TOÁN LUYỆN THI ĐẠI HỌC

BÙI TRẦN DUY TUẤN

btdt94@gmail.com

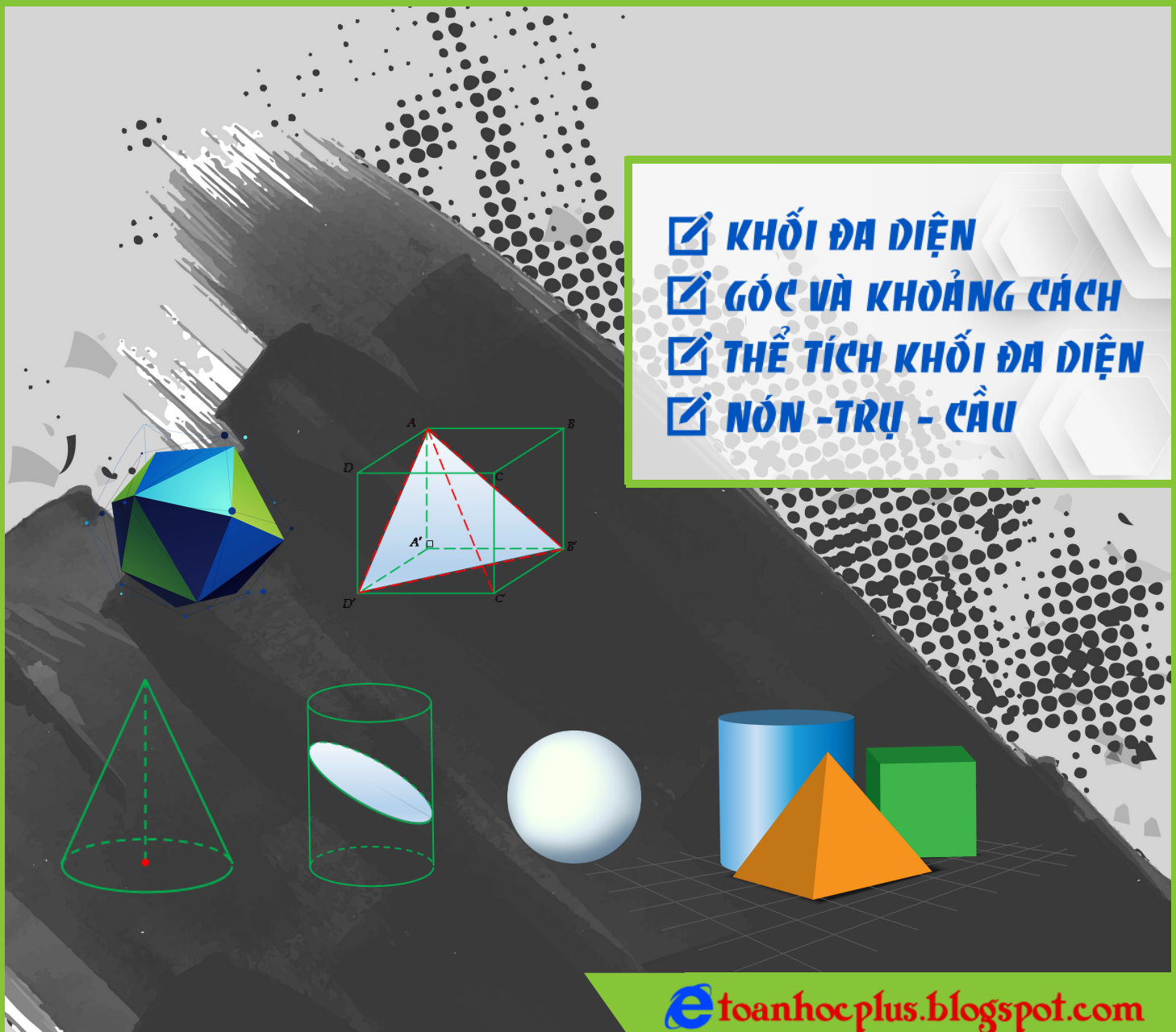
https://facebook.com/duytuan.qna

Chuyên đề

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

TOÀN TẬP

- KHỐI ĐA DIỆN
- GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH
- THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN
- NÓN - TRỤ - CẦU



toanhocplus.blogspot.com

"Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường."

Tài liệu gồm 301 trang bao gồm các chủ đề sau:

Chủ đề 1. Khối đa diện. Phép biến hình trong không gian

Chủ đề 2. Góc trong không gian

Chủ đề 3. Khoảng cách trong không gian

Chủ đề 4. Thể tích khối đa diện

Chủ đề 5. Nón - Trụ - Cầu

Bố cục của các chủ đề gồm các phần sau:

1. Kiến thức cơ bản cần nắm
2. Các dạng toán và phương pháp giải (kèm theo các bài toán minh họa)
3. Bài tập trắc nghiệm rèn luyện (có đáp án và lời giải chi tiết)

Tài liệu được tôi sưu tầm, tổng hợp và biên soạn để làm tư liệu cho các em lớp 12 ôn thi kỳ thi THPT Quốc gia tham khảo, giúp các em ôn lại kiến thức nhanh chóng và hiệu quả hơn. Trong quá trình tổng hợp và biên soạn không tránh khỏi những sai sót đáng tiếc do số lượng kiến thức và bài tập khá nhiều. Mong các đọc giả thông cảm và đóng góp ý kiến để những tài liệu sau của tôi được chỉnh chu hơn!

Mọi đóng góp và liên hệ về tài liệu xin gửi về:

Facebook: https://web.facebook.com/duytuan.qna.

Gmail: btdt94@gmail.com.

Truy cập Website: https://toanhocplus.blogspot.com/ để xem thêm các chuyên đề luyện thi đại học khác của tôi tổng hợp và biên soạn.

*Thầy cô nào cần **"Cần file Word"** liên hệ tôi.*

Xin chân thành cảm ơn!!!

Quảng Nam – 15.09.2018

Tác giả: Bùi Trần Duy Tuấn

MỤC LỤC

MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC CƠ BẢN CẦN NẮM VỮNG 8
I. MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC PHẲNG 8
1. Các đường trong tam giác 8
2. Tam giác ABC vuông tại A 8
3. Các hệ thức lượng trong tam giác thường 9
4. Hai tam giác đồng dạng và định lí Talet 9
5. Các công thức tính diện tích 10
II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN 10
1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 10
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc 10
3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 11
4. Hai định lí về quan hệ vuông góc 11
5. Định lí ba đường vuông góc, công thức diện tích hình chiếu 11

CHỦ ĐỀ 1: KHỐI ĐA DIỆN. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN 12
A. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN 12
I. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP VÀ KHỐI LĂNG TRỤ 12
1. Khái niệm về hình đa diện 12
2. Khái niệm về khối đa diện 12
3. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện 14
Một số kết quả quan trọng 14
B. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN . HAI HÌNH BẰNG NHAU 15
I. PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN 15
1. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ 15
2. Phép đối xứng qua tâm O 15
3. Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ) 15
4. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) 15
Mặt phẳng đối xứng của một số hình thường gặp 15
II. HAI HÌNH BẰNG NHAU 18
III. PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN 18
1. Phép vị tự trong không gian 18
2. Hai hình đồng dạng 18

C. KHỐI ĐA DIỆN LỒI. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU 19
I. KHỐI ĐA DIỆN LỒI 19
II. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU 19
Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi 20
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 21
I. ĐỀ BÀI 21
1. Khái niệm khối đa diện 21
2. Khối đa diện lồi. Khối đa diện đều 24
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 26
1. Khái niệm khối đa diện 26
2. Khối đa diện lồi. Khối đa diện đều 29

CHỦ ĐỀ 2: GÓC TRONG KHÔNG GIAN 31
A. GÓC TRONG KHÔNG GIAN 31
I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG 31
1. Phương pháp 31
2. Một số bài toán minh họa 31
II. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG 37
1. Phương pháp 37
2. Một số loại góc giữa đường thẳng và mặt phẳng thường gặp đối với hình chóp 38
3. Một số bài toán minh họa 38
III. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG 43
1. Phương pháp 43
2. Một số bài toán minh họa 44
B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 49
I. ĐỀ BÀI 49
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 54

CHỦ ĐỀ 3: KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN 69
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 69
B. GIẢI BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH 70
DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG 70
1. Phương pháp 70
2. Một số bài toán minh họa 71

DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG 76
1. Phương pháp 76
2. Một số bài toán minh họa 78
DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG 87
1. Phương pháp 87
2. Một số bài toán minh họa 87
DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU 91
1. Phương pháp 91
2. Một số bài toán minh họa 92
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 100
I. ĐỀ BÀI 100
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 108

CHỦ ĐỀ 4: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 130
A. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 130
I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP 130
II. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI HỘP CHỮ NHẬT 130
III. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KỸ THUẬT CẦN NẮM 131
1. Một số khái niệm và tính chất 131
2. Kỹ thuật tìm đường cao bằng cách đưa về bài toán tìm khoảng cách từ 1 điểm đến một mặt phẳng 131
B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ DẠNG TOÁN TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 132
I. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN TRỰC TIẾP 132
1. Phương pháp 132
2. Một số bài toán minh họa 132
II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH GIÁN TIẾP BẰNG CÁCH PHÂN CHIA LẮP GHÉP CÁC KHỐI CHÓP 144
1. Phương pháp 144
2. Một số bài toán minh họa 144
III. PHƯƠNG PHÁP TỶ SỐ THỂ TÍCH 151
1. Phương pháp 151
2. Một số bài toán minh họa 151
IV. BÀI TOÁN MIN MAX THỂ TÍCH 163
1. Phương pháp 163
2. Một số bài toán minh họa 163

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 172
I. ĐỀ BÀI 172
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 183

PHẦN MỞ RỘNG: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN 212
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 212
1. Hệ trục tọa độ trong không gian 212
2. Tọa độ vecto 212
3. Tọa độ của điểm 212
4. Tích có hướng của hai vectơ 213
5. Vấn đề về góc 213
6. Vấn đề về khoảng cách 214
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA ỨNG DỤNG HÌNH GIẢI TÍCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN 215

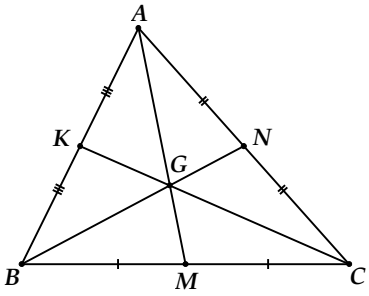
CHỦ ĐỀ 5: NÓN - TRỤ - CẦU 224
A. MẶT NÓN 224
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 224
1. Mặt nón tròn xoay 224
2. Hình nón tròn xoay 224
3. Công thức diện tích và thể tích của hình nón 224
4. Giao tuyến của mặt tròn xoay và mặt phẳng 225
II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 225
1. ĐỀ BÀI 225
2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 232
B. MẶT TRỤ 247
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 247
1. Mặt trụ tròn xoay 247
2. Hình trụ tròn xoay 247
3. Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ 247
4. Tính chất 247
II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 248
1. ĐỀ BÀI 248

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 257
C. MẶT CẦU 271
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 271
1. Định nghĩa 271
2. Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu 271
3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu 271
4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu 271
5. Diện tích và thể tích mặt cầu 272
6. Một số khái niệm về mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện 272
II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 273
1. ĐỀ BÀI 273
2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 280

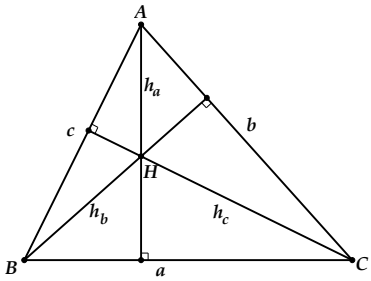
MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC CƠ BẢN CẦN NẮM VỮNG

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC PHẲNG

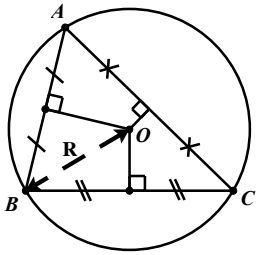
1. Các đường trong tam giác



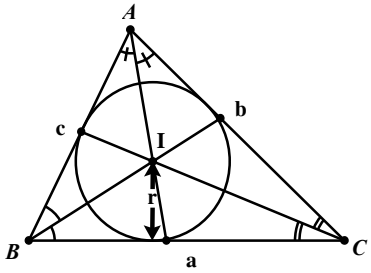
Trọng tâm G của tam giác là giao điểm ba đường trung tuyến, và $AG = \frac{2}{3} AM$.



Trực tâm H của tam giác ABC là giao điểm ba đường cao.

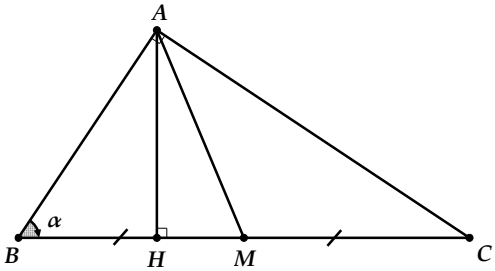


Tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực.



Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác trong.

2. Tam giác vuông ABC vuông tại A



✪ Các tỉ số lượng giác:

+ $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ + $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$

+ $\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$ + $\cot\alpha = \frac{AB}{AC}$

✪ Định lí Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

✪ Diện tích: $S = \frac{1}{2} AB.AC$

✪ Độ dài đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2} BC$

✪ Hệ thức lượng:

+ $AH.BC = AB.AC$

+ $AB^2 = BH.BC$, $AC^2 = CH.CB$

+ $AH^2 = BH.HC$

+ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$, $AH^2 = HB.HC$

3. Các hệ thức lượng trong tam giác thường

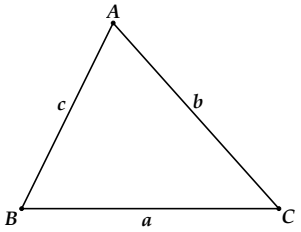
Cho tam giác ABC có: + Độ dài các cạnh tương ứng là a,b,c

+ Chiều cao tương ứng kẻ từ các đỉnh A,B,C lần lượt là h_a,h_b,h_c

+ r,R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp ΔABC

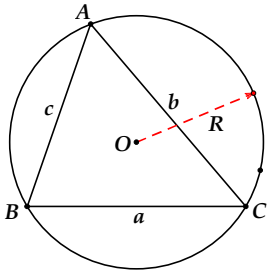
+ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi ΔABC)

a) Định lý cosin:



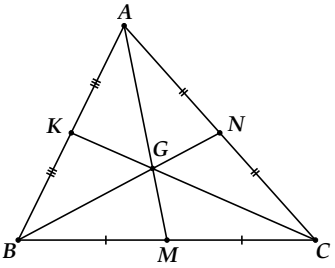
- $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}\Rightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\boxed{b^2=a^2+c^2-2ac\cos B}\Rightarrow \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
- $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}\Rightarrow \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

b) Định lý sin:



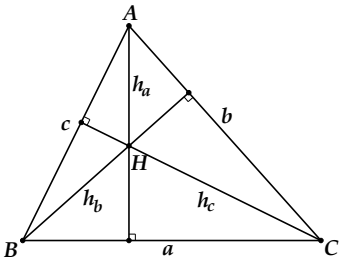
- $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

c) Công thức tính độ dài đường trung tuyến:



- $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}$
- $BN^2=\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}$
- $CK^2=\dfrac{CA^2+CB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}$

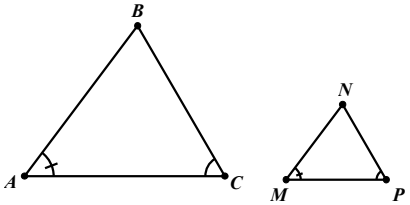
d) Công thức tính diện tích tam giác:



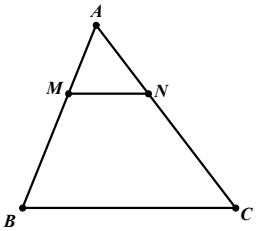
Gọi S là diện tích ΔABC:

- $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c$
- $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$
- $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R};\ S_{\Delta ABC}=p.r$
- $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4. Hai tam giác đồng dạng và định lí Talet



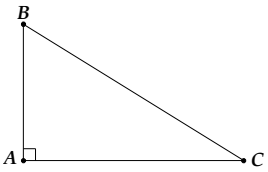
- $\Delta ABC\backsim\Delta MNP$ nếu chúng có 2 góc <u>tương ứng</u> bằng nhau
- Nếu $\Delta ABC\backsim\Delta MNP$ thì $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{MN}{MP}$



$MN//BC\Leftrightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$

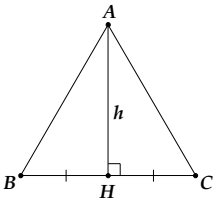
5. Các công thức tính diện tích

✪ *Diện tích tam giác vuông*



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC$$

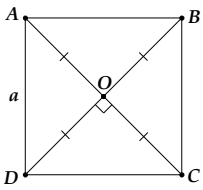
✪ *Diện tích tam giác đều*



Diện tích Δ đều: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Chiều cao Δ đều: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

✪ *Diện tích hình vuông và hình chữ nhật*

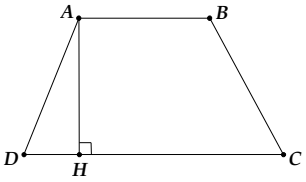


$S_{HVuong} = a^2$

Đường chéo h/vuông: $a\sqrt{2}$

$S_{HCN} = AB.AD$

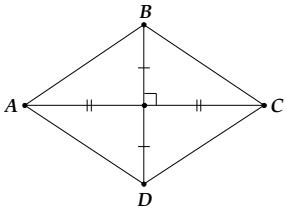
✪ *Diện tích hình thang*



$$S = \frac{(AB+CD).AH}{2}$$

✪ *Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc*

- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc nhau bằng $\frac{1}{2}$ tích hai đường chéo.
- Hình thoi có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đường.



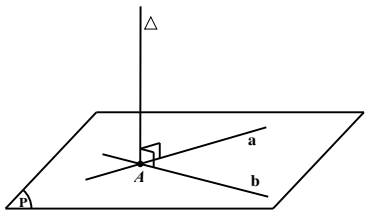
$$S = \frac{1}{2} AC.BD$$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp:

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc $mp(P)$ ta chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong $mp(P)$.



Trình bày bài

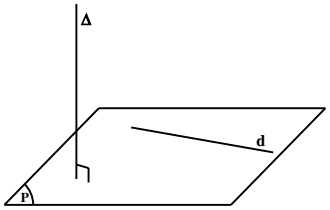
Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp a \subset (P) \\ \Delta \perp b \subset (P) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta \perp (P)$

2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp:

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d ta chứng minh Δ vuông góc với $mp(P)$ chứa d.



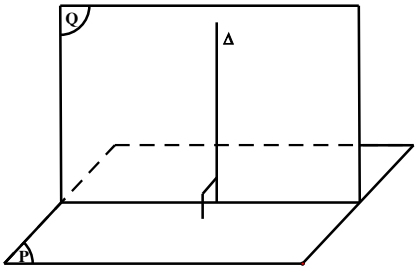
Trình bày bài

Ta có: $\Delta \perp (P) \supset d \Rightarrow \Delta \perp d$

3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp:

Để chứng minh $mp(Q) \perp mp(P)$ ta chứng minh $mp(Q)$ chứa một đường thẳng Δ vuông góc $mp(P)$.



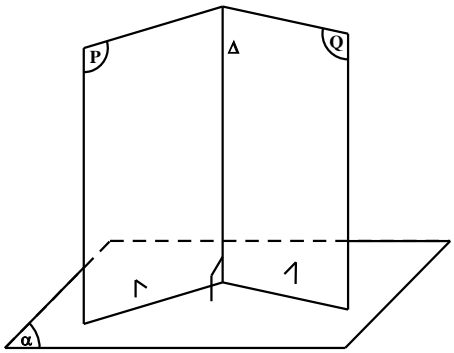
Trình bày bài

Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp (P) \\ \Delta \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (Q) \perp (P)$

4. Hai định lí về quan hệ vuông góc

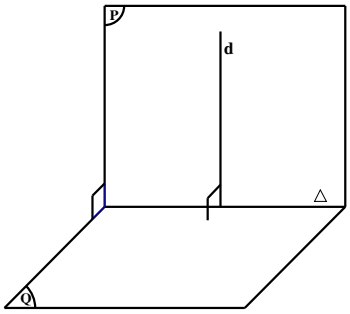
Định lí 1:

Nếu $mp(P)$ và $mp(Q)$ cùng vuông góc với $mp(\alpha)$ thì giao tuyến (nếu có) của chúng vuông góc $mp(\alpha)$.

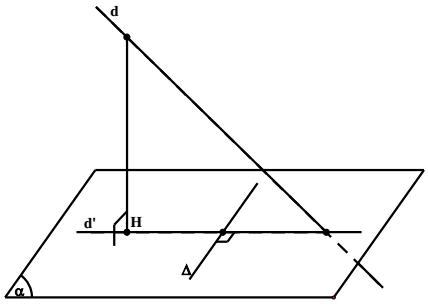


Định lí 2:

Cho $mp(P)$ vuông góc $mp(Q)$. Một đường thẳng d nằm trong $mp(P)$ vuông góc với giao tuyến Δ của (P) và (Q) thì d vuông góc $mp(Q)$.

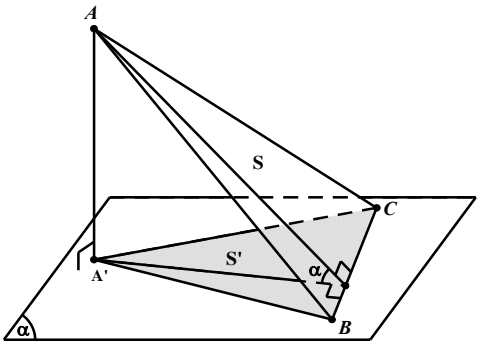


5. Định lí ba đường vuông góc, công thức diện tích hình chiếu



Gọi d' là hình chiếu của d trên (α).

Ta có: $\Delta \perp d' \Leftrightarrow \Delta \perp d$



$S' = S.\cos\alpha$

Chủ đề 1

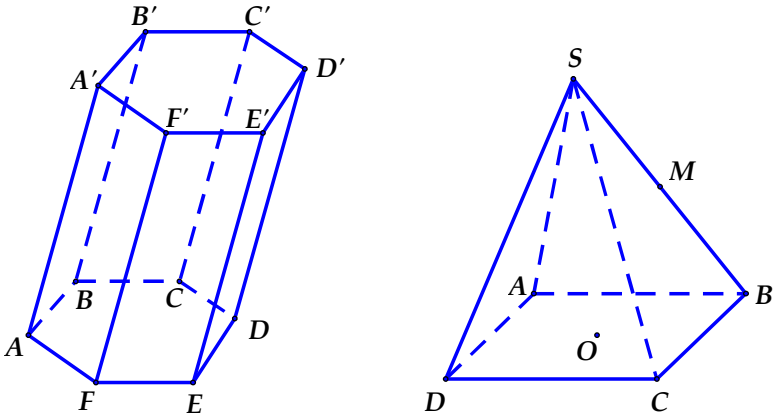
KHỐI ĐA DIỆN. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

☆☆☆

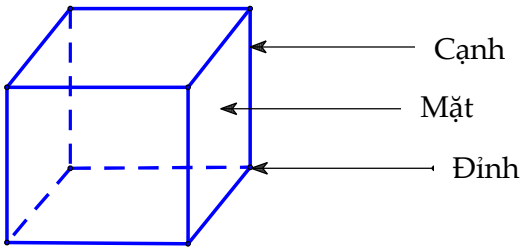
A. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP VÀ KHỐI LĂNG TRỤ

1. Khái niệm về hình đa diện



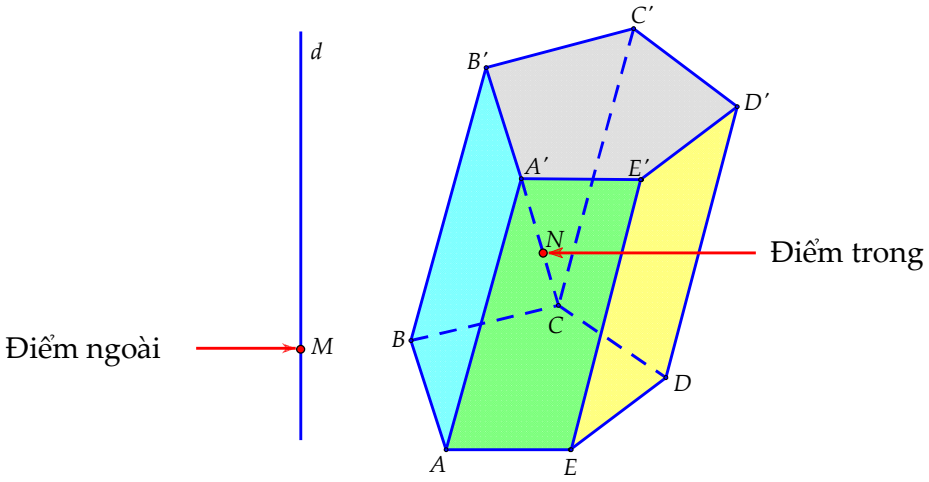
- Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:
  + Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
  + Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
- Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.



2. Khái niệm về khối đa diện

- Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
- Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.Trong đó chỉ có duy nhất miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng d nào đấy.

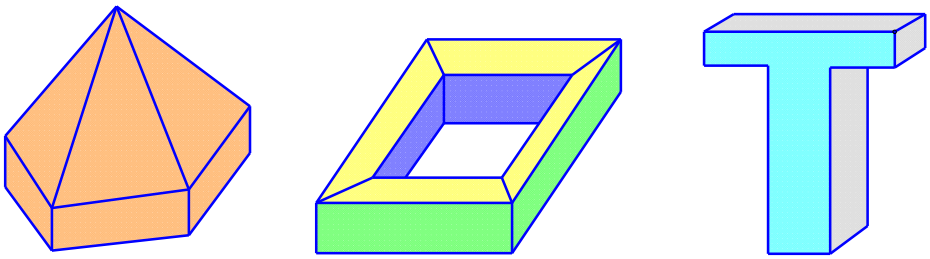
- Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



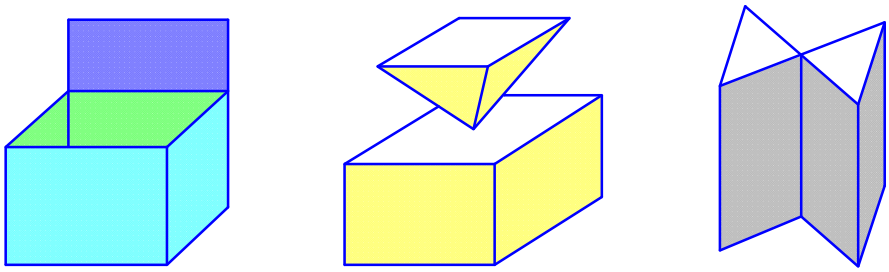
- Khối đa diện được gọi là khối lăng trụ nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ.
  Khối đa diện được gọi là khối chóp nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp.
  Khối đa diện được gọi là khối nón cụt nếu nó được giới hạn bởi một hình nón cụt.
  Tương tự ta có đinh nghĩa về khối chóp n-giác; khối chóp cụt n-giác; khối chóp đều; khối hộp;...

Ví dụ:

- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



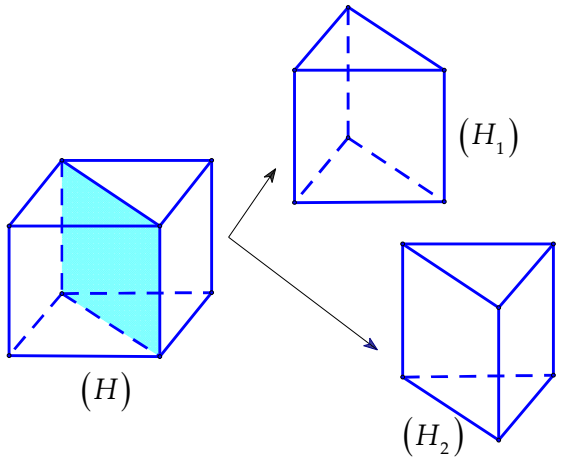
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

3. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).



MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

- Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.
- Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.
- Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.
- Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.
- Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.
- Cho $(\mathscr{H})$ là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của $(\mathscr{H})$ là lẻ thì p phải là số chẵn.

  Chứng minh: Gọi M là số các mặt của khối đa diện $(\mathscr{H})$. Vì mỗi mặt của $(\mathscr{H})$ có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của $(\mathscr{H})$ bằng $C=\dfrac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.
- **(Suy ra từ chứng minh kết quả 6):** Cho $(\mathscr{H})$ là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của $(\mathscr{H})$ là $C=\dfrac{pM}{2}$.
- Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

  Chứng minh: Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M.

  Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C=\dfrac{3M}{2}\xrightarrow{C\in\mathbb{Z}}M$ chẵn.
- Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.
- Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

  (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).
- Không tồn tại một hình đa diện có:

  + Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh;

  + Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.

B. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN . HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

- Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.
- Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

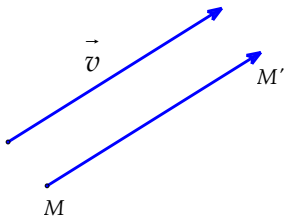
Nhận xét: + Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.

+ Phép dời hình biến một đa diện thành (H) một đa diện (H'), biến các đỉnh, cạnh, mặt của đa diện (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của đa diện (H').

MỘT SỐ PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

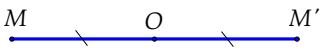
1. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

- Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$



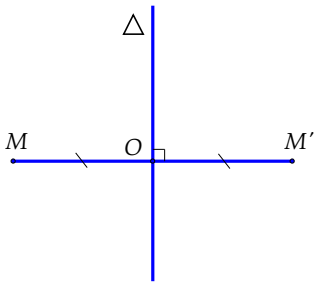
2. Phép đối xứng qua tâm O

- Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM'
- Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H)



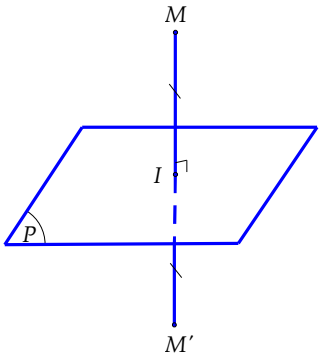
3. Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ)

- Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.
- Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H).



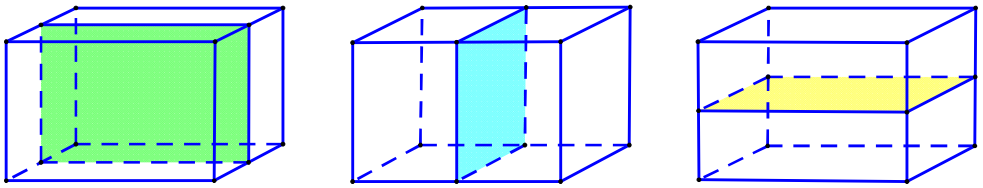
4. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P):

- Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.
- Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).

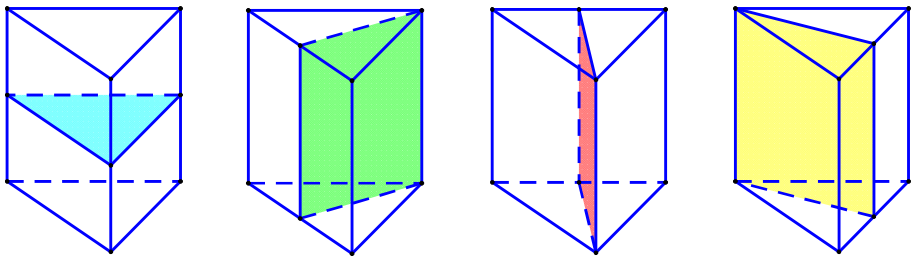


❒ **Mặt phẳng đối xứng của một số hình thường gặp**

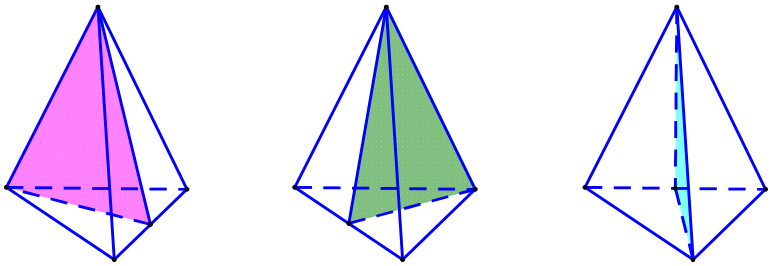
Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước khác nhau: có 3 mặt phẳng đối xứng.



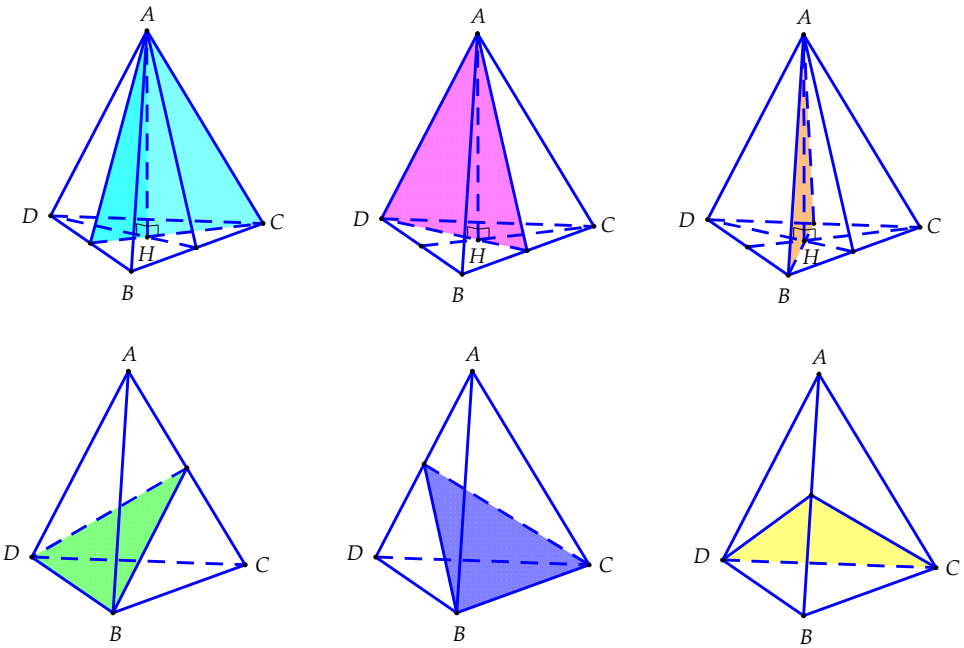
Hình lăng trụ tam giác đều: có 4 mặt phẳng đối xứng.



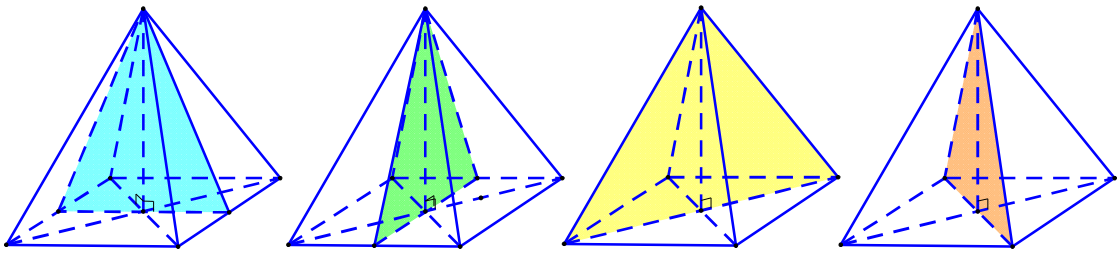
Hình chóp tam giác đều (cạnh bên và cạnh đáy không bằng): có 3 mặt phẳng đối xứng.



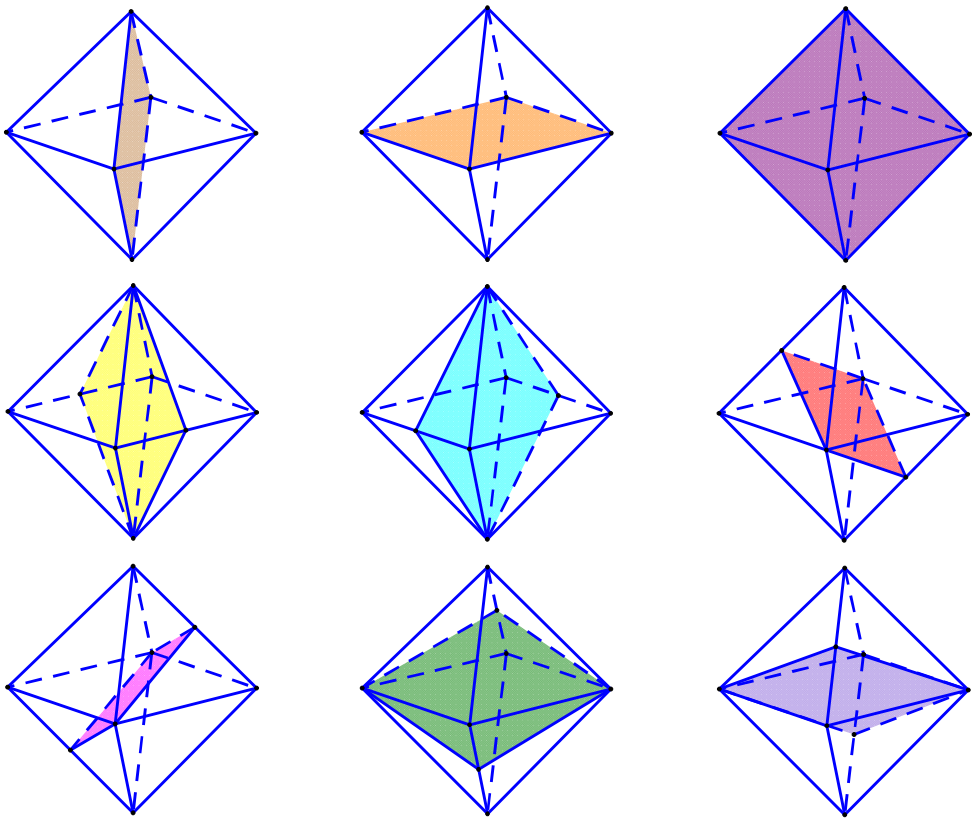
Tứ diện đều: có 6 mặt phẳng đối xứng.



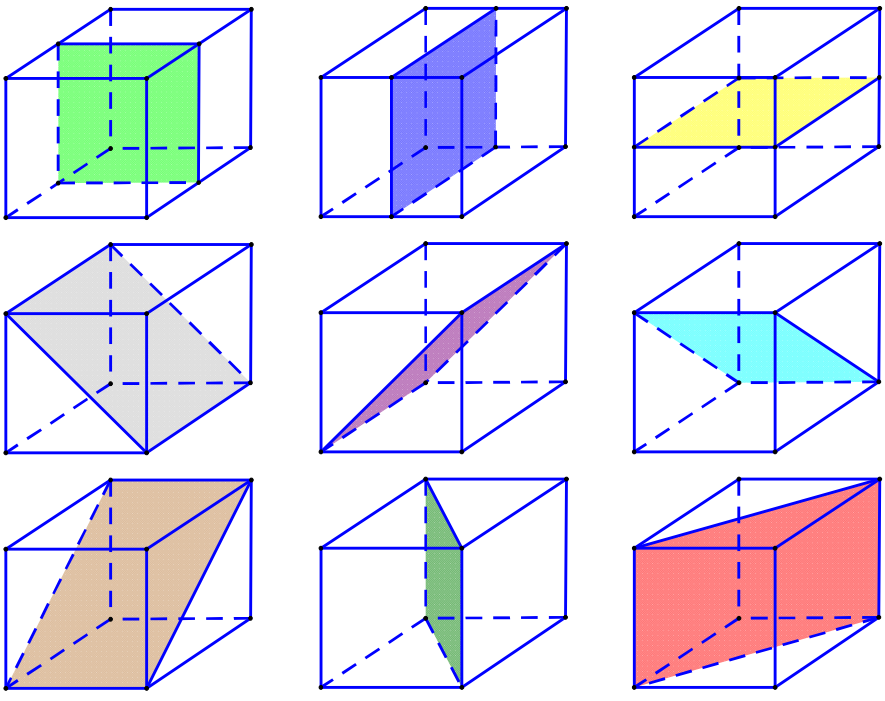
Hình chóp tứ giác đều: có 4 mặt phẳng đối xứng.



Hình bát diện đều: có 9 mặt phẳng đối xứng.



Hình lập phương: có 9 mặt phẳng đối xứng.



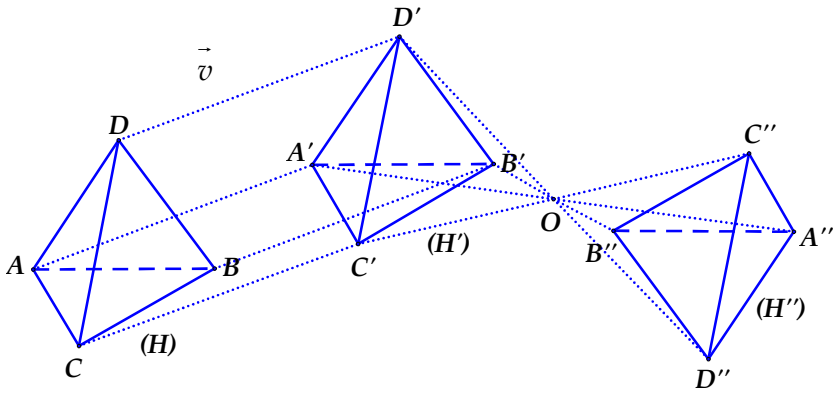
II. HAI HÌNH BẰNG NHAU

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Nhận xét:

- Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.
- Hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

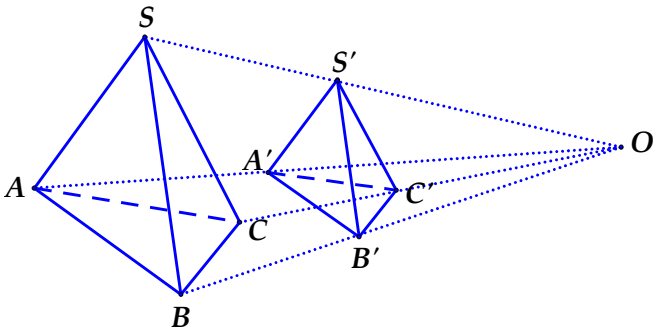
Ví dụ: Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình: phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm O hình (H) biến thành hình (H''). Ta có: hình (H) bằng hình (H'').



III. PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

1. Phép vị tự trong không gian

Định nghĩa: Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là ***phép vị tự***. Điểm O gọi là ***tâm vị tự***, số k được gọi là ***tỉ số vị tự***.



Các tính chất của phép vị tự:

- Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và do đó $M'N' = |k|MN$.
- Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

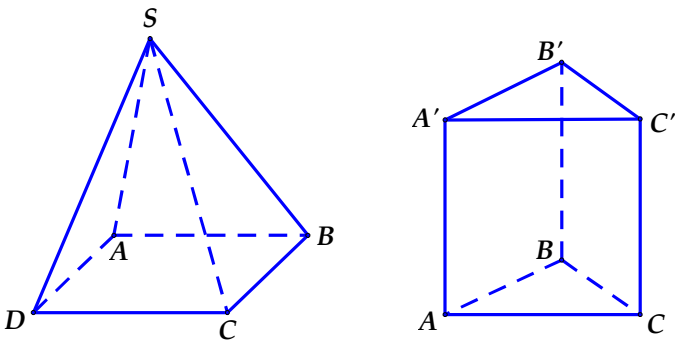
2. Hai hình đồng dạng

Định nghĩa: Hình $(\mathscr{H})$ được gọi là ***đồng dạng*** với hình $(\mathscr{H}')$ nếu có một phép vị tự biến hình $(\mathscr{H})$ thành hình $(\mathscr{H}_1)$ mà hình $(\mathscr{H}_1)$ bằng hình $(\mathscr{H}')$.

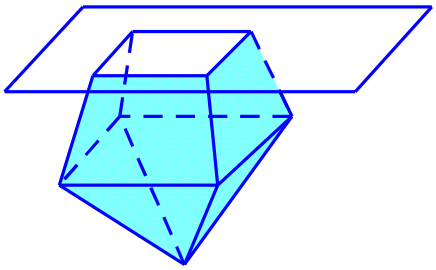
C. KHỐI ĐA DIỆN LỒI . KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I. KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Định nghĩa: Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn luôn thuộc (H).



Lưu ý: Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với môi mặt phẳng đi qua một mặt của nó. (Hình 2.2)



Công thức ƠLE: *Trong một đa diện lồi nếu gọi Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt* $Đ - C + M = 2$

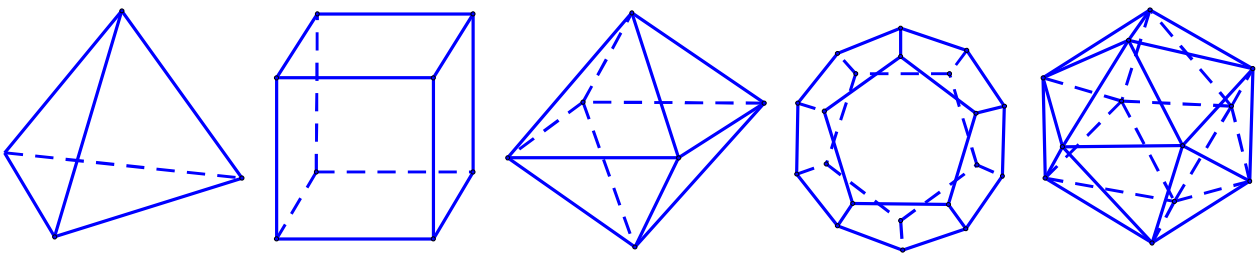
II. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.

Định lí: Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, $\{4;3\}$, $\{3;4\}$, $\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.



Tứ diện đều | Lập phương | Bát diện đều | 12 mặt đều | 20 mặt đều

Đa diện đều cạnh a	Đỉnh	Cạnh	Mặt	Thể tích V	BK mặt cầu ngoại tiếp
Tứ diện đều $\{3;3\}$	4	6	4	$V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$
Lập phương $\{4;3\}$	8	12	6	$V=a^3$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều $\{3;4\}$	6	12	8	$V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều $\{5;3\}$	20	30	12	$V=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$R=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều $\{3;5\}$	12	30	20	$V=\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$R=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

Giả sử khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt thì ta luôn có:

$$\boxed{q.Đ=2C=p.M}$$

MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG VỀ KHỐI ĐA DIỆN LỒI

- Cho một khối tứ diện đều. Khi đó:
  - + Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều;
  - + Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).
- Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.
- Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.
- Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của khối bát diện đều. Khi đó:
  - + Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
  - + Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau
  - + Ba đường chéo bằng nhau.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

1. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Về phía ngoài khối lăng trụ này ta ghép thêm một khối lăng trụ tam giác đều bằng với khối lăng trụ đã cho, sao cho hai khối lăng trụ có chung một mặt bên. Hỏi khối đa diện mới lập thành có mấy cạnh?

A. 9 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 18

Câu 2. Cho khối chóp tứ giác đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng *a*. Về phía ngoài khối chóp này ta ghép thêm một khối chóp tứ diện đều có cạnh bằng *a*, sao cho một mặt của khối tứ diện đều trùng với một mặt của khối chóp đã cho. Hỏi khối đa diện mới lập thành có mấy mặt?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9

Câu 3. Tứ diện đều có mấy mặt phẳng đối xứng

A. 0 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 2

Câu 4. Hình lập phương có mấy mặt phẳng đối xứng ?

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Câu 5. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Câu 6. Trong không gian cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Với M là điểm bất kỳ, ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép $T_{\vec{u}}$ và M_2 là ảnh của M_1 qua phép $T_{\vec{v}}$. Khi đó phép biến hình biến điểm M thành đểm M_2 là:

A. Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}+\vec{v}$ **B.** Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}$

C. Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ **D.** Một phép biến hình khác

Câu 7. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó?

A. Không có **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 8. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b?

A. Vô số **B.** 1 **C.** 2 **D.** Không có

Câu 9. Trong không gian cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Không có phép tịnh tiến nào biến (P) thành (Q)

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)

C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)

D. Có vô số phép tịnh tiến biến (P) thành (Q)

Câu 10. Trong không gian cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau $(AB=A'B';AC=A'C';BC=B'C')$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Không thể thực hiện một phép tịnh tiến nào biến tam giác này thành tam giác kia

B. Tồn tại duy nhất một phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia

C. Có nhiều nhất hai phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia

D. Có thể thực hiện vô số phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC. Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ biến tam giác $A'IJ$ thành tam giác

A. $C'CD$ **B.** $CD'P$ với P là trung điểm của $B'C'$

C. KDC với K là trung điểm của $A'D'$ **D.** $DC'D'$

Câu 12. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Với M là một điểm bất kỳ, ta gọi M1 là ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_\alpha$ và M_2 là ảnh của M_1 qua phép đối xứng $Đ_\beta$. Phép biến hình $f=Đ_\alpha\circ Đ_\beta$. Biến điểm M thành M2 là

A. Một phép biến hình khác **B.** Phép đồng nhất

C. Phép tịnh tiến **D.** Phép đối xứng qua mặt phẳng

Câu 13. Trong không gian một tam giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước là $a,b,c(a<b<c)$. Hình hộp chữ nhật này có mấy mặt đối xứng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với $(ABCD)$. Hình chóp này có mặt đối xứng nào?

A. Không có **B.** (SAB) **C.** (SAC) **D.** (SAD)

Câu 16. Trong không gian cho hai điểm I và J phân biệt. Với môi điểm M ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_I, M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_J. Khi đó hợp thành của D_I và D_J biến điểm M thành điểm M_2 là

A. Phép đối xứng qua mặt phẳng **B.** Phép tịnh tiến

C. Phép đối xứng tâm **D.** Phép đồng nhất

Câu 17. Trong các hình dưới đây, hình nào không có tâm đối xứng

A. Hình hộp **B.** Hình lăng trụ tứ giác đều

C. Hình lập phương **D.** Tứ diện đều

Câu 18. Hình chóp tứ giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O (tâm đối xứng). Ảnh của đoạn thẳng $A'B$ qua phép đối xứng tâm D_O là đoạn thẳng

A. DC' **B.** CD' **C.** DB' **D.** AC'

Câu 20. Trong không gian cho hai hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Với mỗi điểm M ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_α, M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm D_β. Khi đó hợp thành của $D_\alpha o D_\beta$ biến điểm M thành điểm M_2 là:

A. Phép tịnh tiến
B. Phép đối xứng qua mặt phẳng
C. Phép đối xứng tâm
D. Phép đối xứng trục

Câu 21. Tứ diện đều có mấy trục đối xứng

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Không có

Câu 22. Hình chóp tứ giác đều có mấy trục đối xứng?

A. Không có **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 23. Hình vuông có mấy trục đối xứng?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 24. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu hình H có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.
B. Nếu hình H có mặt đối xứng thì nó có ít nhất một trục đối xứng.
C. Nếu hình H có mặt đối xứng và có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.
D. Nếu hình H có mặt đối xứng và có tâm đối xứng nằm trên mặt đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Câu 25. Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số cạnh có thể là một số lẻ?

A. Khối chóp; **B.** Khối tứ diện;

C. Khối hộp; **D.** Khối lăng trụ.

Câu 26. Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số mặt luôn là số chẵn?

A. Khối đa diện đều; **B.** Khối chóp;

C. Khối chóp cụt; **D.** Khối lăng trụ.

Câu 27. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khối tứ diện đều có 6 cạnh **B.** Khối lập phương có 12 cạnh

C. Số cạnh của một khối chóp là chẵn **D.** Khối 8 mặt đều có 8 cạnh chẵn

Câu 28. Trong một khối đa diện lồi với các mặt là các tam giác, nếu gọi C là số cạnh và M là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $2M = 3C$ **B.** $3M = 2C$ **C.** $3M = 5C$ **D.** $2M = C$

Câu 29. Trong một khối đa diện lồi mà mỗi đỉnh chung của ba cạnh, nếu gọi C là số cạnh và $Đ$ là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $3Đ = 2C$ **B.** $3Đ = C$ **C.** $4Đ = 3C$ **D.** $C = 2Đ$

Câu 30. Một khối đa diện lồi 10 đỉnh, 7 mặt. Vậy khối đa diện này có mấy cạnh?

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 20

Câu 31. Khối 12 mặt đều {mỗi mặt là ngũ giác đều} có mấy cạnh?

A. 16 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 30

Câu 32. Khối 20 mặt đều {mỗi mặt là tam giác đều} có mấy cạnh?

A. 16 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 30

Câu 33. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau;

B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số cạnh bằng nhau;

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau

Câu 34. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các cạnh của hình đa diện luôn

A. Lớn hơn hoặc bằng 6 **B.** lớn hơn 6

C. lớn hơn 7 **D.** lớn hơn hoặc bằng 8

Câu 35. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các đỉnh, hoặc các mặt của bất kỳ hình đa diện luôn

A. Lớn hơn hoặc bằng 4 **B.** lớn hơn 4

C. lớn hơn 5 **D.** lớn hơn hoặc bằng 5

Câu 36. Cho đa diện (H) có tất cả các mặt đều là tam giác. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tổng các mặt của (H) luôn là một số chẵn

B. Tổng các mặt của (H) luôn gấp đôi tổng số đỉnh của (H)

C. Tổng số các cạnh của (H) là một số không chia hết cho 3

D. Tổng số các cạnh của (H) luôn gấp đôi tổng số các mặt của (H)

Câu 37. Trong các loại khối đa diện đều sau, tìm khối đa diện có số cạnh gấp đôi số đỉnh

A. Khối 20 mặt đều **B.** Khối lập phương

C. Khối bát diện đều **D.** Khối 12 mặt đều

Câu 38. Trong các loại khối đa diện đều sau, tìm khối đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau

A. Khối 12 mặt đều **B.** Khối lập phương

C. Khối bát diện đều **D.** Khối tứ diện đều

Câu 39. Cho đa diện (H) có tất cả các mặt đều là tứ giác. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tổng số các cạnh của (H) luôn bằng tổng số các mặt của (H)

B. Tổng các mặt của (H) luôn bằng tổng số các đỉnh của (H)

C. Tổng số các cạnh của (H) luôn là một số chẵn

D. Tổng số các mặt của (H) luôn là một số lẻ.

Câu 40. Mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của mấy cạnh?

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 5

Câu 41. Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây sai

A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8

B. Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4

C. Khối bát diện đều là loại {4;3}

D. Số cạnh của bát diện đều bằng 12.

Câu 42. Cho khối chóp có đáy là n-giác. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số mặt của khối chóp là $2n$ **B.** Số cạnh của khối chóp là $n+2$

C. Số đỉnh bằng số mặt và bằng $n+1$ **D.** Số đỉnh của khối chóp là $2n+1$

Câu 43. Khối đa diện lồi đều có số mặt nhiều nhất là:

A. 12 **B.** 30 **C.** 8 **D.** 20

Câu 44. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

A. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các cạnh bằng nhau

B. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các mặt là các đa giác đều

C. Khối đa diện đều là khối đa diện có tất cả các mặt là các đa giác đều bằng nhau và các cạnh bằng nhau

D. Có vô số khối đa diện đều lồi không có cùng số cạnh

Câu 45. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình lập phương là đa diện

B. Tứ diện là đa diện lồi

C. Hình hộp là đa diện lồi

D. Hình tạo bởi hai tứ diện chung đáy ghép với nhau là một đa diện lồi.

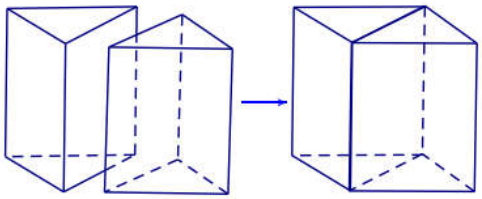
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1B	2A	3C	4D	5D	6A	7D	8A	9D	10C
11C	12D	13A	14C	15C	16B	17D	18D	19B	20D
21A	22B	23D	24D	25D	26A	27D	28B	29A	30B
31D	32D	33B	34A	35A	36A	37C	38D	39C	40B
41C	42C	43D	44C	45D					

1. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

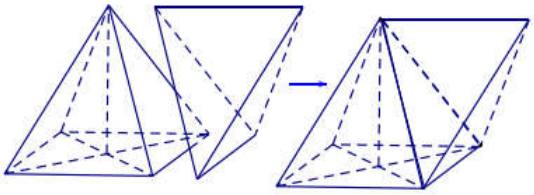
Câu 1. **Chọn B.**

Khối lăng trụ lập thành là một khối lăng trụ đứng tứ giác nên có 12 cạnh



Câu 2. **Chọn A.**

Khối lăng trụ lập thành là một khối lăng trụ tam giác nên có 5 mặt



Câu 3. **Chọn C.**

Câu 4. **Chọn D.**

Câu 5. **Chọn D.**

Câu 6. **Chọn A.**

Theo định nghĩa phép tịnh tiến vectơ

$$\left.\begin{array}{l} T_{\vec{u}}(M)=M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1}=\vec{u} \\ T_{\vec{v}}(M_1)=M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{u}+\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2}=\vec{u}+\vec{v}$$

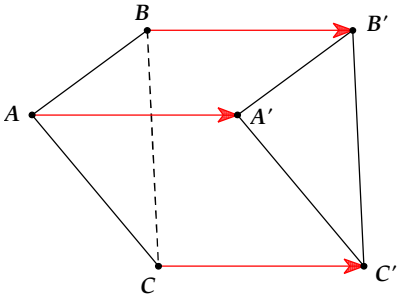
Như vậy, phép biến hình biến điểm M thành điểm M_2 là phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}+\vec{v}$.

Câu 7. **Chọn D.**

Câu 8. **Chọn A.**

Câu 9. **Chọn D.**

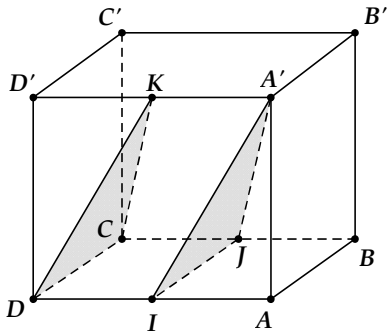
Câu 10. **Chọn C.**



Trước hết ta nhận thấy rằng, muốn thực hiện được một phép tịnh tiến biến ΔABC thành ΔA'B'C' thì phải có điều kiện, hai tam giác ABC và A'B'C' phải nằm trên hai mặt phẳng song song (hoặc trùng nhau) và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

Khi đó phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}=\overrightarrow{A'A}$ biến ΔA'B'C' thành ΔABC và phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}=\overrightarrow{AA'}$ biến ΔABC thành ΔA'B'C'. Như vậy có nhiều nhất hai phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

Câu 11. **Chọn C.**



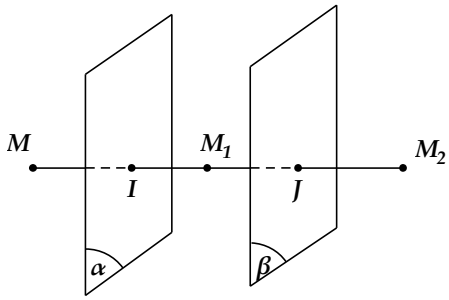
Gọi T là phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ta có $T(I)=D, T(J)=C, T(A')=K$

Vậy $T(\Delta A'IJ)=\Delta KDC$.

Câu 12. **Chọn D.**

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $MM_1, M_1M_2 \left(I\in(\alpha), J\in(\beta)\right)$



Ta có: $D_\alpha(M)=M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1}=2\overrightarrow{IM_1}$

$D_\beta(M_1)=M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{M_1J}$

Suy ra: $\overrightarrow{MM_2}=2\left(\overrightarrow{IM_1}+\overrightarrow{M_1J}\right)=2\vec{IJ}=\vec{u}$ (không đổi)

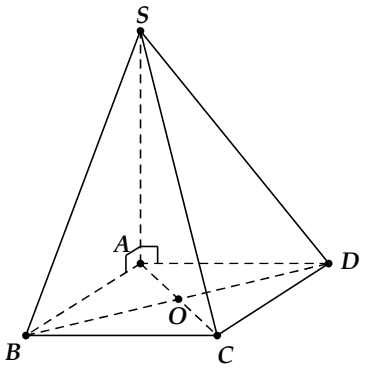
Vậy M_2 là ảnh của M qua phép tịnh tiến $\vec{u}$.

Câu 13. **Chọn A.**

Trong không gian, với tam giác đều bất kì ABC có bốn mặt phẳng đối xứng. Đó là: Ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh và mặt phẳng chứa ΔABC.

Câu 14. **Chọn C.**

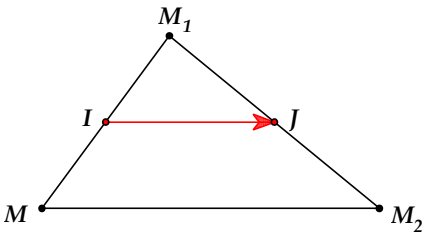
Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có 3 mặt đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực AB, AD, AA'.



Câu 15. **Chọn C.**

Ta có: $BD\perp(SAC)$ và O là trung điểm của BD. Suy ra (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD. Suy ra (SAC) là mặt đối xứng của hình chóp, và đây là m/p duy nhất.

Câu 16. **Chọn B.**



Ta có: $D_I(M)=M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1}=2\overrightarrow{IM_1}$

$D_J(M_1)=M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{M_1J}$

Do đó: $\overrightarrow{MM_2}=2\left(\overrightarrow{IM_1}+\overrightarrow{M_1J}\right)=2\vec{IJ}$ (không đổi)

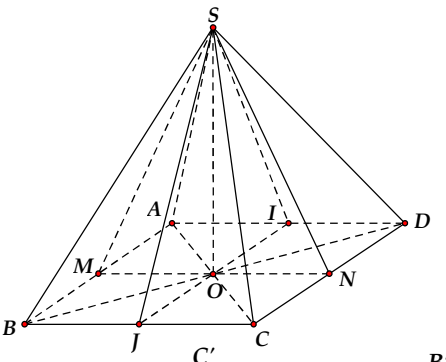
Vậy M_2 là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}=2\vec{IJ}$

Câu 17. **Chọn D.**

- Hình hộp có một tâm đối xứng là giao điểm của bốn đường chéo
- Hình lăng trụ tứ giác đều, hình lập phương là các hình hộp đặc biệt nên có một tâm đối xứng

- Tứ diện đều không có tâm đối xứng.

  Thật vậy, giả sử tứ diện đều $ABCD$ có tâm đối xứng O. Nhận thấy các đỉnh A,B,C,D không thể là tâm đối xứng của tứ diện $ABCD$, nên ảnh của A qua đối xứng tâm O là một trong ba đỉnh còn lại, nếu $D_O(A)=B$ thì O là trung điểm của AB, nhưng trung điểm của AB cũng không thể là tâm đối xứng của $ABCD$.



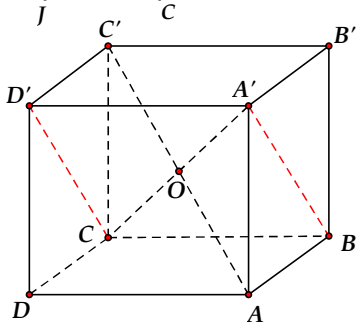
Câu 18. **Chọn D.**

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng đó là: $(SAC),(SBD),(SMN),(SIJ)$, với M,N,I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD,DA,BC.

Câu 19. **Chọn B.**

Ta có: $D_o(A')=C; D_o(B)=D'$

Do đó: $D_o(A'B)=CD'$



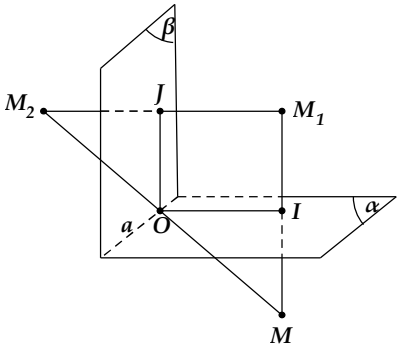
Câu 20. **Chọn D.**

Gọi I,J,O lần lượt là trung điểm của MM_1, M_1M_2, MM_2 (với $MM_1\perp(\alpha)$ và $I\in(\alpha), M_1M_2\perp(\beta)$ và $J\in(\beta)$)

Ta có: $IO//M_1M_2$ nên $IO\perp(\beta)$, do đó nếu gọi a là giao tuyến của (α) và (β) thì $IO\perp a$ và $O\in a$.

$\Rightarrow$ 2 điểm M và M_2 đối xứng nhau qua đường thẳng a

Vậy hợp thành của $D_\alpha\circ D_\beta$ biến điểm M thành điểm M_2 là phép đối xứng qua đường thẳng a.



