

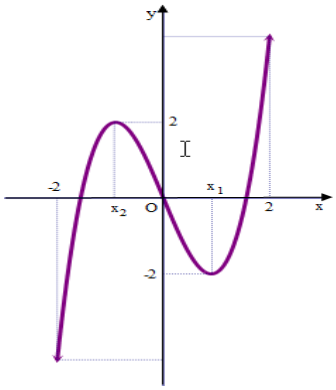
Câu 44: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt?



A. $m\le\frac{1}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

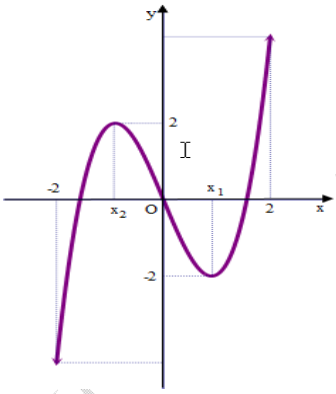
Câu 45: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\left|f(x)-1\right|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

Gv : Lương Văn Huy - 0969141404



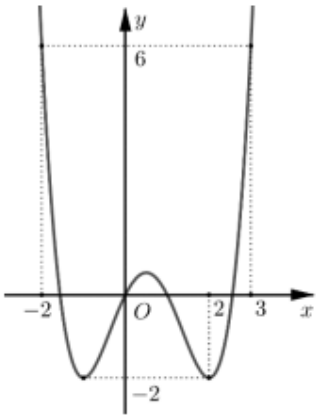
A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 46: **(Lớp Toán Thầy Huy) 1** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(|x|)=-1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

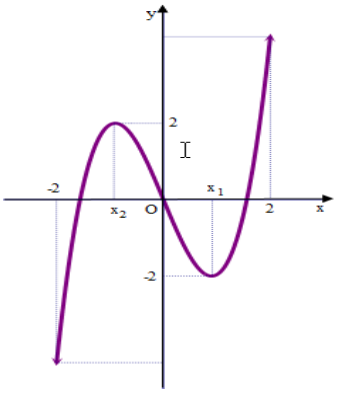
Câu 47: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

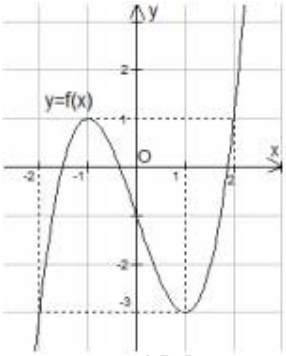
Câu 48: **(Lớp Toán Thầy Huy) 2** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(|x|)-1|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - HN - 0969141404



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 49: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

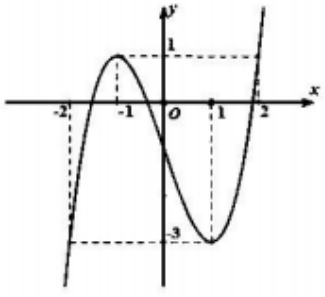


A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Câu 50: **(Lớp Toán Thầy Huy)** **3** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=2-x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

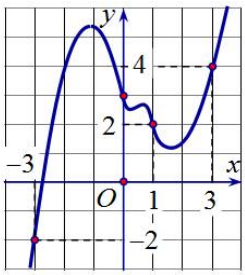
Câu 51: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 52: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới

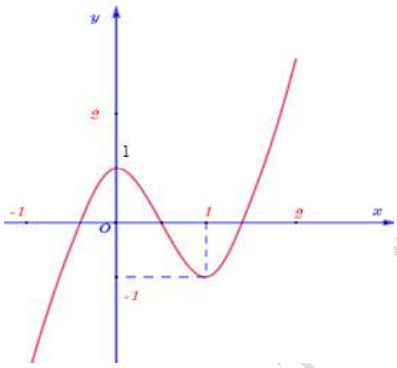
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thầy - HN - 0969141404



Tìm m để bất phương trình $m+x^2+4\ge 2\left(f\left(x+1\right)-2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-4;2\right]$.

A. $m\ge 2f\left(0\right)-1$. **B.** $m\ge 2f\left(-3\right)-4$. **C.** $m\ge 2f\left(3\right)-16$. **D.** $m\ge 2f\left(1\right)-4$.

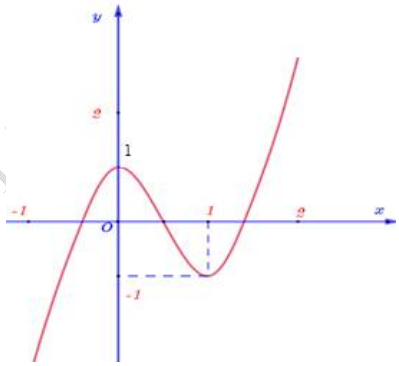
Câu 53: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



Khi đó phương trình $4\left(4x^3-6x^2+1\right)^3-6\left(4x^3-6x^2+1\right)^2+1=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 54: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.

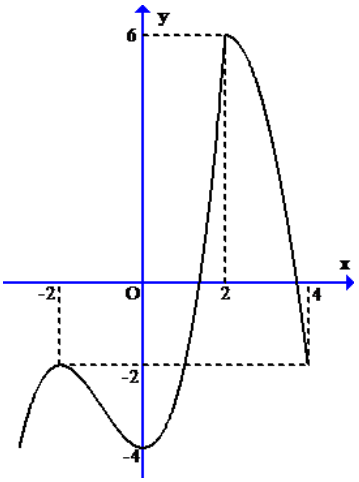


Khi đó phương trình $4\left(4x^3-6x^2+1\right)^3-6\left(4x^3-6x^2+1\right)^2+1=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 55: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.

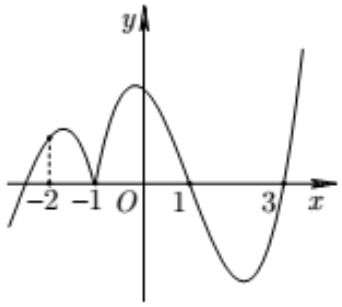
Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - HN - 0969141404



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

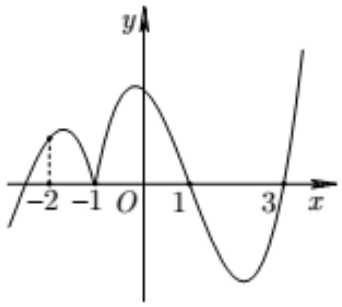
A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 56: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

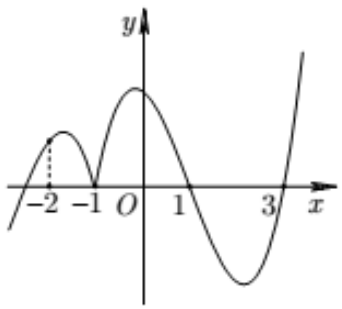
Câu 57: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\sqrt{\left(mx+m^2\frac{4-x^2}{1+\sqrt{5-x^2}}+m^2+2m+1\right)f(x)}$ có tập xác định $[-2;2]$



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3

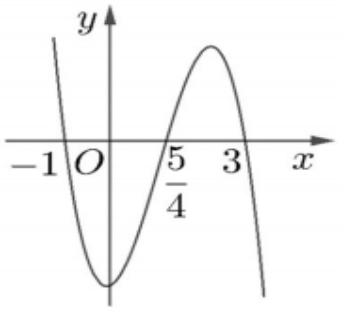
Câu 58: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. S là tập các số nguyên m để bất phương trình $\left(m^3.\sqrt{2x^2-2x+4}-mx+2m+3\right)\left(f(x)+2019f^{2019}(x)\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2019)$. Tổng các phần tử của S là

Gv : Lương Văn Huy - L... HN : 0969141404



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2

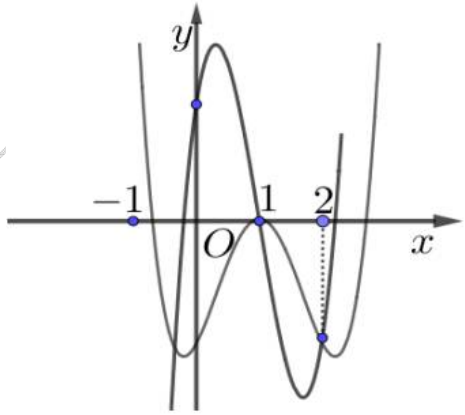
Câu 59: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

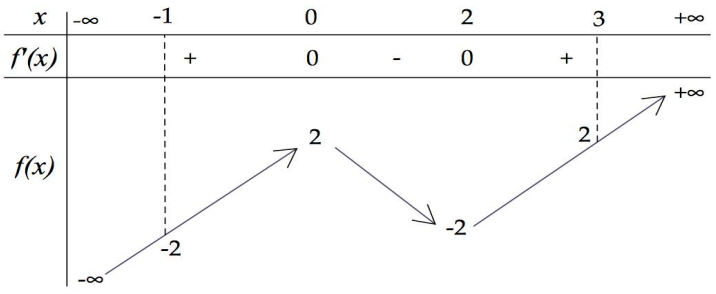
Câu 60: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. −0.81. **B.** −0.54. **C.** −0.27. **D.** 0.27.

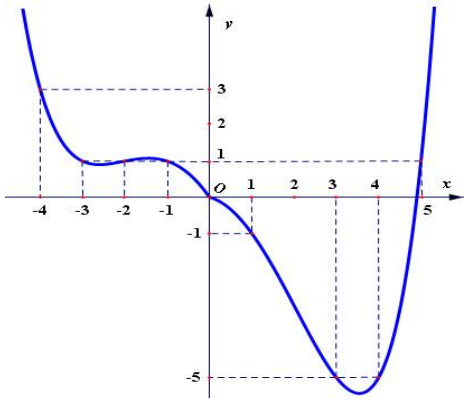
Câu 61: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên:



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 62: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

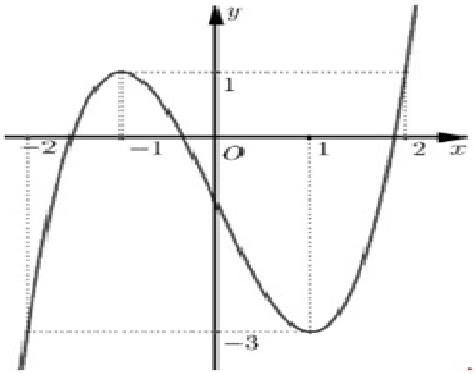
Câu 63: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ này có điểm cực đại $A(0;1)$ và điểm cực tiểu $B(2;-3)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)-2\sqrt[3]{f\left(x\right)}=0$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 64: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Phương trình $\sqrt{2-f\left(x\right)}=f\left(x\right)$ có tập nghiệm $T_1=\{20;18;3\}$. Phương trình $\sqrt{2g\left(x\right)-1}+\sqrt[3]{3g\left(x\right)-2}=2g\left(x\right)$ có tập nghiệm $T_2=\{0;3;15;19\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f\left(x\right)g\left(x\right)}+1=\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 6.

Câu 65: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(f\left(x\right)-m\right)=0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt?

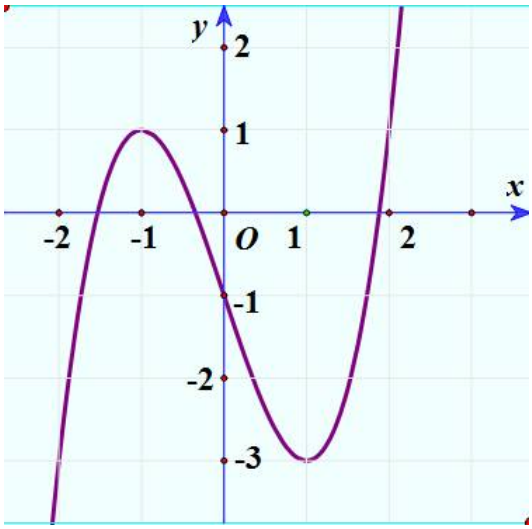
A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 66: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f\left(x\right)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. Khi đó phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

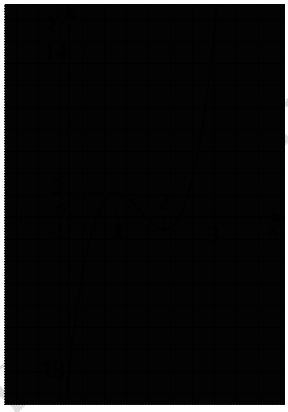
Câu 67: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(2\sin x\right)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

Gv : Lương Văn Huy - VTĐT Thanh Trì HN - 0969141404



A. $m \in \{-3;1\}$. **B.** $m \in (-3;1)$. **C.** $m \in [-3;1)$. **D.** $m \in (-3;1]$.

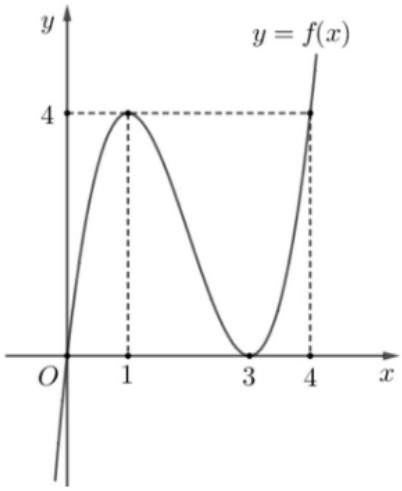
Câu 68: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f(x)+1\right) = m$ có 3 nghiệm phân biệt bằng

A. 15. **B.** 1. **C.** 13. **D.** 11.

Câu 69: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

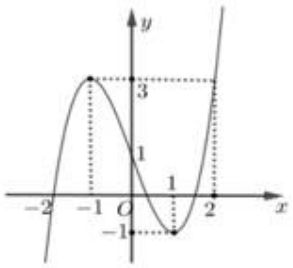
A. 12. **B.** 40. **C.** 41. **D.** 16.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - HN - 0969141404

Câu 70: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)=(6x-3x^2).f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} m>e^4 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$. **B.** $1<m<e^4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>e^4 \\ m<1 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m\le e^4$.

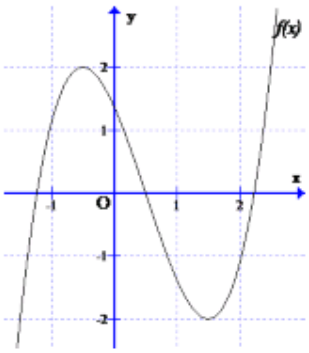
Câu 71: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Tìm tập S.



A. $S=\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$. **B.** $S=\left(f\left(3-\sqrt{2}\right);3\right]$.

C. $S=\varnothing$. **D.** $S=[-1;3]$.

Câu 72: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



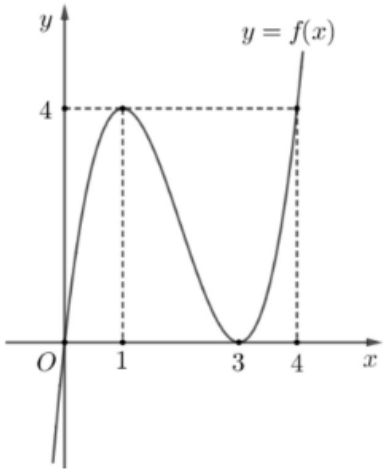
Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f(x)\right|\right)\right|-\left|f(x)\right|=0$ là

A. 20. **B.** 24.

C. 10. **D.** 4.

Câu 73: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới

Gv : Lương Văn Huy - Lớp Thanh Trì - HN - 0969141404



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x\left(x-3\right)^2\right)=m$ có 9 nghiệm thực thuộc đoạn $[0;4]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 74: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho $f\left(x\right)=x^3-3x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2019.f\left(f\left(x\right)\right)=m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 4037. **B.** 8076. **C.** 8078. **D.** 0.

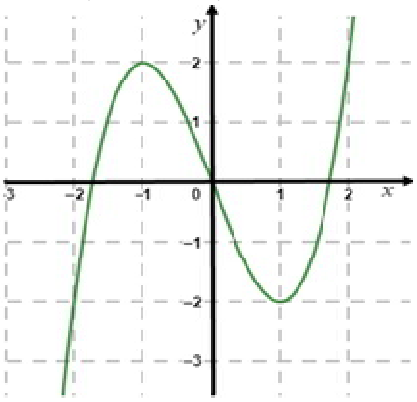
Câu 75: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m và n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=3$.

Câu 76: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ sao cho bất phương trình $mx^4-4x+m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 1272. **B.** 1275. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 77: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

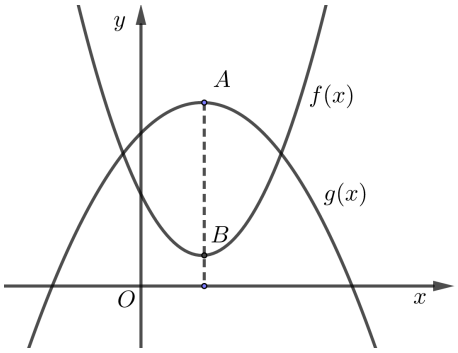
Câu 78: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình: $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x\left(x^2+1\right)}=x^2+1$ có nghiệm?

A. 6 **B.** 7 **C.** 1 **D.** 5

Câu 79: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hai hàm đa thức $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị là B, đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có

Gv : Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

đúng một điểm cực trị là A và $AB=\dfrac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

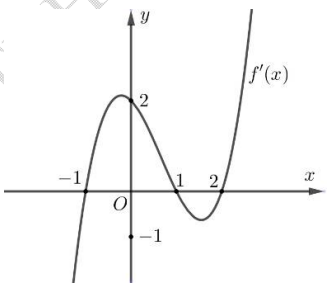
Câu 80: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-3\pi;3\pi)$ để đồ thị của hàm số $y=2|x|^3-3(m+1)x^2+6m|x|+m^2-3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 81: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f'(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của bất phương trình $\left[f(x)+x-1\right]\left(x^2-x-6\right)>0$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 82: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m,$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 83: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hai hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^3+2x^2+mx-3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 84: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Câu 85: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$, $y=x+m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị tại hai hai điểm phân biệt A và ***B.*** Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với tại A và ***B.*** Giá trị nhỏ nhất của $T=k_1^{2020}+k_2^{2020}$ bằng

Gv : Lương Văn Huy - LT 4 Thanh Trì - HN 0969141404

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

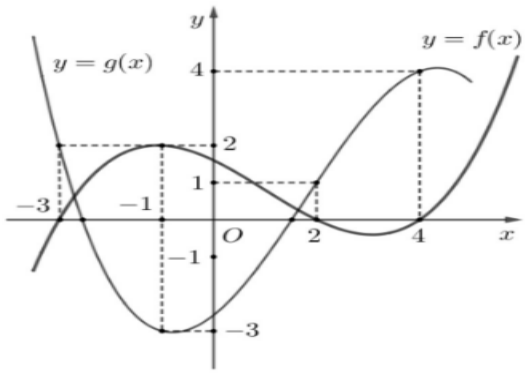
Câu 86: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho 2 số thực a và b. Tìm giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 để đồ thị hàm số $y=f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+ax+3$ có điểm chung với trục Ox.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 87: **(Lớp Toán Thầy Huy)** **Cho hàm số** $y=f(x)=x^2-4x+3$ **có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số** m để phương trình: $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

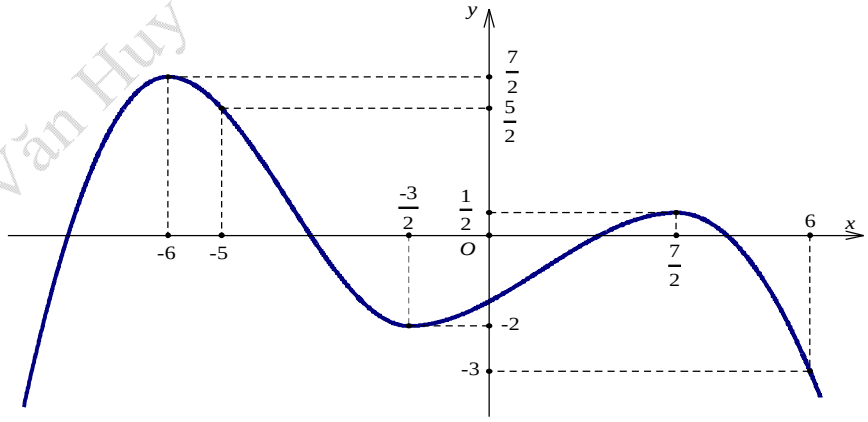
A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 88: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 89: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{408-x}+\sqrt{392+x}-34\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 90: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-2mx^2+(m^2+m-2)x+m$ và parabol $(P): y=x^2-x-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt D,E,F. Tổng các giá trị của m để đường tròn đi qua ba điểm D,E,F cũng đi qua điểm $G\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ là

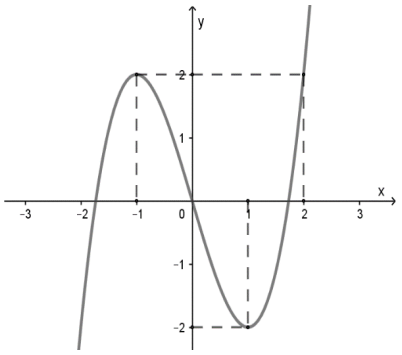
A. $\frac{4}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - 0969141404

Câu 91: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

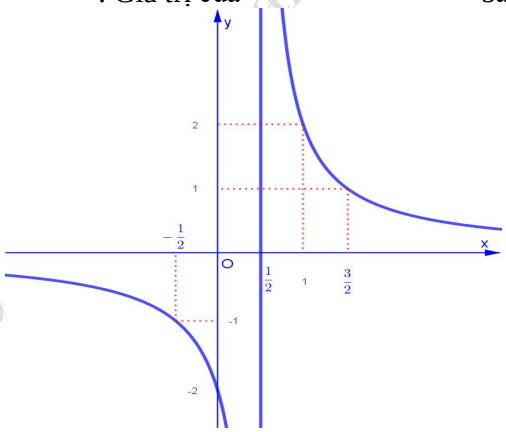
Câu 92: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 93: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(0)=1$, $f(1)=2$. Giá trị của $P=f(-1)+f(3)$ bằng



A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 94: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
			$+\infty$				

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)+1=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $(-4;2)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $[-4;2)$. **D.** $(-3;3)$.

Câu 95: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực.

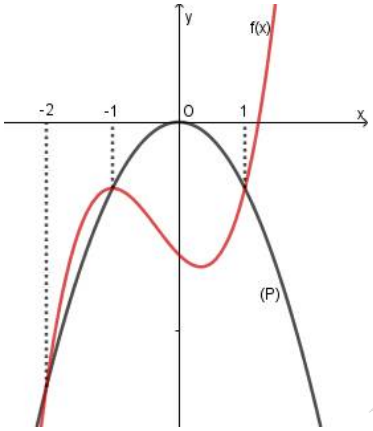
Gv : Lương Văn Huy - Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m>\frac{7}{12}$. **B.** $m\ge -\frac{7}{2}$. **C.** $m\ge \frac{3}{2}$. **D.** $m\ge \frac{9}{2}$.

Câu 96: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2019m+\sqrt{2019m+x^2}}=x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 97: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho $(P):y=-x^2$ và đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx-2$ như hình vẽ.



Tính giá trị biểu thức $P=a-3b-5c$.

A. 3. **B.** -7. **C.** 9. **D.** -1.

Câu 98: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d:y=mx-m-1$ cắt (C)tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\frac{2}{3}$.

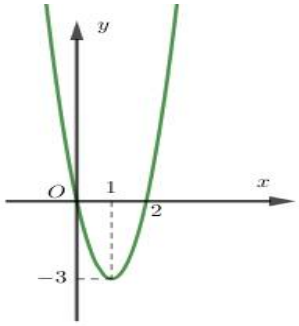
Câu 99: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $m>1$. **B.** $-1\le m\le 1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$.

Câu 100: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C):y=-2x^3+3x^2+2m-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $0\le m\le \frac{1}{2}$. **B.** $0<m<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}\le m<\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$.

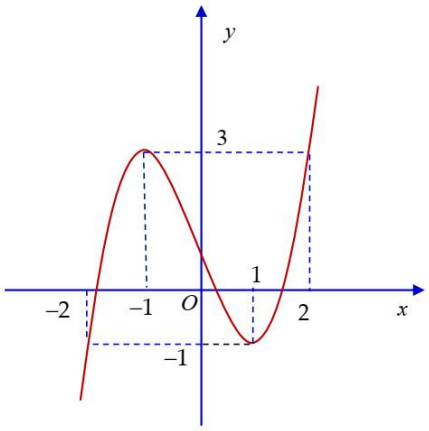
Câu 101: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left[f(x)+m\right]=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

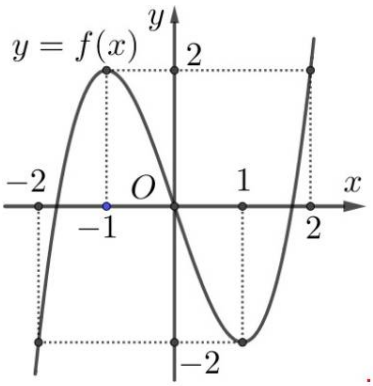
Câu 102: **(Lớp Toán Thầy Huy)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

Gv : Lương Văn Huy - TTBH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 103: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$ bằng



A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 104: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $0<m\le 1$. **B.** $m>\mathrm{e}$. **C.** $0<m<\mathrm{e}$. **D.** $1<m<\mathrm{e}$.

Câu 105: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 38. **B.** 52. **C.** 28. **D.** 14.

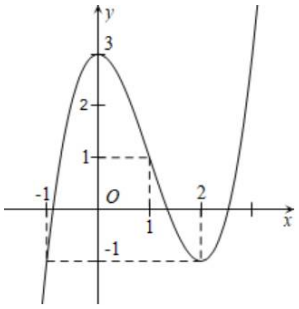
Câu 106: (Lớp Toán Thầy Huy) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\left|x^2-4x+3\right|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm thực phân biệt

A. $m\le 1$. **B.** $0<m\le 1$.

C. $m\in(-1;0)\cup(0;1)$. **D.** $-1\le m\le 1$.

Câu 107: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.

Gv : Lương Văn Huy - TDH HN - 0969141404



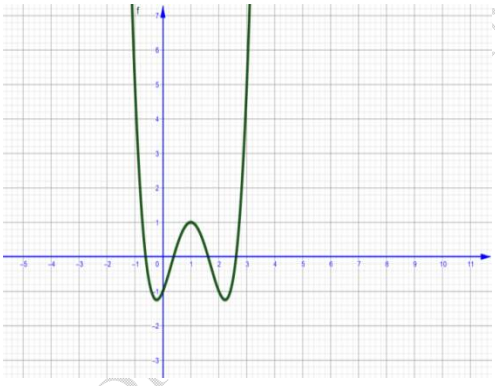
Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right]^2 - f\left(e^{\sqrt{x}}\right) - 2 = 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 108: (Lớp Toán Thầy Huy) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

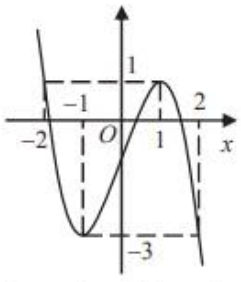
Câu 109: (Lớp Toán Thầy Huy) Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = \left[f'(x)\right]^2 - f(x).f''(x)$ và trục Ox.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 110: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi phương trình $f\left(2 - f(x)\right) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 111: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

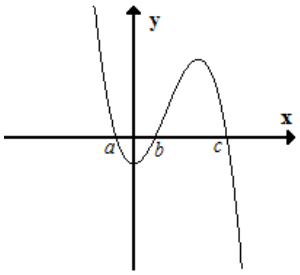
x	1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	4	↘	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+1) = \dfrac{m}{x^2 - 4x + 5}$ có nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

GV: Lương Văn Huy - LTĐH - 0969141404

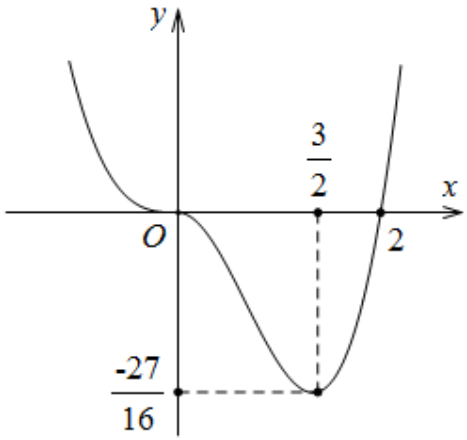
A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 112: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x-a)=f(c)$ là



A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 113: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$. Tính tổng tất cả các phần tử của A.

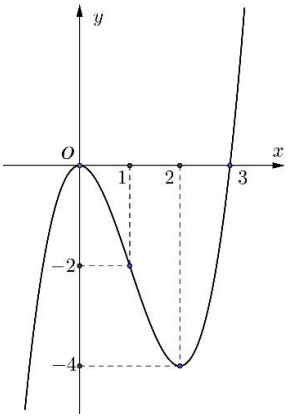
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 114: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\frac{m^3+m}{\sqrt{f^2(x)+1}}=f^2(x)+2$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{26}$. **C.** $m=\sqrt{10}$. **D.** $m=1$.

Câu 115: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên trên R có đồ thị như hình vẽ.

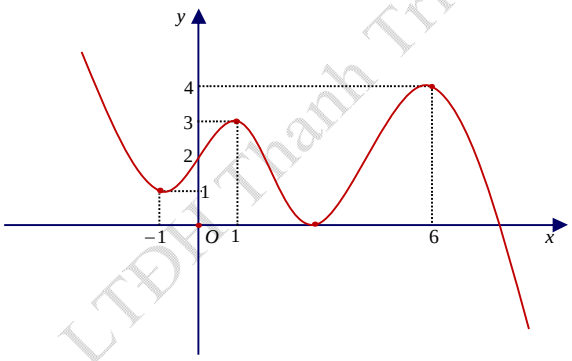
Gv : Lương Văn Huy - HN - 0969141404



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-7$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

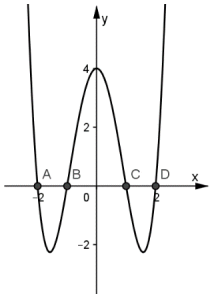
A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 116: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt $\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 117: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+r$ $(a,b,c,d,e,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x)=r$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 118: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 119: (Lớp Toán Thầy Huy) Tính tổng S tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{4}{3}$.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

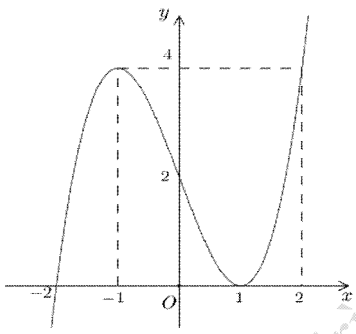
Câu 120: (Lớp Toán Thầy Huy) Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y=(m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 121: (Lớp Toán Thầy Huy) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $(|m|<5)$ để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+1$ tại 3 điểm phân biệt ?

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 2.

Câu 122: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



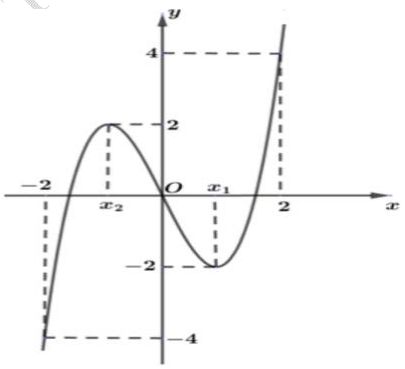
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $3f(x)=m\sqrt{9-x^2}$ có 3 nghiệm

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 123: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$.

A. 5. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 124: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.

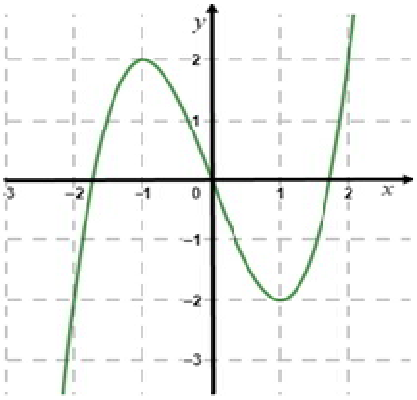


Hỏi phương trình $|f(x)-1|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 125: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là

Gv: Lương Văn Huy - TBH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

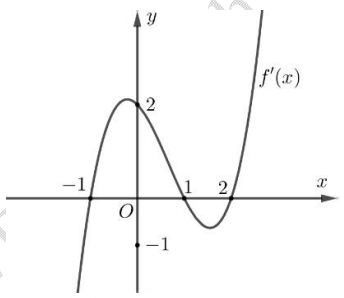
Câu 126: (Lớp Toán Thầy Huy) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình: $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x\left(x^2+1\right)}=x^2+1$ có nghiệm?