Câu 21. **Chọn A.**

Tứ diện đều có ba trục đối xứng đó là ba đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối của nó.

Câu 22. **Chọn B.**

Hình chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng đó là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Câu 23. **Chọn D.**

- Trong không gian, hình vuông có 5 trục đối xứng, đó là:
- Hai đường thẳng chứa hai đường chéo AC,BD
- Đường thẳng đi qua trung điểm của AB,CD và đường thẳng đi qua trung điểm của AD và BC
- Trục ngoại tiếp đường tròn ngoại tiếp hình vuông

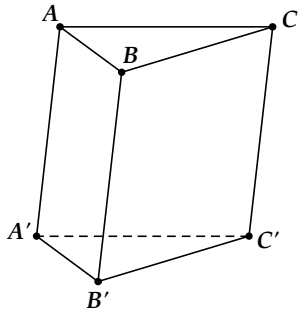
Câu 24. **Chọn D.**

- Hình chóp tứ giác đều có một trục đối xứng, nhưng không có tâm đối xứng $\Rightarrow$ **A sai**
- Hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ có mặt phẳng đối xứng là (SAC), nhưng hình chóp này không có trục đối xứng $\Rightarrow$ **B sai**

- Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt đối xứng và có một trục đối xứng, nhưng không có tâm đối xứng $\Rightarrow$ **C sai**

2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Câu 25. **Chọn D.**



- Khối chóp n – giác có tổng số cạnh bằng $2n$
- Khối tứ diện có 6 cạnh
- Khối hộp có 12 cạnh
- Khối lăng trụ n – giác với n là một số lẻ thì số cạnh là $3n$, là một số lẻ.

Ví dụ: Xét lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có 9 cạnh là một số lẻ

Câu 26. **Chọn A.**

Câu 27. **Chọn D.**

Vì khối 8 mặt đều có tất cả 12 cạnh

Câu 28. **Chọn B.**

Vì mỗi mặt là tam giác và có M mặt, nên số cạnh là 3M. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $C=\frac{3M}{2}$. Vậy $2C=3M.$

Câu 29. **Chọn A.**

Vì có Đ đỉnh, mà mỗi đỉnh có 3 cạnh chung nên số cạnh 3Đ. Mà cứ một cạnh thì có 2 đỉnh nên ta có $C=\frac{3D}{2}$.Vậy $2C=3D.$

Câu 30. **Chọn B.**

Áp dụng định lí Ơle: $Đ-C+M=2\Leftrightarrow 10-C+7=2\Leftrightarrow C=15$.

Câu 31. **Chọn D.**

Vì mỗi mặt là ngũ giác đều và có M mặt {M=12}. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $C=\frac{5M}{2}=\frac{5.12}{2}=30$.

Câu 32. **Chọn D.**

Vì mỗi mặt là tam giác đều và có M mặt {M=20}. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $C=\frac{3.20}{2}=30$.

Câu 33. **Chọn B.**

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau. **Mệnh đề sai** vì

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$: Có 5 mặt nhưng có 6 đỉnh.

B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số cạnh bằng nhau. **Là mệnh đề đúng**

Ví dụ: Hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác

C, D không thể xảy ra. Nên mệnh đề sai.

Câu 34. **Chọn A.**

Ví dụ hình chóp tam giác hoặc hình tứ diện thì cạnh của nó bằng 6.

Câu 35. **Chọn A.**

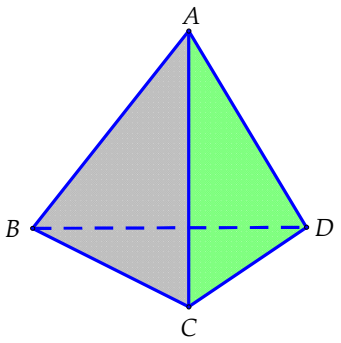
Ví dụ hình chóp tam giác hoặc hình tứ diện thì cạnh số mặt của nó bằng 4.

Câu 36. **Chọn A.**

Gọi tổng số mặt của (H) là M và tổng số các cạnh của (H) là C.

Ta có: $3M = 2C$. Suy ra M là một số chẵn. Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ: Xét hình tứ diện $ABCD$.



- Tổng các mặt là 4 (chẵn)
- Tổng các mặt là 4, tổng đỉnh là 4. Nên tổng các mặt của không thể gấp đôi tổng số đỉnh, nên nó là mệnh đề sai.
- Tổng các cạnh là 6, số này chia hết cho $3 \Rightarrow$ câu C sai.
- Tổng số cạnh là 6, tổng các mặt là 4. Như vậy không thể tổng các cạnh gấp đôi tổng các mặt được.

Câu 37. **Chọn C.**

Khối bát diện đều có cạnh là 12 và có số đỉnh là 6. Nên chọn đáp án C.

Câu 38. **Chọn D.**

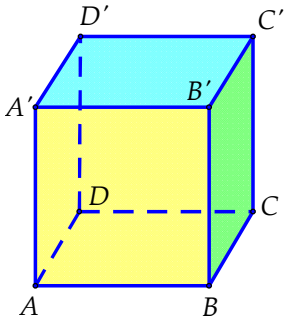
Khối tứ diện đều có số mặt là 4 và số đỉnh là 4.

Câu 39. **Chọn C.**

Gọi tổng số các mặt của (H) là M và tổng số các cạnh của (H) là C.

Ta có: $4M = 2C \Rightarrow C = 2M$. Suy ra C là một số chẵn.

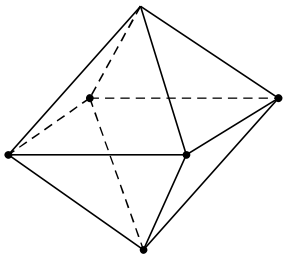
Ta có thể kiểm nghiệm như sau: Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$



- Tổng các cạnh là 12, tổng các mặt là 6. Như vậy đáp án A sai.
- Tổng các mặt là 6, tổng các đỉnh là 8. Như vậy đáp án B sai.
- Tổng các mặt là 6 (chẵn). Như vậy đáp án D sai.

Câu 40. **Chọn B.**

Ta thấy mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh.



Câu 41. **Chọn C.**

Khối bát diện đều là loại {3;4}.

Câu 42. **Chọn C.**

Câu 43. **Chọn D.**

Đa diện lồi đều có số mặt nhiều nhất là đa diện 20 mặt và nó có 30 cạnh.

Câu 44. **Chọn C.**

Câu 45. **Chọn D.**

- Hình lập phương là chắn chắn là đa diện đều nên mệnh đề A đúng
- Tứ diện là đa diện lồi cũng là mệnh đề đúng
- Hình hộp là đa diện lồi, đây là mệnh đề đúng.

Chủ đề 2

GÓC TRONG KHÔNG GIAN

☆☆☆

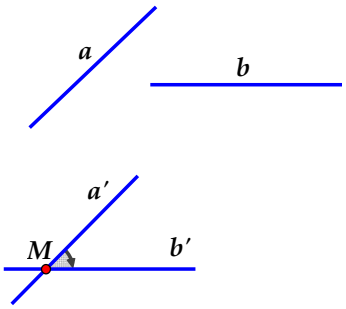
A. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG PHÁP

- Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°
- Nếu a và b cắt nhau thì góc giữa chúng là góc nhỏ nhất trong các góc được tạo bởi hai đường thẳng.
- Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Tức là: $\begin{cases} a//a' \\ b//b' \end{cases} \Rightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(a',b')}$.



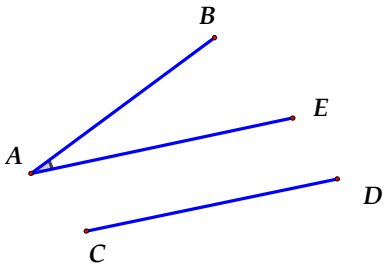
Chú ý:

+ $0 \le \widehat{(a,b)} \le 90^0$.

+ Để xác định góc giữa hai đường thẳng, ta có thể lấy một điểm (thuộc một trong hai đường thẳng đó) từ đó kẻ đường thẳng sog song với đường còn lại.

Ví dụ: Để tính $\widehat{(AB,CD)}$. Ta kẻ $AE//CD$.

Khi đó: $\widehat{(AB,CD)} = \widehat{(AB,AE)} = \widehat{BAE}$.



+ Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là hai vecto chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì

$$\widehat{(a,b)} = \begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})} = \alpha & \text{khi } \alpha \le 90^o \\ 180^0 - \alpha & \text{khi } \alpha > 90^0 \end{cases}$$

Tức là: $\cos\widehat{(a,b)} = \left|\cos\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải:

Chọn C.

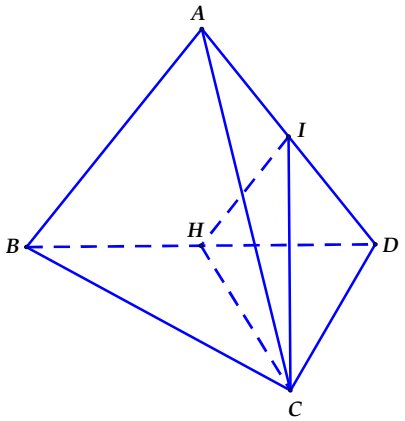
Gọi H là trung điểm của $BD \Rightarrow IH // AB$

Nên $\left(\widehat{AB;CI}\right)=\left(\widehat{IH;IC}\right)=\widehat{HIC}$. Mà $IH=\frac{a}{2}, CH=CI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý cosin trong ΔHIC, ta được:

$$\cos\widehat{HIC}=\frac{HI^2+CI^2-HC^2}{2HI.CI}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AB;CI}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Bài toán 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC biết $AD=DC=a, AB=2a,\ SA=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{42}}$ **C.** $\frac{3}{\sqrt{42}}$ **D.** $\frac{4}{\sqrt{42}}$

Lời giải:

Chọn C.

Gọi M là trung điểm của AB. Ta có $AM=AD=DC=a$

Mà AB song song với CD nên $AMCD$ là hình vuông cạnh A. Do đó DM song song với BC. Suy ra

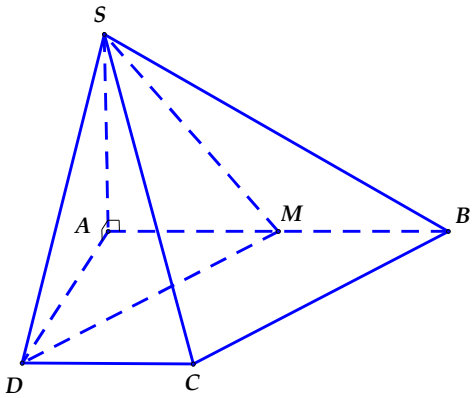
$\left(\widehat{SD;BC}\right)=\left(\widehat{SD;DM}\right)=\widehat{SDM}$

Lại có $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Và $DM=a\sqrt{2}, \text{SD}=\sqrt{SA^2+AD^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SDM, ta được

$$\cos\widehat{SDM}=\frac{SD^2+DM^2-SM^2}{2SD.SM}=\frac{3}{\sqrt{42}}.$$



Bài toán 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC với M là trung điểm của AB.

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 120^0

Lời giải:

Chọn B.

Qua M kẻ đường thẳng d song song với BC cắt đường thẳng AC tại N.

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AC.

Do đó $\left(\widehat{SM;BC}\right)=\left(\widehat{SM;MN}\right)=\widehat{SMN}$

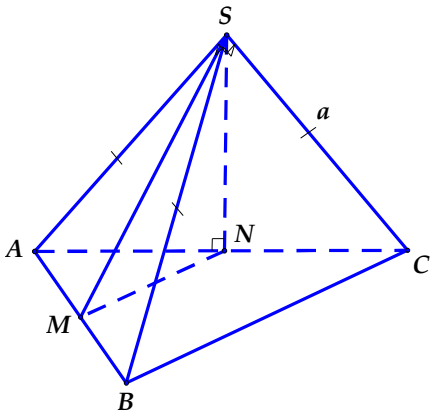
Ta có: SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$

Suy ra ba tam giác vuông: $\Delta SAB=\Delta SAC=\Delta SBC$

$\Rightarrow AB=AC=BC=a\sqrt{2}\Rightarrow SM=SN=MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Suy ra ΔSMN là tam giác đều

Vậy $\widehat{SMN}=60^0\Rightarrow\left(\widehat{SM,BC}\right)=60^0.$



Bài toán 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn B.

Gọi I là trung điểm của $SD\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow\begin{cases}OI//SB\\OI=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AB^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2}=a\end{cases}$$

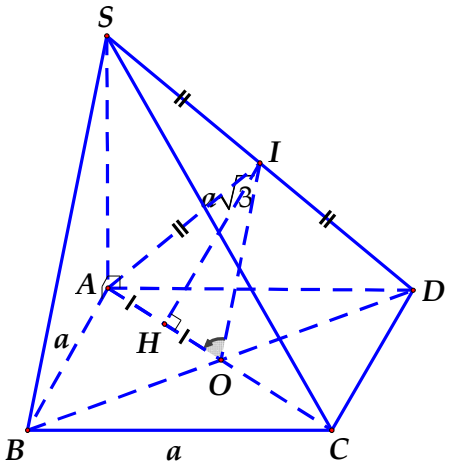
Vì $OI//SB\Rightarrow\left(\widehat{SB,AC}\right)=\left(\widehat{OI,AC}\right)=\widehat{AOI}$

Ta có: $AI=\dfrac{SD}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AD^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2}=a$

$\Rightarrow AI=OI\Rightarrow\Delta AOI$ cân tại I.

Gọi H là trung điểm của $OA\Rightarrow IH\perp OA$.

Và $OH=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{AC}{4}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}.$



Xét ΔOHI, ta có: $\cos\widehat{HOI}=\dfrac{OH}{OI}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

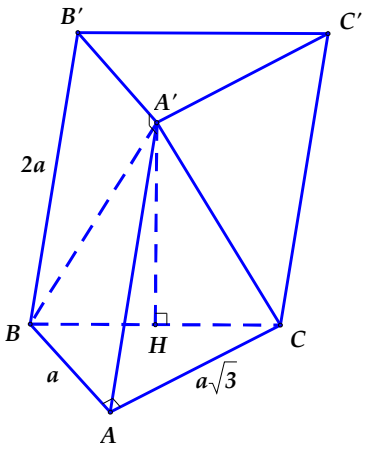
Vậy $\cos\left(\widehat{SB,AC}\right)=\cos\widehat{HOI}=\cos\widehat{AOI}=\dfrac{OA^2+OI^2-AI^2}{2.OA.OI}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+a^2-a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Bài toán 5: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA',B'C'$

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

Chọn B.



Gọi H là trung điểm của BC.

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$.

Vì $AA'//BB', B'C'//BC \Rightarrow \widehat{AA', BB'} = \widehat{BB', BC} = \widehat{B'BH}$

Ta có: $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'B'$.

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$

Suy ra $\Delta B'BH$ là cân tại B' có $B'B = B'H = 2a; BH = a$

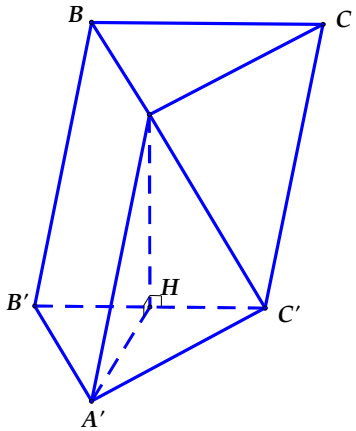
Từ đó tính được $\cos\widehat{B'BH} = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.

Bài toán 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy bằng a. Biết góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^0 và H là hình chiếu của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$. Góc giữa BC và AC' là α. Giá trị của $\tan\alpha$ là:

A. 3 **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{-1}{3}$

Lời giải:

Chọn A.



Ta có $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng đáy $(A'B'C')$

Do đó $\left(\widehat{AA'; (A'B'C')}\right) = \left(\widehat{AA'; A'H}\right) = \widehat{AA'H} = 60^0$

Mặt khác $\left(\widehat{BC; AC'}\right) = \left(\widehat{AC'; B'C'}\right) = \widehat{AC'H} = \alpha$.

Ta có: $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = A'H.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

$\tan\widehat{AC'H} = \tan\alpha = \frac{AH}{HC'} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}} = 3.$

Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

A. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

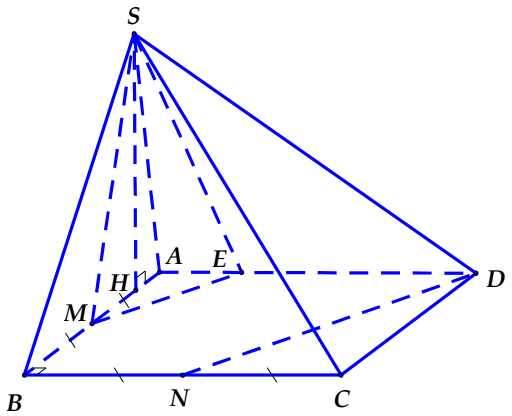
Lời giải:

Chọn B.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$

Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$.

Kẻ $ME//DN\ (E\in AD)\Rightarrow \widehat{SM,DN}=\widehat{SM,ME}=\varphi$.



Ta có: $SA^2+SB^2=a^2+3a^2=AB^2$.

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S\ \Rightarrow SM=\dfrac{AB}{2}=a$.

Ta có: $\Delta AME\backsim\Delta CDN$, từ đó suy ra $AE=\dfrac{a}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}AE\perp AB\\AE\perp SH\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SAB)\Rightarrow AE\perp SA.$

Suy ra

$SE=\sqrt{SA^2+AE^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME=\sqrt{AM^2+AE^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

ΔSME cân tại E có $SE=ME=\dfrac{a\sqrt{5}}{2};SM=a.$ Từ đó suy ra $\cos\widehat{SME}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 8: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính số đo của góc giữa hai mặt đường thẳng AD và BC.

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

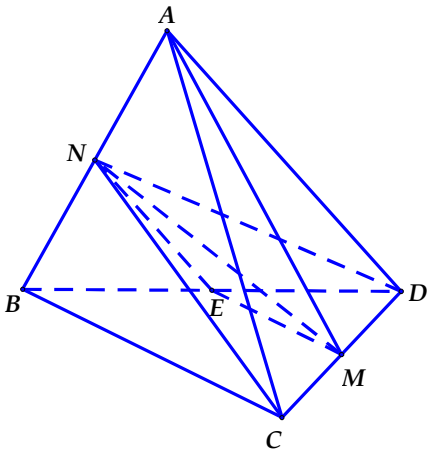
Lời giải:

Chọn B.

Gọi M,N,E lần lượt là các trung điểm của các cạnh CD,AB,BD

$\Rightarrow NE=ME=\dfrac{a}{2}$.

Do $\begin{cases}NE//AD\\EM//BC\end{cases}\Rightarrow\widehat{(AD,BC)}=\widehat{(NE,EM)}$.



Ta có: $\begin{cases}CD\perp AM\\CD\perp BM\end{cases}$ (do $\Delta ACD;BCD$ lần lượt là hai tam giác cân tại A và B là 2 tam giác cân) $\Rightarrow CD\perp(ABM)$

$\Rightarrow \widehat{((ACD);(BCD))}=\widehat{AMB}=90^0$

$\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại $M\Rightarrow MN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông) $\Rightarrow NE=ME=MN=\dfrac{a}{2}$.

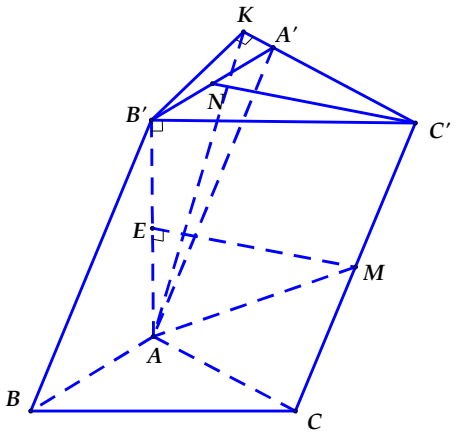
$\Rightarrow \Delta MNE$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MEN}=60^0$.

Bài toán 9: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^0$ và AB' vuông góc với đáy $(A'B'C')$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và $A'B'$, mặt phẳng $(AA'C')$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 30^0. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $C'N$.

A. $\sqrt{\frac{7}{19}}$ **B.** $2\sqrt{\frac{5}{39}}$ **C.** $2\sqrt{\frac{3}{29}}$ **D.** $2\sqrt{\frac{7}{29}}$

Lời giải:

Chọn D.



Gọi K là hình chiếu của B' lên $A'C' \Rightarrow C'K \perp KB'$

$AB' \perp (A'B'C') \Rightarrow AB' \perp C'K \Rightarrow C'K \perp (AB'K)$

Do đó: $\widehat{AKB'}=\left(\widehat{(A'B'C'),(AA'C')}\right)=30^0$

Gọi E là trung điểm của AB', suy ra $NE=C'M;\ NE//C'M$

Suy ra $NEMC'$ là hình bình hành.

Nên $ME//C'N \Rightarrow \left(\widehat{C'N,AM}\right)=\left(\widehat{EM,AM}\right)=\widehat{AME}$

Ta có: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=3a^2$

$\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$

Trong $\Delta A'KB'$ vuông có $\widehat{KA'B'}=60^0$, $A'B'=a$ nên $B'K=A'B'\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\Delta AB'K$ vuông có $AB'=B'K.\tan 30^0=\frac{a}{2}$

$AE=\frac{1}{2}AB'=\frac{a}{4};\ EM^2=C'N^2=\frac{2\left(C'B'^2+C'A'^2\right)-A'B'^2}{4}\Rightarrow EM=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Trong ΔAEM vuông có: $AM^2=AE^2+EM^2=\frac{29a^2}{16}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{29}}{4}$

Vậy $\cos\widehat{AME}=\frac{ME}{MA}=2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Bài toán 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các $\Delta SAB,\Delta SAD,\Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD biết SA=$a\sqrt{3}$, $AB=a,AD=3a.$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{130}}$ **D.** $\frac{8}{\sqrt{130}}$

Lời giải:

Chọn D.

Ta có các $\Delta SAB,\Delta SAD,\Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A.

Nên $SA\perp AB,SA\perp AD\Rightarrow SA\perp(ABCD)$

Gọi $O = AC \cap BD$. Gọi M là trung điểm của SA. Do đó $OM // SC$

Suy ra $\left(\widehat{SC;\text{BD}}\right) = \left(\widehat{OM;BD}\right)$

Do $BM < DM \Rightarrow \widehat{MOB} < \widehat{MOD}$ (góc đối diện vs cạnh bé hơn thì bé hơn)

$\left(\widehat{SC;\text{BD}}\right) = \left(\widehat{OM;BD}\right) = \widehat{MOB}$ (góc giữa hai đường thẳng bé hơn 90^0)

Có $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + AB^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

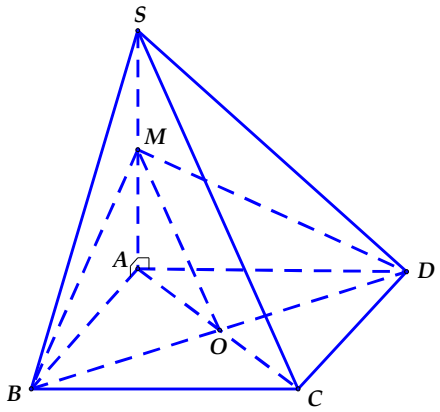
$MO = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$BO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔMOB, ta có:

$BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM.OB.\cos\widehat{MOB}$

$\Rightarrow \cos\widehat{MOB} = \frac{OM^2 + OB^2 - BM^2}{2OM.OB} = \frac{8}{\sqrt{130}}$.

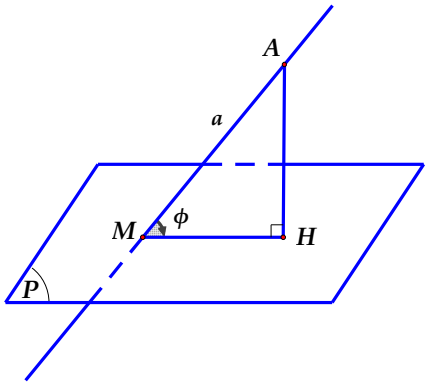


II. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. PHƯƠNG PHÁP

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc tạo bởi đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mp (P).

  Tức là: Nếu a không vuông với (P) và a' là hình chiếu của a trên (P) thì $\left(\widehat{a,(P)}\right) = \left(\widehat{a,a'}\right) = \varphi$.



Chú ý:

+ $0^0 \le \left(\widehat{a,(P)}\right) \le 90^0$.

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} a // (P) \\ a \subset (P) \end{array}\right. \Rightarrow \left(\widehat{a,(P)}\right) = 0^0$.

+ Để tìm hình chiếu a' của a trên (P) ta có thể làm như sau:

  Tìm giao điểm $M = a \cap (P)$.

  Lấy một điểm A tùy ý trên a và xác định hình chiếu H của A trên (P). Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M.

2. MỘT SỐ LOẠI GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG THƯỜNG GẶP ĐỐI VỚI HÌNH CHÓP

Bài toán: Cho khối chóp có đỉnh S và đáy là $ABCDxxx...$, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy. Tìm góc giữa các đường thường và mặt phẳng trong các trường hợp sau:

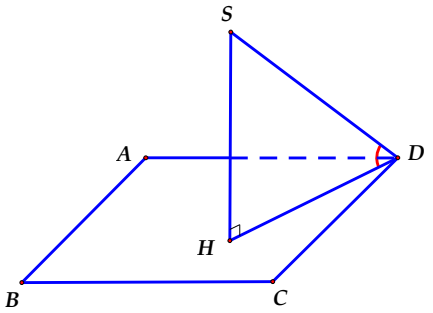
a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Tìm góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$

  H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$

  $\Rightarrow HD$ là hình chiếu vuông góc của SD trên $(ABCD)$

  Vậy $\widehat{(SD,(ABCD))}=\widehat{(SD,HD)}=\widehat{SDH}$



b. Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

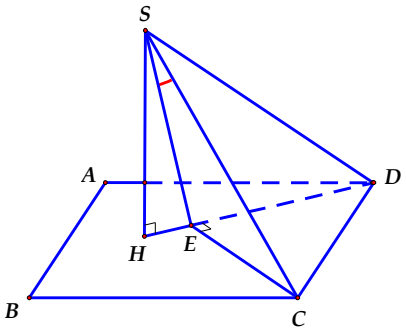
- Tìm góc giữa cạnh bên SC và (SHD) với $(SHD)\perp(ABCD)$

  Dựng $CE\perp HD \quad (E\in HD)$

  Vì $\begin{cases}CE\perp HD\\CE\perp SH\end{cases}\Rightarrow CE\perp(SHD)$

  $\Rightarrow E$ là hình chiếu vuông góc của C trên (SHD).

  Vậy $\widehat{(SC,(SHD))}=\widehat{(SC,SE)}=\widehat{CSE}$.



c. Góc giữa đường cao và mặt bên

- Tìm góc giữa đường cao SH và mặt bên (SCD)

  Dựng $HE\perp CD \quad (E\in CD)$

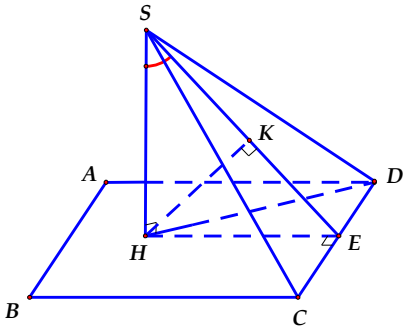
  Vì $\begin{cases}CD\perp HE\\CD\perp SH\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SHE)\Rightarrow(SCD)\perp(SHE)$

  Ta có: $(SCD)\cap(SHE)=SE.$

  Dựng $HK\perp SE\Rightarrow HK\perp(SCD)$

  $\Rightarrow SK$ là hình chiếu vuông góc của SH trên (SCD).

  Vậy $\widehat{(SH,(SCD))}=\widehat{(SH,SK)}=\widehat{HSK}$



3. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với đáy một góc 60^0, gọi M là trung điểm của BC. Cosin góc tạo với SM và mặt đáy là:

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Lời giải:

Chọn B.

Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB$

Mặt khác $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

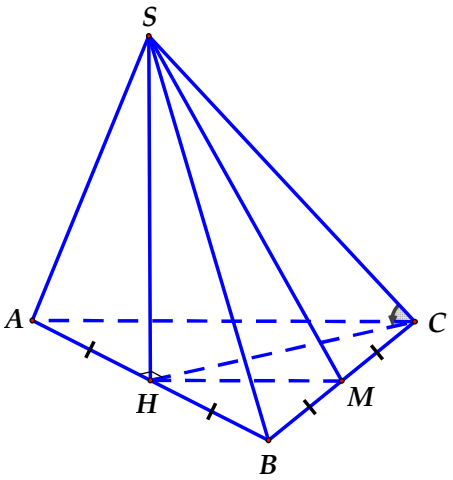
$\Rightarrow HM$ là hình chiếu của SM trên (ABC).

Suy ra $\widehat{SM,(ABC)} = \widehat{SM,HM} = \widehat{SMH}$

Khi đó $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

Do M là trung điểm của BC nên $HM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\cos\widehat{SMH} = \dfrac{HM}{\sqrt{HM^2 + SH^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



Bài toán 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos\widehat{BA'C} = \dfrac{5}{6}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải:

Chọn A.

Kẻ $BH \perp AC$ và theo giả thiết lăng trụ đứng ta có $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (AA'C'C)$.

Hình chiếu của $A'B$ lên $(AA'C'C)$ chính là cạnh $A'H$.

Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ là góc $\widehat{BA'H}$.

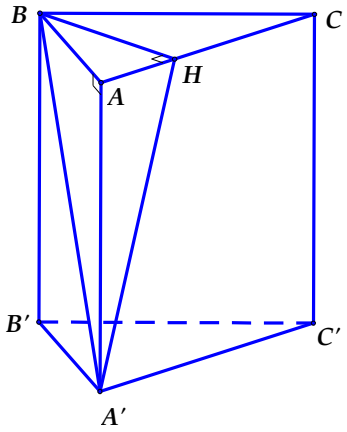
Đặt $AB = x$ thì $A'B^2 = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = x^2 + 2a^2 = A'C^2$.

Áp dụng định lí hàm số cosin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$\cos\widehat{BA'C} = \dfrac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B.A'C} \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2(x^2 + 2a^2)} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x = a$

Trong tam giác vuông $A'BH$ có:

$\sin\widehat{BA'H} = \dfrac{BH}{A'B} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BA'H} = 30^0$.



Bài toán 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $A = 60^0$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và đáy

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải:

Chọn C.

Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O \perp (ABCD)$

$\begin{cases} B'B \cap (ABCD) = \{B\} \\ B'O \perp (ABCD),\ O \in (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hình chiếu $B'B$ trên $(ABCD)$ là OB

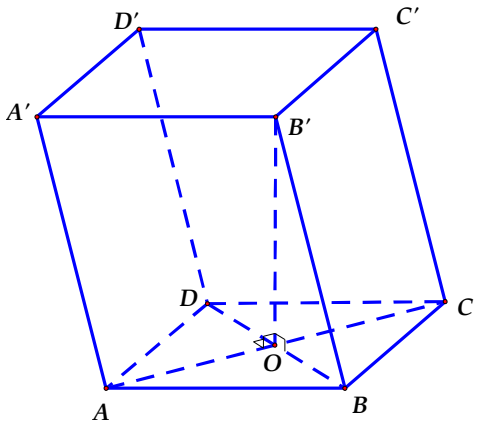
$\Rightarrow (B'B,(ABCD)) = (B'B,BO) = \widehat{B'BO}$

Tam giác ABD có $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow BD = a \Rightarrow OB = \dfrac{a}{2}$

Trong tam giác vuông $B'OB$:

$\cos\widehat{B'OB} = \dfrac{OB}{BB'} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'OB} = 60^0$.



Bài toán 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a; AD = 2a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD, biết SC tạo với đáy góc 45^0. Cosin góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{29}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{377}}{29}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{277}}{29}$

Lời giải:

Chọn C.

Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SM;(ABCD))} = \widehat{SMA}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(SM;(ABCD))} = \cos\widehat{SMA} = \dfrac{AM}{SM}$

Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^0$

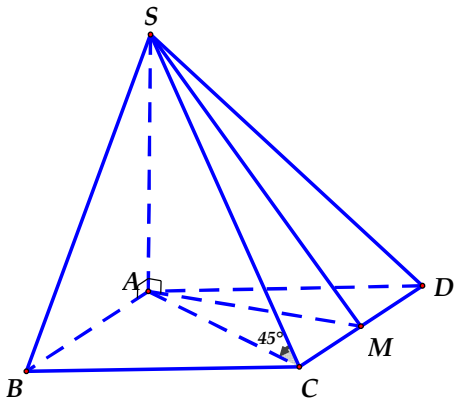
$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$.

Ta có: $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = a\sqrt{13}$.

$\Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = 16a^2 + 13a^2 = 29a^2 \Rightarrow SM = a\sqrt{29}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(SM;(ABCD))} = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{a\sqrt{13}}{a\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{377}}{29}$.



Bài toán 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = a$; $SA \wedge (ABC)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0 .Cosin góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên mp $(ABC) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA}$

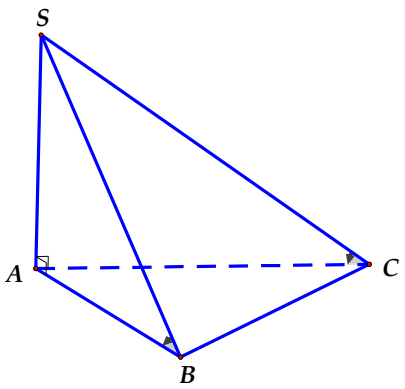
ΔABC vuông cân $B \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

+Ta có ngay $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$

Ta có: $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(SC;(ABC))} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.



Bài toán 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và SC=$a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Cosin của góc giữa SC và mặt phẳng (SHD) là

A. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **B.** $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ **C.** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

Lời giải:

Chọn A.

Ta có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$ suy ra ΔSBC vuông tại B.

$\Rightarrow BC \perp SB$ mà $BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$ mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ $CE \perp HD$ mà $CE \perp SH \Rightarrow CE \perp (SHD)$

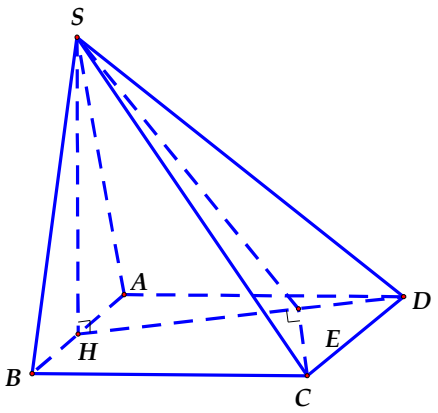
$\Rightarrow \widehat{(SC,(SHD))} = \widehat{(SC,SE)} = \widehat{CSE}$

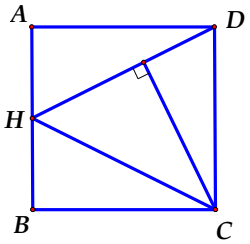
Ta có $S_{\Delta CDH} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}CE.HD = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Leftrightarrow CE.HD = a^2 \Rightarrow CE = \dfrac{a^2}{HD}$

Mà $HD = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CE = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow \cos\widehat{CSE} = \dfrac{SE}{SC} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.





Bài toán 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A có $AB = AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của AB, ΔSAM là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SA = $a\sqrt{2}$. Góc giữa SN và mặt phẳng (ABC) là:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải:

Chọn A.

Gọi H là trung điểm của AM. Vì ΔSAM cân tại S nên SH là đường cao.

Mà $(SAM) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có $\widehat{(SN;(ABC))}=\widehat{(SN;NH)}=\widehat{SNH}$

Ta có $\widehat{MAC}=60^0 \Rightarrow AM=AC.\cos 60^0=2a$

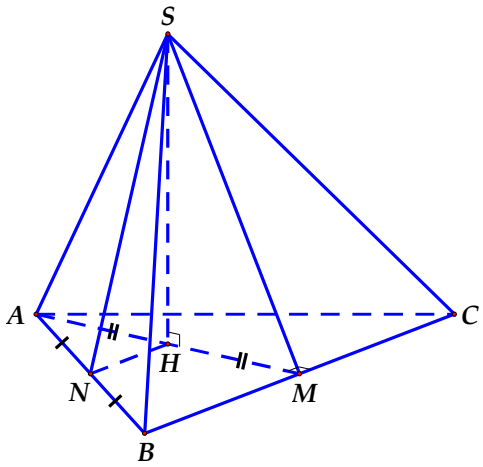
$MC=AC.\sin 60^0=2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AH=\frac{1}{2}AM=a \Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a$

Ta có $NH=\frac{1}{2}BM=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\widehat{SNH}=\frac{SH}{NH}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SNH}=30^0$.

$\Rightarrow \widehat{(SN,(ABC))}=30^0$.

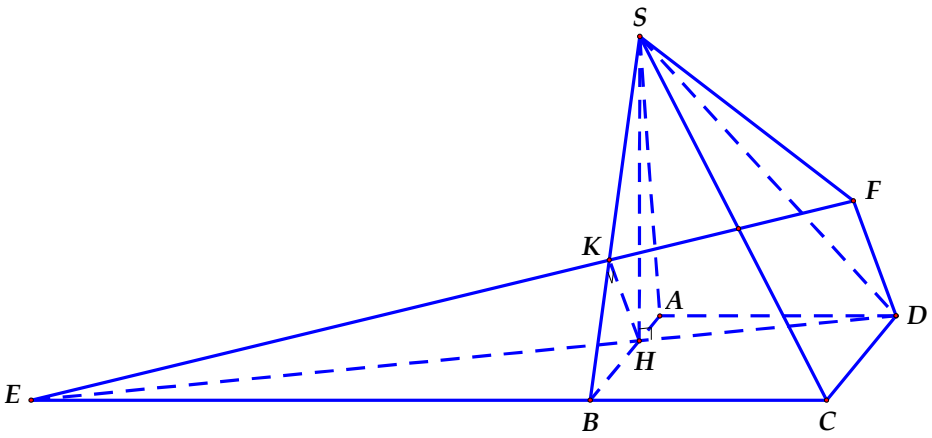


Bài toán 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=4a, \text{AD}=a\sqrt{3}$. Điểm H nằm trên cạnh AB thỏa mãn $AH=\frac{1}{3}HB$. Hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $\text{SA}=a\sqrt{5}$. Cosin của góc giữa SD và (SBC) là:

A. $\sqrt{\frac{5}{12}}$ **B.** $\sqrt{\frac{5}{13}}$ **C.** $\sqrt{\frac{4}{13}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải:

Chọn B.



Kẻ $HK\perp SB \Rightarrow HK\perp(SBC)$. Gọi $E=DH\cap BC$, kẻ $DF//HK(F\in EK)$

$\Rightarrow DF\perp(SBC) \Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (SBC) chính là $SF \Rightarrow \widehat{(SD,(SBC))}=\widehat{(SD,SF)}=\widehat{DSF}$

Ta có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=2a$.

Xét ΔSHB có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HB^2}=\frac{13}{36a^2} \Rightarrow HK=\frac{6a}{\sqrt{13}}$

Ta có $\frac{EH}{ED}=\frac{HB}{CD}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{HK}{DF}=\frac{EH}{ED}=\frac{3}{4} \Rightarrow DF=\frac{HK.ED}{EH}=\frac{8a}{\sqrt{13}}$.

Ta có $SD=\sqrt{SH^2+DH^2}=2a\sqrt{2}$

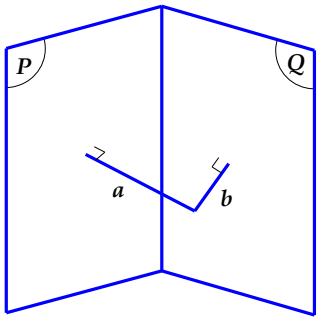
$\Rightarrow SF=\sqrt{SD^2-DF^2}=\frac{2a\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\widehat{DSF}=\frac{SF}{SD}=\sqrt{\frac{5}{13}}$.

III. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. PHƯƠNG PHÁP

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1: Theo định nghĩa: $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(a,b)}$

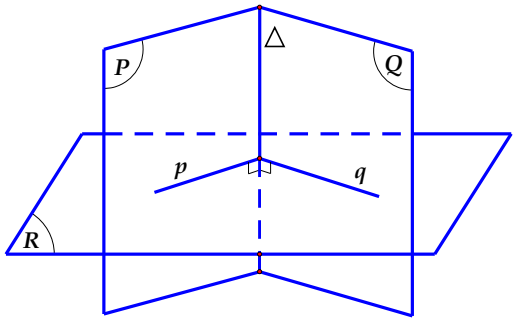


Cách 2: Khi xác định được $(P) \cap (Q) = \Delta$ thì ta làm như sau:

+ Bước 1: Tìm mặt phẳng $(R) \perp \Delta$.

+ Bước 2: Tìm $\begin{cases} p = (R) \cap (P) \\ q = (R) \cap (Q) \end{cases}$

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(p,q)}$.



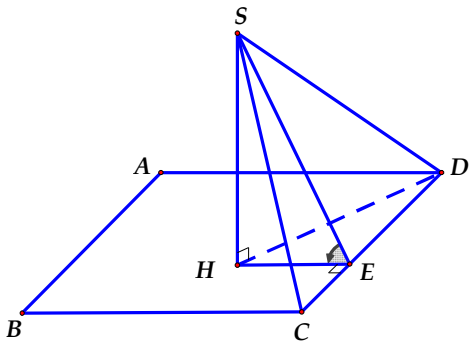
Ví dụ: Tìm góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ (hình vẽ bên)

Dựng $HE \perp CD \quad (E \in CD)$

Vì $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHD) \Rightarrow CD \perp SE.$

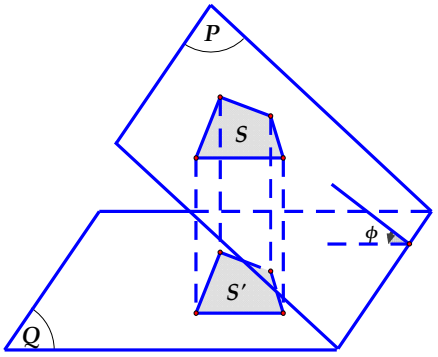
Vì $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) \\ CD \perp HE \subset (ABCD) \\ CD \perp SE \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(SE,HE)} = \widehat{SEH}$



Cách 3: Theo định lí về hình chiếu

$$S' = S.\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{S'}{S}}$$



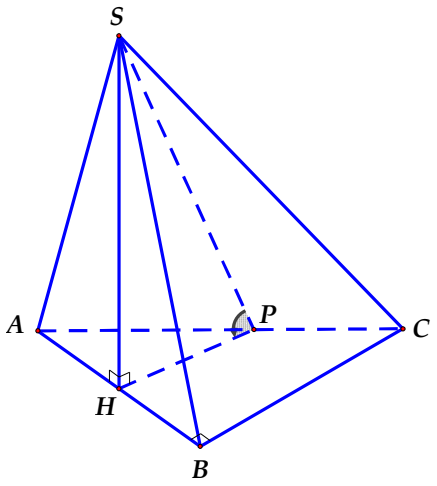
2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=4$. Gọi H là trung điểm của $AB, SH\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$

Lời giải:

Chọn D.



Kẻ $HP\perp AC$, lại có: $AC\perp SH\Rightarrow AC\perp(SPH)$

$\Rightarrow\widehat{((SAC);(ABC))}=\widehat{SPH}$

$\Rightarrow\cos\widehat{((SAC);(ABC))}=\cos\widehat{SPH}=\frac{HP}{SP}$

Ta có: $\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\BC\perp SH\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SBA)\Rightarrow\widehat{(SBC),(ABC)}=\widehat{SBA}=60^0$

$\Rightarrow SH=HB.\tan\widehat{SBH}=2.\tan 60^0=2\sqrt{3}$

Ta có $\widehat{HAP}=45^0;\widehat{APH}=90^0\Rightarrow\Delta APH$ vuông cân P

$\Rightarrow HP=\frac{AH}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow SP^2=SH^2+HP^2=12+2=14\Rightarrow SP=\sqrt{14}$

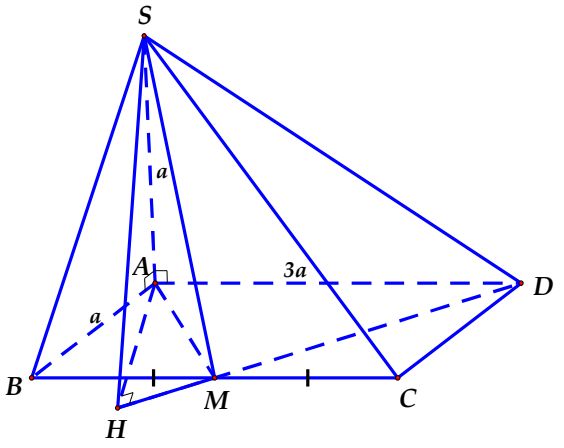
$\Rightarrow\cos\widehat{((SAC);(ABC))}=\frac{HP}{SP}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{7}}.$

Bài toán 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=AB=a, AD=3a$. Gọi M là trung điểm BC. Tính cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A. $\frac{5}{7}$ **B.** $\frac{6}{7}$ **C.** $\frac{3}{7}$ **D.** $\frac{1}{7}$

Lời giải:

Chọn B.



Kẻ $SH\perp MD, H\in MD$,

mà $SA\perp MD\Rightarrow(SAH)\perp MD\Rightarrow AH\perp MD$

Do đó $\left(\widehat{(SMD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SH,AH}\right)=\widehat{SHA}=\varphi$

Ta lại có: $S_{AMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}.3a.a=\frac{3a^2}{2}$

$DM=\sqrt{CD^2+CM^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$

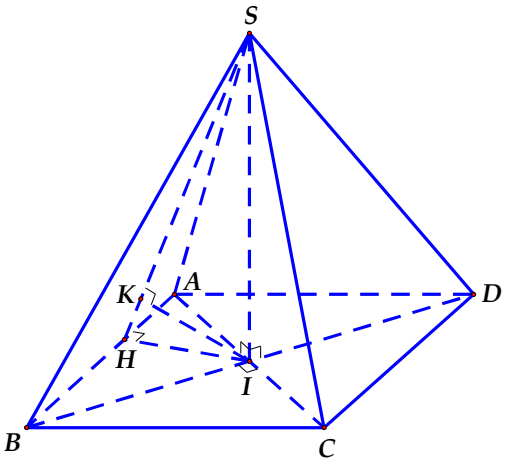
$\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{AMD}}{DM}=\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}\Rightarrow SH=\dfrac{7a\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{AH}{SH}=\dfrac{6}{7}$.

Bài toán 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB=2a$ và góc $\widehat{BAD}=120^0$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI=\dfrac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải:

Chọn A.



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

Ta có: $\left.\begin{matrix}AB\perp HI\\AB\perp SI\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp(SHI)\Rightarrow AB\perp SH$

Do đó: $\varphi=\left(\widehat{SH,IH}\right)=\widehat{SHI}$

Ta có $\widehat{BAD}=120^0\Rightarrow\widehat{BAI}=60^0$

Suy ra: $\begin{cases}\sin 60^0=\dfrac{BI}{AB}\\\cos 60^0=\dfrac{AI}{AB}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}BI=a\sqrt{3}\\AI=a\end{cases}$

Xét tam giác vuông AIB có: $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2}\Leftrightarrow IH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

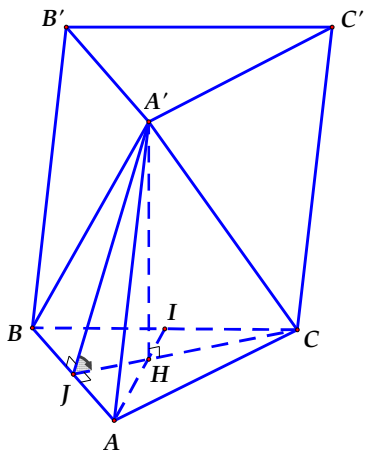
Ta có: $\tan\widehat{SHI}=\dfrac{SI}{HI}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SHI}=30^0$ hay $\varphi=30^0$.

Bài toán 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A=A'B=A'C=a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC)

A. 75^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Lời giải:

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu của A trên (ABC)

Vì $A'A=A'B=A'C\Rightarrow A'$ cách đều A,B,C nên $HA=HB=HC$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABC.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,AB.

Vì $\begin{cases}A'J\perp AB\\CJ\perp AB\end{cases}\Rightarrow(A'JC)\perp AB$

$\Rightarrow\widehat{A'JC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC)

$A'J=\sqrt{AA'^2-AJ^2}=\sqrt{\frac{7a^2}{12}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

$HJ=\frac{1}{3}CJ=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

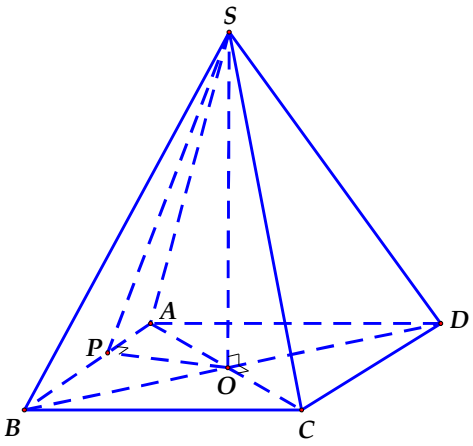
$\Rightarrow \cos\widehat{A'JC}=\cos\widehat{A'JH}=\frac{JH}{A'J}=\frac{a\sqrt{3}}{6}:\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A'JC}=60^0$.

Bài toán 5: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a. Biết $SO\perp(ABCD)$ và $AC=a$, thể tích khối chóp là $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{6}}{7}$ **B.** $\frac{3}{7}$ **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $\frac{2}{7}$

Lời giải:

Chọn C.



Kẻ $OP\perp AB$. Lại có $AB\perp SO\Rightarrow AB\perp(SPO)$

$\Rightarrow\widehat{((SAB);(ABC))}=\widehat{SPO}$

$\Rightarrow\cos\widehat{((SAB);(ABC))}=\cos\widehat{SPO}=\frac{OP}{SP}$

Ta có: $AB=BC=CA=a\Rightarrow\Delta ABC$ đều

$\Rightarrow\sin\widehat{PAO}=\sin 60^0=\frac{OP}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OP=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SO.2S_{ABC}$

$=\frac{1}{3}SO.2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=SO.\frac{a^2\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SO=3a\Rightarrow SP^2=SO^2+OP^2=9a^2+\frac{3a^2}{16}=\frac{147a^2}{16}\Rightarrow SP=\frac{7a\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow\cos\widehat{((SAB);(ABC))}=\frac{OP}{SP}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{7a\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{7}$.

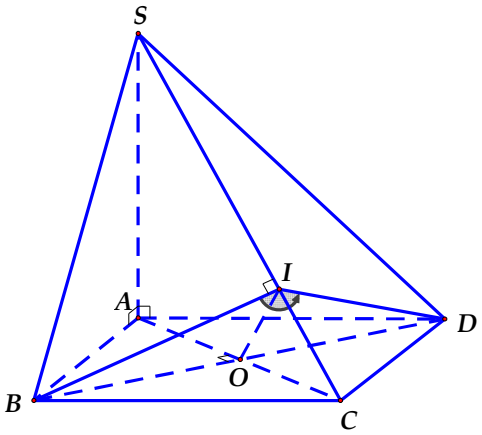
Nhận xét: Qua các bài toán trên, ta nhận thấy rằng muốn xác định góc giữa mặt bên và mặt đáy (hình chóp, lặng trụ,..) ta sẽ **"hạ đường vuông góc"** từ **"chân đường cao"** của 1 đỉnh (lên mặt phẳng đáy) đến **"giao tuyến"** của hai mặt phẳng cần xác định góc. Từ đó xác định được góc cần tìm.

Bài toán 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O và $SA\perp(ABCD)$. Để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 60^0 thì độ dài của SA là:

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $2a$

Lời giải:

Chọn A.



Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Kẻ $BI \perp SC$ ta có $\begin{cases} SC \perp BI \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BID)$

$\widehat{((SBC),(SCD))} = \widehat{(BI,ID)} = 60^0$

Trường hợp 1: $\widehat{BID} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^0$

Ta có $\tan\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{IO} \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý)

(OI là cạnh góc vuông, OC là cạnh huyền của tam giác vuông OIC)

Trường hợp 2: $\widehat{BID} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^0$

Ta có $\tan\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{IO} \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ (hợp lý)

Ta có $\sin\widehat{ICO} = \dfrac{OI}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\widehat{ICO} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC.\tan\widehat{ICO} = a$.

Bài toán 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA = $a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng ABCD . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là:

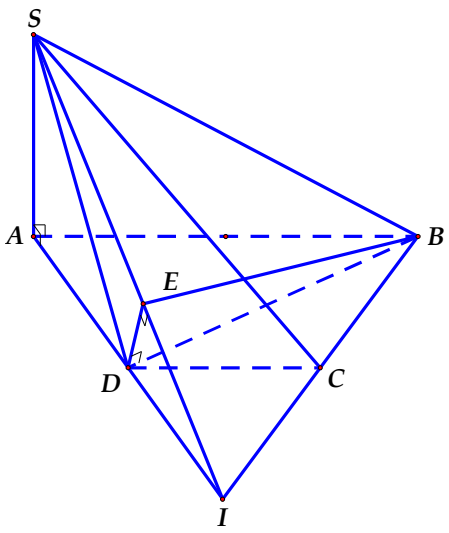
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Lời giải:

Chọn C.

Vì $ABCD$ là nữa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$ nên ta có được:

$AD = DC = CB = a,\ BD \perp AD$



Gọi I là giao điểm của AD và BC

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$

Kẻ $DE \perp SI$ ta có $\begin{cases} SI \perp BD \\ SI \perp DE \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE)$

$\Rightarrow \widehat{((SAD),(SBC))} = \widehat{(DE,\text{BE})}$

Ta có: $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ID = a;\ AI = 2a.$

Ta có $\sin\widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Lại có: $\sin\widehat{AIS} = \dfrac{DE}{DI} \Rightarrow DE = DI.\sin\widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

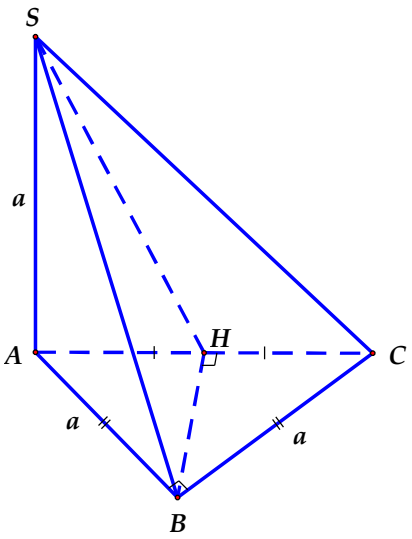
$\Rightarrow \tan\widehat{DEB}=\dfrac{BD}{ED}=\sqrt{7}$. Từ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos\widehat{DEB}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài toán 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA=BC=a;SA$ vuông góc vơi đáy, $SA=a$. Góc α giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Lời giải:

Chọn C.



Gọi H là trung điểm của $AC\Rightarrow AH\perp AC$.

Vì $\begin{cases}BH\perp AC\\BH\perp SA\end{cases}\left(do\begin{cases}SA\perp(ABC)\\BH\subset(ABC)\end{cases}\right)$

$\Rightarrow BH\perp(SAC)$

$\Rightarrow \Delta SHC$ là hình chiếu của ΔSBC lên $(SAC)\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}}$

+ Ta có: $AC=\sqrt{BA^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta SHC}=\dfrac{1}{2}SA.HC=\dfrac{1}{2}a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

+ Vì $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\left(do\ SA\perp(ABC)\right)$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại B.

Khi đó: $S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}SB.SB=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}.a=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha=\dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$.

Bình luận: Trong bài toán trên, ta dễ dàng xác định được giao tuyến $SC=(SAC)\cap(SBC)$ nhưng lại gặp khó khăn trong việc tìm một mặt phẳng vuông góc với SC. Đồng thời nhận thấy rằng việc xác định hình chiếu của B lên (SAC) và tính diện tích của hai tam giác $\Delta SHC;\ \Delta SBC$ là khá dễ dàng nên ta vận dụng cách 3 trong nội dung phương pháp đã trình bày ở trên để giải quyết nhanh bài toán.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng mà $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khẳng định nào sau đây **sai ?**

A. $(SAB) \perp (ABC)$ **B.** $(SAB) \perp (SAC)$

C. Vẽ $AH \perp BC, (H \in BC) \Rightarrow$ góc $\widehat{AHS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{ACB}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai ?**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$.

B. $(BCD) \perp (AIB)$

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

D. $(ACD) \perp (AIB)$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây ?

A. Góc $\widehat{SBA}$ **B.** Góc $\widehat{SCA}$

C. Góc $\widehat{SCB}$ **D.** Góc $\widehat{SIA}$ với I là trung điểm của BC.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây **sai ?**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

D. $(SAC) \perp (SBD)$

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACD}$. **B.** Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$. **D.** Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Nếu góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45^0 thì độ dài đoạn SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$ **B.** $SO = a\sqrt{2}$ **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a, BC = 2a, CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai ?**

A. Đáy ABC là tam giác vuông.

B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C)$ vuông góc với nhau.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45^0.

D. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $BAC = 120^0$, $AB = AC = a$ và $SA = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(\widehat{MN, SC}\right)$ bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 13. Cho hình chóp ngũ giác đều $S.ABCDE$. Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là:

A. 36^0 **B.** 54^0 **C.** 72^0 **D.** 90^0

Câu 14. Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy và $SO = a$. Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo nhỏ nhất là.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

a) Góc giữa SC và $(ABCD)$ có số đo bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

b) Góc α giữa SB và (SAC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây ?

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{14}}{14}$ **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{14}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{14}$ **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{14}$

c) Góc β giữa AC và (SBC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây ?

A. $\cos\beta=\frac{\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{7}$ **C.** $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{7}$ **D.** $\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết $SB=a$, khi đó số đo góc giữa SA và (ABC) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa mp(SCD) và mp$(ABCD)$ là φ, khi đó $\tan\varphi$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\tan\varphi=1$ **C.** $\tan\varphi=\sqrt{2}$ **D.** $\tan\varphi=\sqrt{3}$

Câu 19. Cosin của góc giữa hai mặt của tứ diện đều bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 20. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Số đo của góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Khi đó, độ dài đường cao SH bằng:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB=BC=a, AD=2a$. Nếu góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0 thì góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ **D.** 45^0

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của $BB',CD,A'D'$. Góc giữa MP và $C'N$ bằng.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 25. Cho tứ diện ABCD có $AB=72cm, CA=58cm, BC=50cm, CD=40cm$ và $CD\perp(ABC)$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng:

A. 45^0 **B.** 30^0 **C.** 60^0 **D.** Đáp án khác.

Câu 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$; $\widehat{BAC}=120^0, BB'=a$ và I là trung điểm của CC'. Tính $\cos\widehat{((ABC);(AB'I))}$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\sqrt{\frac{3}{10}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Câu 27. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $A'A=A'B=A'C=m$. Để góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60^0 thì giá trị của m là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là tâm của đáy và M,N lần lượt là trung điểm của SA,BC. Góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 thì độ dài MN là:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết $AB=2a$, $ACB=30^0$. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC và góc tạo bởi SA và mặt đáy bằng 60^0. Tính cosin của góc tạo bởi AH và SC.

A. $\frac{\sqrt{42}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{42}}{26}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=2a$, $AB=3a$.

a) Tính góc giữa SA và mặt phẳng đáy (ABC).

A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

b) Tính tan của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi I và trung điểm của AB.

a) Tính cosin của góc tạo bởi BD và mặt phẳng (SAD)

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$

b) Tính cosin của góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SCI).

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$

c) Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng IC và SD.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{20}$ **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{7}$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh A, có cạnh huyền $BC=a$. Gọi I là trung điểm của BC và $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc tạo bởi SI và mặt phẳng (SAC) bằng 30^0. Tính cosin của góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{\sqrt{57}}{8}$ **B.** $\frac{\sqrt{19}}{5}$ **C.** $\frac{\sqrt{19}}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{57}}{9}$

Câu 33. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đáy tâm O và có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính $\sin\widehat{(MN;(SAC))}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 34. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên có độ dài bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AB và φ là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi=\frac{2}{\sqrt{19}}$ **B.** $\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{19}}$ **C.** $\tan\varphi=\frac{3\sqrt{19}}{19}$ **D.** $\tan\varphi=\frac{1}{2\sqrt{19}}$

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=AB=a$, $AD=3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SDM) và $(ABCD)$.

A. $\frac{6}{7}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính góc giữa m/p $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 37. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ đáy có bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết $(BM,ND)=60^0$. Gọi h là chiều cao lớn nhất của hình chóp. Tính h.

A. $h=\frac{\sqrt{30}a}{2}$ **B.** $h=\frac{\sqrt{30}a}{6}$ **C.** $h=\frac{\sqrt{15}a}{2}$ **D.** $h=\frac{\sqrt{42}a}{2}$

Câu 38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $Ab=AC=a$, $BAC=120^0$ và cạnh bên $BB'=a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}}{8}$ **C.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1A	2D	3C	4A	5C	6C	7D	8B	9D	10C
11C	12D	13D	14B	15.C.B.D	16B	17C	18B	19D	20C
21B	22A	23A	24.D	25A	26B	27C	28C	29B	30.A.D
31.C.A.B	32D	33B	34B	35A	36C	37A	38D		

Câu 1. **Chọn A.**

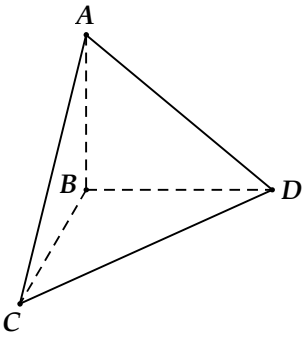
Câu 2. **Chọn D.**

Câu 3. **Chọn C.**

Câu 4. **Chọn A.**

Câu 5. **Chọn C.**

Câu 6. **Chọn C.**

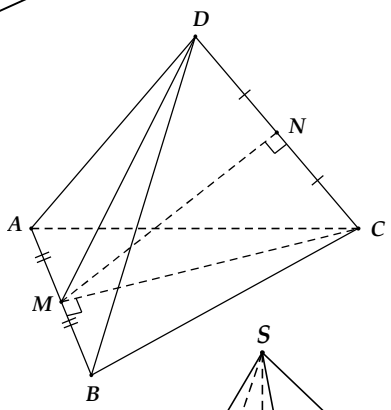


+ A sai, vì $\widehat{\left(AC,\left(BCD\right)\right)}=\widehat{ACB}$.

+ B sai, vì $\widehat{\left(AD,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{BAD}$

+ D sai, vì $\widehat{\left(CD,\left(ABD\right)\right)}=\widehat{BDC}$

Câu 7. **Chọn D.**



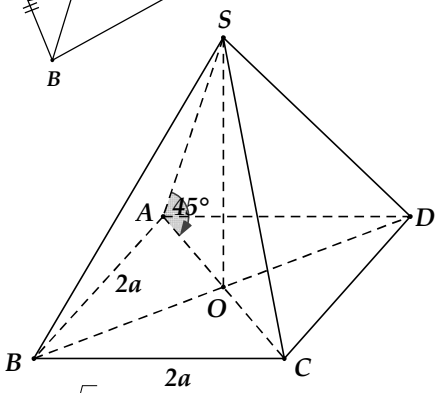
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Do ΔABC, ΔABD là các tam giác đều nên

$$\begin{cases} AB\perp CM \\ AB\perp DM \end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(CMD\right)\Rightarrow AB\perp CD$$

hay $\left(AB,CD\right)=90^0$

Câu 8. **Chọn B.**



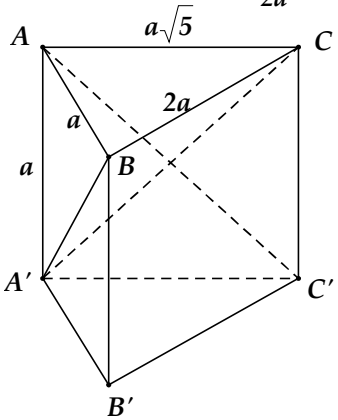
Ta có: $AC=2a\sqrt{2}\Rightarrow OA=\dfrac{AC}{2}=a\sqrt{2}$

$\widehat{\left(SA,\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SAO}=45^0$

Khi đó, ΔSAO là tam giác vuông cân tại O.

Suy ra $SO=OA=a\sqrt{2}$.

Câu 9. **Chọn D.**



+ $AB^2+BC^2=a^2+\left(2a\right)^2=5a^2=AC^2$

$\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $B\Rightarrow$ A đúng.