A. 6 **B.** 7 **C.** 1 **D.** 5

Câu 127: (Lớp Toán Thầy Huy) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-3\pi;3\pi)$ để đồ thị của hàm số $y=2|x|^3-3(m+1)x^2+6m|x|+m^2-3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 128: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m,$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 129: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

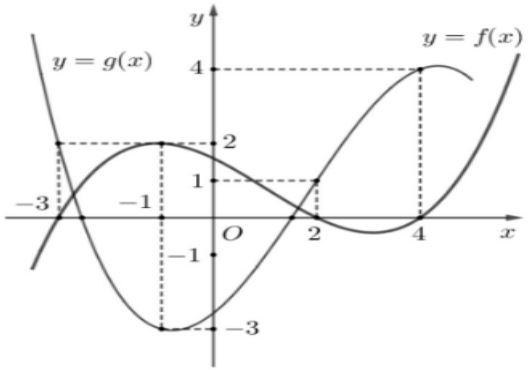
A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Câu 130: (Lớp Toán Thầy Huy) **Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.**

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

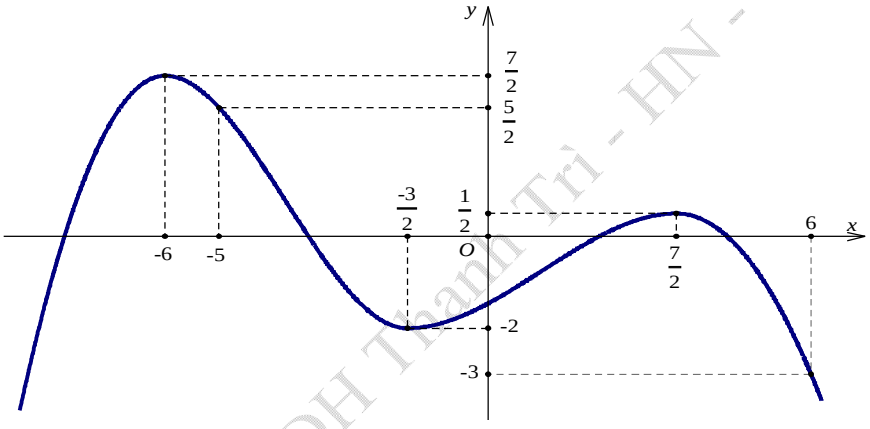
Câu 131: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.

Gv: Lương Văn Huy - LT ... Trì - HN - 0969141404



A. 8. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 132: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{408-x}+\sqrt{392+x}-34\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?

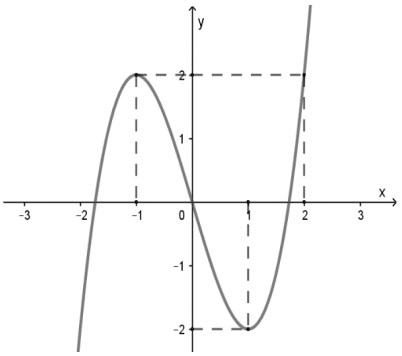


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 133: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 134: (Lớp Toán Thầy Huy) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.B	5.A	6.C	7.D	8.B	9.A	10.D
11.D	12.C	13.A	14.C	15.A	16.B	17.C	18.B	19.D	20.A
21.C	22	23.D	24.D	25.C	26.B	27.C	28	29.C	30.C
31.A	32.C	33.B	34.A	35.D	36.B	37.A	38.C	39.A	40.B
41.C	42.A	43.B	44.C	45.D	46.C	47.C	48.B	49.A	50.A
51.C	52.C	53.D	54.C	55.C	56.C	57.A	58.A	59.A	60
61.C	62.D	63.A	64.D	65.D	66.A	67.C	68.A	69.D	70.C
71.A	72.A	73.A	74.A	75.A	76.D	77.A	78.D	79.A	80.B
81.A	82.D	83.C	84.B	85.B	86.B	87.C	88.D	89.B	90.B
91.C	92.B	93.A	94.C	95.D	96.D	97.A	98.A	99.A	100.A
101.B	102	103.B	104.A	105.C	106.B	107.C	108.B	109.D	110.D
111.C	112.B	113.D	114.B	115.B	116.C	117.B	118.B	119.B	120.C
121.D	122.A	123.C	124.D	125.C	126.D	127.A	128.A	129.C	130.B
131.D	132.B	133.B	134.B	135.A					

ĐÁP ÁN

A. Bài toán tương giao không chứa tham số

1. A	2. C	3. B	4. C	5. D	6. B	7. A	8. B	9. D	10. B
11. A	12. B	13. B	14. D	15. C	16. A	17. A	18. D	19. C	20. C
21. A	22. D								

B. Bài toán tương giao chứa tham số

1. B	2. D	3. D	4. B	5. D	6. A	7. C	8. A	9. A	10. C
11. A	12. C	13. C	14. D	15. C	16. C	17. C	18. C	19. A	20. C
21. B	22. A	23. D	24. C	25. D	26. D	27. B	28. B	29. C	30. D
31. B	32. D	33. A	34. D	35. A	36. C	37. D	38. B	39. D	40. D
41. D	42. C	43. A	44. D	45. C	46. A	47. C	48. C	49. A	50. C
51. D	52. C	53. C	54. C	55.	56. B	57. A	58. A	59. C	60. B
61. C	62. D	63. A	64. D	65. A	66. D	67. D	68. C	69. C	70. D
71. C									

Gv : Lương Văn Huy - Ngọc Hồi Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 7 : TÌM ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Tìm toạ độ điểm $M_0\in(C)$ thoả mãn điều kiện cho trước

Phương pháp chung:

- **Bước 1:** Giả sử $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ với $y_0=f(x_0)$
- **Bước 2:** Từ điều kiện cho trước thiết lập một phương trình theo x_0
- **Bước 3:** Giải phương trình theo x_0 (đối chiếu điều kiện nếu có) từ đó tìm được y_0, suy ra điểm $M_0(x_0;y_0)$ cần tìm

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tìm điểm cố định của họ đường cong:

Bài toán tổng quát: Cho họ đồ thị $(C_m): y=f(x,m)$, với f là hàm đa thức theo biến *x*, *m* là tham số thực sao cho bậc của *m* không quá 2. Tìm các điểm cố định của (C_m) khi *m* thay đổi ta làm theo các bước sau

a. Phương pháp:

- Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định (C_m) luôn đi qua
- Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc $(C_m)\Leftrightarrow y_0=f(x_0,m),\forall m$ (*)
- Biến đổi phương trình (*) về dạng $A(x_0;y_0)m+B(x_0;y_0)=0$ (1) hoặc $A(x_0;y_0)m^2+B(x_0;y_0)m+C(x_0;y_0)=0$ (2).
- Họ (C_m) đi qua điểm *M* với mọi *m* khi và chỉ khi $(x_0;y_0)$ nghiệm đúng (1) hoặc (2) với mọi *m*

$\Leftrightarrow\begin{cases}A(x_0;y_0)=0\\B(x_0;y_0)=0\end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow\begin{cases}A(x_0;y_0)=0\\B(x_0;y_0)=0\\C(x_0;y_0)=0\end{cases}$. Giải hệ phương trình này ta tìm được $M(x_0;y_0)$

Chú ý:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định
- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó chính là điểm cố định của (C_m)

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)$ (C_m). Điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi *m* là?

A. $M(1;-2)$ **B.** $M(0;0)$ **C.** $M(0;2)$ **D.** $M(2;0)$

Giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm cố định mà họ đường cong (C_m) đi qua.

Ta có $M(x;y)\in(C_m),\forall m$

$\Leftrightarrow y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1),\forall m$

$\Leftrightarrow(2x-4)m^2+(x^2-3x+2)m+y-x^3+x^2+2x=0,\forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4=0\\x^2-3x+2=0\\y-x^3+x^2+2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

Vậy (C_m) luôn đi qua điểm $M(2;0)$ với mọi *m*. Chọn đáp án D

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nhận xét: Điểm cố định là điểm mà họ đường cong (C_m) đi qua đúng với mọi m nên ta có thể dùng máy tính để kiểm tra kết quả như sau
Vì 4 đáp án cho số cụ thể.
Nhập $X^3-(M+1)X^2-(2M^2-3M+2)X+2M(2M-1)\xrightarrow[\begin{matrix}X=2;M=1\\X=2;M=10\end{matrix}]{Calc}0\Rightarrow\boxed{D}$

Ví dụ 2. Số điểm cố định của họ đường cong $(C_m): y=mx^3-3mx^2+2(m-1)x+1$ (1) đi qua là?
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Giải:
Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ đường cong (C_m) đi qua.
Ta có $M(x_0;y_0)\in(C_m),\forall m$
$(1)\Leftrightarrow y_0=mx_0^3-3mx_0^2+2(m-1)x_0+1,\forall m\Leftrightarrow(x_0^3-3x_0^2+2x_0)m+1-2x_0-y_0=0,\forall m$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-3x_0^2+2x_0=0\\1-2x_0-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0(x_0^2-3x_0+2)=0\\y_0=1-2x_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=1\\y_0=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=2\\y_0=-3\end{cases}.$
Vậy có 3 điểm cố định. Chọn đáp án C

Dạng 2. Tìm điểm sao cho tọa độ của chúng là những số nguyên

Bài toán tổng quát: Cho đường cong (C) có phương trình $y=f(x)$ (thường là hàm phân thức mà bậc tử ≥ bậc mẫu). Tìm những điểm có toạ độ nguyên của đường cong (C). Điểm có toạ độ nguyên là điểm có cả hoành độ và tung độ nguyên.

a. Phương pháp:

- Thực hiện phép chia đa thức của tử thức cho mẫu thức và đưa về dạng $y=a+\dfrac{k}{mx+n}$ hoặc $y=ax+b+\dfrac{k}{mx+n}$
- Để điểm có toạ độ nguyên thì $k\vdots(mx+n)$ hay $mx+n$ là ước của k
- Giải hệ $\begin{cases}mx+n=\pm1\\.....\Rightarrow x\Rightarrow y\Rightarrow M\\mx+n=....\end{cases}$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 3. ***(Trường THPT Chuyên Hà Giang năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{3(x+1)}{x-2}$ có đồ thị (C). Hỏi trên (C) có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?
A. 6 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Giải.
Ta có $y=\dfrac{3(x+1)}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+9}{x-2}=3+\dfrac{9}{x-2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow9\vdots(x-2)$ hay $x-2$ là ước của 9
$\Leftrightarrow x-2=\{\pm1;\pm3;\pm9\}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=\pm1\\x-2=\pm3\\x-2=\pm9\end{cases}.$
Vậy trên (C) có tất cả 6 điểm có tọa độ là các số nguyên là
$(x;y)=\{(3;12),(1;-6),(5;6),(-1;0),(11;4),(-7;2)\}$
Chọn đáp án A

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 4. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2+5x+15}{x+3}$ sao cho tọa độ của chúng là những số nguyên?

A. 6 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Giải:

Ta có $y=x+2+\dfrac{9}{x+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 9\vdots(x+3)$ hay $x+3$ là ước của 9

$$\Leftrightarrow x+3=\{\pm1;\pm3;\pm9\}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=\pm1\\x+3=\pm3\\x+3=\pm9\end{cases}.$$

Vậy trên (C) có tất cả 6 điểm có tọa độ là các số nguyên là

$(x;y)=\{(-4;-11),(-2;9),(-6;-7),(0;5),(-12;-11),(6;9)\}$

Chọn đáp án A

Dạng 3. Tìm điểm liên quan tới đối xứng

Bài toán tổng quát 1: Tìm hai điểm A,B thuộc đồ thị $(C): y=f(x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(a;b)$

a. Phương pháp:

- Lấy $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ thuộc (C) ta có $y_A=f(x_A)$, $y_B=f(x_B)$
- Hai điểm A, B đối xứng qua $I\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=2a\\y_A+y_B=2b\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ A, B

  Trường hợp đặc biệt: $I(a;b)\equiv O(0;0)$ ta cũng làm tương tự
- Lấy $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ thuộc (C) ta có $y_A=f(x_A)$, $y_B=f(x_B)$
- Hai điểm A, B đối xứng qua $O\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=0\\y_A+y_B=0\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ A, B

Bài toán tổng quát 2: Tìm hai điểm A,B thuộc đồ thị $(C): y=f(x)$ sao cho chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y=ax+b$ $(a\neq0)$ cho trước.

a. Phương pháp:

Cách 1.

- Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d, ta có $\Delta: y=-\dfrac{1}{a}x+m$ và giả sử Δ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Khi đó hoành độ A,B là nghiệm của phương trình: $f(x)=-\dfrac{1}{a}x+m$ (1)
- Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_A,x_B và sử dụng hệ thức Vi-et để tính $x_A+x_B=?$, $x_A.x_B=?$ (theo m)
- Tính tọa độ trung điểm I của AB và lý luận I thuộc d ta sẽ tìm được m. Từ đó suy ra tọa độ A,B

Cách 2.

- Gọi hai điểm cần tìm là $A(a;f(a)), B(b;f(b))$
- Hai điểm A,B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}I\in\Delta\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\end{cases}$ (Với I là trung điểm của AB, $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ.
- Giải hệ trên ta tìm được hai điểm AB

c. Ví dụ minh hoạ:

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$. Tìm trên đồ thị (*C*), hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng *MN*, biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$

A. $\begin{cases}A(0;0)\\B(-4;0)\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}A(2;-4)\\B(0;0)\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}A(0;2)\\B(-4;0)\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}A(2;0)\\B(0;-4)\end{cases}$

Giải.

Cách 1: Phương trình đường thẳng $MN: x+2y+3=0$

Gọi $I(a;b)\in MN \Leftrightarrow a+2b+3=0$ (1)

Phương trình đường thẳng *d* qua *I* và vuông góc với *MN* là $y=2(x-a)+b$

Hoành độ các giao điểm *A, B* của (*C*) và *d* là nghiệm của phương trình

$\dfrac{2x-4}{x+1}=2(x-a)+b \Leftrightarrow 2x^2-(2a-b)x-2a+b+4=0 \ (x\neq -1)$

Hai điểm *A, B* đối xứng nhau qua *MN* $\Leftrightarrow$ *I* là trung điểm của *AB*.

Khi đó $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{2a-b}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases}a+2b+3=0\\a=\dfrac{2a-b}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$ thay vào phương trình hoành độ ta được hai điểm cần tìm là $A(2;0), B(0;-4)$. Chọn đáp án D

Cách 2: Gọi 2 điểm cần tìm là *A, B* có $A\left(a;2-\dfrac{6}{a+1}\right);B\left(b;2-\dfrac{6}{b+1}\right);a,b\neq -1$

Trung điểm *I* của *AB* thì $I\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{a-2}{a+1}+\dfrac{b-2}{b+1}\right)$

Phương trình đường thẳng $MN: x+2y+3=0$

Hai điểm *A, B* đối xứng nhau qua *MN* $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0\\I\in MN\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0;-4)\\B(2;0)\end{cases}$

Nhẫn xét: Bài toán này cho cụ thể điểm *AB* nên ta có thể kiểm tra bằng cách xét điều kiện

Hai điểm *A, B* đối xứng nhau qua *MN* $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0\\I\in MN\end{cases}$. Từ đó được đáp án D

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (*C*). Tính tổng hoành độ hai điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm $M(-1;3)$

A. 0 **B.** 6 **C.** -2 **D.** 2

Giải.

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$, *B* là điểm đối xứng với *A* qua điểm $M(-1;3)$ hay *M* là trung điểm của *AB* nên $B(-2-x_0;6-y_0)$

Vì $A,B\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-x_0^3+3x_0+2\\6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=2\\x_0=-2\Rightarrow y_0=4\end{array}\right.$

Vậy 2 điểm cần tìm là $(0;2)$ và $(-2;4)$ nên tổng các hoành độ bằng -2. Chọn đáp án C

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 7. ***(Trường THPT Chuyên Hưng Yên lần 3 năm 2017)*** Tìm trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^2+4x+2$ hai điểm phân biệt mà chúng đối xứng với nhau qua trục tung .

A. Không tồn tại. **B.** $A(2;2)$ và $B(-2;2)$

C. $A(-1;-1)$ và $B(1;-1)$ **D.** $A(3;-13)$ và $B(-3;-13)$

Giải.

Gọi hai điểm $A,B\in(C)$ và đối xứng nhau qua trục Oy là

$$\begin{cases}A(x_A;y_A)\\B(x_B;y_B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=-x_B\\y_A=y_B\end{cases}\Rightarrow x_A\neq 0$$

Khi đó ta có $-x_A^{\,2}+4x_A+2=-(-x_A)^2+4(-x_A)+2\Leftrightarrow 4x_A=-4x_A\Leftrightarrow x_A=0$ (loại)

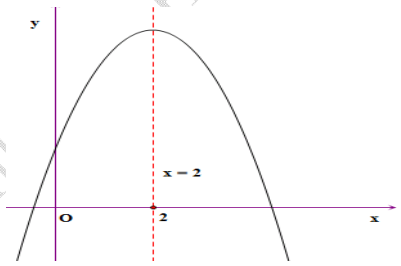
Suy ra không tồn tại hai điểm thỏa mãn đề bài.

Nhận xét: Bài toán cho cụ thể điểm *AB* nên ta có thể thử đáp án bằng cách xét điều kiện $A,B\in(C)$ và *AB* đối xứng nhau qua *Oy*. Nhìn nhanh 3 đáp án ta thấy thoả mãn điều kiện đối xứng, giờ chỉ cần kiểm tra điều kiện thuộc (C).

Nhập $-X^2+4X+2\xrightarrow[X=\pm1;X=\pm2;X=\pm3]{Calc}$ không bằng tung độ nên chọn đáp án A

- Ngoài các giải bằng bằng máy tính ta có thể kiểm tra nhanh bằng cách vẽ đồ thị hàm bậc hai như sau:

Đồ thị (C) của hàm số $y=-x^2+4x+2$ như hình vẽ bên. Quan sát đồ thị ta thấy Đồ thị (C) nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng và không có cặp điểm nào đối xứng qua trục *Oy* nên chọn đáp án A



Dạng 4. Tìm điểm liên quan tới khoảng cách

Bài toán tổng quát: Tìm *M* trên (C) sao cho khoảng cách từ *M* đến Ox bằng *k* lần khoảng cách từ *M* đến trục Oy.

a. Phương pháp:

- Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)$ với $y_0=f(x_0)$
- Theo đầu bài ta có

$$d(M,Ox)=d(M,Oy)\Leftrightarrow|y_0|=k|x_0|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=kx_0\\y_0=-kx_0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}g(x_0;k)=0\\h(x_0;k)=0\end{array}\right.$$

- Giải hai trường hợp trên ta được $x_0\Rightarrow y_0\Rightarrow$ Tọa độ điểm cần tìm

Đặc biệt: Khi $k=1$ thì điểm *M* sẽ cách đều hai trục toạ độ.

Chú ý: Khi thay hai trục tọa độ bằng hai tiệm cận (đứng và ngang) thì vẫn làm tương tự và nhớ nhanh kết quả như sau: Với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0;ad-bc\neq 0)$ có đồ thị (C) thì TCĐ là $x=-\dfrac{d}{c}$; TCN là $y=\dfrac{a}{c}$

- Khoảng cách từ $M\in(C)$ đến TCĐ là $\boxed{d_1=\left|x+\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{cx+d}{c}\right|}$
- Khoảng cách từ $M\in(C)$ đến TCN là $\boxed{d_2=\left|y-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx+d)}\right|}$

GV: Lương Văn Huy - NBDH Thanh Trì - HN - 0969141404

- Tích khoảng cách từ $M \in (C)$ đến hai đường tiệm cận luôn là 1 hằng số:

$$d_1.d_2 = \left|\frac{cx+d}{c}\right|.\left|\frac{ad-bc}{c(cx+d)}\right| = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} = \zeta > 0$$

Một số công thức tính nhanh thường gặp:

CT1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách từ M tới tiệm cận ngang

$$d_1 = kd_2 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \zeta\sqrt{k}\ (k>0) \text{ với } \zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$$

Đặc biệt: $d_1 = d_2 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \zeta$ với $\zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$

CT2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M tới các đường tiệm cận là nhỏ nhất

$$d = (d_1+d_2)_{\min} = 2\zeta \Leftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \zeta \text{ với } \zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$$

CT3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho khoảng cách từ M tới I là nhỏ nhất, với I là giao điểm hai đường tiệm cận

$$MI_{\min} = \zeta\sqrt{2} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \zeta \text{ với } \zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$$

CT4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M tới các đường tiệm cận là bằng k

$$d_1 + d_2 = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{d}{c} \pm \frac{c}{2}\left(k + \sqrt{k^2 - 4\zeta^2}\right) \\ x_0 = -\frac{d}{c} \pm \frac{c}{2}\left(k - \sqrt{k^2 - 4\zeta^2}\right) \end{array}\right. \text{ với } \zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$$

CT5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng IM với I là giao điểm hai đường tiệm cận.

Giải.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right) \in (C)$. Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k = y'(x_0) = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}$

Điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Đường thẳng IM có hệ số góc $k_1 = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a}{c}}{x_0 + \frac{d}{c}} = \frac{-(ad-bc)}{(cx_0+d)^2}$

Để tiếp tuyến tại M và đường thẳng IM vuông góc nhau

$$k.k_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}.\frac{-(ad-bc)}{(cx_0+d)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 = (cx_0+d)^4 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} = -\frac{d}{c} \pm \zeta} \text{ với } \zeta = \sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} > 0$$

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Nhận xét: **CT4** và **CT3** là một để tiếp tuyến tại M vuông góc với IM khi $IM_{\min}$

CT6: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(C)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm AB bất kì nằm trên hai nhanh khác nhau của đồ thị được xác định bởi công thức $AB=2\sqrt{2}\xi$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 8. ***(Trường THPT Chu Văn An – Gia Lai lần 2 năm 2017)*** Cho đồ thị $(C):y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Biết rằng, có hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) và cách đều hai trục tọa độ. Giả sử các điểm đó lần lượt là M và N. Tìm độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN=4\sqrt{2}$ **B.** $MN=2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{5}$ **D.** $MN=3$

Giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$ điểm thuộc (C) và cách đều hai trục tọa độ.

$\Leftrightarrow |x_0|=|y_0|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=y_0 \\ x_0=-y_0 \end{array}\right.$

+ Nếu $x_0=y_0$ thì ta có $x_0=\dfrac{x_0-3}{x_0+1}\Leftrightarrow x_0(x_0+1)=x_0-3\Leftrightarrow x_0^2=-3$ (vô nghiệm)

+ Nếu $x_0=-y_0$ thì ta có $-x_0=\dfrac{x_0-3}{x_0+1}\Leftrightarrow -x_0^2-2x_0+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M(1;-1) \\ x_0=-3\Rightarrow y_0=3\Rightarrow N(-3;3) \end{array}\right.\Rightarrow MN=\sqrt{(-3-1)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}$ (C). Trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\dfrac{1}{5}$ khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang

A. Một điểm **B.** Hai điểm **C.** Ba điểm **D.** Bốn điểm

Giải:

Gọi đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là d_1,d_2

Điểm $M\in(C)$ nên $M\left(x;\dfrac{x+2}{x-3}\right)$ với $y=\dfrac{x+2}{x-3}$

Ta có $d(M,d_1)=|x-3|$, $d(M,d_2)=\left|\dfrac{x+2}{x-3}-1\right|=\left|\dfrac{5}{x-3}\right|$

Theo bài ra ta có $|x-3|=\dfrac{1}{5}\left|\dfrac{5}{x-3}\right|\Leftrightarrow (x-3)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $M_1(4;6)$ hoặc $M_2(2;-4)$. Chọn đáp án B

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

Áp dụng công thức $d_1=\dfrac{1}{5}d_2\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\zeta\sqrt{\dfrac{1}{5}}=3\pm 1$ với $\zeta=\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}=\sqrt{5}>0$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 10. ***(Trường THPT Chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017)*** Trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm cách đều hai đường tiệm cận của nó

A. 0 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Giải.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Gọi $M\left(m;\dfrac{m+1}{m-2}\right)\in(C)(m\neq 2)$.

Khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận $x=2$ và $y=1$ là $d_1=|m-2|;d_2=\left|\dfrac{m+1}{m-2}-1\right|=\dfrac{3}{|m-2|}$

Theo giả thiết hai khoảng cách này bằng nhau khi và chỉ khi

$\Leftrightarrow d_1=d_2\Leftrightarrow|m-2|=\dfrac{3}{|m-2|}\Leftrightarrow|m-2|=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{3}$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn bài toán là $M_1\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right),M_2\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

Chọn đáp án D

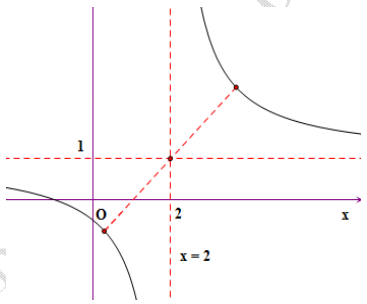
Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

- Áp dụng công thức $d_1=d_2\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\zeta=2\pm\sqrt{3}$ với $\zeta=\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}=\sqrt{3}>0$

Chọn đáp án D.

- Điểm cách đều hai đường tiệm cận là các điểm thuộc đường phân giác của hai đường tiệm cận. Từ đồ thị hàm số dễ thấy số giao điểm của đường phân giác hai tiệm cận và đồ thị hàm số là 2.

Chọn đáp án D. (hình minh họa)



Dạng 5. Tìm điểm liên quan tới max – min

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho khoảng cách AB ngắn nhất

a. Phương pháp giải:

- Giả sử (C) có tiệm cận đứng $x=a$. Do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Cho nên gọi hai số α,β là hai số dương
- Nếu A thuộc nhánh trái $x_A<a\Rightarrow x_A=a-\alpha<a\in(C)$ và B thuộc nhánh phải $x_B>a\Rightarrow x_B=a+\beta>a\in(C)$
- Tính $y_A=f(x_A);y_B=f(x_B)$. Sau đó tính $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=\left[(b+\beta)-(a-\alpha)\right]^2+(y_B-y_A)^2$
- Khi đó AB có dạng $AB^2=g\left[(a+b);\alpha+\beta;\alpha.\beta\right]$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có kết quả cần tìm

Bài toán tổng quát 2: Cho đồ thị (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm trên (C) điểm M sao cho

* Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất

* Khoảng cách từ M đến I (là giao hai tiệm cận) là nhỏ nhất

b. Phương pháp giải:

✧ Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất

- Gọi $M(x;y)$ với $y=f(x)$ thì tổng khoảng cách từ M đến hai trục là $d\Rightarrow d=|x|+|y|$
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục, để suy ra cách tìm GTLN – GTNN của d

Chú ý: Khi thay hai trục tọa độ bằng bằng hai tiệm cận thì sử dụng BĐT cosi

✧ Khoảng cách từ M đến I (là giao hai tiệm cận) là nhỏ nhất

Cô Lương Văn Huy - LTĐH Thanh 0969141404

- Gọi $M(x;y)$ với $y=f(x)$
- Tìm tọa độ của hai tiệm cận $I(a;b)$
- Tính khoảng cách *IM* bằng cách: $\overrightarrow{IM}=(x-a;y-b)\Rightarrow IM^2=(x-a)^2+(y-b)^2=g(x;a,b)$
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN – GTNN của hàm số ta có kết quả

Bài toán tổng quát 3: Cho đường cong (*C*) và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$. Tìm điểm *I* trên (*C*) sao cho khoảng cách từ *I* đến *d* là ngắn nhất

c. Phương pháp giải.

- Gọi I thuộc (C) $\Rightarrow I(x_0;y_0)$ với $y_0=f(x_0)$
- Tính khoảng cách từ *I* đến *d*: $g(x_0)=h(I;d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y=g(x_0)$, để tìm ra min

Tương tự: Khi thay đường thẳng *d* bằng tiếp tuyến của (*C*) tại điểm *M* thì làm tương tự

Chú ý:

- Các bài toán khác liên quan tới Max – min thì làm tương tự (bằng cách biến đổi về một biểu thức chứa hoành độ, từ đó dùng BĐT cosi hoặc khảo sát hoặc các kiến thức về điểm và đường thẳng trong hình học giải tích trong mặt phẳng)
- Các bài toán liên quan tới giao điểm hai đường tiệm cận ta chỉ xét với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;ad-bc\neq 0)$ khi đó $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ còn các hàm phân thức khác không xét vì nằm trong chương trình giảm tải.

d. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}\ (C)$. Tìm trên (*C*) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho *AB* ngắn nhất. Tính tổng hoành độ các điểm A,B.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Giải.

Viết lại (C) ta có $y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$

Gọi *A* thuộc nhánh trái $x_A<3$ với số $\alpha>0$

Đặt $x_A=3-\alpha<3\Leftrightarrow y_A=1+\dfrac{6}{x_A-3}=1+\dfrac{6}{3-\alpha-3}=1-\dfrac{6}{\alpha}\quad(1)$

Tương tự *B* thuộc nhánh phải $x_B>1$ với số $\beta>0$

Đặt $x_B=3+\beta;\Rightarrow y_B=1+\dfrac{6}{x_B-3}=1+\dfrac{6}{3+\beta-3}=1+\dfrac{6}{\beta}\quad(2)$

Vậy $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=\left[(3+\beta)-(3-\alpha)\right]^2+\left[\left(1+\dfrac{6}{\beta}\right)-\left(1-\dfrac{6}{\alpha}\right)\right]^2$

$=(\alpha+\beta)^2+36\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2\geq(\alpha+\beta)^2+36\left(\dfrac{4}{\alpha+\beta}\right)^2\geq 2\sqrt{(\alpha+\beta)^2.36\left(\dfrac{4}{\alpha+\beta}\right)^2}=48$

$\Rightarrow AB_{\min}=4\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha+\beta=\dfrac{24}{\alpha+\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha+\beta=\pm 2\sqrt{6}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\sqrt{6}$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Do đó ta tìm được hai điểm $A\left(3-\sqrt{6};1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right);B\left(3+\sqrt{6};1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

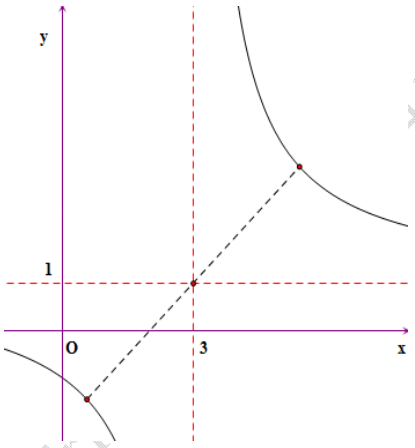
Vậy tổng hoành độ các điểm AB bằng 6. Chọn đáp án D

Chú ý: Nếu câu hỏi là độ dài $AB_{\min}$ ta sử dụng công thức tính nhanh

$AB=2\sqrt{2}\xi=4\sqrt{3}$ với $\zeta=\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}=\sqrt{6}$

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán theo hình học như sau.

Hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số thỏa mãn *AB ngắn nhất* thì A,B là giao điểm của đồ thị hàm số và đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận (hình minh họa).



Phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận của đồ thị hàm số là $d_1:y=x-2$ và $d_2:y=-x+4$. Hoành độ giao điểm d_1 và đồ thị hàm số (C) là nghiệm phương trình

$$x-2=\frac{x+3}{x-3}\Leftrightarrow x^2-6x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{6}\\x=3+\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Dễ thấy d_2 và (C) không có giao điểm.

Vậy tổng hoành độ giao điểm là 6. Chọn đáp án D

Ví dụ 12. ***(Trường THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu lần 1 năm 2017)*** Cho (C) là đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất:

A. $(1;1)$ **B.** $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

C. $\left(1-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$ **D.** $\left(1+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$

Giải.

Từ đồ thị $y=\frac{x+1}{x-2}\to TCN:y=1;TCĐ:x=2$.

Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$, với $y_0=\frac{x_0+1}{x_0-2}$

Theo bài ra ta có tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là

$$d=\left|x_0-2\right|+\left|y_0-1\right|=\left|x_0-2\right|+\left|\frac{3}{x_0-2}\right|\overset{\text{cosi}}{\geq}2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\left(x_0-2\right)^2=3\to\left[\begin{array}{l}x_0=2+\sqrt{3}\\x_0=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$ nên chọn đáp án B

Chú ý: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta có thể làm như sau:

Cách 1: Tự luận kết hợp máy tính

Nhập nhanh

$$d_1+d_2=\left|x-2\right|+\left|\frac{x+1}{x-2}-1\right|\xrightarrow[x=1;x=1+\sqrt{3};x=1-\sqrt{3};x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}]{Calc}4;\frac{9+\sqrt{3}}{2};\frac{9-\sqrt{3}}{2};2\sqrt{3};2\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{D}$$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì +1404

$d=(d_1+d_2)_{\min}=2\zeta \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\zeta$ với $\zeta=\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}=\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}d_{\min}=6\\x_0=2\pm\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{D}$

Cách 3: Áp dụng phương pháp hình học tương tự **ví dụ 11**.

Phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận là $d_1: y=x-1$ và $d_2: y=-x+3$.

Hoành độ giao điểm d_1 và đồ thị (C) là nghiệm phương trình

$x-1=\dfrac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$ nên chọn đáp án B

Dễ thấy d_2 không cắt đồ thị.

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (*C*). Tính tích tung độ các điểm *M* trên sao (*C*) cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (*C*) tại *M* là lớn nhất.

A. 4 **B.** 1 **C.** -1 **D.** $4+2\sqrt{3}$

Giải:

Giả sử $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại *M* có phương trình:

$y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\dfrac{3}{x_0+1}\Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$d=\dfrac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$

Theo bất đẳng thức Côsi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách *d* lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Nên tích các tung độ bằng 1. Chọn đáp án B

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

Áp dụng công thức $x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\zeta=-1\pm\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2\pm\sqrt{3}$ với $\zeta=\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}=\sqrt{3}>0$

Chọn đáp án B.

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=2-\dfrac{1}{x+1}(C)$. Tìm tổng các hoành độ của điểm *M* thuộc đồ thị (*C*) sao cho khoảng cách từ *M* đến đường thẳng $\Delta: x-4y+9=0$ có giá trị nhỏ nhất

A. -2 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -3

Giải:

Giả sử điểm $M\left(m;2-\dfrac{1}{m+1}\right)\in(C)$, với $m\ne-1$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Khi đó $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|m-4\left(2-\dfrac{1}{m+1}\right)+9\right|}{\sqrt{17}}=\dfrac{\left|m+1+\dfrac{4}{m+1}\right|}{\sqrt{17}}=\dfrac{\left|m+1\right|+\dfrac{4}{\left|m+1\right|}}{\sqrt{17}}\overset{\cos i}{\geq}\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow\left|m+1\right|=\dfrac{4}{\left|m+1\right|}\Leftrightarrow\left|m+1\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\Rightarrow M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\\ m=-3\Rightarrow M\left(-3;\dfrac{5}{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài ra là $M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-3;\dfrac{5}{2}\right)$

Vậy tổng các hoành độ của điểm M là bằng -2. Chọn đáp án A

Dạng 6. Bài toán liên quan đến tiếp tuyến

a. Phương pháp:

Bài toán liên quan đến tiếp tuyến rất phong phú và đa dạng nhưng chủ yếu vẫn xoay quanh phương trình tiếp tuyến, hệ số góc của tiếp tuyến. Do đó các em cần phải xem lại kiến thức phần tiếp tuyến.