+ $\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $B\Rightarrow AB\perp BC$

Vì $\begin{cases} AB\perp BC \\ AB\perp BB' \end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(BB'C'\right)$

$\Rightarrow\left(AA'B'B\right)\perp\left(BB'C'\right)\Rightarrow$B đúng.

+ Dễ dàng chứng minh được $BC \perp (AA'B'B)$

$\Rightarrow BC \perp A'B$

Vì $\begin{cases} (ABC) \cap (A'BC) = BC \\ AB \perp BC \\ A'B \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABC),(A'BC))} = \widehat{(AB,A'B)} = \widehat{ABA'} = 45^0$

(vì $\Delta ABA'$ vuông cân tại A) => C đúng.

+ Ta có: $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{5}\right)^2} = a\sqrt{6}$ => D sai.

Câu 10. **Chọn C.**

Gọi I là trung điểm của AC, suy ra : $\begin{cases} MI // AB; NI // CD \\ MI = NI = a \end{cases}$

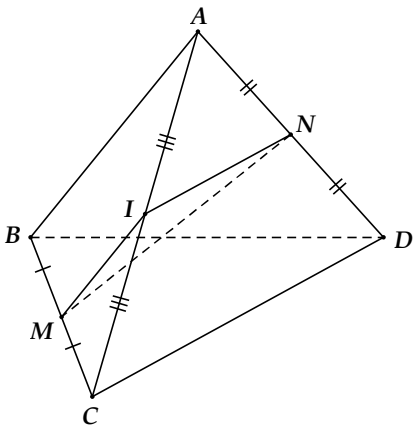
Khi đó $(AB,CD) = (MI,NI)$. Xét tam giác MIN ta có:

$\cos MIN = \dfrac{MI^2 + NI^2 - MN^2}{2.MI.NI} = \dfrac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MIN = 120^0$

Suy ra $(MI,NI) = 60^0$ hay $(AB,CD) = 60^0$

Chú ý : Trong câu hỏi trên do chưa thể kết luận được luôn $\widehat{MIN}$ là góc nhọn nên ta không được phép viết $\widehat{(AB,CD)} = \widehat{(MI,NI)} = \widehat{MIN}$



Câu 11. **Chọn C.**

Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA}$

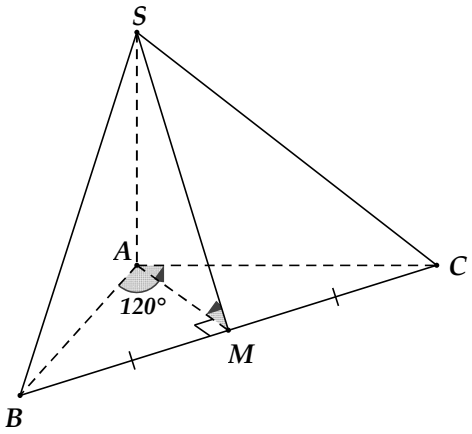
Tam giác ABC cân tại A nên :

$AM = AC.\cos MAC = a.\cos 60° = \dfrac{a}{2}$

Trong tam giác vuông SAM có:

$\tan SMA = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} : \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SMA = 30°$

Vậy $((SBC),(ABC)) = 30°$



Câu 12. **Chọn D.**

Vì $MN // SA \Rightarrow \widehat{(MN,SC)} = \widehat{(SA,SC)}$

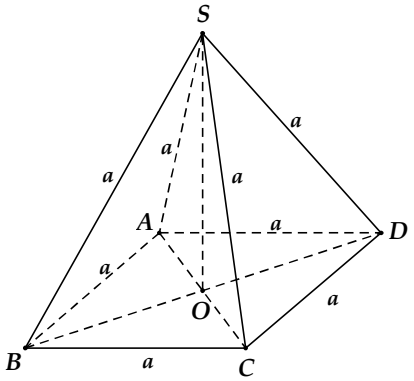
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Vì $SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = AC^2$

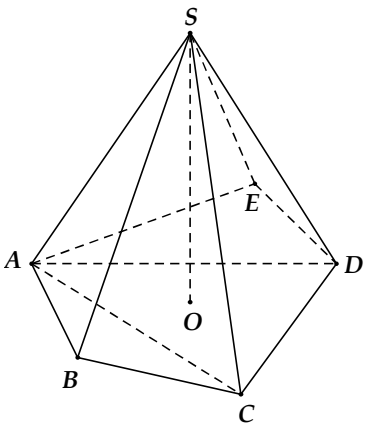
$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

$\Rightarrow SA \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA,SC)} = 90^0$

Vậy $\widehat{(MN,SC)} = \widehat{(SA,SC)} = 90^0$.



Câu 13. **Chọn D.**

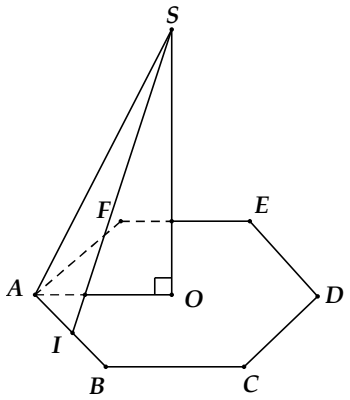


+ Ta đã biết góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^0, nên nếu có một cạnh đáy vuông góc với SA thì góc lớn nhất là 90^0.

+ Vì $SC=SD$ và $AC=AD$ (hai dây chắn hai cung bằng nhau trong đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều $ABCDE$) nên $SA\perp CD$.

Vậy góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là 90^0.

Câu 14. **Chọn B.**



Vì $\begin{cases} CD//AF \\ ED//AB \\ EF//AO \end{cases}$ nên ta chỉ tính và so sánh các góc $\widehat{SAB},\widehat{SAF},\widehat{SAO}$.

Mà $\widehat{SAB}=\widehat{SAF}$ nên ta chỉ cần so sánh $\widehat{SAB},\widehat{SAO}$.

Ta có: $\sin\widehat{SAO}=\dfrac{SO}{SA}$

Kẻ $SI\perp AB,\left(I\in AB\right)$, khi đó $\sin\widehat{SAB}=\dfrac{SI}{SA}$.

Vì $SO<SI\Rightarrow\sin\widehat{SAO}<\sin\widehat{SAB}\Rightarrow\widehat{SAO}<\widehat{SAB}$

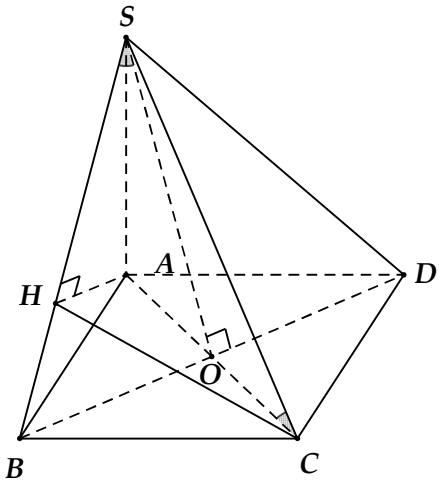
Vậy $\widehat{SAO}$ nhỏ nhất và bằng 45^0 vì ΔSAO vuông cân

Câu 15. **a) Chọn C.**

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=60^0$$

Vậy $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}=60^0$



b) Chọn B.

Dễ dàng chứng minh được $BO\perp\left(SAC\right)$

=> SO là hình chiếu của SB lên (SAC).

$\Rightarrow\alpha=\widehat{\left(SB,\left(SAC\right)\right)}=\widehat{\left(SB,SO\right)}=\widehat{BSO}$

Xét ΔSBO vuông tại O, ta có:

$$\sin\widehat{BSO}=\frac{BO}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{14}.$$

Vậy $\sin\alpha=\sin\widehat{BSO}=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

c) Chọn D.

Trong (SAB), kẻ $AH\perp SB,\left(H\in SB\right)$.

Vì $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$

Vì $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của AC lên (SBC).

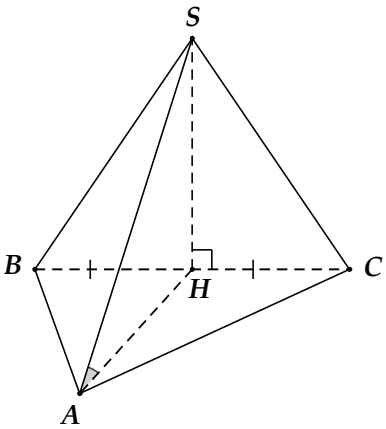
Do đó: $\beta = \widehat{(AC,(SBC))} = \widehat{(AC,HC)} = \widehat{ACH}$.

Xét ΔACH vuông tại H, ta có: $\sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC}$.

Mà trong ΔSAB, ta có: $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Vậy $\sin\beta = \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 16. **Chọn B.**



Gọi H là trung điểm của BC.

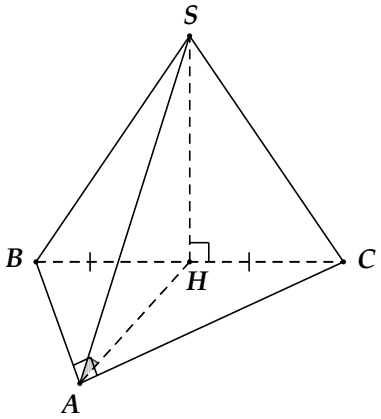
$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên $(ABC) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}$

Vì AH, SH lần lượt là đường cao trong hai tam giác đều ABC và SBC có cạnh bằng a nên $AH = SH$.

$\Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{SAH} = 45^0$.

Vậy $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = 45^0$

Câu 17. **Chọn C.**



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên (ABC).

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}$.

Ta có: $\begin{cases} SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

Xét ΔSAH vuông tại H, ta có: $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^0$.

Vậy $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = 60^0$

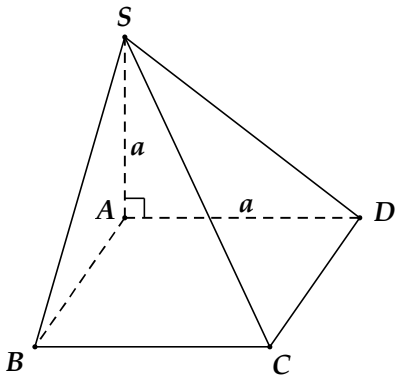
Câu 18. **Chọn B.**

Vì $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ CD\perp(SAD)\\ (SAD)\cap(SCD)=SD\\ (SAD)\cap(ABCD)=AD\end{cases}$

$\Rightarrow \varphi=\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{(SD,AD)}=\widehat{SDA}$

Xét ΔSAD vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{a}{a}=1$.

Vậy $\tan\varphi=\tan\widehat{SDA}=1$.



Câu 19. **Chọn D.**

Giả sử có tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Cần tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Gọi H là trung điểm của $CD\Rightarrow\begin{cases}AH\perp CD\\ SH\perp CD\end{cases}$

Mà $(ACD)\cap(BCD)=CD$

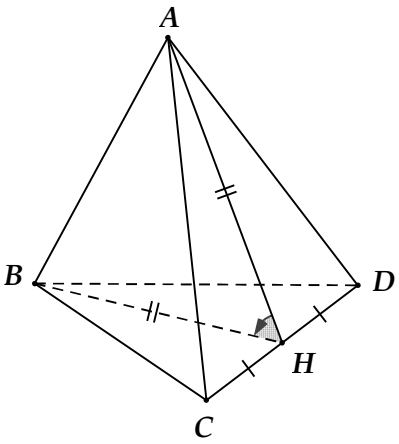
$\Rightarrow\widehat{((ACD),(BCD))}=\widehat{(AH,BH)}=\widehat{AHB}$

Ta có: $AH=BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí cosin trong ΔABH, ta được:

$\cos\widehat{AHB}=\dfrac{AH^2+BH^2-AB^2}{2AH.BH}$

$\cos\widehat{AHB}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}$



Câu 20. **Chọn C.**

Vì $SH\perp(ABC)\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên $(ABC)\Rightarrow\widehat{(SC,(ABC))}=\widehat{(SC,HC)}=\widehat{SCH}$

Gọi I là trung điểm của AB.

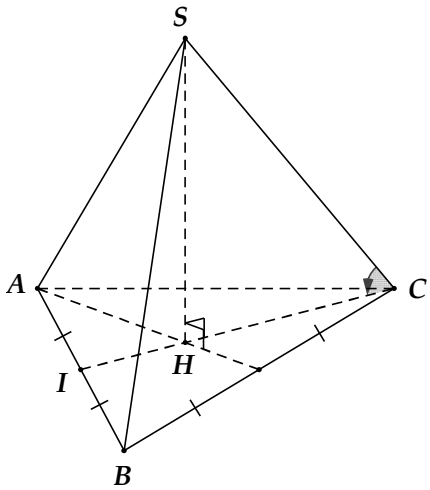
Vì ΔABC đều cạnh a $\Rightarrow CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow CH=\dfrac{2}{3}CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

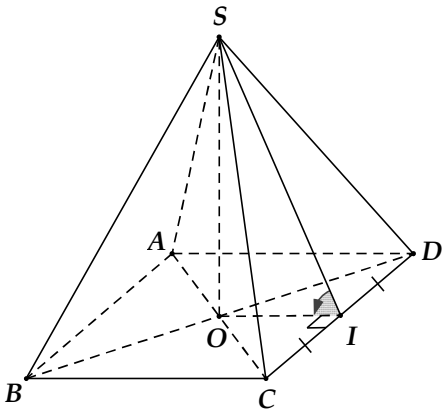
Xét ΔSCH vuông tại H, ta có:

$\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SCH}=60^0$

Vậy $\widehat{(SC,(ABC))}=\widehat{SCH}=60^0$.



Câu 21. **Chọn B.**



Giả sử có hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao $SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} OI \perp CD \\ OI = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

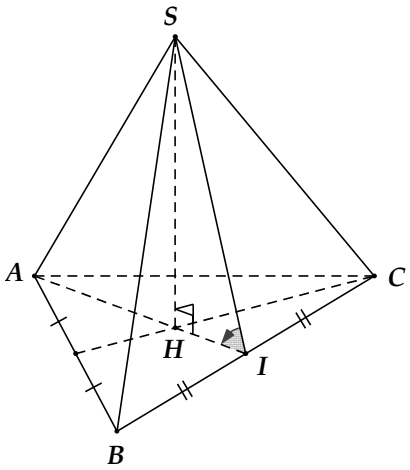
Vì $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp SI$.

Vì $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(SI,OI)} = \widehat{SIO}$

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SIO} = 45^0$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SIO} = 45^0$.

Câu 22. **Chọn A.**



Gọi I là trung điểm của BC.

Khi đó, $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI,AI)} = \widehat{SIA} = 60^0$

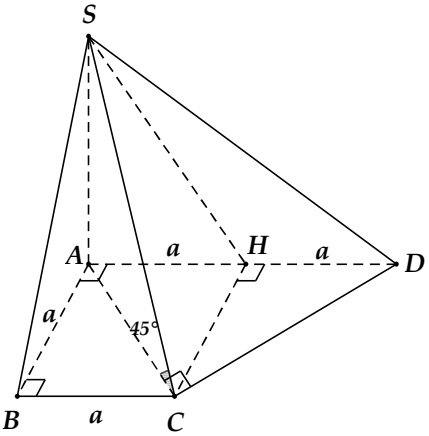
Ta có: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét ΔSHI vuông tại H, ta có:

$\tan\widehat{SIH} = \dfrac{SH}{HI} \Rightarrow SH = HI.\tan\widehat{SIH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60^0$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{2}$

Câu 23. **Chọn A.**



Gọi H là trung điểm của AD.

$\Rightarrow ABCH$ là hình vuông $\Rightarrow CH \perp AD$

$\Rightarrow CH \perp (SAD)$

$\Rightarrow \Delta SHD$ là hình chiếu của ΔSCD lên (SAD).

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Khi đó: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta SHD}}{S_{\Delta SCD}}$

Ta có: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,CA)} = \widehat{SCA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \begin{cases} SA = AC = a\sqrt{2} \\ SC = 2a \end{cases}$

+ $S_{\Delta SHD} = \frac{1}{2}SA.HD = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

+ Ta có $AC = CD = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 + CD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$

Vì $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Khi đó: $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$

Vậy $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SHD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$

Câu 24. **Chọn D.**

Gọi Q là trung điểm $CC' \Rightarrow MQ // BC$

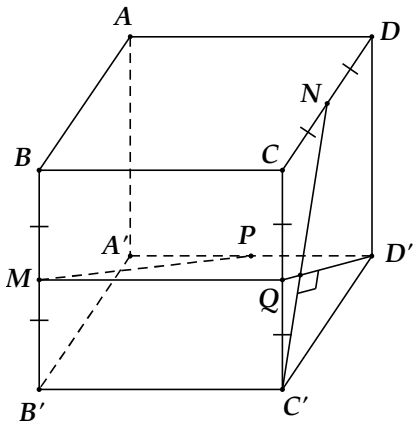
Mà $BC \perp (CC'D'D) \Rightarrow MQ \perp (CC'D'D) \supset C'N$

$\Rightarrow MQ \perp C'N$

Trong hình vuông $CC'D'D$, ta có: $C'N \perp D'Q$

Vì $\begin{cases} C'N \perp MQ \\ C'N \perp D'Q \end{cases} \Rightarrow C'N \perp (MPD'Q) \Rightarrow C'N \perp MP$

Vậy $\widehat{(C'N, MP)} = 90^0$.



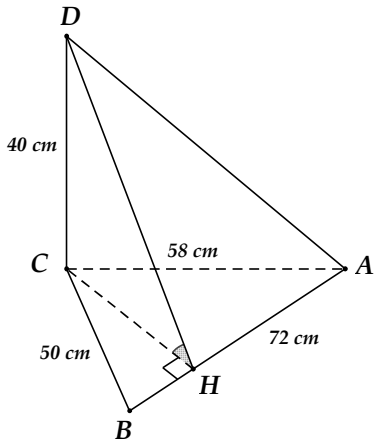
Câu 25. **Chọn A.**

Trong (ABC), kẻ $CH \perp AB$, $(H \in AB)$

Vì $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp DH$.

Vì $\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((ABC),(ABD))} = \widehat{(CH, DH)} = \widehat{CHD}$



Xét ΔCHD vuông tại C, ta có: $\tan\widehat{CHD} = \frac{CD}{CH}$

Ta có: $p = p_{\Delta ABC} = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{72 + 50 + 58}{2} = 90$

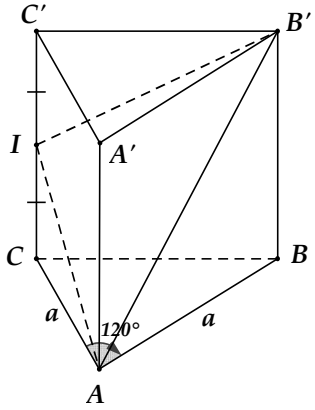
$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{90(90 - 72)(90 - 50)(90 - 58)} = 1440 cm^2$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH.AB \Rightarrow CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2.1440}{72} = 40cm$

Do đó: $\tan\widehat{CHD}=\dfrac{CD}{CH}=\dfrac{40}{40}=1\Rightarrow\widehat{CHD}=45^0$

Vậy $\left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right)=\widehat{CHD}=45^0$.

Câu 26. **Chọn B.**



Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta AB'I$ trên (ABC) nên $\cos\varphi=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}$

+ Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

$=\dfrac{1}{2}.a.a.\sin120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ $B'C'^2=BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a^2+a^2-2a.a.\cos120^0=3a^2$

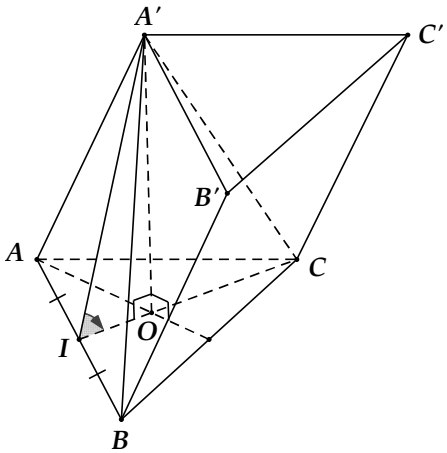
Ta có: $\begin{cases}AB'=a\sqrt{2}\\ AI=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\\ B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\sqrt{3a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{13a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow AB'^2+AI^2=2a^2+\dfrac{5a^2}{4}=\dfrac{13a^2}{4}=B'I^2\Rightarrow\Delta AB'I$ vuông tại A.

$\Rightarrow S_{\Delta AB'I}=\dfrac{1}{2}AB'.AI=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$

Vậy $\cos\varphi=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

Câu 27. **Chọn C.**



Gọi O là trọng tâm của ΔABC đều

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà $A'A=A'B=A'C$

$\Rightarrow A'O\perp(ABC)\Rightarrow A'O\perp AB$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$\begin{cases}OI\perp AB\\ OI=\dfrac{1}{3}CI=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\end{cases}$

Vì $\begin{cases}AB\perp OI\\ AB\perp A'O\end{cases}\Rightarrow AB\perp(A'OI)\Rightarrow AB\perp A'I$

Vì $\begin{cases}(ABB'A')\cap(ABC)=AB\\ A'I\perp AB\\ OI\perp AB\end{cases}$

$\Rightarrow\widehat{((ABB'A'),(ABC))}=\widehat{(A'I,OI)}=\widehat{A'OI}=60^0$.

Xét $\Delta A'OI$ vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{A'OI}=\dfrac{OI}{A'I}\Rightarrow A'I=\dfrac{OI}{\cos\widehat{SIA}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\cos 60^0}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét $\Delta A'IA$ vuông tại I, ta có: $m=A'A=\sqrt{A'I^2+AI^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Câu 28. **Chọn C.**

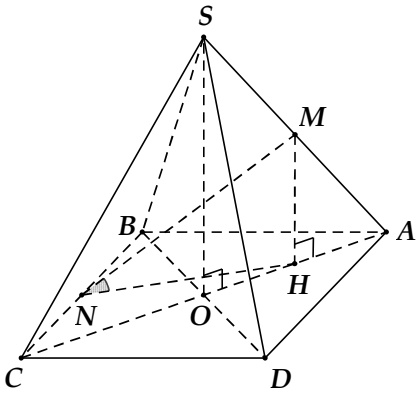
Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$ (1)

Gọi H là trung điểm của $OA\Rightarrow MH//SO$ (2).

Vì (1) và (2) $\Rightarrow MH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow HN$ là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow\widehat{(MN,(ABCD))}=\widehat{(MN,NH)}=\widehat{MNH}=60^0$



Ta có: $CH=\dfrac{3}{4}AC=\dfrac{3}{4}.a\sqrt{2}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Trong ΔCNH, ta có:

$NH=\sqrt{CN^2+CH^2-2CN.CH.\cos 45^0}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2-2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

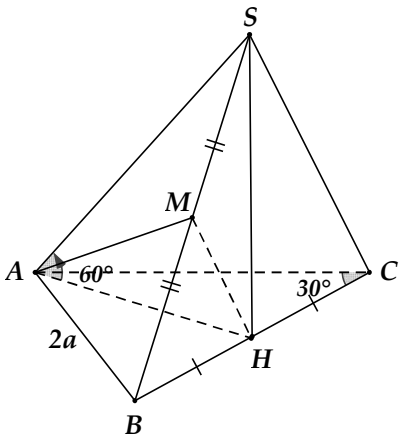
Xét ΔMNH vuông tại H, ta có:

$\cos\widehat{MNH}=\dfrac{NH}{MN}\Rightarrow MN=\dfrac{NH}{\cos\widehat{MNH}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos 60^0}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 29. **Chọn B.**

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó : $SH\perp(ABC)$,

suy ra góc tạo bởi SA và mặt đáy là $\widehat{SAH}=60^0$.



Có $BC=\dfrac{AB}{\tan\widehat{ACB}}=\dfrac{2a}{\tan 30^0}=2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow BH=\dfrac{BC}{2}=a\sqrt{3}$, khi đó : $AH=\sqrt{AB^2+BH^2}=a\sqrt{7}$

Xét tam giác SAH ta có :

$SH=AH.\tan 60^0=a\sqrt{7}.\sqrt{3}=a\sqrt{21}$

Gọi M là trung điểm của SB, suy ra $HM//SC$, khi đó: $\widehat{(AH,SC)}=\widehat{(AH,HM)}$ (1)

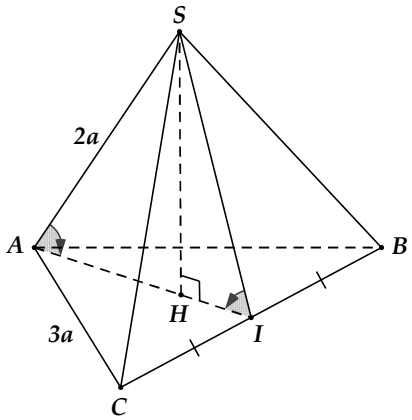
Ta có : $HM = MB = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SH^2 + BH^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{21a^2 + 3a^2}}{2} = a\sqrt{6}$

Tam giác AMB vuông tại B nên ta có : $AM^2 = AB^2 + MB^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2$.

Xét tam giác AMH có: $\cos AHM = \dfrac{AH^2 + HM^2 - AM^2}{2.AH.HM} = \dfrac{7a^2 + 6a^2 - 10a^2}{2.a\sqrt{7}.a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{42}}{28} > 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra cosin của góc tạo bởi AH và SC là $\cos \widehat{AHM} = \dfrac{\sqrt{42}}{28}$

Câu 30. **a) Chọn A.**



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC).

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm tam giác ABC

(ΔABC đều nên trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC trùng nhau)

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA,HA}\right) = \widehat{SAH}$

Gọi I là trung điểm của BC , khi đó tam giác ABC đều cạnh $3a$ nên: $AI = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AI = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAH ta có: $\cos \widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAH} = 30°$.

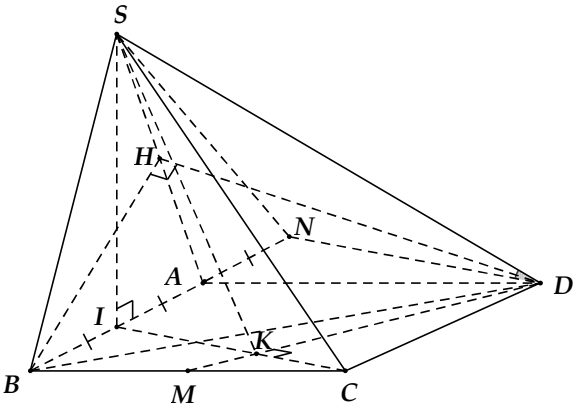
Vậy $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = 30°$.

b) Chọn D.

Ta có $HI \perp BC \Rightarrow \left(\widehat{SBC},\widehat{(ABC)}\right) = \left(\widehat{SI,AI}\right) = \widehat{SIA}$.

Ta có: $\begin{cases} SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a \\ HI = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan \widehat{SIA} = \dfrac{SH}{IH} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 31. **a) Chọn C.**



Ta có $SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Do ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Có: $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SI \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$

hay $(SAD) \perp (SAB)$

Do đó, góc tạo bởi BD và mặt phẳng (SAD) khi xét trong hình chóp $D.SAB$ thuộc trường hợp 2 – là góc tạo bởi cạnh bên và mặt đứng. Nên ta dựng $BH \perp SA (H \in SA)$

Suy ra $\left(\widehat{BD,(SAD)}\right)=\left(\widehat{BD,DH}\right)=\widehat{BDH}$.

Ta có $BD=a\sqrt{2}$ và $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow DH=\sqrt{BD^2-BH^2}=\sqrt{2a^2-\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Khi đó $\cos\widehat{BDH}=\dfrac{DH}{BD}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}:a\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

b) Chọn A.

Gọi M là trung điểm của BC và K là giao điểm của DM và CI khi đó

$\Delta BIC=\Delta CMD\Rightarrow\widehat{ICB}=\widehat{MDC}$. Mà $\widehat{DCK}+\widehat{ICB}=90^\circ\Rightarrow\widehat{DCK}+\widehat{CDM}=90^\circ\Rightarrow DM\perp CI$.

Vậy $\begin{cases}DM\perp CI\\DM\perp SI\end{cases}\Rightarrow DM\perp(SCI)$ hay $DK\perp(SCI)$.

Suy ra $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{2}$. Ta có: $DM=\sqrt{CD^2+CM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a^2}{2}\right)}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Khi đó :

$CD^2=DK.DM\Rightarrow DK=\dfrac{CD^2}{DM}=a^2.\dfrac{2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow SK=\sqrt{SD^2-DK^2}=\sqrt{2a^2-\dfrac{4a^2}{5}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$

Xét tam giác SDK ta có: $\cos\widehat{DSK}=\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}.a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

c) Chọn B.

Dựng điểm N sao cho A là trung điểm của IN , khi đó $ICDN$ là hình bình hành.

Suy ra $IC//ND$. Suy ra $\left(\widehat{IC,SD}\right)=\left(\widehat{DN,SD}\right)$

Ta có $DN=CI=DM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $SN=\sqrt{SI^2+IN^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+a^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

Áp dụng hệ quả định lí cosin trong tam giác SND ta có :

$\cos\widehat{SDN}=\dfrac{SD^2+DN^2-SN^2}{2.SD.DN}=\dfrac{2a^2+\dfrac{5a^2}{4}-\dfrac{7a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}>0\Rightarrow\cos\left(\widehat{IC,SD}\right)=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

Câu 32. **Chọn D.**

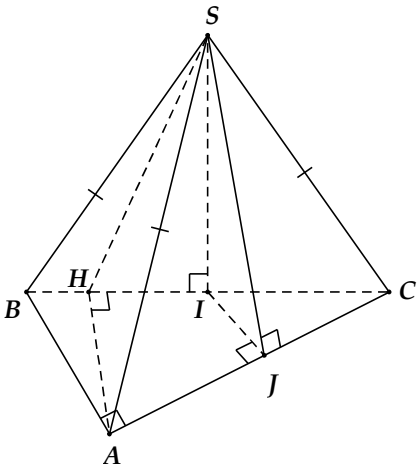
Do $SA=SB=SC\Rightarrow SI\perp(ABC)$ (SI là trục của tam giác ABC) hay $(SBC)\perp(ABC)$.

Khi đó góc tạo SA và mặt phẳng (SBC) là góc tạo bởi cạnh bên và mặt đứng.

Khi đó, kẻ $AH\perp BC(H\in BC)\Rightarrow\left(\widehat{SA,(SBC)}\right)=\widehat{ASH}$

Góc tạo bởi SI và mặt phẳng (SAC) là góc tạo bởi chiều cao và mặt bên .

Khi đó, kẻ $IJ\perp AC(J\in AC)\Rightarrow\left(\widehat{SI,(SAC)}\right)=\widehat{ISJ}=30^\circ$



+) Ta có $SI=\sqrt{SC^2-CI^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSIJ ta có : $IJ=SI\tan 30^\circ=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

+) IJ là đường trung bình ΔABC nên suy ra $AB=2IJ=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, khi đó $AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{2a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{19}}{6}$

+) Xét tam giác vuông SHA (vuông tại H) ta có: $\cos\widehat{ASH}=\frac{SH}{SA}=\frac{\frac{a\sqrt{19}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{57}}{9}$.

Câu 33. **Chọn B.**

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Gọi P là trung điểm của AO.

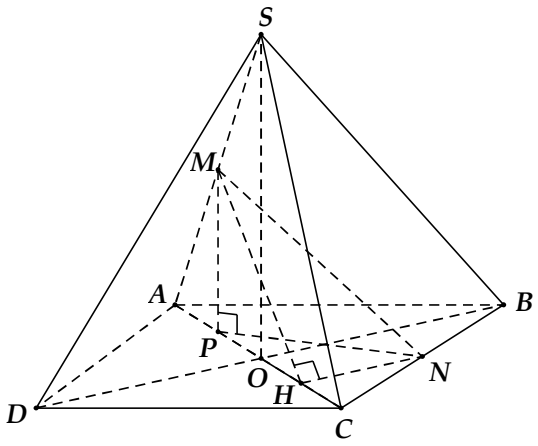
Khi đó $MP//SO\Rightarrow MP\perp(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(MN,(ABCD))}=\widehat{MNP}=60^\circ$.

Xét ΔNCP , ta có:

$PN^2=CN^2+CP^2-2CN.CP\cos 45^\circ=\frac{5a^2}{8}$.

$\Rightarrow PN=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.



Trong tam giác vuông MNP ta có: $\begin{cases} MN=\frac{PN}{\cos\widehat{MNP}}=\frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos 60^\circ}=\frac{a\sqrt{10}}{2} \\ PM=NP\tan\widehat{MNP}=\frac{a\sqrt{30}}{4}\Rightarrow SO=2PM=\frac{a\sqrt{30}}{2} \end{cases}$.

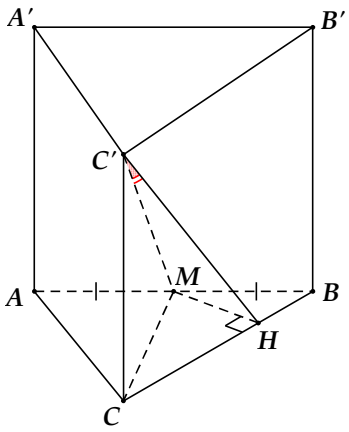
Gọi H là trung điểm của OC. Suy ra $NH//BD$ mà $BD\perp(SAC)\Rightarrow NH\perp(SAC)$.

Do đó $\widehat{(MN,(SAC))}=\widehat{NMH}$.

Ta có $NH=\frac{1}{2}OB=\frac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\sin\widehat{NHM}=\frac{NH}{MN}=\frac{a\sqrt{2}}{4}:\frac{a\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Câu 34. **Chọn B.**

Do góc tạo bởi MC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ có chính là góc tạo bởi $C'M$ và mặt bên $(C'BC)$ khi xét trong hình chóp $C'.MCB$.



Do đó kẻ $MH \perp BC (H \in BC) = \varphi$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên:

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C'M = \sqrt{CM^2 + CC'^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

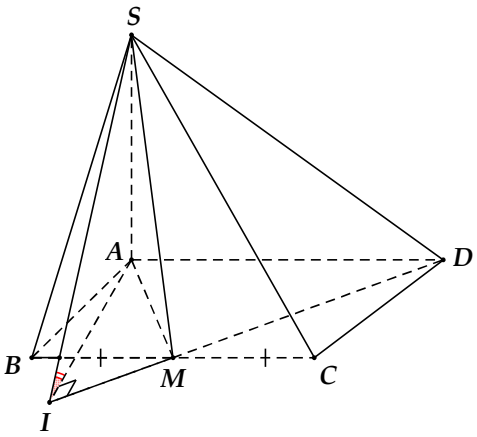
Có: $MH = MB.\sin\widehat{ABC} = \frac{a}{2}.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow C'H = \sqrt{C'M^2 - MH^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{57}}{4}$$

Trong tam giác vuông $C'MH$ ta có: $\tan\varphi = \tan\widehat{MC'H} = \frac{MH}{C'H} = \frac{a\sqrt{3}}{4} : \frac{a\sqrt{57}}{4} = \frac{1}{\sqrt{19}}$

Câu 35. **Chọn A.**

Kẻ $AI \perp MD (I \in MD)$, suy ra góc tạo bởi (SDM) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIA}$



Ta có $S_{AMD} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{AB.AD}{2} = \frac{3a^2}{2}$ và

$$MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

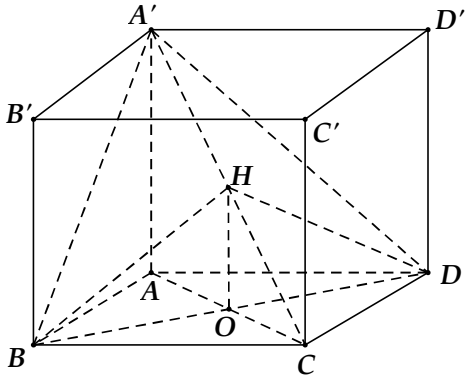
$$\Rightarrow AI = \frac{2.S_{AMD}}{MD} = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \frac{7a\sqrt{13}}{13}$$

Xét tam giác SAI , ta có : $\cos\widehat{SIA} = \frac{AI}{SI} = \frac{6}{7}$

Câu 36. **Chọn C.**

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Hạ $OH \perp A'C (H \in A'C) (H \in A'C)$.



Khi đó : $\left.\begin{matrix} A'C \perp OH \\ A'C \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'C \perp (BDH)$

Vậy $\left(\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right) = \left(\widehat{HB,HD}\right)$

Trong tam giác vuông $A'BC$ có

$BH=\dfrac{2.S_{A'BC}}{A'C}=\dfrac{BC.A'B}{A'C}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Tương tự ta có $DH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Trong tam giác BHD, áp dụng định lí cosin ta có:

$\cos\widehat{BHD}=\dfrac{BH^2+DH^2-BD^2}{2.BH.DH}=\dfrac{\dfrac{2a^2}{3}+\dfrac{2a^2}{3}-2a^2}{2.\dfrac{2a^2}{3}}=-\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\widehat{BHD}=120^\circ\Rightarrow\left(\widehat{HB,HD}\right)=60^\circ$. Vậy $\left(\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right)=60^\circ$

Câu 37. **Chọn A.**

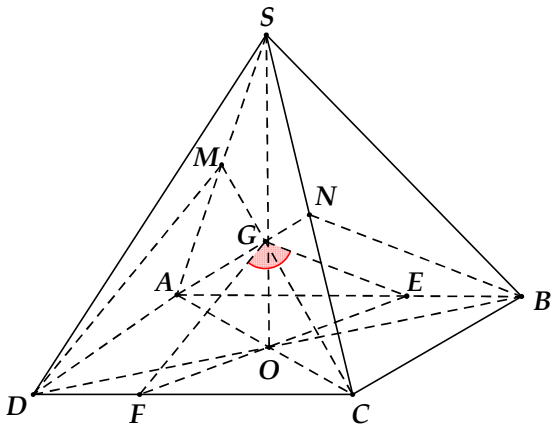
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm tam giác SAC

Đường thẳng qua G song song với BM cắt BC ở F

Đường thẳng qua G song song với DN cắt AD ở E

Ta có

$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{GM}{GC}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{GN}{GA}=\dfrac{ED}{EA}\Rightarrow\begin{cases}EA=2ED\\FC=2FB\end{cases}$



Suy ra EF đi qua tâm của hình vuông $ABCD$ và O là trung điểm của đoạn EF.

Từ $\left(\widehat{BM,ND}\right)=60^\circ\Rightarrow\left(\widehat{GE,GF}\right)=60^\circ$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{EGF}=60^\circ\\\widehat{EGF}=120^\circ\end{array}\right.$

+ Với $\widehat{EGF}=60^\circ$

Ta có ΔGEF cân tại G, suy ra ΔGEF cân tại G, suy ra ΔGEF đều $\Rightarrow GO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}EF$

Hình vuông $ABCD$ có cạnh a nên ta dễ dàng tính được $EF=\dfrac{\sqrt{10a}}{3}$

Suy ra chiều cao của chóp: $SO=3GO=3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{10}}{3}a=\dfrac{\sqrt{30a}}{2}$

+ Với $\widehat{EGF}=120^\circ$. Ta có ΔGEF cân tại G, suy ra $GO=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}EF=\dfrac{\sqrt{10a}}{6\sqrt{3}}\Rightarrow SO=3GO=\dfrac{\sqrt{30a}}{6}$

Do $\dfrac{\sqrt{30a}}{2}>\dfrac{\sqrt{30a}}{6}\Rightarrow h=\dfrac{\sqrt{30a}}{2}$.

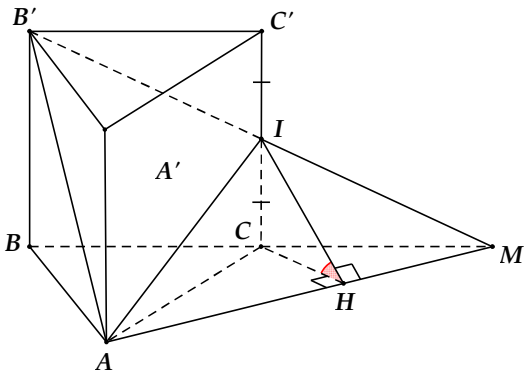
Câu 38. **Chọn D.**

Cách 1: Kéo dài $B'I$ cắt BC tại M, khi đó $\left(\widehat{(ABC),(AB'I)}\right)=\left(\widehat{(ACM),(AIM)}\right)$

Ta có $CI\perp(ACM)$, do đó ta có cách dựng góc giữa hai mặt (ACM) và (AIM) như sau:

Dựng $CH\perp AM(H\in AM)\Rightarrow\left(\widehat{(ACM),(AIM)}\right)=\widehat{CHI}$

Ta có $\begin{cases} CI // BB' \\ CI = \dfrac{1}{2} BB' \end{cases} \Rightarrow C$ là trung điểm của BM



$\Rightarrow S_{ACM} = S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Ta có

$CM^2 = CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC}$

$= 3a^2$

$\Rightarrow BM = 2BC = 2a\sqrt{3}$

Khi đó $AC^2 = \dfrac{AB^2 + AM^2}{2} - \dfrac{BM^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{a^2 + AM^2}{2} - 3a^2 \Rightarrow AM^2 = 7a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{7}$

Suy ra $CH = \dfrac{2.S_{ACM}}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow IH = \sqrt{CI^2 + CH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{21a^2}{14^2}} = \dfrac{a\sqrt{70}}{14}$

Xét tam giác ICH ta có: $\cos \widehat{CHI} = \dfrac{CH}{IH} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14} . \dfrac{14}{a\sqrt{70}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Chủ đề 2 KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

☆☆☆

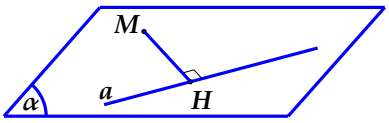
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Các dạng khoảng cách trong không gian

- **Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

  Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a là MH, với H là hình chiếu của M trên đường thẳng a.

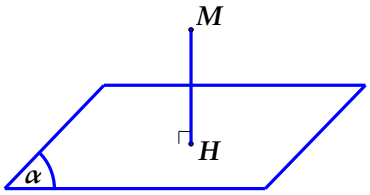
  Kí hiệu: $d(M,a)=MH$.



- **Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.**

  Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là MH, với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α).

  Kí hiệu: $d(M,(\alpha))=MH$.

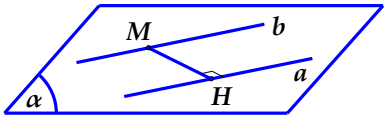


- **Dạng 3: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song.**

  Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường này đến đường kia.

  $d(a,b)=d(M,b)=MH \quad (M\in a)$

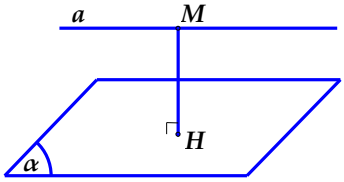
  (Quy về bài toán dạng 1)



- **Dạng 4: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.**

  Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α): $d(a,(\alpha))=d(M,(\alpha))=MH \quad (M\in a)$

  (Quy về bài toán dạng 2)

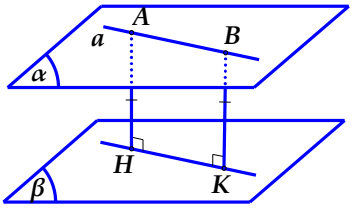


- **Dạng 5: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.**

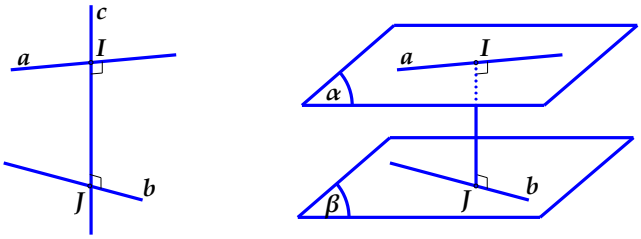
  Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

  $d((\alpha),(\beta))=d(a,(\beta))=d(A,(\beta))=AH \quad (a\subset(\alpha),A\in a)$

  (Quy về bài toán dạng 2)



- **Dạng 6: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.**
  - Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a,b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a,b. IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a,b.
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó: $d(a,b)=IJ$
  - Nếu ta dựng 2 mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa 2 đường thẳng chéo nhau a,b và song song với nhau thì: $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))$.



Nhận xét: Tất cả các dạng toán tìm khoảng cách ở trên đều đưa về về hai bài toán tìm khoảng cách cốt lõi nhất đó là: tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

B. GIẢI BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

Và bây giờ, chúng ta sẽ đi sâu vào các bước (quy trình) để giải 1 bài toán khoảng cách với các dạng toán khoảng cách cơ bản nhất.

DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

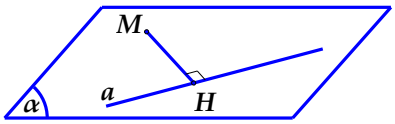
1. PHƯƠNG PHÁP

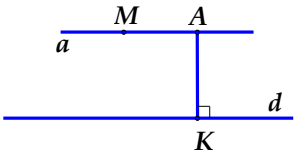
Bài toán: ***Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d cho trước***

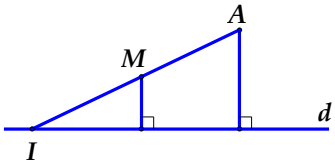
Cách 1:

Bước 1. *Trong mặt phẳng (M,d) hạ $MH \perp d$ với $H \in d$. Khi đó: $d(M,d) = MH$.*

Bước 2. *Tính toán tìm độ dài MH*







Chú ý:

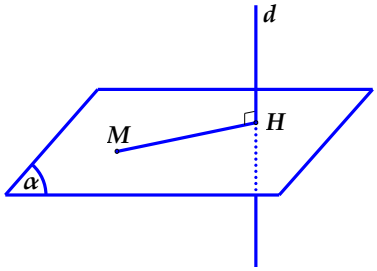
- *Nếu tồn tại đường thẳng a qua A và song song với d thì: $d(M,d) = d(A,d) = AK \quad (A \in d)$.*
- *Nếu $MA // d$ hay $d(M,d) = d(A,d)$, ta có thể thay vì tìm $d(M,d)$ ta sẽ tìm $d(A,d)$ với $d(A,d)$ dễ tính toán hơn, từ đó suy ra $d(M,d)$.*
- *Nếu $MA \cap d = I$, thì: $\dfrac{d(M,d)}{d(A,d)} = \dfrac{MI}{AI}$ (áp dụng định lý Ta-lét)*

Cách 2:

Bước 1. *Dựng (tìm) mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với đường thẳng d.*

Bước 2. *Tìm giao điểm $H = (\alpha) \cap d$. Lúc này H chính là hình chiếu của M trên đường thẳng d. Suy ra: $d(M,d) = MH$.*

Bước 3. *Tính toán tìm độ dài MH.*



2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD.

a) Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$

b) Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng:

A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ **B.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$ **C.** $a\sqrt{\frac{7}{5}}$ **D.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$

Lời giải:

Vì ΔBCD đều cạnh a có đường trung tuyến nên $CM \perp BD$; $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

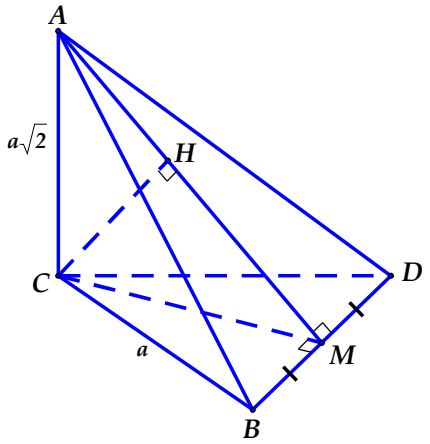
a) **Chọn D.**

Ta có: $BD \perp CM$ và $BD \perp AC$ $(do\ AC \perp (BCD))$

$\Rightarrow BD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp AM$

Vì $AM \perp BD \Rightarrow d(A, BD) = AM$

$$\Rightarrow d(A, BD) = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$



b) **Chọn B.**

Trong (ACM), kẻ $CH \perp AM, (H \in AM)$.

Khi đó: $d(C, AM) = CH = \frac{AC.CM}{AM} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{11}}{2}} = a\sqrt{\frac{6}{11}}$

Bài toán 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O, cạnh a, hình chiếu của C' trên mp (ABC) trùng với tâm của đáy. Cạnh bên CC' hợp với mp (ABC) góc 60^0. Gọi I là trung điểm của AB. Tính các khoảng cách:

a) Từ điểm O đến đường thẳng CC'

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** $\frac{a}{4}$ **D.** $\frac{a}{3}$

b) Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng IC'

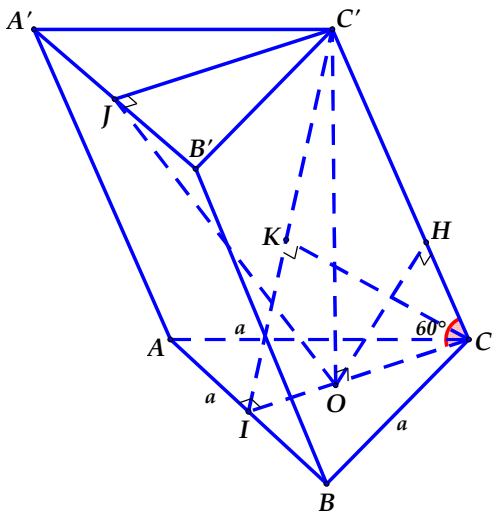
A. $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$

c) Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng $A'B'$

A. $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

Lời giải:

a) Tính $d(O,CC')$ - **Chọn A.**



Ta có: $C'O \perp (ABC)$

$\Rightarrow OC$ là hình chiếu của CC' lên (ABC)

$\Rightarrow \left(\widehat{CC',(ABC)}\right) = \widehat{C'CO} = 60^0$

Trong mp $(C'CO)$ dựng $OH \perp CC'$ tại H ta được:

$d(O,CC') = OH$.

Xét ΔCOH có:

$$OH = OC.\sin 60^\circ = \frac{2}{3}CI.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra: $d(O,CC') = \frac{a}{2}$.

b) Tính $d(C,IC')$ - **Chọn B.**

Trong mp $(C'IC)$ dựng $CK \perp IC'$ tại K ta được: $d(C,IC') = CK$

Xét $\Delta CIC' \Rightarrow OC'.CI = CK.IC' \Rightarrow CK = \frac{OC'.CI}{IC'}$

Mà $OC' = OC.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$; $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IC'^2 = IO^2 + OC'^2 = \frac{a^2}{12} + a^2 = \frac{13a^2}{12}$

Nên $d(C,IC') = CK = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

c) Tính $d(O,A'B')$ - **Chọn C.**

Vì $C'O \perp (ABC) // (A'B'C') \Rightarrow OC' \perp (A'B'C')$.

Gọi J là trung điểm của $A'B' \Rightarrow C'J \perp A'B' \subset (A'B'C') \Rightarrow OJ \perp A'B'$ (định lí 3 đường vuông góc)

Tức là: $d(O,A'B') = OJ$

Xét $\Delta OC'J \Rightarrow OJ = \sqrt{OC'^2 + C'J^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Tức là: $d(O,A'B') = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Bài toán 3: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khi đó, khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $a\sqrt{2}.\cot\alpha$ **B.** $a\sqrt{2}.\tan\alpha$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos\alpha$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha$

Lời giải:

Chọn D.

Giả sử, hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng a.

Vì OD là hình chiếu của SD lên $(ABCD)$ nên $\alpha = \widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{(SD,OD)} = \widehat{SDO}$

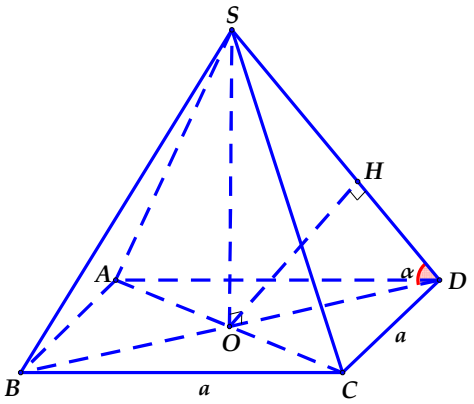
Trong (SBD), kẻ $OH \perp SD, (H \in SD)$.

Khi đó, khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên là $d(O,SD) = OH$.

Ta có: $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{BC^2+CD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+a^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔOHD vuông tại H, ta có:

$\sin\alpha = \dfrac{OH}{OD} \Rightarrow OH = OD.\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha$



Bài toán 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ D đến đường thẳng SB bằng:

A. a **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

Chọn A.

Gọi H là giao điểm của AC và BD.

$AB = BC = CD = DA = a \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Do đó $AC \perp BD$ đồng thời H là trung điểm của AC và BD.

ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SH \perp AC$ (1)

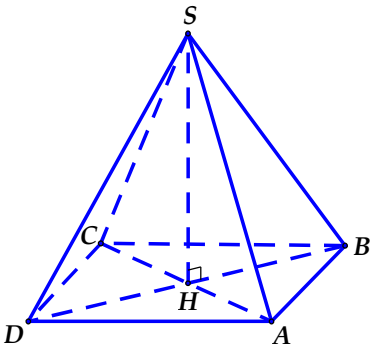
ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SH \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SH \perp (ABCD)$ (3)

Vì $SA = SB = SC = SD$ nên $HA = HB = HC = HD$.

Suy ra $ABCD$ là hình vuông (tứ giác đều) (4)

Từ (3) và (4) ta được $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.



Xét ΔSBD ta có: $SA = SB = a, BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2$. Thế nên ΔSBD vuông tại S.

Suy ra $DS \perp SB$. Vậy $d(D,SB) = DS = a$.

Bài toán 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SC bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Lời giải:

Chọn A.

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SC, (H \in SC)$ và $OK \perp SC, (K \in SC)$

Khi đó: $d(O,SC) = OK$

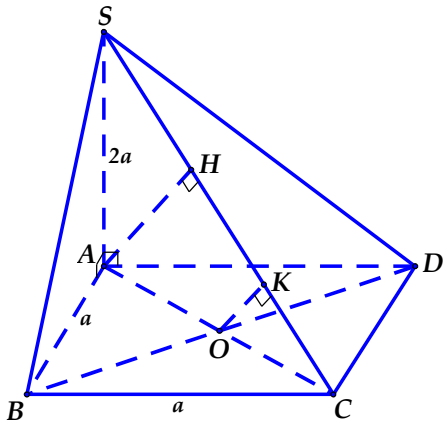
Trong (SAC), ta có: $\begin{cases} AH \perp SC \\ OK \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH // OK$

Xét ΔAHC, có $\begin{cases} AH // OK \\ AO = OC \end{cases} \Rightarrow HK = KC$

$\Rightarrow OK$ là đường trung bình của ΔAHC.

$\Rightarrow OK = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$

$\Rightarrow d(O,SC) = OK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a.a\sqrt{2}}{\sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$



Bài toán 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BE$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $AH \perp BE$ tại H

$\Rightarrow BE \perp (SAH) \Rightarrow BE \perp SH \Rightarrow d(S,BE) = SH$

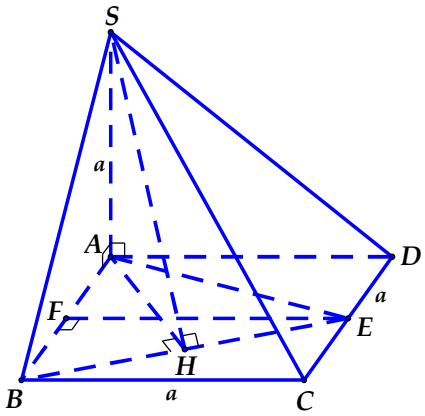
Ta có: $S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2}AB.EF = \dfrac{1}{2}a.a = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2}AH.BE$

Mà $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Nên $AH = \dfrac{a^2}{BE} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, mà ΔSAH vuông tại A, nên:

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(S,BE) = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.



Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{17}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$

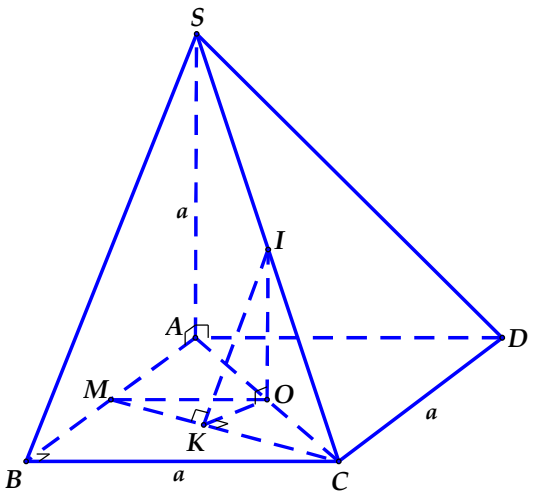
Lời giải:

Chọn C.

Vì IO là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow IO // SA$

Nên $IO \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp CM$. Dựng $OK \perp CM$ $(K \in CM)$ $\Rightarrow CM \perp (IOK) \Rightarrow CM \perp IK$.

Tức là: $d(I,CM) = IK$.



Mà $IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2}$

Do $S_{\Delta OMC} = \frac{1}{2} OK.MC$

$$\Rightarrow OK = \frac{2S_{\Delta OMC}}{MC} = \frac{2\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

Suy ra $IK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Bài toán 8: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Khoảng cách từ S đến cạnh AB là:

A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{19}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{19}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{2}$

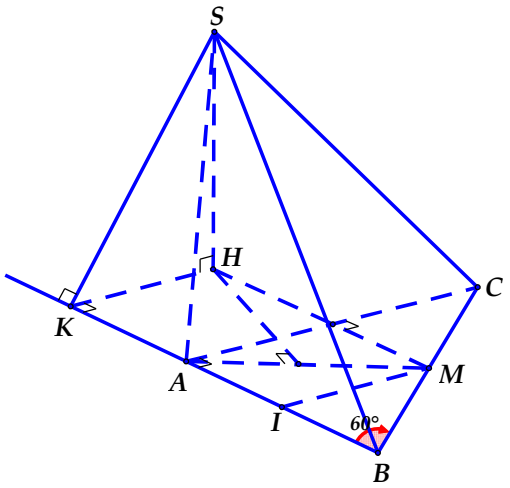
Lời giải:

Chọn B.

Do $SA = SC = SM$ nên chân đường cao hình là tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC.

Góc $\widehat{AMC} = 120^\circ$, nên H ở ngoài tam giác AMC

Và dễ dàng chứng minh được ΔHAM và ΔABM là hai tam giác đều cạnh a.



Từ H kẻ $HK \perp AB$, lại có $AB \perp SH$ tại K

$\Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$

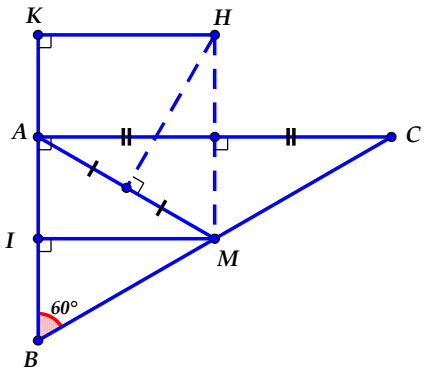
$\Rightarrow SK$ là khoảng cách từ S đến cạnh AB.

Ta có: $HM = AM = a$

$$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$$

$$HK = MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

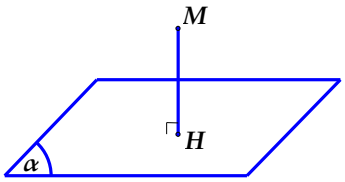
$$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{19a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$



DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Nhắc lại: Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là MH, với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α).

Kí hiệu: $d(M,(\alpha))=MH$.



1. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: ***Tìm khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)***

Như vậy, muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:

Cách 1:

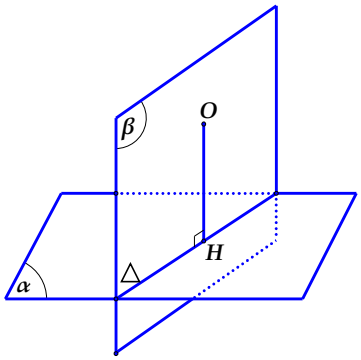
Bước 1. *- Tìm hình chiếu H của O lên (α).*

- Tìm mặt phẳng (β) qua O và vuông góc với (α).

- Tìm $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$.

- Trong mặt phẳng (β), kẻ $OH\perp\Delta$ tại H.

$\Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên (α).

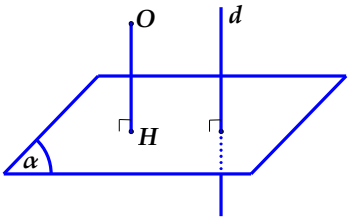


Bước 2. *Khi đó OH là khoảng cách từ O đến (α).*

Lưu ý: Chọn mặt phẳng (β) sao cho dễ tìm giao tuyến với (α).

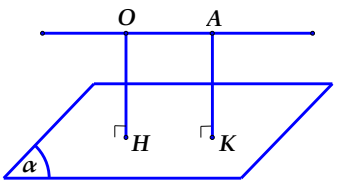
Cách 2:

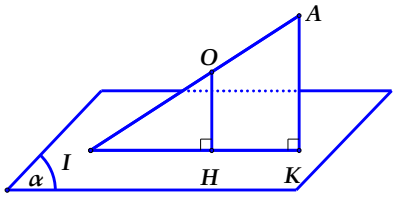
Nếu đã có trước đường thẳng $d\perp(\alpha)$ thì kẻ $Ox//d$ cắt (α) tại H. Lúc đó, H là hình chiếu vuông góc của O lên $(\alpha)\Rightarrow d(O,(\alpha))=OH$.

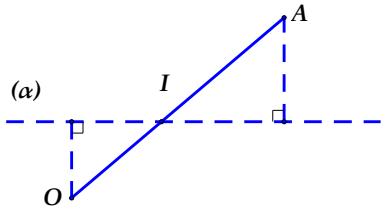


✍ Một số chú ý và thủ thuật giải khoảng cách quan trọng:

- *Nếu $OA//(\alpha)$ thì: $d(O,(\alpha))=d(A,(\alpha))$.*
- *Nếu OA cắt (α) tại I thì: $\dfrac{d(O,(\alpha))}{d(A,(\alpha))}=\dfrac{OI}{AI}$ (định lý Ta-lét)*







- *Chú ý đến việc đưa bài toán tìm khoảng cách từ một điểm (đề bài cho) bất kỳ đến một mặt phẳng về bài toán tìm khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng đó và tìm mối liên hệ giữa hai khoảng cách này. Từ đó suy ra được khoảng cách theo yêu cầu của đề bài.*

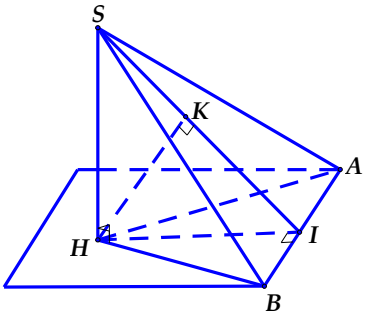
- ***Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau:*** *Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA=SB=SC=SD=...$. Khi đó hình chiếu O của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm đường tròn nội tiếp đi qua các đỉnh $(A,B,C,D,...)$ nằm trên mặt đáy.*
  Nếu đáy là:
  + Tam giác đều, O là trọng tâm
  + Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.
  + Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao điểm của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.
- ***Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:*** *Đưa bài toán khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của khối đa diện mà khối đa diện đó có thể xác định được dễ dàng thể tích và diện tích đáy. Phương pháp này được sử dụng trong trường hợp không thể tính được khoảng cách bằng cách công cụ tính toán như: định lý Pytago, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lý cô-sin,...*
  + $V=\frac{1}{3}S.h\Rightarrow \boxed{h=\frac{3V}{S}}$ *: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều của hình chóp.*
  + $V=S.h\Rightarrow \boxed{h=\frac{V}{S}}$ *: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ.*
- *Nếu tứ diện OABC có các cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc thì:*

$$\boxed{d\left(O,\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}}$$

✪ Các bài toán tính khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng hay gặp

1. Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt bên (SAB).*



+ Kẻ $HI\perp AB,\left(I\in AB\right)$.