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 15. ***(Trường THPT Chuyên Hà Giang năm 2017)*** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M trên (C) mà tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc nhỏ nhất

A. $M\left(2;-\dfrac{5}{3}\right)$ **B.** $M\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ **C.** $M\left(\dfrac{5}{3};2\right)$ **D.** $M\left(-\dfrac{5}{3};2\right)$

Giải.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x;y\right)$ là $k=y'\left(x\right)=x^2-4x+3$

$=\left(x-2\right)^2-1\geq-1\Rightarrow k_{\min}=-1\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=\dfrac{5}{3}\Rightarrow M\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$

Nhận xét:

- Tiếp tuyến của hàm bậc ba có hệ số góc lớn nhất khi $a<0$ và nhỏ nhất $a>0$ và có hoành độ $x=-\dfrac{b}{3a}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\\ k=y'\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\end{array}\right.$. Đây chính là công thức tính nhanh
- Có thể thử đáp án bằng cách kiểm tra điểm $M\in\left(C\right)$ và hệ số góc min bằng cách nhập $k=\dfrac{d\left(\dfrac{1}{3}X^3-2X^2+3X+1\right)}{dx}\left|x=X\xrightarrow[X=\frac{5}{3}]{Calc}-1\right.$

Ví dụ 16. ***(Trường THPT Chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017)*** Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d:y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

A. $\left(0;1\right)$ và $\left(2;-3\right)$ **B.** $\left(1;0\right)$ và $\left(-3;2\right)$ **C.** $\left(-3;2\right)$ **D.** $\left(1;0\right)$

Giải.

Cách 1. Tự luận

Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{x_0+1}\right)\in\left(C\right)$. Tiếp tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=y'\left(x_0\right)=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}$

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Đường thẳng d có hệ số góc $k'=\frac{1}{2}$. Để tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng d

$\Leftrightarrow k=k'\Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (x_0+1)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1\Rightarrow y_0=0 \\ x_0=-3\Rightarrow y_0=2 \end{array}\right.$. Chọn đáp án B

Cách 2. Thử đáp án.

Vì $\left\{\begin{array}{l} M\in(C) \\ k=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Nhập $\frac{X-1}{X+1}:\frac{d\left(\frac{X-1}{X+1}\right)}{dx}\Big|_{x=X}\xrightarrow[X=1;X=-3]{Cacl}\left[\begin{array}{l} y=0;y=2 \\ k=\frac{1}{2} \end{array}\right.\Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 17. ***(Trường THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là bằng nhau

A. $M(0;1)$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;\frac{3}{2}\right) \\ M\left(2;\frac{5}{3}\right) \end{array}\right.$ **C.** $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;1);\ M(-2;3) \\ M\left(1;\frac{3}{2}\right) \end{array}\right.$

Giải.

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)$ với $y_0=\frac{2x_0+1}{x_0+1}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ là

$y=k(x-x_0)+y_0=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}$

$\Rightarrow d:\frac{x}{(x_0+1)^2}+\frac{2x_0+2x_0+1}{(x_0+1)^2}-y=0$

Theo bài ra ta có khoảng cách từ điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến đường thẳng d là bằng nhau

$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{(x_0+1)^2}-4\right|}{\sqrt{\frac{1}{(x_0+1)^4}+1}}=\frac{\left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{(x_0+1)^2}+2\right|}{\sqrt{\frac{1}{(x_0+1)^4}+1}}\Leftrightarrow \left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{(x_0+1)^2}-4\right|=\left|\frac{2x_0^2+2x_0+3}{(x_0+1)^2}+2\right|$

Giải phương trình trên ta có $x_0=0, x_0=-2, x_0=1$. Chọn đáp án D

Ví dụ 18. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải.

Viết lại hàm số đã cho $y=2-\frac{3}{x+2}$, với $I(-2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận

Xét $M(a;b)\in(C)\Rightarrow b=2-\frac{3}{a+2};(a\neq -2)$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là $k_1=y'(a)=\frac{3}{(a+2)^2}$

Cô. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Hệ số góc của IM là $k_2 = \dfrac{b-2}{a+2} = \dfrac{-3}{\overline{a+2}} = \dfrac{-3}{(a+2)^2}$

Theo đề $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow (a+1)^4 = 9 \Leftrightarrow a+1 = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2+\sqrt{3} \Rightarrow b = 2-\sqrt{3} \\ a = -2-\sqrt{3} \Rightarrow b = 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy các điểm phải tìm là $\left(-2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),\left(-2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$. Chọn đáp án C

Nhận xét: Để giải nhanh theo kiểu trắc nghiệm ta làm như sau

Áp dụng công thức $x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \zeta = -2 \pm \sqrt{3}$ với $\zeta = \sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|} = \sqrt{3} > 0$

Chọn đáp án C.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. ***(Trường THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu lần 1 năm 2017)*** Tìm điểm M thuộc đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2$ biết hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng 9:

A. $M(1;6), M(3;2)$ **B.** $M(1;-6), M(-3;-2)$

C. $M(-1;-6), M(-3;-2)$ **D.** $M(-1;-6), M(3;-2)$

Câu 2. ***(Trường THPT Chuyên Hưng Yên lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$. Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng 1.

A. $M(1;0)$ hoặc $M(-1;2)$. **B.** $M(1;0)$.

C. $M(2;-1)$. **D.** $M(0;1)$ hoặc $M(2;-1)$.

Câu 3. ***(Trường THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội lần 2 năm 2017)*** Tìm tất cả những điểm thuộc trục hoành cách đều hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

A. $M(-1;0)$ **B.** $M(1;0); O(0;0)$ **C.** $M(2;0)$ **D.** $M(1;0)$

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (*C*). Tìm tọa độ điểm *M* có hoành độ dương thuộc (*C*) sao cho tổng khoảng cách từ *M* đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

A. $M(2;2)$ **B.** $M(0;-1)$ **C.** $M(1;-3)$ **D.** $M(4;3)$

Câu 5. Hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x+1}$ có đồ thị (C). Trên (C) có bao nhiêu điểm có tọa độ là những số nguyên dương

A. 2 điểm **B.** 3 điểm **C.** 4 điểm **D.** 5 điểm

Câu 6. Cho hàm số $y = x(x^2 - 1)$ có đồ thị (*C*). Trên (*C*) có hai điểm M, N phân biệt sao cho $MN = 2$ và các tiếp tuyến với (*C*) tại hai tiếp điểm M, N là song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $x_M + x_N = 0$ **B.** $x_M < x_N$ **C.** $x_M + x_N = 1$ **D.** $x_M = x_N$

Câu 7. Hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm trên (C) có tổng khoảng cách của 2 tiệm cận đến (C) bằng 4

A. $(2;5), (0;-1), (4;3), (-2;1)$ **B.** $(2;5), (0;-1)$

C. $(4;3), (-2;1)$ **D.** $(2;5), (4;3)$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (*C*). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (*C*) sao cho hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (*C*) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \dfrac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$ có đồ thị (*C*). Tìm điểm *M* trên (*C*) sao cho khoảng cách từ *M* đến gốc tọa độ là ngắn nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} M_1(3;-1) \\ M_2\left(4;\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M_1\left(-3;\dfrac{13}{5}\right) \\ M_2(-1;3) \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M_1(1;5) \\ M_2(3;-1) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M_1(3;-1) \\ M_2(-1;3) \end{array}\right.$

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm tọa độ điểm *M* thuộc (C), biết tiếp tuyến tại *M* cắt hai trục *Ox*, *Oy* tại hai điểm *A*, *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $M_1(1;1); M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $M_1(1;1); M_2\left(\frac{1}{2};-2\right)$

C. $M_1(1;-1); M_2\left(-\frac{1}{2};-2\right)$ **D.** $M_1(1;1); M_2\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+2}$ có I là giao điểm của hai tiệm cận. Giả sử điểm M thuộc đồ thị sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với IM. Khi đó điểm M có tọa độ là:

A. $M(0;-1)$ hoặc $M(-4;3)$ **B.** $M(-1;-2)$ hoặc $M(-3;5)$

C. $M(0;-1)$ **D.** $M(0;1)$ hoặc $M(-4;3)$

Câu 12. Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Điểm M thuộc (C) thì tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M vuông góc với đường $y=4x+7$. Tất cả điểm M có tọa độ thỏa mãn điều kiện trên là:

A. $M\left(1;\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $M\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ **D.** $M\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(3;\frac{3}{2}\right)$

Câu 13. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $M(-1;-4)$ **B.** $M(1;4)$ **C.** $M(-1;2)$ **D.** Đáp số khác

Câu 14. ***(Trường THPT Ninh Giang năm 2017)*** Tìm trên đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

A. $M(4;3)$ hoặc $M(2;5)$. **B.** $M\left(-4;\frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2;5)$.

C. $M(4;3)$ hoặc $M(-2;1)$. **D.** $M\left(-4;\frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2;1)$.

Câu 15. ***(Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017)*** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$. Tổng khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 16. ***(Trường THPT Chuyên ĐHSP lần 5 năm 2017)*** Tìm tất cả các điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có khoảng cách đến trục hoành bằng 1

A. $M(0;-1), N(-2;1)$ **B.** $M(-2;1)$

C. $M(0;-1), N(-1;-1)$ **D.** $M(0;-1)$

Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$. Tính tổng hoành độ các điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng -9.

A. -2 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Đáp số khác

Câu 18. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Tính tổng tung độ hai điểm M, N thuộc đồ thị (C) sao cho độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{32}$ và tiếp tuyến của (C) tại M và N song song với nhau

A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -3

Câu 19. Cho hàm số $y=(x-2)^2(x+1)$ đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm M trên (C) có hoành độ là số nguyên dương sao cho tiếp tuyến tại M của (C), cắt (C) tại hai điểm M và N thoả mãn $MN=3$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 2

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 2x$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) (khác gốc tọa độ O) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng OM

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 21. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm M thuộc (C) sao cho diện tích tam giác MAB bằng 3.

A. $M\left(2;\dfrac{1}{3}\right)$ **B.** $M\left(3;\dfrac{1}{2}\right)$, $M\left(-\dfrac{1}{2};-3\right)$ **C.** $M(-2;3), M(-3;2)$ **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$

Câu 22. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của (C) và trục hoành. Số điểm $M \in (C)$ sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$ là:

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 23. ***(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Số điểm thuộc đồ thị (H) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có tổng các khoảng cách đến hai tiệm cận của (H) nhỏ nhất là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 24. ***(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định năm 2017)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Số điểm thuộc đồ thị (C) cách đều hai tiệm cận của đồ thị (C) là

A. 2 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 1

Câu 25. ***(Trường THPT Năng Khiếu HCM năm 2017)*** Các điểm cố định của $(C_m): x^3 = (m-3)x^2 - (2m-1)x - 3m - 3$ là:

A. $(-1;-6)$ **B.** $(-1;-8)$ và $(3;0)$ **C.** $(-1;-6)$ và $(3;1)$ **D.** $(0;-8)$ và $(1;1)$

Câu 26. ***(Trường THPT Lương Đắc Bằng năm 2017)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm M có tọa độ nguyên thuộc (C) sao cho diện tích tam giác MAB bằng 3.

A. $M\left(2;\dfrac{1}{3}\right)$ **B.** $M\left(3;\dfrac{1}{2}\right), M\left(-\dfrac{1}{2};-3\right)$

C. $M(-2;3), M(-3;2)$ **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$

Câu 27. ***(Trường THPT Hồng Quang lần 4 năm 2017)*** Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$ thỏa mãn hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 28. Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó

A. $a.b = -3$. **B.** $a.b = -1$. **C.** $a.b = 4$. **D.** $a.b = 2$

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B $(x_A > x_B \geq 0)$ là 2 điểm trên (C) có tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 2\sqrt{5}$. Hiệu $x_A - x_B$ bằng.

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 30. Cho đường cong $(C): y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0;m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để qua A kẻ được bốn tiếp tuyến với (C).

Cty : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

A. $m<2\cup m>\frac{10}{3}$. **B.** $m>2$. **C.** $2<m<\frac{10}{3}$. **D.** $m<\frac{10}{3}$.

Câu 31. Cho đồ thị hàm số $(C):y=\frac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M=2-\sqrt{3}$ thuộc (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox, Oy tại A,B. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $S_{\Delta OAB}=1$. **B.** $S_{\Delta OAB}=4$. **C.** $S_{\Delta OAB}=2$. **D.** $S_{\Delta OAB}=2+\sqrt{3}$.

Câu 32. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 33. Cho hàm số $y=\frac{x+b}{ax-2}(ab\neq -2)$. Biết rằng a và b là các giá trị thoả mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;-2)$ song song với đường thẳng $d:3x+y-4=0$. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1

ĐÁP ÁN

1. D	**2. A**	**3. D**	**4. D**	**5. B**	**6. A**	**7. B**	**8. D**	**9. D**	**10. D**
11. A	**12. A**	**13. A**	**14. C**	**15. A**	**16. A**	**17. A**	**18. B**	**19. C**	**20. C**
21. C	**22. C**	**23. B**	**24. A**	**25. B**	**26. C**	**27. A**	**28.**	**29.**	**30.**
28.A	**29.A**	**30.C**	**31.C**	**32.C**	**33.A**				

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

PHẦN 8 - NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ - BẢNG BIẾN THIÊN

A-BÀI TOÁN ĐỒ THỊ

Trong kì thi Tốt nghiệp và xét ĐH - CĐ hiện nay. Bài toán nhận dạng đồ thị, suy từ đồ thị ra hàm số, suy từ hàm số ra đồ thị, các bài toán từ đồ thị đưa ra kết luận ... thường làm các em tốn khá nhiều thời gian và nhầm lẫn.

Để làm tốt dạng này các em cần lưu ý đặc trưng của từng loại hàm, các dấu hiệu nhân biết như cực trị, tiệm cận, nhánh vô cùng, các điểm đặc biệt, kỹ năng lấy đối xứng qua Ox, Oy…

Dưới đây là các dạng đồ thị hàm số và các câu hỏi khai thác liên quan .

- **Dạng 1: Đồ thị hàm số bậc 3 .**
- **Dạng 2: Đồ thị hàm số trùng phương.**
- **Dạng 3: Đồ thị hàm số nhị thức .**
- **Dạng 4: Đồ thị hàm số mũ – logarit.**
- **Dạng 5: Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.**
- **Dạng 6: Các dạng đồ thị hàm số** $y = f'(x)$
- **Dạng 7: Bài toán liên quan đến bảng biến thiên.**

Đặc biệt các em cần nhớ các phép biến đổi đồ thị cơ bản.

DẠNG I : HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

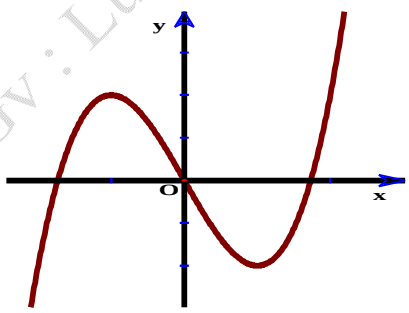
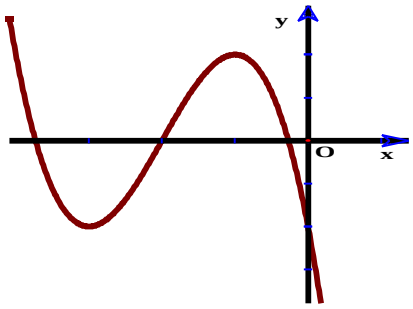
Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

a. Cần nhớ

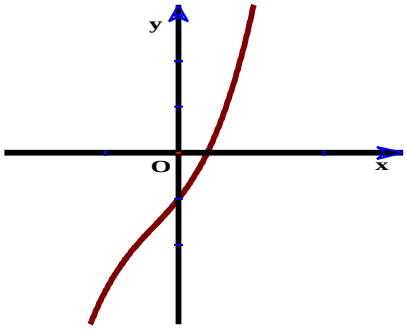
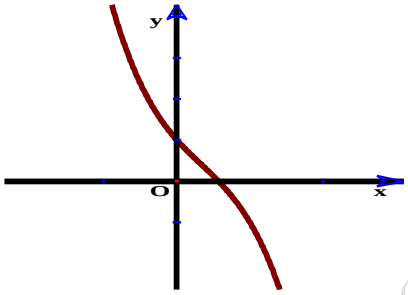
Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y'' = 6ax + 2b$

Số cực trị của hàm bậc ba phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y' = 0$

- Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac \le 0$ khi đó phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số luôn đơn điệu nên không có cực trị
- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$ khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì hàm số có hai cực trị. Theo vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = -\dfrac{c}{3a} \end{cases}$
- Hoành độ điểm uốn là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ hay $x_U = -\dfrac{b}{3a} \Rightarrow y_U = y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$

CÁC DẠNG ĐỒ THỊ	
$a > 0$	$a < 0$
2 cực trị Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ 	2 cực trị Điều kiện $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ 

Gv : Lương Văn Huy - LĐĐT Thanh Trì - HN - 0969141404

Không có cực trị Điều kiện $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$ 	Không có cực trị Điều kiện $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$ 

Trong bài toán nhận dạng đồ thị hàm số bậc 3 các em nên quan sát các đặc điểm sau

+ Nhánh phải đồ thị hàm số (hướng lên trên hay xuống dưới)
+ Giao điểm với trục Oy.
+ Vị trí tương đối của 2 cực trị với trục Oy (cùng phía hay khác phía)
+ Số lượng cực trị.
+ Khoảng cách giữa 2 cực trị, khoảng cách 2 cực trị với gốc tọa độ.
+ Vị trí điểm uốn
+ Nhánh phải đồ thị hàm số: Hướng lên trên thì $a>0$; hướng xuống dưới thì $a<0$
+ Giao điểm với trục *Oy*: $x=0\Rightarrow y=d$ hay tại điểm $(0;d)$ tức là xem *d* nằm phía chiều dương của *Oy* thì $d>0$; chiều âm thì $d<0$
+ Vị trí tương đối của 2 cực trị với trục *Oy*: Nếu cùng phía $x_1x_2=-\dfrac{c}{3a}>0$; khác phía thì $x_1x_2=-\dfrac{c}{3a}<0$
+ Số lượng cực trị: Nếu hai cực trị thì $b^2-3ac>0$; không có cực trị thì $b^2-3ac\le 0$
+ Khoảng cách giữa 2 cực trị, khoảng cách 2 cực trị với gốc tọa độ:

Nếu $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2>0 \\ |x_2|>|x_1| \end{cases}\Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0$; nếu $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2>0 \\ |x_2|<|x_1| \end{cases}\Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0$

+ Vị trí điểm uốn: Toạ độ điểm uốn $U\left(-\dfrac{b}{3a};y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ tức là xem điểm uốn nằm về phía dương *Ox* thì $-\dfrac{b}{3a}>0$; phía âm thì $-\dfrac{b}{3a}<0$

b. Phương pháp chung:

- **Bước 1:** Xem đồ thị hướng lên hay hướng xuống để xác định *a*
- **Bước 2:** Xem giao điểm của đồ thị với trục *Oy* để xác định *d*
- **Bước 3**: Xác định *c* dựa vào vị trí của hai cực trị so với *Oy* hoặc số lượng cực trị
- **Bước 4:** Xác định *b* dựa vào khoảng cách hai cực trị so vơi trục *Ox* hoặc vị trị điểm uốn so với trục *Ox*

Chú ý:

- Với dạng toán cho đồ thị tìm hàm số nếu các bước trên thoả mãn mà vẫn chưa tìm được hàm số thì ta đạo hàm các hàm số đó ra để xem hàm số có cực trị hay không, hoành độ các điểm cực trị là gì?
- Ngoài ra với dạng toán này ta có thể sử dụng máy tính như sau: Tìm toạ độ các điểm mà đồ thị đi qua (Giao điểm, điểm cực trị, điểm uốn) sau đó nhập hàm số và bấm calc thử từng đáp án

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

c. Ví dụ minh hoạ:

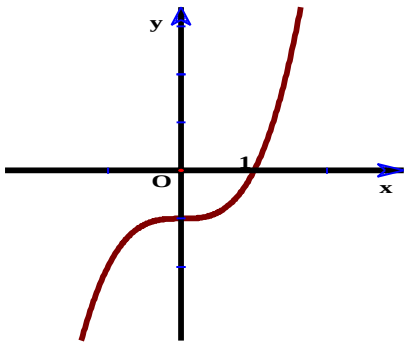
Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $y=x^3-1$

B. $y=x^3+1$

C. $y=-x^3-1$

D. $y=-x^3+1$



Giải.

Nhận thấy nhánh cuối đồ thị hướng lên trên $\longrightarrow a>0$ (Loại C,D)

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $x=1$ nên $x=1$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ (Loại B)

Đáp án A

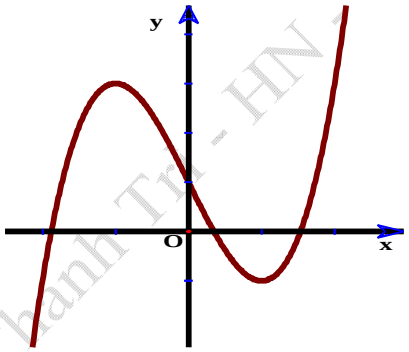
Ví dụ 2 (Đề minh họa của Bộ lần 1): Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=-x^2+x-1$

B. $y=-x^3+3x+1$

C. $y=x^4-x^2+1$

D. $y=x^3-3x+1$



Giải.

Nhận thấy đây là đồ thị hàm bậc 3 nên ta loại ngay phương án A,C.

Nhánh phải của đồ thị hàm số hướng lên trên $\longrightarrow a>0$ (Loại B)

Vậy đáp án là D.

Ví dụ 3 (Đề minh họa của Bộ lần 2) : Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

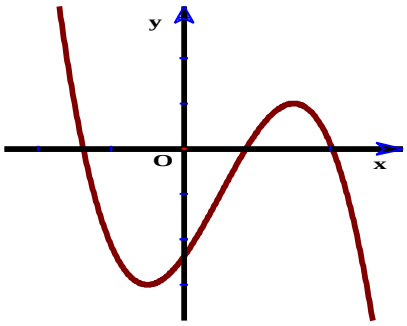
Mệnh đề nào dưới đây đung ?

A. $a<0,b>0,c>0,d<0$

B. $a<0,b<0,c>0,d<0$

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$

D. $a<0,b>0,c<0,d<0$



Giải.

Nhánh phải của đồ thị hướng xuống dưới $\longrightarrow a<0$ (Loại C)

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy tại điểm phía dưới O $\longrightarrow d<0$

Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục Oy

$\longrightarrow x_1x_2<0\longrightarrow a.c<0\xrightarrow{do\,a<0}c>0$ (Loại D) (x_1,x_2 là nghiệm của y')

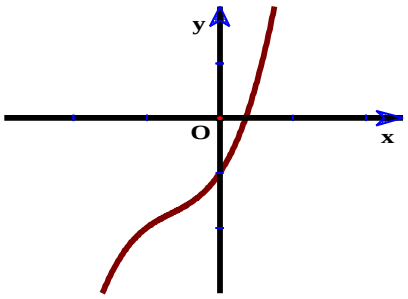
Dựa vào khoảng cách hai điểm cực trị ta suy ra

$x_1+x_2>0\longrightarrow -\dfrac{b}{a}>0\longrightarrow \dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{do\,a<0}b>0$ (Loại B)

Vậy đáp án đúng là A.

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

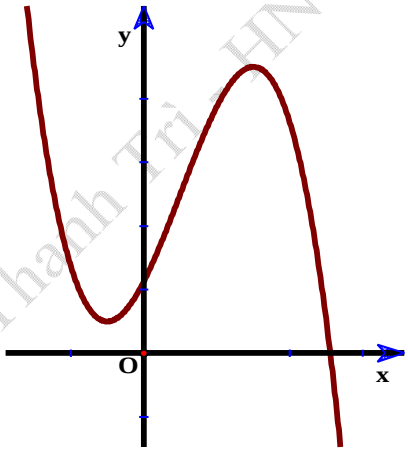
Ví dụ 4 (THPT Phạm Văn Đồng – PHÚ YÊN)
Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d<0$.
B. $a>0,b>0,c>0,d<0$.
C. $a>0,b<0,c<0,d>0$.
D. $a>0,b<0,c>0,d<0$.

Giải.
Nhận thấy nhánh phải của đồ thị hướng lên trên $\longrightarrow a>0$ (Loại A).
Đồ thị hàm số giao với trục tung tại điểm phía dưới Ox $\longrightarrow d<0$ (Loại C)
Hàm số không có cực trị $\longrightarrow b^2-3ac\le 0\longrightarrow 3ac\ge b^2$. Vậy a,c cùng dấu $\longrightarrow c>0$
Hoành độ điểm uốn tại giá trị $x=-\dfrac{b}{3a}>0\xrightarrow{Do\ a>0}b<0$ (Loại B)
Vậy đáp án đúng là D

Ví dụ 5 (Thi thử Vinastudy.vn Lần 4): Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\ne 0)$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định đúng là



A. $\begin{cases}a>0\\d>0\\c<0\\b\in R\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a<0\\d>0\\c<0\\b<0\end{cases}$
C. $\begin{cases}a<0\\d>0\\c>0\\b>R\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a<0\\d>0\\c>0\\b\in R\end{cases}$

Giải.
Nhận thấy nhánh phải đồ thị hàm số hướng xuống dưới $\longrightarrow a<0$ (Loại A)
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại giao điểm có tung độ dương $\longrightarrow d>0$
Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 là nghiệm của $y'(x)=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$.
Hai điểm cực trị nằm về hai phía oy nên $x_1.x_2<0\longrightarrow ac<0\xrightarrow{Do\ a<0}c>0$ (Loại B).
Tổng hoành độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số dương
$\Rightarrow x_1+x_2>0\Rightarrow -\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow ab<0\xrightarrow{Do\ a<0}b>0$
Vậy đáp án đúng là C.

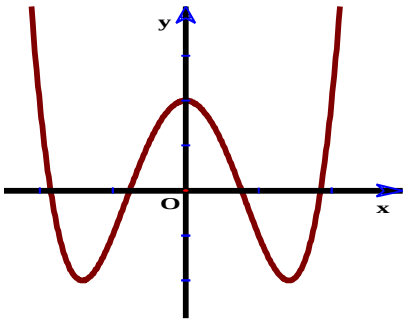
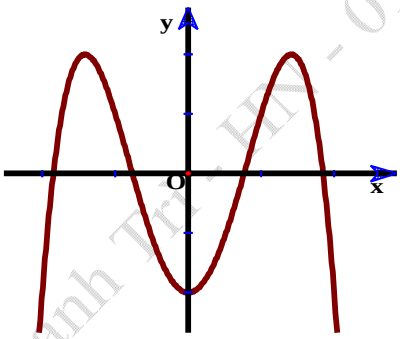
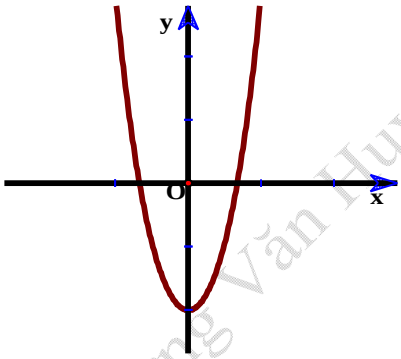
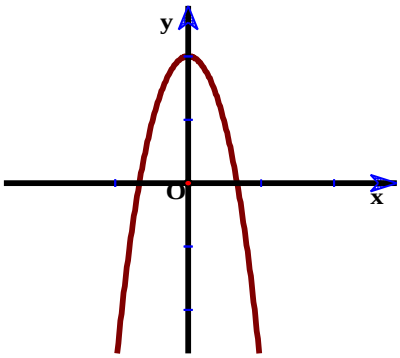
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

DẠNG 2: HÀM TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$.

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

a. Phương pháp:

- Hàm $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$ hoặc có 3 điểm cực trị hoặc có 1 điểm cực trị.
- Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$ (a,b trái dấu).
- Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$

ĐỒ THỊ HÀM SỐ	
$a > 0$	$a < 0$
1 cực đại + 2 cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 	1 cực tiểu + 2 cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 
Chỉ có 1 cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ 	Chỉ có 1 cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ 

Trường hợp đặc biệt nếu a = 0 thì hàm số trở thành $y = bx^2 + c$

+ Nếu $b \neq 0$ hàm số luôn có 1 cực trị.
+ Nếu $b = 0$ hàm số trở thành hàm hằng: y = c

Trong việc xác định hàm trùng phương và đồ thị ta nên quan sát nhánh phải, cực trị, giao điểm với trục Oy, nhánh phải hướng lên hay xuống.

b. Ví dụ minh hoạ:

Cv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

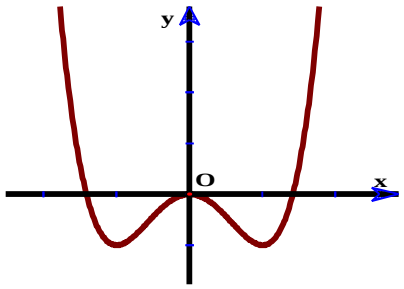
Ví dụ 1 (Đề thi thử Sở GD HN - 2017): Hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho trong các phương án A,B,C,D. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = 2x^2 - x^4$

B. $y = -x^3 + 3x^2$

C. $y = -2x^2 + x^4$

D. $y = x^3 - 2x$



Giải.

Nhận thấy đây là hình dạng của đồ thị hàm số trùng phương nên ta loại ngay phương án B,D.

Nhánh phải của đồ thị hướng lên trên nên $a > 0$ (Loại A)

Vậy đáp án đúng là C.

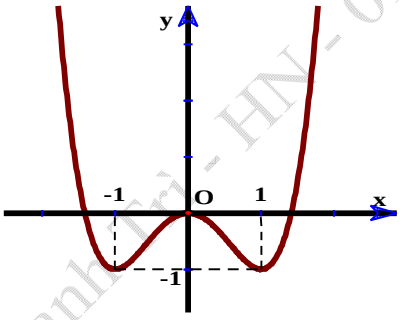
Ví dụ 2 (Thi thử THPT Lương Đắc Bằng - Thanh Hóa -2017): Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = -x^4 + 2x^2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Giải.

Nhận thấy nhánh phải đồ thị hàm số hướng lên trên nên hàm số có $a > 0$ (Loại C,D)

Tại x = 0 thì y = 0 do vậy loại A.

Đáp án đúng là B.

Ví Dụ 3 (THPT TUY PHƯỚC – BÌNH ĐỊNH)

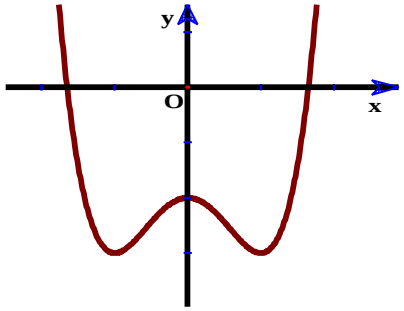
Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như sau Xác định dấu của a; b; c

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Giải.

Nhánh phải đồ thị hướng lên trên nên $\longrightarrow a > 0$

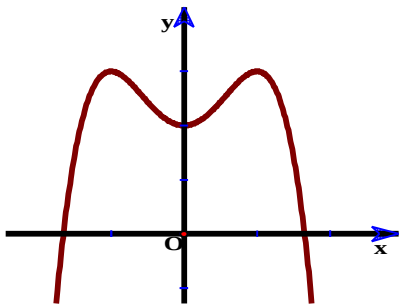
Hàm số có 3 cực trị $\longrightarrow a.b < 0 \xrightarrow{Do\ a>0} b < 0$

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ âm $\longrightarrow c < 0$

Vậy đáp án đúng là A

Gv Lương Văn Huy - LĐDH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 4 (THPT NGÔ SĨ LIÊN) Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

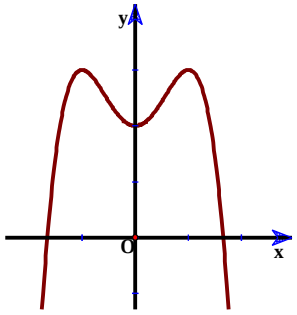


A. $a<0;b>0;c<0$.
B. $a<0;b<0;c<0$.
C. $a>0;b<0;c<0$.
D. $a<0;b>0;c>0$.

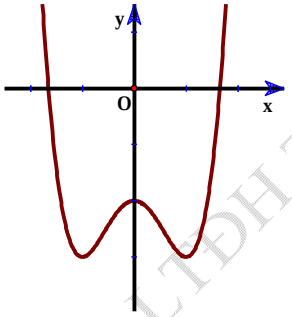
Giải.
Nhánh phải đồ thị hướng xuống dưới $\longrightarrow a<0$
Hàm số có 3 cực trị $\longrightarrow a.b<0 \xrightarrow{Do\ a<0} b>0$
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương $\longrightarrow c>0$
Vậy đáp án đúng là D

Ví dụ 5 (Thi thử Vinastudy.vn lần 3). Biết hàm số $y=ax^4+bx^2+c(a>0,b<0)$. Vậy đồ thị hàm số đã cho phù hợp với hình nào dưới đây ?