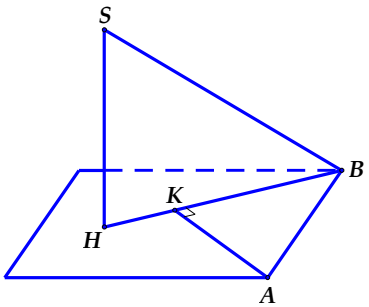
Vì $AB\perp SH;AB\perp HI\Rightarrow AB\perp\left(SHI\right)\quad(1)$

+ Kẻ $HK\perp SI,\left(K\in SI\right)$. *Từ* $(1)\Rightarrow HK\perp AB$

Do đó: $HK\perp\left(SAB\right)\Rightarrow d\left(H,\left(SAB\right)\right)=HK.$

2. Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng (chứa đường cao)

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).*



+ Kẻ $AK\perp HB$

+ $\begin{cases}AK\perp HB\\AK\perp SH\end{cases}\Rightarrow AK\perp\left(SHB\right)$

$\Rightarrow d\left(A,\left(SHB\right)\right)=AK$

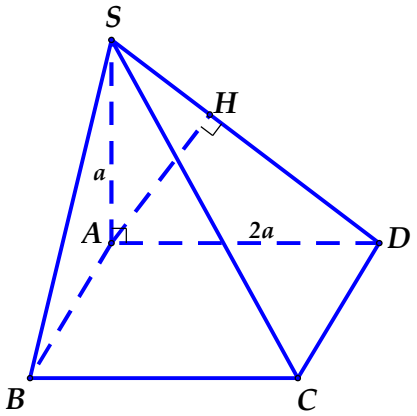
2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD=2a$; SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

Lời giải:

Chọn C.



Trong (SAD), kẻ $AH\perp SD,(H\in SD)$.

Vì $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(SAD)\xrightarrow{AH\subset(SAD)}CD\perp AH$

Vì $\begin{cases}AH\perp SD\\AH\perp CD\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)$

$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}$

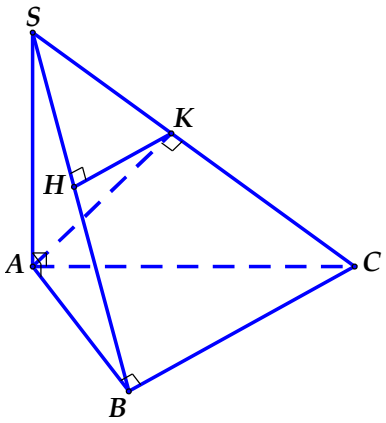
$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

Bài toán 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BA=a$, $BC=2a$, $SA=2a$, $SA\perp(ABC)$. Gọi K là hình chiếu của A trên SC. Tính khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{8a}{9}$ **B.** $\frac{a}{9}$ **C.** $\frac{2a}{9}$ **D.** $\frac{5a}{9}$

Lời giải:

Chọn A.



Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC\quad(1)$

ΔABC vuông tại $B\Rightarrow BC\perp AB\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow BC//(SAB)$

Trong mp (SBC) kẻ $KH//BC\quad(H\in SB)$

$\Rightarrow KH\perp(SAB)\Rightarrow d\left(K,(SAB)\right)=KH$

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}.$

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+5a^2}=3a.$

$SA^2=SK.SC\Rightarrow SK=\frac{SA^2}{SC}=\frac{4a^2}{3a}=\frac{4a}{3}.$

Vì $KH//BC$ nên $\frac{KH}{BC}=\frac{SK}{SC}\Rightarrow KH=\frac{SK.BC}{SC}=\frac{\frac{4}{3}a.2a}{3a}=\frac{8}{9}a.$

Bài toán 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$.

a) Khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên (SCD) bằng:

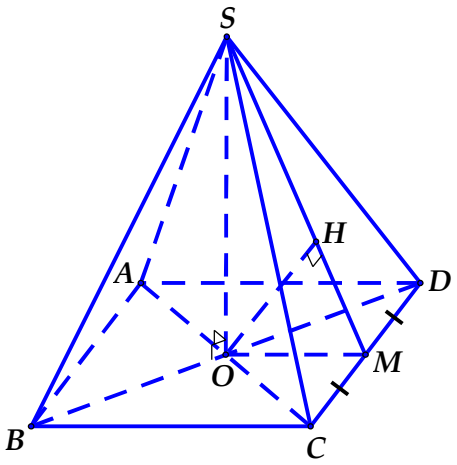
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

b) Khoảng cách từ A đến một mặt bên (SCD) bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{2}$

Lời giải:

a) **Chọn B.**



Vì O là tâm của đáy của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow \begin{cases} OM \perp CD \\ OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$, lại có: $SO \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOM)$ (1)

Trong (SOM), kẻ $OH \perp SM$ (1). Vì $OH \subset (SOM) \Rightarrow OH \perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH = \frac{OS.OM}{SM} = \frac{OS.OM}{\sqrt{OS^2 + OM^2}}$

Vậy $d(O,(SCD)) = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

b) **Chọn C.**

Ta có: $AO \cap (SCD) = \{C\} \Rightarrow \frac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \frac{CA}{CO} = 2$

$\Rightarrow d(A,(SCD)) = 2.d(O,(SCD)) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Bài toán 4: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C=a$. Tính theo a khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (BCD').

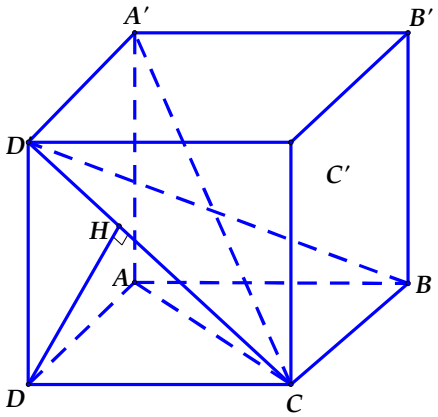
A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải:

Chọn D.

Do tam giác $A'AC$ vuông cân, suy ra:

$AC=AA'=\frac{A'C}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}=DD'$.



Do $AD//BC\Rightarrow AD//(BCD')$.

$\Rightarrow d(A,(BCD'))=d(D,(BCD'))$ (1)

Kẻ $DH\perp D'C$ $(H\in D'C)$ $\Rightarrow DH\perp(BCD')$

$\Rightarrow d(D,(BCD'))=DH$ (2)

$\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow AC=A'A=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $DC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{a}{2}$.

Xét tam giác CDD' ta có: $\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DD'^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{6}{a^2}\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $d(A,(BCD'))=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài toán 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB=AC=a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

Chọn C.

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK\perp AB$ (1)

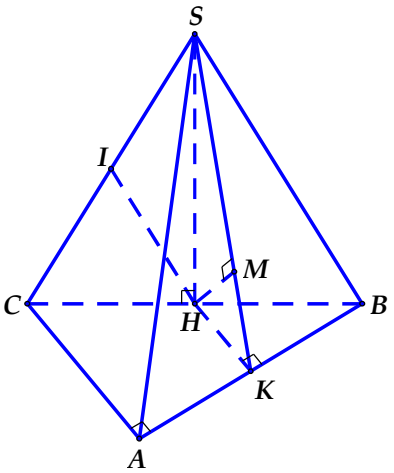
Vì $SH\perp(ABC)$ nên $SH\perp AB$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow AB\perp SK$

Do đó: $\widehat{(SAB),(ABC)}=\widehat{SK,HK}=\widehat{SKH}=60^0$

Ta có: $SH=HK\tan\widehat{SKH}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $IH//SB$ nên $IH//(SAB)\Rightarrow d(I,(SAB))=d(H,(SAB))$



Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại $M \Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HM$

Ta có: $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I,(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$ **B.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$ **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$ **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{26}$

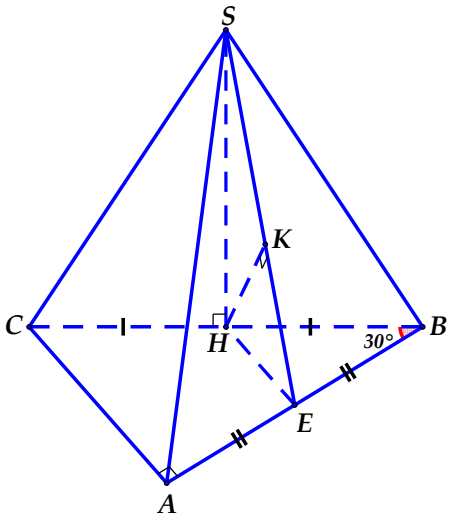
Lời giải

Chọn B.

Gọi H là trung điểm của BC.

Vì ΔSBC đều, suy ra $SH \perp BC$ mà $(SBC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$



Vì $CH \cap (SAB) = B \Rightarrow \frac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))} = \frac{CB}{HB} = 2$

$\Rightarrow d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB))$

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow HE // AC \Rightarrow HE \perp AB$

Trong (SHE), kẻ $HK \perp SE, (K \in SE)$ (1)

Vì $\begin{cases} AB \perp HE \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \xrightarrow{HK \subset (SHE)} AB \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HK$

Ta có: $\begin{cases} SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ HE = \frac{AC}{2} = \frac{BC.\sin\widehat{ABC}}{2} = \frac{a}{4} \end{cases}$

Xét ΔSHE vuông tại H có đường cao HK, ta có: $HK = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{26}$.

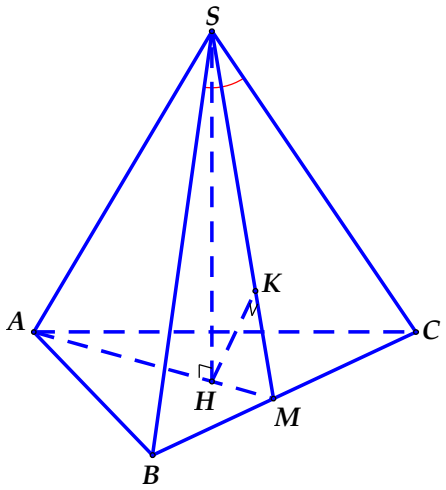
Vậy $d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB)) = 2HK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = a$, $SC = 2a$, $\widehat{BSC} = 60°$. Gọi M là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và $AM = 2a$. Biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm thuộc đường thẳng AM, góc tạo bởi SB và đáy ABC bằng $30°$. Tính khoảng cách h từ điểm A tới mặt phẳng (SBC).

A. $h = 2a$. **B.** $h = a$. **C.** $h = a\sqrt{2}$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn B.



Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh S lên mp (ABC).

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB,(ABC)) = \widehat{SBH} = 30°$.

Khi đó $SH = SB.\sin\widehat{SBH} = a.\sin 30° = \frac{a}{2}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác SBC ta có:

$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos 60°$

$= 5a^2 - 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Cách 1: Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = a^2\sqrt{3}$.

Khi đó $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Mặt khác $S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{BSC} = \frac{1}{2}a.2a.\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $h = d(A,(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}} = a$.

Cách 2: Kẻ $HK \perp SM$. Chứng minh được $HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H,(SBC)) = HK$

Do $AH \cap (SBC) = \{M\} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{MA}{MH}.d(H,(SBC)) = \frac{MA}{MH}.HK$.

Ta có $HK = \frac{SH.MH}{SM}$, suy ra: $d(A,(SBC)) = \frac{MA}{MH}.\frac{SH.MH}{SM} = \frac{MA.SH}{SM}$ (1)

Mặt khác $SM = \frac{2S_{SBC}}{BC} = \frac{SB.SC.\sin 60°}{BC} = \frac{a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = a$. Mà $MA = 2a, SH = \frac{a}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $h = d(A,(SBC)) = \frac{2a.\frac{a}{2}}{a} = a$.

Bài toán 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{5a}{3}$ **B.** $\frac{4a}{3}$ **C.** $\frac{2a}{3}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Lời giải:

Chọn D.

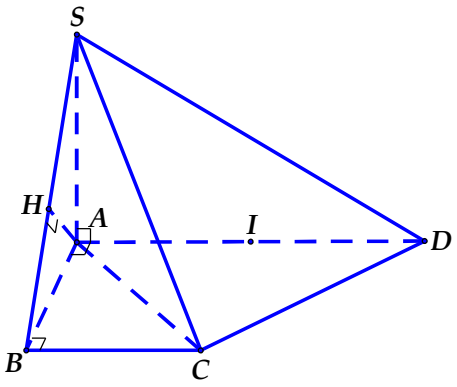
Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$, suy ra ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$ (1)

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$ hay ΔSCD vuông tại C.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp (SCD)



Ta có: $\Delta SAB \backsim \Delta SHA \Rightarrow \dfrac{SA}{SH} = \dfrac{SB}{SA}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2}{3}$

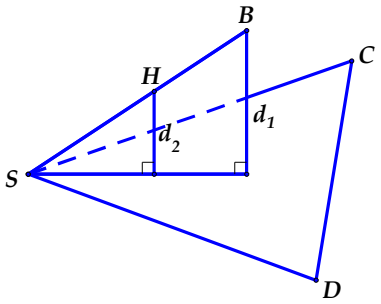
mà $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \dfrac{2}{3} d_1$

Thể tích khối tứ diện $S.BCD$:

$V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{3} SA.\dfrac{1}{2}.BC.AB = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$,

$CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2} SC.CD = \sqrt{2}a^2$



Ta có: $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \dfrac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp (SCD) là $d_2 = \dfrac{2}{3} d_1 = \dfrac{a}{3}$.

Bài toán 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a, BC = 2a$. Biết hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và góc giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 60^0. Tính theo a khoảng cách h từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$.

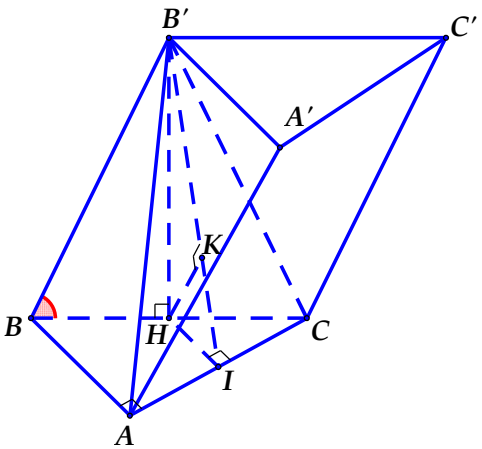
A. $h = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$. **D.** $h = \dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải:

Chọn A.

Gọi H là trung điểm của BC. Do tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow B'H \perp (ABC)$.



Do $BH \cap (B'AC) = \{C\}$

$$\frac{d(B,(B'AC))}{d(H,(B'AC))} = \frac{BC}{HC}$$

$$\Rightarrow d(B,(B'AC)) = \frac{BC}{HC} d(H,(B'AC)) = 2d(H,(B'AC)) \quad (1)$$

Kẻ $HI \perp AC (I \in AC), HK \perp B'I (K \in B'I)$. Suy ra: $d(H,(B'AC)) = HK$ (2).

Do $\begin{cases} CC'//BB' \\ (A'B'C')//(ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(BB',(ABC))} = \widehat{(CC',(A'B'C'))} = 60^0.$

Khi đó $B'H = BH.\tan\widehat{B'BH} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}.$

Ta có $HI//BA$ (cùng vuông góc với AC), suy ra:

$HI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$. Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{13}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $h = d\left(B,(B'AC)\right) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Bài toán 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng 30^0. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm CD.

A. $\dfrac{a}{3}$ **B.** $\dfrac{2a}{3}$ **C.** $\dfrac{4a}{3}$ **D.** $\dfrac{5a}{3}$

Lời giải:

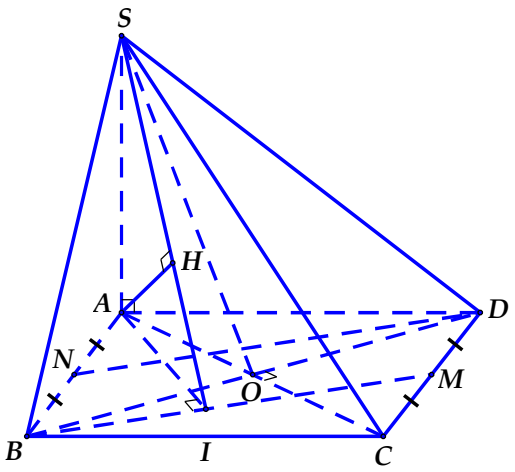
Chọn A.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\left.\begin{matrix} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow DO \perp (SAC)$

Hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO, góc giữa SD và (SAC) là $\widehat{DSO} = 30^0$.

Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow DN//BM$



Suy ra $d\left(D;(SBM)\right) = d\left(N;(SBM)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A;(SBM)\right)$

Kẻ $AI \perp BM$, $AH \perp SM$.

Từ đó chứng minh được $AH \perp (SBM)$

$\Rightarrow d\left(A;(SBM)\right) = AH$

Đặt $DO = x$, ta có $SO = DO.\cot\widehat{DSO} = x.\cot 30^0 = x\sqrt{3}$

Từ $SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Trong $(ABCD)$: $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}.MN.AB = \dfrac{a^2}{2}$

Mà $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AI.BM \Rightarrow AI = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Khi đó: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}a \Rightarrow d\left(D;(SBM)\right) = \dfrac{a}{3}$.

Bài toán 11: Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^0$ đồng thời $AA'=a$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Khoảng cách từ G tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Lời giải:

Chọn D.

Vì $AG\cap(A'BD)=\{O\}\Rightarrow\frac{d(G,(A'BD))}{d(A,(A'BD))}=\frac{GO}{AO}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G,(A'BD))=\frac{1}{3}d(A,(A'BD))$

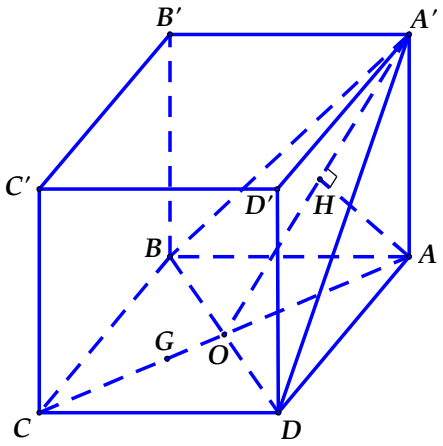
Vì $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BD\perp(AA'O)\quad(1)$

Trong $(AA'O)$, kẻ $AH\perp A'O,(H\in A'O)\quad(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow AH\perp BD\quad(3)$

Từ $(2),(3)\Rightarrow AH\perp A'BD\Rightarrow d(A,(A'BD))=AH$

$\Rightarrow d(G,(A'BD))=\frac{1}{3}AH=\frac{AA'.AO}{3\sqrt{AA'^2+AO^2}}$



Tam giác ABD cân có $\widehat{BAD}=60^0\Rightarrow\Delta ABD$ đều có cạnh bằng $a\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(G,(A'BD))=\frac{AA'.AO}{3\sqrt{AA'^2+AO^2}}=\frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Bài toán 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB,SD cắt BC, CD tại P,Q. Gọi E là giao điểm của tia QP với AB. Tính khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{35}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{9}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải:

Chọn A.

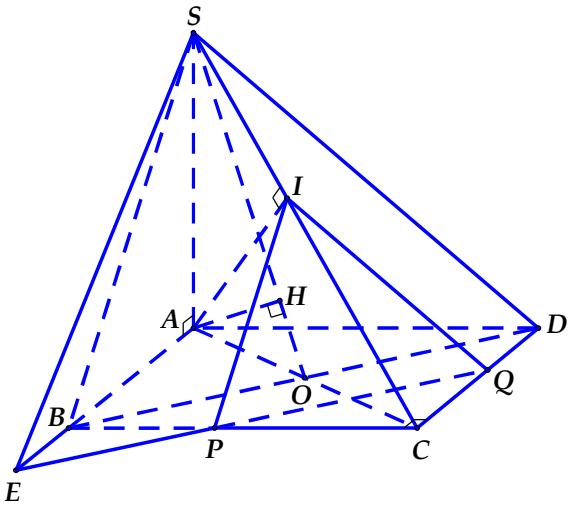
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có A,E ở hai phía của (SBD) và $AE\cap(SBD)=B$.

Gọi d,d_1 lần lượt là khoảng cách từ E,A đến mp (SBD).

Ta có: $\frac{d}{d_1}=\frac{EB}{AB}\Rightarrow d=\frac{EB}{AB}d_1$

Qua A dựng $AH\perp SO$.Dễ dàng chứng minh được $AH\perp BD$. Khi đó $AH=d\left(A,\left(SBD\right)\right)=d_1$



Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$CI.SC=AC^2$

$\Rightarrow \frac{IC}{SC}=\frac{AC^2}{SC^2}$

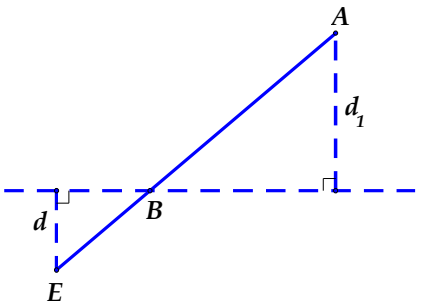
$=\frac{AC^2}{SA^2+AC^2}=\frac{AB^2+BC^2}{SA^2+\left(AB^2+BC^2\right)}$

$=\frac{2a^2}{2a^2+3a^2}=\frac{2}{5}$

+ ΔCBS có $IP//SB\Rightarrow \frac{IP}{SB}=\frac{CP}{CB}=\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{CP}{BP}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{BP}{CP}=\frac{3}{2}$

+ ΔCSD có $IQ//SD\Rightarrow \frac{CQ}{CD}=\frac{IC}{SC}=\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{CQ}{CD}=\frac{CQ}{AB}=\frac{2}{5}$

+ $EB//CQ\Rightarrow \frac{EB}{CQ}=\frac{BP}{PC}=\frac{3}{2}\Rightarrow EB=\frac{3}{2}CQ=\frac{3}{2}.\frac{2}{5}AB=\frac{3}{5}AB.$



$\Rightarrow \frac{EB}{AB}=\frac{3}{5}\Rightarrow d=\frac{3}{5}d_1$

+ Tính AH:

Tam giác SAO vuông tại A, khi đó $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AO^2}\Rightarrow AH^2=\frac{3a^2}{7}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d=\frac{3}{5}d_1=\frac{3}{5}AH=\frac{3}{5}.\frac{a\sqrt{21}}{7}=\frac{3a\sqrt{21}}{35}.$

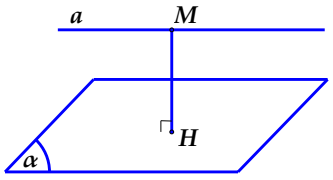
DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. PHƯƠNG PHÁP

✪ **Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.**

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α).

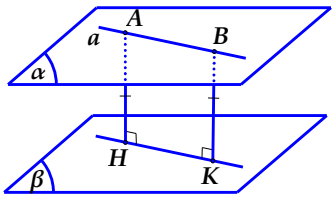
$d(a,(\alpha))=d(M,(\alpha))=MH \quad (M\in a)$



✪ **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.**

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$d((\alpha),(\beta))=d(a,(\beta))=d(A,(\beta))=AH \quad (a\subset(\alpha),A\in a)$



Kết luận: Việc tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đều quy về bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng đã đề cập ở dạng toán 2 phía trên. Do đó, việc cần làm là chọn điểm trên đường hoặc trên mặt sao cho việc xác định khoảng cách là đơn giản nhất.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Hình chiếu vuông góc của A trên $mp(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $B'C'$.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt bên $BCC'B'$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Lời giải:

a) Chọn A.

Ta có: $AA'//BB'\subset(BCC'B')$

$\Rightarrow AA'//(BCC'B')$

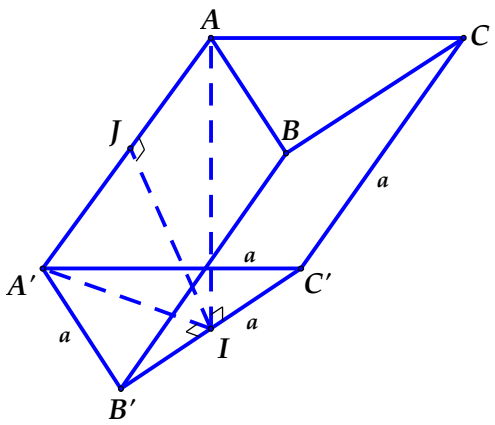
Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

$\Rightarrow A'I\perp B'C'$ ($\Delta A'B'C'$ đều)

Lại có: $AI\perp B'C'$ (gt). Suy ra: $B'C'\perp(AA'I)$

Kẻ $IJ\perp AA'$. Suy ra $IJ\perp B'C' \quad (1)$

$IJ\perp AA'$ mà $AA'//BB'\Rightarrow IJ\perp BB' \quad (2)$



Từ (1) và $(2) \Rightarrow IJ \perp (BCC'B') \Rightarrow d(AA',(BCC'B')) = d(I,(BCC'B')) = IJ$

Trong $\Delta AA'I \Rightarrow IJ.AA' = AI.A'I \Rightarrow IJ = \dfrac{AI.A'I}{AA'}$.

Dễ thấy $A'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{AA'^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$. Suy ra: $IJ = \dfrac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(AA',(BCC'B')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) **Chọn B.**

Hai đáy của lăng trụ song song nên $d((ABC),(A'B'C')) = d(A,(A'B'C'))$ mà $A \in (ABC)$ và $AI \perp (A'B'C') \Rightarrow d((ABC),(A'B'C')) = AI = \dfrac{a}{2}$.

Bài toán 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAD) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Lời giải:

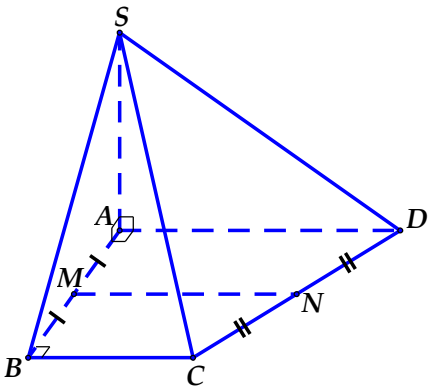
Chọn C.

Vì $\begin{cases} MN // AD \\ MN \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAD)$

$\Rightarrow d(MN,(SAD)) = d(M,(SAD))$

Vì $\begin{cases} MA \perp AD \\ MA \perp SA \end{cases} \Rightarrow MA \perp (SAD) \Rightarrow d(M,(SAD)) = MA$

Vậy $d(MN,(SAD)) = d(M,(SAD)) = MA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$



Bài toán 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:

Chọn C.

Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow \begin{cases} SO \perp ABCD \\ SO = a\sqrt{3} \end{cases}$

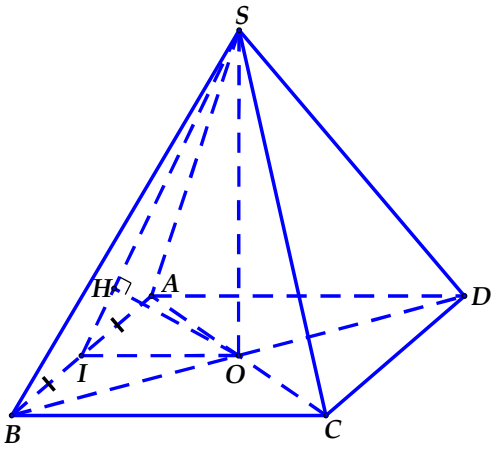
Vì $CD // (SAB) \Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB))$

Vì $CO\cap(SAB)=\{A\}\Rightarrow\dfrac{d(C,(SAB))}{d(O,(SAB))}=\dfrac{CA}{OA}=2$

$\Rightarrow d(C,(SAB))=2d(O,(SAB))$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow\begin{cases}OI\perp AB\\OI=\dfrac{BC}{2}=a\end{cases}$

Trong (SOI), kẻ $OH\perp SI$, dễ dàng chứng minh được $OH\perp(SAB)$



$\Rightarrow d(O,(SAB))=OH=\dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(C,(SAB))=2d(O,(SAB))=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

Bài toán 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SBC vuông góc với đáy ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,SA,AC. Tính khoảng cách giữa hai $mp(MNP)$ và $mp(SBC)$

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

Chọn C.

Theo giả thiết, suy ra:

$MN//SA\subset(SAC)\Rightarrow MN//(SAC)$

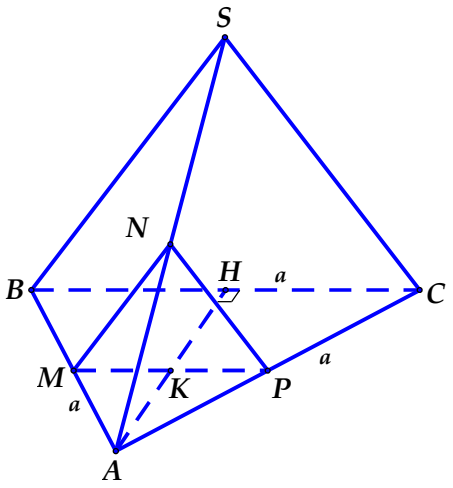
$NP//SC\subset(SAC)\Rightarrow NP//(SAC)$

Mà $MN,NP\subset(MNP),MN\cap NP=N$ nên

$mp(MNP)//mp(SBC)$.

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow AH\perp BC$ (do ΔABC đều)

Vì $\left.\begin{array}{l}(ABC)\perp(SBC)\\BC=(ABC)\cap(SBC)\\AH\subset(ABC);AH\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow AH\perp(SBC)$



Gọi $K=AH\cap MP\Rightarrow KH\perp(SBC)\Rightarrow d(K,(SBC))=KH$

Vì $mp(MNP)//mp(SBC)$ và $K\in(MNP)$

Do đó: $d((MNP),(SBC))=d(K,(SBC))=KH=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 5: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của $AD,DC,A'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a}{4}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $MN//AC; MP//AA'$. Suy ra $(MNP)//(ACC')$

$\Rightarrow d\left((MNP),(ACC')\right)=d\left(M,(ACC')\right)$

Vì $DM\cap(ACC')=\{A\}\Rightarrow\frac{d\left(M,(ACC')\right)}{d\left(D,(ACC;)\right)}=\frac{MA}{DA}=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow d\left(M,(ACC')\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(ACC')\right)$

Gọi O là tâm của đáy $ABCD\Rightarrow\begin{cases}DO\perp AC\\DO=\frac{BD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Vì $\begin{cases}DO\perp AC\\DO\perp AA'\end{cases}\Rightarrow DO\perp(ACC')\Rightarrow d\left(D,(ACC')\right)=DO$

Vậy $d\left((MNP),(ACC')\right)=d\left(M,(ACC')\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(ACC')\right)=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

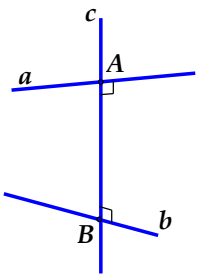
DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. PHƯƠNG PHÁP

Có 3 cách để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Cụ thể:

a. Tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau bằng đường vuông góc chung

Định nghĩa đường vuông góc chung



Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a,b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy gọi là "*đường vuông góc chung*" của a và b. Đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.

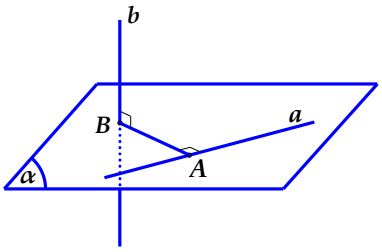
Khi đó, độ dài đoạn vuông góc chung AB là khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau a,b. Kí hiệu: $\boxed{d(a,b)=AB}$

Các cách xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a,b:

✪ *Trường hợp $a\perp b$:*

- *Dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.*
- *Trong (α) dựng $BA\perp a$ tại A.*

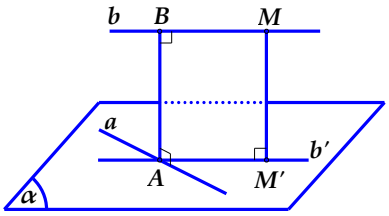
$\Rightarrow$ *AB là đoạn vuông góc chung.*



✪ *Trường hợp a và b không vuông góc với nhau.*

- *Dựng mp (α) chứa a và song song với b.*
- *Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM'\perp(\alpha)$ tại M'*
- *Từ M' dựng $b'//b$ cắt a tại A.*
- *Từ A dựng $AB//MM'$ cắt b tại B.*

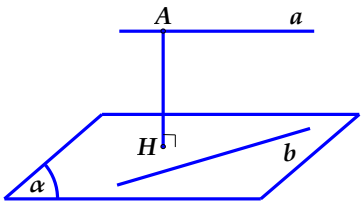
$\Rightarrow$ *AB là đoạn vuông góc chung.*



b. Tính khoảng cách hai đường chéo bằng cách quy về tìm khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng

Cách làm:

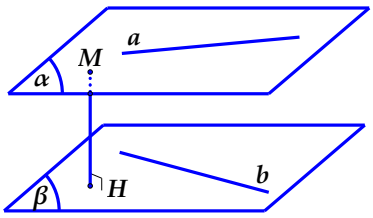
- *Dựng (tìm) mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.*
- *Khi đó: $d(a,b)=d(a,(\alpha))=d(A,(\alpha))=AH$ với $A\in a$*



c. Tính khoảng cách hai đường chéo bằng cách quy về tìm khoảng cách 2 mặt phẳng song song

Cách làm:

- *Dựng hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ sao cho $a\subset(\alpha)//(\beta)\supset b$.*
- *Khi đó: $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))=MH$*



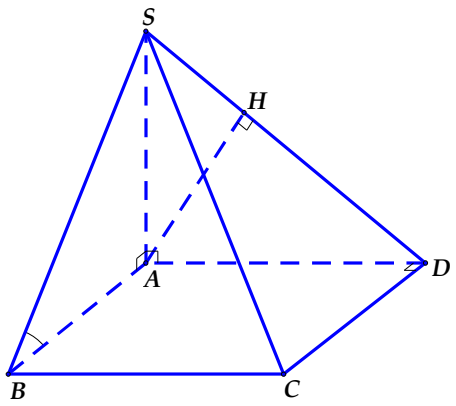
2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD=2AB=2a, SA$ vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và SB tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $h=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $h=\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải:

Chọn C.



Ta có: $\left(SB,(ABCD)\right)=(SB,AB)=SBA=60^0$.

Do $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SC)=d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)$ (1)

Ta có: $\left.\begin{matrix}CD\perp SA\\ CD\perp AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp(SAD)$

Trong (SAD) dựng $AH\perp SD$ $(H\in SD)$ (a)

$AH\subset(SAD)\Rightarrow AH\perp CD$ (b)

Từ $(a),(b)\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow d(A,SCD)=AH$ (2)

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{7}{12a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $h=d(AB,SC)=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Bài toán 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng:

a) SA và CD

A. $h=\dfrac{2a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{42}}{2}$.

b) SH và CD.

A. $h=a$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $h=\dfrac{a}{2}$.

Lời giải:

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên gọi $AC\cap BD=\{H\}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Suy ra: $\left(SB,(ABCD)\right)=SBH=60^0$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên:

$$BH=AH=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SH=BH.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

a) **Chọn B**

Ta có: $CD//(SAB) \Rightarrow d(CD,SA)=d(CD,(SAB))=d(C,(SAB))$ (1)

Do $CH\cap(SAB)=\{A\}$

$\Rightarrow d(c,(SAB))=\dfrac{CA}{HA}d(H,(SAB))=2d(H,(SAB))$ (2)

Kẻ $HI\perp AB$ $(I\in AB)$, kẻ $HE\perp SI$ $(E\in SI)$, khi đó:

$d(H,(SAB))=HE$ (3)

Ta có $HI=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$. Xét tam giác SHI,ta có :

$\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{3a^2}=\dfrac{14}{3a^2}\Rightarrow HE=\dfrac{a\sqrt{42}}{14}$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta suy ra $h=d(CD,SA)=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

b) **Chọn D.**

Do $SH\perp CD$ nên kẻ $HM\perp CD$, khi đó $\begin{cases}HM\perp SH\\HM\perp CD\end{cases}\Rightarrow d(SH,CD)=HM=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Bài toán 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ACBD$ là hình vuông cạnh $a, SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng HK và SD:

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $h=\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp HD$.

$\Rightarrow SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{SD^2-(HA^2+DA^2)}$

$=\sqrt{\dfrac{17a^2}{4}-\left(\dfrac{a^2}{4}+a^2\right)}=a\sqrt{3}$.

Do $HK//BD\Rightarrow HK//(SBD)$

$\Rightarrow d(HK,SD)=d(HK,(SBD))=d(H,(SBD))$ (1)

Kẻ $HE\perp BD$ $(E\in BD)$, suy ra: $(SHE)\perp(SBD)$ và

$(SHE)\cap(SBD)=SE$

Kẻ $HF\perp SE$ $(F\in SE)$, khi đó: $HF\perp(SBD)$

Suy ra: $d(H,(SBD))=HF$ (2)

Xét tam giác HEB, ta có: $HE=HB\sin\widehat{HBE}=\dfrac{a}{2}.\sin 45^0=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Xét tam giác SHE, ta có : $\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{8}{a^2}=\frac{25}{3a^2}\Rightarrow HF=\frac{a\sqrt{3}}{5}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $d(HK,SD)=\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Bài toán 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của $BC,A'C'$. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng .

a) $B'C'$ và $A'B$.

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

b) DE và AB'

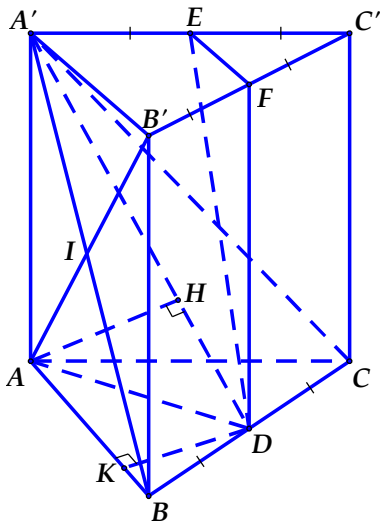
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a.

Nên $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng với hai đáy là tam giác đều cạnh a.

a) Chọn B.



Ta có $B'C'//BC\Rightarrow B'C'//(A'BC)$

$\Rightarrow d(B'C',A'B)=d(B'C',(A'BC))=d(B',(A'BC))$ (1)

Gọi $A'B\cap AB'=I$

$\Rightarrow d(B',(A'BC))=\frac{BI}{AI}d(A,(A'BC))=d(A,(A'BC))$ (2)

Do ABC là tam giác đều cạnh a.

$\Rightarrow AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ với $AD\perp BC(D\in BC)$.

Kẻ $AH\perp A'D$ .Dễ dàng chứng minh được $AH\perp(A'BC)$

$\Rightarrow d(A,(A'BC))=AH$ (3)

Xét tam giác $A'AD$ ta có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $d(B'C',A'B)=AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

b) Chọn D.

Gọi F là trung điểm của $B'C'$, khi đó $\begin{cases}EF//A'B'\\FD//B'B\end{cases}\Rightarrow(EFD)//(A'B'BA)\Rightarrow DE//(A'B'BA)$

$\Rightarrow d(DE,AB')=d(DE,(A'B'BA))=d(D,(A'B'BA))$.

Kẻ $DK\perp AB(K\in AB)$, khi đó $d(D,(A'B'BA))=DK$.

Ta có $DK=\frac{2S_{ADB}}{AB}=\frac{S_{ABC}}{AB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}:a=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(DE,AB')=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 5: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Điểm A' cách đều ba điểm A,B,C. Góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC'

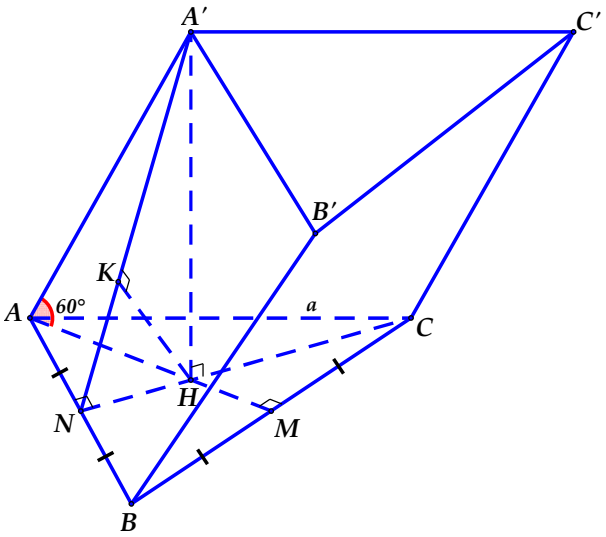
A. $h=\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $h=\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $h=\dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải:

Chọn B.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC

Vì A' cách đều ba điểm A,B,C nên hình chiếu của A' lên (ABC) trùng với trong tâm H.



$\Rightarrow A'H\perp(ABC)\Rightarrow(AA',(ABC))=\widehat{A'AH}=60^0$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow A'H=AH\tan\widehat{A'AH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\tan 60^0=a.$

Ta có : $CC'//AA'\Rightarrow CC'//(ABB'A').$

$\Rightarrow d(A'B',CC')=d(CC';(ABB'A'))=d(C;(ABB'A'))$ (1)

Gọi $CH\cap(ABB'A')=\{N\}\Rightarrow d(C;(ABB'A'))=\dfrac{CN}{HN}d((H;(ABB'A'))=3d(H;(ABB'A'))$ (2)

Dựng $HK\perp A'N(K\in AN')$. Ta có : $\left.\begin{matrix}AB\perp NH\\AB\perp A'H\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp(A'NH)\Rightarrow AB\perp HK$

Lại có : $A'N\perp HK\Rightarrow HK\perp(A'AB)$. Khi đó $d(H;(ABB'A'))=HK$ (3)

Ta có $HN=\dfrac{1}{3}CN=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$

Xét tam giác $A'HN$, ta có : $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{A'H^2}+\dfrac{1}{HN^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{12}{a^2}=\dfrac{13}{a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra : $h=d(A'B;CC')=\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

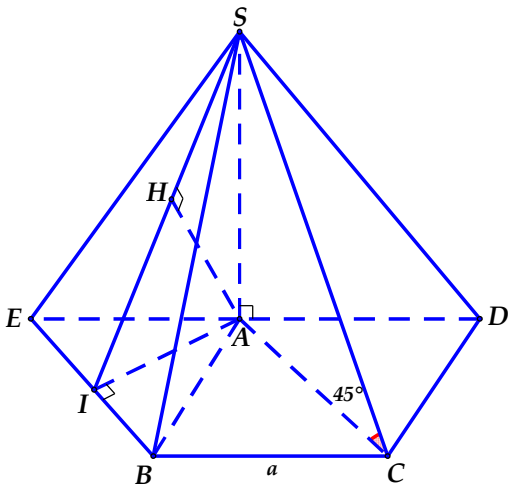
Bài toán 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng SB, AC.

A. $h=\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải :

Chọn D.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Suy ra ΔSAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$.

Dựng điểm E sao cho $ACBE$ là hình bình hành

Khi đó : $AC // EB \Rightarrow AC // (SBE)$.

$\Rightarrow d(AC,SB) = d(AC,(SBE)) = d(A,(SBE))$ (1)

Kẻ $AI \perp EB (I \in EB)$, kẻ $AH \perp SI (H \in SI)$

Dễ dàng chứng minh được: $AH \perp (SEB)$

$\Rightarrow d(A,(SEB)) = AH$ (2)

- *Tính* AI :

Cách 1: Tam giác ABE vuông cân tại A

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Cách 2: Tacó $AI = \frac{2S_{\Delta AEB}}{EB} = \frac{S_{ABCD}}{AC} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Xét ΔSAI, ta có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ (3)

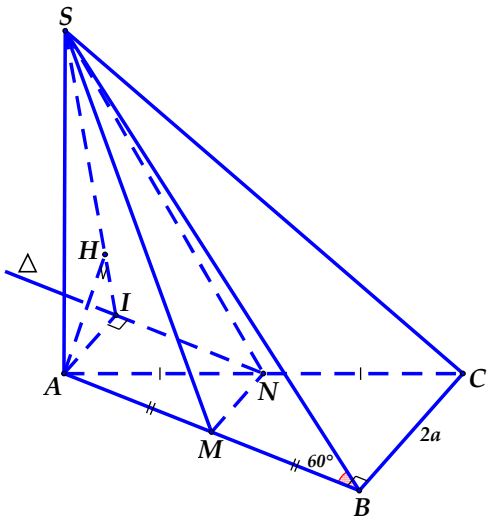
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $h = d(AC,SB) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, cân tại $B, AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0 . Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và SN theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

Lời giải :

Chọn A.



Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

Khi đó $((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA} = 60^0$

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Từ N kẻ đường thẳng Δ, song song với AB.

Kẻ $AI \perp \Delta (I \in \Delta)$, trong mp (SAI) kẻ $AH \perp SI$ (HI)

Ta có : $\left.\begin{matrix} \Delta \perp AI \\ \Delta \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta \perp (SAI) \Rightarrow \Delta \perp AH$

Kết hợp $SI \perp AH \Rightarrow AH \perp (SIN) \Rightarrow d(A,(SIN)) = AH.$

Ta có $AB//IN \Rightarrow AB//(SIN).$

$\Rightarrow d(AB,SN) = d(AB,(SIN)) = d(A,(SIN)) = AH \quad (1)$

Ta có $AINM$ là hình chữ nhật, nên $AI = MN = \dfrac{BC}{2} = a.$

Xét tam giác SAI ta có : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{12a^2} = \dfrac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13} \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $d(AB,SN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}.$

Bài toán 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BD = a\sqrt{3}.$ Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng AD và MC.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}.$ **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}.$ **C.** $h = \dfrac{3a\sqrt{21}}{14}.$ **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$

Lời giải:

Chọn D.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB;\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \supset SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

Ta có $AD//BC \Rightarrow AD//(MBC) \Rightarrow d(AD,MC) = d(AD;(MBC)) = d(A;(MBC)).$

Cách 1 : (Làm trực tiếp)

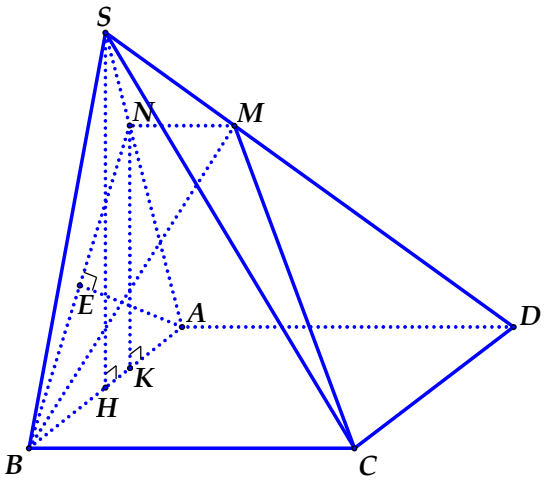
Trong (SAD), kẻ $MN//DA \ (N \in SA).$

Ta có : $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SAB).$

Kẻ $AE \perp BN \ (E \in BN),$

Khi đó : $\begin{cases} AE \perp MN \subset (MBC) \\ AE \perp BN \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (MBC)$

$\Rightarrow d(A,(MBC)) = AE.$



Kẻ $NK \perp AB$. Ta có :

$\dfrac{NA}{SA} = \dfrac{SH}{NK} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow S_{BNA} = \dfrac{2}{3}S_{BAS} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác NBA, ta có:

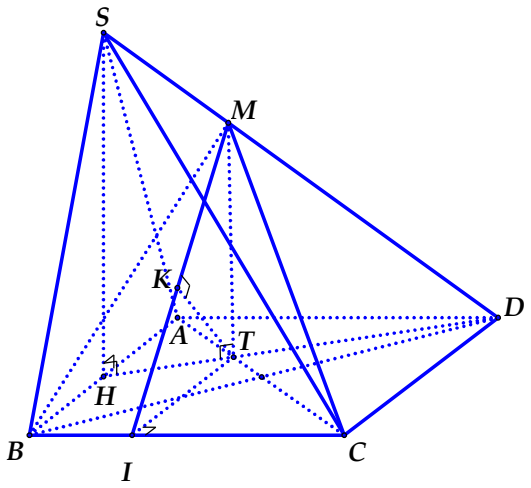
$BN^2 = AB^2 + AN^2 - 2AB.AN.cos\widehat{NAB} = a^2 + \dfrac{4a^2}{9} - 2.a.\dfrac{2a}{3}.cos60^0 = \dfrac{7a^2}{9} \Rightarrow BN = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}.$

Suy ra $AE=\dfrac{2S_{\Delta BNA}}{BN}=2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}:\dfrac{a\sqrt{7}}{3}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $h=d\left(A,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2: Dùng kỹ thuật chuyển đỉnh

Gọi $AC\cap DH=\{T\}$, khi đó T là trọng tâm của tam giác ABD

Suy ra $\dfrac{DT}{TH}=2=\dfrac{DM}{MS}\Rightarrow MT//SH\Rightarrow MT\perp\left(ABCD\right)$.



Kẻ $TI\perp BC\ \left(I\in BC\right)$, kẻ $TK\perp MI\ \left(K\in MI\right)$, dễ dàng chứng minh được: $TK\perp\left(MBC\right)$

$\Rightarrow d\left(T,\left(MBC\right)\right)=TK.$

Mặt khác: $AT\cap\left(MBC\right)=\{C\}$

$\Rightarrow d\left(A,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{AC}{TC}d\left(T,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{3}{2}TK$

Ta có: $\dfrac{TI}{AB}=\dfrac{CT}{CA}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow TI=\dfrac{2}{3}.AB=\dfrac{2a}{3}$

$\dfrac{MT}{SH}=\dfrac{DM}{DS}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MT=\dfrac{2}{3}SH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Xét tam giác MTI, ta có: $\dfrac{1}{TK^2}=\dfrac{1}{MT^2}+\dfrac{1}{TI^2}=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{9}{4a^2}=\dfrac{21}{4a^2}\Rightarrow TK=\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$

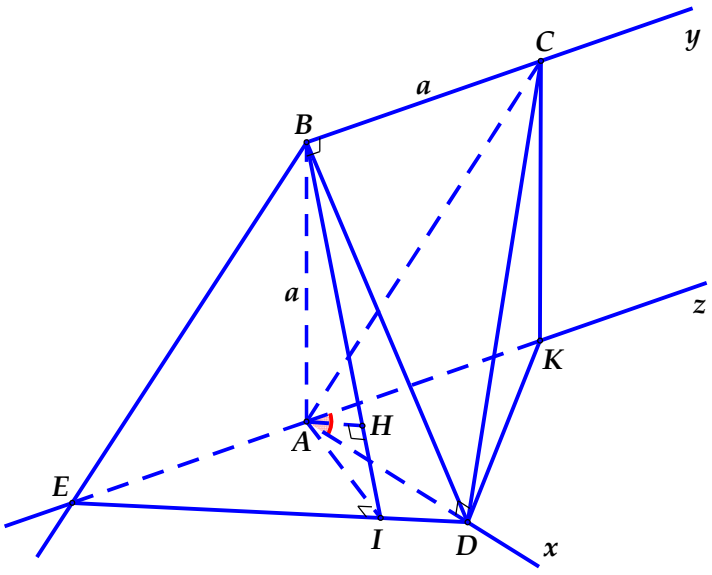
Suy ra $h=d\left(A,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{3}{2}TK=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài toán 9: Cho hai tia chéo nhau Ax,By hợp với nhau góc 60^0, nhận $AB=a$ làm đoạn vuông góc chung. Trên tia By lấy điểm C sao cho $BC=a$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên Ax. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AC và BD.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{93}}{31}$. **B.** $h=\dfrac{2a\sqrt{93}}{31}$. **C.** $h=\dfrac{2a\sqrt{31}}{31}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{31}}{31}$.

Lời giải :

Chọn A.



Dựng tia Az song song và cùng chiều với By, suy ra $AB \perp (xAz)$

Khi đó: $(Ax, By) = (Ax, Az) = \widehat{xAz} = 60^0$.

Qua B, dựng đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng Az tại điểm E, khi đó $ACBE$ là hình bình hành.

Do đó $AE = BC = a$, $\widehat{EAD} = 120^0$ và $AC // BE \Rightarrow AC // (BDE)$.

Suy ra $d(AC, BD) = d(AC, (BDE)) = d(A, (BDE))$ (1)

Kẻ $AI \perp ED$ $(I \in ED)$ và $AH \perp BI$ $(H \in BI)$.

Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (BDE)$

Suy ra $d(A, (BDE)) = AH$ (2)

Dựng $CK \perp Az$ $(K \in Az) \Rightarrow CK // AB$.

Suy ra $CK \perp (ADK) \Rightarrow CK \perp AD$. Mặt khác $CD \perp AD$ (giả thiết), do đó: $AD \perp (CDK)$

$\Rightarrow AD \perp DK$ hay tam giác ADK vuông tại D.

Ta có $ABCK$ là hình vuông nên $AK = BC = a \Rightarrow AD = AK.\cos 60^0 = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác ADE, ta có:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE.AD.cos120^0 = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a.\frac{a}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow ED = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Ta có : $S_{AED} = \frac{1}{2}AI.DE = \frac{1}{2}AE.AD.\sin 120^0 \Rightarrow AI = \frac{AE.AD.\sin 120^0}{DE} = \frac{a.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Khi đó xét tam giác vuông ABI, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{28}{3a^2} = \frac{31}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{93}}{31}$ (3)

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra: $d(AC, BD) = \frac{a\sqrt{93}}{31}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $d(A,(SBC))=AH$ **B.** $d(A,(SBC))=AK$ **C.** $d(C,(SAB))=BC$ **D.** $d(S,(ABC))=SA$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** a **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

Câu 3. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $SA=a$ và $AB=b$. Khoảng cách từ trung điểm M của AC tới mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **B.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **D.** $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy b và đường cao $SH=a$. Khoảng cách từ H tới mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{2ab}{\sqrt{12a^2+b^2}}$ **B.** $\frac{ab}{\sqrt{12a^2+b^2}}$ **C.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $ABC=60°$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SC lấy điểm M sao cho $MC=2MS$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $ABC=60°$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $MB=MC$ và $NC=2ND$. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Khoảng cách từ điểm P đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{14}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{10}$

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy b và đường cao $SO=a$. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$ **C.** $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$ **D.** $\frac{ab}{2\sqrt{4a^2+b^2}}$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, bốn cạnh bên đều bằng $3a$ và $AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng:

A. $2a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $2a\sqrt{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 9. Cho hình lăng trục $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AA'=a$. Tính $d\left(AB';CC'\right)$?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $2SA=AC=2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng:

A. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ABD. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng $\left(SDG\right)$ bằng $\sqrt{5}$ và $SG=1$. Thể tích khối chóp đã cho là:

A. $\frac{25}{12}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 4 **D.** $\frac{12}{25}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB=a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=k.AB$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là H thỏa mãn $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HA}$. Tỷ số khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SDH\right)$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SHC\right)$ là:

A. $\sqrt{\frac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **B.** $\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{2k}$

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, điểm E thuộc BC sao cho $BC=3EC$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB. Cạnh bên $AA'=2a$ và tạo với đáy một góc $60°$. Khoảng cách từ B đến mp$\left(A'HE\right)$bằng

A. $\frac{a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\frac{3a}{5}$ **C.** $\frac{3a}{4}$ **D.** $\frac{4a}{5}$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều; tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Nếu $AB=a$ thì khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, AC=2a, \widehat{BAC}=120^0$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $\left(SBC\right)$ tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng:

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{7}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và cạnh bên SC hợp với đáy một góc 45^0. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Biết SC tạo với đáy một góc 45° và cạnh bên $SA = 2a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$, ΔSAB là tam giác vuông cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ trung điểm H của AB đến mặt phẳng (SBD) là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$, $ABC = 120°$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC)?

A. $2a$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** a **D.** $\frac{3a}{2}$

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính $\frac{4d}{a}$, biết d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 9

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa AA' và BD' là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên (ABC) trùng với trung điểm H của AC. Biết $A'H = 3a$. Khi đó, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng:

A. $\frac{6a}{7}$ **B.** $\frac{5a}{7}$ **C.** $\frac{3a}{7}$ **D.** $\frac{4a}{7}$

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ D đến $(A'BC)$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Gọi M là trung điểm của SC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SB = 3SN$. Khẳng định nào sau đây là **sai**:

A. Khoảng cách từ M đến mp (ABC) bằng $\frac{4}{3}$ lần khoảng cách từ N đến mp (ABC)

B. Khoảng cách từ M đến mp (SAB) bằng một nửa khoảng cách từ C đến mp (SAB)

C. Khoảng cách từ N đến mp(SAC) bằng $\frac{1}{3}$ khoảng cách từ B đến mp (SAC)

D. Khoảng cách từ M đến mp (SAB) bằng $\frac{3}{2}$ khoảng cách từ H đến mp (SAB)

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SM} + 2\overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Tỷ số khoảng cách D đến mặt phẳng (SAB) và từ M đến mặt phẳng (SAB) là:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 28. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Gọi H nằm trên đoạn AD sao cho $HD = 2HA$. Khi $SA = 3\sqrt{3}$, tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \frac{9\sqrt{21}}{14}$ **B.** $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$ **C.** $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ **D.** $d = \frac{3\sqrt{21}}{7}$

Câu 30. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB = a$. Gọi M là trung điểm của CC', khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BM)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD), SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, khi đó khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a; hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ trùng với O. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB=2a, AD=a, CD=a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 45^0. Gọi d là khoảng cách từ điểm B đến (SCD), khi đó tỉ số $\frac{\sqrt{6}.d}{a}$ bằng:

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 3

Câu 34. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Biết $B'C'=a\sqrt{3}$, góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 30^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BA' và $B'C$ bằng:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** a **D.** $2a$

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB=a\sqrt{2}$, $BC=2a$. Gọi M là trung điểm của CD. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A. $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $SA=AB=a$ và $AD=x.a$. Gọi E là trung điểm SC. Tìm x, biết khoảng cách từ E đến mp(SBD) là $d=\frac{a}{3}$.

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

Câu 37. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A, cạnh $A'C=2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90°$, $BA=BC=a$; $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{(SC;(SAD))}=30^0$. Tính $d(A;(SCD))$?

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{BAD}=120°$. Cho $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC; biết $SMA=45°$. Tính $d(B,(SDC))$?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác MBC, cạnh bên $SC=\frac{2a}{3}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $d=\frac{a\sqrt{6}}{12}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{6}}{8}$

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC}=90°, BC=2a, \widehat{ACB}=30°$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết tam giác SAB cân tại S, tam giác SBC vuông tại S. Tính khoảng cách từ trung điểm của AB đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 42. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a\sqrt{3}$. Độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=SB=SC=b$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{4}$. Tính b theo a.

A. $b=\frac{a}{\sqrt{3}}$ **B.** $b=a$ **C.** $b=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **D.** $b=\frac{2a}{3}$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3AD$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm $H\in AB$ sao cho $BH=2AH$. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAD) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $SH=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa SH và CD.

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bên $SA=a\sqrt{5}$, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60°. Khoảng cách giữa BD và SC là:

A. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{6}$

Câu 47. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB=AC=2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống đáy là trung điểm của AM. Biết SA tạo với đáy góc 60°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng BC và SA là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $AC=2a, BD=2a\sqrt{3}$ tâm O. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm của OB. Biết tam giác SBD vuông tại S. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và SB là:

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{8}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết cạnh bên của khối lăng trụ tạo với đáy góc 60°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $A'C$ là:

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Tam giác (SAB) đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (SAC) góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

A. $BC = a\sqrt{2}$ **B.** $BC = 2a$ **C.** $BC = a\sqrt{3}$ **D.** $BC = 3a$

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh a, $AB = a\sqrt{2}, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC$. Gọi M là trung điểm CD. Khoảng cách giữa SC và BM là:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết $SH = a$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC là:

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 53. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, tam giác $(A'CM)$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CC'.

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{5}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD là:

A. $\frac{3a\sqrt{34}}{17}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{51}}{13}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{38}}{17}$

Câu 55. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa AM và $B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$

A. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$ **D.** $2a$

Câu 56. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, ACB = 120°$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B, CC'$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, biết $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và BM là:

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{145}}{15}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{145}}{29}$

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$, $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng SD tạo với đáy một góc 45°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AD và SB là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCN) bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM.

A. $\frac{2a}{\sqrt{11}}$ **B.** $\frac{6a}{\sqrt{11}}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{11}}$ **D.** $\frac{3a}{\sqrt{11}}$

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cạnh SC hợp với đáy một góc 60^0, gọi d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD). Khi đó, tỉ số $\frac{d}{a}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{78}}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{18}}{13}$ **C.** $\frac{\sqrt{58}}{13}$ **D.** $\frac{\sqrt{38}}{13}$

Câu 62. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài đường cao từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy (ABC) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Góc tạo bởi mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, MN.

A. $\frac{9a\sqrt{3}}{42}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{42}$ **C.** $\frac{6a\sqrt{3}}{42}$ **D.** $\frac{12a\sqrt{3}}{42}$

Câu 63. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm SH đến (SBC) bằng b. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

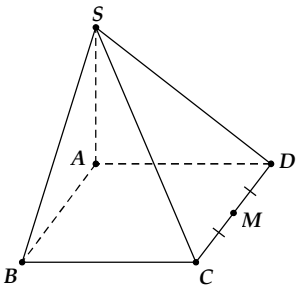
A. $\frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$ **B.** $\frac{a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$ **C.** $\frac{2a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$ **D.** $\frac{2ab}{3}$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1B	2B	3D	4B	5B	6C	7C	8C	9D	10D
11A	12C	13B	14D	15B	16A	17C	18C	19C	20A
21D	22A	23B	24A	25B	26A	27B	28B	29C	30D
31D	32B	33A	34A	35C	36B	37B	38A	39A	40C
41B	42C	43B	44C	45A	46A	47B	48C	49A	50C
51B	52A	53B	54A	55C	56B	57D	58D	59B	60A
61A	62A	63A							

Câu 1. **Chọn B.**

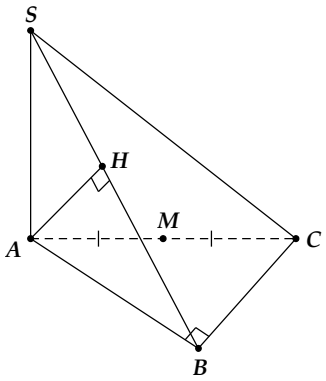
Câu 2. **Chọn B.**



Vì $\begin{cases} CD//(SAB) \\ M \in CD \end{cases}$

$\Rightarrow d\left(M,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)=DA=a$

Câu 3. **Chọn D.**



Vì $AM\cap(SBC)=\{C\}\Rightarrow\dfrac{d\left(M;(SBC)\right)}{d\left(A;(SBC)\right)}=\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{1}{2}$

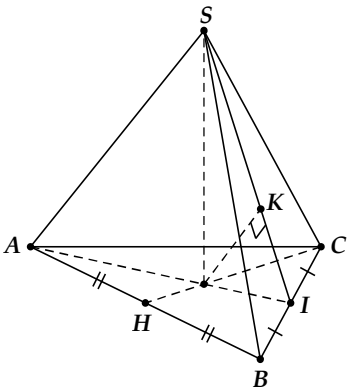
$\Rightarrow d\left(M;(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A;(SBC)\right)$

Kẻ $AH\perp SB,\left(H\in SB\right)$ ta có:

$$d\left(A,(SBC)\right)=AI=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Do đó: $d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A;(SBC)\right)=\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 4. **Chọn B.**



Gọi I là trung điểm của BC.

Kẻ $HK\perp SI,\left(K\in SI\right)$

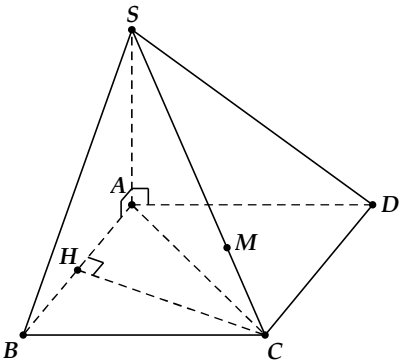
$\Rightarrow d\left(H,(SBC)\right)=HK=\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}$

Vì ΔABC có cạnh $AB=b\Rightarrow AI=\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HI=\dfrac{1}{3}AI=\dfrac{b\sqrt{3}}{6}$

Vậy $d\left(H,(SBC)\right)=\dfrac{a.\dfrac{b\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{ab\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{\sqrt{12a^2+b^2}}{2\sqrt{3}}}=\dfrac{ab}{\sqrt{12a^2+b^2}}$

Câu 5. **Chọn B.**

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAD)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

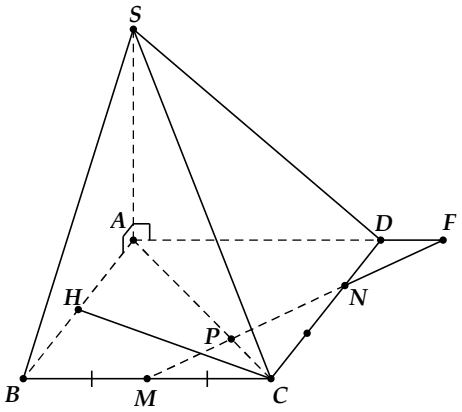


Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)$

Do $\dfrac{d(C,(SAB))}{d(M,(SAB))}=\dfrac{CS}{MS}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow d(M,(SAB))=\dfrac{2}{3}d(C,(SAB))=\dfrac{2}{3}CH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 6. **Chọn C.**



Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)$

Giả sử MN cắt AD tại F. Theo định lý Talet ta có:

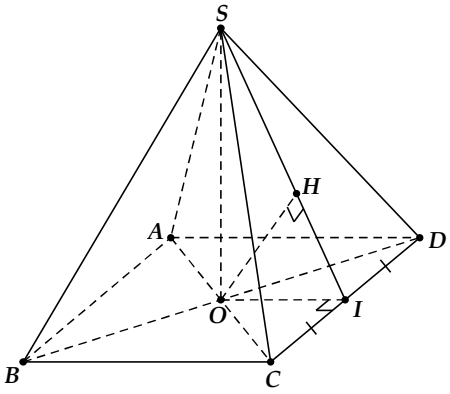
$\dfrac{DF}{MC}=\dfrac{ND}{NC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DF=\dfrac{MC}{2}=\dfrac{a}{4}$.

Khi đó $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AF}{MC}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\dfrac{CA}{PA}=\dfrac{7}{5}$

Do đó $d(P,(SAB))=\dfrac{5}{7}d(C,(sAB))=\dfrac{5}{7}CH$

$=\dfrac{5}{7}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5a\sqrt{3}}{14}$

Câu 7. **Chọn C.**



Vì $AO\cap(SCD)=\{C\}\Rightarrow\dfrac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))}=\dfrac{AC}{OC}=2$

$\Rightarrow d(A,(SCD))=2d(O,(SCD))$

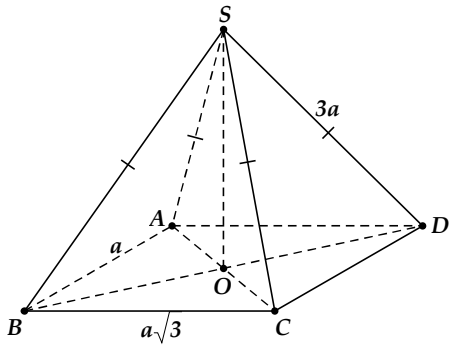
Gọi I là trung điểm của $CD\ \Rightarrow OI=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{b}{2}$

Kẻ $OH\perp SI,(H\in SI)$

Khi đó: $d(O;(SCD))=OH=\dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=\dfrac{a.\dfrac{b}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

$\Rightarrow d(A;(SCD))=2d(O;(SCD))=\dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$

Câu 8. **Chọn C.**



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$ $(\{O\}=AC\cap BD)$

Vì hình chóp $S.ABCD$ có các bên bằng nhau nên

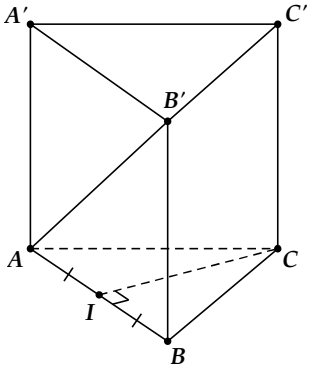
$SO\perp(ABCD)\Rightarrow d(S,(ABCD))=SO=\sqrt{SC^2-OC^2}$

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=2a$

$OC=\dfrac{AC}{2}=a$.

Vậy $d\left(S,\left(ABCD\right)\right)=SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{\left(3a\right)^2-a^2}=2a\sqrt{2}$

Câu 9. **Chọn D.**



Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow CI\perp AB$

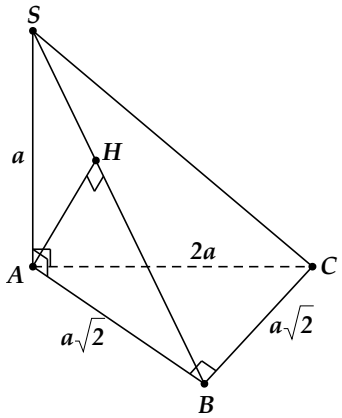
Vì $\begin{cases}CI\perp AB\\ CI\perp AA'\left(do\begin{cases}AA'\perp\left(ABC\right)\\ CI\subset\left(ABC\right)\end{cases}\right)\end{cases}\Rightarrow CI\perp\left(AA'B'B\right)$

$\Rightarrow d\left(C,\left(AA'B'B\right)\right)=CI$

Vì $CC'//\left(AA'B'B\right)$

$\Rightarrow d\left(CC',AB'\right)=d\left(CC',\left(AA'B'B\right)\right)=d\left(C,\left(AA'B'B\right)\right)=CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 10. **Chọn D.**



Kẻ $AH\perp SB,\left(H\in SB\right)$

Vì $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\xrightarrow{AH\subset\left(SAB\right)}BC\perp AH$

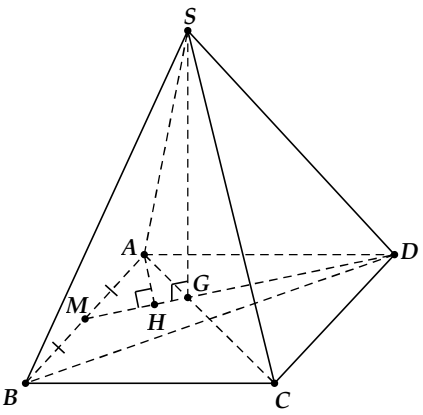
Vì $\begin{cases}AH\perp BC\\ AH\perp SB\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}$

Vì ΔABC vuông cân tại $B\Rightarrow AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 11. **Chọn A.**



Gọi M là trung điểm AB.

Ta có: $CG=2AG\Rightarrow d\left(C,\left(SDG\right)\right)=2d\left(A,\left(SDG\right)\right)$

Suy ra $d\left(A,\left(SDG\right)\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Dựng $AH\perp DG$

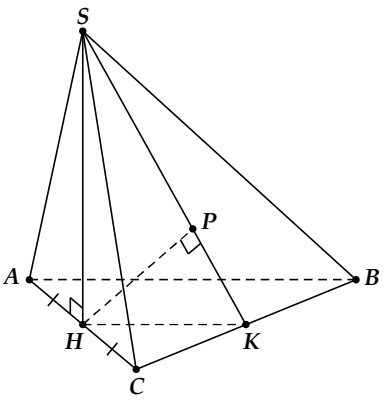
Mặt khác $AH\perp SG\Rightarrow AH\perp\left(SDG\right)\Rightarrow AH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Đặt $AB=x\Rightarrow AH=\dfrac{AD.AM}{\sqrt{AD^2+AM^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SG.S_{ABCD}=\dfrac{25}{12}$

Câu 12. **Chọn C.**

+) Kẻ $HK \perp BC, HP \perp SK \Rightarrow d\left(H,\left(SBC\right)\right) = HP$.



Từ $\begin{cases} HK \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK // AB$.

$\Rightarrow \dfrac{HK}{AB} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

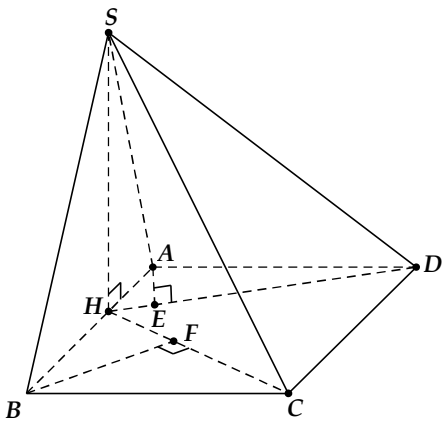
+) ΔABC vuông tại B có H là trung điểm của cạnh AC

$\Rightarrow HB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

$\Rightarrow HS = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow HP = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d\left(H,\left(SBC\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Câu 13. **Chọn B.**



Không mất tính tổng quát. Đặt $AB = 3 \Rightarrow AD = 3k$

Dựng $AE \perp DH$, lại có $AE \perp SH \Rightarrow AE \perp \left(SDH\right)$

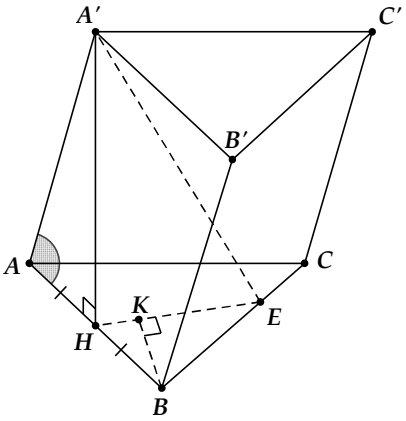
Do đó $d\left(A,\left(SDH\right)\right) = AE = \dfrac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = d_1$

Tương tự dựng $BF \perp HC$ ta có:

$d\left(B,\left(SHC\right)\right) = BF = \dfrac{BH.BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = d_2$

Do vậy $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{AH}{BH}.\dfrac{\sqrt{BH^2 + BC^2}}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4 + 9k^2}{1 + 9k^2}}$

Câu 14. **Chọn D.**



Ta có AA' tạo với đáy một góc 60° nên $\widehat{A'AH} = 60°$.

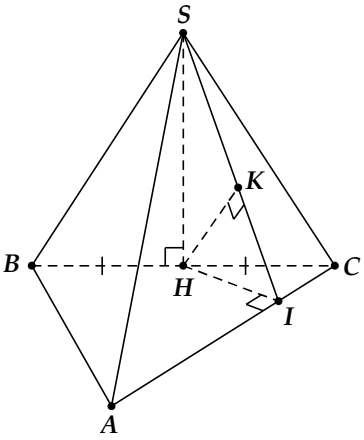
Khi đó $AH = A'A.\cos 60° = a \Rightarrow AB = BC = 2a$.

Do vậy $BH = a; BE = \dfrac{4a}{3}$

Dựng $BK \perp HE$, lại có $BK \perp A'H \Rightarrow BK \perp \left(A'HE\right)$

Do đó $d\left(B,\left(A'HE\right)\right) = BK = \dfrac{BH.BE}{\sqrt{BH^2 + BE^2}} = \dfrac{4a}{5}$

Câu 15. **Chọn B.**



Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow \begin{cases} SH \perp BC \\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Vì $\begin{cases} \left(SBC\right) \perp \left(ABC\right) \\ \left(SBC\right) \cap \left(ABC\right) = BC \Rightarrow SH \perp \left(ABC\right) \\ \left(SBC\right) \supset SH \perp BC \end{cases}$

Kẻ $HI \perp AC, \left(I \in \text{AC}\right)$. Khi đó: $AC \perp \left(SHI\right)$

Kẻ $HK \perp SI, \left(K \in SI\right)$

Vì $AC\perp(SHI)\Rightarrow(SAC)\perp(SHI)$

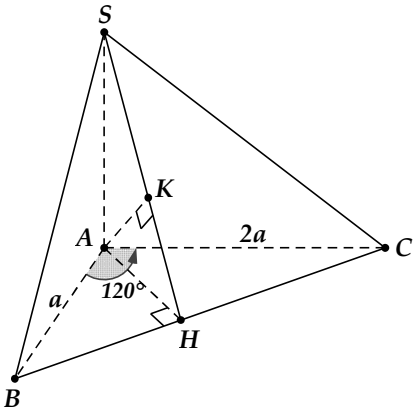
Vì $\begin{cases}(SHI)\perp(SAC)\\(SHI)\cap(SAC)=SI\Rightarrow HK\perp(SAC)\Rightarrow d(H,(SAC))=HK=\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}\\(SHI)\supset HK\perp SI\end{cases}$

Ta có: $HI=HC.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{a}{2}.\sin 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì $BH\cap(SAC)=\{C\}\Rightarrow\dfrac{d(B,(SAC))}{d(H,(SAC))}=\dfrac{BC}{HC}=2\Rightarrow d(B,(SAC))=2\mathrm{d}(H,(SAC))=2HK$

Vậy $d(B,(SAC))=2HK=2.\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}=2.\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Câu 16. **Chọn A.**



Kẻ $AH\perp BC,(H\in BC)$ và $AK\perp SH,(K\in SH)$.

Khi đó: $d(A,(SBC))=AK$

Ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0}=a\sqrt{7}$

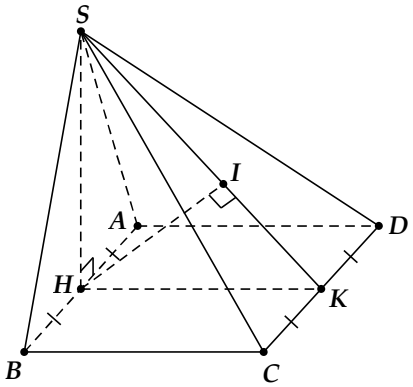
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0=\dfrac{1}{2}AH.BC$

$\Rightarrow AH=\dfrac{AB.AC.\sin 120^0}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Ta có: $\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{(SH,AH)}=\widehat{SHA}=60^0$

Vậy $d(A,(SBC))=AK=AH.\sin\widehat{SHA}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\sin 60^0=\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$

Câu 17. **Chọn C.**



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $\begin{cases}AB//(SCD)\\H\in AB\end{cases}\Rightarrow d(A,(SCD))=d(H,(SCD))$

Gọi K là trung điểm của CD $\Rightarrow HK=a$.

Kẻ $HI\perp SK,(I\in SK)$

Khi đó: $d(H,(SCD))=HI=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d(A,(SCD))=d(H,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 18. **Chọn C.**

Kẻ $AH \perp SB, (H \in SB)$

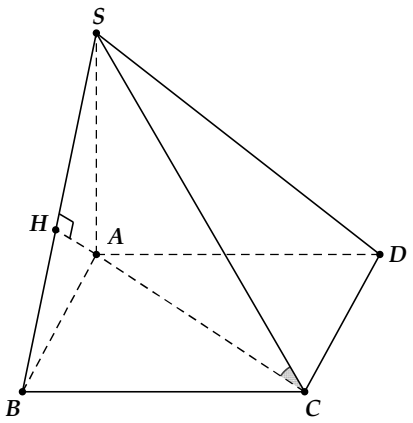
Khi đó $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$

Ta có: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



Câu 19. **Chọn C.**

Ta có $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCH} = 45°$

Giả sử $AB = BC = CA = 3x$

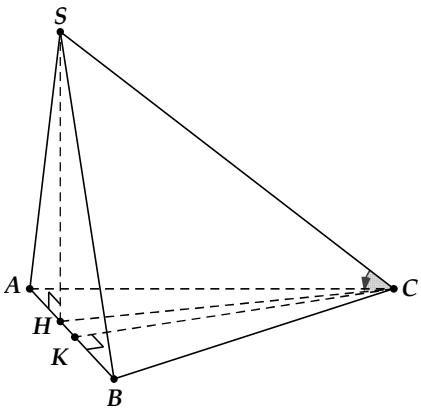
Ta có $CH = \sqrt{AH^2 + AC^2 - 2AH.AC.\cos 60°} = x\sqrt{7}$

Ta lại có $SA^2 = SH^2 + AH^2 \Leftrightarrow 8a^2 = 8x^2 \Leftrightarrow x = a$

$\Rightarrow AB = BC = CA = 3a$

Kẻ $CK \perp AB$ ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB)$

Mà $CK = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(C,(SAB)) = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$



Câu 20. **Chọn A.**

Vì ΔSAB là tam giác vuông cân tại S nên $SH \perp (ABCD)$

Từ H kẻ $HI \perp BD$, từ H kẻ $HK \perp SI$ với $I \in BD, K \in SI$

Ta có

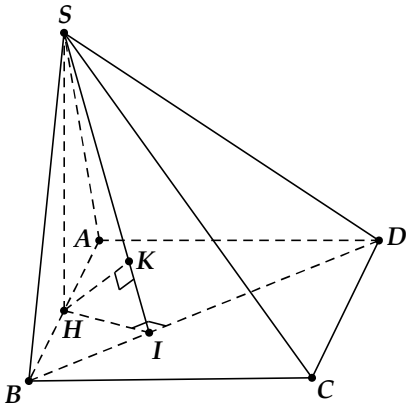
$\begin{cases} SH \perp BD \\ HI \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI) \Rightarrow BD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBD)$

Do đó $d(H,(SBD)) = HK$.

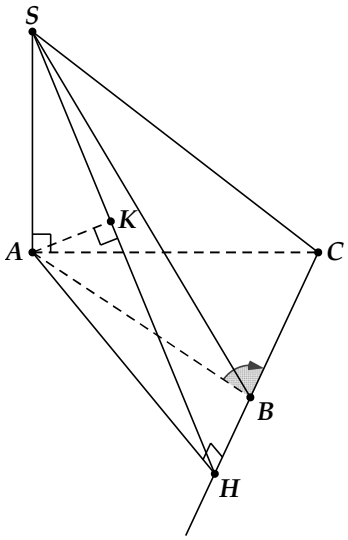
Mặt khác $\dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{HK^2}$.

Mà $HI = \dfrac{1}{2}d(A,BD) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $SH = \dfrac{AB}{2} = a$.

Nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



Câu 21. **Chọn D.**



Từ A kẻ $AH \perp BC$, kẻ $AK \perp SH$ với $H \in BC, K \in SH$.

Ta có

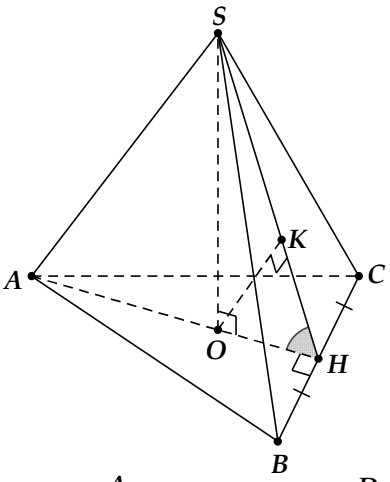
$$\begin{cases} SA \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC)$$

Do đó $d(A,(SBC)) = AK$ thỏa mãn $\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2}$.

Mà $SA = 3a$ và $AH = \sin 60°.AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}$

Nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{9a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{3a}{2}$

Câu 22. **Chọn A.**



Gọi O là tâm của tam giác ABC và H là trung điểm của BC.

Có $\begin{cases} SO \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SH,AH)} = \widehat{SHA}$

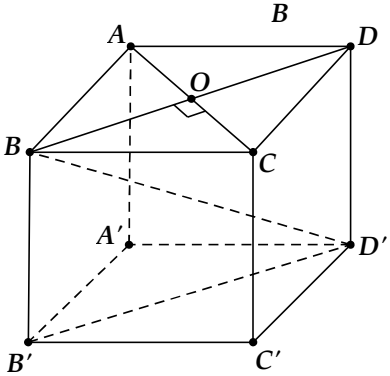
Kẻ $OK \perp SH$ suy ra $OK \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OK$.

Xét ΔOKH vuông tại K, có

$OK = \sin 60°.OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.OH = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.AH = \dfrac{a}{4}$

Do đó $d(A,(SBC)) = 3d(H,(SBC)) = \dfrac{3a}{4} = d \Leftrightarrow \dfrac{4d}{a} = 3$

Câu 23. **Chọn B.**



Vì $AA'//(BB'D'D)$ nên

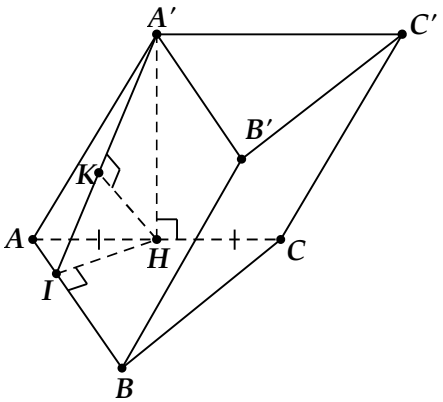
$d(AA',BD') = d(AA',(BB'D'D)) = d(A,(BB'D'D))$

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó: $AO \perp (BB'D'D)$

$\Rightarrow d(A,(BB'D'D)) = AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 24. **Chọn A.**



Vì $CH \cap (ABB'A') = \{A\}$

$\Rightarrow \dfrac{d(C,(ABB'A'))}{d(H,(ABB'A'))} = \dfrac{CA}{HA} = 2$

$\Rightarrow d(C,(ABB'A')) = 2d(H,(ABB'A'))$

Kẻ $HI \perp AB, (I \in AB)$ và $HK \perp A'I, (K \in A'I)$

Khi đó: $HK \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right)=HK=\dfrac{A'H.HI}{\sqrt{A'H^2+HI^2}}$

Ta có $HI=AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a}{2}.\sin 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=2d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right)=2.\dfrac{A'H.HI}{\sqrt{A'H^2+HI^2}}=2.\dfrac{3a.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(3a\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}}=\dfrac{6a}{7}$

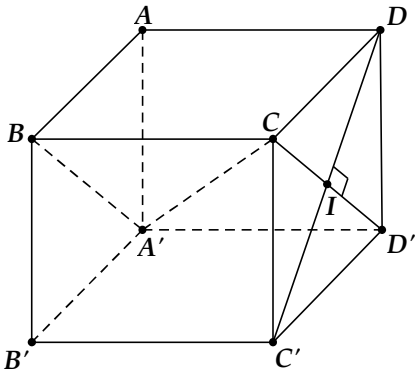
Câu 25. **Chọn B.**

Gọi I là tâm của hình vuông $CDD'C'\Rightarrow DI\perp CD'$

Vì $BC\perp\left(CDD'C'\right)\Rightarrow BC\perp DI$

Vì $\begin{cases}DI\perp CD'\\DI\perp BC\end{cases}\Rightarrow DI\perp\left(A'BCD'\right)\equiv\left(A'BC\right)$

$\Rightarrow d\left(D,\left(A'BC\right)\right)=DI=\dfrac{C'D}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Câu 26. **Chọn A.**

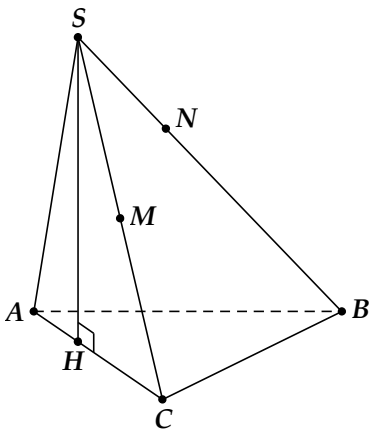
+) $\dfrac{d\left(M,\left(ABC\right)\right)}{d\left(S,\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{MC}{SC}=\dfrac{1}{2};\dfrac{d\left(N,\left(ABC\right)\right)}{d\left(S,\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{NB}{SB}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\dfrac{d\left(M,\left(ABC\right)\right)}{d\left(N,\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow A$ sai.

+) $\dfrac{d\left(M,\left(SAB\right)\right)}{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}=\dfrac{MS}{CS}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow B$ đúng.

+) $\dfrac{d\left(N,\left(SAC\right)\right)}{d\left(B,\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{NS}{BS}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C$ đúng.

+) $\begin{cases}d\left(M,\left(SAB\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(C,\left(SAB\right)\right)\\\dfrac{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}{d\left(H,\left(SAB\right)\right)}=\dfrac{CA}{HA}=3\end{cases}\Rightarrow D$ đúng.

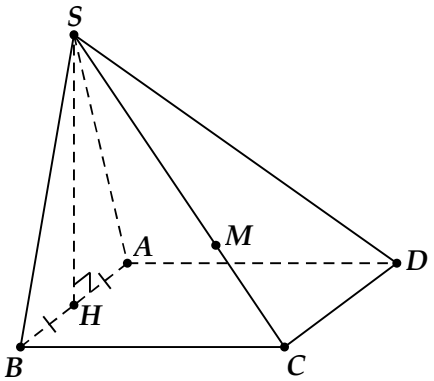


Câu 27. **Chọn B.**

+) Từ $\overrightarrow{SM}+2\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng SC và $SM=2MC$.

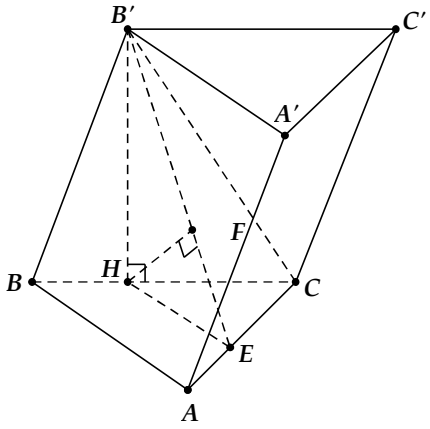
+) $\dfrac{d\left(M,\left(SAB\right)\right)}{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}=\dfrac{MS}{CS}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow d\left(M,\left(SAB\right)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(C,\left(SAB\right)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(D,\left(SAB\right)\right)$



$$\Rightarrow \frac{d\left(D,\left(SAB\right)\right)}{d\left(M,\left(SAB\right)\right)}=\frac{3}{2}$$

Câu 28. **Chọn B.**



Ta có: $BC=3a\sqrt{2}\Rightarrow HB=a\sqrt{2}$

Lại có $B'H=\sqrt{BB'^2-HB^2}=a\sqrt{2}$

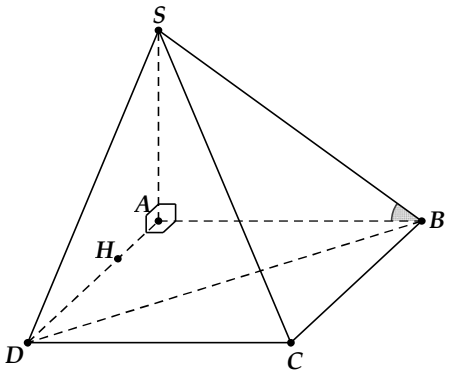
Dựng $HE\perp AC;HF\perp B'E\Rightarrow HF\perp\left(B'AC\right)$

Ta có $\frac{HE}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow HE=2a$

$$\Rightarrow HF=\frac{HE.B'H}{\sqrt{HE^2+B'H^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác $\frac{d\left(B,\left(B'AC\right)\right)}{d\left(H,\left(B'AC\right)\right)}=\frac{BC}{HC}=\frac{3}{2}$. Do đó: $d=\frac{3}{2}.HF=a\sqrt{3}$.

Câu 29. **Chọn C.**



Ta có AB là hình chiếu của SB trên mp $\left(ABCD\right)$.

$$\Rightarrow\left(\widehat{SB,\left(ABCD\right)}\right)=\left(\widehat{SB,AB}\right)=\widehat{SBA}=60°$$

$$\Rightarrow AB=\frac{SA}{\tan 60°}=3$$

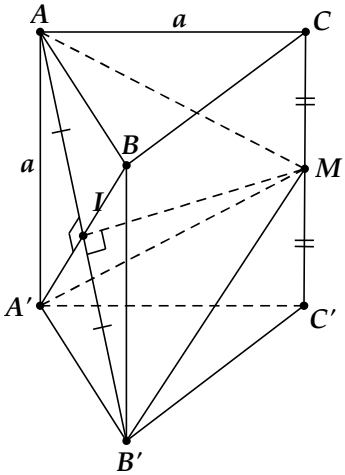
Gọi h là khoảng cách từ điểm A đến $\left(SBD\right)$.

Lại có ba cạnh SA, AB, AD đôi 1 vuông góc với nhau.

Nên $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{\left(3\sqrt{3}\right)^2}+\frac{2}{3^2}\Rightarrow h=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

Mà $d\left(H,\left(SBD\right)\right)=\frac{HD}{AD}d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{2}{3}d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

Câu 30. **Chọn D.**



Vì $AA'=AB\Rightarrow AA'B'B$ là hình vuông

Gọi I là tâm của hình vuông $AA'B'B\Rightarrow AI\perp A'B$

Ta có: $\begin{cases}MA=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\\MB'=\sqrt{MC'^2+B'C'^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

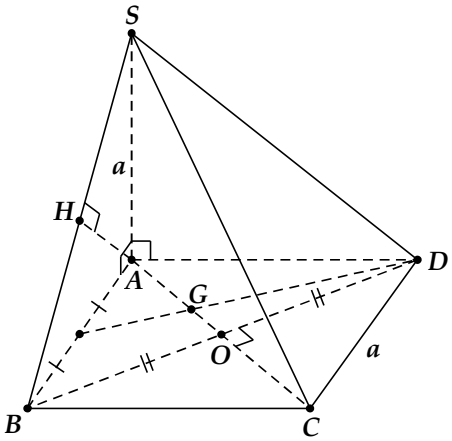
$\Rightarrow MA=MB'\Rightarrow\Delta MAB'$ là tam giác cân ở M.

$\Rightarrow MI\perp AB'\Rightarrow MI\perp AI$

Vì $\begin{cases}AI\perp MI\\AI\perp A'B\end{cases}\Rightarrow AI\perp\left(A'BM\right)$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BM\right)\right)=AI=\frac{AB'}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 31. **Chọn D.**



Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên

$$AG=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}.\frac{AC}{2}=\frac{AC}{3}\Rightarrow GC=\frac{2AC}{3}$$

Vì $AG\cap(SBC)=\{C\}\Rightarrow\frac{d(G,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{GC}{AC}=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(A,(SBC))$$

Kẻ $AH\perp SB,(H\in SB)$

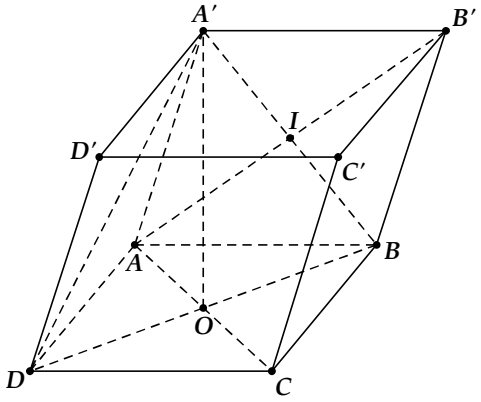
Khi đó

$$d(A,(SBC))=AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a.a}{\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(A,(SBC))=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 32. **Chọn B.**

Gọi $\{I\}=AB'\cap A'B$. Vì $AA'B'B$ là hình bình hành nên $AI=IB'$



Vì $AB'\cap(A'BD)=\{I\}\Rightarrow\frac{d(B',(A'BD))}{d(A,(A'BD))}=\frac{B'I}{AI}=1$

$$\Rightarrow d(B',(A'BD))=d(A,(A'BD))$$

Có: $V_{A'.ABD}=\frac{1}{3}A'O.S_{\Delta ABD}=\frac{1}{3}d(A,(A'BD)).S_{\Delta A'BD}$

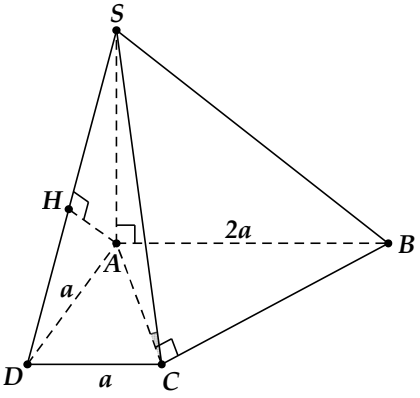
$$\Rightarrow d(A,(A'BD))=\frac{S_{\Delta ABD}.A'O}{S_{\Delta A'BD}}$$

+ $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{2}a.a=\frac{a^2}{2}$

+ $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow A'O\perp BD\Rightarrow S_{\Delta A'BD}=\frac{1}{2}A'O.BD=\frac{1}{2}A'O.a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.A'O$

Vậy $d(A,(A'BD))=\frac{S_{\Delta ABD}.A'O}{S_{\Delta A'BD}}=\frac{\frac{a^2}{2}.A'O}{\frac{a\sqrt{2}}{2}.A'O}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 33. **Chọn A.**



Vì $AB//(SCD)\Rightarrow d(B,(SCD))=d(A,(SCD))=d$

Kẻ $AH\perp SD,(H\in SD)$

Khi đó: $d(A,(SCD))=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}$

Dễ dàng chứng minh được:

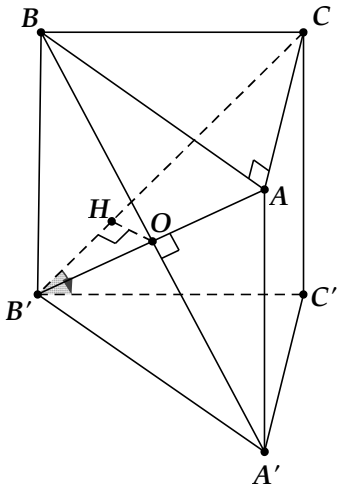
$BC \perp AC \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SC \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} = 45^0$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân ở A $\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

Vậy $d = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó: $\dfrac{\sqrt{6}d}{a} = \dfrac{\sqrt{6}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = 2$

Câu 34. **Chọn A.**



Gọi O là tâm của hình vuông $ABB'A'$.

Vì $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp BA'$

Trong $(AB'C)$, kẻ $OH \perp B'C, (H \in B'C)$ (1)

Vì $\begin{cases} BA' \perp AC \\ BA' \perp A'B \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C)$

Mà $OH \subset (AB'C) \Rightarrow BA' \perp OH (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của BA' và $B'C$ $\Rightarrow d(BA', B'C) = OH$

Vì $\Delta HB'O$ và $\Delta AB'C$ đồng dạng nên

$\dfrac{OH}{AC} = \dfrac{OB'}{CB'} \Rightarrow OH = \dfrac{AC.OB'}{CB'}$

Ta có: $\widehat{(B'C,(A'B'C'))} = \widehat{(B'C,B'C')} = \widehat{CB'C'} = 30^0$

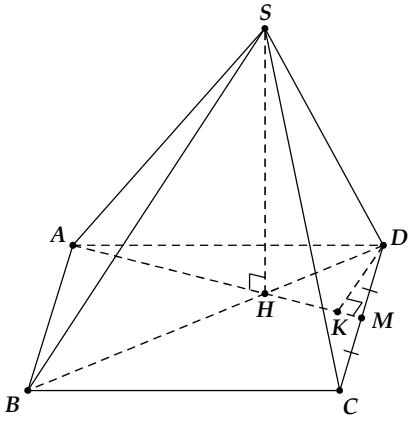
$CB' = \dfrac{B'C'}{\cos \widehat{CB'C'}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\cos 30^0} = 2a;$ $\quad CC' = B'C' \tan \widehat{CB'C'} = a\sqrt{3}.\tan 30^0 = a \Rightarrow AA' = CC' = a$

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $AB = AA' = a \Rightarrow AB' = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow OB' = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $d(BA', B'C) = OH = \dfrac{AC.OB'}{CB'} = \dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \dfrac{a}{2}$

Câu 35. **Chọn C.**



Gọi $H = AM \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \perp (ABC) \\ (SAM) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Lại có $\dfrac{HB}{HD} = \dfrac{AB}{DM} = 2 \Rightarrow d(D,(SAM)) = \dfrac{1}{2} d(B,(SAM))$

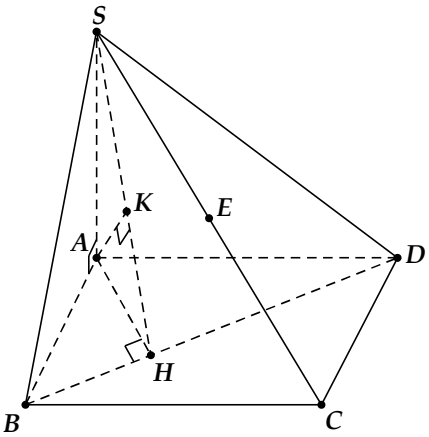
$S_{ADM}=\frac{1}{2}S_{ADC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{a^2}{2}$.

Ta có: $S_{ADM}=\frac{1}{2}AD.DM\sin D\Rightarrow \sin D=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \widehat{D}=45^\circ$

Do vậy $AM=\sqrt{AD^2+DM^2-2AD.DM\cos 45^\circ}=\frac{\sqrt{10}}{2}a$

Kẻ $DK\perp AM$. Do vậy $DK=\frac{2S_{ADM}}{AM}=\frac{2a}{\sqrt{10}}=\frac{a\sqrt{10}}{5}\Rightarrow d\left(B,\left(SAM\right)\right)=\frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 36. **Chọn B.**



Ta có $d\left(E,\left(SBD\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{a}{3}$.

$\Rightarrow d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{2a}{3}$

Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Và K là hình chiếu của A lên SH.

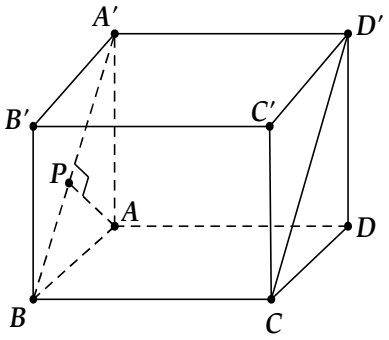
Ta được $AK\perp\left(SBD\right)\Rightarrow AK=d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{2a}{3}$.

$AH.BD=AB.AD\Leftrightarrow AH=\frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+BD^2}}=\frac{x.a^2}{\sqrt{a^2+x^2a^2}}$

Do đó $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AH^2}\Leftrightarrow\frac{9}{4a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{a^2+x^2a^2}{x^2a^4}$.

$\Leftrightarrow\frac{5}{4}=\frac{1+x^2}{x^2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ vì $x>0$.

Câu 37. **Chọn B.**



+) Kẻ $AP\perp A'B\Rightarrow d\left(A,\left(BCD'\right)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AP$

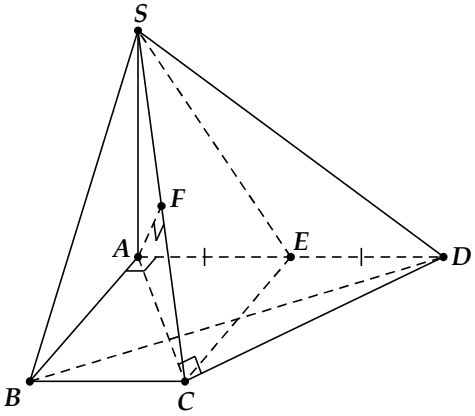
+) $\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=\frac{A'C}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\Rightarrow\frac{1}{AP^2}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD'\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 38. **Chọn A.**



Gọi E là trung điểm của AD khi đó $ABCE$ là hình vuông cạnh a suy ra $CE\perp AD$, lại có $CE\perp SA$

Do đó $CE\perp\left(SAD\right)\Rightarrow\widehat{CSE}=\left(SC,\left(SAD\right)\right)=30^\circ$.

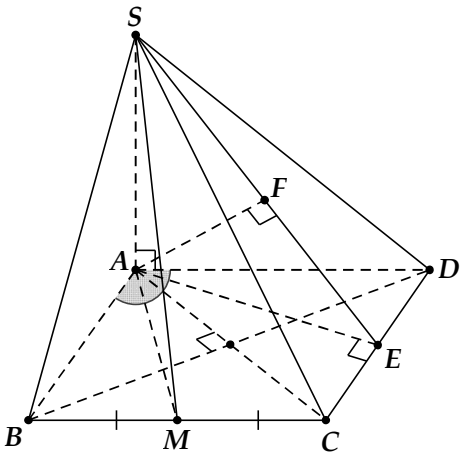
Lại có: $SC\sin 30^\circ=CE=a\Rightarrow SC=2a$

$\Rightarrow SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=a\sqrt{2}$.

Do $CE=\frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C suy ra $AC\perp CD$, dựng $AF\perp SC$.

Ta có: $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AF=\frac{SA.SC}{SC}=a$.

Câu 39. **Chọn A.**



Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD}=120°$ nên tam giác ABC và ACD là các tam giác đều.

Khi đó $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, dựng $AE\perp CD\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

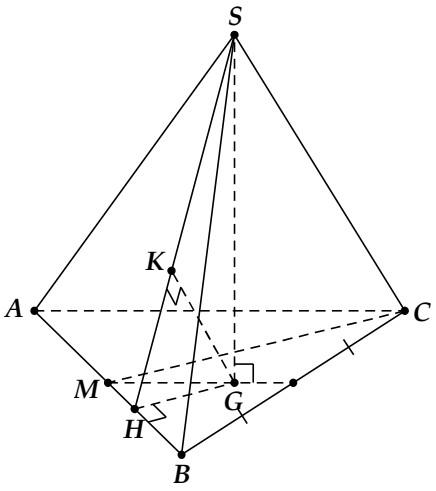
dựng $AF\perp SE$ suy ra $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AF$.

Do $\widehat{SMA}=45°\Rightarrow SA=AM\tan 45°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Có: $AB//CD\Rightarrow d\left(B,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AF$

$=\frac{SA.SE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 40. **Chọn C.**



Gọi I là trung điểm của MB.

Gọi G là trọng tâm của tam giác MBC suy ra $SG\perp\left(ABC\right)$.

Từ G kẻ $GH\perp AB$, kẻ $GK\perp SH$ với $H\in AB,K\in SH$.

Nên $GK\perp\left(SAB\right)\Rightarrow d\left(G;\left(SAB\right)\right)=GK$.

Ta có $IC=\sqrt{MC^2+MI^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4},GC=\frac{2}{3}IC=\frac{a\sqrt{13}}{6}$

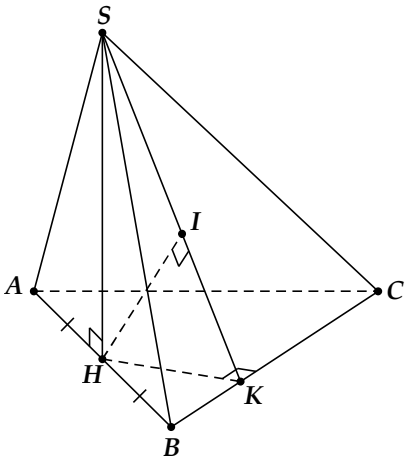
$\Rightarrow SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\frac{a\sqrt{3}}{6},GH=\frac{1}{3}MC=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Do đó ΔSGH vuông cân tại G nên

$GK=\frac{1}{2}SH=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$

Mà $d\left(C;\left(SAB\right)\right)=3d\left(G;\left(SAB\right)\right)=\frac{3a\sqrt{6}}{12}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 41. **Chọn B.**



Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow SH\perp AB\Rightarrow SH\perp\left(ABC\right)$

Xét tam giác ABC vuông tại A, có $AB=a,AC=a\sqrt{3}$.

Đặt $SH=x$ nên

$SB=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}},SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{x^2+\frac{13a^2}{4}}$

Mà $SB^2+SC^2=BC^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x=\frac{a}{2} \Rightarrow SH=\frac{a}{2}$

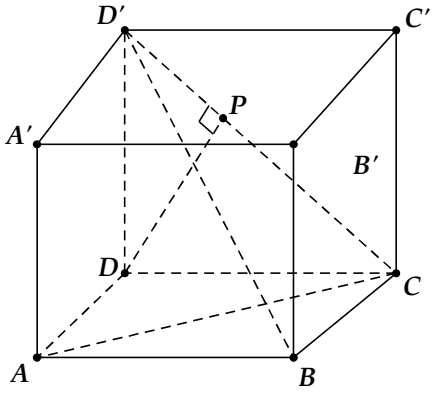
Kẻ $HK \perp BC, HI \perp SK$ với $K \in BC, I \in SK$ nên $HI \perp (SBC)$.

Mặt khác $HK=HB.\sin\hat{B}=\frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{SH^2}=\frac{28}{3a^2}$

$\Leftrightarrow HI=\frac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{14}$

Mà $d\left(A;(SBC)\right)=2d\left(H,(SBC)\right)=2HI=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 42. **Chọn C.**



+) $d\left(A,(BCD')\right)=d\left(D,(BCD')\right)$

Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow D'D \perp (BCD)$.

Kẻ $AP \perp CD' (P \in CD') \Rightarrow d\left(D,(BCD')\right)=DP$

$\Rightarrow d\left(D,(BCD')\right)=DP \Rightarrow d\left(A,(BCD')\right)=DP$

+) Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow A'A \perp AC$

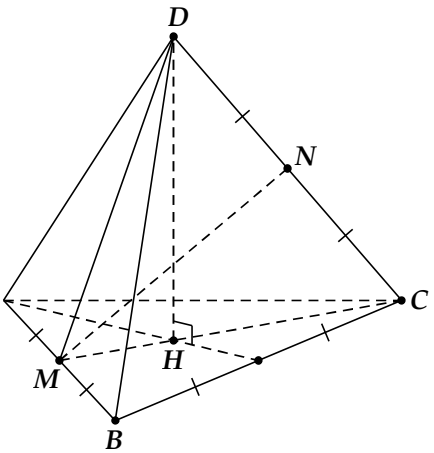
$\Rightarrow \Delta A'AC$ vuông cân thì chỉ có thể vuông cân tại A

$$\Rightarrow A'A=AC=\frac{A'C}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} D'D=A'A=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ DC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{a}{2} \end{cases}$$

+) $\frac{1}{DP^2}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a^2}$

$\Rightarrow DP=\frac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow d\left(A,(BCD')\right)=\frac{a}{\sqrt{6}}$

Câu 43. **Chọn B.**



Ta có $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$

Kẻ $MN \perp CD \Rightarrow AB \perp MN$ do $AB \perp (CDM)$

$\Rightarrow MN$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD

Ta có $CM=\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}$ và $CN=\frac{1}{2}CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow MN=\sqrt{CM^2-NC^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d\left(AB,CD\right)=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

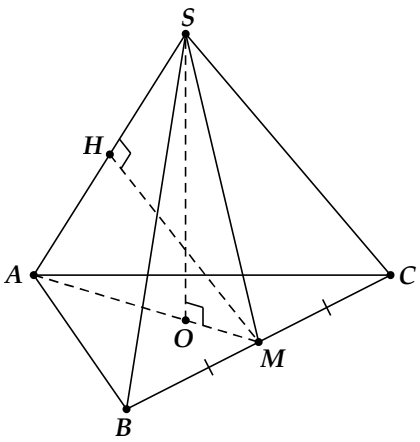
Câu 44. **Chọn C.**

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA=SB=SC \Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BC$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAM)$, kẻ $MH \perp SA$ nên MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC.



Suy ra $d(SA;BC) = MH = \dfrac{3a}{4}$.

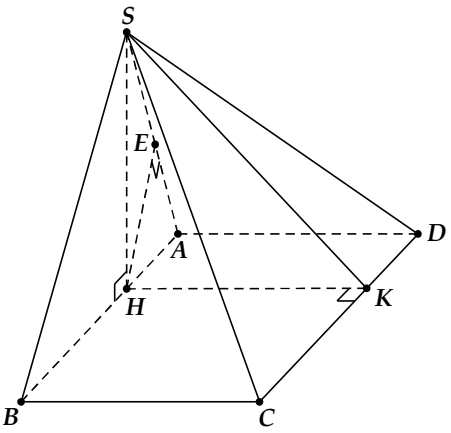
Ta có $\sin\widehat{MAH} = \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{3a}{4} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MAH} = 60°$

Mà $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow \cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Câu 45. **Chọn A.**

Kẻ $HK \perp CD, K \in CD$ và $HE \perp SA, E \in SA$.



Có $\begin{cases} SH \perp HK \\ CD \perp HK \end{cases}$

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SH và CD.

Ta có $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp HE \Rightarrow HE \perp (SAD)$.

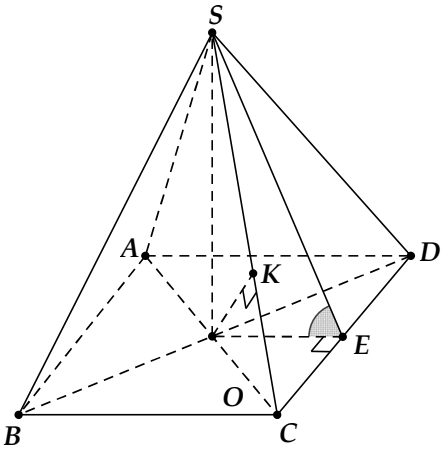
Suy ra $d(H;(SAD)) = HE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = 1 \Rightarrow AH = 1$.

Mặt khác $AB = 3AH = 3AD \Rightarrow AH = AD$ nên tứ giác $AHKD$ là hình vuông, do đó $HK = 1 = d(SH;CD)$.

Câu 46. **Chọn A.**

Ta có: $OE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow \widehat{SEO} = 60°$



+) Đặt $AB = 2x \Rightarrow OA = x\sqrt{2}, OE = x$

+) $\tan 60° = \dfrac{SO}{OE} = \dfrac{\sqrt{SA^2 - OA^2}}{OE} = \dfrac{\sqrt{5a^2 - 2x^2}}{x} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 5a^2 = 5x^2 \Rightarrow x = a \Rightarrow AB = 2a, SO = a\sqrt{3}$

Ta có: $BD \perp (SAD)$.

Dựng $OK \perp SC \Rightarrow d(BD;SC) = OK$

Ta có: $OK = \dfrac{SO.OC}{\sqrt{SO^2 + OC^2}} = a\sqrt{\dfrac{6}{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

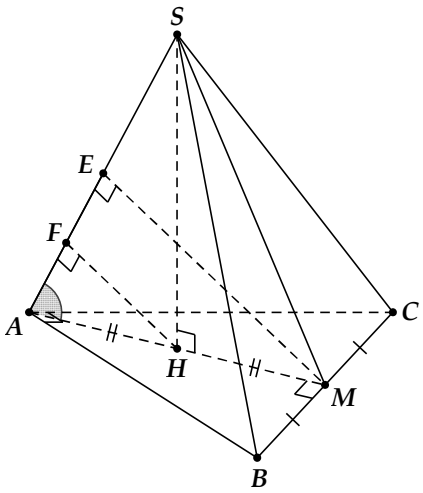
Câu 47. **Chọn B.**

Gọi H là trung điểm của AM khi đó $BC = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH = HA\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Dựng $ME \perp SA$.

Do $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp ME$ do đó ME là đường vuông góc chung của BC và SA.



Cách 1:

$$ME.SA = SH.AM \Rightarrow ME = \frac{SH.AM}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Cách 2: Dựng $HF \perp SA$ suy ra $ME = 2HF = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 48. **Chọn C.**

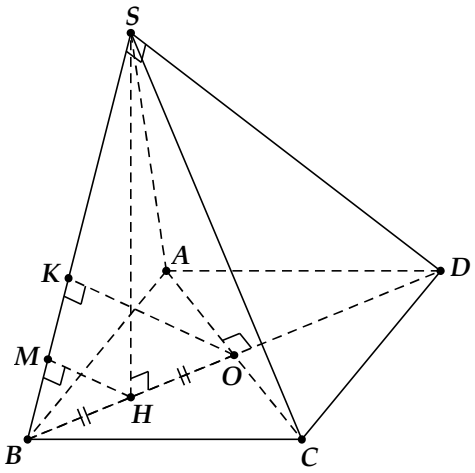
Gọi H là trung điểm của OB khi đó $SH \perp (ABCD)$

Ta có tam giác SBD vuông tại S có đường cao SH nên $SH^2 = HB.HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2}$

Dựng $OK \perp SB \Rightarrow OK$ là đường vuông góc chung của AC và SB.

Dựng $HM \perp SB \Rightarrow HM = \frac{SH.HB}{\sqrt{SH^2 + HB^2}} = \frac{3a}{4}$

Do đó $d(AC;SB) = OK = 2MH = \frac{3a}{2}$.



Câu 49. **Chọn A.**

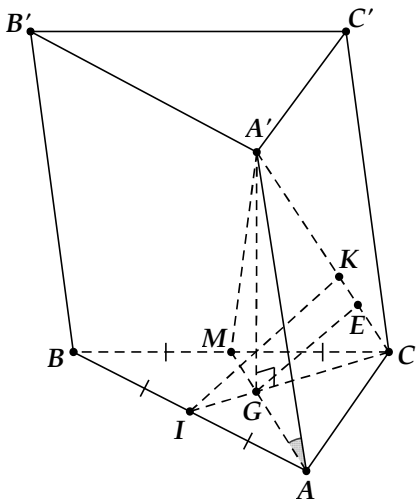
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $A'G \perp (ABC); AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $A'G = GA\tan 60° = a$. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} CI \perp AB \\ A'G \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'CI) \perp AB$

Dựng $IK \perp A'C$ do đó IK là đường vuông góc chung của AB và $A'C$. Dựng $GE \perp A'C$

Suy ra $GE = \frac{A'G.GC}{\sqrt{A'G^2 + GC^2}}\frac{a}{2} \Rightarrow IK = \frac{3}{2}GE = \frac{3a}{4}$.



Câu 50. **Chọn C.**

I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp AC$.

Mà $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SB$.

Gọi K là trung điểm của $SB \Rightarrow AK \perp SB$

$\Rightarrow AK$ là đoạn vuông góc chung của AC, SB nên

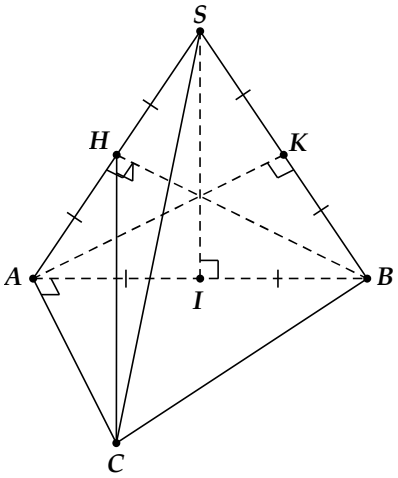
$d(SB;AC) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a$.

Gọi H là trung điểm của $SA \Rightarrow BH \perp SA$.

Mà $AC \perp BH$. Suy ra $BH \perp (SAC)$.

$\Rightarrow \widehat{(BC;(SAC))} = \widehat{(BC;HC)} = \widehat{BCH} = 30°$

Ta có $\sin\widehat{BCH} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{BH}{\sin 30°} = a\sqrt{3}$.



Câu 51. Chọn B.

Gọi N là trung điểm của AD suy ra $MN // AC$.

Ta có $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, BM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $BN = \dfrac{3a}{2}$ suy ra ΔBMN vuông.

Do đó $BM \perp MN \Rightarrow BM \perp AC \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

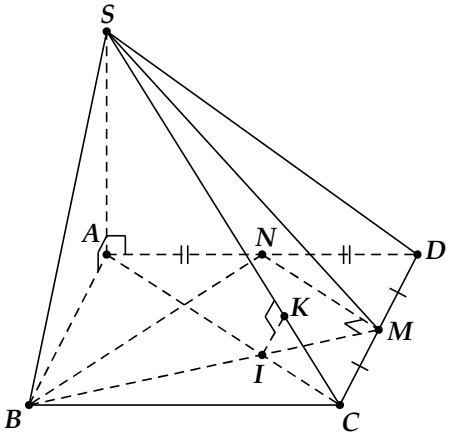
Gọi I là giao điểm của AC và BM. Từ I kẻ $IK \perp SC$

Nên IK là đoạn vuông góc chung SC, BM

$\Rightarrow d(SC;BM) = IK$.

Ta có $\Delta SAC \sim \Delta IKC \Rightarrow IK = IC.\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $d(SC;BM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.



Câu 52. Chọn A.

+) Dựng $Ax // BC \Rightarrow d(SA,BC) = d(B;SAx)$

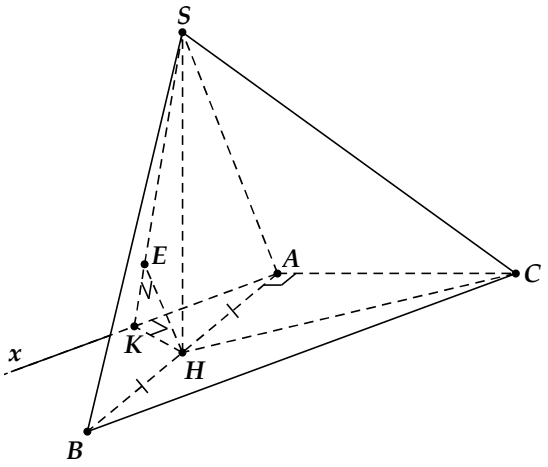
+) Dựng $HK \perp Ax \Rightarrow (SHK) \perp Ax$

+) Dựng $HE \perp SK \Rightarrow d(B,SAx) = 2d(H,SAx)$

Ta có: $HK = AH\sin\widehat{HAK} = a\sin 56° = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$d(H,SAx) = HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

+) Do đó $d(SA,BC) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$



Câu 53. Chọn B.

Ta có: $\Delta A'CM$ cân tại A'.Dựng $A'H \perp CM \Rightarrow H$ là trung điểm của CM và $A'H \perp (ABC)$

Khi đó $V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = a$

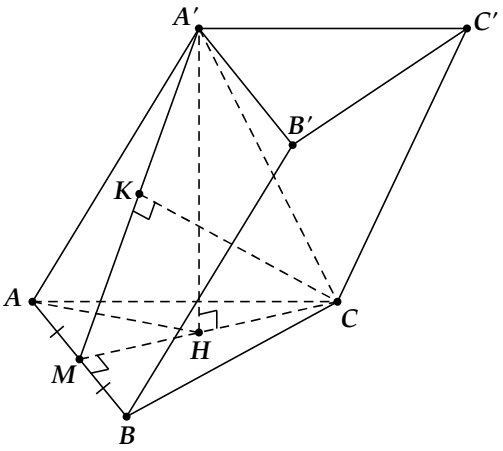
$d(AB,CC')=d(CC',A'AB)=d(C,A'AB)=CK$

Vậy $CK=\dfrac{A'H.CM}{A'M}=\dfrac{A'H.CM}{\sqrt{A'H^2+MH^2}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

Hoặc các em có thể tính như sau:

$d(C',(A'AB))=2d(H,(A'AB))$

$=\dfrac{2.A'H.MH}{\sqrt{A'H^2+MH^2}}$



Câu 54. **Chọn A.**

+) Dựng $HK\perp CD\Rightarrow CD\perp(SHK)$

do vậy $(\widehat{SCD,ABCD})=\widehat{SKH}=45°$.

Ta có: ΔHKD vuông cân tại K do vậy

$HK=KD=\dfrac{3a}{2}\Rightarrow SH=HK\tan 45°=\dfrac{3a}{2}$.

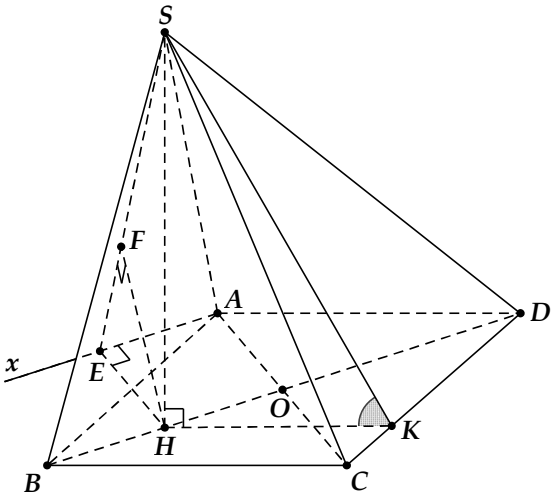
+) Dựng $Ax//BD$ ta có:

$d(SA,BD)=d(BD,(SAx))=d(H,(SAx))$

Dựng $HE\perp Ax\Rightarrow HE=OA=a\sqrt{2}$

Dựng $HF\perp SE\Rightarrow HF\perp(SAx)$

Ta có: $HF=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$



Câu 55. **Chọn C.**

Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN//B'C$.

Do đó $d(AM,B'C)=d(B'C,(AMN))=d(C,(AMN))$.

Mà M là trung điểm của BC nên

$d(B,(AMN))=d(C,(AMN))$.

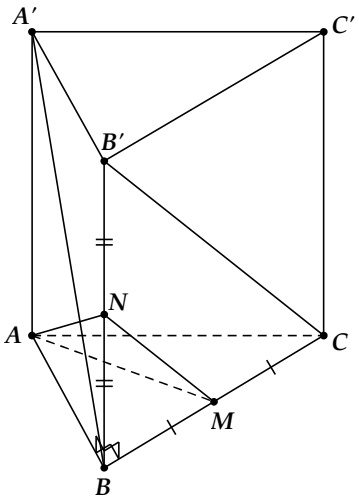
Ta có BA, BM, BN đôi một vuông góc với nhau.

Nên $\dfrac{1}{d^2(B,(AMN))}=\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BM^2}+\dfrac{1}{BN^2}$.

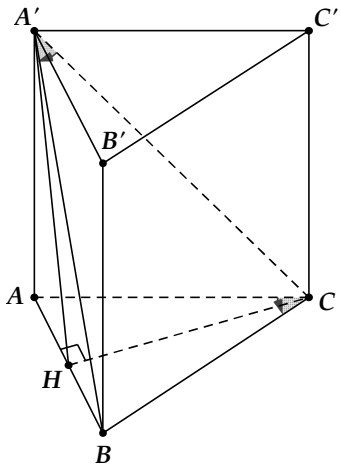
Mặt khác $BM=\dfrac{BC}{2}=a, AB=a\sqrt{3}, BN=\dfrac{1}{2}BB'=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{d^2(B,(AMN))}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(a\sqrt{3})^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{10}{3a^2}$.

$\Rightarrow d(B,(AMN))=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}\Rightarrow d(AM,B'C)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$



Câu 56. **Chọn B.**



Kẻ $CH \perp AB\left(H \in AB\right) \Rightarrow CH \perp \left(ABB'A'\right)$.

Nên $A'H$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $\left(ABB'A'\right)$

.

Do đó $\left(\widehat{A'C,\left(ABB'A'\right)}\right) = \widehat{CA'H} = 30°$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên

$CC'//AA' \Rightarrow CC'//\left(ABB'A'\right)$

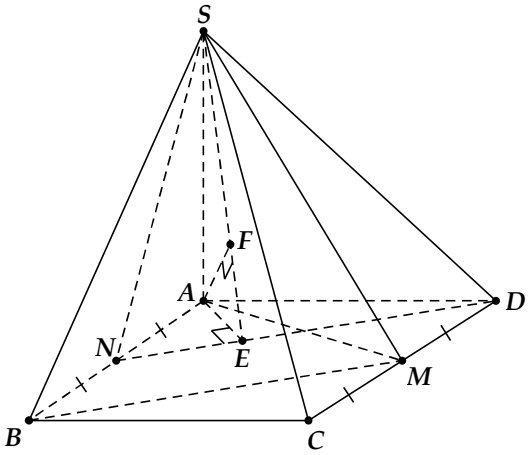
$\Rightarrow d\left(A'B,CC'\right) = d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right) = d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right) = CH$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin\widehat{ACB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos\widehat{BCA} = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$\Rightarrow CH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d\left(A'B,CC'\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 57. **Chọn D.**



Dựng $DN//BM \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Khi đó $d\left(SD,BM\right) = d\left(BM,\left(SDN\right)\right)$

$= d\left(B,\left(SDN\right)\right) = d\left(A,\left(SDN\right)\right)$

Dựng $AE \perp DN \Rightarrow DN \perp \left(SAE\right)$, dựng

$AF \perp SE$

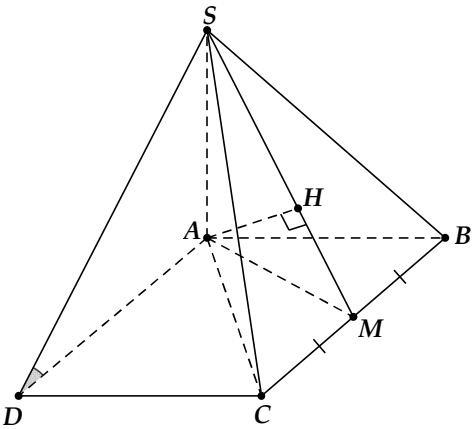
khi đó $\begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp DN \end{cases} \Rightarrow AF \perp \left(SDN\right)$

Do vậy $d\left(B,\left(SDN\right)\right) = d\left(A,\left(SDN\right)\right)$

$= AF = \frac{AE.SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = 2a\sqrt{\frac{5}{29}} = \frac{2a\sqrt{145}}{29}$

Với $AE = \frac{AN.AD}{\sqrt{AN^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 58. **Chọn D.**



Lấy M là trung điểm BC, H là hình chiếu của A lên SM.