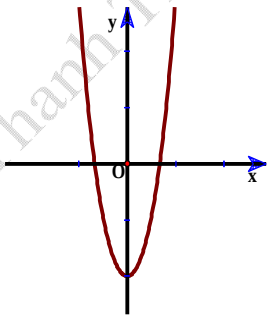
Giải.
Nhận thấy a,b trái dấu vậy hàm số đã cho có 3 cực trị (Loại C,D)
$a>0$ vậy nhánh phải đồ thị hàm số phải hướng xuống dưới (Loại A)
Đáp án đúng là B



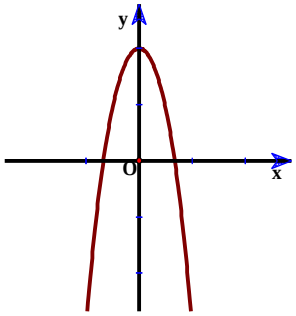
A.



B.

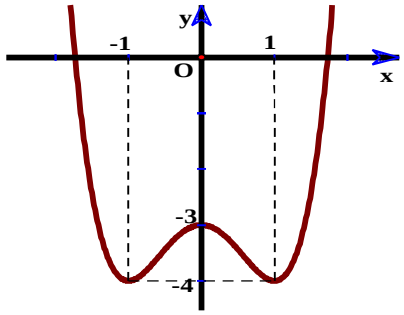


C.



D.

Ví dụ 6 (Thi thử Vinasutudy.vn - Lần 7): Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

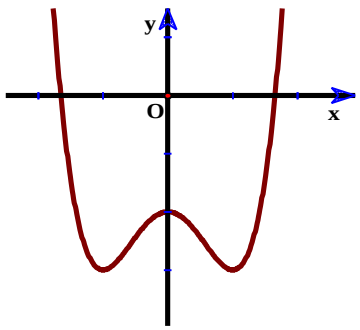


A. $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^2-3$
B. $y=x^4+2x^2-3$
C. $y=x^4-3x^2-3$
D. $y=x^4-2x^2-3$

Giải.
Nhánh phải đồ thị hàm số hướng lên trên $\longrightarrow a>0$ (Loại A)
Hàm số có 3 cực trị $\longrightarrow a.b<0 \xrightarrow{Do\ a>0} b<0$ (Loại B)
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 1 nên x = 1 là nghiệm của y' (Loại C)
Vậy đáp án đúng là D.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 7 (Đề thi THPT 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

B. Phương trình $y'=0$ có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Phương trình $y'=0$ vô nghiệm trên tập số thực.

Giải.

Nhận thấy hàm số có 3 cực trị nên Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm thực phân biệt

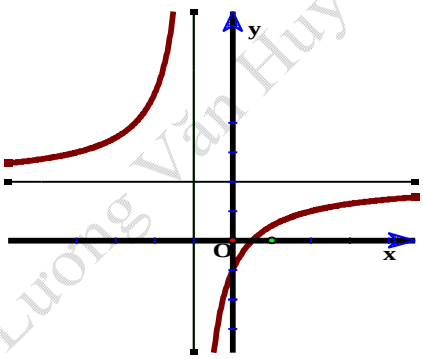
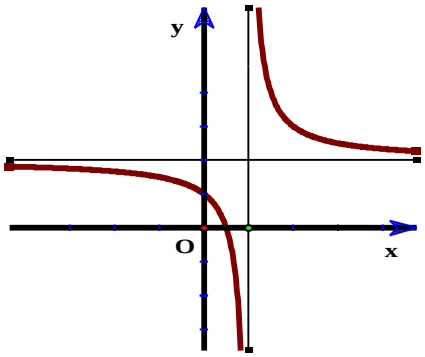
Đáp án đúng là A.

DẠNG 3: HÀM BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

a. Phương pháp:

Hàm bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị và luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên từng khoảng xác định của nó.

ĐỒ THỊ	
$ad-bc>0 \Leftrightarrow y'>0$	$ad-bc<0 \Leftrightarrow y'<0$
	
Nhánh bên trái hướng lên trên **Đồng biến trên từng khoảng xác định**	**Nhánh bên trái hướng xuống dưới** **Nghịch biến trên từng khoảng xác định**

Khi làm bài toán nhận dạng đồ thị các ta cần quan sát các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang (vị trí của chúng so với trục Ox, Oy), các giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox, Oy, hướng các nhánh..

Lưu ý: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

+ Giao với Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

+ Giao với Oy tại điểm có tung độ $y=\frac{b}{d}$

+ Tiệm cận ngang (nếu có) là đường thẳng $y=\frac{a}{c}$

+ Tiệm cận đứng (nếu có) là đường thẳng $x=-\frac{d}{c}$

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1 (Trích đề thi chính thức kỳ thi THPT Quốc Gia 2017). Đường cong ở hình bên là của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các hệ số thực.

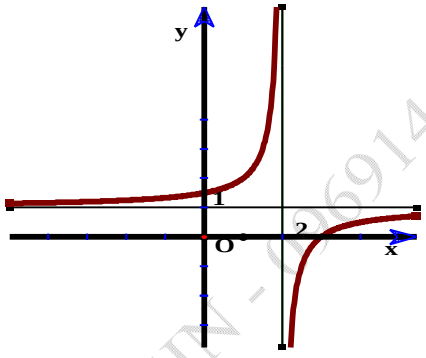
Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $y'>0,\forall x\neq 2$

B. $y'>0,\forall x\neq 1$

C. $y'<0,\forall x\neq 2$

D. $y'<0,\forall x\neq 1$



Giải.

Nhận thấy nhánh trái đồ thị hàm số hướng lên trên nên $\longrightarrow y'>0$.

Đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng $\longrightarrow$ điều kiện $x\neq 2$

Vậy đáp án đúng là A.

Ví dụ 2 (Trích đề thi chính thức kỳ thi THPT Quốc Gia 2017) Đường cong ở hình bên là của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các hệ số thực.

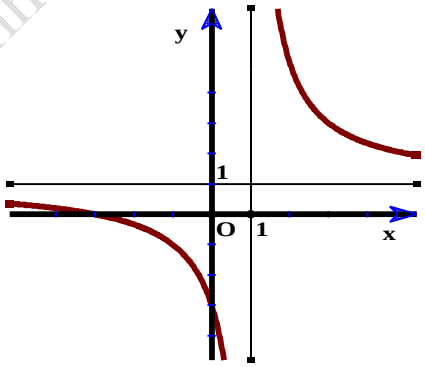
Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $y'>0,\forall x\neq 2$

B. $y'>0,\forall x\neq 1$

C. $y'<0,\forall x\neq 2$

D. $y'<0,\forall x\neq 1$



Giải.

Nhận thấy nhánh trái đồ thị hàm số hướng xuống dưới nên ta có $y'<0$.

Đồ thị nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng $\longrightarrow$ điều kiện $x\neq 1$

Đáp án đúng là D.

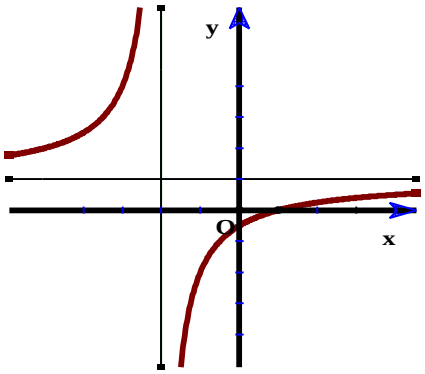
Ví dụ 3 (Trích đề thi thử Sở GD Hà Nội 2017)

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ

Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\begin{cases}ad<0\\bc<0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}ad<0\\bc>0\end{cases}$

C. $\begin{cases}ad>0\\bc<0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}ad>0\\bc>0\end{cases}$



Giải.

Đồ thị cắt Ox tại điểm có hoành độ dương nên ta có $-\frac{b}{a}>0\longrightarrow a.b<0$.(1)

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Tiệm cận ngang của đồ thị nằm phía trên trục ox nên ta có $\frac{a}{c}>0\longrightarrow ac>0$ (2)

Nhân (1) với (2) theo vế ta có $a^2bc<0\longrightarrow bc<0$

Tiệm cận đứng của đồ thị nằm phía bên trái oy nên ta có $-\frac{d}{c}<0\longrightarrow dc>0$ (3)

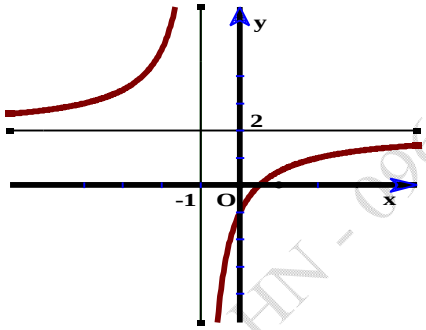
Nhân (2) với (3) theo vế ta có $c^2ad>0\longrightarrow ad>0$

Vậy đáp án đúng là $\begin{cases}ad>0\\bc<0\end{cases}$ (C)

Ví dụ 4 (Trích đề thi thử lần 3 – Bộ GD - 2017) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y=\frac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y=\frac{2x-2}{x-1}$. **D.** $y=\frac{2x+1}{x-1}$.



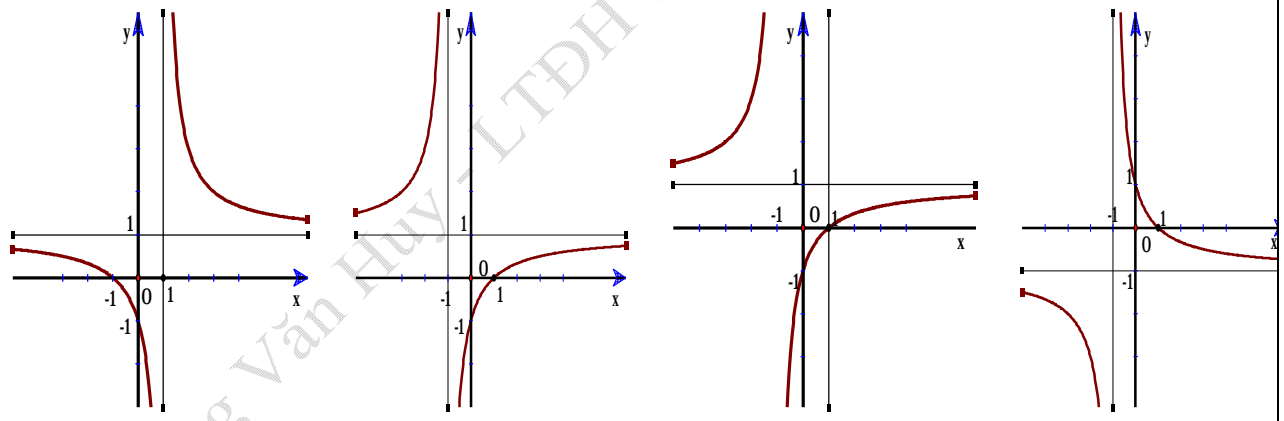
Giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $x=-1$ phải là nghiệm của mẫu (Loại C,D)

Đồ thị hàm số cắt ox tại điểm có hoành độ dương nên nghiệm của tử phải dương. (Loại A)

Vậy đáp án đúng là B.

Ví dụ 5 (Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa) Trong các hình vẽ sau (Hình 1, Hình 2, Hình 3, Hình 4), hình nào biểu diễn đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{-x+1}$



A. Hình 2 **B.** Hình 1 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Giải.

Đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{-x+1}$ có

Tiệm cận đứng $x=1$ (Loại hình 4, hình 2)

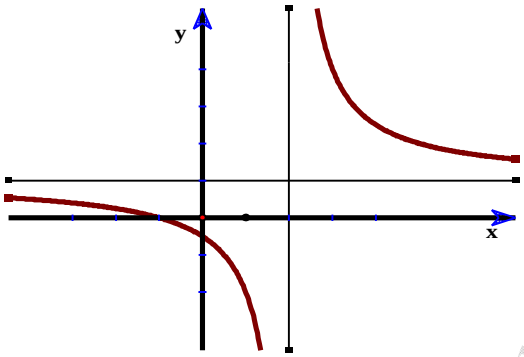
Tiệm cận ngang $y=-1$ (Loại hình 1)

Vậy đáp án đúng là hình 3 (C)

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 6 (Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 1)

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $b>0,c<0,d<0$

B. $b>0,c>0,d<0$

C. $b<0,c>0,d<0$

D. $b<0,c<0,d<0$

Giải.

Giao với Ox tại $x=-\dfrac{b}{a}<0\longrightarrow ab>0\xrightarrow{Do\ a>0}b>0$

Giao với Oy tại $y=\dfrac{b}{d}<0\xrightarrow{b>0}d<0$

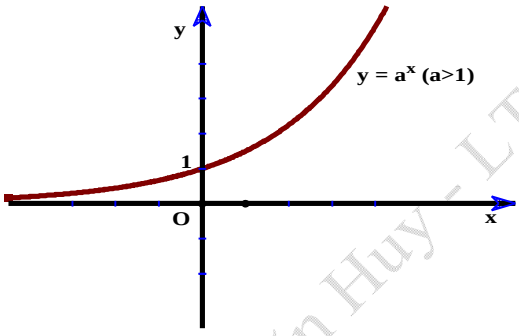
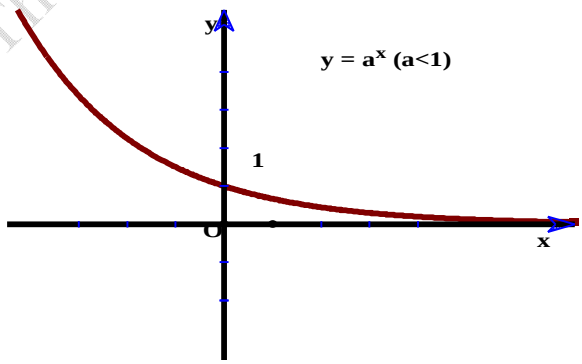
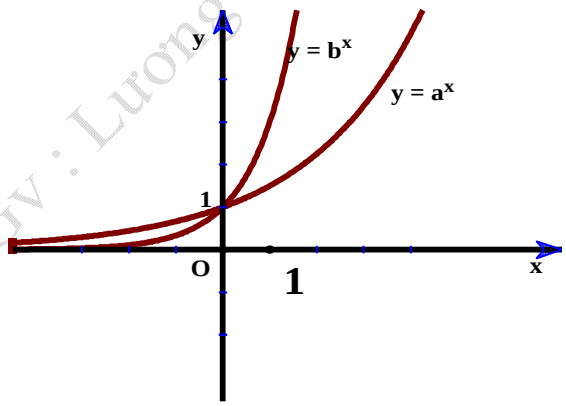
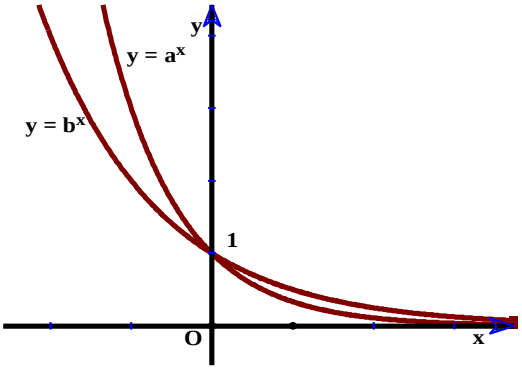
Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0\xrightarrow{a>0}c>0$

Vậy đáp án đúng là B

DẠNG 4: ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ – LOGARIT

a. Phương pháp:

ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=a^x\left(0<a\neq 1\right)$

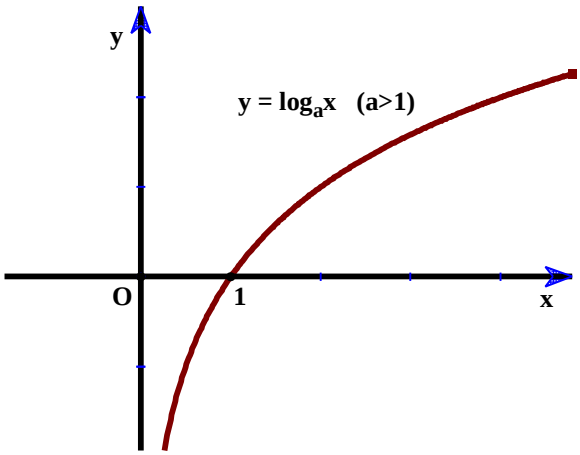
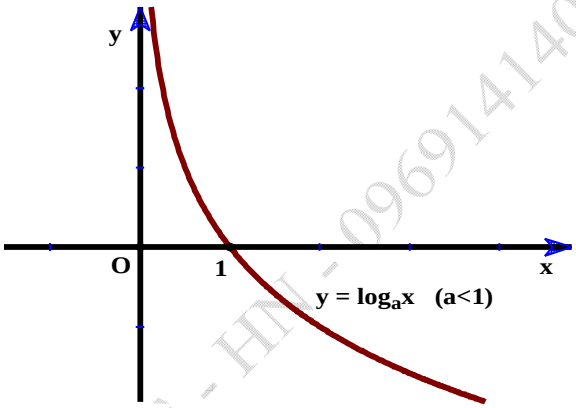
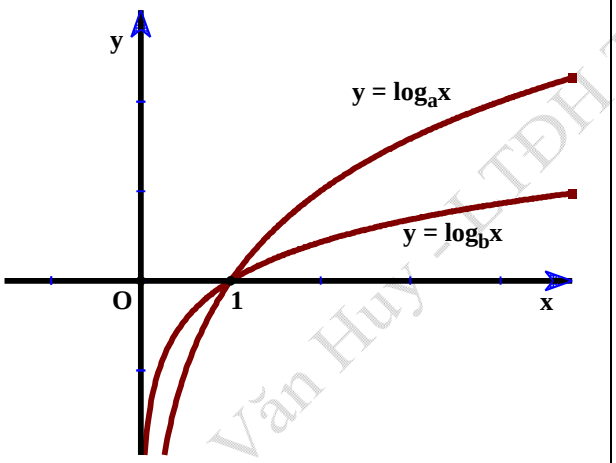
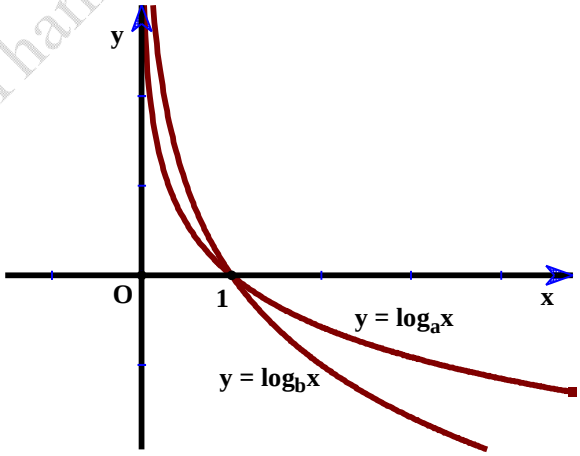
$a>1$	$0<a<1$
	
$1<a<b$	$0<a<b<1$
	

Khi làm bài toán nhận dạng đồ thị hàm số mũ các em cần lưu ý

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

+ Nhánh đồ thị đi lên hay xuống.
+ Vị trí tương đối của các đồ thị so với trục Oy.
+ Đồ thị hàm số mũ nhận trục Ox làm tiệm cận ngang.
+ Đồ thị hàm số mũ không có tiệm cận đứng.
+ Đồ thị hàm số mũ không cắt trục Ox.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=\log_a x (0<a\neq 1)$

$a>1$	$0<a\neq 1$
	
$1<a<b$	$0<a<b<1$
	

Khi làm bài toán đồ thị hàm số logarit ta cần lưu ý

+ Nhánh đồ thị hướng lên trên hay xuống dưới.
+ Vị trí tương đối của các đồ thị so với trục Ox
+ Đồ thị hàm số nhận trục oy làm tiệm cận đứng.
+ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
+ Đồ thị hàm số không cắt trục Oy.

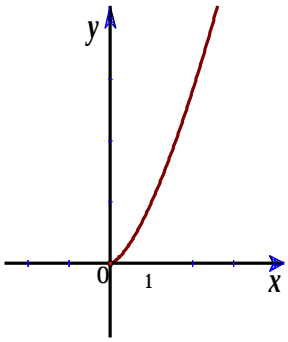
Để thành thạo các kỹ năng xử lý bài tập về đồ thị hàm số mũ, hàm số logarit ta sẽ tiếp cận với một số ví dụ sau đây

b. Ví dụ minh hoạ:

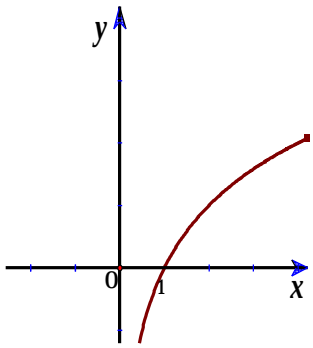
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 1 (Trích đề thi thử lần 3 Bộ GD – 2017) Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$?

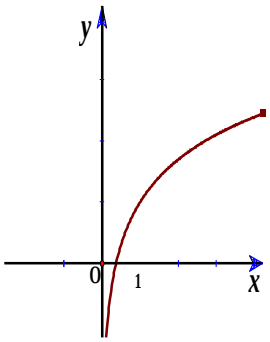
A.



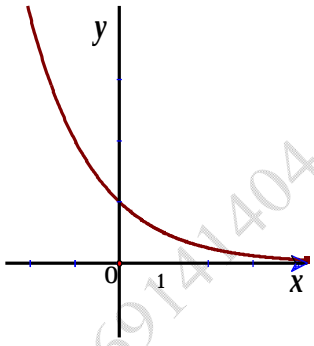
B.



C.



D.



Giải.

Ta có $f'(x)=\ln x+1$

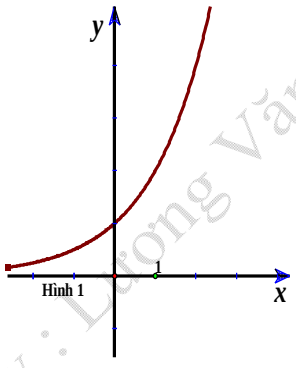
Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục Ox là nghiệm phương trình

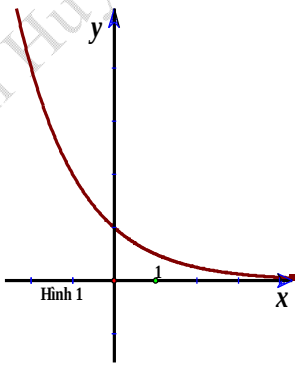
$\ln x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}<1$.

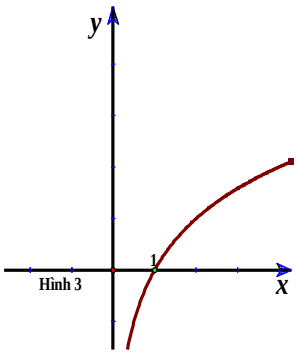
Quan sát đồ thị trong 4 phương án thì phương án C là đúng (Đồ thị cắt Ox tại điểm có x <1)

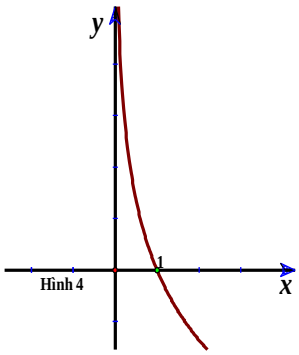
Ví dụ 2 (Trích đề thi thử THPT Hậu Lộc 2 – 2017)

Trong các đồ thị dưới đây, đồ thị nào là dạng của đồ thị hàm số $y=a^x$ với $a>1$?









A. Hình 3 . **B.** Hình 1. **C.** Hình 4. **D.** Hình 2.

Giải.

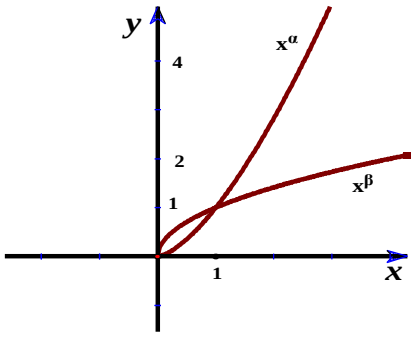
Dựa vào tính chất đồ thị hàm số mũ không cắt trục Ox nên ta loại ngay hình 3 và hình 4.

Do a > 1 nên nhánh của đồ thị hàm số hướng lên trên

Vậy đáp án đúng là hình 1 (Đáp án B).

Ví dụ 3 (Trích đề thi thử THPT Chuyên Bình Long – 2017) Cho a,b là các số thực. Đồ thị các hàm

GV : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



số $y=x^a, y=x^b$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho hình vẽ

A. $0<b<1<a$ **B.** $b<0<1<a$ **C.** $a<0<b<1$ **D.** $0<a<b<1$

Giải.

Kỹ thuật chọn điểm.

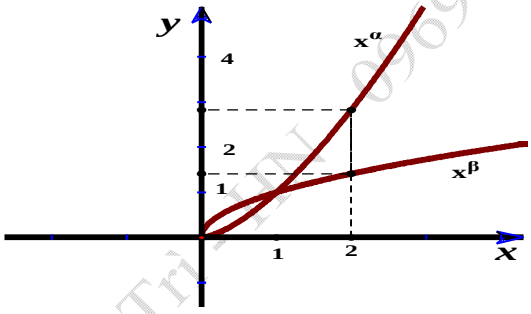
Tại $x=2$ tung độ của đồ thị hàm số

x^b nhỏ hơn 2 vậy $2^b<2\longrightarrow b<1$

x^a lớn hơn 2 vậy $2^a>2\longrightarrow a>1$

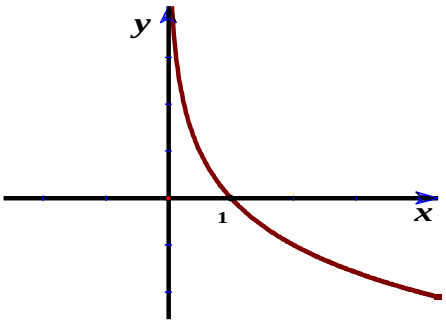
Nhánh các đồ thị hướng lên trên nên ta có $a,b>0$

Vậy $0<b<1<a$ (Đáp án A)



Ví dụ 4 (Trích đề thi thử Sở GD Quảng Nam – 2017)

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số cho ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=2^x$. **B.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

C. $y=\log_2 x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Giải.

Nhận dạng đồ thị là đồ thị hàm số logarit do vậy ta loại phương án A và B.

Nhánh đồ thị hướng xuống dưới nên hàm số logarit phải có cơ số < 1 (Loại C)

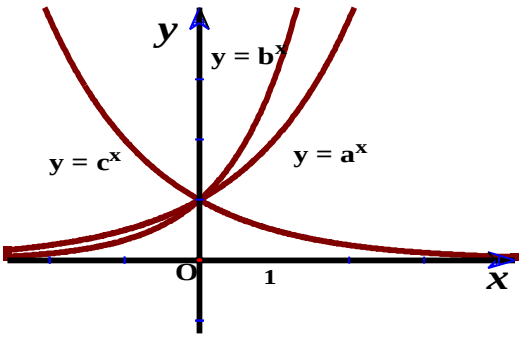
Vậy phương án đúng là D.

Ví dụ 5 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn lần 2 – 2017):

Hình bên là đồ thị của các hàm số

$y=a^x, y=b^x, y=c^x$

$(0<a,b,c\neq 1)$. Kết luận nào sau đây đúng.



A. $a<1<b<c$

B. $c<1<a<b$

C. $c<1<b<a$

D. $1<c<a<b$

Giải.

Nhánh đồ thị hàm số $y=c^x$ đi xuống nên ta có c < 1.

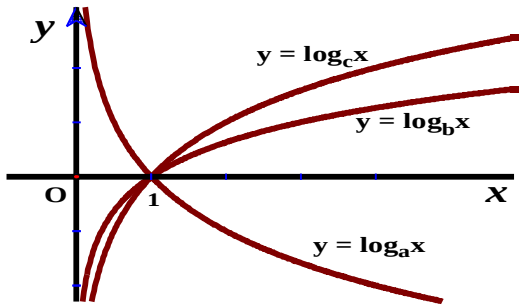
Nhánh của đồ thị hàm số $y=b^x, y=a^x$ đi lên nên $a,b>1$

Nhánh đồ thị hàm số $y=b^x$ gần trục Oy hơn so với đồ thị hàm số $y=a^x$ nên ta có $b>a$

Vậy $c<1<a<b$ (Đáp án B)

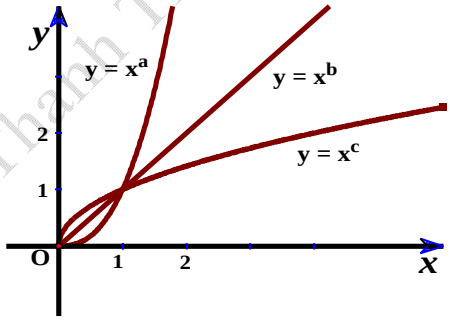
Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 6 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn lần 3 – 2017): Hình bên là đồ thị hàm số của các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x\,(0<a,b,c\neq 1)$
Kết luận đúng là
A. $a<1<c<b$.
B. $1<a<b<c$.
C. $a<1<b<c$.
D. $c<a<1<b$.



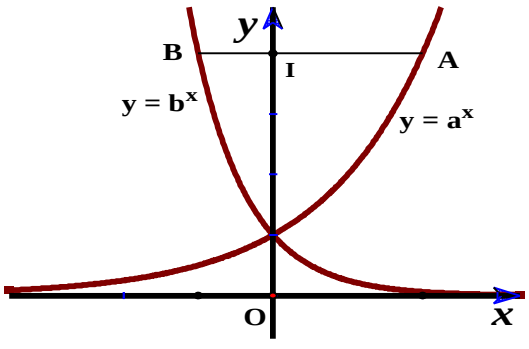
Giải.
Nhánh đồ thị hàm số $y=\log_a x$ hướng xuống dưới trục Ox
Nên ta có $a<1$
Nhánh đồ thị hàm số $y=\log_b x, y=\log_c x$ hướng lên trên trục Ox nên ta có $b,c>1$
Nhánh đồ thị hàm số $y=\log_b x$ sát trục ox hơn so với đồ thị hàm số $y=\log_c x$ nên ta có $b>c$
Vậy ta có $a<1<c<b$ (Đán án A)
Lưu ý: Các em có thể làm theo phương pháp chọn điểm như sau
Chọn x = 2 hoặc x = 3 rồi so sánh các giá trị logarit của các hàm số từ đó suy ra a,b,c

Ví dụ 7 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn lần 4 – 2017) Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y=x^a$, $y=x^b$, $y=x^c$ trên miền $(0;+\infty)$. Hỏi trong các số a, b, c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0;1)$?
A. Số a **B.** Số a và số c
C. Số b **D.** Số c



Giải.
Quan sát đồ thị hàm số ta có $a,b,c>0$
Đồ thị hàm số $y=x^b$ trùng với đường phân giác góc thứ nhất y = x nên b = 1 (Loại b)
Tại x = 2 giá trị của hàm số $y=x^c$ nhỏ hơn 2 nên ta có $2^c<2\longrightarrow c<1$ (Nhận)
Tại x = 2 giá trị của hàm số $y=x^a$ lớn hơn 2 nên ta có $2^a>2\longrightarrow a>1$ (Loại a)
Vậy đáp án đúng là D

Ví dụ 8 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn lần 5 – 2017)
Cho đồ thị hàm số $y=a^x, y=b^x\ (0<a,b\neq 1)$ được biểu diễn bằng hình dưới. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục ox mà cắt các đường $y=a^x, y=b^x$, trục tung lần lượt tại A,B,I thì $2IB=IA$ (hình vẽ dưới). Kết luận đúng là
A. $a^2b=1$ **B.** $a^2b=\frac{1}{2}$
C. $a^2b=2$ **D.** $a^2b=\frac{1}{3}$



Giải.

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Giả sử hoành độ của B , A lần lượt là x_1, x_2 do $2IB = IA$ nên ta có

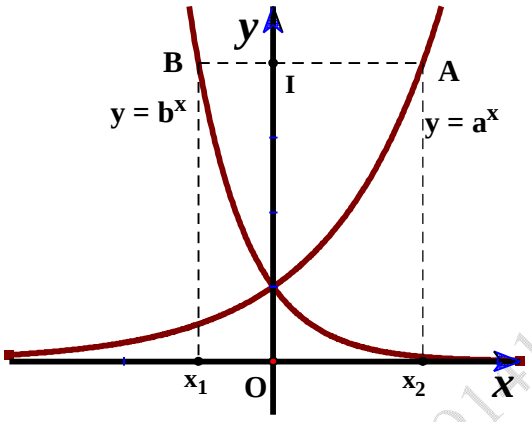
$x_2 = -2x_1$ chọn luôn $x_1 = -1 \longrightarrow x_2 = 2$

Khi đó tung độ của B, A lần lượt là $y = b^{-1}, y = a^2$

Do A,B có tung độ bằng nhau nên

$$a^2 = b^{-1} \longrightarrow a^2 = \frac{1}{b} \longrightarrow a^2.b = 1$$

Vậy đáp án đúng là A.

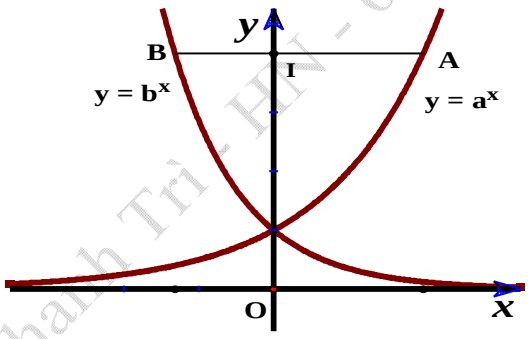


Tất nhiên các em có thể giải theo kỹ thuật tự luận thông thường. Nhưng với hình thức trắc nghiệm thì nên áp dụng những kỹ thuật thật nhanh và đỡ gây tâm lý hay nhầm lẫn

Ví dụ 9 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn lần 6 – 2017) Cho các số thực dương a,b khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = a^x, y = b^x$, trục tung lần lượt tại A,B,I thì $3IB = 2IA$ (hình vẽ dưới). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^3$ **B.** $a^3 = b^2$

C. $3b = 2a$ **D.** $a^3b^2 = 1$



Giải.

Tương tự như ví dụ 8 .

Giả sử hoành độ của B, A lần lượt là x_1, x_2 do $3IB = 2IA$ nên ta có

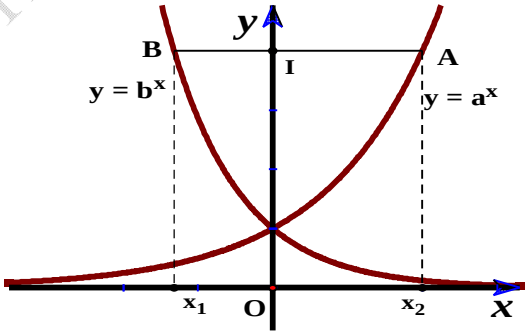
$2x_2 = -3x_1$ chọn luôn $x_1 = -2 \longrightarrow x_2 = 3$

Khi đó tung độ của B, A lần lượt là $y = b^{-2}, y = a^3$

Do A,B có tung độ bằng nhau nên

$$a^3 = b^{-2} \longrightarrow a^3 = \frac{1}{b^2} \longrightarrow a^3.b^2 = 1$$

Vậy đáp án đúng là D



Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

DẠNG 5: ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

DẠNG 5.1. TỪ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)(C)$ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=\left|f(x)\right|(C_1)$

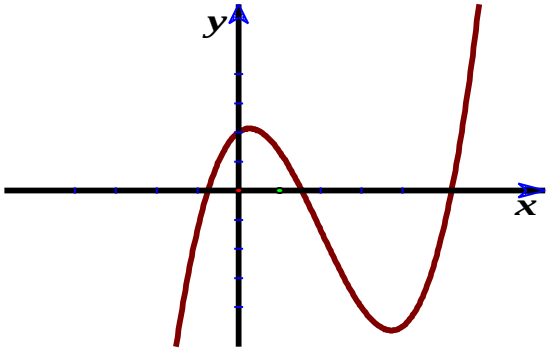
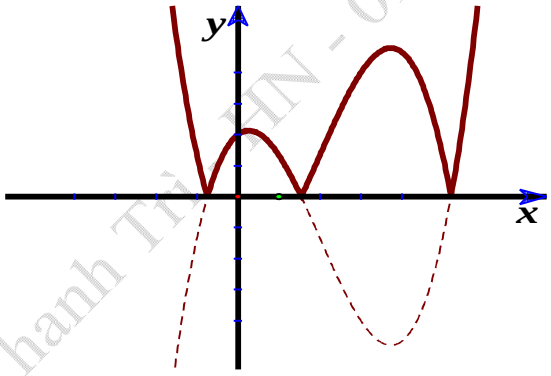
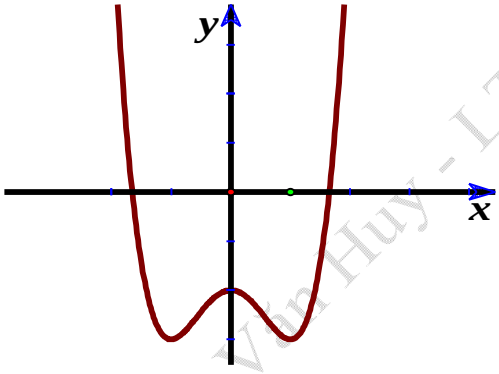
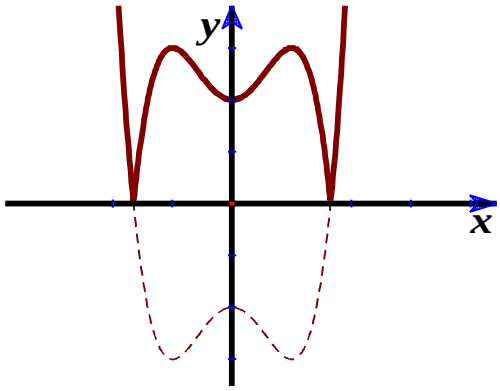
a. Phương pháp:

Ta có $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)\ge 0 \\ -f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)<0 \end{cases}$

Suy ra $\left(G\right)=\left(C_1\right)\cup\left(C_2\right)$ với $\left(C_1\right)$ là phần đồ thị (*C*) nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(C)}\ge 0\right)$, còn $\left(C_2\right)$ là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*C*) nằm phía dưới trục hoành $\left(y_{(C)}<0\right)$

Chú ý:

Vì $\left|f(x)\right|\ge 0$ nên đồ thị (C_1) luôn nằm phía trên trục Ox, các giao điểm của (C_1) với trục Ox nằm trên Ox

Đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$	Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|(G)$
	
	

DẠNG 5.2: *TỪ ĐỒ THỊ (C) CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$, SUY RA CÁCH VẼ ĐỒ THỊ (H) CỦA HÀM SỐ* $y=f\left(\left|x\right|\right)$

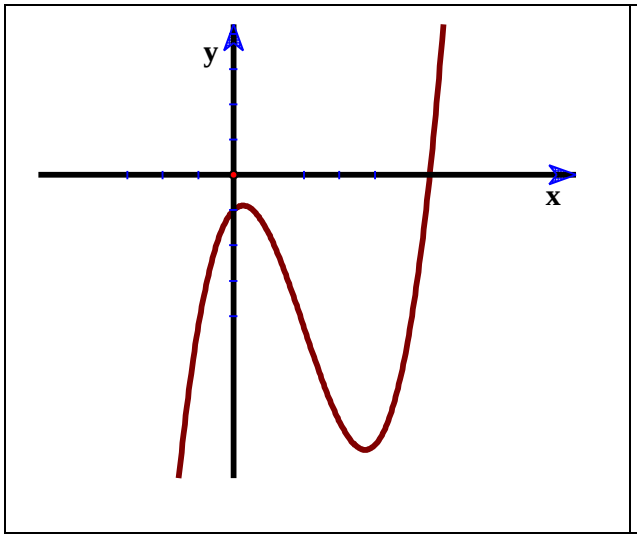
b. Phương pháp:

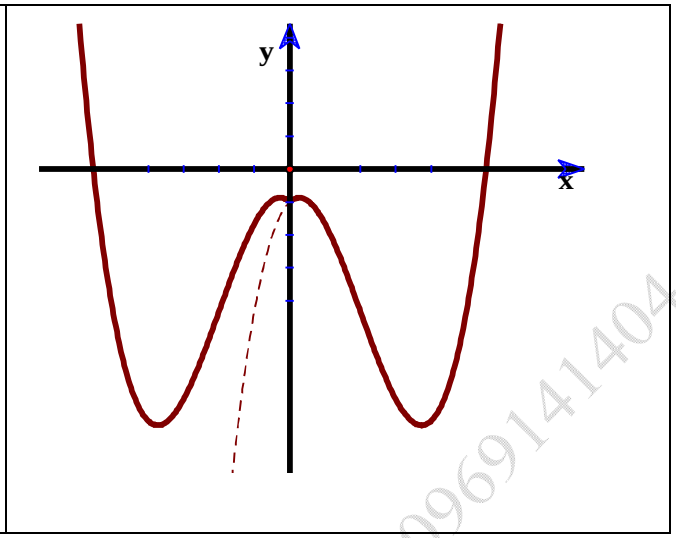
Vì $\left|-x\right|=\left|x\right|$ nên $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (*H*) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Vì vậy $(H)=\left(C_3\right)\cup\left(C_4\right)$ với $\left(C_3\right)$ là phần đồ thị của (*C*) nằm bên phải trục tung $\left(x\ge 0\right)$, còn $\left(C_4\right)$ là phần đối xứng của $\left(C_3\right)$ qua trục tung.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$	Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



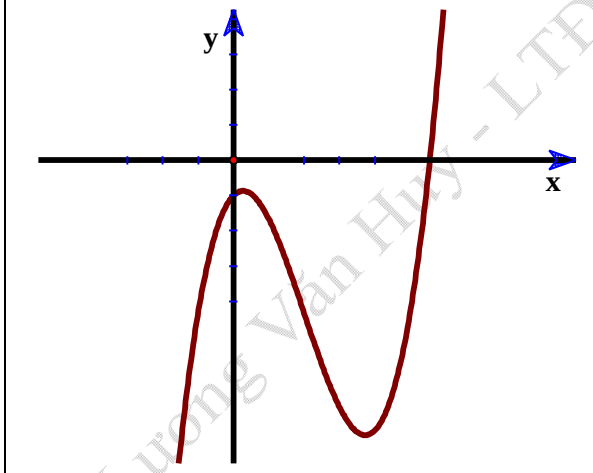
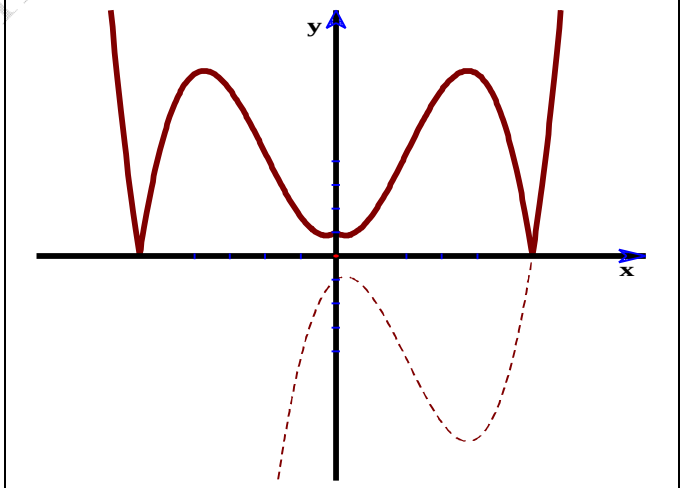


DẠNG 5.3. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (K) của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$

c. Phương pháp:

Ta có $y=\left|f(|x|)\right|=\begin{cases} f(|x|) & \text{khi } f(|x|)\ge 0 \\ -f(|x|) & \text{khi } f(|x|)<0 \end{cases}$

Suy ra $(K)=(H_1)\cup(H_2)$ với (H_1) là phần đồ thị của (H) của hàm số $y=f(|x|)$ nằm phía trên trục hoành $(y_{(H)}\ge 0)$, còn (H_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (H) ở phía dưới trục hoành $(y_{(H)}<0)$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$	Đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$
	

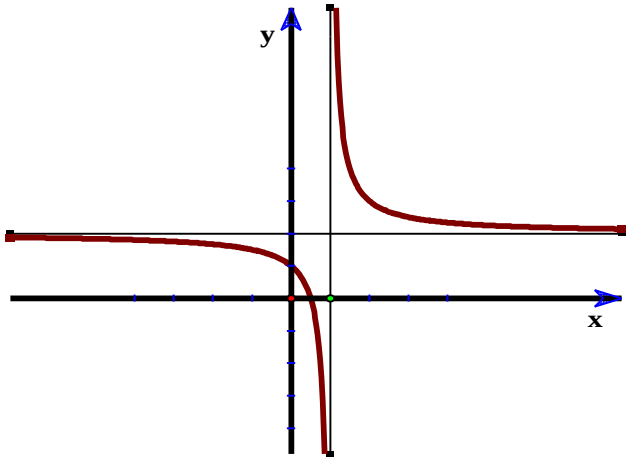
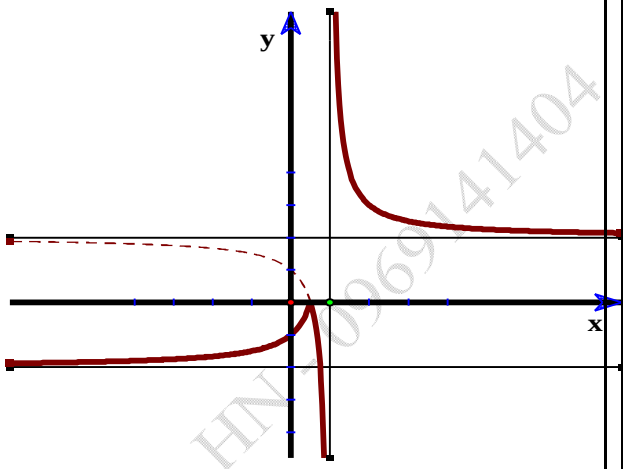
DẠNG 5.4. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, suy ra cách vẽ đồ thị (L) của hàm số $y=\dfrac{|u(x)|}{v(x)}$

d. Phương pháp:

$$y=\frac{|u(x)|}{v(x)}=\begin{cases} \dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } u(x)\ge 0 \\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } u(x)<0 \end{cases}$$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Suy ra $(L)=(C_1)\cup(C_2)$ với (C_1) là phần của đồ thị (C) có hoành độ thỏa mãn điều kiện $u(x)\ge 0$ và (C_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) có hoành độ thỏa mãn $u(x)<0$.

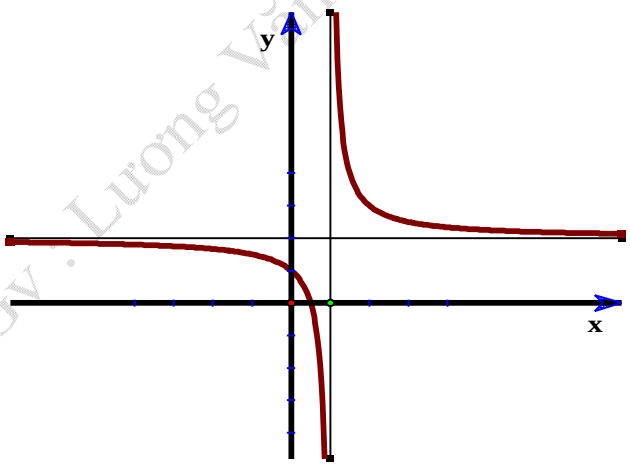
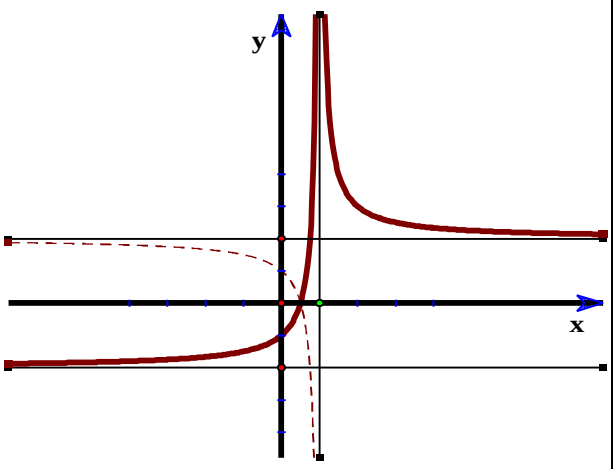
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\lvert u(x)\rvert}{v(x)}$
	

DẠNG 5.5. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, suy ra cách vẽ đồ thị (M) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{\lvert v(x)\rvert}$.

e. Phương pháp:

$$y=\frac{u(x)}{|v(x)|}=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } v(x)>0\\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } v(x)<0\end{cases}$$

Suy ra $(M)=(C_3)\cup(C_4)$ với (C_3) là phần của đồ thị (C) có hoành độ thỏa mãn điều kiện $v(x)>0$ và (C_4) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) có hoành độ thỏa mãn $v(x)<0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{\lvert v(x)\rvert}$
	

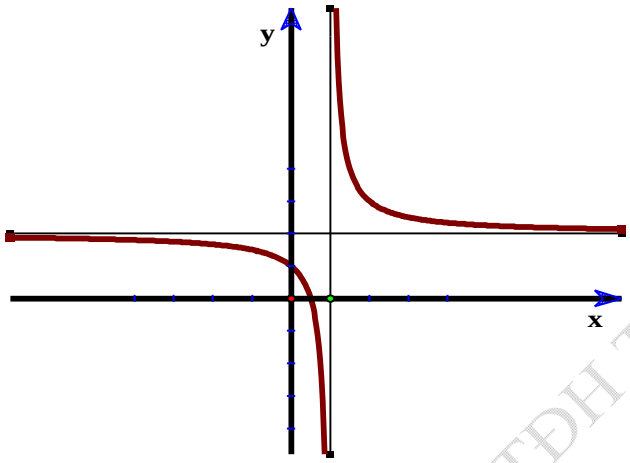
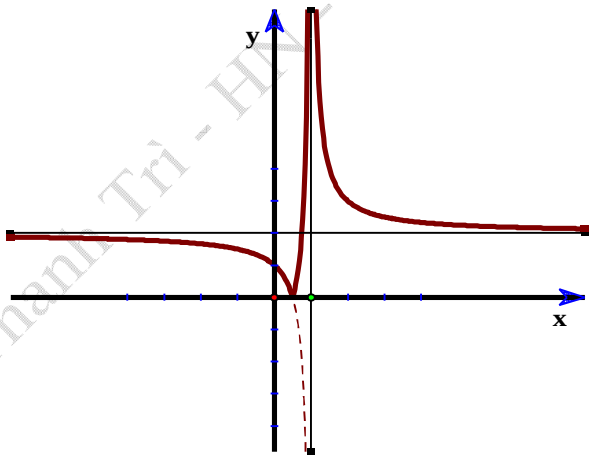
Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

DẠNG 5.6. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$***, suy ra cách vẽ đồ thị (N) của hàm số*** $y=\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|$**.**

f. Phương pháp:

$$y=\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } \dfrac{u(x)}{v(x)}\ge 0\\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } \dfrac{u(x)}{v(x)}<0\end{cases}$$

Suy ra $(N)=(C_5)\cup(C_6)$ với (C_5) là phần của đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(C)}\ge 0\right)$ và (C_6) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành $\left(y_{(C)}<0\right)$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Đồ thị hàm số $y=\left\|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right\|$
	

DẠNG 5.7. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$***, suy ra cách vẽ đồ thị (Q) của hàm số*** $y=\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}$**.**

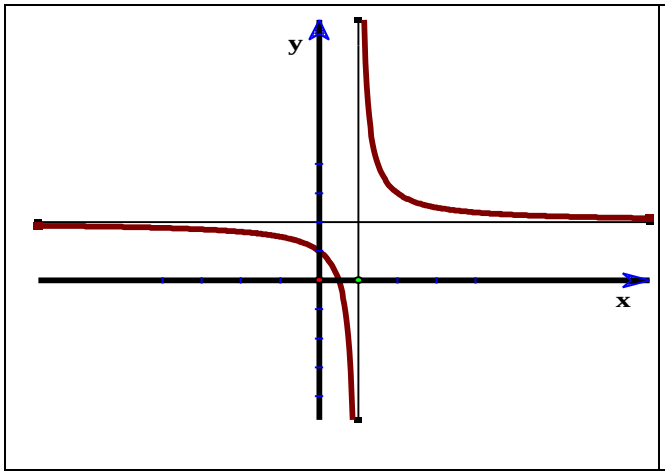
g. Phương pháp:

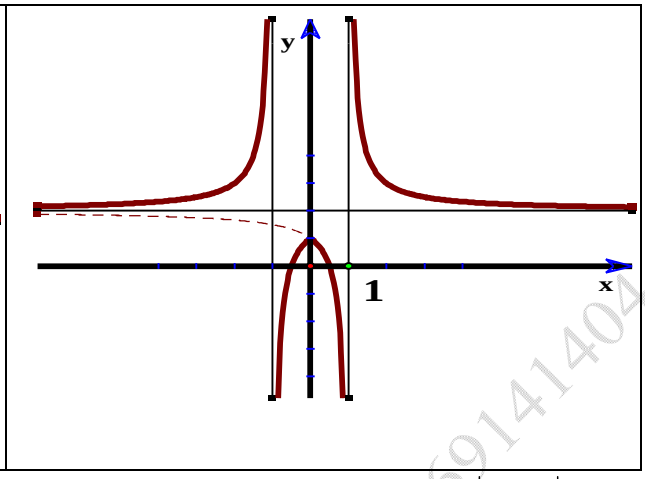
Vì $|-x|=|x|$ nên $y=\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (Q) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Vì vậy $(Q)=(C_7)\cup(C_8)$ với (C_7) là phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung $(x\ge 0)$, còn (C_8) là phần đối xứng của (C_7) qua trục tung.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(\|x\|)}{v(\|x\|)}$

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

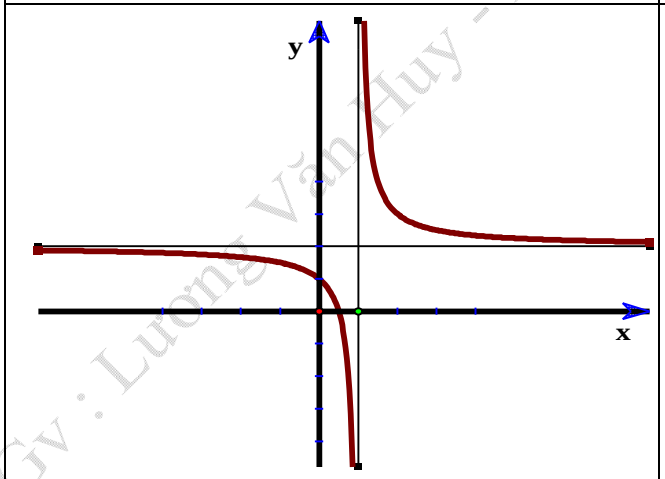
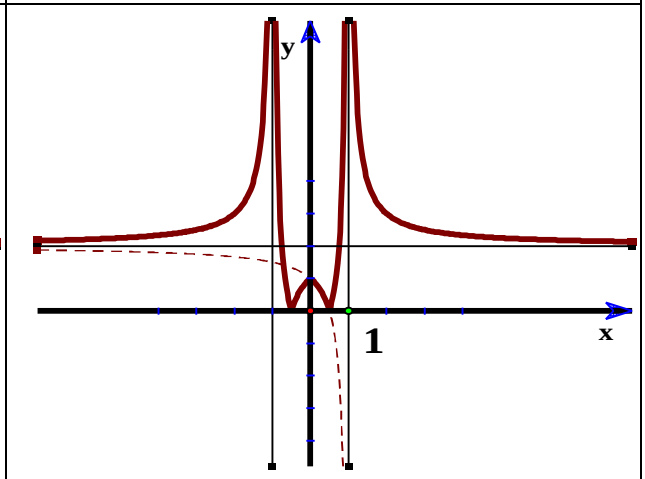




DẠNG 5.8. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, suy ra cách vẽ đồ thị (R) của hàm số $y=\left|\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}\right|$

h. Phương pháp:

Ta có $y=\left|\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}\right|=\begin{cases}\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)} & \text{khi } \dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}\ge 0\\ -\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)} & \text{khi } \dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}<0\end{cases}$ Suy ra $(R)=(Q_1)\cup(Q_2)$ với (Q_1) là phần đồ thị (Q) của hàm số $y=\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}$ nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(Q)}\ge 0\right)$, còn (Q_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (Q) ở phía dưới trục hoành $\left(y_{(Q)}<0\right)$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	Đồ thị hàm số $y=\left\|\dfrac{u(\|x\|)}{v(\|x\|)}\right\|$
	

Để thành thạo việc vẽ và suy ra đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối các em cần nắm vững.

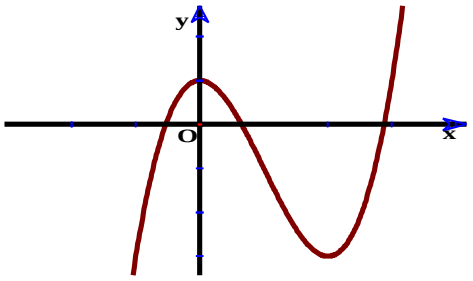
+ Cách phá trị tuyệt đối.
+ Cách vẽ đối xứng qua các trục Ox, Oy.

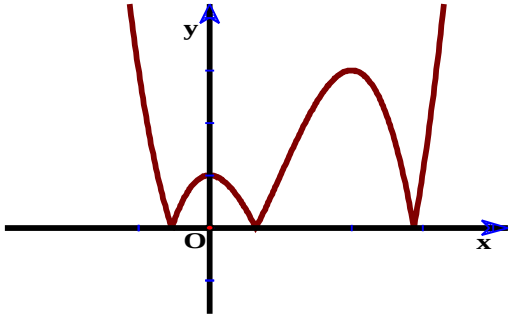
Lưu ý: Bài toán liên quan đến đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối có thể kết hợp với các kiến thức liên quan đến cực trị, đồng biến – nghịch biến, sự tương giao, biện luận số nghiệm phương trình – bất phương trình, tiệm cận... Đòi hỏi các em phải có kiến thức tổng hợp các phần tương đối tốt và nắm rõ bản chất

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

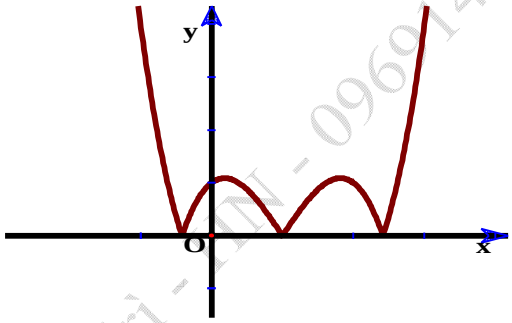
i. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1(C)$ có đồ thị được biểu diễn bằng hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ sẽ tương ứng với hình nào trong số các hình dưới đây

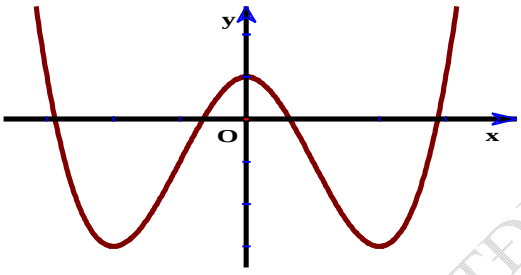




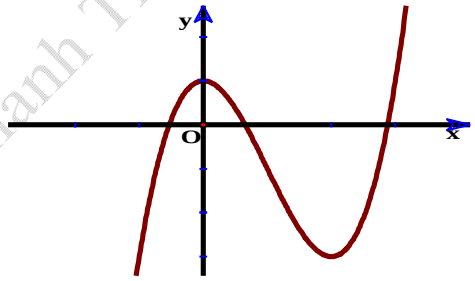
A.



B.



C.



D.

Giải.

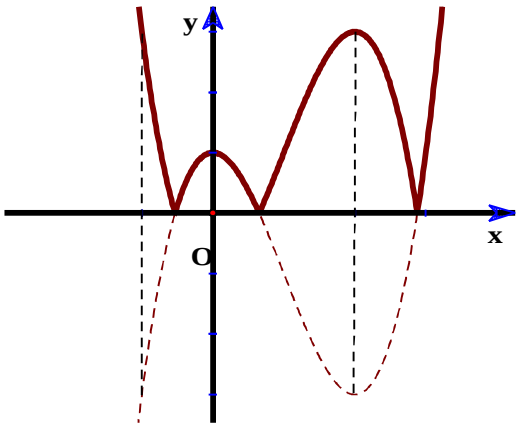
Từ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1(C)$ ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ như sau

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số (C) phần phía trên trục *Ox* (kể cả các điểm thuộc *Ox*).

Lấy đối xứng qua trục *Ox* phần đồ thị hàm số (C) nằm phía dưới trục *Ox*.

- Bỏ đi phần đồ thị hàm số (C) nằm phía dưới trục *Ox*.

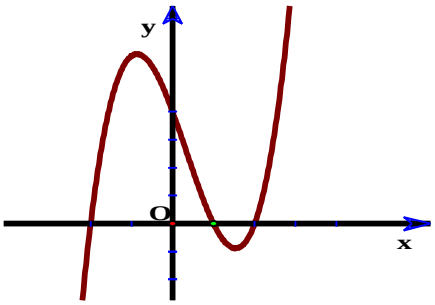
Hình minh họa

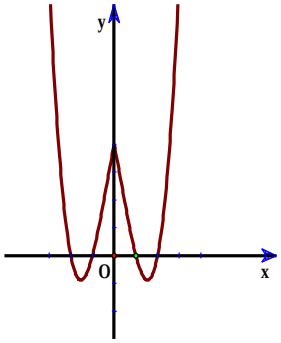


Vậy đáp án đúng là A.

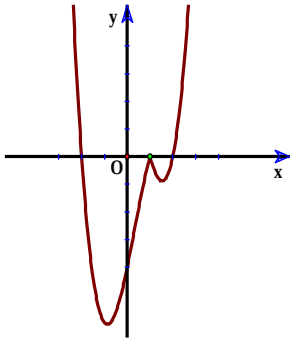
Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=(x-1)(x^2-4)(C)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y=(|x|-1)(x^2-4)$ sẽ tương ứng với hình nào trong số các hình dưới đây.

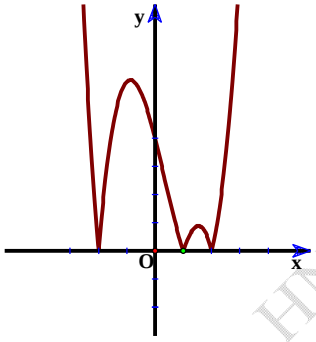




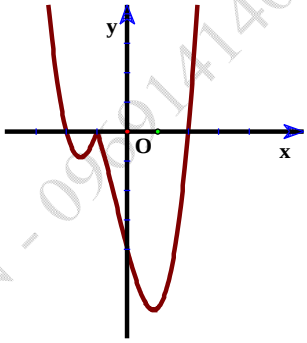
A



B.



C.



D.

Giải.

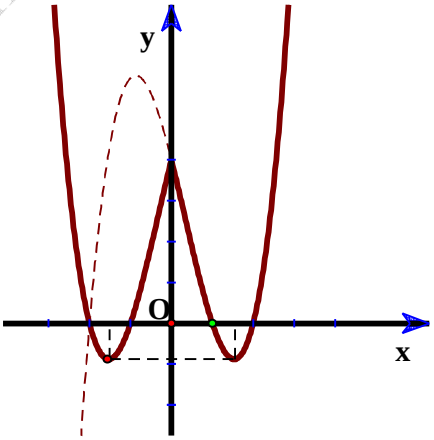
Ta có $y=(|x|-1)(x^2-4)=(|x|-1)(|x|^2-4)$. Do vậy đặt $y=f(x)=(x-1)(x^2-4)(C)$ thì đồ thị hàm số cần vẽ là đồ thị của hàm số $y=f(|x|)(C')$.

Từ đồ thị hàm số (C) ta suy ra đồ thì hàm số (C') như sau

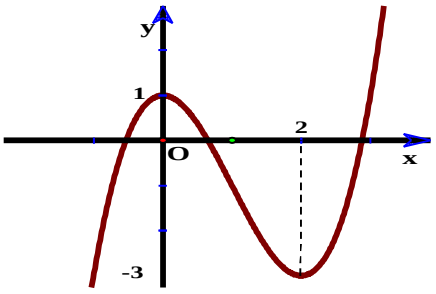
- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số (C) nằm phía phải Oy (kể cả các điểm thuộc Oy).
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số (C) nằm phía phải Oy qua trục Oy.
- Bỏ phần đồ thị hàm số (C) nằm phía trái Oy.

Vậy đáp án đúng là A

(Hình minh họa)



Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1(C)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Tìm m để phương trình $|x^3-3x^2+1|=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $0<m<1$

B. $\frac{1}{2}<m<1$

C. $0<m<2$

D. $0<m<4$

Giải.

Gv. Lương Văn Huy - LĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

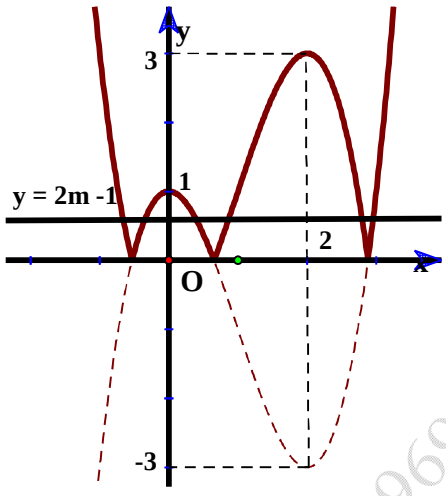
Từ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1(C)$ ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ như sau

Giữ nguyên phần đồ thị hàm số (C) phần phía trên trục *Ox* (kể cả các điểm thuộc *Ox*).

Lấy đối xứng qua trục *Ox* phần đồ thị hàm số (C) nằm phía dưới trục *Ox*.

Bỏ đi phần đồ thị hàm số (C) nằm phía dưới trục *Ox*.

(Hình minh họa)



Khi đó số nghiệm phương trình $\left|x^3-3x^2+1\right|=2m-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ và đường thẳng $y=2m-1$. Quan sát đồ thị ta thấy, phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt

$0<2m-1<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<m<1$ (đáp án B)

Ví dụ 4 (Trích đề thi thử chuyên KHTN – 2017). Biết hàm số $y=x^4-4x^2+3$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm m để phương trình $\left|x^4-4x^2+3\right|=m\ (*)$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<3$. **B.** $m>3$. **C.** $m=0$. **D.** $m\in(1;3)\cup\{0\}$.

Giải.

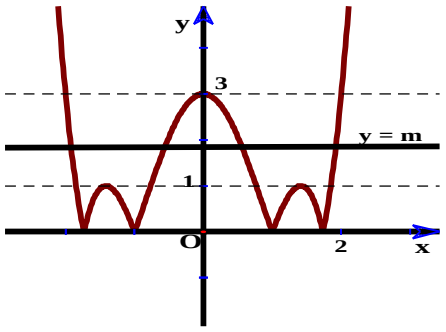
Ta vẽ nhanh đồ thị hàm số $y=\left|x^4-4x^2+3\right|$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-4x^2+3\right|$ và đường thẳng $y=m$

Quan sát đồ thị ta có

(*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in(1;3)\cup\{0\}$.