Xác định được $\left(\widehat{AD,\left(ABCD\right)}\right) = \widehat{SDA} = 45°$

$SA \perp BC \perp AM \Rightarrow BC \perp \left(SAM\right) \Rightarrow BC \perp AH$

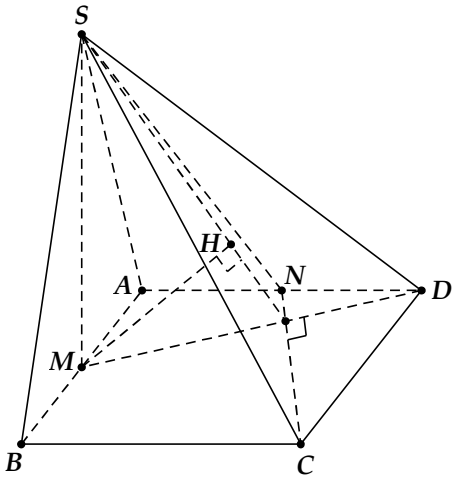
$AH \perp SM \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right) = AH$

Vì $AD//\left(SBC\right)$ chứa BC nên:

$d\left(SB,AD\right) = d\left(AD,\left(SBC\right)\right) = d\left(A,\left(SBC\right)\right) = AH$

Tính: $SA = AD = a\sqrt{2}, AM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Câu 59. **Chọn B.**



Vì tam giác SAB đều nên $\begin{cases} SM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ SM \perp AB \end{cases}$

Vì $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SM \perp (ABCD) \\ (SAB) \supset SM \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow SM \perp CN$

Mà $CN \perp DM \Rightarrow CN \perp (SMI)$

$\Rightarrow (SCN) \perp (SMI), (\{I\} = CN \cap DM)$

Kẻ $MH \perp SI, (H \in SI)$

Vì $\begin{cases} (SCN) \perp (SMI) \\ (SCN) \cap (SMI) \\ (SMI) \supset MH \perp SI \end{cases} \Rightarrow MH \perp (SCN) \Rightarrow d(M,(SCN)) = MH = \dfrac{SM.MI}{\sqrt{SM^2 + MI^2}}$

Vì ΔAMD và ΔIND đồng dạng nên $\dfrac{AD}{ID} = \dfrac{MD}{ND} \Rightarrow ID = \dfrac{AD.ND}{MD}$

Ta có: $\begin{cases} AD = a, ND = \dfrac{a}{2} \\ MD = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow ID = \dfrac{AD.ND}{MD} = \dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Khi đó: $MI = MD - ID = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$

Vậy $d(M,(SCN)) = MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a\sqrt{5}}{10} : \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$

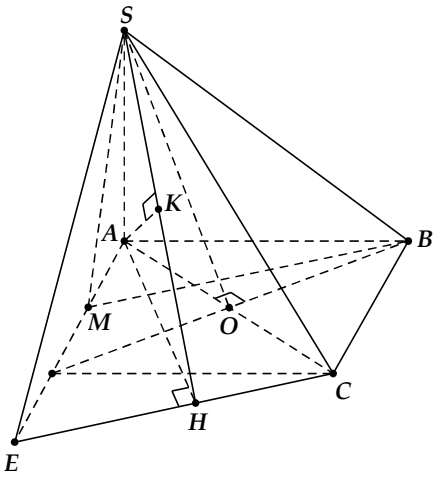
Câu 60. **Chọn A.**

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow AO \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAO)$.

Do đó $\widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SOA} = 60^\circ \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Qua C vẽ đường thẳng song song với BM cắt AD tại E.



Khi đó $BM // (SCE) \Rightarrow d(BM,SC) = d(M,(SCE))$

Mà $ME = \dfrac{2}{3}AE \Rightarrow d(M,(SCE)) = \dfrac{2}{3}d(A,(SCE))$

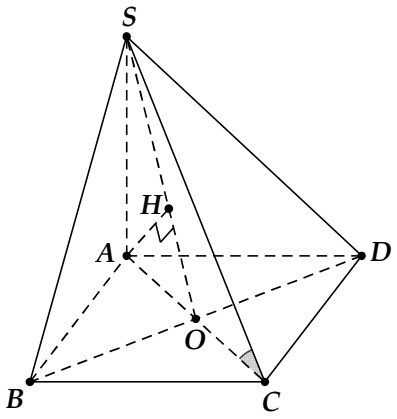
Kẻ $AH \perp CE$ tại H suy ra $CE \perp (SAH)$ và $AH.CE = CD.AE$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại K suy ra $AK \perp (SCE) \Rightarrow d(A,(SCE)) = AK$.

Mà $AH = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$ nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AK = \dfrac{3a}{\sqrt{11}}$.

Do đó $d(BM,SC) = \dfrac{2}{3}\dfrac{3a}{\sqrt{11}} = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$

Câu 61. **Chọn A.**



Gọi O là tâm của đáy. Kẻ $AH \perp SO, (H \in SO)$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

Vì $\begin{cases} (SBD) \perp (SAC) \\ (SBD) \cap (SAC) = SO \Rightarrow AH \perp (SBD) \\ (SAC) \supset AH \perp SO \end{cases}$

$\Rightarrow d = d(A,(SBD)) = AH = \dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}}$

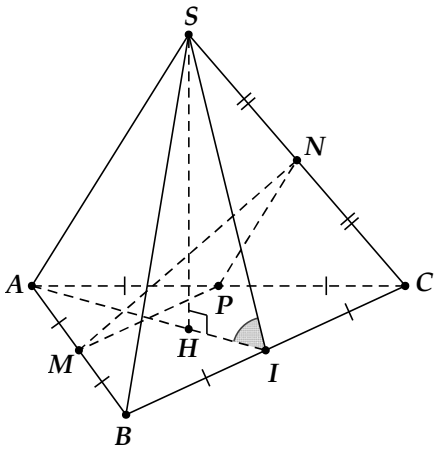
Ta có: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} = 60^0$

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{2}.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$

Vì O là tâm của đáy nên O là trung điểm của $AC \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó: $d = \dfrac{a\sqrt{6}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{78}}{13} \Rightarrow \dfrac{d}{a} = \dfrac{\sqrt{78}}{13}$

Câu 62. **Chọn A.**



Gọi H là tâm của ΔABC, I là trung điểm của BC.

Suy ra $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI,AI)} = \widehat{SIA} = 60°$.

Đặt

$AB = x \Rightarrow HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \tan 60°.HI = \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{7}$.

Gọi P là trung điểm của AC suy ra

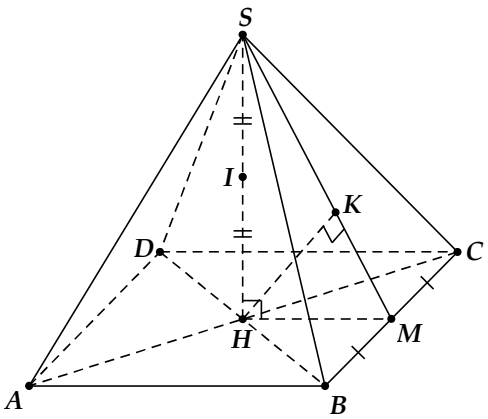
$NP // SA \Rightarrow SA // (MNP)$.

$\Rightarrow d(SA,MN) = d(SA,(MNP)) = d(A,(MNP)) = \dfrac{3V_{A.MNP}}{S_{\Delta MNP}}$.

- $3V_{A.MNP}=d\left(N,\left(ABC\right)\right)=S_{\Delta AMP}=\dfrac{9a^3\sqrt{7}}{392}$
- $S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{2}MP.NP=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{21}}{28}$.

Do đó $d\left(A,\left(MNP\right)\right)=\dfrac{9a\sqrt{3}}{42}\Rightarrow d\left(SA,MN\right)=\dfrac{9a\sqrt{3}}{42}$

Câu 63. **Chọn A.**



Gọi M,I lần lượt là trung điểm của BC và SH.

$\Rightarrow HM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$

Vì $IH\cap\left(SBC\right)=\left\{S\right\}\Rightarrow\dfrac{d\left(I,\left(SBC\right)\right)}{d\left(H,\left(SBC\right)\right)}=\dfrac{SI}{SH}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(H,\left(SBC\right)\right)=2d\left(I,\left(SBC\right)\right)=2b$

Kẻ $HK\perp SM,\left(K\in SM\right)$

Khi đó: $d\left(H,\left(SBC\right)\right)=HK=2b$

Xét ΔSHM vuông tại H và có đường cao HK, ta có:

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HM^2}\Rightarrow\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{HK^2}-\frac{1}{HM^2}$$

$$\Rightarrow SH=\frac{HK.HM}{\sqrt{HM^2-HK^2}}=\frac{2b.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(2b\right)^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}.a^2=\dfrac{2a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$

Chủ đề 4

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

☆☆☆

A. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

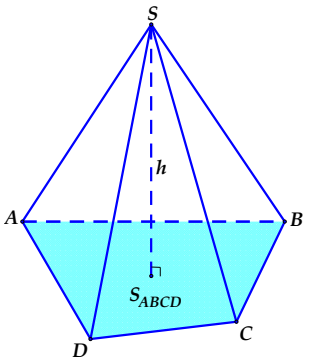
I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1. Thể tích khối chóp

$$\boxed{V_{K/c}=\frac{1}{3}.S.h}$$

Với: S : Diện tích đáy

h : Chiều cao



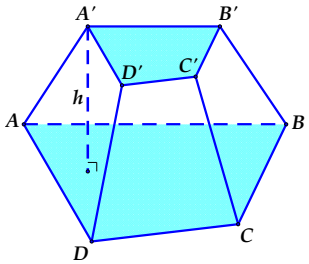
$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.h$$

2. Thể tích khối chóp cụt

$$\boxed{V=\frac{1}{3}h\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)}$$

Với B,B' : Diện tích hai đáy

h : Chiều cao



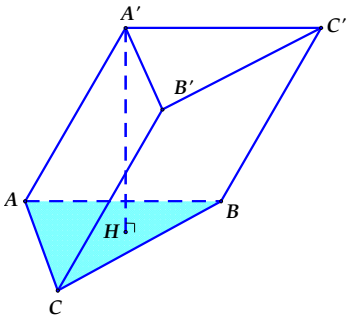
II. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI HỘP CHỮ NHẬT

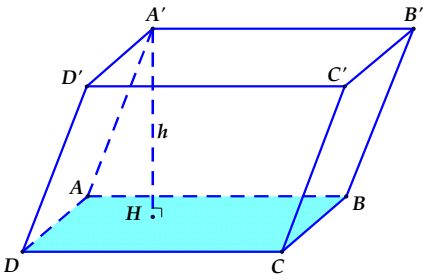
1. Thể tích khối lăng trụ

$$\boxed{V_{LT}=S.h}$$

Với: S : Diện tích đáy

h : Chiều cao





2. Thể tích khối hộp chữ nhật

Thể tích khối hộp chữ nhật:

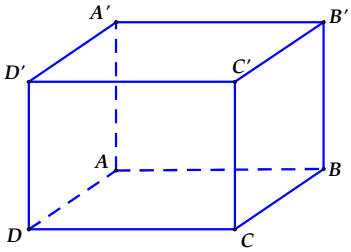
$$\boxed{V=a.b.c}$$

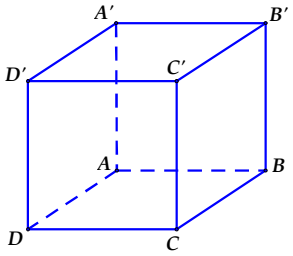
với a,b,c là ba kích thước

Thể tích khối lập phương:

$$\boxed{V=a^3}$$

với a là độ dài cạnh





III. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KỸ THUẬT CẦN NẮM

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- *Tứ diện đều là tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều*
- *Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).*
- *Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy thì giao tuyến của hai mặt bên đó sẽ vuông góc với mặt phẳng đáy.*
- *Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau: Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA=SB=SC=SD=...$. Khi đó hình chiếu O của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm đường tròn nội tiếp đi qua các đỉnh $(A,B,C,D,...)$ nằm trên mặt đáy.*

  Nếu đáy là:

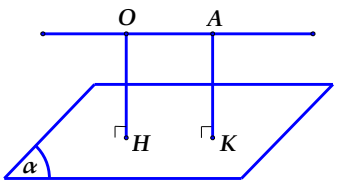
  + Tam giác đều, O là trọng tâm

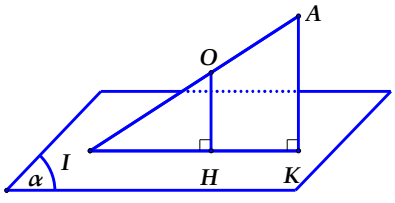
  + Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.

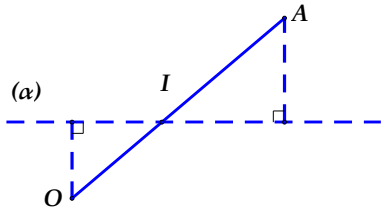
  + Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao điểm của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.
- *Lặng trụ đứng là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.*
- *Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.*
- *Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.*
- *Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.*
- *Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.*

2. KỸ THUẬT TÌM ĐƯỜNG CAO BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ BÀI TOÁN TÌM KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

- *Nếu* $OA//(\alpha)$ *thì:* $d(O,(\alpha))=d(A,(\alpha))$.
- *Nếu* OA *cắt* (α) *tại* I *thì:* $\dfrac{d(O,(\alpha))}{d(A,(\alpha))}=\dfrac{OI}{AI}$ *(định lý Ta-lét)*







B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ DẠNG TOÁN TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN TRỰC TIẾP

1. PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Xác định và tính chiều cao của khối đa diện

- Trong nhiều trường hợp, chiều cao của khối đa diện được cho ngay từ đầu bài (chiều cao cho trực tiếp), nhưng cũng có trường hợp việc xác định phải dựa vào các định lí về quan hệ vuông góc (chiều cao cho gián tiếp) hay dùng nhất là: định lí 3 đường vuông góc, các định lí về điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng,…
- Tính độ dài chiều cao: Sử dụng định lí Pitago, hoặc nhờ hệ thức lượng trong tam giác vuông, tỉ số lượng giác trong tam giác vuông, định lý cosin,..
- Có thể tính chiều cao bằng cách chuyển về bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
  - Nếu $OA//(\alpha)$ thì $d(O,(\alpha))=d(A,(\alpha))$
  - Nếu $OA\cap(\alpha)=\{I\}$ thì $\dfrac{d(O,(\alpha))}{d(A,(\alpha))}=\dfrac{IO}{IA}$ *(định lý Ta-lét)*

Bước 2: Tìm diện tích đáy bằng các công thức

Bước 3: Sử dụng công thức tính thể tích.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: ***(THPTQG 2017-101)*** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải:

Chọn D.

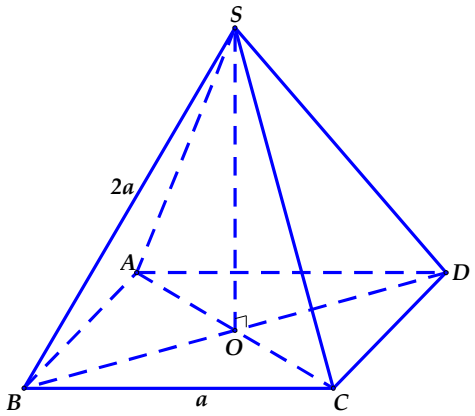
Ta có $SO\perp(ABCD)$ (do $S.ABCD$ là hình chóp đều).

Có $ABCD$ là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow BD=a\sqrt{2}\Rightarrow OB=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra: $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Khi đó: $V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}.a^2=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$.



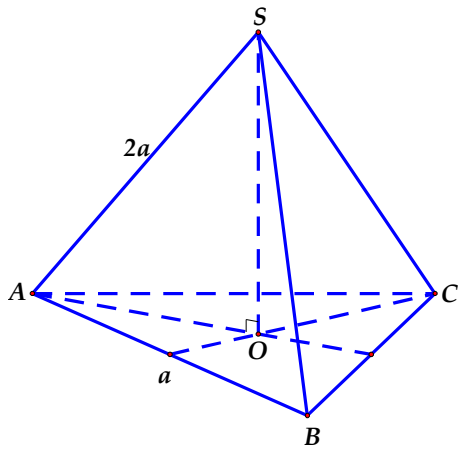
Chú ý: Có thể áp dụng công thức giải nhanh với chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b là: $V=\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}.a^2$ trong bài toán này: $b=2a\Rightarrow V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Bài toán 2: ***(THPTQG 2017-103)*** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải:

Chọn B.



Gọi O là tâm của đáy

$\Rightarrow SO\perp(ABC)$ (do $S.ABC$ là hình chóp đều).

Do ABC là tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow OA=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Khi đó: $V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{33}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

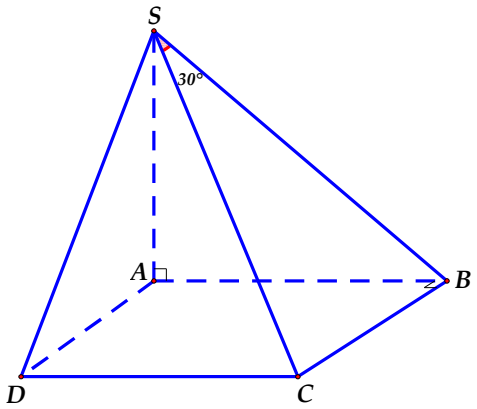
Chú ý: Có thể áp dụng công thức giải nhanh với chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b là: $V=\dfrac{\sqrt{3b^2-a^2}}{12}.a^2$ trong bài toán này: $b=2a\Rightarrow V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Bài toán 3: ***(THPTQG 2017-101)*** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\sqrt{2}a^3$.

Lời giải:

Chọn B.



Ta có: $\left.\begin{matrix}CB\perp AB\\CB\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow CB\perp(SAB)$

Do $CB\perp(SAB)$ suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC lên $(SAB)\Rightarrow\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\widehat{CSB}=30^0$

Ta có: $SB=CB.\cot 30^0=a\sqrt{3}$.

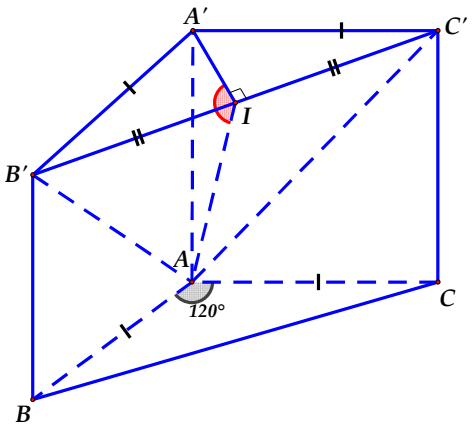
$\Rightarrow SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

Suy ra: $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Bài toán 4: ***(THPTQG 2017-2013)*** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a, \widehat{BAC}=120^0$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải:



Chọn A.

Do $AA'\perp(A'B'C')$ nên kẻ $A'I\perp B'C'(I\in B'C')$

Suy ra: $\left((\widehat{AB'C'}),(A'B'C')\right)=\widehat{A'IA}=60^0$.

Xét $\Delta A'IB'$ có: $A'I=A'B'\cos\widehat{B'A'I}=a.\cos 60^0=\dfrac{a}{2}$.

Suy ra: $AA'=A'I.\tan\widehat{A'IA}=\dfrac{a}{2}.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó:

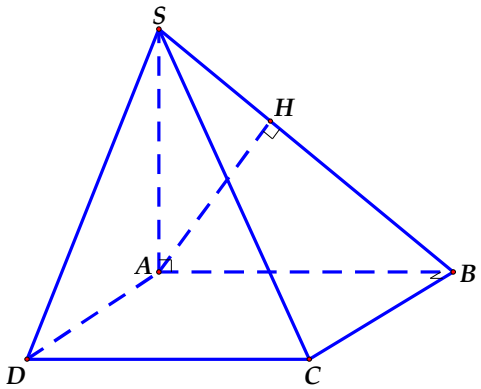
$V=AA'.S_{ABC}=AA'.\dfrac{1}{2}AC.AC.\sin 120^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3}{8}$.

Bài toán 5: ***(THPTQG 2017-103)*** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải:

Chọn D.



Kẻ $AH\perp SB(H\in SB)$ (1)

Có: $\left.\begin{matrix}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow AH\perp(SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC))=AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow SA=a.$

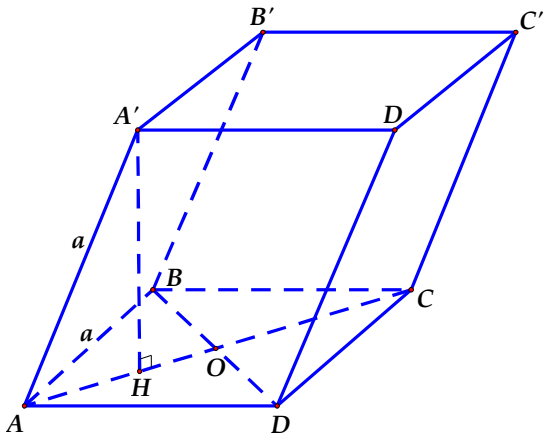
Suy ra: $V=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a.a^2=\dfrac{a^3}{3}$.

Bài toán 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'ABD$ là hình chóp đều, $AB=AA'=a$. Tính theo a thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Chọn D.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABD.

Do $A'ABD$ là hình chóp đều, nên $A'H\perp(ABD)$ hay $A'H\perp(ABCD)$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên

$AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

và $S_{ABCD}=2S_{ABD}=2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

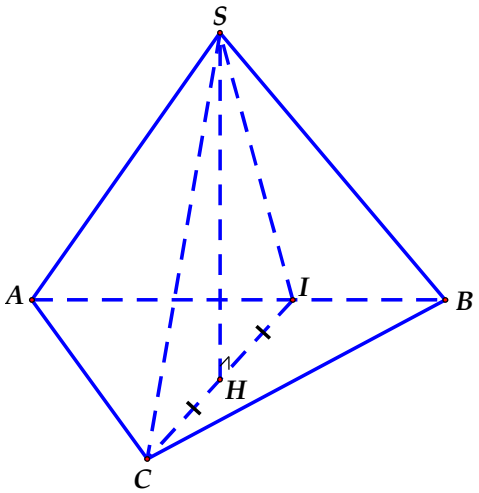
$\Rightarrow V=V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'H.S_{ABCD}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi điểm I thuộc cạnh AB sao cho $IA=2IB$ và hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải:

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của CI

$\Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow(SC,(ABC))=\widehat{SCH}=60^0$.

Ta có: $BI=\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{a}{3}$. Xét tam giác BCI:

$CI^2=BC^2+BI^2-2BC.BI.\cos\widehat{CBI}$

$=a^2+\left(\dfrac{a}{3}\right)^2-2.a.\dfrac{a}{3}.\cos 60^0=\dfrac{7a^2}{9}$.

$\Rightarrow CI=\dfrac{a\sqrt{7}}{3}\Rightarrow CH=\dfrac{CI}{2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

Xét tam giác SHC ta có:

$SH=CH.\tan\widehat{SCH}=\dfrac{a\sqrt{7}}{6}.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Do ABC là tam giác đều cạnh a nên $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

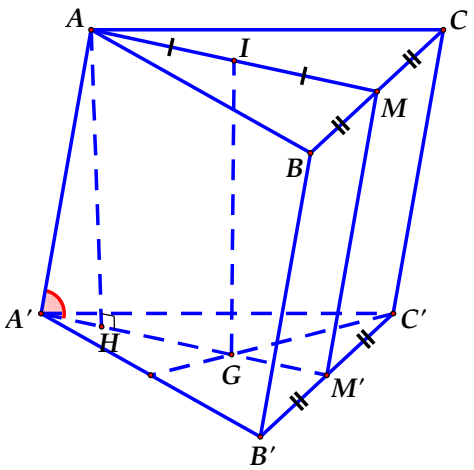
Vậy $V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{24}$.

Bài toán 8: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm của AM. Biết rằng hình chiếu của điểm I lên mặt đáy $\left(A'B'C'\right)$ là trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

Chọn C.



Gọi M' là trung điểm của $B'C'$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'M'$

$\Rightarrow AH//IG\Rightarrow AH\perp\left(A'B'C'\right)$ (do $IG\perp\left(A'B'C'\right)$).

Suy ra $\left(AA',\left(A'B'C'\right)\right)=\widehat{AA'H}=60^0$.

Ta có $AIGH$ là hình chữ nhật, suy ra:

$HG=AI=\dfrac{AM}{2}=\dfrac{A'M'}{2}$

$\Rightarrow A'H+GM'=\dfrac{A'M'}{2}\Leftrightarrow A'H+\dfrac{A'M'}{3}=\dfrac{A'M'}{2}$

$\Leftrightarrow A'H=\dfrac{A'M'}{6}$.

Do $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a, nên $\begin{cases}S_{A'B'C'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\\ A'M'=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{12}\end{cases}$

Xét tam giác $AA'H$, ta có $AH=A'H.\tan AA'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{12}.\tan 60^0=\dfrac{a}{4}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'}=AH.S_{A'B'C'}=\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Bài toán 9: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $\left(A'NM\right)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

A. $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **C.** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{68}$. **D.** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

Lời giải:

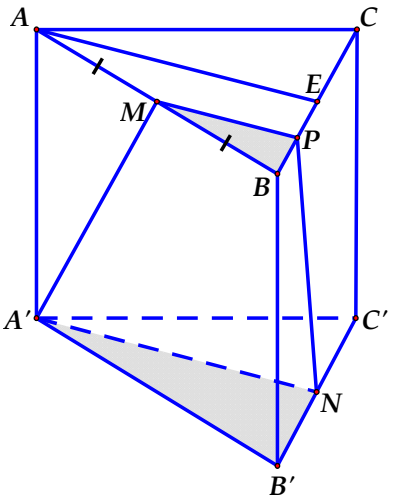
Chọn D.

Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE

Khi đó $MF//AE$ mà $AE//A'N$ nên $MF//A'N$.

Suy ra các điểm A',M,F,N cùng thuộc một mặt phẳng.

Vậy $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P nên P trùng với F.



Công thức tổng quát tính thể tích khối đa diện

"Thể tích khối chóp cụt là $V=\frac{h}{3}\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)$ với h là chiều cao, B,B' lần lượt là diện tích hai đáy"

Vậy thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ có chiều cao $h=BB'=a$

Và diện tích đáy $\begin{cases} B=S_{\Delta MBP}=\frac{S_{\Delta ABC}}{8}=\frac{S}{8} \\ B'=S_{\Delta A'B'N}=\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{2}=\frac{S}{2} \end{cases}$ với $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ là $V=\frac{BB'}{3}\left(\frac{S}{8}+\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S}{8}.\frac{S}{2}}\right)=\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

Bài toán 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=SB=SC=a\sqrt{2}$ và đáy ABC là tam giác cân. Biết $\widehat{BAC}=120^0$ và $BC=2a$ Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

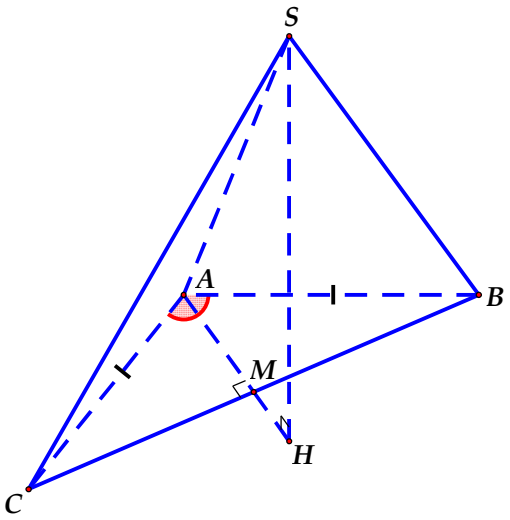
A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải:

Chọn A.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,

suy ra $SH\perp(ABC)$ (do $SA=SB=SC$).



Do $\widehat{BAC}=120^0$ nên ABC là tam giác cân tại A

Suy ra $\widehat{ABC}=30^0$. Gọi M là trung điểm BC

$\Rightarrow BM=a\Rightarrow AM=BM.\tan 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $S_{ABC}=\frac{AM.BC}{2}=\frac{a\sqrt{3}.2a}{3.2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Áp dụng định lý Sin trong tam giác ABC ta có:

$2HA=2R=\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{2a}{\sin 120^0}=\frac{4a}{\sqrt{3}}\Rightarrow HA=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Suy ra: $SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\sqrt{2a^2-\frac{4a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

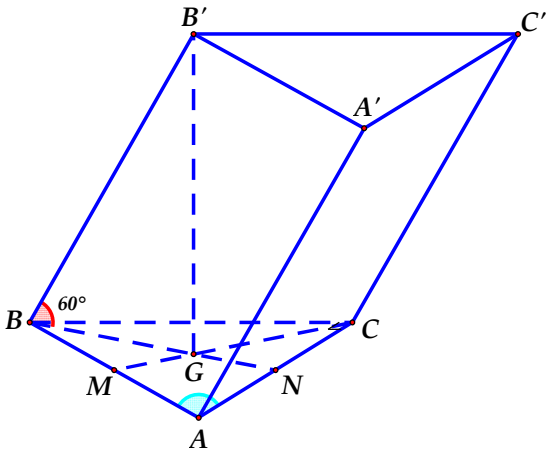
Khi đó $V=V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Bài toán 11: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC}=60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{13a^3}{108}$. **B.** $\frac{7a^3}{106}$. **C.** $\frac{15a^3}{108}$. **D.** $\frac{9a^3}{208}$.

Lời giải:

Chọn D.



Gọi M,N là trung điểm AB,AC và G là trọng tâm của tam giác ABC.

$B'G\perp(ABC)\Rightarrow\left(\widehat{BB';(ABC)}\right)=\widehat{B'BG}=60°$.

$V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.B'G=\frac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét tam giác $B'BG$ vuông tại G, có $\widehat{B'BG}=60°$

$\Rightarrow B'G=BB'.\cos 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}, BG=\frac{a}{2}$

Đặt $AB=2x$. Trong tam giác ABC vuông tại C, có $\widehat{BAC}=60°\Rightarrow AC=x, BC=x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $BN=\frac{2}{3}BG=\frac{3a}{4}$.

Xét tam giác BNC vuông tại C, có:

$$BN^2=NC^2+BC^2\Leftrightarrow\frac{9a^2}{16}=\frac{x^2}{4}+3x^2\Leftrightarrow x=\frac{3a}{2\sqrt{13}}\Rightarrow\begin{cases}AC=\frac{3a}{2\sqrt{13}}\\BC=\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\end{cases}$$

Vậy $V_{A'.ABC}=\frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{9a^3}{208}$.

Bài toán 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $AC=2a\sqrt{3}, BD=2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Biết khoảng cách từ tâm O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

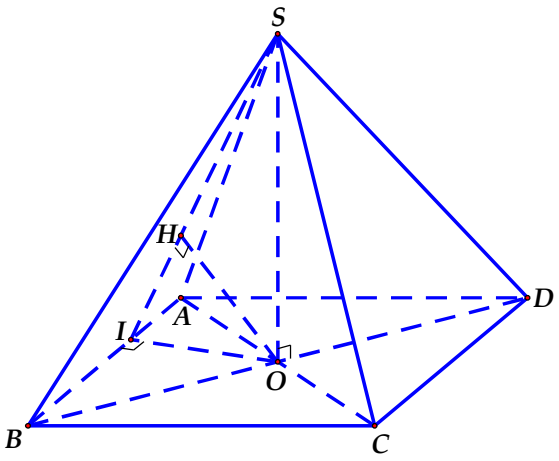
A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V=a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

Chọn D.

+) Gọi $AC\cap BD=\{O\}$. Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD)\end{array}\right\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

+) Kẻ $OI\perp AB(I\in AB)$ và kẻ $OH\perp SI(H\in SI)$.



$\Rightarrow d\left(O,(SAB)\right)=OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên:

$OA=\dfrac{AC}{2}=a\sqrt{3}$ và $OB=\dfrac{BD}{2}=a$.

Xét tam giác vuông AOB:

$OI=\dfrac{OA.OB}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOI:

$\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{16}{3a^2}-\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{4}{a^2}\Rightarrow SO=\dfrac{a}{2}$

$ABCD$ là hình thoi nên: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\dfrac{1}{2}.2a\sqrt{3}.2a=2\sqrt{3}a^2$

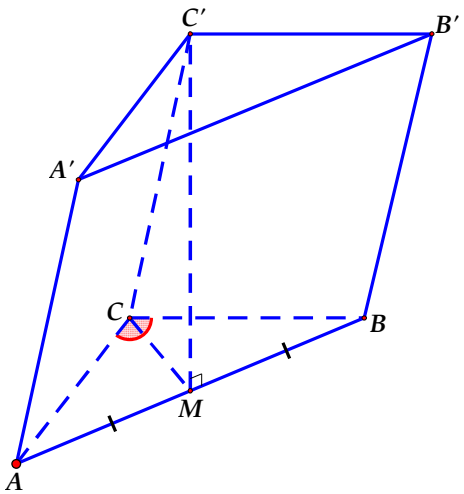
$\Rightarrow V=V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.2\sqrt{3}a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 13: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{ACB}=135^0$, $CC'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$ và $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của đoạn AB. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải:

Chọn C.



Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CA.CB.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a.\sin 135^0=\dfrac{a^2}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta có:

$AB^2=AC^2+BC^2=2AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$=2a^2+a^2-2a\sqrt{2}\cos 135^0=5a^2$

Khi đó: $CM^2=\dfrac{CA^2+CB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$.

Suy ra: $C'M=\sqrt{C'C^2-CM^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

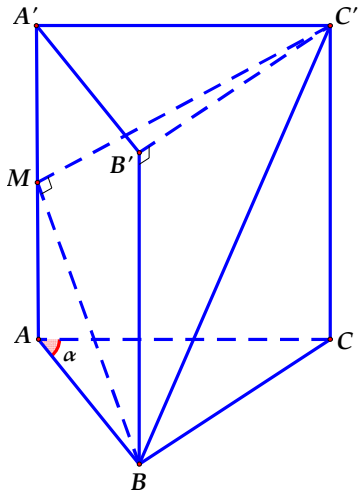
Suy ra thể tích $V=C'M.S_{ABC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Bài toán 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi M là trung điểm của AA', tam giác $C'MB$ vuông. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $a^3 \sin\alpha.\sqrt{\cos\alpha}$ **B.** $a^3\cos\alpha.\sqrt{\sin\alpha}$

C. $a^3\cot\alpha.\sqrt{\sin\alpha}$ **D.** $a^3 \tan\alpha.\sqrt{\cos\alpha}$

Lời giải:



Chọn A.

Diện tích đáy của khối lăng trụ là: $S = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$

Đặt $A'A = x$. Suy ra: $MB = MC' = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}$.

Nên $\Delta BMC'$ vuông cân tại $M \Rightarrow BC' = MB\sqrt{2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 2a^2}$ (1)

Mặt khác: $BC' = \sqrt{B'C'^2 + B'B^2} = \sqrt{BC^2 + AA'^2} = \sqrt{BC^2 + x^2}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow BC^2 + x^2 = \frac{x^2}{2} + 2a^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha + x^2 = \frac{x^2}{2} + 2a^2$

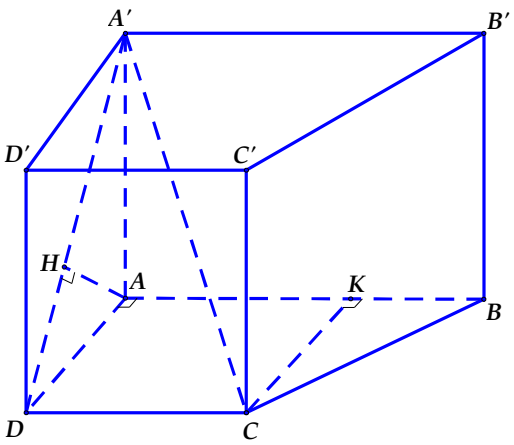
$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a^2\cos\alpha + x^2 = \frac{x^2}{2} + 2a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2\cos\alpha \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{\cos\alpha}$

Thể tích của khối lăng trụ là $V = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha.2a\sqrt{\cos\alpha} = a^3 \sin\alpha.\sqrt{\cos\alpha}$.

Bài toán 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ với $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 3a, AD = a, BC = a\sqrt{2}$. . Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'DC)$ bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Khi đó thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{5a^3}{3}$. **B.** $V = 5a^3$. **C.** $V = 10a^3$. **D.** $V = \frac{10a^3}{3}$.

Lời giải:



Chọn B.

Ta có: $AB//CD \Rightarrow d\left(B,\left(A'DC\right)\right) = d\left(A,\left(A'DC\right)\right)$.

Kẻ $AH \perp A'D \Rightarrow AH \perp \left(A'DC\right)$

$\Rightarrow d\left(A,\left(A'DC\right)\right) = AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác $A'AD$, ta có:

$\frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{5}{4a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow A'A = 2a.$

Kẻ $CK \perp AB \Rightarrow ADCK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CK = AD = a.$ Suy ra $KB = \sqrt{CB^2 - CK^2} = a$

$\Rightarrow DC = AK = AB - KB = 3a - a = 2a.$

Khi đó: $V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'A.S_{ABCD} = A'A.\dfrac{(AB+DC).AD}{2} = 2a.\dfrac{(3a+2a).a}{2} = 5a^3.$

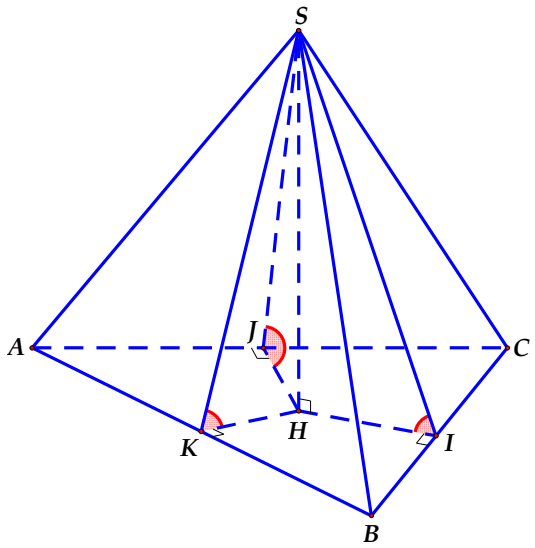
Bài toán 16: Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB = 5(cm)$, $BC = 6(cm)$, $AC = 7(cm)$. Các mặt bên tạo với đáy 1 góc $60°$. Thể tích của khối chóp bằng:

A. $\dfrac{105\sqrt{3}}{2}(cm^3)$. **B.** $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(cm^3)$. **C.** $24\sqrt{3}(cm^3)$. **D.** $8\sqrt{3}(cm^3)$.

(Trích đề thi thử THPT Triệu Thị Trinh lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) và I, J, K là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh BC, CA, AB

Ta có $SH \perp (ABC)$; $HI \perp BC$, $HJ \perp CA$, $HK \perp AB$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SIH}$; $\left(\widehat{(SCA),(ABC)}\right) = \widehat{SJH}$, $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SKH}$.

Mà các mặt bên tạo với đáy 1 góc $60°$ nên $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = \widehat{SKH} = 60°$.

$\Rightarrow \Delta SHI = \Delta SHJ = \Delta SHK$ (cạnh góc vuông– góc nhọn)

$\Rightarrow HI = HJ = HK \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Mặt khác $S_{ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)}$, với $p = \dfrac{AB+BC+CA}{2} = 9 \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{9.2.3.4} = 6\sqrt{6}$.

Mà $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow HI = HJ = HK = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

Tam giác SHI vuông tại H có $SH = HI.\tan 60° = 2\sqrt{2}$. Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = 8\sqrt{3}(cm^3)$.

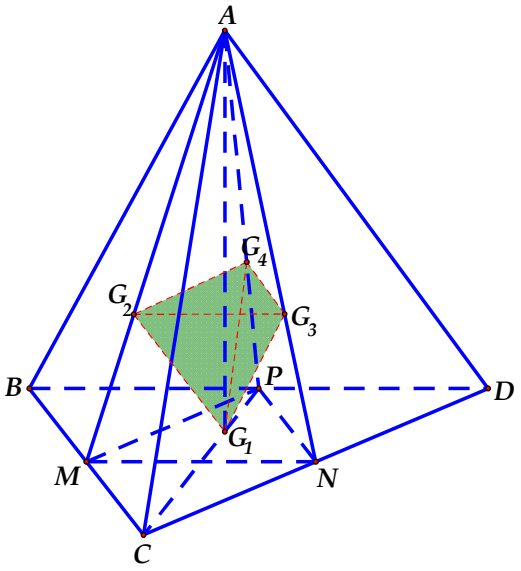
Bài toán 17: Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Tính thể tích V của khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. **C.** $V=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

(Trích đề thi thử THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Tứ diện đều $ABCD\Rightarrow AG_1\perp(BCD)$.

$G_2G_3//MN$; $G_2G_4//MP$ suy ra: $(G_2G_3G_4)//(BCD)$

$\Rightarrow\dfrac{d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right)}{G_1A}=\dfrac{MG_2}{MA}=\dfrac{1}{3}$.

$CG_1=\dfrac{2}{3}CP=\dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow G_1A=\sqrt{AC^2-G_1C^2}=\sqrt{6}$.

$\Rightarrow d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lại có $\dfrac{G_2G_3}{MN}=\dfrac{AG_2}{AM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow G_2G_3=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{1}{3}BD=1$.

Tương tự $G_3G_4=1$, $G_4G_2=1$

$\Rightarrow\Delta G_2G_3G_3$ là tam giác đều có cạnh bằng 1

$\Rightarrow S_{G_2G_3G_4}=\dfrac{1}{2}G_2G_3.G_3G_4\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4}=\dfrac{1}{3}d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right).S_{G_2G_3G_4}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

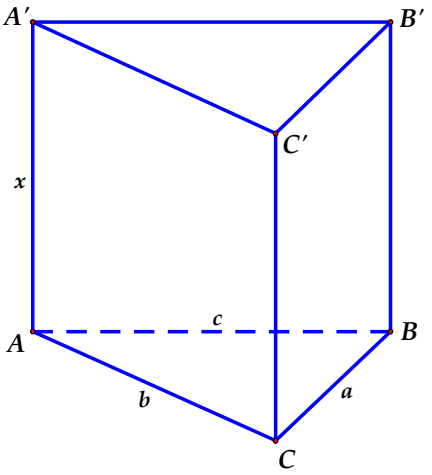
Bài toán 18: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 4, diện tích ba mặt bên lần lượt là 9, 18 và 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\sqrt[4]{11951}$. **B.** $\dfrac{\sqrt[4]{11951}}{2}$. **C.** $\sqrt{11951}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{11951}}{2}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ lần 2 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Đặt $AA'=x$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Suy ra: $\begin{cases}xc=18\\xb=9\\xa=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2b\\a=\dfrac{10}{9}b\end{cases}$.

Ta có $S_{ABC}=4\Leftrightarrow\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=4$

với $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{37}{18}b$

$\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{37}{18}b\left(\dfrac{37}{18}b-\dfrac{10}{9}b\right)\left(\dfrac{37}{18}b-b\right)\left(\dfrac{37}{18}b-2b\right)}=4$

$\Leftrightarrow b=\dfrac{1296}{\sqrt{11951}}$. Suy ra $x=\dfrac{\sqrt{11951}}{8}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V=AA'.S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{11951}}{8}.4=\dfrac{\sqrt{11951}}{2}$.

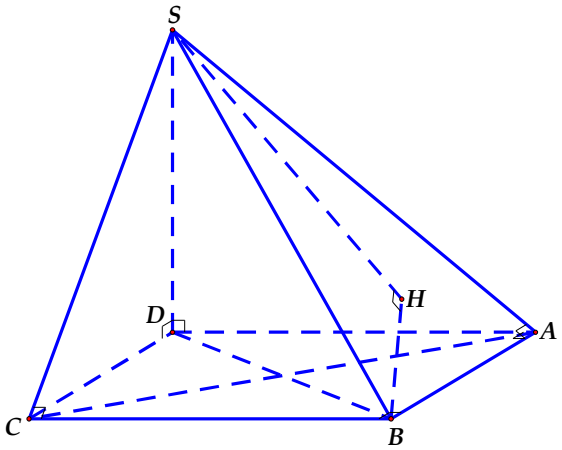
Bài toán 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB>2a$ và $\widehat{ABC}=\widehat{BAS}=\widehat{BCS}=90°$. Sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn C.



- Dựng $SD\perp(ABC)$ tại D.

Ta có: $\begin{cases}BA\perp SA\\BA\perp SD\end{cases}\Rightarrow BA\perp(SAD)\Rightarrow BA\perp AD$.

Và: $\begin{cases}BC\perp SD\\BC\perp SC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SCD)\Rightarrow BC\perp CD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DA=BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$, $DC=AB=a$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) $\Rightarrow \widehat{BSH}$ là góc giữa SB và mặt phẳng (SAC)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{11}=\sin\widehat{BSH}=\frac{BH}{SB}=\frac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB}=\frac{d\left(D;(SAC)\right)}{SB}\Rightarrow\frac{1}{d^2\left(D;(SAC)\right)}=\frac{11}{SB^2}\ (1).$$

- Lại có : $$\frac{1}{d^2\left(D;(SAC)\right)}=\frac{1}{DS^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{SB^2-BD^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{SB^2-3a^2}+\frac{3}{2a^2}\ (2).$$

(do DS,DA,DC đôi một vuông góc với nhau)

- Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{11}{SB^2}=\dfrac{1}{SB^2-3a^2}+\dfrac{3}{2a^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}SB^2=6a^2\\SB^2=\dfrac{11}{3}a^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}SB=a\sqrt{6}\\SB=a\sqrt{\dfrac{11}{3}}\end{array}\right.$

Theo giả thiết $SB>2a\Rightarrow SB=a\sqrt{6}\Rightarrow SD=a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SD.\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH GIÁN TIẾP BẰNG CÁCH PHÂN CHIA LẮP GHÉP CÁC KHỐI CHÓP

Trong nhiều trường hợp, việc tính trực tiếp thể tích khối đa diện bằng phương pháp trực tiếp gặp khó khăn vì hai lí do: khó xác định và tính được chiều cao hoặc khó tính được diện tích đáy. Khi đó, ta có thể làm theo các phương pháp tính thể tích gián tiếp.

1. PHƯƠNG PHÁP

✪ **Tính thể tích bằng cách chia nhỏ khối đa diện**

- Ta chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện nhỏ mà có thể tính thể tích của chúng.
- Sau đó, ta cộng các kết quả lại, ta sẽ có kết quả cần tìm.

✪ **Tính thể tích bằng cách ghép thêm khối đa diện khác**

Ta có thể ghép thêm vào khối đa diện một khối đa diện khác, sao cho khối đa diện thêm vào và khối đa diện mới có thể dễ dàng tính được thể tích.

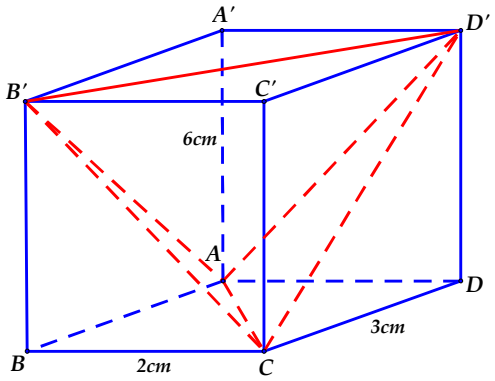
2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm,\ 3cm,\ 6cm$. Thể tích của khối tứ diện $A.CB'D'$ bằng.

A. $8cm^3$. **B.** $12cm^3$. **C.** $6cm^3$. **D.** $4cm^3$.

Lời giải:

Chọn B.



Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$

$\Leftrightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'} \Leftrightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

Mà $V_{B'.BAC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.BB' = \frac{1}{6}S_{ABCD}.BB' = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

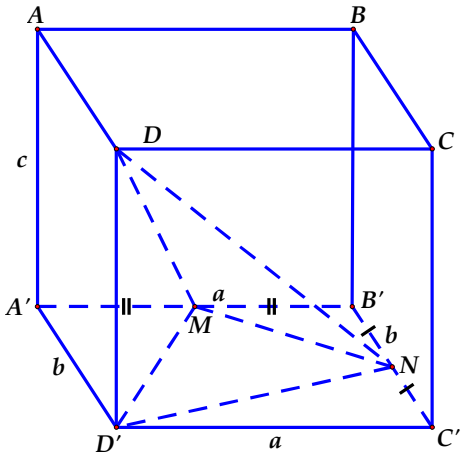
$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}.2.3.6 = 12cm^3.$

Bài toán 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a,\ BC = b,\ AA' = c$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$. Tính tỉ số giữa thể tích khối chóp $D'.DMN$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải:

Chọn C.



Thể tích khối chóp $D'.DMN$ chính là thể tích khối chóp $D.D'MN$

Ta có $S_{D'MN}=S_{A'B'C'D'}-\left(S_{D'A'M}+S_{D'C'N}+S_{B'MN}\right)$

$$=ab-\left(\frac{ab}{4}+\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)=\frac{3ab}{8}$$

Thể tích khối chóp $D'.DMN$ là:

$V_1=\frac{1}{3}S_{\Delta D'MN}.DD'=\frac{1}{3}.\frac{3ab}{8}.c=\frac{abc}{8}$

Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=abc$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{1}{8}$.

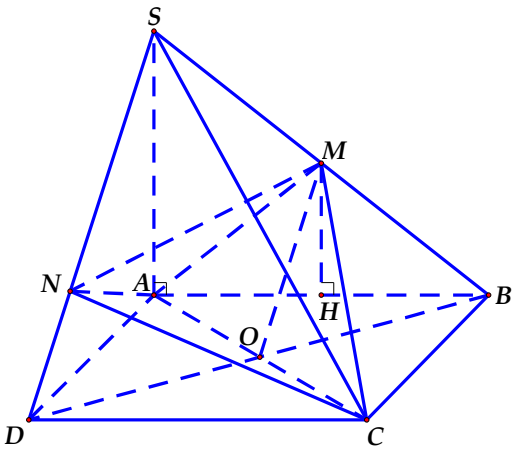
Bài toán 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\frac{1}{12}a^3$ **B.** $V=\frac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\frac{1}{8}a^3$. **D.** $V=\frac{1}{36}a^3$.

(Trích đề thi thử Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ lần 1--2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $OM//SD$ nên $SD//(AMC)$.

Do đó $d\left(N;(AMC)\right)=d\left(D;(AMC)\right)$

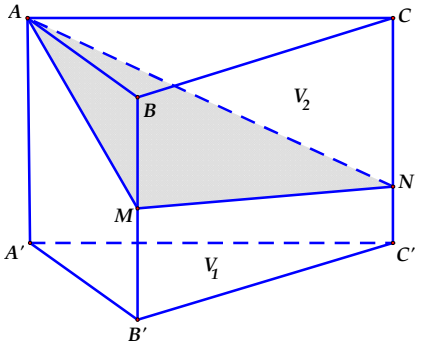
Vì $\left.\begin{matrix}BD\cap(AMC)=O\\BO=DO\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\left(D;(AMC)\right)=d\left(B;(AMC)\right)$

$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{N.MAC}=V_{D.MAC}=V_{B.MAC}=V_{M.ABC}$.

Kẻ $MH//SA$ $(H\in AB)$ $\Rightarrow MH\perp(ABC)$

$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{M.ABC}=\frac{1}{3}MH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}SA.\frac{S_{ABCD}}{2}=\frac{1}{12}a^3$.

Bài toán 4: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB', N là điểm trên cạnh CC' sao cho $CN=3NC'$. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

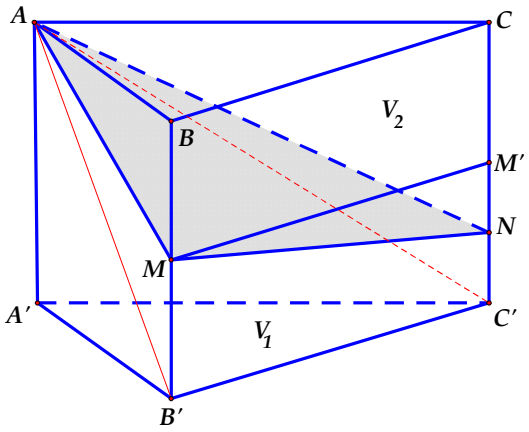


A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Gọi M' là trung điểm của CC', ta có:

$S_{BCM'M}=\frac{1}{2}S_{BCC'B'}$, $S_{M'MN}=\frac{1}{4}S_{BCM'M}=\frac{1}{8}S_{BCC'B'}\Rightarrow S_{BMNC}=\frac{5}{8}S_{BCC'B'}$

$\Rightarrow \frac{V_2}{V_{A.BCB'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCB'C'\right)\right).S_{BCNM}}{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCB'C'\right)\right).S_{BCB'C'}}=\frac{5}{8}$.

$\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A;\left(A'B'C'\right)\right).S_{A'B'C'}}{d\left(A;\left(A'B'C'\right)\right).S_{A'B'C'}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{V_{A.BCC'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{V_2}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{5}{8}.\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$.

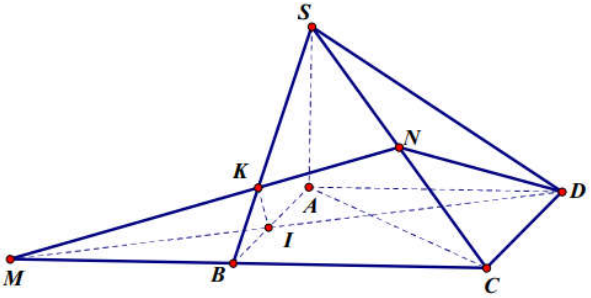
Do $V_{ABC.A'B'C'}=V_1+V_2\Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Bài toán 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60°$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{12}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$.

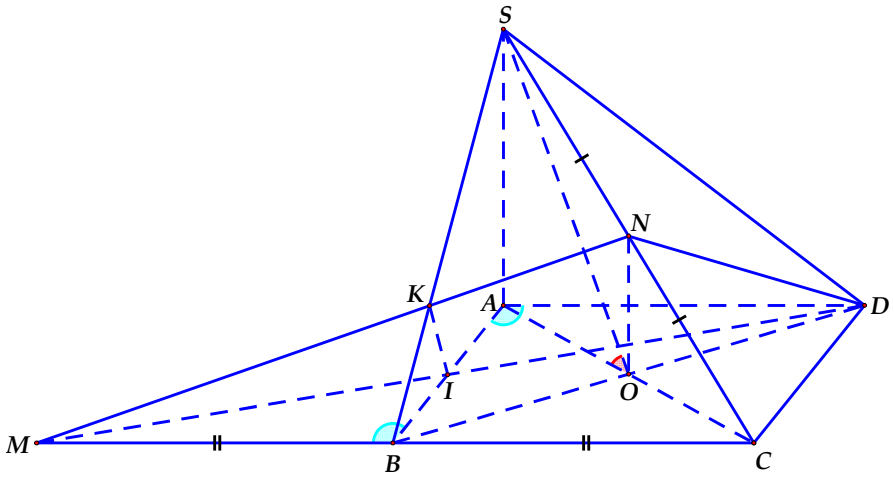
C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018)



Lời giải:

Chọn D.



Goi $O = AC \cap BD$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45° \Leftrightarrow \widehat{SOA} = 45°$.

ΔBAD đều $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = AO.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V = \dfrac{1}{3}SA.2S_{\Delta ABD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Ta có: $\dfrac{BI}{CD} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BI = AI$; lại có: $\widehat{IAD} = \widehat{IBM} = 60^0$; $\widehat{MIB} = \widehat{AID}$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\Delta IBM = \Delta IAD$

Nên: $V_{N.MCD} = V_{N.ABCD}$ bằng: $V' = \dfrac{1}{2}V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

K chính là trọng tâm của $\Delta SMC \Rightarrow BK = \dfrac{1}{3}SB$

Thể tích khối chóp $KMIB$ bằng: $V'' = \dfrac{1}{3}.d\left(K,\left(MBI\right)\right).S_{\Delta MBI} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}d\left(S,\left(MBI\right)\right).S_{\Delta MBI} = \dfrac{1}{9}SA.S_{\Delta MBI}$.

Ta có: $S_{\Delta MBI} = S_{\Delta IAD} = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{a}{2}.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V'' = \dfrac{1}{9}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{96}$

Khi đó: $V_2 = V' - V'' = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16} - \dfrac{a^3\sqrt{2}}{96} = \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{96}$; $V_1 = V - V_2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8} - \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{96} = \dfrac{7a^3\sqrt{2}}{96}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

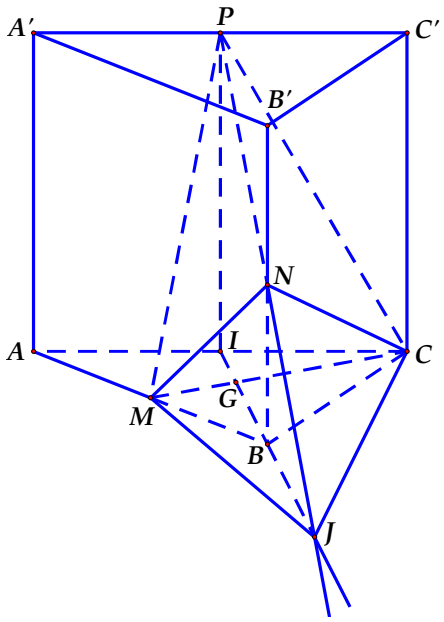
Bài toán 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Thể tích của khối tứ diện $CMNP$ bằng:

A. $\dfrac{5}{24}V$. **B.** $\dfrac{1}{4}V$. **C.** $\dfrac{7}{24}V$. **D.** $\dfrac{1}{3}V$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.



Gọi I là trung điểm AC và $NP \cap BI = J$.

Lại có $BN // = \frac{1}{2} IP$ suy ra BN là đường trung bình tam giác PIJ. Suy ra B là trung điểm IJ.

Suy ra $CM \cap BI = G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\frac{S_{JCM}}{S_{BCM}} = \frac{JG}{BG}$ mà $JG = BJ + BG = BI + \frac{2}{3}BI = \frac{5}{3}BI \Rightarrow \frac{S_{JCM}}{S_{BCM}} = \frac{\frac{5}{3}BI}{\frac{2}{3}BI} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow S_{JCM} = \frac{5}{2} S_{BCM} \Rightarrow S_{JCM} = \frac{5}{4} S_{ABC}$ (vì $S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2} BC.BM.\sin\hat{B}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC.BA.\sin\hat{B} = 2S_{\Delta BCM}$)

Ta có $V_{N.JCM} = \frac{1}{3} NB.S_{\Delta JCM} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} PI.\frac{5}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{5}{24} PI.S_{\Delta ABC} = \frac{5}{24} V$.

$V_{P.JCM} = \frac{1}{3} PI.S_{\Delta JCM} = \frac{1}{3} PI.\frac{5}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{5}{12} PI.S_{\Delta ABC} = \frac{5}{12} V$.

Vậy $V_{N.CMP} = V_{P.JCM} - V_{N.JCM} = \frac{5}{12} V - \frac{5}{24} V = \frac{5}{24} V$.

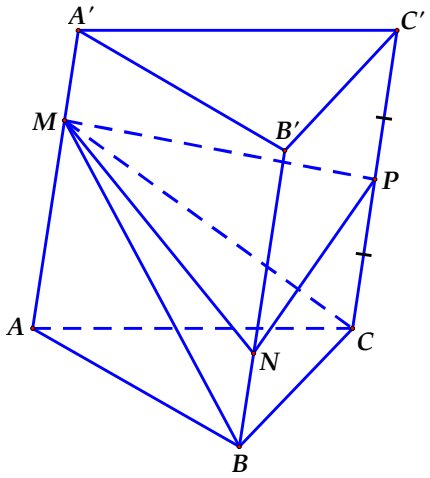
Bài toán 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA'$, $NB' = 2NB$, $PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)

Lời giải:

Chọn C.



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(M,\left(ABC\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d\left(A',\left(ABC\right)\right) = \frac{2}{9}V$.

$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{1}{9}V$.

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN} \Rightarrow V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5}V_{M.BCPN}$

Ta có: $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$

$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9}V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9}V + \frac{7}{5}V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18}V$.

Như vậy $V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{5}{18}V = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

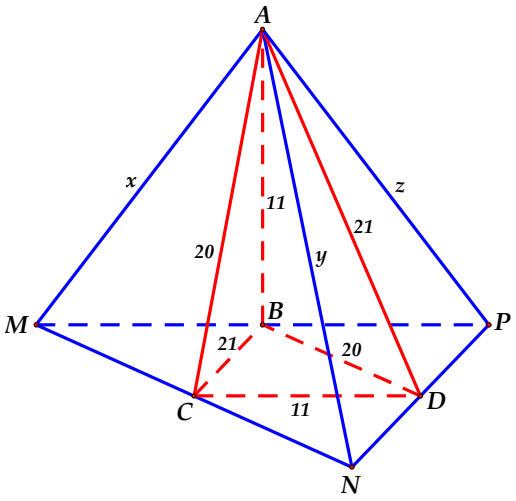
Bài toán 8: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 11m$, $BC = AD = 20m$, $BD = AC = 21m$. Tính thể tích khối chóp tứ diện $ABCD$.

A. $360m^3$. **B.** $720m^3$. **C.** $770m^3$. **D.** $340m^3$.

Lời giải:

Chọn A.

Dựng tam giác MNP sao cho C, B, D lần lượt là trung điểm các cạnh MN, MP, NP. Do BD là đường trung bình tam giác MNP nên $BD = \frac{1}{2}MN$ hay $AC = \frac{1}{2}MN$.



Tam giác AMN vuông tại A (do có trung tuyến bằng một nửa cạnh tương ứng), hay $AM \perp AN$. Tượng tự $AP \perp AN; AM \perp AP$.

Ta có $S_{MBC} = \frac{1}{4}S_{MNP}, S_{NCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}, S_{PBD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$.

Suy ra $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$. Từ đó, $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP}$.

Đặt $x = AM, y = AN, z = AP$.

Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=4.20^2 \\ y^2+z^2=4.21^2 \\ x^2+z^2=4.11^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=160 \\ y^2=1440 \\ z^2=324 \end{cases} \Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{6}xyz=1440 \Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{AMNP}=360m^3.$

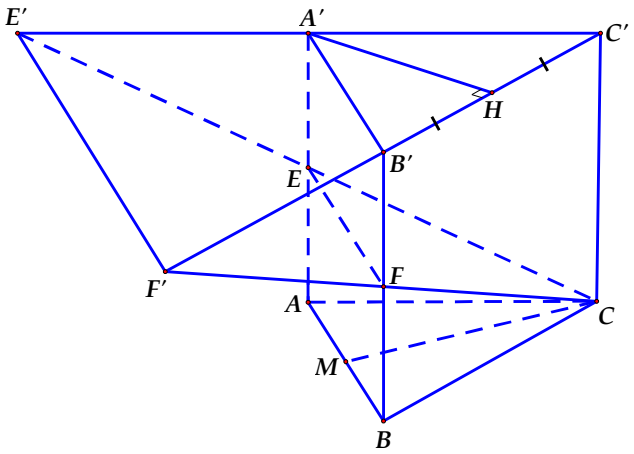
(AM, AN, AP đôi một vuông góc nên $V_{AMNP}=\frac{1}{6}AM.AN.AP$)

Bài toán 9: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AA' và BB'; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E', đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F'. Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải:

Chọn A.



Thể tích khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.AA'=\frac{\sqrt{3}}{4}.1=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow CM \perp (ABB'A')$ và $CM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, thể tích khối chóp $C.ABFE$ là $V_{C.ABFE}=\frac{1}{3}S_{ABFE}.CM=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Thể tích khối đa diện $A'B'C'EFC$ là $V_{A'B'C'EFC}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.ABFE}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Gọi H là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'H \perp B'C' \Rightarrow A'H \perp (BCB'C')$; $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Do A' là trung điểm $C'E'$ nên $d(E',(BCC'B'))=2d(A',(BCC'B'))=2.AH=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Ta có: $S_{CC'F'}=S_{F'B'F}+S_{FB'C'C}=S_{FBC}+S_{FB'C'C}=S_{BCC'B'}=1$.

Thể tích khối chóp $E'.CC'F'$ là $V_{E'.CC'F'}=\frac{1}{3}S_{CC'F'}.d(E',(BCC'B'))=\frac{1}{3}.1.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng $V_{EFA'B'E'F'}=V_{E'.CC'F'}-V_{A'B'C'EFC}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

III. PHƯƠNG PHÁP TỶ SỐ THỂ TÍCH

1. PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp này được sử dụng với bài toán tìm thể tích của khối đa diện mà ta biết được tỉ số thể tích của nó với khối đa diên khác (đa diện này biết trước hoặc tính được thể tích một cách dễ dàng). Phương pháp này sử dụng công thức tỉ số thể tích của khối chóp tam giác được trình bày sau đây.

Công thức tỉ số thể tích đối với hình chóp tam giác:

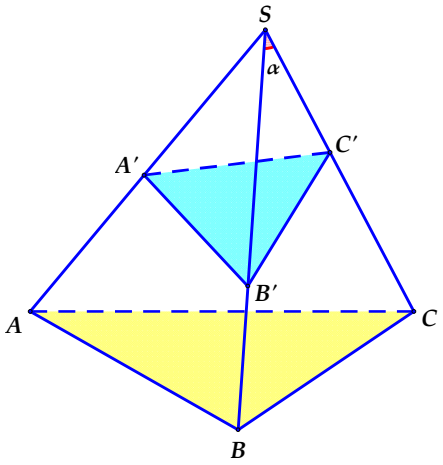
Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có tỉ số thể tích: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

Chú ý: + Nếu $A'\equiv A$ ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ + Nếu $A\equiv A', B\equiv B'$ thì: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SC'}{SC}$

+ Nếu $A\equiv A', B\equiv B', C\equiv C'$ thì $V_{S.A'B'C'}=V_{S.ABC}$

Chứng minh công thức:

Gọi $\alpha=\widehat{B'SC'}=\widehat{BSC}$



Ta có: $AA'\cap(SBC)=S\Rightarrow\dfrac{d\left(A',(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)}=\dfrac{SA'}{SA}$

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{V_{A'.SB'C}}{V_{A.SBC}}=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(A',(SB'C')\right).S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC}}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(A',(SBC)\right).\frac{1}{2}.SB'.SC'.\sin\alpha}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).\frac{1}{2}.SB.SC.\sin\alpha}$

$=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

Trong các trường hợp $A\equiv A', B\equiv B', C\equiv C'$ thì suy ra $SA=SA'$; $SB=SB'$; $SC=SC'$, suy ra điều phải chứng minh.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của AB, AD. Mặt phẳng $(CB'D')$ chia khối tứ diện thành hai phần. Tính theo V thể tích khối chóp $C.B'D'DB$

A. $\dfrac{3V}{2}$. **B.** $\dfrac{V}{4}$. **C.** $\dfrac{V}{2}$. **D.** $\dfrac{3V}{4}$.

Lời giải:

Chọn A.