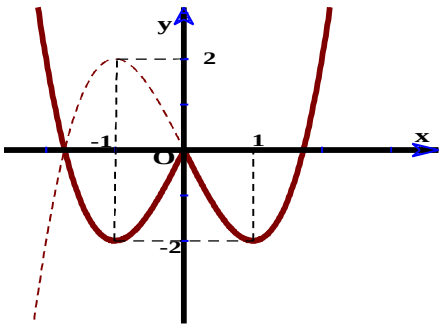
Đáp án D



Ví dụ 5 (Trích đề thi thử Chuyên Lam Sơn – 2017)

Cho đường cong (Γ) được vẽ bởi nét liền trong hình vẽ:

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



Hỏi (Γ) là dạng đồ thị của hàm số nào?

A. $y=-|x|^3+3|x|$ **B.** $y=|x^3-3x|$ **C.** $y=x^3-3x$ **D.** $y=|x^3|-3|x|$

Giải.

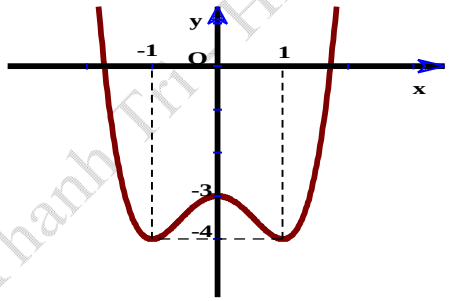
Nhận thấy đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng

$\longrightarrow$ Hàm số có dạng $y=f(|x|)$ (Loại B, C)

Nhánh phải của đồ thị hàm số hướng lên trên nên hàm số có hệ số a > 0. (Loại A)

Vậy đáp án đúng la D.

Ví dụ 6 (Trích đề thi thử Chuyên Bình Long – 2017) : Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=2m^2-m+3$ có 6 nghiệm thực phân biệt.



A. $m>\frac{2}{3}$ **B.** $0<m<\frac{1}{2}$

C. $3<m<4$ **D.** $\frac{1}{2}<m<1$

Giải.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì HN - 0969141404

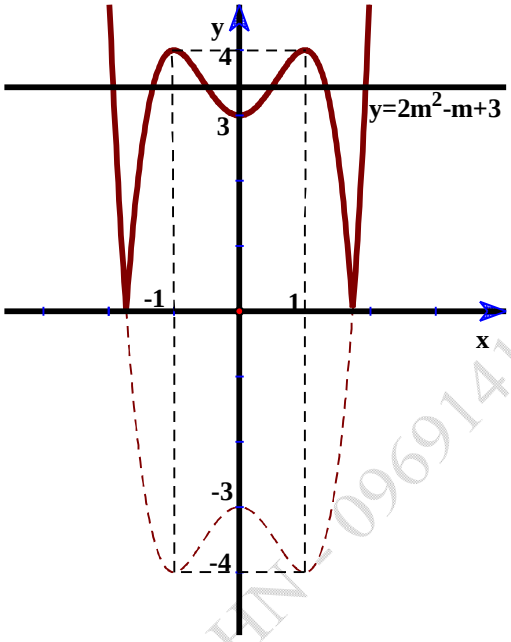
Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ (C) ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau

Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với phía trên trục Ox.

Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị (C) ứng với phía dưới trục Ox.

Bỏ phần đồ thị (C) phía dưới trục Ox.

Hình ảnh minh họa đồ thị hàm số $y=|f(x)|$



Số nghiệm phương trình $|f(x)|=2m^2-m+3$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và đường thẳng $y=2m^2-m+3$

Từ đồ thị hàm số ta suy ra để phương trình $|f(x)|=2m^2-m+3$ có 6 nghiệm phân biệt

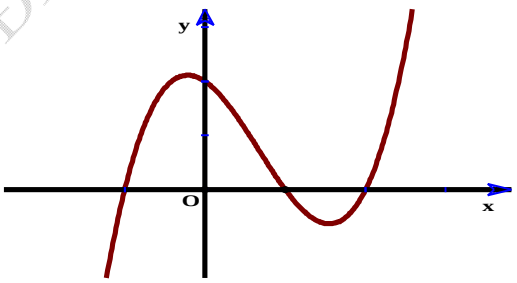
$\Leftrightarrow 3<2m^2-m+3<4$

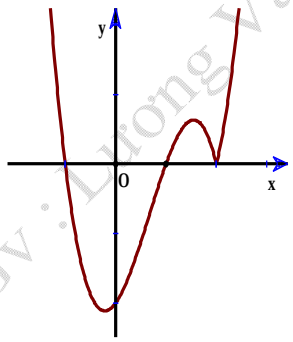
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-m-1<0 \\ 2m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}<m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m>\frac{1}{2} \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}<m<1 \\ -\frac{1}{2}<m<0 \end{array}\right.$$

So sánh đáp án ta chọn đáp án D

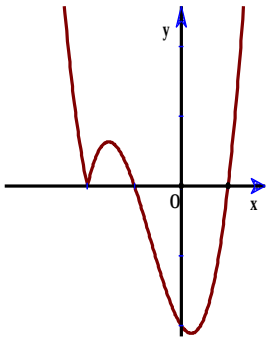
Ví dụ 7 (Trích đề thi thử lần 3 – Bộ GD – 2017).

Hàm số $y=f(x)=(x-2)(x^2-1)$ (C) có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=|x-2|(x^2-1)$?

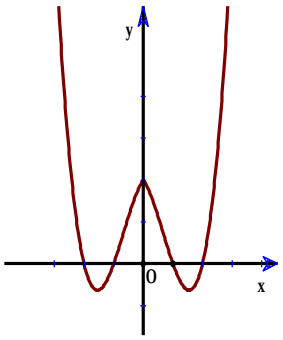




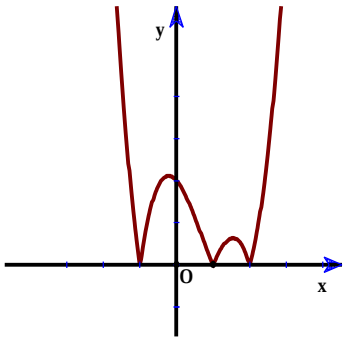
A.



B.



C.



D.

Giải.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ta có $y=|x-2|\left(x^2-1\right)=\begin{cases}(x-2)\left(x^2-1\right) khi\ x\geq 2.\\ -(x-2)\left(x^2-1\right) khi\ x<2\end{cases}$

Hay $y=\begin{cases}f(x) khi\, x\geq 2\\ -f(x) khi\, x<2\end{cases}$. Từ đó ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$ như sau

Giữ nguyên phần đồ thị hàm số (C) khi $x\geq 2$

Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị hàm số (C) khi $x<2$

Bỏ đi phần đồ thị hàm số (C) khi $x<2$

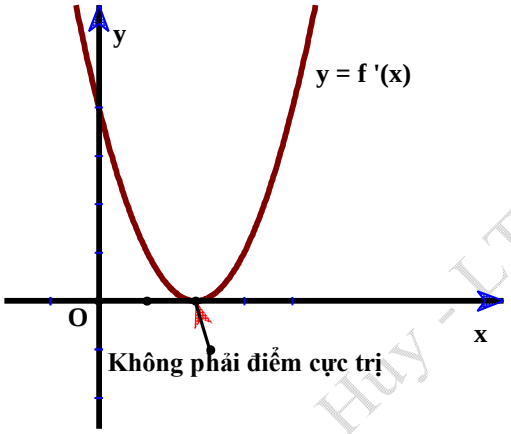
Từ hình vẽ ta suy ra đáp án đúng là A

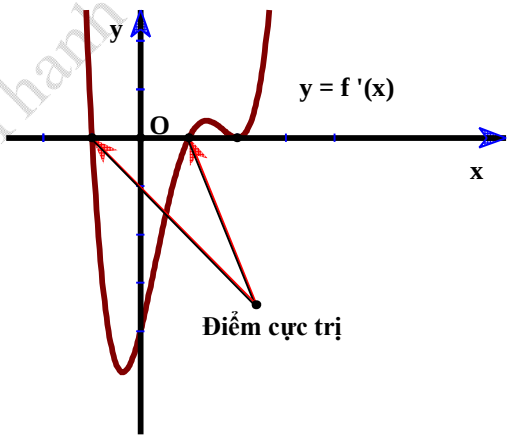
DẠNG 6: ĐỒ THỊ HÀM $y=f'(x)$

a. Phương pháp:

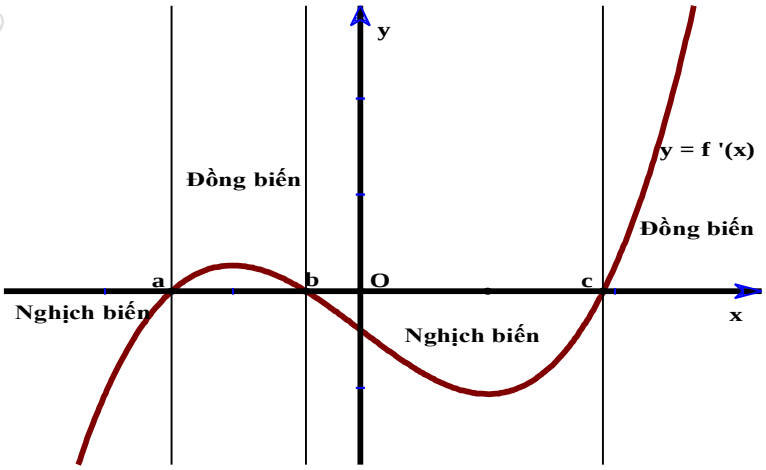
Để làm tốt dạng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta cần nắm rõ dấu hiệu cực trị, khoảng đồng biến nghịch biến, vị trí tương đối của các cực trị, diện tích hình phẳng (liên quan đến tích phân) và nhiều kỹ năng tổng hợp khác

- **Dấu hiệu cực trị là các điểm làm cho $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại mà qua các điểm đó f' đổi dấu**





- **Dấu hiệu đồng biến – nghịch biến ta quan sát các khoảng mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ phía trên trục Ox, hoặc phía dưới trục Ox.**



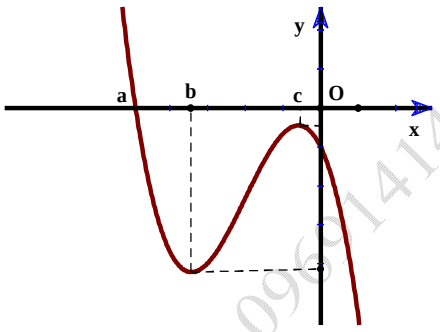
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Trong hình minh họa ở trên ta có

- *Hàm số đồng biến trên khoảng* $(a;b)$ *và* $(c;+\infty)$
- *Hàm số nghịch biến trên khoảng* $(-\infty;a)$ *và* $(b;c)$

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;a)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng.$(-\infty;b)$ và $(c;+\infty)$.

C. Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số không có cực trị.

Giải.

Khoảng đồng biến của hàm số $y=f(x)$ là các khoảng mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục Ox

Khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)$ là các khoảng mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục Ox

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là các điểm mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt xuyên qua trục Ox

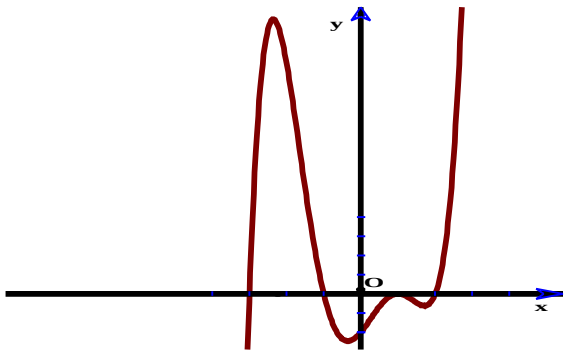
Quan sát đồ thị ta thấy trên khoảng $(-\infty;a)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục Ox

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;a)$. (Đáp án A)

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4



Giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có 4 điểm chung với trục Ox

$\Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Trong đó có 3 điểm làm cho f' đổi dấu.

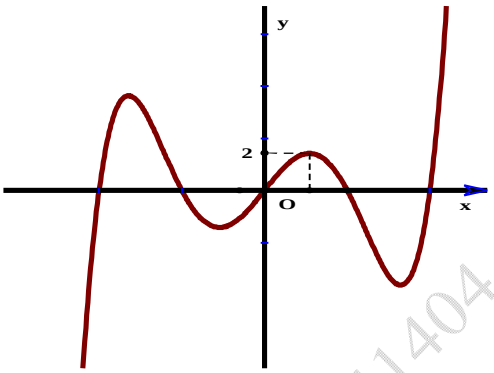
Vậy Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là 3

Đáp án C

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-2x$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

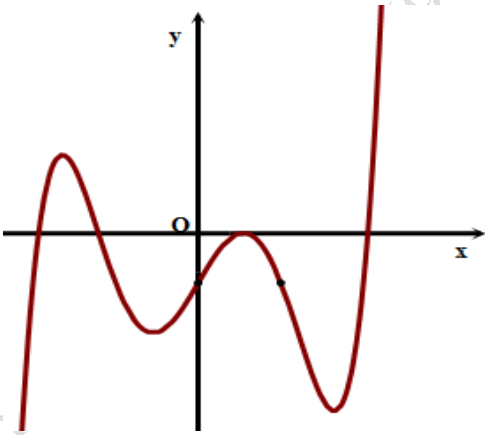


Giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-2$. Như vậy đồ thị hàm số $y=g'(x)$ chính là đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được tịnh tiến xuống phía dưới 2 đơn vị.(hình minh họa). Quan sát đồ thị hàm số $y=g'(x)$ có 3 điểm làm g' đổi dấu khi đi qua.

Vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 3

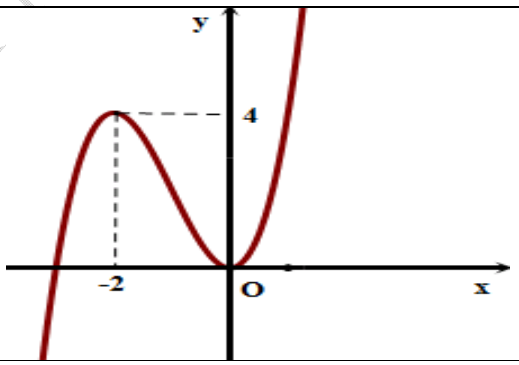
Đáp án C



Ví dụ 3 (Trích đề thi thử Chuyên KHTN - 2017)

Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2(C)$ có dạng như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=|x^3+3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3



Giải.

Ta vẽ đồ thị hàm số $y=|x^3+3x^2|$

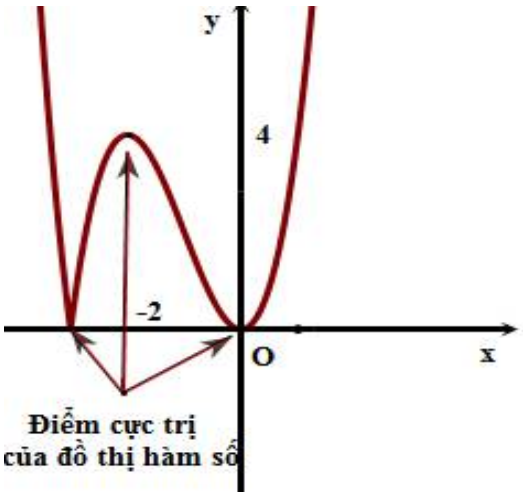
Giữ nguyên phần đồ thị hàm số (C) phía trên trục Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới Ox qua trục Ox.

Bỏ đi phần đồ thị (C) phía dưới trục Ox.

Vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số là 3

Lưu ý: Điểm cực trị của đồ thị hàm số ta hiểu đơn giản gồm các đỉnh và các điểm tại vị trí gấp khúc



Cty Lương Văn Huy - LTĐH Th... 0969141404

Ví dụ 4 (Trích đề thi thử Chuyên Bình Long - 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ

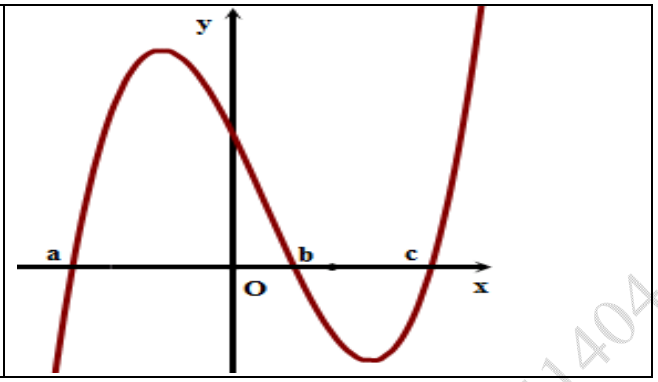
Chọn khẳng định **đúng ?**

A. $f(b)>f(a)>f(c)$

B. $f(b)>f(c)>f(a)$

C. $f(c)>f(a)>f(b)$

D. $f(c)>f(b)>f(a)$



Giải.

- Xét $\int_a^b f'(x)dx$. Theo đồ thị hàm số $f'(x)$ đề bài cho ta có phần diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a, x=b$ nằm phía trên trục Ox

$$\longrightarrow \int_a^b f'(x)dx>0 \Leftrightarrow f(b)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(b)>f(a)$$

- Xét $\int_b^c f'(x)dx$. Theo đồ thị hàm số $f'(x)$ đề bài cho ta có phần diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=b, x=c$ nằm phía dưới trục Ox

$$\longrightarrow \int_b^c f'(x)dx<0 \Leftrightarrow f(c)-f(b)<0 \Leftrightarrow f(c)>f(b)$$

- Xét $\int_b^c f'(x)dx$. Theo đồ thị hàm số $f'(x)$ đề bài cho ta có phần diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a, x=c$

$$\longrightarrow \int_a^c f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx-\int_b^c f'(x)dx>0$$

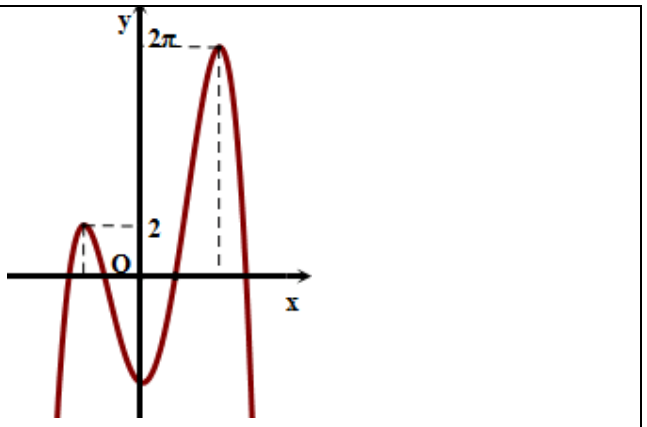
Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-\pi x$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là ?

A. 1.

B. 2

C. 3

D. 4



Giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\pi$. Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-\pi=0 \Leftrightarrow f'(x)=\pi$ (*)

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=\pi$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có phương trình (*) có hai nghiệm đơn phân biệt.

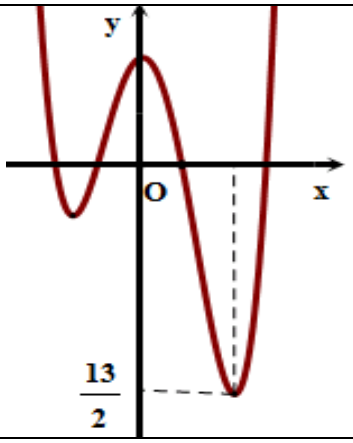
Do vậy $g'(x)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt. Do nghiệm đơn nên $g'(x)$ sẽ đổi dấu qua 2 nghiệm đó.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{13}{2}x$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là ?

A.0.
B.1
C.2
D.3



Giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\frac{13}{2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\frac{13}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{13}{2}(1)$

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=\frac{13}{2}$

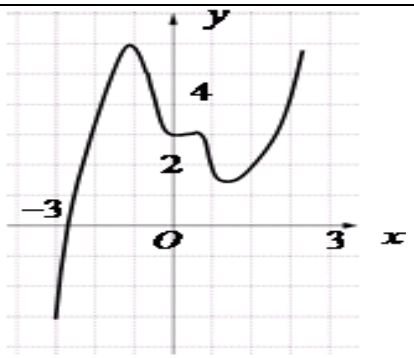
Theo đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy phương trình (1) có 1 nghiệm bội chẵn (Đường thẳng $y=\frac{13}{2}$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$).

Do vậy $g'(x)$ có 1 nghiệm bội chẵn, và không đổi dấu qua nghiệm bội chẵn.

$\longrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ không có cực trị

Ví dụ 7 (Trích đề thi chính thức Bộ GD – 2017). Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $g(-3)>g(3)>g(1)$
B. $g(1)>g(-3)>g(3)$
C. $g(3)>g(-3)>g(1)$
D. $g(1)>g(3)>g(-3)$



Giải.

Ta có $\begin{cases} g(1)=2f(1)-4 \\ g(3)=2f(3)-16 \\ g(-3)=2f(-3)-4 \end{cases}$ và $\begin{cases} g(3)-g(1)=2\left[f(3)-f(1)\right]-12=2\int\limits_1^3 f'(x)dx-12 \\ g(3)-g(-3)=2\left[f(3)-f(-3)\right]=2\int\limits_{-3}^3 f'(x)dx-12 \end{cases}$

Trong đó

$\int\limits_1^3 f'(x)dx$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và 2 đường thẳng $x=1, x=3$

$\int\limits_{-3}^3 f'(x)dx$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$

* Theo hình vẽ (mỗi ô vuông có diện tích bằng 1) ta có

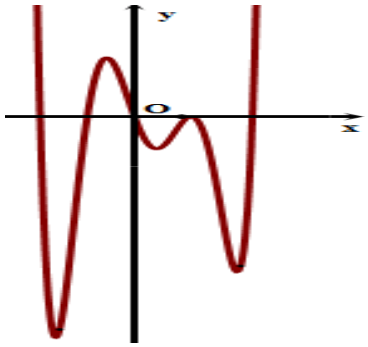
Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

$\int_1^3 f'(x)dx = S < 6 \longrightarrow g(3) - g(1) < 2.6 - 12 = 0 \longrightarrow g(3) < g(1)$

* Theo hình vẽ ta có $\int_{-3}^3 f'(x)dx = S_1 > 6 \longrightarrow g(3) - g(-3) > 2.6 - 12 = 0 \longrightarrow g(3) > g(-3)$

Do đó ta được $g(1) > g(3) > g(-3)$. (Đáp án D)

Ví dụ 8 (Thi thử lần 3 – Thầy Lương Văn Huy - 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ . Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là



A.2 **B**.3
C.4 **D**.5

Nhận xét:

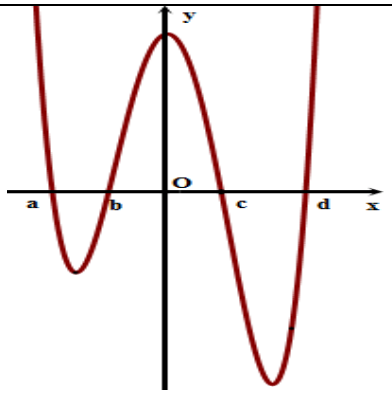
- Dạng bài này khiến nhiều em khá lúng túng và hay nhầm lẫn các cực trị của hàm số $y = f'(x)$ là số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- Ta lưu ý cực trị của hàm số là những điểm làm cho đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc không xác định (Theo đề thì không có điểm nào làm cho đạo hàm không xác định) và đổi dấu qua điểm đó. Do vậy quan sát trong đồ thị, những điểm mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt xuyên qua trục Ox là những điểm cực trị (Vì đạo hàm đổi dấu qua các điểm đó)

Giải

Điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là các điểm mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt qua trục *Ox* (Loại các điểm tiếp xúc).Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số cắt qua trục Ox 4 điểm (Hình minh họa)..Vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 4 (Đáp án C)

Ví dụ 9 (Trích đề thi thử lần 4 – Thầy Lương Văn Huy – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .Khẳng định nào sau đây đúng.



A. Hàm số có 3 điểm cực trị.
B. Hàm số có 2 điểm cực trị.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; c)$ và $(d; +\infty)$
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ và $(c; d)$

Giải.

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là số điểm mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt xuyên qua trục Ox.Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x) \longrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Khoảng đồng biến là các khoảng mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên Ox ($f'(x) \geq 0$)

$\longrightarrow$ hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; c)$ và $(d; +\infty)$

Khoảng nghịch biến là các khoảng mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới Ox ($f'(x) \leq 0$)

$\longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên các khoảng $(a; b)$ và $(c; d)$

Vậy đáp án đúng là D

Gv. Lương Văn Huy - Ngọc Hồi - Thanh Trì - HN - 0969141404

B- BÀI TOÁN BẢNG BIẾN THIÊN

a. Phương pháp:

Để làm tốt dạng bài liên quan đến bảng biến thiên của hàm số. Các em cần nhận biết được đặc điểm của bảng biến thiên như; dấu hiệu tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, dấu hiệu cực trị, dấu hiệu đồng biến nghịch biến. Ngoài ra nên kết hợp với suy từ bảng biến thiên ra đồ thị hàm số để có cái nhìn toàn diện và dễ hiểu hơn.

Cần lưu ý:

- **Dấu hiệu nhận biết tiệm cận**

- Tại vị trí $x \longrightarrow -\infty; x \longrightarrow +\infty$

Nếu y nhận các giá trị cụ thể a,b thì khi đó $y=a, y=b$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- Tại $x \longrightarrow a^+$ hoặc $x \longrightarrow a^-$ mà y nhận các giá trị $\pm\infty$ thì khi đó đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

x	$-\infty$		a		$+\infty$
y	↓	$\pm\infty$	$\pm\infty$		↓
	TCN	**TCĐ**	**TCĐ**		**TCN**

- **Dấu hiệu nhận biết cực trị**

x	$-\infty$	x_0	$-\infty$
y'		0	
y			
		Trái dấu	

x	$-\infty$	x_0
	$+\infty$	
y'		
y		
		Trái dấu

x	$-\infty$	x_0	$-\infty$
y'			
y		***Cực trị***	

x	$-\infty$	x_0
	$+\infty$	
y'		
y		
		Cực trị

Lưu ý: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì

$\left[\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f'(x_0) \nexists \end{array}\right.$ (Hoặc đạo hàm tại đó = 0 hoặc đạo hàm không tồn tại)

- **Dấu hiệu nhận biết đồng biến nghịch biến**: Ta dựa vào dấu y' hoặc chiều mũi tên của y trong bảng biến thiên

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

x	$-\infty$ $-\infty$
y'	$+$
y	***Đồng biến***

x	$-\infty$ $+\infty$
y'	$-$
y	***Nghịch biến***

b. Ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1 (Trích đề thi thử Vinastudy.vn – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu của $f'(x)$ được cho dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Giải.

Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tuy nhiên chỉ tại $x=0, x=-2$ thì $f'(x)$ đổi dấu.

Do vậy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị (Đáp án B)

Ví dụ 2 (Trích đề thi thử Chuyên KHTN – 2017) Biết hàm số $y=x^4-4x^2+3$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm m để phương trình $\left|x^4-4x^2+3\right|=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<3$. **B.** $m>3$. **C.** $m=0$. **D.** $m \in (1;3) \cup \{0\}$.

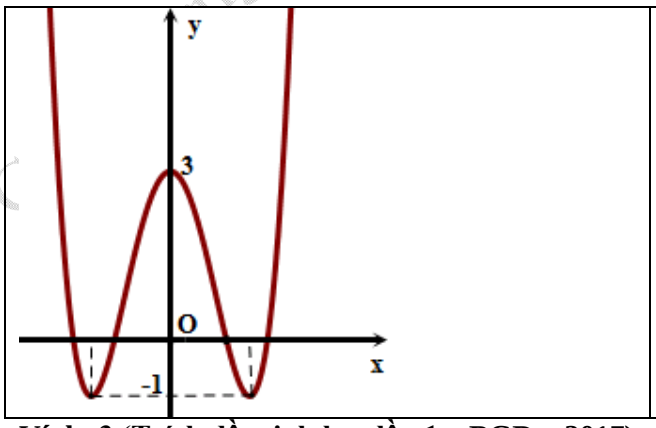
Giải.

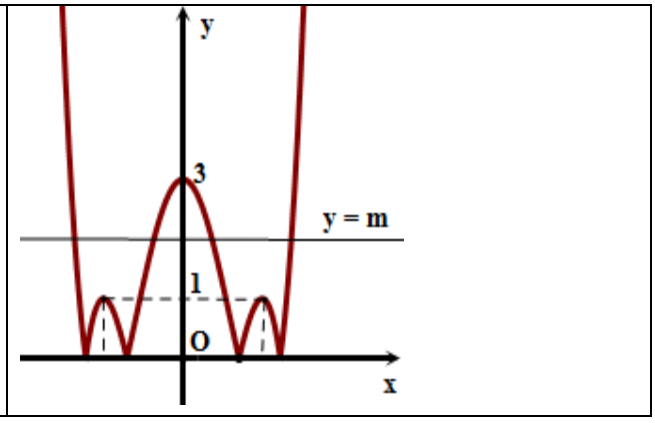
Từ đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+3$

Ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^4-4x^2+3\right|$ (Xem lại đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$)

Số nghiệm của phương trình $\left|x^4-4x^2+3\right|=m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-4x^2+3\right|$ và đường thẳng $y=m$.

Quan sát đồ thị ta có để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ 1<m<3 \end{array}\right.$ (Đáp án D)





Ví dụ 3 (Trích đề minh họa lần 1 – BGD – 2017)

Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↗	0	↘	1	↗	
	$-\infty$						

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$

Giải.

Do hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ mà

- Tại $x=0$ đạo hàm không xác định và đổi dấu từ + sang – nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$
- Tại $x=1$ hàm số có đạo hàm $=0$ và đổi dấu từ - sang + nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

Vậy đáp án đúng là D

Ví dụ 4 (Trích đề thi thử sở GD Quảng Nam – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y=f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x = –2.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x = 1.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x = 5.

Giải.

Nhận thấy phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-2, x=1, x=5$.

Nhưng chỉ tại $x=-2, x=5$ là $f'(x)$ đổi dấu, còn qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu nên hàm số đạt cực trị tại $x=-2, x=5$.

Tại $x=-2$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – nên hàm số đạt cực đại tại $x=-2$

Tại $x=5$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$

Vậy đáp án sai là C

Ví dụ 5 (Trích đề minh họa lần 3 – Bộ GD – 2017)

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y_{CD}=5$.

B. $y_{CT}=0$.

C. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$.

D. $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	
	$-\infty$						

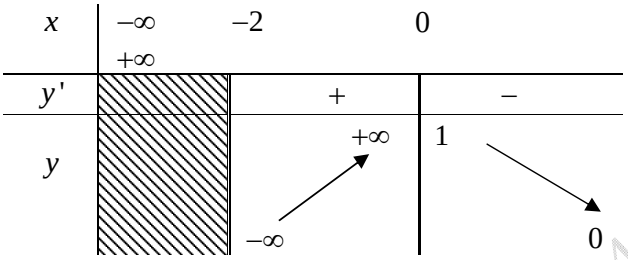
Giải.

Nhận thấy giá trị của y nhận giá trị $\in(-\infty;+\infty)$ nên hàm số không có Max, Min trên $\mathbb{R}$ (Loại C,D).

Lại có $y_{CD}=5, y_{CT}=4$ nên đáp án đúng là A.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Ví dụ 6 (Trích đề minh họa lần 3 – BGD – 2017)
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\end{cases}$ nên $x=-2, x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Ví dụ 7 (Trích đề thi 2017 – BGD – Mã đề 104)
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Giải.

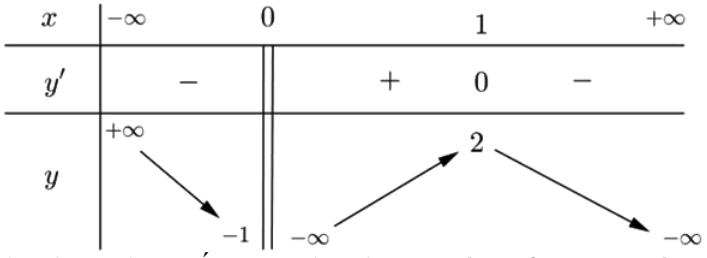
Dự vào dấu của $f'(x)$ ta có

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$

Vậy đáp án đúng là C.

Ví dụ 8 (Trích đề minh họa lần 2 – Bộ GD – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

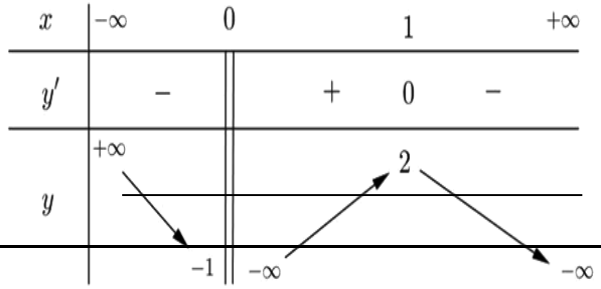
A. $[-1;2]$ **B.** $(-1;2)$ **C.** $(-1;2]$ **D.** $(-\infty;2]$

Giải.

Do hàm số $y=f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0\}$, do vậy giá trị -1 của y tại vị trí $x=0$ chính là $\lim\limits_{x\to 0^-} y$

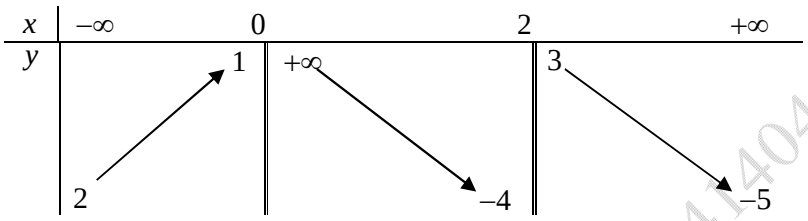
(Chứ không phải $y(0)=-1$).

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$. Quan sát bảng biến thiên ta có



Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm
$\Leftrightarrow -1<m<2$ (Đáp án B)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ có bảng biến thiên như hình bên. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là ?

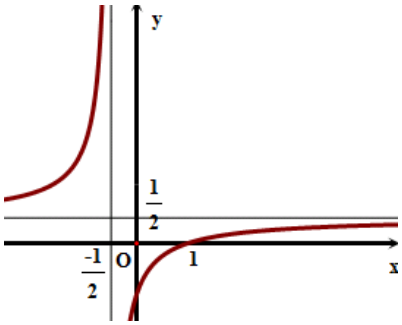


2.
3.
4.
5

Giải.
Quan sát bảng biến thiên ta thấy
$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-5 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-5$.
$\lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} y=1$; $\lim\limits_{x\to2^-} y=-4$; $\lim\limits_{x\to2^+} y=3 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=0$
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận
Đáp án B

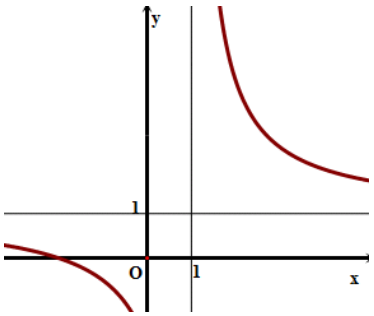
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



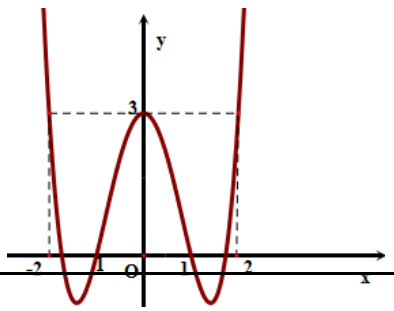
A. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$
B. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$
C. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$
D. $y=\dfrac{-x+1}{2x+1}$

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$
B. $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$
C. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$
D. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4-4x^2+3$

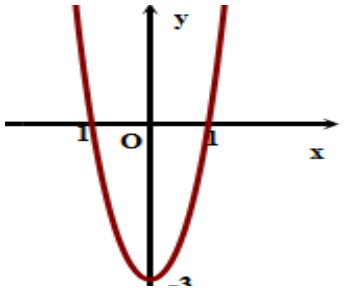
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

B. $y=-x^4+3x^2+3$

C. $y=x^4+2x^2+3$

D. $y=x^4-2x^2+3$

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



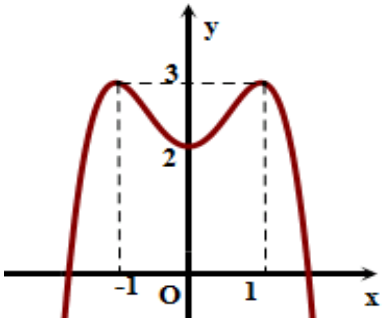
A. $y=x^4+4x^2-3$

B. $y=x^4-4x^2-3$

C. $y=-x^4+4x^2-3$

D. $y=-x^4-4x^2-3$

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào



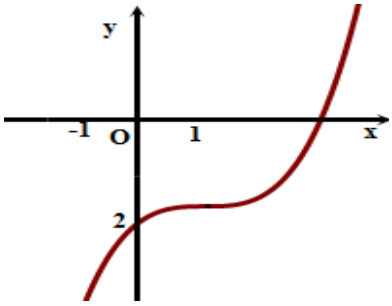
A. $y=x^4-2x^2+2$

B. $y=-x^4-2x^2+2$

C. $y=-x^4-2x^2-2$

D. $y=-x^4+2x^2+2$

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



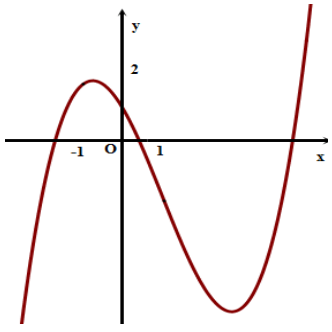
A. $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x-2$

B. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+x-2$

C. $y=\frac{x^3}{3}-x^2-2x-2$

D. $y=-\frac{x^3}{3}+x^2-x-2$

Câu 7: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



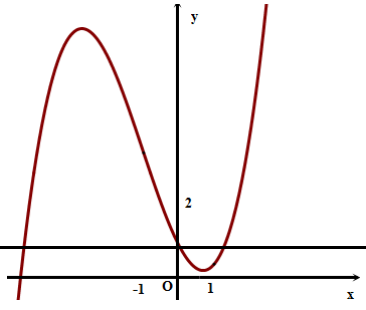
A. $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x-2$

B. $y=\frac{x^3}{3}-x^2-2x+1$

C. $y=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+1$

D. $y=\frac{x^3}{3}+x^2-2x+1$

Câu 8: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì

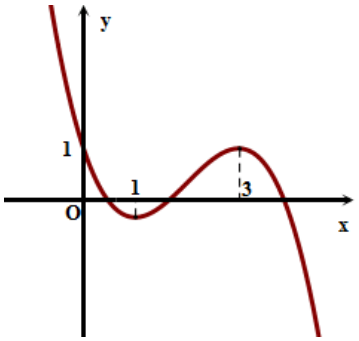
A. $y=\frac{x^3}{3}+x^2-2x+1$

B. $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$

C. $y=-\frac{x^3}{3}-x^2-2x+1$

D. $y=-\frac{x^3}{3}+x^2-2x+1$

Câu 9: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



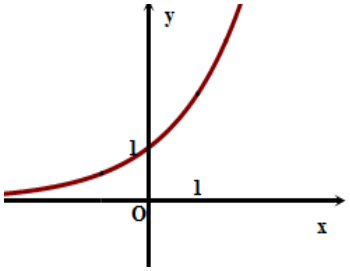
A. $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2+3x+1$

B. $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x+1$

C. $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+1$

D. $y=-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x+1$

Câu 10: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



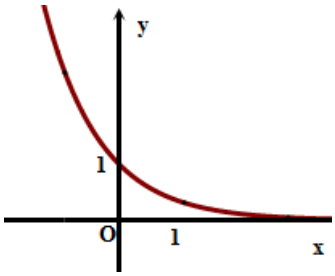
A. $y=2^x$

B. $y=\frac{1}{2^x}$

C. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$

D. $y=-2^x$

Câu 11: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



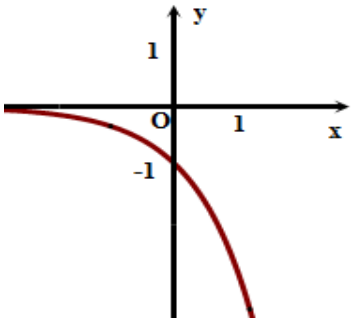
A. $y=\frac{1}{e^x}$

B. $y=e^x$

C. $y=-e^x$

D. $y=-\frac{1}{e^x}$

Câu 12: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=3^x$

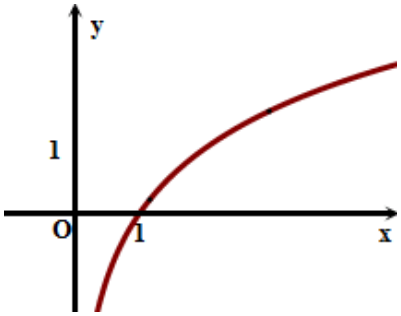
B. $y=-3^x$

C. $y=\frac{1}{3^x}$

D. $y=-\frac{1}{3^x}$

Cô Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì 0969141404

Câu 13: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



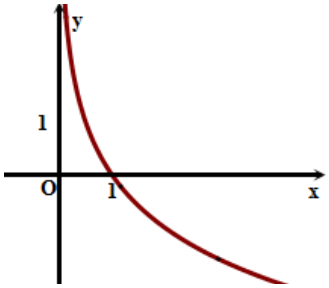
A. $y = 2^x$

B. $y = \dfrac{1}{2^x}$

C. $y = \log_2 x$

D. $y = \log_{0,5} x$

Câu 14: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



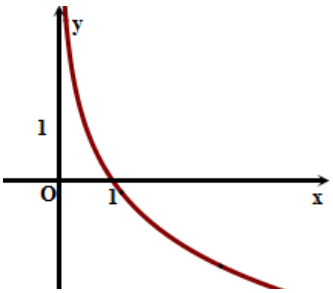
A. $y = \log_2 x$

B. $y = -\log_2 x$

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

D. $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$

Câu 15: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



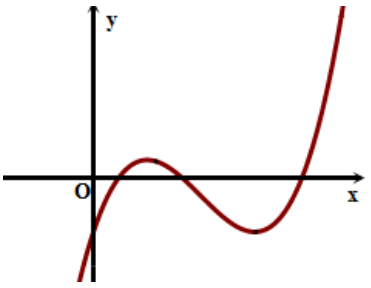
A. $y = \log_3 x$

B. $y = \dfrac{1}{\log_3 x}$

C. $y = -\log_3 x$

D. $y = -\dfrac{1}{\log_3 x}$

Câu 16: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



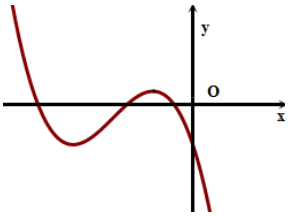
A. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$

Câu 17: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



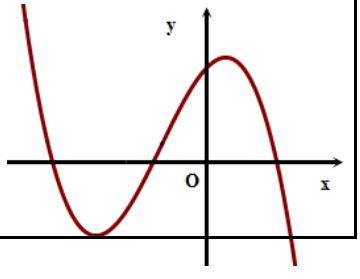
A. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

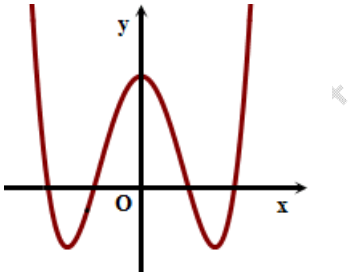


A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - H

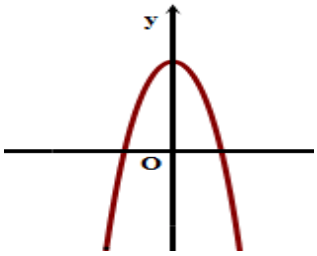
B. $a<0,b<0,c>0,d>0$
C. $a<0,b>0,c<0,d>0$
D. $a<0,b<0,c>0,d<0$

Câu 19: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



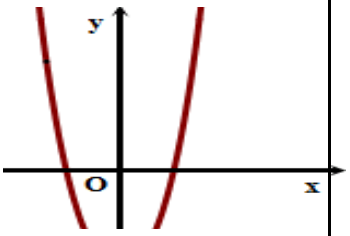
A. $y=a>0,b<0,c>0$
B. $y=a>0,b>0,c>0$
C. $y=a<0,b<0,c>0$
D. $y=a>0,b<0,c<0$

Câu 20: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



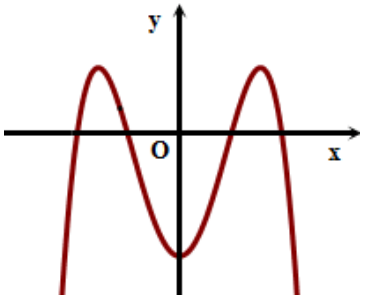
A. $y=a<0,b>0,c<0$
B. $y=a<0,b<0,c>0$
C. $y=a<0,b>0,c>0$
D. $y=a>0,b>0,c>0$

Câu 21: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



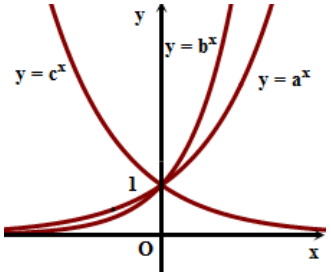
A. $y=a>0,b>0,c>0$
B. $y=a<0,b>0,c>0$
C. $y=a>0,b>0,c<0$
D. $y=a>0,b<0,c>0$

Câu 22: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



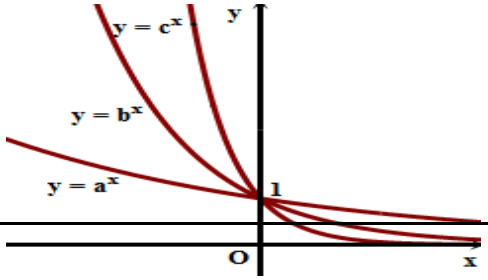
A. $a>0,b<0,c>0$
B. $a<0,b>0,c<0$
C. $a<0,b<0,c>0$
D. $a>0,b<0,c<0$

Câu 23: Hình bên là đồ thị của các hàm số $y=a^x,y=b^x,y=c^x\ (0<a,b,c\neq 1)$ Kết luận nào sau đây đúng ?



A. $0<c<1<a<b$
B. $0<c<1<a<b$
C. $0<c<1<a<b$
D. $0<c<1<a<b$

Câu 24: Hình bên là đồ thị của các hàm số $y=a^x,y=b^x,y=c^x\ (0<a,b,c\neq 1)$ Kết luận nào sau đây đúng ?

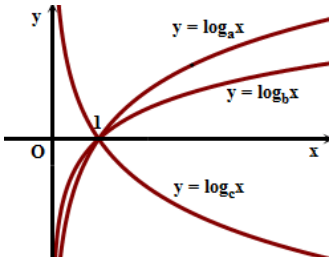


A. $0<c<a<b<1$
B. $0<c<b<a<1$

GV. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - H

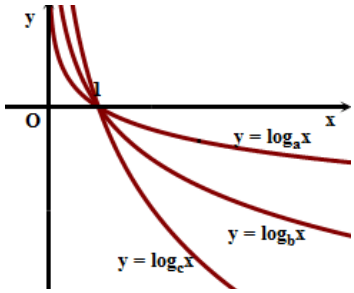
C. $0<a<c<1<b$
D. $0<c<1<b<a$

Câu 25: Hình bên là đồ thị của các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x (0<a,b,c\neq 1)$
Kết luận nào sau đây đúng ?



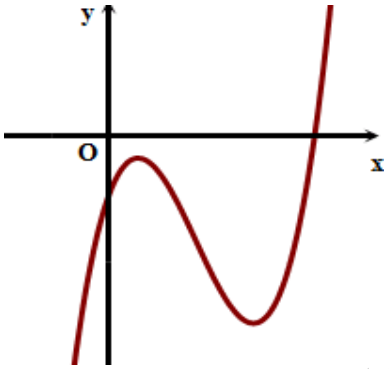
A. $a<b<c<1$
B. $1<a<b<c$
C. $c<1<a<b$
D. $c<1<b<a$

Câu 26: Hình bên là đồ thị của các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x (0<a,b,c\neq 1)$
Kết luận nào sau đây đúng ?

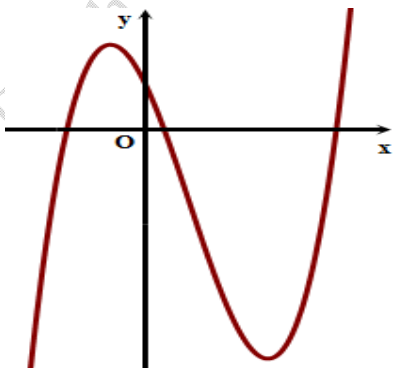


A. $a<1<b<c$
B. $a<b<c<1$
C. $c<a<b<1$
D. $b<a<1<c$

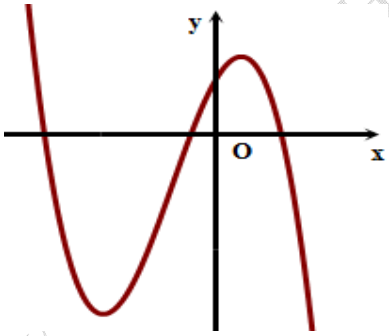
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+2017$. Khi đó đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sẽ tương ứng với hình nào dưới đây ?



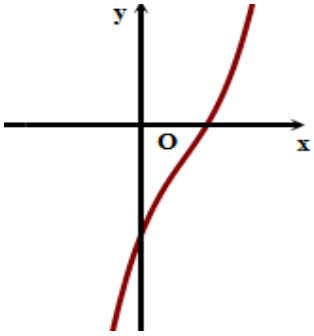
A.



B.

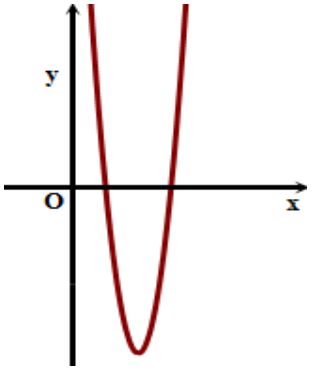


C.

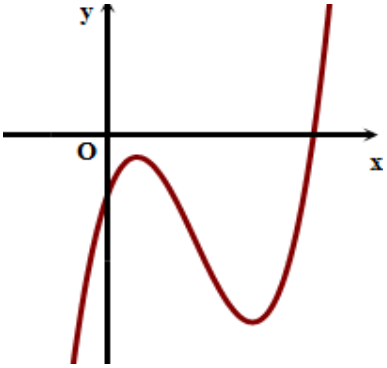


D.

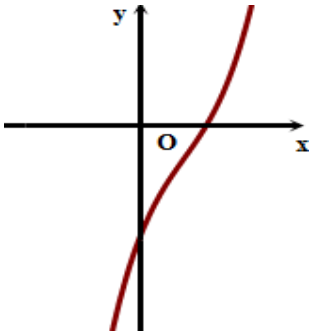
Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)=(x-2)(2x-1)^2$. Khi đó đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sẽ tương ứng với hình nào dưới đây ?



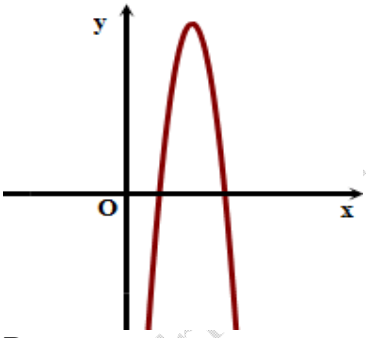
A.



B.

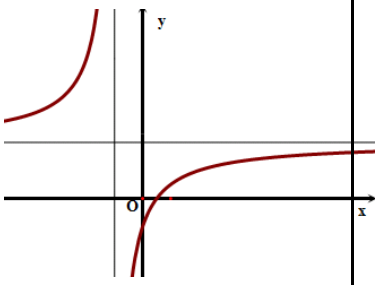


C.



D.

Câu 29: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?



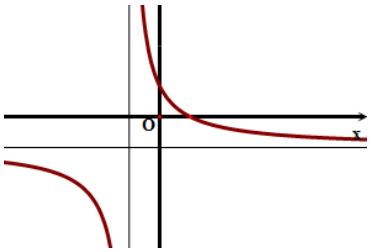
A. $ab<0,cd>0$

B. $ac>0,cd<0$

C. $ad>0,bc>0$

D. $ad>0,bc>0$

Câu 30: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $ac<0,cd>0,ab<0$

B. $ac>0,cd>0,ab<0$

C. $ad<0,bd>0,ac>0$

D. $bd<0,cd>0,ac>0$

Câu 31: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

A. $a>0,b<0,c>0$

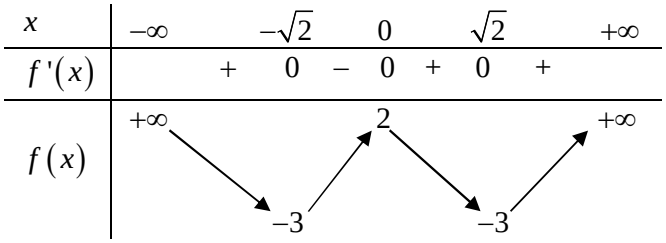
B. $a>0,b<0,c>0$

C. $a<0,b>0,c<0$

D. $a>0,b<0,c>0$

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - 0969141404

Câu 32: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



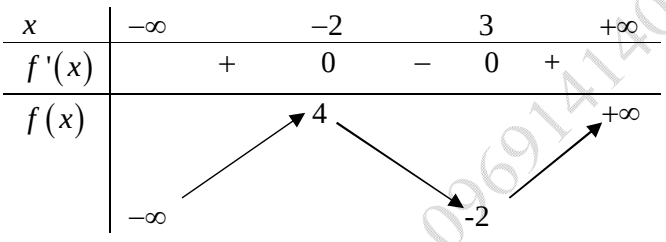
A. $a>0,b<0,c>0$

B. $a>0,b>0,c>0$

C. $a>0,b<0,c<0$

D. $a<0,b>0,c<0$

Câu 33: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(d>0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



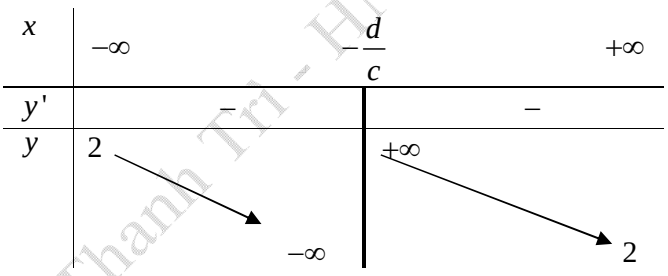
A. $a>0,b<0,c<0$

B. $a>0,b<0,c>0$

C. $a>0,b>0,c<0$

D. $a<0,b<0,c<0$

Câu 34: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



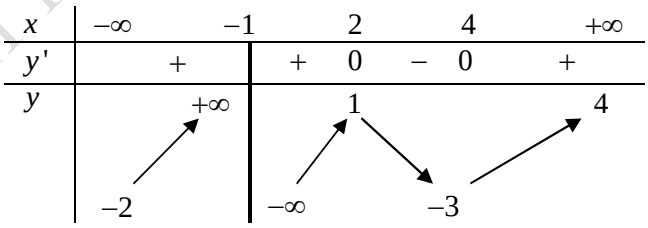
A. Hàm số có giá trị lớn nhất $y=2$

B. $ad-bc<0$

C. $ad-bc>0$

D. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



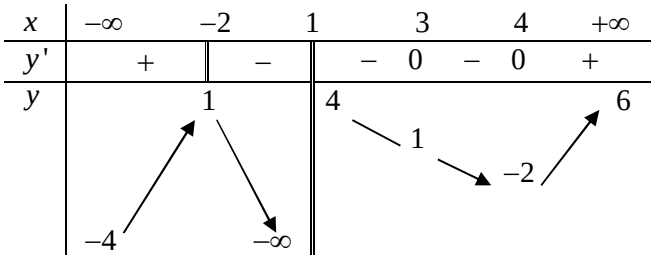
A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

B. Hàm số có giá trị lớn nhất $y=4$

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất $y=-3$

D. Đồ thị hàm số không cắt tiệm cận ngang $y=-2$

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

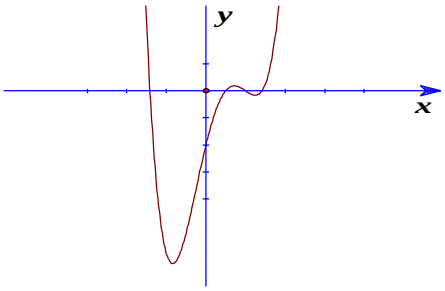
B. Hàm số có 2 cực trị.

C. Hàm số có 3 cực trị

D. Hàm số không đạt cực trị tại $x=-2$

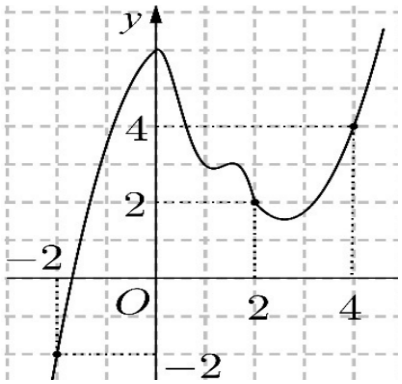
Gv. Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



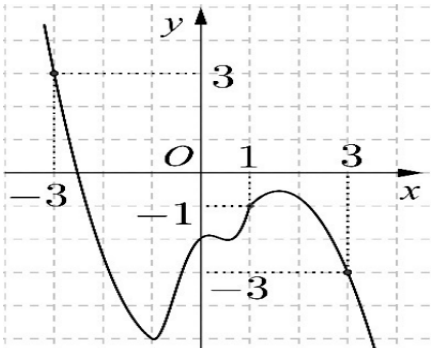
A. Hàm số có 2 cực trị.
B. Hàm số có 3 cực trị.
C. Hàm số $y=f(x)-x^2$ có 2 cực trị
D. Hàm số $y=f(x)-2$ có 2 cực trị

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



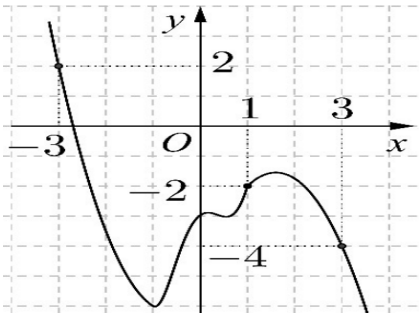
A. $h(4)=h(-2)>h(2)$
B. $h(4)=h(-2)<h(2)$
C. $h(2)>h(4)>h(-2)$
D. $h(2)>h(-2)>h(4)$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f^2(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$
B. $g(1)<g(3)<g(-3)$
C. $g(1)<g(-3)<g(3)$
D. $g(-3)<g(3)<g(1)$

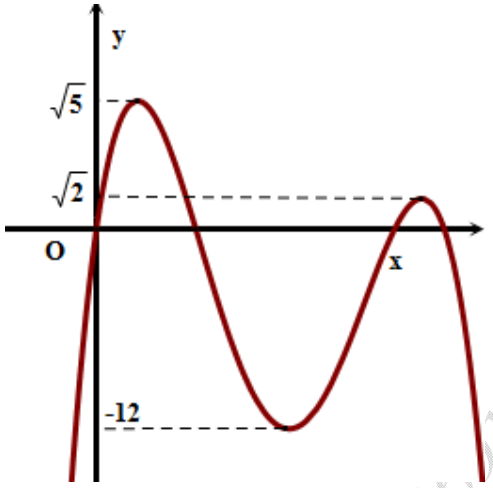
Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $g(1)<g(3)<g(-3)$
B. $g(1)<g(-3)<g(3)$
C. $g(3)=g(-3)<g(1)$
D. $g(3)=g(-3)>g(1)$

GV: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì 0969141404

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ . Tìm m để phương trình $f(x)=2m-1$ có 4 nghiệm phân biệt ?



A. $-\frac{11}{2}<m<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

B. $-12<m<\sqrt{2}$

C. $-\frac{12}{2}<m<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D. $-\frac{11}{2}\le m\le\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=2m$ có 4 nghiệm phân biệt khi

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$+\infty$			1				4
	-2			$-\infty$			-3		

A. $-2\le m<1$

B. $-1\le m<\frac{1}{2}$

C. $-1\le m<2$

D. $-\frac{3}{2}<m<1$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=m^2-2$ có 4 nghiệm khi và chỉ khi ?

x	$-\infty$		-2		1		3		4		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
y			1			4					6
	-4			$-\infty$			1		-2		

A. $m\in(-1;1)\setminus\{0\}$

B. $m\in(-1;1)$

C. $m\in(-\sqrt{2};2)\setminus\{0\}$

D. $m\in(-1;2)\setminus\{0\}$

Câu 44: Cho hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là ?

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$+\infty$			1				4
	-2			$-\infty$			-3		

A. 3

B. 4

C. 5

6

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x)|-\frac{1}{2}=0$ có số nghiệm là?

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$+\infty$			1				4
	-2			$-\infty$			-3		

A. 5

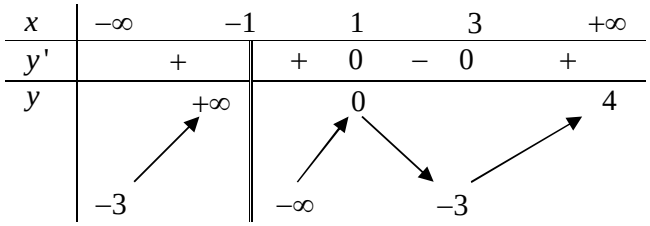
B. 6

C. 7

D. 8

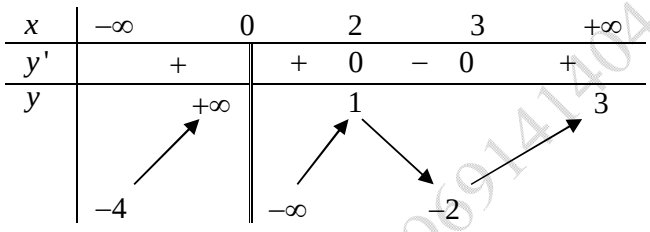
Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 46: Cho hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là?



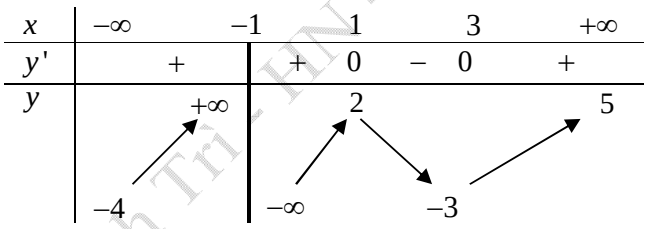
A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

Câu 47: Cho hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)-\frac{x^3}{3}$ là ?



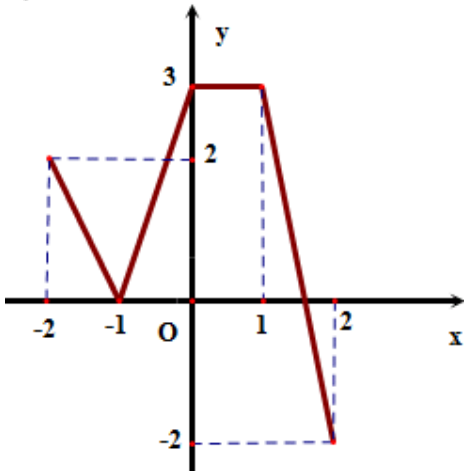
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

Câu 48: Cho hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)-\frac{x^2}{2}$ là ?



A. 1
B. 2
C. 3
4

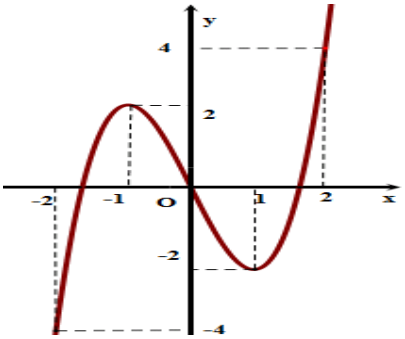
Câu 49: ***(Trường THPT Thanh Chương 1 lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$; $f(x)=3, \forall x\in[0;1]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Nếu $x\in(0;1)$ thì $f'(x)=0$.
B. Nếu $x\in(-2;0)$ thì $f'(x)>0$.
C. Nếu $x\in(-2;0)$ thì $f'(x)<0$.
D. Nếu $x\in(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

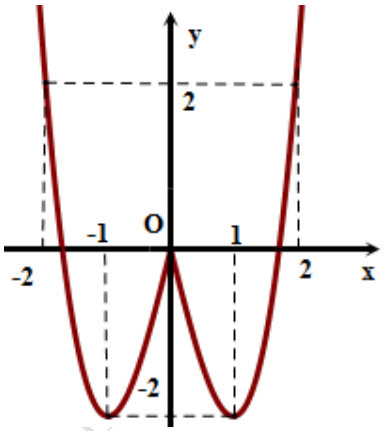
Câu 50: ***(Trường THPT Quảng Xương 1 lần 3 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt là:

Cty Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404



A. $m\in(2;+\infty)$ **B.** $m\in[-2;2]$ **C.** $m\in(-2;3)$ **D.** $m\in(-2;2)$

Câu 51: ***(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như sau



A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(2)$

B. $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(1)$

C. $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(0)$

D. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)$

Câu 52: ***(Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)=4ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm $x_1<x_2<x_3<\dfrac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi

A. $\dfrac{1}{2}<m<1$ **B.** $0<m<1$ **C.** $0<m\le 1$ **D.** $\dfrac{1}{2}\le m<1$

Câu 53: ***(Trường THPT Đức Thọ năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên tập $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

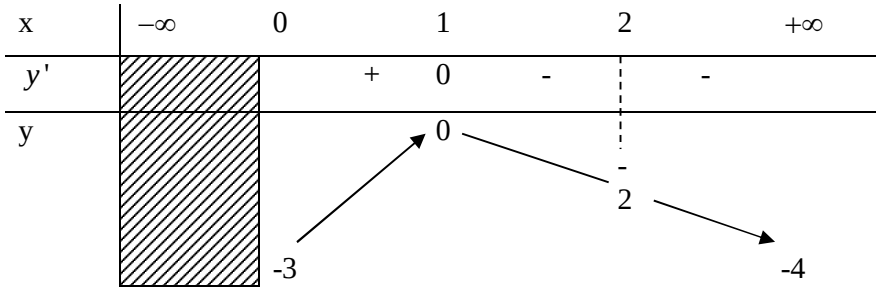
A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;8]$ bằng -2

B. Phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi $m>-2$

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$

Câu 54: ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[0;+\infty)$, liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau



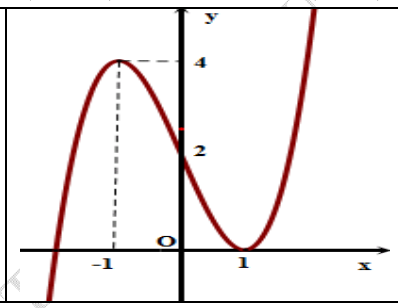
Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0;2)$ và $x_2 \in (2;+\infty)$

A. $(-4;-3)$ **B.** $(-3;0)$ **C.** $(-3;-2)$ **D.** $(-4;0)$

Câu 55: ***(Trường THPT Đặng Thúc Hứa lần 2 năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị

A. $m>1$. **B.** $m>-1$.

C. $m<-1$. **D.** $m<1$.



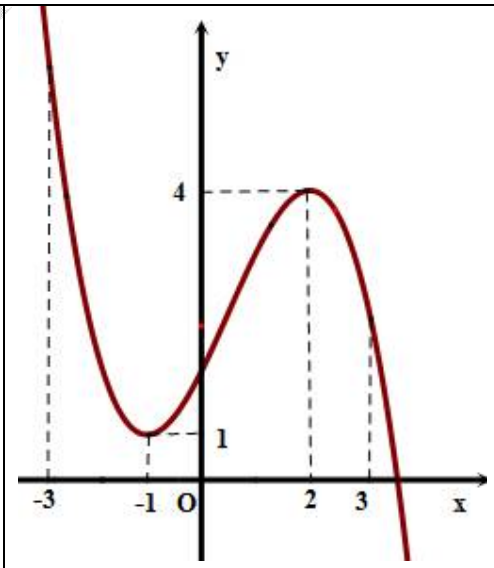
Câu 56: ***(Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp năm 2017)*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị đường cong ở hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng trên đoạn $[-3;3]$?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.