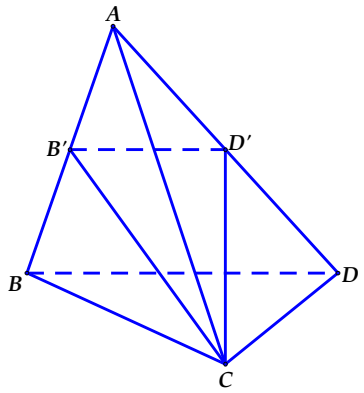
Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{A.B'CD'}}{V_{A.BCD}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC}{AC}.\frac{AD'}{AD}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow V_{A.B'CD'}=\frac{V}{4}$$

$$V_{A.BCD}=V_{A.B'CD'}+V_{C.BDD'B'}$$

$$\Rightarrow V_{C.BDD'B'}=V-\frac{V}{4}=\frac{3V}{4}.$$



Bài toán 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, M là trung điểm CD, I là giao điểm của AC và BM. Tính tỷ số thể tích (theo thứ tự) các khối chóp $S.ICM$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Lời giải:

Chọn D.

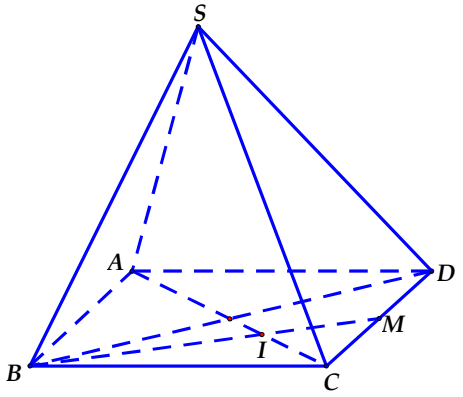
Ta có $V_{S.ICM}=\frac{1}{3}d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{ICM}$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{ABCD}$$

Ta có $V_{BCM}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

Mà I là trọng tâm của $\Delta BCD \Rightarrow \frac{IM}{BM}=\frac{S_{\Delta ICM}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow S_{ICM}=\frac{1}{3}S_{BCM}\Leftrightarrow S_{ICM}=\frac{1}{12}S_{ABCD}\Rightarrow\frac{V_{S.ICM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{12}$$



Bài toán 3: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V, thể tích của khối đa diện có đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng V'. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{3}{4}$.

(Trích đề thi thử THPT Sơn Tây-Hà Nội-L1/2017-2018)

Lời giải:

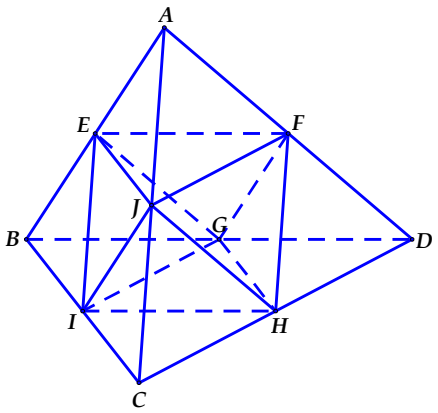
Chọn A.

Ta có: $V_{ABCD}=V_{AEJF}+V_{BIEG}+V_{DHGF}+V_{CIJH}+V'$

Ta có $\frac{V_{AEJF}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{AEJF}}{V}=\frac{AE}{AB}.\frac{AJ}{AC}.\frac{AF}{AD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$

Tương tự: $\frac{V_{BIEG}}{V}=\frac{1}{8}$, $\frac{V_{CIJH}}{V}=\frac{1}{8}$, $\frac{V_{DHGF}}{V}=\frac{1}{8}$.

Vậy: $\frac{V'}{V}=1-4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.



Bài toán 4: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Tỉ số thể tích của hai phần khối chóp (phần trên chứa điểm S chia phần dưới) bị phân chia bởi mặt phẳng đó là.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

Chọn D.

$\left.\begin{array}{l} AB \subset (MAB) \\ \text{Vì } CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{array}\right\} \Rightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ song song với AB, CD.

Kẻ $MN // CD$ $(N \in CD)$, suy ra hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$

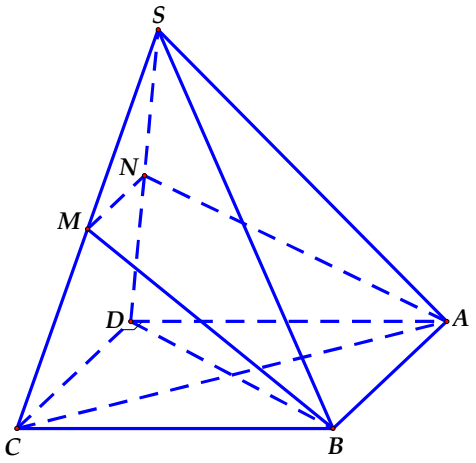
Mà $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABM} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$

Và $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} . \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$

Suy ra $V_{S.ABMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} + \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}$

Từ đó suy ra $V_{ABMNDC} = \frac{5}{8} V_{S.ABCD}$ nên $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNDC}} = \frac{3}{5}$.



Bài toán 5: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ và có M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh SC sao cho $NS = 2NC$, P là điểm trên cạnh SA sao cho $PA = 2PS$. Kí hiệu $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích của khối tứ diện $BMNP$ và $SABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{9}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

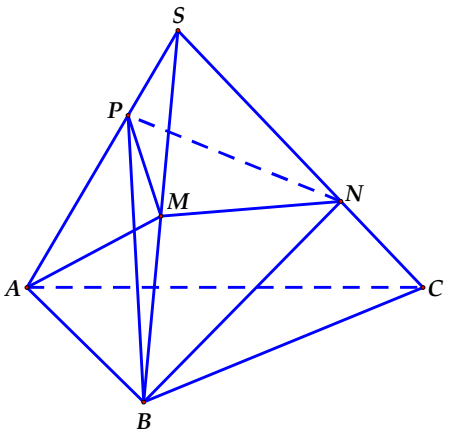
Lời giải:

Chọn A.

$\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}} = \frac{\frac{1}{3}.d\left(N,(SAB)\right).S_{BMP}}{\frac{1}{3}.d\left(C,(SAB)\right).S_{SAB}}$;

Ta có: $CS \cap (SAB) = S \Rightarrow \frac{d\left(N,(SAB)\right)}{d\left(C,(SAB)\right)} = \frac{NS}{CS} = \frac{2}{3}$

$S_{BMP} = \frac{1}{2} S_{BPS} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.S_{SAB} = \frac{1}{6} S_{SAB}$. Suy ra $\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.



Bài toán 6: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ và một điểm M nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua M song song với SA cắt mặt phẳng (BCS) tại A'. Tỉ số thể tích giữa khối chóp $M.BCS$ và $S.ABC$ là.

A. $\frac{MA'}{SM}$. **B.** $\frac{MA'}{SA'}$. **C.** $\frac{MA'}{SA}$. **D.** $\frac{SM}{SA'}$.

Lời giải:

Chọn C.

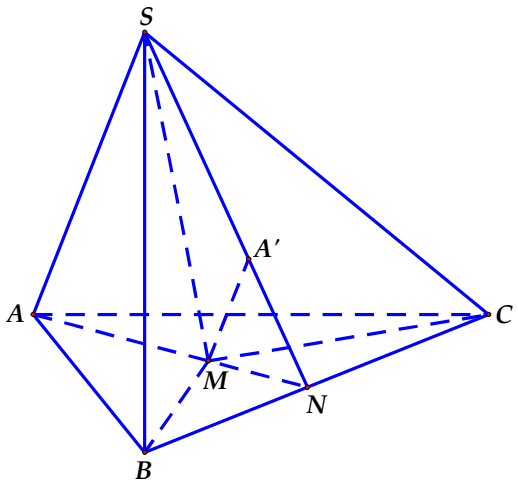
Trong (SAN) M kẻ MA' song song với SA; với $A' \in SN$

Có: $MA' // SA \Rightarrow \frac{MA'}{SA} = \frac{MN}{NA}$

Ta có:

$$\begin{cases} V_{M.BCS} = V_{S.MBC} = \frac{1}{3} d\left(S;(ABC)\right) S_{\Delta MBC} \\ V_{S.ABC} = \frac{1}{3} d\left(S;(ABC)\right).S_{\Delta ABC} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$$

Mà $\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{d(M;BC)}{d(A;BC)} = \frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA} \Rightarrow \frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA}$.



Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua AB cắt SC và SD lần lượt tại M và N sao cho $\frac{SM}{SC} = x$. Tìm x biết $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{11}{200}$.

A. $0,25$. **B.** $0,2$. **C.** $0,3$. **D.** $0,1$.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $CD // AB \Rightarrow CD // (ABMN) \Rightarrow CD // MN$

Nên $\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = x$

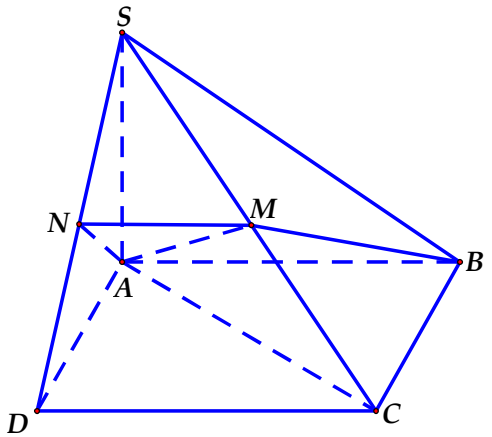
Ta có $V_{S.ACB} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V$

Và $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = x^2, \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = x$

Do $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABC}} = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x^2 + x}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2 + x}{2} = \frac{11}{200}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 100x^2 + 100x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,1$



Bài toán 8: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng (P) qua BC và vuông góc với SA. (P) cắt SA tại D. Tính tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $S.BDC$ và $S.ABC$.

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{5}{11}$.

Lời giải:

Chọn B.

Gọi M là trung điểm của BC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên hình chiếu của S lên (ABC) trùng với trọng tâm H của ΔABC

Suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC$ và $SM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Từ M kẻ MD vuông góc với SA tại D nên $SA \perp (DBC) \equiv (P)$

Lại có $(SA;(ABC)) = (SA;AH) = \widehat{SAH} = 60°$

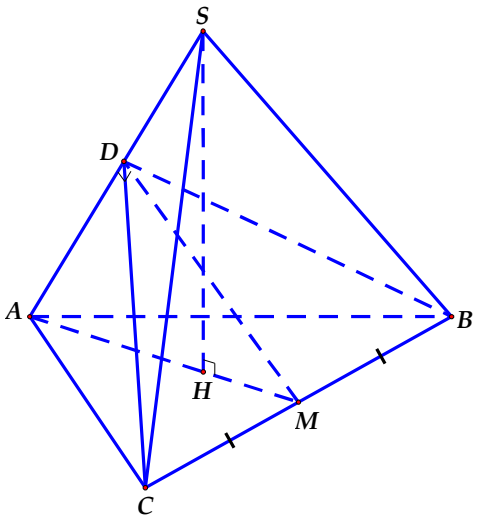
Do đó $\cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} \Leftrightarrow SA = \frac{AH}{\cos 60°} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Trong tam giác vuông ADM có:

$DA = AM.\cos\widehat{DAM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow SD = SA - DA = \frac{2\sqrt{3}a}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}a}{12}$

Vậy $\frac{V_{S.BDC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{SD}{SA} = \frac{\frac{5\sqrt{3}a}{12}}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} = \frac{5}{8}$.



Bài toán 9: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và AA'. Tính tỉ số thể tích k của khối chóp $A.MNP$ và khối hộp đã cho.

A. $k = \frac{1}{12}$. **B.** $k = \frac{1}{48}$. **C.** $k = \frac{1}{8}$. **D.** $k = \frac{1}{24}$.

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)

Lời giải:

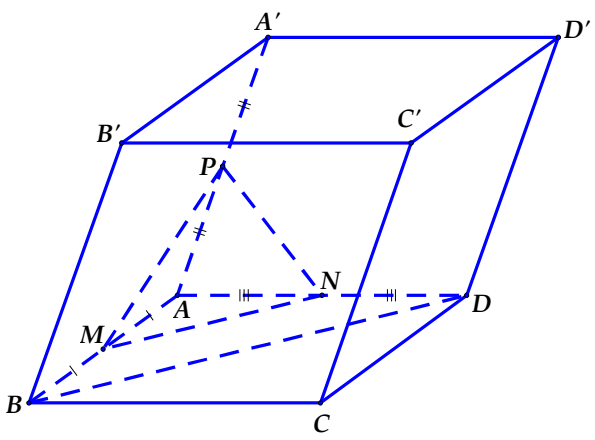
Chọn B.

$V_{A.MNP} = V_{P.AMN}$

Ta có: $\begin{cases} S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \\ \frac{d(P;(AMN))}{d(A';(ABCD))} = \frac{PA}{A'A} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra: $V_{P.AMN} = \frac{1}{3}.S_{AMN}.d(P;(AMN))$.

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{8}S_{ABCD}.\frac{1}{2}d(A';(ABCD))$



$\Leftrightarrow V_{A.MNP}=\dfrac{1}{48}V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Vậy $k=\dfrac{1}{48}$.

Bài toán 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Mặt phẳng chứa AB và đi qua G cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M và N. Biết mặt bên của hình chóp tạo với đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABMN$ bằng:

A. $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$. **D.** $3a^3\dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

(Trích đề thi thử TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018)

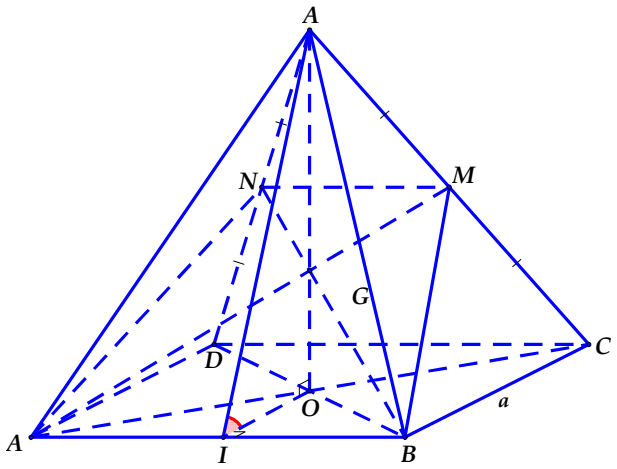
Lời giải:

Chọn C.

Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên G cũng là trọng tâm của tam giác SBD.

Suy ra AG cắt SC tại trung điểm M của SC, tương tự BG cắt SD tại trung điểm N của SD

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của AB.



$+\left.\begin{matrix}AB\perp OI\\AB\perp SI\end{matrix}\right\}\Rightarrow\widehat{(SAB),(ABCD)}=\widehat{SIO}=60^0$

Do đó $SO=OI.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

$\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SB}{SB}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABM}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SD}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ACD}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

Vậy $V_{S.ABMN}=V_{S.ABM}+V_{S.AMN}=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\right)V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Bài toán 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$, $SA=2$, $SB=3$, $SC=6$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $6\sqrt{2}$ (đvtt). **B.** $18\sqrt{2}$ (đvtt). **C.** $9\sqrt{2}$ (đvtt). **D.** $3\sqrt{2}$ (đvtt).

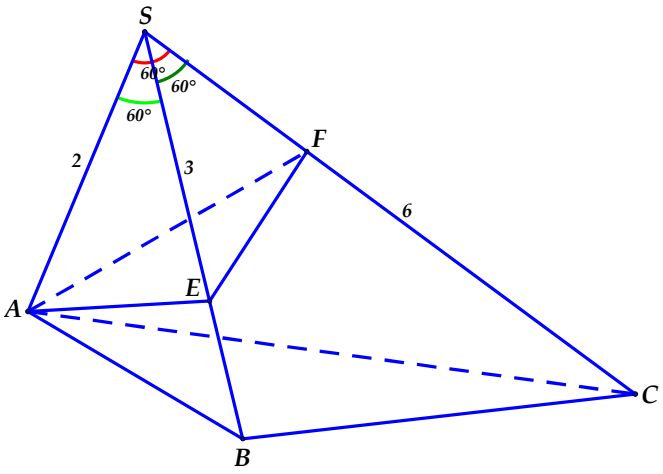
(Trích đề thi thử THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)

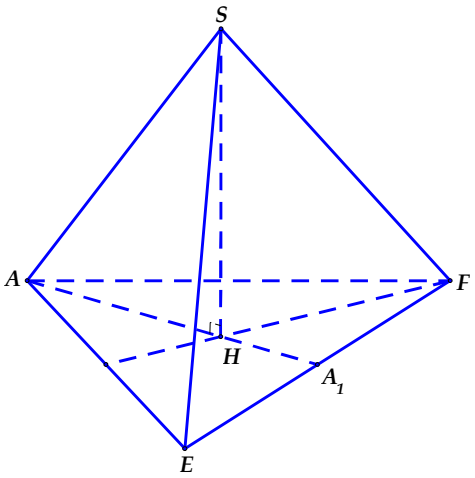
Lời giải:

Chọn D.

Trên cạnh SB, SC lần lượt lấy E, F sao cho $SE=2$ và $SF=2$.

Mặt khác $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$ suy ra hình chóp $S.AEF$ là chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 2.





Gọi H là trọng tâm $\Delta AEF \Rightarrow SH \perp (AEF)$

Gọi A_1 là trung điểm của $EF \Rightarrow \begin{cases} AA_1 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ AH = \dfrac{2}{3}AA_1 = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \\ SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

Suy ra $V_{S.AEF} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta AEF} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{9}{2}V_{S.AEF} = 3\sqrt{2}$.

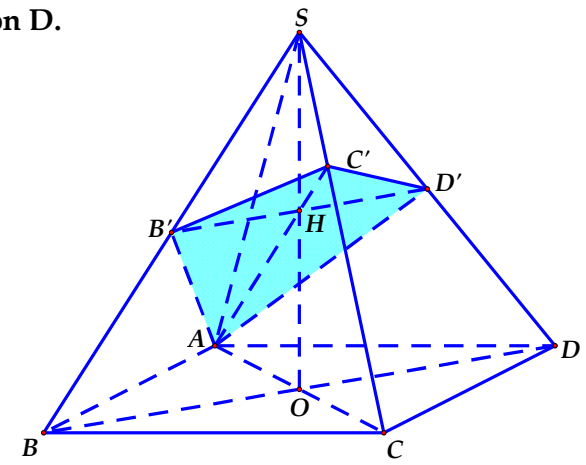
Bài toán 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

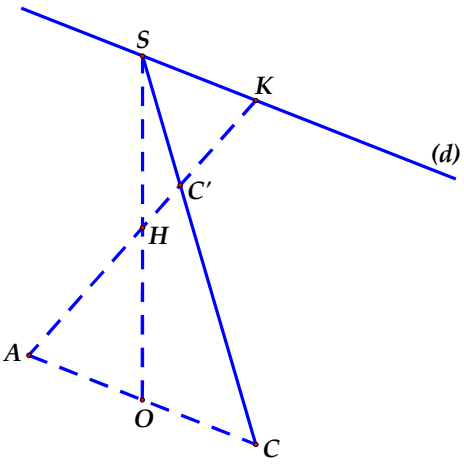
A. $\dfrac{V}{3}$ **B.** $\dfrac{2V}{3}$ **C.** $\dfrac{V^3}{3}$ **D.** $\dfrac{V}{6}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.





Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO\cap B'D'=H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C'=AH\cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC): Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K.

Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có : $\frac{OH}{SH}=\frac{OA}{SK}=1\Rightarrow SK=OA\Rightarrow \frac{SK}{AC}=\frac{1}{2}$

Lại có: $\frac{SK}{AC}=\frac{SC'}{CC'}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$.

Vì $V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}=\frac{V}{2}$ nên ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow V_{S.AB'D'}=\frac{1}{8}V$

$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}}=\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{SC'}{SC}\Leftrightarrow V_{S.B'C'D'}=\frac{V}{24}$.

Suy ra $V_{S.AB'C'D'}=V_{S.AB'D'}+V_{S.B'C'D'}=\frac{V}{8}+\frac{V}{24}=\frac{V}{6}$.

Lưu ý: Có thể sử dụng nhanh công thức $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$

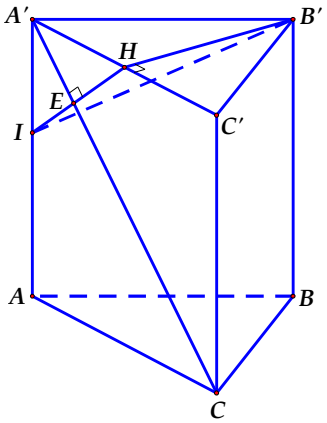
Bài toán 13: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1<V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

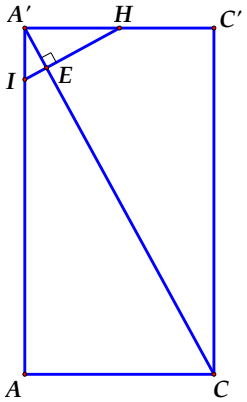
A. $\frac{1}{47}$. **B.** $\frac{1}{23}$. **C.** $\frac{1}{11}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.





Gọi H là trung điểm của $A'C'$, $\Delta A'B'C'$ đều nên $B'H\perp A'C'\Rightarrow B'H\perp(ACC'A')$.

Trong $(ACC'A')$, kẻ $HE\perp A'C$, $HE\cap A'A=I$.

Ta có: $\begin{cases}B'H\perp A'C\\HI\perp A'C\end{cases}\Rightarrow A'C\perp(B'HI)\Rightarrow(P)\equiv(B'HI)$.

$\Delta A'EH \backsim \Delta A'C'C \Rightarrow \dfrac{A'E}{A'H} = \dfrac{A'C'}{A'C} \Rightarrow A'E = \dfrac{A'C'.A'H}{A'C} = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.

$\Delta A'IH \backsim \Delta A'C'C \Rightarrow \dfrac{IH}{A'H} = \dfrac{A'C}{C'C} \Rightarrow IH = \dfrac{A'C.A'H}{C'C} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

$S_{B'HI} = \dfrac{1}{2}B'H.HI = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{16}$.

$V_1 = \dfrac{1}{3}S_{B'HI}.A'E = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{15}}{16}.\dfrac{a\sqrt{5}}{10} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

$V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = \dfrac{47}{96}a^3\sqrt{3}$ do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{47}$.

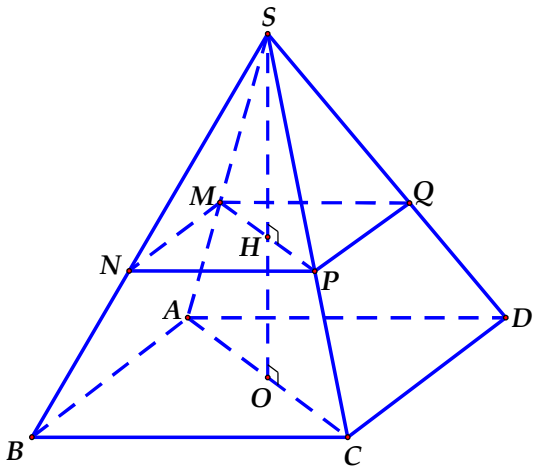
Bài toán 14: Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a. Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. *(Giả thiết rằng tổng thể tích của hai khối đá sau vẫn bằng thể tích của khối đá đầu).*

A. $\dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\dfrac{a^2}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$

(Trích đề thi thử THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng cắt với cạnh bên SA, SB, SC, SD và $H = SO \cap (MNPQ)$. Do $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ (MNPQ) \parallel (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (MNPQ)$

Đặt $\dfrac{SH}{SO} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = k\ (k > 0)$ (Định lý Thales) và $V = V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V} = \dfrac{2V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} = k^3$

Theo giả thiết : $\frac{V_{S.MNPQ}}{V}=k^3=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Mặt khác $\frac{1}{2}=\frac{V_{S.MNPQ}}{V}=\frac{\frac{1}{3}SH.S_{MNPQ}}{\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}}=k.\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}}$

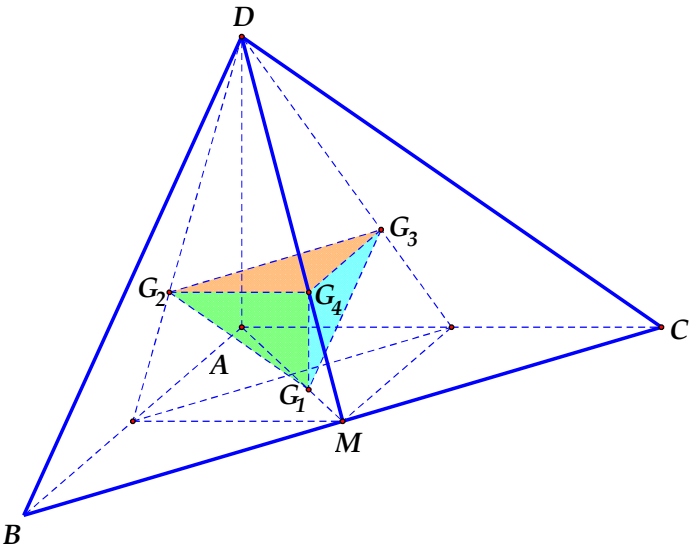
$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{1}{2k}.S_{ABCD}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.a^2=\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Bài toán 15: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB=6a$, $AC=9a$, $AD=12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$ **B.** a^3 **C.** $108a^3$ **D.** $36a^3$

Lời giải:

Chọn A.



Trong trường hợp tổng quát, ta chứng minh được $\boxed{V_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{1}{27}V_{ABCD}}$.

Thật vậy,ta có $(G_2G_3G_4)//(CBA)$ và $\Delta G_2G_3G_4\sim\Delta CBA$ (tỉ số đồng dạng $k=\frac{1}{3}$).

Từ đó: $\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}}=k^2=\frac{1}{9}$ và $d(G_1,(G_2G_3G_4))=d(G_4,(ABC))=\frac{1}{3}d(D,(ABC))$ (do $G_4M=\frac{1}{3}DM$)

Suy ra $\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}}=\frac{d(G_1,(G_2G_3G_4))}{d(D,(ABC))}.\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}}=\frac{1}{3}.\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$

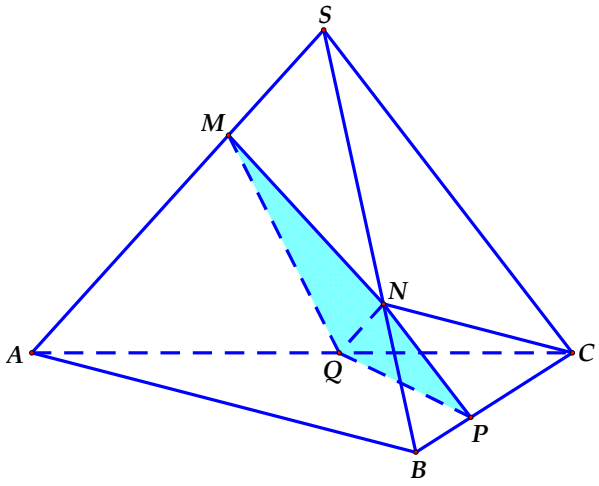
$\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{1}{27}V_{ABCD}=\frac{1}{27}.\frac{1}{6}.AB.AC.AD=4a^3$

Bài toán 16: Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó, (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{4}{5}$ **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$

Lời giải:

Chọn A.



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Vì (α) chứa MN và song song với SC. Khi đó ta có $NP//MQ//SC$.

Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có: $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}\cdot\dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$

$\dfrac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\dfrac{NS}{BS}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{S_{AMQ}}{S_{ASC}}=\left(\dfrac{AM}{AS}\right)^2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{S_{SMQC}}{S_{ASC}}=\dfrac{5}{9}$. Suy ra $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{27}$

$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{d(N,(QPC))}{d(S,(ABC))}\cdot\dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}}=\dfrac{NB}{SB}\cdot\dfrac{CQ}{CA}\cdot\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$

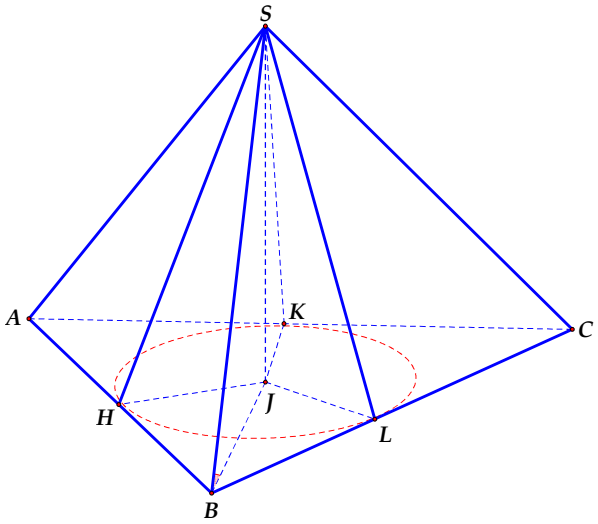
$\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}+\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{10}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_1+V_2}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow 5V_1=4V_2\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{5}$

Bài toán 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng (SAB), (SAC), (SBC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Biết $AB=25$, $BC=17$, $AC=26$; đường thẳng SB tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích của V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=408$. **B.** $V=680$. **C.** $V=578$. **D.** $V=600$.

Lời giải:

Chọn B.



Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K, L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC, CA.

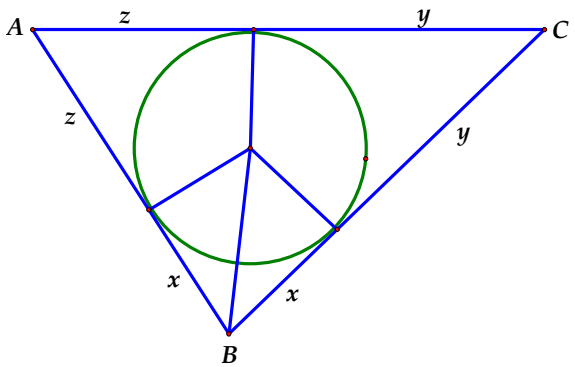
Suy ra, $\widehat{SHJ}$, $\widehat{SLJ}$, $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC).

Theo giả thiết, ta có $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL, SJK bằng nhau.

Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích S của tam giác ABC là $S = 204$.

Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của ABC. Ta có $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{204}{34} = 6.$



Đặt $x = BH = BL, y = CL = CK, z = AH = AK.$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$

Giải ra được $(x, y, z) = (8, 9, 17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

Ta có $SBJ = (SB, (ABC)) = 45°$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J. $SJ = JB = 10$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} SJ.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.10.204 = 680.$

IV. BÀI TOÁN MIN MAX THỂ TÍCH

1. PHƯƠNG PHÁP

Trong nhiều bài toán, thể tích khối đa diện cần tính phụ thuộc một tham số nào đó (tham số có thể là góc, hoặc là độ dài cạnh). Yêu cầu của bài toán đòi hỏi xác định giá trị của tham số để thể tích đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Sau đây là phương pháp giải tổng quát:

Phương pháp giải:

Bước 1: Chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

Bước 2: Áp dụng công thức tính thể tích để đưa thể tích cần tính về hàm số theo x $\left(f\left(x\right)\right)$.

Bước 3: Dùng bất đẳng thức cổ điển ($AM-GM$ hay $Cauchy-Schwarz$) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C.

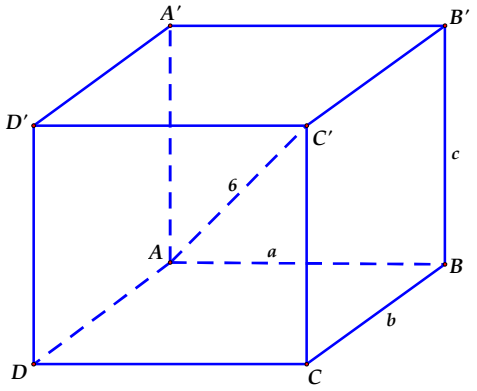
Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật là $a,b,c>0$

Ta có: $AC'^2=a^2+b^2+c^2=36; S=2ab+2bc+2ca=36$

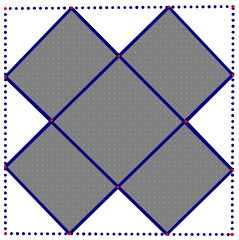
$\Rightarrow (a+b+c)^2=72\Rightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3=16\sqrt{2}.$$

Vậy $V_{max}=16\sqrt{2}$.



Bài toán 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



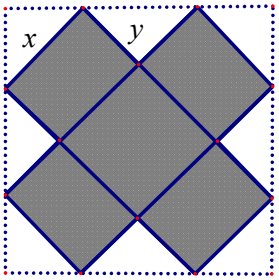
A. $8\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$.

C. $9\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.



Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ

Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}=6\Leftrightarrow x+y=3\sqrt{2}\Leftrightarrow y=3\sqrt{2}-x$ với $0<x<3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V=x^2y=x^2\left(3\sqrt{2}-x\right)$.

Ta có $V' = 3x\left(2\sqrt{2} - x\right) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên :

x	0		$2\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$
V'		$-$	0	$+$	
V		↗	$8\sqrt{2}$	↘	

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$.

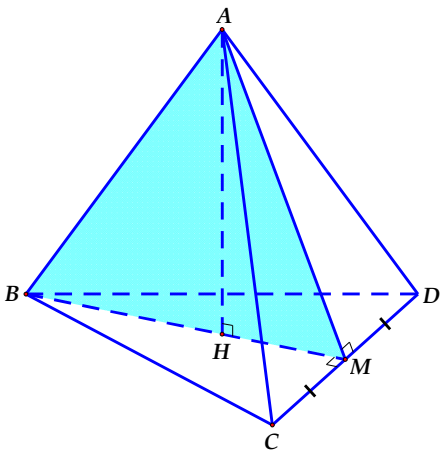
Bài toán 3: *(THPTQG 2017 – 102)* Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. **B.** $x = \sqrt{14}$. **C.** $x = 3\sqrt{2}$. **D.** $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C.

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM)$



Kẻ $AH \perp BM (H \in BM) \Rightarrow AH \perp (ABC)$.

Do BCD là tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = BM = \dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = 3 \\ S_{BCD} = \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} AH.S_{BCD}$ lớn nhất khi AH lớn nhất

Mặt khác: $AH \le AM = 3 \Rightarrow AH_{\max} = 3$ khi $H \equiv M$.

Khi đó tam giác AMB vuông cân tại $M \Rightarrow x = AB = \sqrt{2}AM = 3\sqrt{2}$.

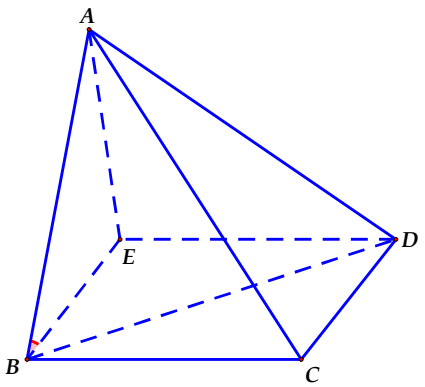
Bài toán 4: Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD = 6$, khoảng cách giữa AB và CD là 8, góc giữa AB và CD là α. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là:

A. 48 **B.** 52 **C.** 64 **D.** 36

Lời giải:

Chọn A.

Dựng hình bình hạnh $BCDE$



Ta có: $\left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{AB,BE}\right) = \alpha$

$\Rightarrow S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2}.AB.BE.\sin\alpha = 18\sin\alpha$

$CD // (ABE) \Rightarrow d_{(D,(ABE))} = d_{(AB,CD)} = 8$

$V_{ABCD}=V_{ABED}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABE}.d_{(D,(ABE))}=48.\sin\alpha$

Do $\sin\alpha\le 1$ đẳng thức $\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$. Vậy $MaxV_{ABCD}=48$.

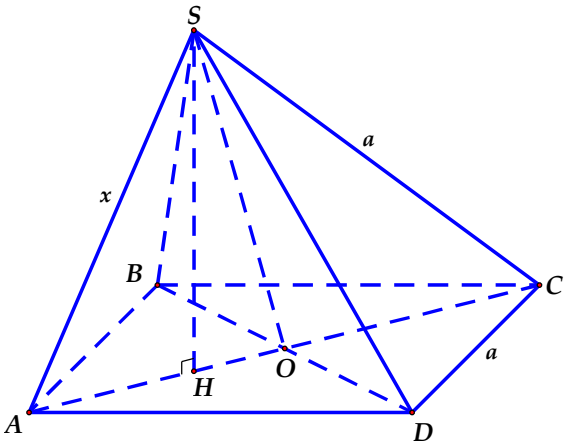
Bài toán 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=x$ còn tất cả các cạnh khác có độ dài bằng 2. Tính thể tích V lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$ **B.** $V=\frac{1}{2}$. **C.** $V=3$. **D.** $V=2$.

(Trích đề thi thử THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có:

$\Delta BAD=\Delta BSD=\Delta BCD$ nên $AO=SO=CO$

$\Rightarrow SO=\frac{1}{2}AC\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S

Do đó: $AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{x^2+4}$

$\Rightarrow OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{4-\frac{4+x^2}{4}}=\frac{\sqrt{12-x^2}}{2}$

$\Rightarrow BD=\sqrt{12-x^2}$, $0<x<2\sqrt{3}$

ΔSBD cân tại $S\Rightarrow SO\perp BD$; $ABCD$ là hình thoi

nên : $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

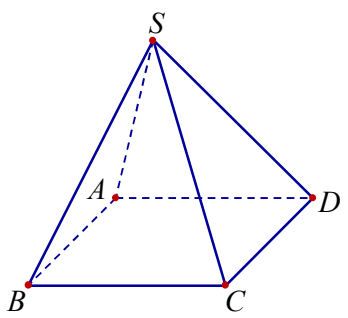
Trong ΔSAC hạ $SH\perp AC$. Khi đó: $\begin{cases}SH\perp AC\\SH\perp BD\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SC^2}\Rightarrow SH=\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+SC^2}}=\frac{2.x}{\sqrt{4+x^2}}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}.\sqrt{12-x^2}.\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{3}.x.\sqrt{12-x^2}\le\frac{1}{3}\frac{x^2+12-x^2}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2=12-x^2\Rightarrow x=\sqrt{6}$.

Bài toán 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC=x$ $\left(0<x<\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x=\frac{\sqrt{a}}{b}$ $\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



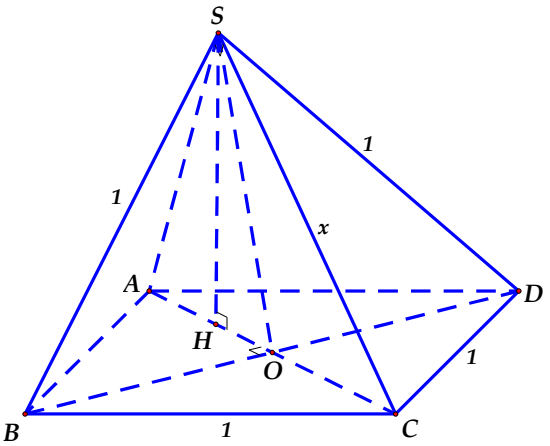
A. $a^2-2b<30$. **B.** $a^2-8b=20$.

C. $b^2-a<-2$. **D.** $2a-3b^2=-1$.

(Trích đề thi thử SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)

Lời giải:

Chọn B.



Gọi O là trung điểm của BD.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, vì $SB=SD$ nên $H\in AC$

Ta xét hai tam giác SBD và ABD có cạnh BD chung, $SB=AB$, $SD=AD$ nên $\Delta SBD=\Delta ABD$ suy ra $AO=SO=OC$ do đó ΔSAC vuông tại S.

Ta có $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+SC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow BO=\sqrt{AB^2-OA^2}=\frac{\sqrt{3-x^2}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(3-x^2\right)}}{2}\ \left(0<x<\sqrt{3}\right)$

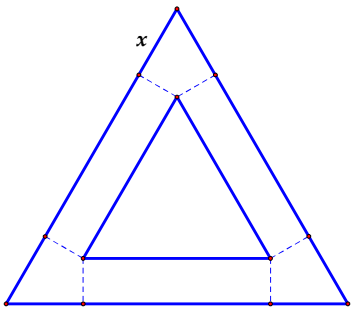
Mặt khác $SH=\frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2+SC^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

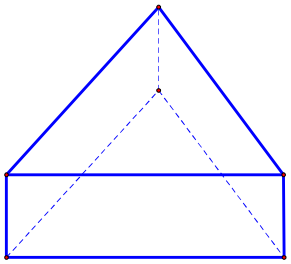
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{x^2\left(3-x^2\right)}}{6}\le\frac{1}{6}.\frac{x^2+3-x^2}{2}=\frac{1}{4}.$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2=3-x^2\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$. Suy ra $a^2-8b=20$.

Bài toán 7: Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng $x,\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.





A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{a}{6}$.

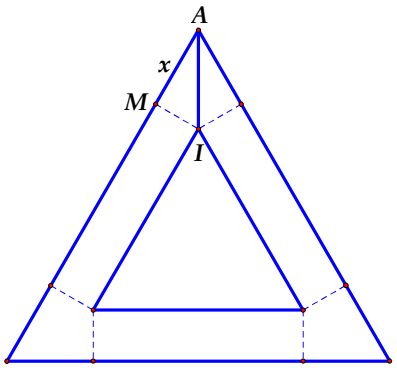
(Trích đề thi thử THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.

Xét tam giác AMI như hình vẽ, đặt $AM=x>0$, $\widehat{MAI}=30^\circ\Rightarrow MI=\frac{x}{\sqrt{3}}$

Lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy $a-2x$, $\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$, chiều cao $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ nên thể tích khối lăng trụ là:



$$V=\frac{(a-2x)^2\sqrt{3}}{4}.\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{a^2x-4ax^2+4x^3}{4}$$

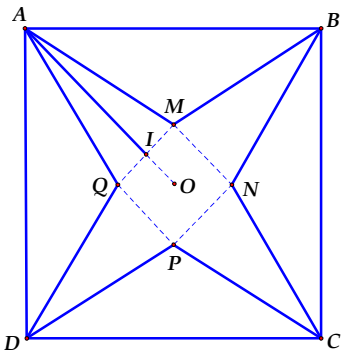
Ta cần tìm $x\in\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$ để thể tích V đạt giá trị lớn nhất.

Xét $f(x)=a^2x-4ax^2+4x^3$ có $f'(x)=12x^2-8ax+a^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{6}\\x=\dfrac{a}{2}(l)\end{array}\right.$

x	0		$\dfrac{a}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{a}{6}$.

Bài toán 8: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5 dm, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB, BNC, CPD và DQA. Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Hỏi cạnh đáy của khối chóp bằng bao nhiêu để thể tích của nó là lớn nhất ?



A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$dm.

B. $\dfrac{5}{2}$dm.

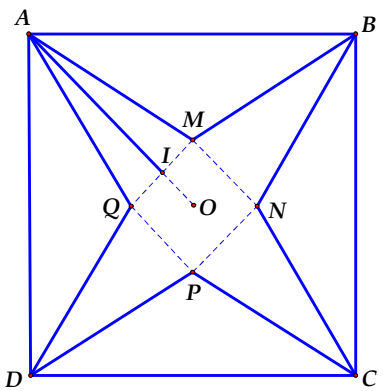
C. $2\sqrt{2}$dm.

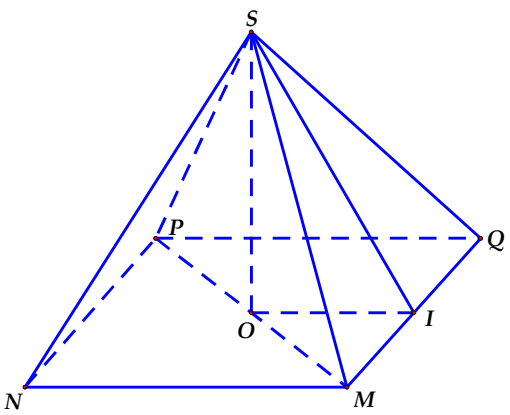
D. $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$dm.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn C.





Đặt $MQ = x$ dm $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$.

Ta có $AO = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $OI = \frac{MQ}{2} = \frac{x}{2}$, $SI = AI = AO - IO = \frac{5\sqrt{2} - x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp: $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{50 - 10x\sqrt{2}}}{2}$.

Thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}S_{MNPQ}.SO = \frac{1}{3}.x^2.\frac{\sqrt{50 - 10x\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{50x^4 - 10x^5\sqrt{2}}}{2}$.

Xét hàm số $y = \sqrt{50x^4 - 10x^5\sqrt{2}}$ $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$.

Ta có $y' = \frac{100x^3 - 25x^4\sqrt{2}}{\sqrt{50x^4 - 10x^5\sqrt{2}}}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 100x^3 - 25x^4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin \left(0; 5\sqrt{2}\right) \\ x = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$2\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích hình chóp lớn nhất khi $x = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 9: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

(Trích đề thi thử SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC.

Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ $\left(x, y > 0\right)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp \left(AMC\right)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{1 - x^2}$

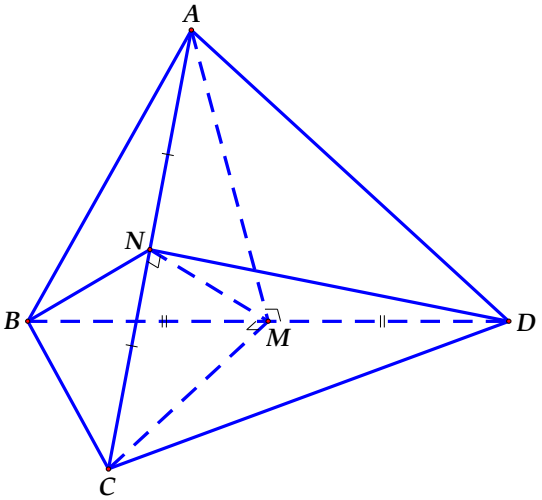
Dễ dàng chứng minh được:

$\Delta ABD = BCD \Rightarrow AM = CM \Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M

$\Rightarrow MN \perp AC$.

$\Rightarrow MN = \sqrt{MA^2 - AN^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$S_{AMC} = \frac{1}{2}MN.AC = \frac{1}{2}.2y\sqrt{1 - x^2 - y^2} = y\sqrt{1 - x^2 - y^2}$



$V_{ABCD}=V_{AMCD}+V_{AMCB}=\frac{1}{3}\left(DM+MB\right).S_{\Delta AMC}=\frac{1}{3}.DB.S_{\Delta AMC}$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.\left(1-x^2-y^2\right)}\le\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+1-x^2-y^2\right)^3}{27}}\Rightarrow V_{ABCD}\le\frac{2\sqrt{3}}{27}.$

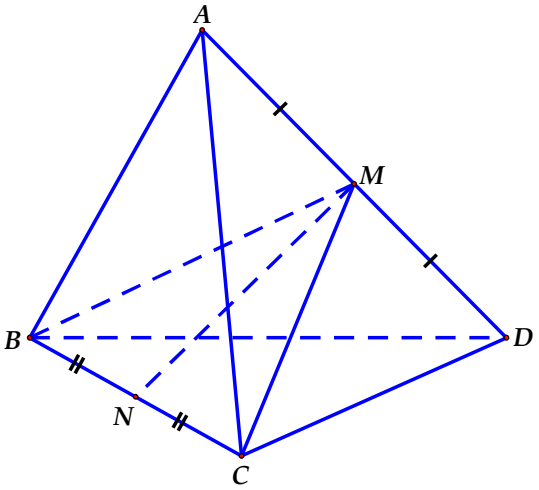
Bài toán 10: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AC=CD=DB=BA=2$ và AD, BC thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{32\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.

(Trích đề thi thử SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn B.



Gọi M,N lần lượt là trung điểm AD và BC.

Theo giả thiết ta có: ABD và ACD là các tam giác cân có M là trung điểm của AD nên $BM\perp AD$ và $CM\perp AD\Rightarrow AD\perp\left(BMC\right)$. Và có $BM=CM$

$\Rightarrow\Delta MBC$ cân tại M.

Trong tam giác ΔMBC có MN vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên

$MN^2=\frac{MB^2+MC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=MB^2-\frac{BC^2}{4}$

Lại có BM là đường trung tuyến của

$\Delta ABD\Rightarrow MB^2=\frac{AB^2+BD^2}{2}-\frac{AD^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2=AB^2-\frac{AD^2}{4}-\frac{BC^2}{4}\Leftrightarrow MN=\sqrt{4-\frac{AD^2+BC^2}{4}}.$

Khi đó diện tích tam giác ΔMBC là $S_{\Delta MBC}=\frac{1}{2}MN.BC=\frac{1}{2}BC\sqrt{4-\frac{AD^2+BC^2}{4}}$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.AD.S_{\Delta MBC}=\frac{1}{3}.AD.BC\sqrt{4-\frac{AD^2+BC^2}{4}}.$

Đặt $AD=x$, $BC=y$ ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}xy\sqrt{4-\frac{x^2+y^2}{4}}.$

Ta có: $x^2+y^2\ge2xy\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2}{4}\ge\frac{xy}{2}\Leftrightarrow-\frac{x^2+y^2}{4}\le-\frac{xy}{2}.$

Do đó: $V_{ABCD}\le\frac{1}{3}xy\sqrt{4-\frac{xy}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}xy\sqrt{8-xy}\Leftrightarrow V_{ABCD}\le\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{\left(xy\right)^2\left(8-xy\right)}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

Ta lại có: $(xy)^2(8-xy)=4.\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}.(8-xy)\le 4.\left(\frac{\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+8-xy}{3}\right)^3=\frac{4.8^3}{27}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{xy}{2}=8-xy\Leftrightarrow xy=\frac{16}{3}\Leftrightarrow x=y=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\max V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{4.8^3}{27}}=\frac{32\sqrt{3}}{27}$.

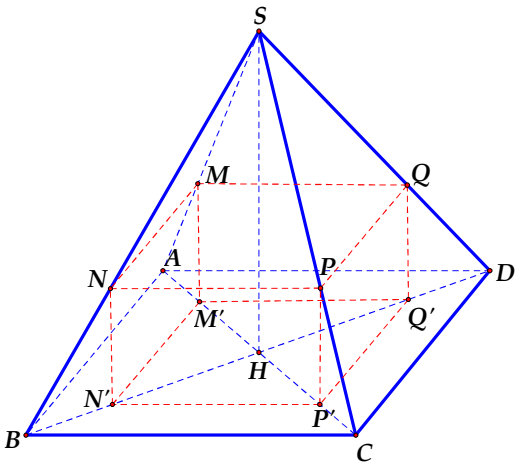
Bài toán 11: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn song song với đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn A.



Đặt $\frac{SM}{SA}=k$ với $k\in[0;1]$.

Xét tam giác SAB có $MN\,//\,AB$ nên $\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MN=k.AB$

Xét tam giác SAD có $MQ\,//\,AD$ nên $\frac{MQ}{AD}=\frac{SM}{SA}=k\Rightarrow MQ=k.AD$

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$MM'\,//\,SH$ nên $\frac{MM'}{SH}=\frac{AM}{SA}=\frac{SA-SM}{SA}=1-\frac{SM}{SA}=1-k\Rightarrow MM'=(1-k).SH$.

Ta có $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=MN.MQ.MM'=AB.AD.SH.k^2.(1-k)$.

Mà $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.AB.AD \Rightarrow V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=3.V_{S.ABCD}.k^2.(1-k)$.

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1-k)$ lớn nhất.

Ta có $k^2.(1-k)=\frac{2(1-k).k.k}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2-2k+k+k}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1-k)=k\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$. Vậy $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$.

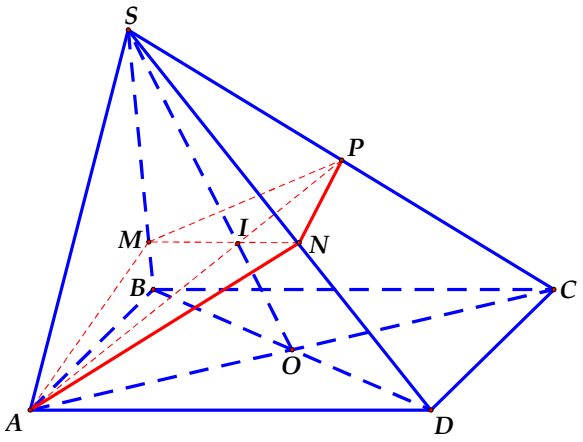
(có thể dùng phương pháp đạo hàm để tìm GTLN)

Bài toán 12: **(THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC. Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải:

Chọn A.



Đặt $x=\frac{SM}{SB}$, $y=\frac{SN}{SD}$, $(0<x,y\le 1)$.

Ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.ANP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4}(x+y)$ (1)

Lại có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.PMN}}{V}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{3}{4}xy$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{1}{4}(x+y)=\frac{3}{4}xy\Rightarrow x+y=3xy\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$.

Từ điều kiện $0<y\le 1$, ta có $\frac{x}{3x-1}\le 1$, hay $x\ge\frac{1}{2}$.

Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}$.

Đặt $f(x)=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(x)=\frac{3}{4}.\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (L)\\ x=\frac{2}{3}\ \ (N)\end{array}\right.$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{3}{8}$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, do đó $\min\frac{V_1}{V}=\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Nếu tăng độ dài cạnh đáy lên 2 lần và độ dài đường cao không đổi thì thể tích $S.ABC$ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 2. Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 3. Cho $S.ABCD$ là hình chóp đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $AB=a$, $SA=a$.

A. a^3 **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc mặt đáy, tam giác ABC vuông tại A, $SA=2cm$, $AB=4cm$, $AC=3cm$. Tính thể tích khối chóp.

A. $\frac{12}{3}cm^3$. **B.** $\frac{24}{5}cm^3$. **C.** $\frac{24}{3}cm^3$. **D.** $24cm^3$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình chữ nhật, SA vuông góc đáy, $AB=a$, $AD=2a$. Góc giữa SB và đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 6. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}, AC=a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết ΔSAB là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $BD=a$, $AC=a\sqrt{3}$.

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SB=\frac{3a}{2}$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 11. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình thoi, $AB=2a$, góc $\widehat{BAD}$ bằng 120^0. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là I giao điểm của 2 đường chéo, biết $SI=\frac{a}{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12. Cho khối chóp $O.ABC$. Trên ba cạnh OA,OB,OC lần lượt lấy ba điểm A',B',C' sao cho $2OA'=OA,\ 4OB'=OB,\ 3OC'=OC$. Tính tỉ số $\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}}$

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{32}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với BC. (α) cắt SB, SC lần lượt tại M,N. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$ biết (α) chia khối chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 14. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $A'A=A'B=A'D$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $AA'=2a$.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $AA'=2a$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi. Hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác ABD. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ biết $AB=a$, $\widehat{ABC}=120^0$, $AA'=a$.

A. $a^3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_{ABB'C'}}{V_{ABCA'B'C'}}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 18. Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Thể tích khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB'. Tính tỉ số $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 20. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích giữa khối $A'.ABD$ và khối lập phương là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh SB vuông góc với đáy và mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3}{16}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{8}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{2}$.

Câu 24. Cho hình chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60^0, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD. Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng từ O đến mặt bên là a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $6a^3\sqrt{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{3}$.

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$. $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a biết góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $2\sqrt{6}a^3$. **B.** $6\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Câu 27. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$, M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và AB. Tính thể tích V của khối tứ diện $DMNP$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$ **B.** $V = \frac{a^3}{4}$ **C.** $V = \frac{a^3}{12}$ **D.** $V = \frac{a^3}{2}$

Câu 29. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AC = 2a$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{1}{2}a^3$. **B.** $V = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{1}{3}a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{2}{3}a^3$. **D.** $V = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 31. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 32. **(THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \sqrt{3}a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 33. **(THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1}{8}$.

A. $k=\frac{1}{8}$. **B.** $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $k=\frac{1}{4}$.

Câu 34. **(THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho khối lăng trụ đứng, mặt phẳng (P) đi qua C' và các trung điểm của AA', BB' chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện có tỷ số thể tích bằng k với $k\le 1$. Tìm k.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 35. **(THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018)** Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $AB=1$; $AC=2$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) nằm trên đường thẳng BC. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 36. **(THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 37. **(THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 38. **(THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,AD. Tính thể tích khối chóp $S.CDMN$ theo a.

A. $\frac{5a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{5a^3}{24}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 39. **(THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh AA' hợp với $B'C$ một góc $60°$ và khoảng cách giữa chúng bằng a, $B'C=2a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a:

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 40. **(THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB=a$, $SA=2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{5a^3}{2}$. **B.** $5a^3$. **C.** $\frac{15a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 41. **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{5a^3}{54}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Câu 42. **(THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=\sqrt{5}$, $AC=BD=\sqrt{10}$, $AD=BC=\sqrt{13}$. Tính thể tích tứ diện đã cho.

A. $5\sqrt{26}$. **B.** $\frac{5\sqrt{26}}{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 43. **(THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SM. Mặt phẳng (ABN) cắt SC tại E. Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.ABE$ và V_1 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2=\frac{1}{4}V_1$. **B.** $V_2=\frac{1}{3}V_1$. **C.** $V_2=\frac{1}{6}V_1$. **D.** $V_2=\frac{1}{8}V_1$.

Câu 44. **(THPT Quãng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=k$, $0<k<1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. **B.** $k=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **C.** $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $k=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 45. **(THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích khối lăng trụ bằng:

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 46. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $B'D$ với mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ lần lượt bằng $30°$ và $45°$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $3a^3$.

Câu 47. **(THPT Tam Phước-Đồng Nai-lần 1-năm 2017-2018)** Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các đường chéo DB' và AC' lần lượt tạo với đáy các góc $45°$ và $30°$. Biết chiều cao của lăng trụ là a và $\widehat{BAD}=60°$. Hãy tính thể tích V của khối lăng trụ này.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48. **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu vuông góc của đỉnh C lên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 49. **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50. **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=2\sqrt{3}$ và các cạnh còn lại đều bằng x. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $2\sqrt{2}$.

A. $x=\sqrt{6}$. **B.** $x=2\sqrt{2}$. **C.** $x=3\sqrt{2}$. **D.** $x=2\sqrt{3}$.

Câu 51. **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua điểm D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{96}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{80}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{320}$. **D.** $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Câu 52. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thoả mãn $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $BC=2a$. Biết tam giác SBC cân tại S, tam giác SCD vuông tại C và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{2a^3}{3\sqrt{5}}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{3\sqrt{5}}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Câu 53. **(SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D; SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; $AB=2a$, $AD=CD=a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là $60°$. Mặt phẳng (P) đi qua CD và trọng tâm G của tam giác SAB cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Thể tích V của khối chóp $S.CDMN$ theo a là

A. $V=\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $V=\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $V=\dfrac{14\sqrt{3}a^3}{27}$. **D.** $V=\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{27}$.

Câu 54. **(THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật có độ dài đường chéo của các mặt lần lượt là $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Tính thể tích của khối hộp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{10}.\sqrt{18}}{6}$. **B.** $V=8$. **C.** $V=6$. **D.** $V=4$.

Câu 55. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $SC=2a$ và $\widehat{ASC}=60^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

A. $R=a$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R=a\sqrt{3}$. **D.** $R=\dfrac{a}{2}$.

Câu 56. **(THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SM bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 57. **(THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 58. **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB. Biết $AB=a$, $BC=2a$, $BD=a\sqrt{10}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\dfrac{3\sqrt{30a^3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{30a^3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{30a^3}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{30a^3}}{8}$.

Câu 59. **(THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IH}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\dfrac{a^3}{9}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{18}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 60. **(THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh cạnh SD, DC. Thể tích khối tứ diện $ACMN$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 61. **(THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Thể tích khối chóp $S.ABMN$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 62. **(THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{7a^3}{8}$. **B.** $V = a^3\sqrt{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 63. **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với mặt phẳng (SCD), cắt đường thẳng SD tại E. Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$. Tính số đo góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ biết $V = 5V_1$.

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 64. **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 65. **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 66. **(THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Xét đa diện lồi H có các đỉnh là trung điểm tất cả các cạnh của hình chóp đó. Tính thể tích của H.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Câu 67. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADMN$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 68. **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C với $CA=CB=a$. Trên đường chéo CA' lấy hai điểm M, N. Trên đường chéo AB' lấy được hai điểm P, Q sao cho $MNPQ$ là tứ diện đều. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $2a^3$.

Câu 69. **(THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $S.ABCD$ là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM=2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. **(THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$ là:

A. $\dfrac{V_2}{V_1}=3$. **B.** $\dfrac{V_2}{V_1}=2$. **C.** $\dfrac{V_2}{V_1}=1$. **D.** $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 71. **(THPT Ngô Sĩ Liên-Bắc Giang-lần 1-năm 2017-2018)** Cho khối chóp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $S_{ABC'}=8\sqrt{3}$, mặt phẳng ABC' tạo với mặt phẳng đáy góc $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lớn nhất.

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 72. **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=x$, $SB=AC=y$, $SC=AB=z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 73. **(THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt các cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.ANPM$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$?

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 74. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=x$, $BC=y$, $AB=AC=SB=SC=1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $(x+y)$ bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 75. **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính V_1+V_2.

A. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$. **B.** $\frac{17\sqrt{2}}{72}$. **C.** $\frac{17\sqrt{2}}{144}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 76. **(THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN=2NB$. Mặt phẳng (R) chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P. Tỉ số $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 77. **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3a, AC=a.$ Gọi (Q) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm D di động trên (Q) sao cho hai mặt phẳng (DAB) và (DAC) lần lượt hợp với mặt (ABC) hai góc phụ nhau. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp $D.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{13}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 78. **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành có $AB=a$, $SA=SB=SC=SD$. Giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 79. **(SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC), với $\varphi<45°$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $4a^3$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{4a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

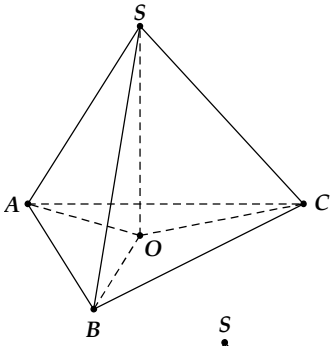
1A	2A	3C	4A	5B	6D	7A	8C	9C	10A
11D	12B	13B	14A	15B	16D	17C	18D	19A	20C
21C	22D	23A	24D	25A	26A	27D	28A	29C	30D
31B	32A	33C	34D	35C	36B	37D	38C	39B	40A
41C	42D	43B	44C	45B	46A	47D	48A	49A	50B
51D	52A	53D	54C	55A	56C	57D	58D	59A	60C
61A	62C	63A	64C	65C	66D	67A	68C	69A	70B
71C	72A	73D	74C	75A	76D	77A	78B	79C	

Câu 1. **Chọn A.**

Khi độ dài cạnh đáy tăng lên 2 lần thì diện tích đáy tăng lên 4 lần.

$\Rightarrow$ Thể tích khối chóp tăng lên 4 lần.

Câu 2. **Chọn A.**



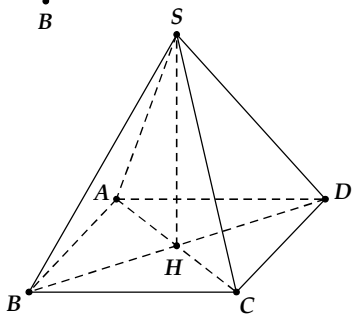
Gọi tứ diện $ABCD$ đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD).