GV: Lương Văn Huy - LTĐH - 0969141404

BT LÀM THÊM (THAM KHẢO STRONG VD – VDC)

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3(a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{85}{27}$	↘	3	↗	$+\infty$

Xác định dấu của hệ số a,b,c?

A. $a>0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$.

C. $a<0.b<0,c<0$. **D.** $a<0,b<0,c>0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2c+1$	↘	$-a$	↗	$+\infty$

Tìm $S=a+b+c+d$.

A. 1. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

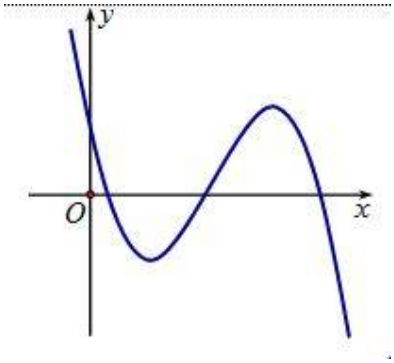
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tính $S=a+b$.

A. $S=-1$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=1$. **D.** $S=0$.

Câu 4. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ

Gv: Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

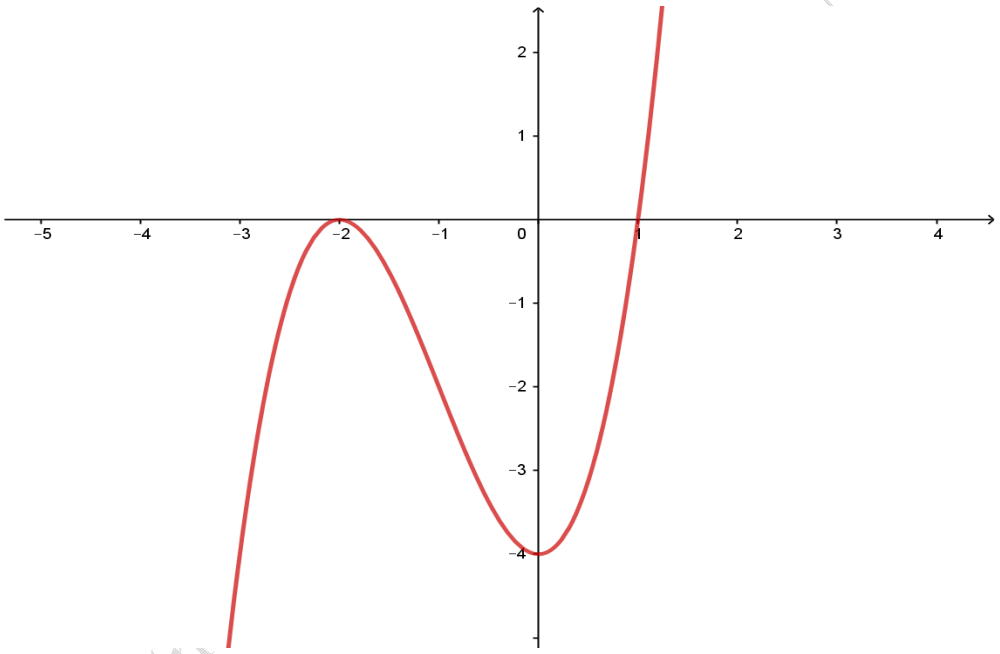


Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

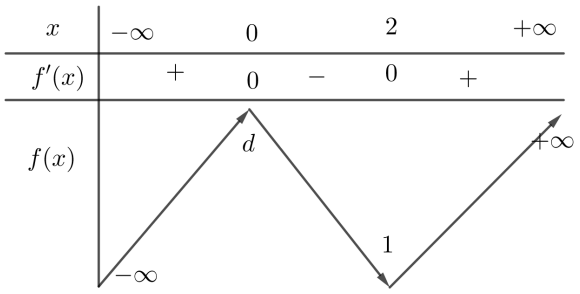
C. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

Câu 5. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in R\right)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2+d^2$



A. 16 . **B.** 25 . **C.** 10 . **D.** 26 .

Câu 6 . Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in R\right)$ có bảng biến thiên sau



Xác định dấu của a,b,d .

A. $a>0,b<0,d<0$. **B.** $a<0,b<0,d>0$.

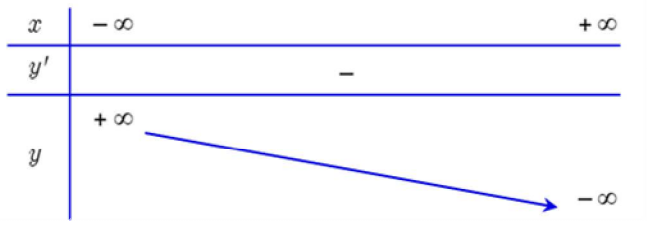
C. $a<0,b>0,d>0$. **D.** $a>0,b<0,d>0$.

Gv : Lương Văn Huy - 0969141404

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+c^2+b$ bằng

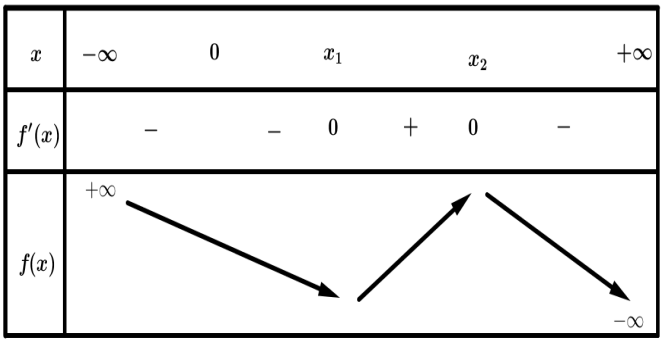
A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{-3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $-\frac{3}{8}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^3+bx$. Tìm điều kiện của $a;b$ để hàm số có bảng biến thiên như sau:



A. $a\leq 0;b\leq 0$. **B.** $a=0;b>0$. **C.** $\left[\begin{array}{l}a=0;b<0\\a<0;b\leq 0\end{array}\right.$. **D.** $a>0;b\leq 0$.

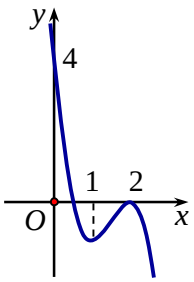
Câu 9 . Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b<0,c<0$. **B.** $b>0,c>0$. **C.** $b>0,c<0$. **D.** $b<0,c>0$.

Câu 10 . Cho hàm số $y=-2x^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới.

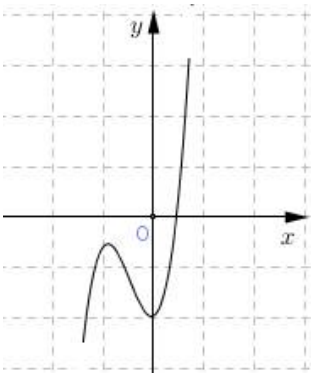


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $bcd=-144$. **B.** $c^2<b^2+d^2$. **C.** $b+c+d=1$. **D.** $b+d<c$.

Câu 11: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

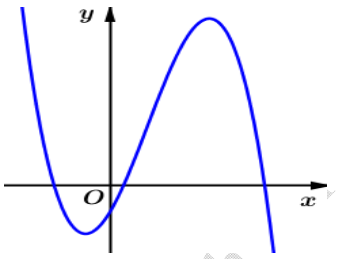
Gv : Lương Văn Huy - 0969141404



A. $a>0,b<0,c=0,d<0$. **B.** $a>0,b=0,c<0,d<0$.

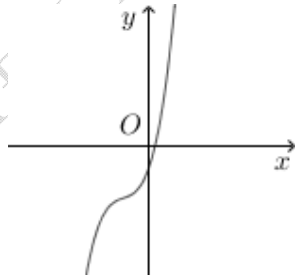
C. $a>0,b=0,c>0,d<0$. **D.** $a>0,b>0,c=0,d<0$.

Câu 12. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 13. Hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây.



Biết $f'(-1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Hỏi trong các hệ số a, b, c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. Hàm số $y=f(x)=\frac{x^3}{3}+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên được cho như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu số âm trong các hệ số a, b, c?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

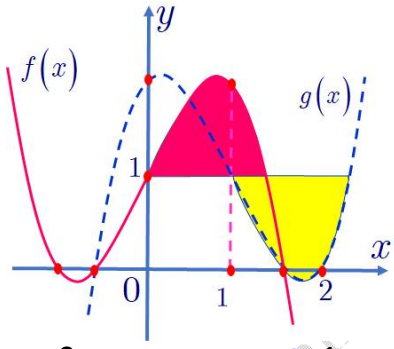
Câu 15. Cho hàm số $y=ax^3+x^2+cx+d$ có đồ thị (C) với $a,c,d\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ $-a^3-3a^2+6a+4$. Hỏi có bao nhiêu giá trị a thỏa mãn.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH - Thanh Trì - HN - 0969141404

A. 0.

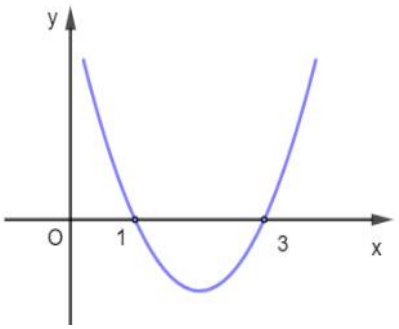
x	$-\infty$	a	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$f(1)$ ↘	$-\infty$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=ax^3+cx+1$ và $g(x)=f(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây . Biết rằng diện tích miền tô đậm bằng 2, với a và c là các số nguyên. Tính giá trị $a.c$?



A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $3a+2b+c=0$. **B.** $6a+b=0$. **C.** $3b-2c=0$. **D.** $9a-c=0$.

Câu 18 . Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tính giá trị $T=2a+b-3c$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

A. $-\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** 0.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-mx^2+m^2-1(m\neq 1)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tính giá trị $T=m^2-2a+1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	a	↗	3	↘	a	↗	$+\infty$

A. -6 . **B.** 1. **C.** 8. **D.** 5.

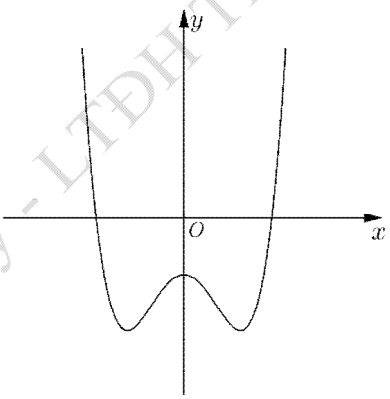
Câu 20. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $ac>0$. **B.** $ac<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $abc>0$.

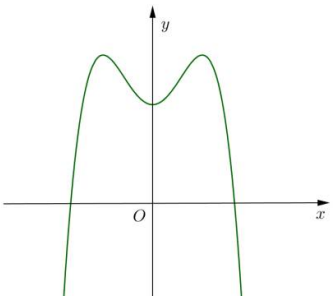
Câu 21. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

A.0. **B.** 1. **C.**2. **D.** 3.

Câu 22. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ

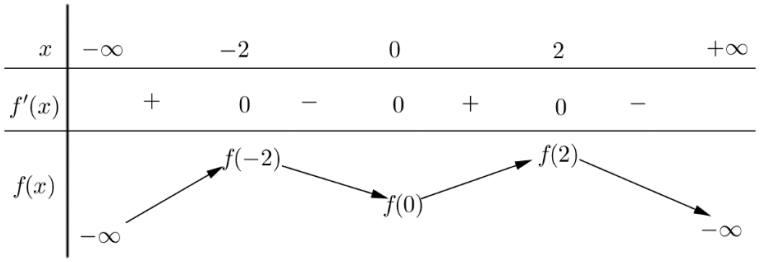


Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

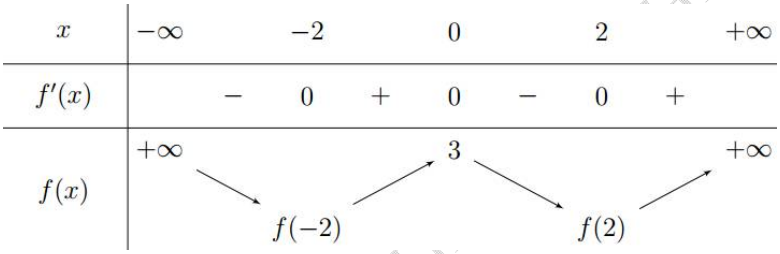
Câu 23 . Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+a-b+2020c\ (a\neq 0)$ có đồ thị (C) và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng đồ thị (C) cắt đường thẳng $y=1$tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x\neq\pm 2$ .Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

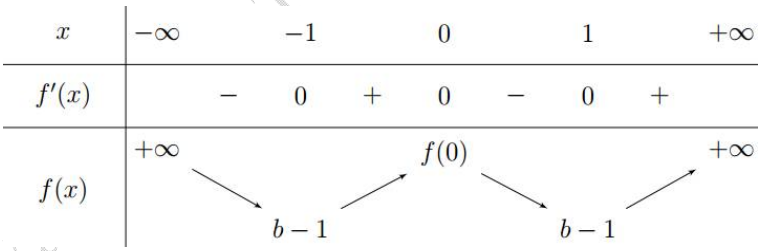
Câu 24. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

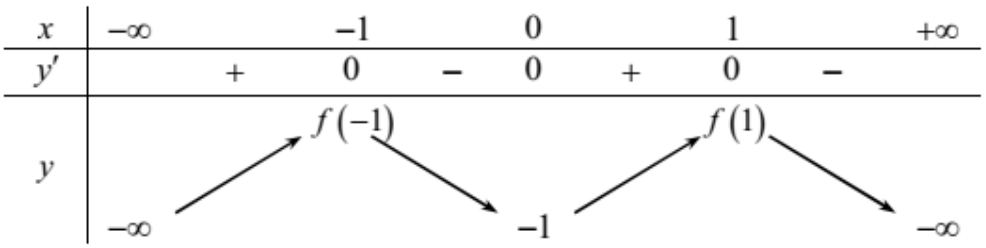
Câu 25. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c-2b$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

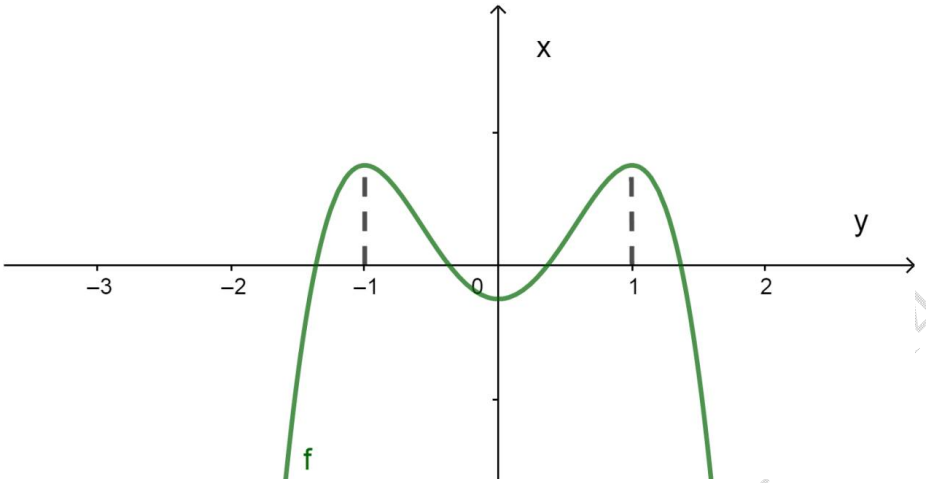


Giá trị lớn nhất của hàm $|f(x)|$ trên đoạn $[0;1]$là 1. Khẳng định nào đúng với giá trị của $3a+b+c+1$là ?

A. $3a+b+c+1\geq 7$. **B.** $3a+b+c+1\leq 6$. **C.** $3a+b+c+1=-1$.

D. $3a+b+c+1=0$.

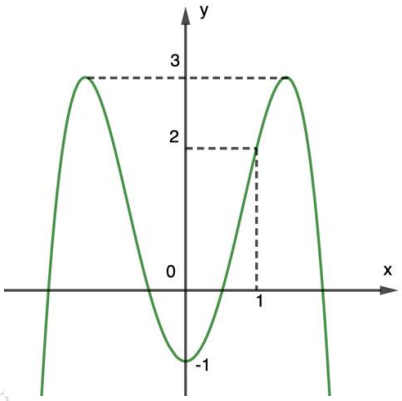
Câu 27. Cho hàm số $y=ax^4-bx^2-a-2020b+2021c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong 3 số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

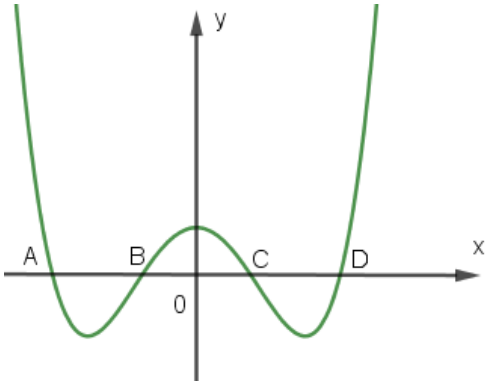
Câu 28. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$.

A. $M=18$. **B.** $M=6$. **C.** $M=20$. **D.** $M=24$.

Câu 29. Đồ thị hàm số $(C): y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm A,B,C,D phân biệt như hình vẽ dưới đây

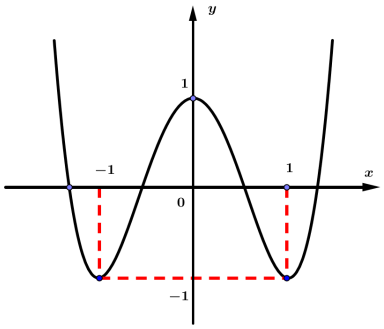


Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a>0,b<0,c>0,100b^2=9ac$. **B.** $a>0,b>0,c>0,9b^2=100ac$.

C. $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$. **D.** $a>0,b>0,c>0,100b^2=9ac$.

Câu 30. Biết rằng hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Giá trị $f(a+b+c)$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=3a+2b+c$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

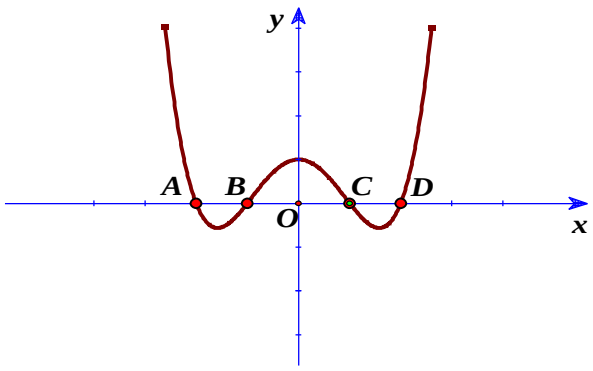
Câu 32. Cho hàm số $f(x)=mx^4+\left(m^2-m-6\right)x^2-m^2+9\ (m\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		α	0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		0	↘		↗	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 33. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+1(a,b\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên và $AB=CD=\frac{1}{2}BC$. Gọi $M(a;b)$ khi đó quỹ tích M là



A. Parabol $(P): x = \frac{25}{4}y^2$ (Trừ gốc tọa độ). **B.** Parabol $(P): y = \frac{4}{25}x^2$ (Trừ gốc tọa độ).

C. Đồ thị $(C): y = -\frac{2}{5}\sqrt{x}$ (Trừ gốc tọa độ). **D.** Đồ thị $(C): y = -\frac{5}{2}\sqrt{x}$ (Trừ gốc tọa độ).

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0, b>0, c>0$. **B.** $a>0, b>0, c<0$. **C.** $a<0, b<0, c>0$. **D.** $a<0, b<0, c<0$.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	↘	$+\infty$ | $-\infty$	↘	-1

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0, b>0, c>0$. **B.** $a<0, b>0, c<0$. **C.** $a<0, b<0, c>0$. **D.** $a<0, b<0, c<0$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-3}{bx+c}$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

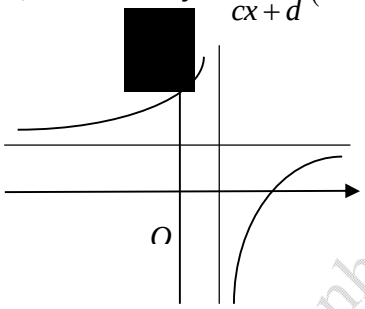
GV: Lương Văn Huy - LTĐ - HN - 0969141404

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$3 \searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow 3$

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

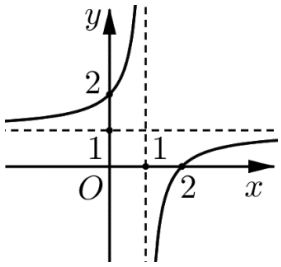
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 37. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $\begin{cases} ac>0 \\ bd<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ac>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ab>0 \\ cd>0 \end{cases}$.

Câu 38. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

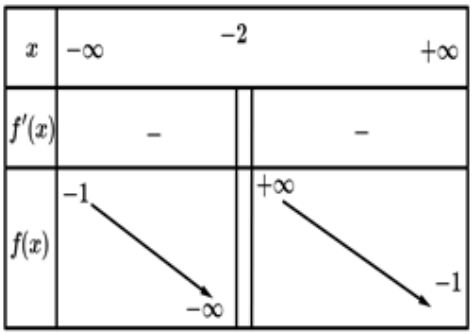
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	$\|\|$	$+$
y	$-1 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow -1$

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

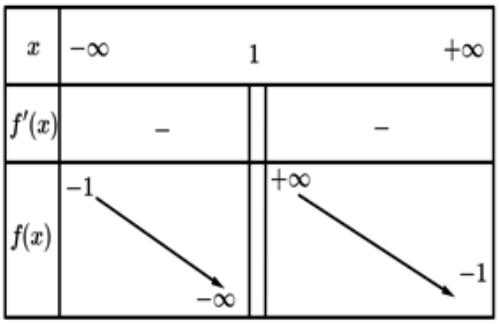
Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{-x+c}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=b^3+\dfrac{9ab^2}{c}-c$ là



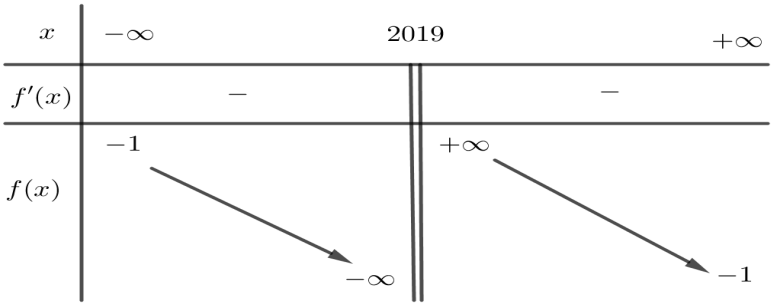
A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 42. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax-2020}{bx+c}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:

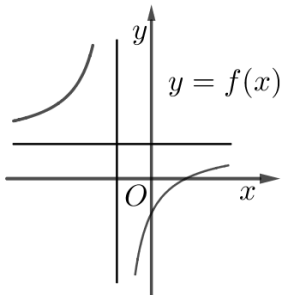


Gv. Lương Văn Huy - 0969141404

Gọi T là tập hợp các số nguyên $b \in (-2020;2020)$ thỏa mãn hàm số đã cho. Khi đó tổng các phần tử của tập hợp T có giá trị bằng:

A. 0. **B.** -1. **C.** 2019. **D.** 1.

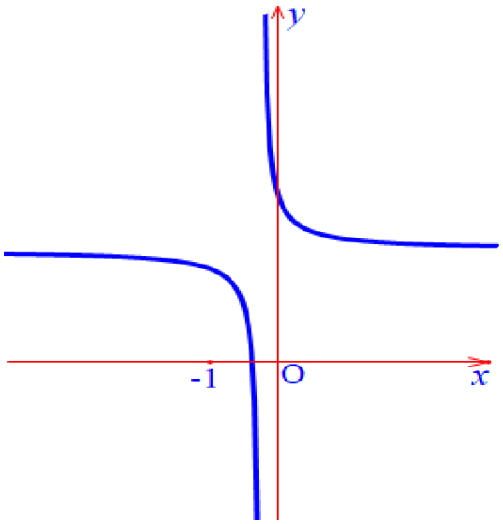
Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad-bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $ad<0, ab>0$. **B.** $bd>0, ad<0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{8x+b}{4x+d}$ (b,d là các số nguyên, $b<4$) có đồ thị trong hình vẽ dưới đây:

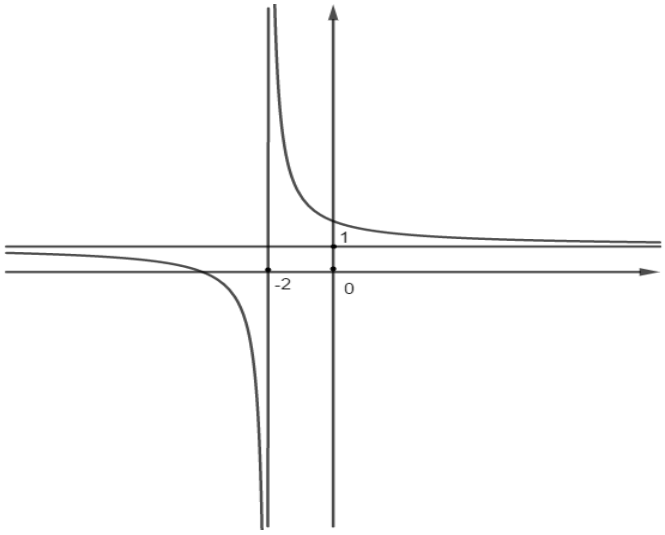


Biết $m=3b+d$. Khi đó:

A. $m \in [2;10)$. **B.** $m \in (-20;-10)$. **C.** $m \in (-30;-20)$. **D.** $m \in (9;20)$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}(a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

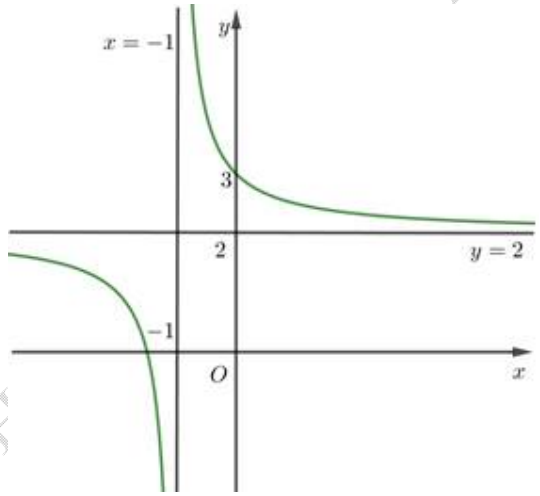
Thầy : Lương Văn Huy - 0969141404



Gọi S là tập nghiệm của phương trình $a^2t^3-2abt^2+\left(b^2-ac\right)t+bc=0$. Số phần tử của tập S thuộc khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

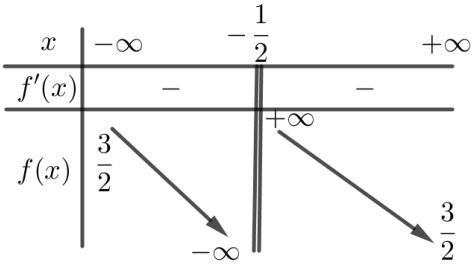
Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+1},\ \left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Giá trị của biểu thức sau $S=\log_{\sqrt[3]{abc}}\left(2b\right)+\log_{bc}\sqrt[5]{abc}+f\left(1\right)$ thuộc khoảng nào?

A. $\left(3;5\right)$. **B.** $\left(4;5\right)$. **C.** $\left(6;7\right)$. **D.** $\left(5;6\right)$.

Câu 47. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+1},\ \left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

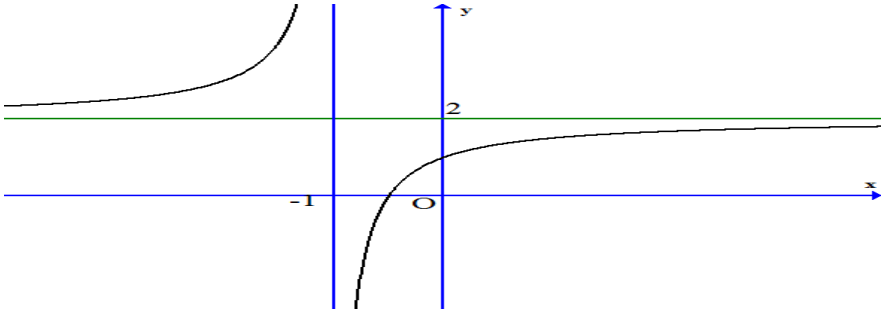
Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'	$+$		$+$		
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Biết $f(2)+f(-1)-2$ là số nguyên dương. Tính $f(2020)$?

A. $\dfrac{4036}{2019}$. **B.** $\dfrac{4044}{2019}$. **C.** $\dfrac{4039}{2019}$. **D.** $\dfrac{4041}{2019}$.

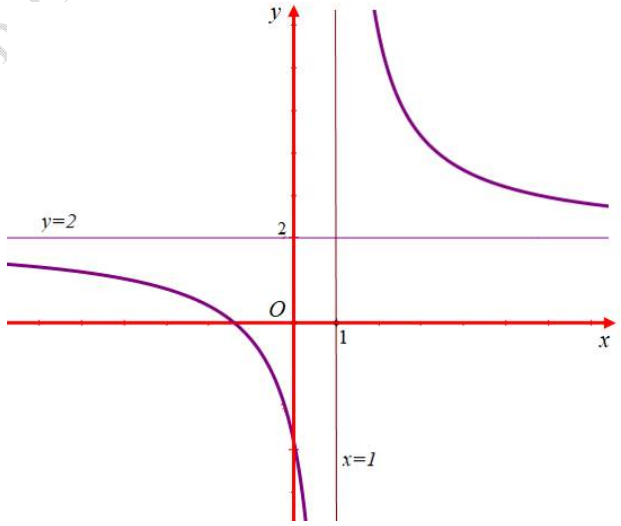
Câu 49. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f'(1)=\dfrac{1}{4}$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là?

A. $y=\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=\dfrac{9x}{64}+\dfrac{31}{2}$. **C.** $y=-\dfrac{x}{9}+\dfrac{15}{32}$. **D.** $y=\dfrac{x}{64}+\dfrac{51}{32}$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a\in\mathbb{Z},d\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*,c\in\mathbb{N}^*)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f^2(-1)+f^2(-3)$ đạt giá trị nhỏ nhất và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $f(2020)$?

Gv : Lương Văn Huy
0969141404

A. $f(2020)=\dfrac{6737}{3364}$. **B.** $f(2020)=\dfrac{6735}{3364}$. **C.** $f(2020)=\dfrac{6736}{3365}$. **D.** $f(2020)=\dfrac{6738}{3365}$.

BẢNG ĐÁP ÁN – BT LÀM THÊM

1. B	**2. B**	**3. B**	**4. A**	**5. D**	**6. D**	**7. D**	**8. C**	**9. C**	**10. C**
11. D	**12. A**	**13. C**	**14. A**	**15. C**	**16. B**	**17. C**	**18. A**	**19. B**	**20. A**
21. C	**22. C**	**23. C**	**24. C**	**25. B**	**26. B**	**27. A**	**28. A**	**29. C**	**30. C**
31. B	**32. C**	**33. D**	**34. C**	**35. B**	**36. A**	**37. B**	**38. B**	**39. A**	**40. D**
41. C	**42. B**	**43. C**	**44. D**	**45. C**	**46. D**	**47. B**	**48. A**	**49. D**	**50. D**

ĐÁP ÁN 56 CÂU RÈN LUYỆN

1. A	**2. C**	**3. A**	**4. A**	**5. D**	**6. A**	**7. B**	**8. A**	**9. C**	**10. A**
11. A	**12. A**	**13. C**	**14. C**	**15. C**	**16. A**	**17. B**	**18. B**	**19. A**	**20. B**
21. C	**22B**	**23. A**	**24. B**	**25. C**	**26. B**	**27. A**	**28.A**	**29.A**	**30.A**
31.C	**32.A**	**33.A**	**34.B**	**35.A**	**36.B**	**37.C**	**38.C**	**39.B**	**40.A**
41.A	**42.B**	**43.A**	**44.D**	**45.D**	**46.A**	**47.B**	**48.B**	**49.**	**50.D**
51.B	**52.A**	**53.D**	**54.C**	**55.C**	**56.B**				

Gv : Lương Văn Huy - LTĐH Thanh Trì - HN - 0969141404