Ta có: $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$S_{\Delta BCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 3. **Chọn C.**

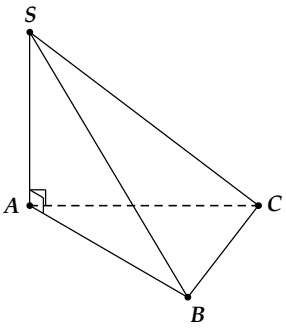


Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$

Ta có: $AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$S_{ABCD}=a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

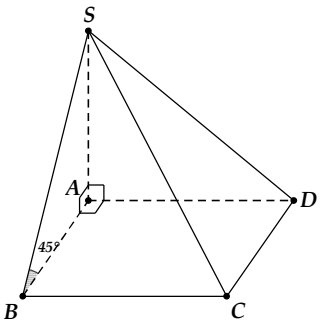
Câu 4. **Chọn A.**



$\begin{cases} S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=6\,cm^2 \\ h=SA=2\,cm \end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABC}=\dfrac{12}{3}cm^3$

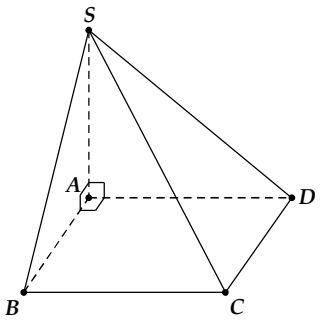
Câu 5. **Chọn B.**



$\begin{cases} SA=AB.\tan\left(45^0\right)=a \\ S_{ABCD}=a.2a=2a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{2a^3}{3}$

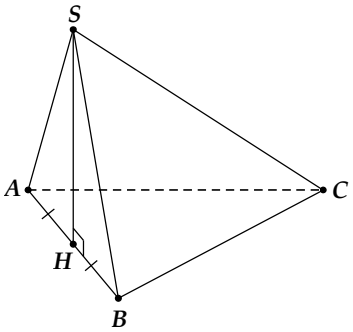
Câu 6. **Chọn D.**



$\begin{cases} SA = a\sqrt{3} \\ AB = AC.\cos\left(45^0\right) = a \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = a^2$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 7. **Chọn A.**



ΔABC vuông tại B

$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA.BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

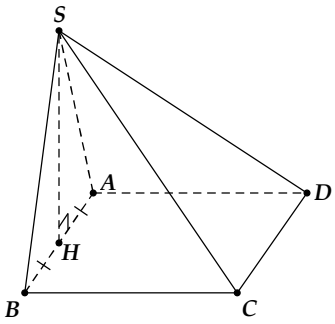
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp \left(ABC\right)$ (vì $\left(SAB\right) \perp \left(ABC\right)$).

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 8. **Chọn C.**



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$,

O là trung điểm của AC, BD.

ΔABO vuông tại $O \Rightarrow AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = a$.

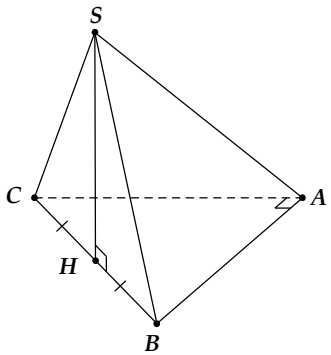
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB. ΔSAB vuông cân tại S cạnh $AB = a \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$.

Ta có: ΔSAB cân $\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp \left(ABCD\right)$ (vì $\left(SAB\right) \perp \left(ABC\right)$).

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 9. **Chọn C.**



ΔABC vuông tại A

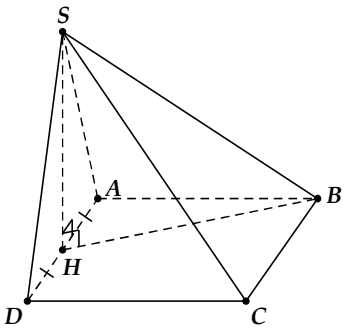
$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 2a$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$.

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 10. **Chọn A.**



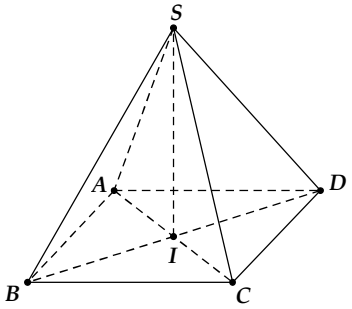
ΔABH vuông tại $A \Rightarrow BH = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$.

$S_{ABCD} = a^2$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

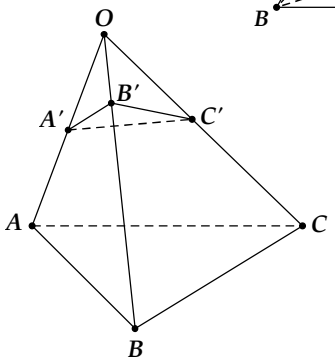
Câu 11. **Chọn D.**



$\begin{cases} SI = \dfrac{a}{2} \\ S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = 2\sqrt{3}a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 12. **Chọn B.**



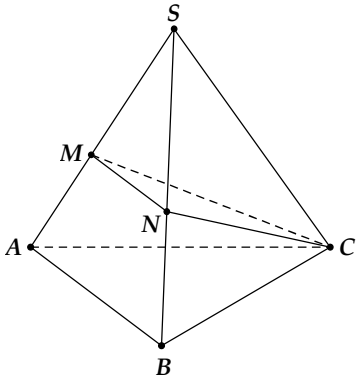
Ta có:

$\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{1}{4}; \dfrac{OC'}{OC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}} = \dfrac{OA'}{OA} \cdot \dfrac{OB'}{OB} \cdot \dfrac{OC'}{OC}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24}$

Câu 13. **Chọn B.**

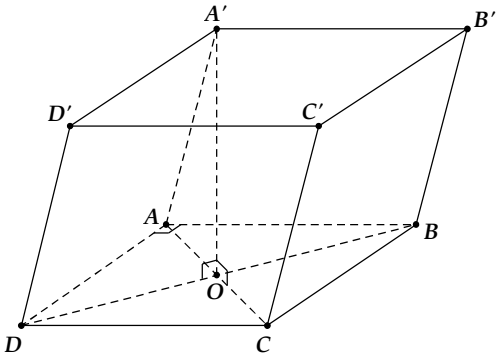


Ta có: $MN // BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} . \dfrac{SN}{SC} = \left(\dfrac{SM}{SB}\right)^2$

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 14. **Chọn A.**



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OB = OD$

Mà $A'A = A'B = A'D$ nên $A'O \perp (ABD)$ (vì $A'O$ là trực tâm giác ABD)

ΔABD vuông tại $A \Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

$\Rightarrow OA = OB = OD = a$

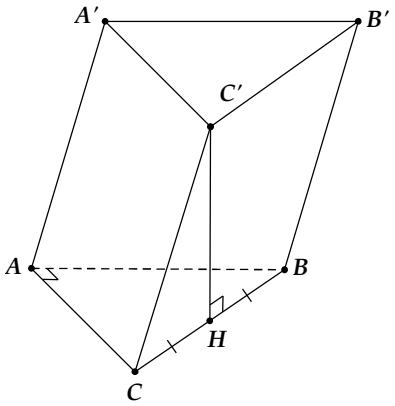
$\Delta AA'O$ vuông tại O

$\Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = a\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$

$V_{ABCDA'B'C'D'} = A'O.S_{ABCD} = 3a^3$.

Câu 15. **Chọn B.**



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

ABC là tam giác vuông tại A

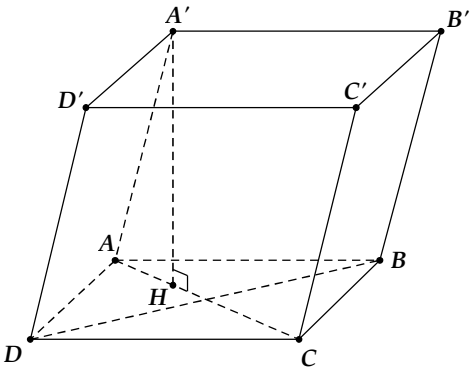
$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a$

$\Delta A'AH$ vuông tại $H \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_{ABCA'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 16. **Chọn D.**



Gọi H là trọng tâm của ΔABD

$\Rightarrow A'H \perp (ABCD)$.

Ta có: $\widehat{BAD} = 180^0 - \widehat{ABC} = 60^0$.

ΔABD cân có $\widehat{BAD} = 60^0$ nên ΔABD đều.

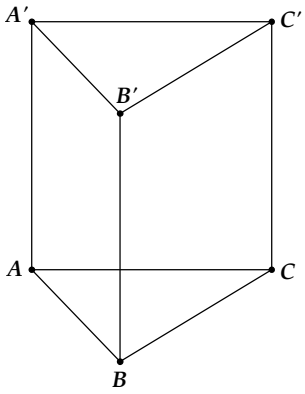
ABD là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta A'AH$ vuông tại H

$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V_{ABCDA'B'C'D'} = A'H.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 17. **Chọn C.**



Ta có: $BB'C'C$ là hình bình hành

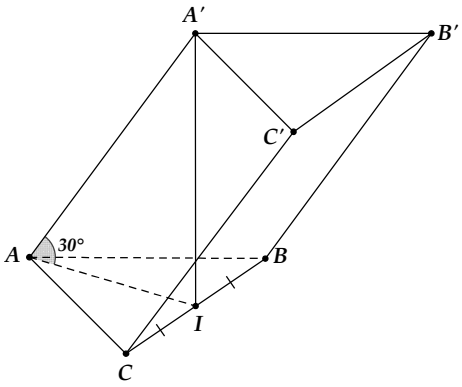
$\Rightarrow S_{BB'C'} = \frac{1}{2}S_{BB'C'C} \Rightarrow V_{A.BB'C'} = \frac{1}{2}V_{A.BB'C'C}$

Ta có: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$\Rightarrow V_{A.BB'C'C} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$\Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'} \Rightarrow \frac{V_{ABB'C'}}{V_{ABCA'B'C'}} = \frac{1}{3}$

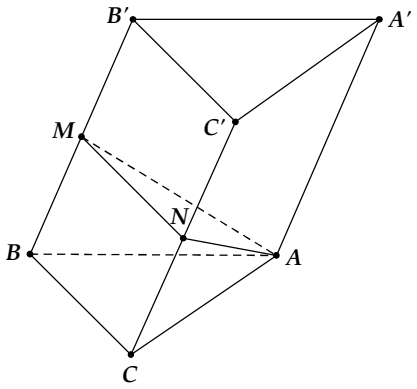
Câu 18. **Chọn D.**



$\begin{cases} A'I = AI.\tan(30^0) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2} \\ S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'I.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 19. **Chọn A.**



Ta có: $BB'C'C$ là hình bình hành $\Rightarrow S_{BCMN}=\frac{1}{2}S_{BB'C'C}$

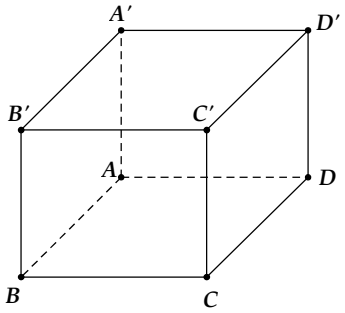
$\Rightarrow V_{A.BCMN}=\frac{1}{2}V_{A.BB'C'C}$

Ta có: $V_{A.A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$\Rightarrow V_{A.BB'C'C}=V_{ABCA'B'C'}-V_{A.A'B'C'}=\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$\Rightarrow V_{A.BCMN}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}\Rightarrow\frac{V_{A.BCMN}}{V_{ABCA'B'C'}}=\frac{1}{3}.$

Câu 20. **Chọn C.**



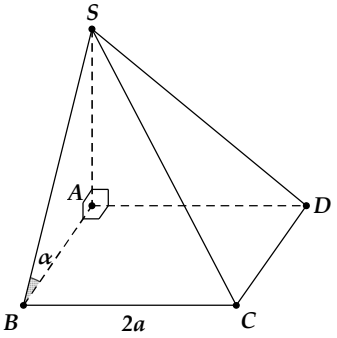
$V_{A'.ABD}=\frac{1}{3}AA'.S_{ABD}$

$=\frac{1}{3}AA'.\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{6}AA'.S_{ABCD}$

$=\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$\Rightarrow\frac{V_{A'.ABD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{6}.$

Câu 21. **Chọn C.**



Ta có: $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp SB\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SA.$

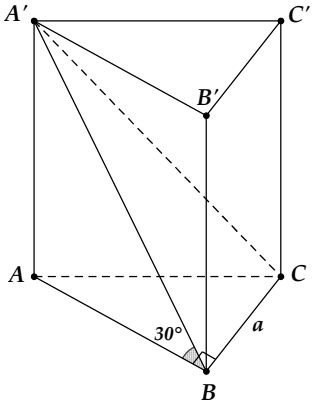
$\Rightarrow\widehat{SAB}=60^0$; $S_{ABCD}=4a^2.$

Xét tam giác SAB tại vuông tại B, ta có:

$SB=AB\tan 60^0=2a\sqrt{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}.4a^2.2a\sqrt{3}=\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}.$

Câu 22. **Chọn D.**



$V=Bh=S_{ABC.A'B'C'}.AA'.$

Do $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp A'B.$

Và $\begin{cases}BC\perp AB\subset(ABC)\\BC\perp A'B\subset(A'BC)\\BC=(ABC)\cap(A'BC)\end{cases}$

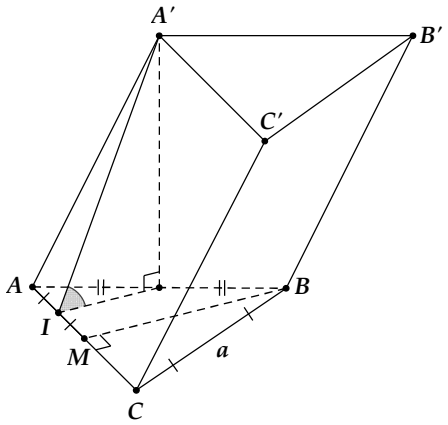
$\Rightarrow\left(\widehat{(ABC),(A'BC)}\right)=\left(\widehat{AB,A'B}\right)=\widehat{ABA'}$

Ta có: $S_{\Delta A'BC}=\frac{1}{2}A'B.BC\Rightarrow A'B=\frac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC}=\frac{2.a^2\sqrt{3}}{a}=2a\sqrt{3}.$

$AB=A'B.\cos\widehat{ABA'}=2a\sqrt{3}.\cos 30^0=3a;\ AA'=A'B.\sin\widehat{ABA'}=2a\sqrt{3}.\sin 30^0=a\sqrt{3}$

$V_{ABC.A'B'C'} = B.h = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}.AB.BC.AA' = \frac{1}{2}.3a.a.a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23. **Chọn A.**



Gọi H, M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, AM.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có IH là đường trung bình của tam giác AMB, MB là trung tuyến của tam giác đều ABC.

Do đó: $\begin{cases} IH \,//\, MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$

$\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

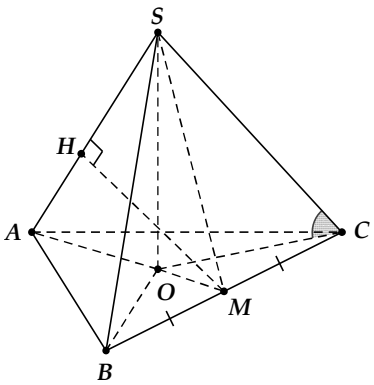
Mà: $\begin{cases} AC \perp IH \subset (ABC) \\ AC \perp A'I \subset (ACC'A') \\ (ABC) \cap (ACC'A') = AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IH}$ là góc gữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{A'IH} = 45°$

Trong $\Delta A'HI$ vuông tại H,có: $\tan 45° = \frac{A'H}{HI} \Rightarrow A'H = IH.\tan 45^o = IH = \frac{1}{2}MB = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}$

Câu 24. **Chọn D.**



Gọi M là trung điểm của BC.

Trong mp(SAM), Kẻ $MH \perp SA, (H \in SA)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MH$.

Do đó MH là đường vuông góc chung của SA và BC.

Suy ra $MH = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$.

Ta có: $SM \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = 60^0$.

Đặt $OM = x \Rightarrow AM = 3x, OA = 2x$.

$\Rightarrow SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + (2x)^2} = x\sqrt{7}$.

Trong ΔSAM ta có: $SA.MH = SO.AH \Leftrightarrow x\sqrt{7}.\frac{3a}{2\sqrt{7}} = x\sqrt{3}.3x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Khi đó: $AM = 3x = 3.\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a$.

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$$

Câu 25. **Chọn A.**

Gọi M là trung điểm của CD, trong ΔSOM kẻ đường cao OH.

$\Rightarrow OH\perp(SCD)\Rightarrow OH=a$.

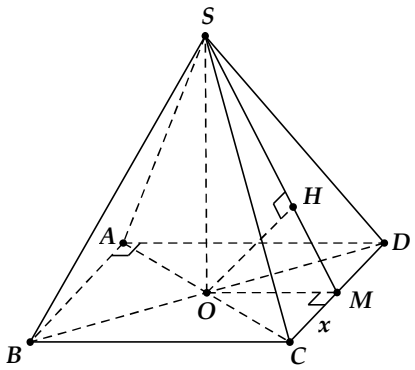
Đặt $CM=x$. Khi đó $OM=x$, $SM=x\sqrt{3}$,

$SO=\sqrt{SM^2-x^2}=x\sqrt{2}$.

Ta có: $SM.OH=SO.OM\Leftrightarrow x\sqrt{3}.a=x\sqrt{2}.x\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow CD=a\sqrt{6}, SO=a\sqrt{3}$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.CD^2.SO=\frac{1}{3}.6a^2.a\sqrt{3}=2a^3\sqrt{3}$.



Câu 26. **Chọn A.**

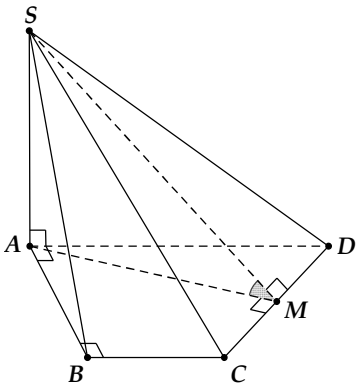
Dựng $AM\perp CD$ tại M. Ta có: $\widehat{SMA}=60^0$.

$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}.AB=4a^2$

$CD=\sqrt{(AD-BC)^2+AB^2}=2a\sqrt{2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=a^2$; $S_{ACD}=S_{ABCD}-S_{ABC}=3a^2$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}AM.CD\Rightarrow AM=\frac{2S_{ACD}}{CD}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$



Ta có: $SA=AM.\tan\widehat{SMA}=\frac{3\sqrt{6}}{2}a$. $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=2\sqrt{6}a^3$.

Câu 27. **Chọn D.**

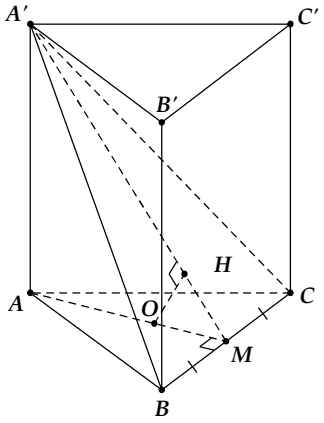
Gọi M là trung điểm của BC,

ta có $(A'AM)\perp(A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.

Trong $(A'AM)$ kẻ $OH\perp A'M(H\in A'M)\Rightarrow OH\perp(A'BC)$

Suy ra: $d(O,(A'BC))=OH=\frac{a}{6}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

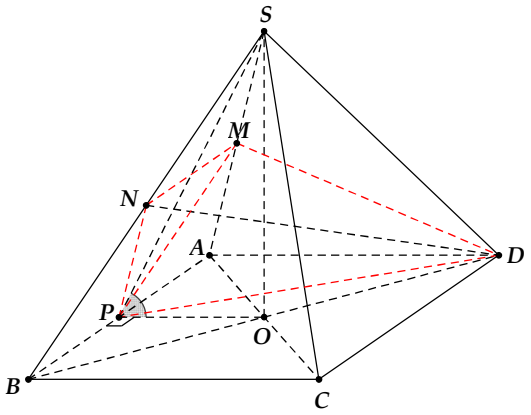


Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\frac{OH}{A'A}=\frac{OM}{A'M}\Rightarrow\frac{\frac{a}{6}}{A'A}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\frac{1}{A'A}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 28. **Chọn A.**



Ta có: $\dfrac{S_{SMN}}{S_{SAB}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{4}$.

Tương tự, $\dfrac{S_{BNP}}{S_{SAB}} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{S_{AMP}}{S_{SAB}} = \dfrac{1}{4}$.

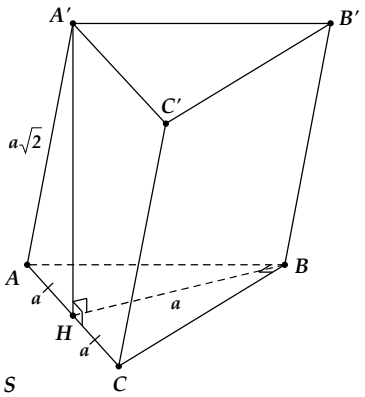
Suy ra $\dfrac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \dfrac{1}{4}$ (có thể khẳng định $\dfrac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \dfrac{1}{4}$ nhờ hai tam giác MNP và BAS là hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$).

Do đó $\dfrac{V_{D.MNP}}{V_{D.SAB}} = \dfrac{1}{4}$ (1)

$V_{D.SAB} = V_{S.DAB} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$. (2)

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}OP.\tan 45°.S_{ABCD} = \dfrac{4a^3}{3}$ (3). Từ (1), (2) và (3): $V_{DMNP} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{4a^3}{3} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 29. **Chọn C.**

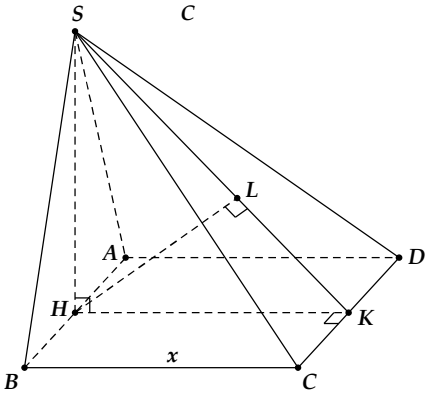


Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao của nó, và $HB = HA = HC = \dfrac{1}{2}AC = a$.

$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \dfrac{1}{2}BH \cdot AC = a^3$

Câu 30. **Chọn D.**



Gọi H là trung điểm AB, suy ra SH là chiều cao khối chóp đã cho.

Kí hiệu x là độ dài cạnh đáy.

Ta có $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ và $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^3$.

Kẻ $HK \perp CD$ $(K \in CD)$; Kẻ $HL \perp SK$ $(L \in SK)$.

Suy ra $HL \perp (SCD)$ và

$d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$

$= HL = \dfrac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}x$

Theo gt, $\dfrac{\sqrt{21}}{7}x = \dfrac{3\sqrt{7}a}{7} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a\sqrt{3})^3 = \dfrac{3}{2}a^3$

Câu 31. **Chọn B.**

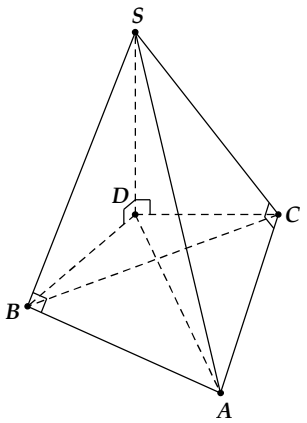
Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB (gt)$, suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.



Ta có $\widehat{DAC} = 30°$, suy ra $DC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60°$

Suy ra $\tan\widehat{SBD} = \dfrac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD\tan\widehat{SBD} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

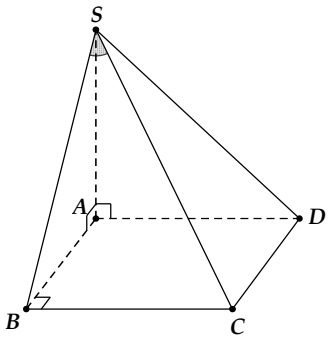
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. **Chọn A.**

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB).

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{CSB} = 30°$.



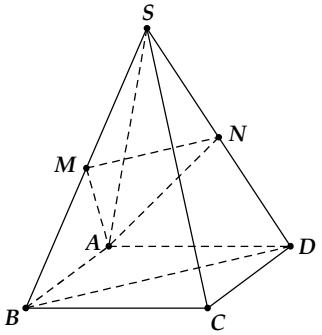
Xét tam giác SBC vuông tại B có $\tan 30° = \dfrac{BC}{SB} \Rightarrow SB = 3a$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Mà $S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 33. **Chọn C.**

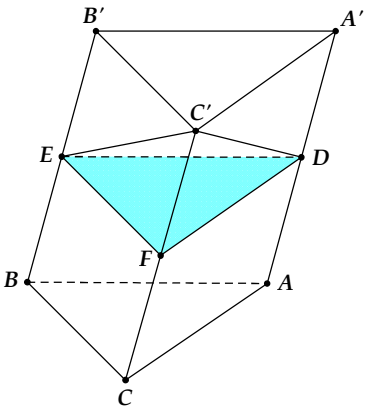
Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD} = k^2$.



Mà $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8}$, $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{8} = k^2 \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 34. **Chọn D.**

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' và h là độ dài chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khi đó ta có

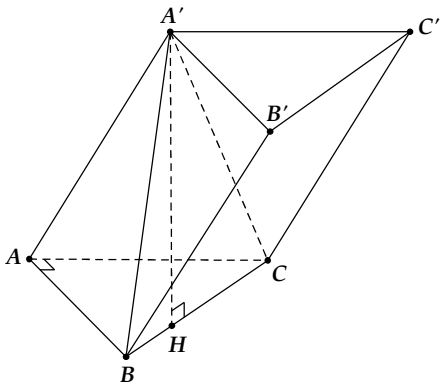


$V_{C'DEF} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta DEF}.\dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{6}.S_{\Delta DEF}.h = \dfrac{1}{6}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Mặt khác $V_{A'B'C'DEF} = \dfrac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{C'DEB'A'}+V_{C'DEF}=\frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'}\Leftrightarrow V_{C'DEB'A'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Leftrightarrow k=\frac{V_{C'DEB'A'}}{V_{ABCDC'E}}=\frac{1}{2}.$

Câu 35. **Chọn C.**



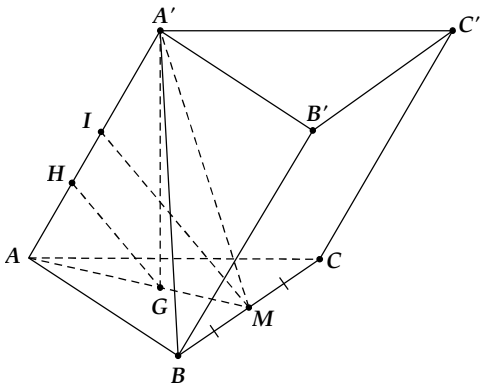
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC).

Giả sử $A'H=x>0$; $BC=\sqrt{5}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=1$.

Ta có $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.x$.

$$d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{3V_{A'.ABC}}{S_{\Delta A'BC}}=\frac{x}{\frac{1}{2}A'H.\sqrt{5}}=\frac{2x}{x.\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 36. **Chọn B.**



Ta có $A'G\perp(ABC)$ nên $A'G\perp BC$; $BC\perp AM$

$\Rightarrow BC\perp(MAA')$

Kẻ $MI\perp AA'$; $BC\perp IM$

$\Rightarrow d\left(AA';\ BC\right)=IM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

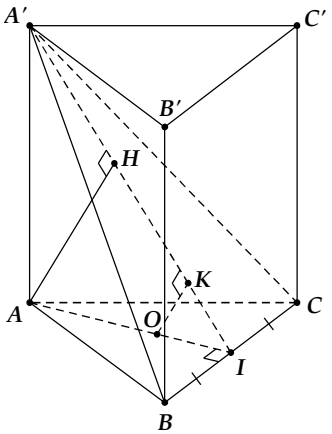
Kẻ $GH\perp AA'$, ta có

$$\frac{AG}{AM}=\frac{GH}{IM}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow GH=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{A'G^2}+\frac{1}{AG^2}\Leftrightarrow A'G=\frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2-HG^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{12}}}=\frac{a}{3}$$

$V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ *(đvtt).*

Câu 37. **Chọn D.**



Diện tích đáy là $B=S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h=d\left(\left(ABC\right);\left(A'B'C'\right)\right)=AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có $AH\perp(A'BC)$

$\Rightarrow d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=AH$

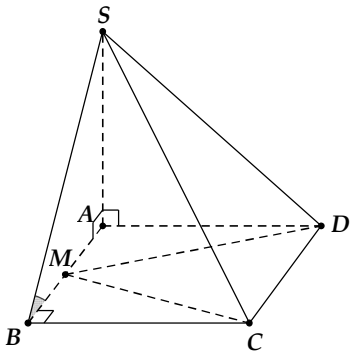
$$\frac{d\left(O;\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)}=\frac{IO}{IA}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow d\left(O;\left(A'BC\right)\right)=\frac{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)}{3}=\frac{AH}{3}=\frac{a}{6}\Rightarrow AH=\frac{a}{2}$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 38. **Chọn C.**



Ta có $(SBC)\cap(ABCD)=BC$, $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$,

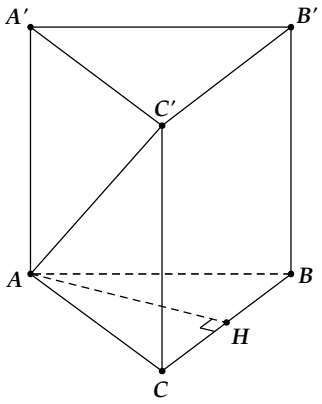
$AB\perp BC$ nên góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là

$\widehat{SBA}$. Do đó $SA=AB\tan 45^0=a$.

Mặt khác $S_{MNDC}=S_{ABCD}-S_{AMN}-S_{BMC}=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}$

Vậy $V_{S.CDMN}=\frac{1}{3}.S_{CDMN}.SA=\frac{1}{3}.\frac{5a^2}{8}.a=\frac{5a^3}{24}$.

Câu 39. **Chọn B.**



Vì $CC'\,//\,AA'$ nên góc giữa AA' và $B'C$ là góc giữa CC' và

$B'C$ và là góc $\widehat{B'CC'}=60^o$

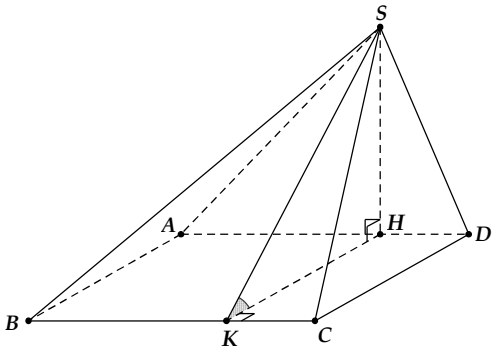
Trong $\Delta B'C'C$: $\begin{cases}\sin 60^o=\frac{B'C'}{B'C}\\ \cos 60^o=\frac{CC'}{B'C}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B'C'=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a=a\sqrt{3}\\ CC'=\frac{1}{2}.2a=a\end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó

$AH\perp(BCC'B')\Rightarrow d(AA',B'C)=AH=a.$

$$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}AA'=\frac{1}{2}AH.BC.AA'=\left(\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a\right)a=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 40. **Chọn A.**



Gọi H là hình chiếu của S trên AD và K là hình chiếu của H trên BC.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(SAD)\perp(ABCD)\\ (SAD)\cap(ABCD)=AD\\ SH\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$\left.\begin{array}{l}HK\perp BC\\ SH\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp SK$.

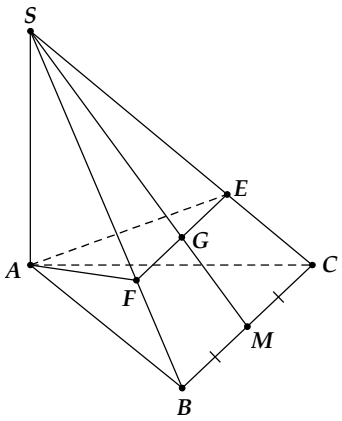
Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKH}=60°$

$\Rightarrow SH=HK\tan 60°=a\sqrt{3}$

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SD^2}\Rightarrow\frac{1}{3a^2}=\frac{5}{4SD^2}\Rightarrow SD=\frac{\sqrt{15}a}{2},\ SA=a\sqrt{15},\ AD=\frac{5\sqrt{3}a}{2}.$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a.\frac{5\sqrt{3}a}{2}=\frac{5a^3}{2}.$$

Câu 41. **Chọn C.**



Trong mặt phẳng (SBC). Qua G kẻ đường thẳng song song với BC và lần lượt cắt SC, SB tại E, F. Khi đó ta được khối đa diện không chứa đỉnh S là $ABCEF$.

Ta có G là trọng tâm của ΔSBC nên

$\frac{V_{S.AFE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SF}{SB}.\frac{SE}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$

Do đó $V_{S.AFE} = \frac{4}{9}.V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABCEF} = V_{S.ABC} - \frac{4}{9}.V_{S.ABC} = \frac{5}{9}.V_{S.ABC}.$

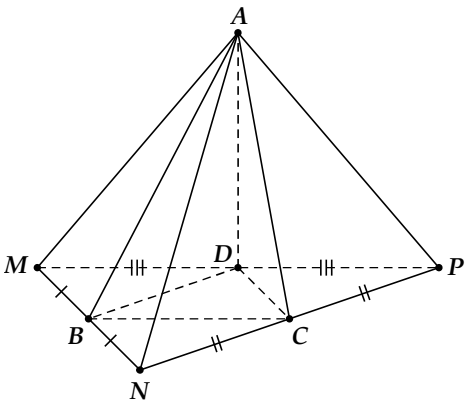
Vì tam giác ΔABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$ nên

$AB = BC = a.$

Mặt khác $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}a.a.a = \frac{a^3}{6}$. Suy ra $V_{ABCEF} = \frac{5}{9}.\frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}.$

Câu 42. **Chọn D.**

Lồng khối tứ diện $ABCD$ vào một khối tứ diện $AMNP$ sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm MN, NP, PM như hình vẽ.

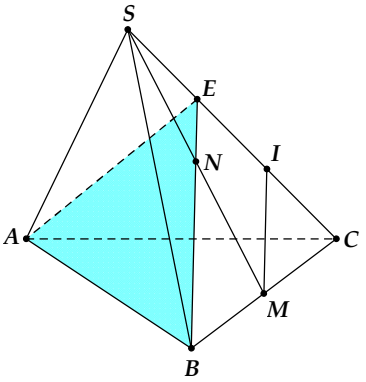


Dễ dàng ta có khối $AMNP$ có AM, AN, AP đôi một vuông góc và $MN = 2\sqrt{5}$; $NP = 2\sqrt{10}$; $AD = 2\sqrt{13}$.

Suy ra $AM = 4; AN = 2; AP = 6$, nên thể tích $V_{AMNP} = \frac{1}{6}AM.AN.AP = 8$.

Mà $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP} = 2$.

Câu 43. **Chọn B.**



Gọi I là trung điểm của EC nên IM là đường trung bình của tam giác $BCE \Rightarrow MI // EN$

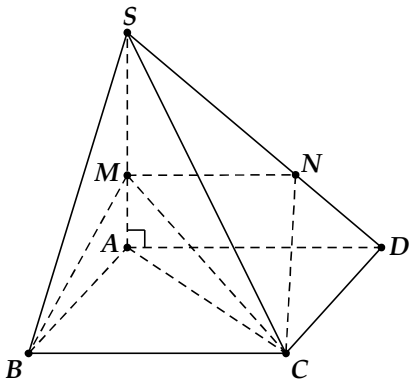
Mà N là trung điểm của $SM \Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác SMI suy ra E là trung điểm của SI.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow V_2 = \frac{1}{3}V_1.$

Câu 44. **Chọn C.**

Gọi giao điểm của (BMC) với SD là N, khi đó do $BC // AD$ nên $(BCM)\cap(SAD)=MN // AD // BC$

$\Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=k$.



Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.BCNM$, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Ta có $V_1+V_2=V \Rightarrow V_1=V_2=\dfrac{V}{2}$.

Mà $V_1=V_{S.MBC}+V_{S.MNC}$, mặt khác $\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}=k$

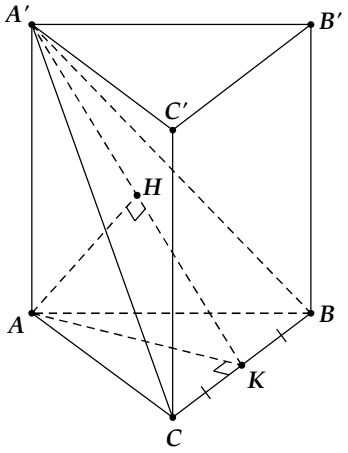
$\Rightarrow V_{S.MBC}=k.V_{S.ABC}=\dfrac{1}{2}kV$ và $\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}=k^2 \Rightarrow V_{S.MNC}=k^2.V_{S.ADC}=\dfrac{1}{2}k^2V$.

$\Rightarrow V_1=\dfrac{V}{2}\left(k^2+k\right)=\dfrac{V}{2}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 45. **Chọn B.**

Gọi K là trung điểm BC, dựng $AH\perp A'K\ (H\in A'K)$.

Ta có $AH\perp(A'BC)$, suy ra $d_{(A;(A'BC))}=AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Tam giác ABC đều, có đường cao $AK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $AA'K$ vuông tại A, đường cao AH.

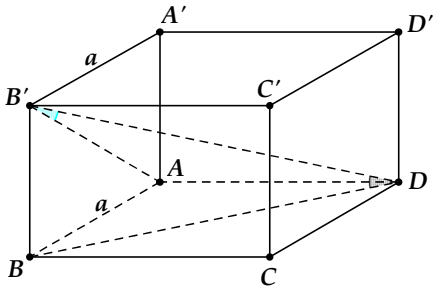
Ta có: $\dfrac{1}{AA'^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{4}{6a^2}-\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{1}{3a^2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\left(2a^2\right)=3a^3$.

Câu 46. **Chọn A.**

Ta có: $B'B\perp(ABCD)\Rightarrow B'B\perp BD$.

Từ đó suy ra góc giữa $B'D$ và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{B'DB}\Rightarrow\widehat{B'DB}=30°$



Ta có $DA\perp(ABB'A')\Rightarrow DA\perp AB'$.

Vậy góc giữa $B'D$ và $(ABB'A')$ là góc $\widehat{AB'D}$.

Vậy $\widehat{AB'D}=45°$.

Đặt $AD=x\ (x>0)\Rightarrow BD=\sqrt{a^2+x^2}$.

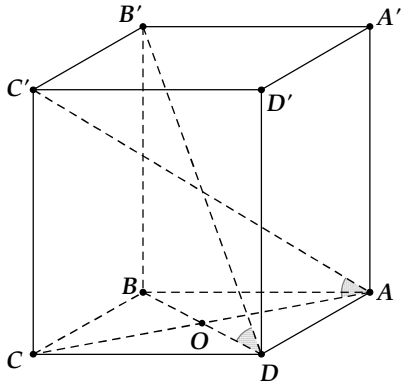
Xét tam giác $B'BD$ có: $B'B=BD.\tan 30°=\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{3}}\Rightarrow B'D=2\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{3}}$.

Mặt khác, xét trong tam giác $B'AD$ có $B'D=x\sqrt{2}$ (vì tam giác vuông cân).

Suy ra: $2\sqrt{\frac{x^2+a^2}{3}}=x\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{3}x^2=2x^2\Leftrightarrow\frac{2}{3}x^2=\frac{4}{3}a^2\Leftrightarrow x=a\sqrt{2}$.

Do đó: $B'B=\sqrt{\frac{x^2+a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2+a^2}{3}}=a$. Vậy: $V=a.a.a\sqrt{2}=\sqrt{2}a^3$.

Câu 47. **Chọn D.**



Đề cho hình lăng trụ đứng $\Rightarrow$ các cạnh bên vuông góc với hai đáy và là đường cao của hình lăng trụ.

Do đó: $\left(DB';(ABCD)\right)=\widehat{B'DB}=45°$;

$\left(AC';(ABCD)\right)=\widehat{C'AC}=30°$.

$\Delta BDB'$ vuông tại B: $BD=\frac{DD'}{\tan 45°}=a$.

$\Delta CAC'$ vuông tại C: $AC=\frac{CC'}{\tan 30°}=a\sqrt{3}$.

Trong ΔABD có: $\begin{cases}AB^2+AD^2-2AB.AD.\cos 60^\circ=BD^2\\AO^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB^2+AD^2-AB.AD=a^2\\AB^2+AD^2=2a^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow AB=AD=a$.

Suy ra: ΔABD đều cạnh a. Do đó: $S_{ABCD}=2S_{ABD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ cần tìm là: $V_{LT}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

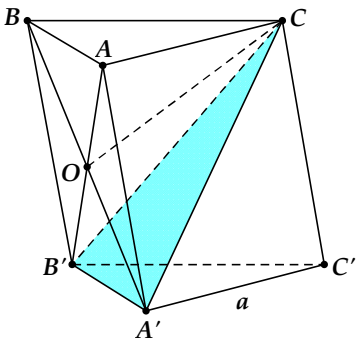
Câu 48. **Chọn A.**

Gọi O là tâm của hình thoi $ABB'A'$.

Theo giả thiết suy ra $CO\perp BA'$ hay tam giác CBA' cân tại C.

Tương tự tam giác CAB' cân tại C.

Do đó $C.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều, cạnh bằng a.



Ta có $CO=\sqrt{CA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $V_{C.ABB'A'}=\frac{1}{3}S_{ABB'A'}.CO=\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

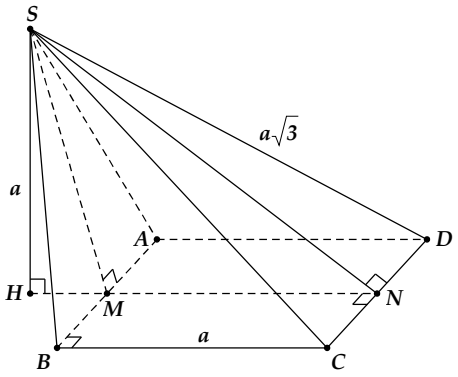
Ta có $V_{C.A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ nên $V_{C.ABB'A'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{2}.V_{C.ABB'A'}=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 49. **Chọn A.**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD, H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp MH$. Suy ra $H \in MN$.



Ta có $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = a$,

$SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra $S_{SMN} = \sqrt{p\left(p - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)(p-a)\left(p - \dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$

với p là nửa chu vi ΔSMN và $p = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + a + \dfrac{\sqrt{11}}{2}}{2}$ (Công thức Hê-rông).

Suy ra $S_{SMN} = \sqrt{p\left(p - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)(p-a)\left(p - \dfrac{a\sqrt{11}}{2}\right)} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ với p là nửa chu vi ΔSMN và

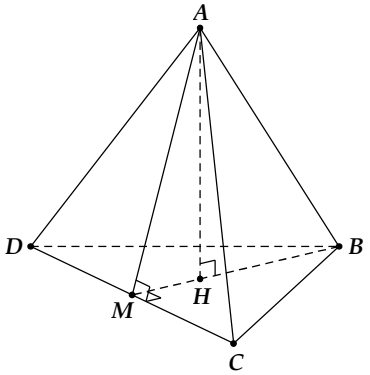
$p = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + a + \dfrac{a\sqrt{11}}{2}}{2}$ (Công thức Hê-rông).

Khi đó đường cao $SH = \dfrac{2S_{SMN}}{MN} = \dfrac{2\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 50. **Chọn B.**

Gọi M là trung điểm của CD và H là hình chiếu của A trên BM.



$CD \perp AM; CD \perp BM \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Đặt $\widehat{AMB} = \alpha$ suy ra $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AH = \sin\alpha.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

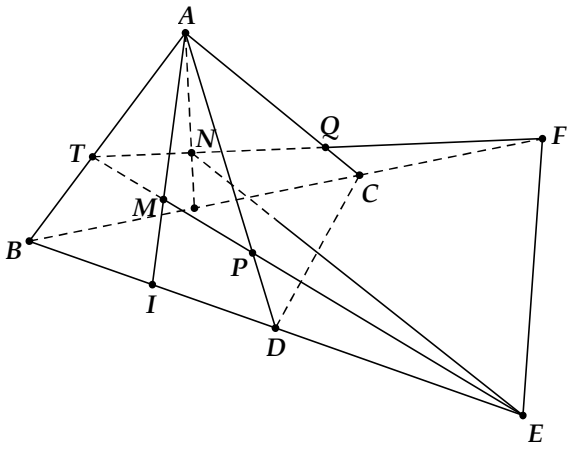
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}\sin\alpha\dfrac{x\sqrt{3}}{2}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{512}{x^6}$.

Xét tam giác AMB ta có: $\cos\alpha = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.BM} = 1 - \dfrac{8}{x^2}$.

Ta được phương trình: $\dfrac{512}{x^6} + \left(1 - \dfrac{8}{x^2}\right)^2 = 1$. Giải phương trình ta được $x = 2\sqrt{2}$.

Câu 51. **Chọn D.**



Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi $P = ME \cap AD$; $T = ME \cap AB$. Trong mặt phẳng (ABC) đường thẳng TN cắt AC, BC lần lượt tại Q, F. Khi đó mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện đã cho phần chứa đỉnh A là tứ diện $ATPQ$.

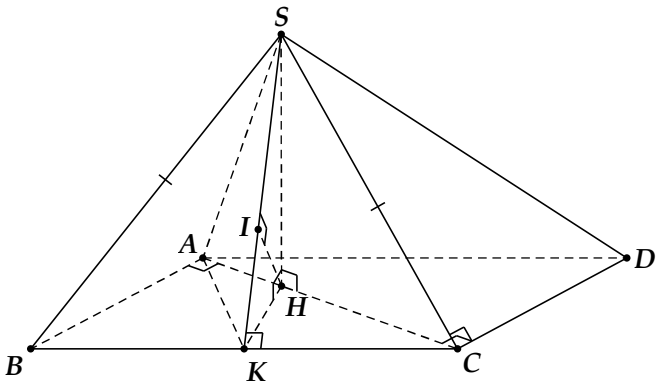
Gọi I là trung điểm BD. Xét ΔAID ta có: $\frac{ED}{EI}.\frac{MI}{MA}.\frac{PA}{PD} = 1$ (định lý Menelaus) $\Rightarrow \frac{PA}{PD} = 3$

Tương tự ta có: $\frac{QA}{QC} = 3$

Xét ΔAIB ta có: $\frac{EI}{EB}.\frac{TB}{TA}.\frac{MA}{MI} = 1 \Leftrightarrow \frac{TB}{TA} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác ta có: $\frac{V_{ATPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{AT}{AB}.\frac{AP}{AD}.\frac{AQ}{AC} = \frac{3}{5}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{27}{80} \Rightarrow V_{ATPQ} = \frac{27}{80}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Câu 52. **Chọn A.**



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. $\widehat{ACD} = 90^0$.

$\left.\begin{array}{l} CD \perp SC \\ CD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm BC. Ta có : $\left.\begin{matrix} BC\perp SK \\ BC\perp SH \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (SHK)\Rightarrow BC\perp HK$.

Kẻ $HI\perp SK, (I\in SK)\Rightarrow HI\perp (SBC)\Rightarrow d(H;(SBC))=HI$.

$AD\,//\,(SBC)\Rightarrow d(A;(SBC))=d(D;(SBC))$.

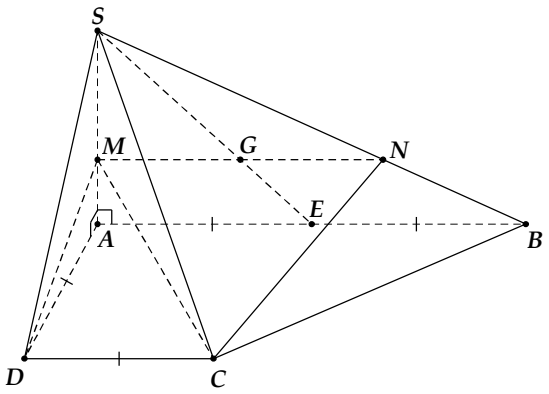
$\Delta CKH\backsim\Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HK}{AB}=\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{CK}{CA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow HC=\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $HK=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\dfrac{d(A;(SBC))}{d(H;(SBC))}=\dfrac{AC}{HC}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow HI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$.

$\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{HK^2}+\dfrac{1}{SH^2}\Rightarrow \dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{81}{12a^2}-\dfrac{3}{a^2}=\dfrac{15}{4a^2}\Rightarrow SH=\dfrac{2a}{\sqrt{15}}$.

Thể tích cần tìm là $V=\dfrac{1}{3}\dfrac{2a}{\sqrt{15}}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{2a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 53. **Chọn D.**



Ta có: $\begin{cases} G\in (P)\cap (SAB) \\ CD\,//\,AB \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mp (SAB) là $MN\,//\,AB\,//\,CD$.

Ta có: $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SG}{SE}=\dfrac{2}{3}$ (do $MG\,//\,AB$).

Mặt khác, ta có: $\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SG}{SE}=\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow V_{S.MCD}=\dfrac{2}{3}V_{S.ACD}$.

$S_{ACD}=S_{AEC}=S_{EBC}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}$ hay $V_{S.ACD}=\dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_{S.MCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}=\dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACB}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow V_{S.MNC}=\dfrac{4}{9}V_{S.ACB}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{2}{3}V_{S.ABCD}=\dfrac{8}{27}V_{S.ABCD}$.

$V_{S.MCD}+V_{S.MNC}=\dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}+\dfrac{8}{27}V_{S.ABCD}\Leftrightarrow V_{S.CDMN}=\dfrac{14}{27}V_{S.ABCD}$.

Gọi E là trung điểm của AB. Xét tứ giác $ADCE$ ta có:

$AD=CD$, $AE\,//\,CD$, $AE=CD$ nên $ADCE$ là hình vuông nên $CE=a=\dfrac{1}{2}AB$

Hay tam giác ACB vuông tại C. Suy ra $AC\perp CB$.

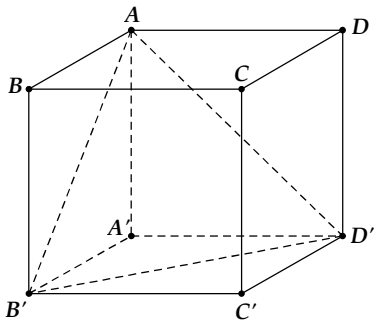
Mặt khác $BC\perp SA$ nên $BC\perp (SAC)$. Do đó $((SBC),(ABCD))=60°$.

Ta có: $\tan 60°=\dfrac{SA}{AC}\Leftrightarrow SA=a\sqrt{2}.\sqrt{3}=a\sqrt{6}$.

Mặt khác $S_{ABCD}=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$ nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{6}.\dfrac{3a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{S.CDMN}=\frac{14}{27}V_{S.ABCD}=\frac{14}{27}.\frac{a^3\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3 7\sqrt{6}}{27}$.

Câu 54. **Chọn C.**



Giả sử hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo các mặt bên lần lượt là $AB'=\sqrt{5}$, $B'D'=\sqrt{10}$, $AD'=\sqrt{13}$.

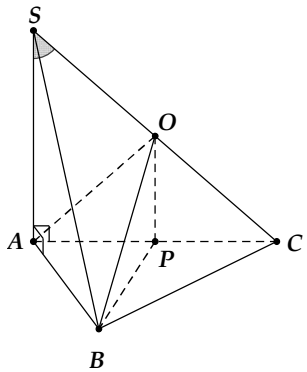
Đặt $AA'=x$, $A'B'=y$, $A'D'=z$ $(x,y,z>0)$.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông $A'AB'$, $A'B'D'$, $A'AD'$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\x^2+z^2=13\\y^2+z^2=10\end{cases}.\text{ Suy ra }\begin{cases}x^2=4\\y^2=1\\z^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}(\text{vì } x,y,z>0).$$

Vậy thể tích khối lập phương là $V=xyz=6$.

Câu 55. **Chọn A.**



Ta có $\sin\widehat{ASC}=\frac{AC}{SC}=\frac{AC}{2a}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

Do đó $AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại B.

Gọi P là trung điểm của cạnh AC thì P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

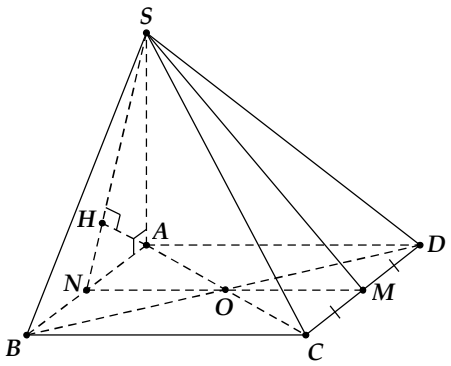
Gọi O là trung điểm của cạnh $SC\Rightarrow OS=OC$.

Ta có $OP//SA$ mà $SA\perp(ABC)\Rightarrow OP\perp(ABC)$.

Do đó OP là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC\Rightarrow OA=OB=OC$.

Như vậy $R=OA=OB=OC=OS=\frac{1}{2}SC=a$.

Câu 56. **Chọn C.**



Gọi N là trung điểm của $AB\Rightarrow BC//(SMN)$.

$$\Rightarrow d(BC,SM)=d(BC,(SMN))=d(B,(SMN))=d(A,(SMN)).$$

Dựng AH vuông góc với SN tại H

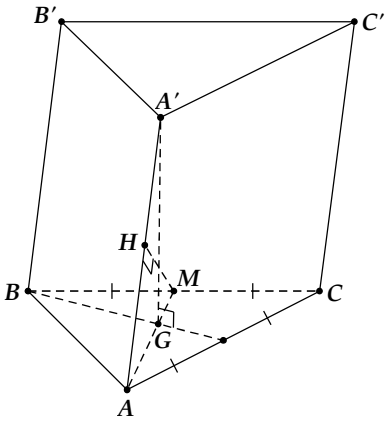
$\Rightarrow AH\perp(SMN)$.

Vậy $d(A,(SMN))=AH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lại có, trong tam giác vuông SAN: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AS^2}\Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 57. **Chọn D.**



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH \perp AA'$ $(H \in BC)$

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG)$

$\Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow d(AA', BC) = MH$.

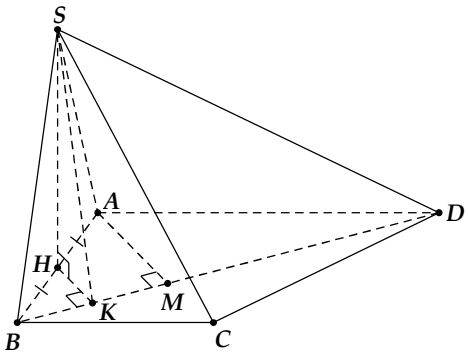
$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$.

Ta có $\frac{MH}{AH} = \frac{A'G}{AG} = \tan \widehat{GAH}$

$\Rightarrow A'G = \frac{MH.AG}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}$.

Vậy $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 58. **Chọn D.**



Ta có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 3a$.

Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp (ABCD)$, kẻ $HK \perp BD$ (với $K \in BD$), ta có $\widehat{SKH}$ là góc giữa (SBD) và $(ABCD)$, do đó $\widehat{SKH} = 60°$.

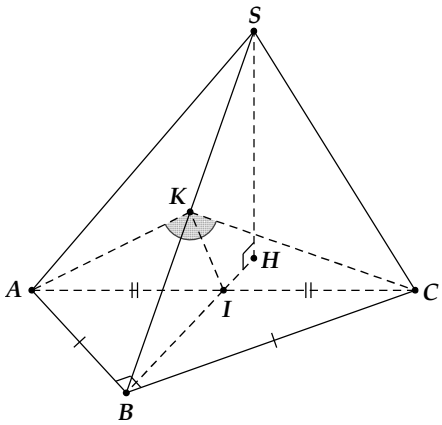
Gọi AM là đường cao của tam giác vuông ABD.

Khi đó, ta có: $AM = \frac{AB.AD}{BD} = \frac{a.3a}{a\sqrt{10}} = \frac{3a}{\sqrt{10}}$

Suy ra $HK = \frac{AM}{2} = \frac{3a}{2\sqrt{10}}$. Do đó: $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \frac{3a}{2\sqrt{10}}.\tan 60° = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$.

Vậy nên: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(AD + BC).AB.SH = \frac{1}{6}(3a + 2a).a.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}a^3}{8}$.

Câu 59. **Chọn A.**



Dễ thấy hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (cạnh chung SB), gọi K là chân đường cao hạ từ A trong ΔSAB suy ra $((SAB),(SBC)) = \widehat{AKC}$.

TH1: $\widehat{AKC} = 60°$ kết hợp I là trung điểm AC suy ra $\widehat{IKC} = 30°$.

Ta có $IB = IC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BH = \frac{4}{3}BI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Từ giả thiết ΔABC vuông cân tại B ta được $AC \perp BI \Rightarrow IC \perp IK$.

Trong ΔICK vuông tại I có $\tan\widehat{IKC}=\dfrac{IC}{IK}\Leftrightarrow IK=\dfrac{IC}{\tan 30^\circ}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Như vậy $IK>IB$ (vô lý)

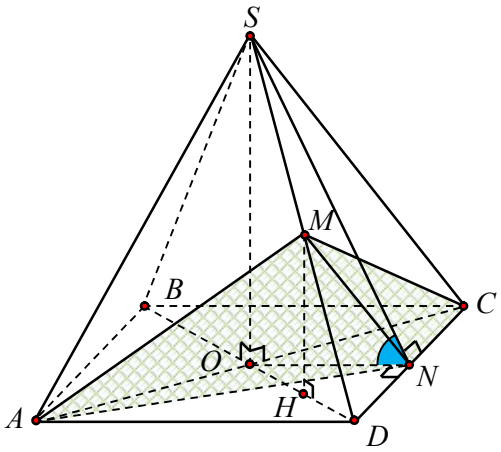
TH2: $\widehat{AKC}=120^\circ$ tương tự phần trên ta có $\tan\widehat{IKC}=\dfrac{IC}{IK}\Leftrightarrow IK=\dfrac{IC}{\tan 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Do $SB\perp(AKC)\Rightarrow SB\perp IK$ nên tam giác BIK vuông tại K và $BK=\sqrt{IB^2-IK^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Như vậy ΔBKI đồng dạng với ΔBHS suy ra: $SH=\dfrac{IK.BH}{BK}=\dfrac{2a}{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{2}.\dfrac{2a}{3}=\dfrac{a^3}{9}$.

Câu 60. **Chọn C.**



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Góc giữa cạnh bên (SAB) và mặt đáy là $\widehat{SNO}=60^\circ$

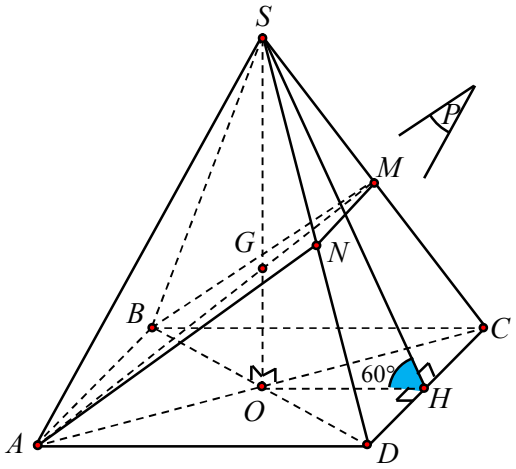
Xét ΔSNO, ta có $SO=NO.\tan 60^\circ=a.\sqrt{3}=a\sqrt{3}$.

Lại có M là trung điểm của SD nên $d\left(M,(ABCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(S,(ABCD)\right)=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

N là trung điểm của CD nên $S_{\Delta ACN}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{1}{4}4a^2=a^2$

Do đó, thể tích khối $MACN$ là $V_{MACN}=\dfrac{1}{3}.d\left(M,(ABCD)\right).S_{ACN}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 61. **Chọn A.**



Gọi H là trung điểm cạnh CD và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau

Giả sử $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SHO}=60^\circ$

ΔSHO vuông tại O có $SO=OH.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác:

$$\begin{cases}(P)\cap(SCD)=MN\\ AB\subset(P),MN\subset(SCD)\Rightarrow MN//CD//AB\\ AB//CD\end{cases}$$

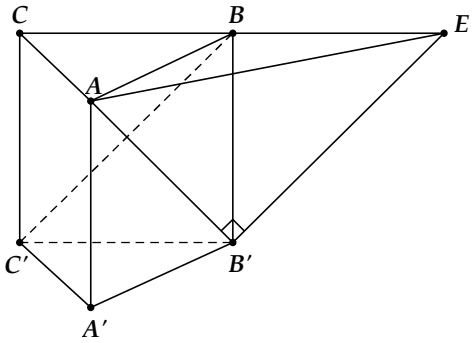
Mà G là trọng tâm ΔSAC nên G cũng là trọng tâm $\Delta SBD\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$.

Ta lại có $\dfrac{V_{SABM}}{V_{SABC}}=\dfrac{SM}{SC}\Rightarrow V_{SABM}=\dfrac{1}{2}V_{SABC}=\dfrac{1}{4}V_{SABCD}$

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SACD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}\Rightarrow V_{SAMN}=\dfrac{1}{4}V_{SACD}=\dfrac{1}{8}V_{SABCD}$

Khi đó $V_{SABMN}=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\right)V_{SABCD}=\dfrac{3}{8}V_{SABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 62. **Chọn C.**



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm B.

Khi đó tam giác ACE vuông tại A.

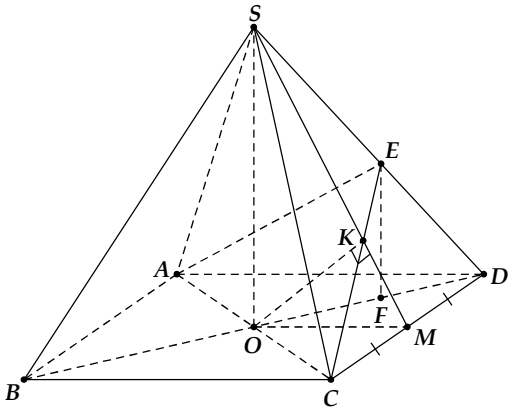
$\Rightarrow AE=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Mặt khác, ta có $BC'=B'E=AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'.

$\Rightarrow AB'=\dfrac{AE}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra: $AA'=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2-a^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 63. **Chọn A.**



Gọi M là trung điểm CD. Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Dựng $OK\perp SM$ dễ thấy $OK\perp(SCD)$.

Vậy $OK\subset(P)$.

Kéo dài $CK\cap SD=\{E\}$.

Đây là giao điểm cần tìm.

Ta có $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{E.ACD}}=5\Rightarrow\dfrac{d\left(S,(ABCD)\right).S_{ABCD}}{d\left(E,(ABCD)\right).S_{ACD}}=5$

$\Rightarrow\dfrac{d\left(S,(ABCD)\right).2S_{ACD}}{d\left(E,(ABCD)\right).S_{ACD}}=5\Rightarrow\dfrac{d\left(S,(ABCD)\right)}{d\left(E,(ABCD)\right)}=\dfrac{5}{2}$.

Dựng $EF//SO\left(F\in OD\right)$ vậy $\Rightarrow\dfrac{DE}{DS}=\dfrac{DF}{DO}=\dfrac{EF}{SO}=\dfrac{2}{5}$.

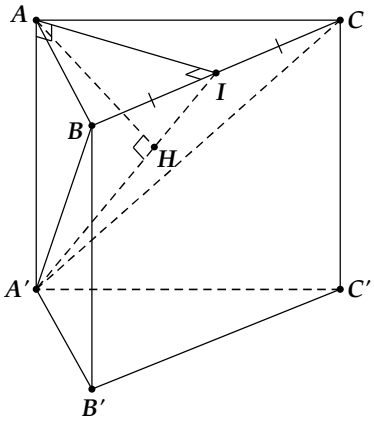
Giả sử $AB=a$, $OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SD=b$.

Xét tam giác vuông SOD. Dễ thấy $OE\perp SD$ ta có $OD^2=DE.DS\Rightarrow\dfrac{OD^2}{DS^2}=\dfrac{DE}{DS}=\dfrac{2}{5}$.

$\Rightarrow DS=\dfrac{\sqrt{5}OD}{\sqrt{2}}\Rightarrow DS=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=a$

Xét tam giác vuông SOM vuông tại O có $\cos\widehat{SMO}=\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{SMO}=60^\circ$.

Câu 64. **Chọn C.**



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$.

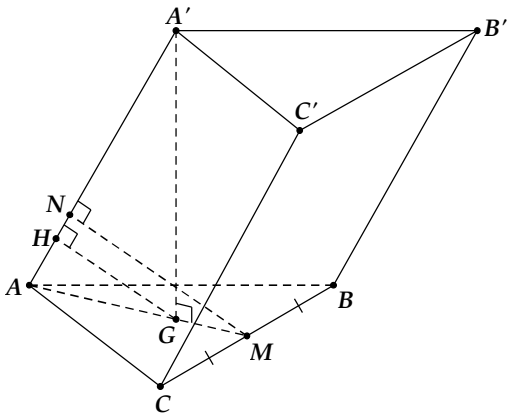
Khi đó ta có: $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AH=\dfrac{a}{2}$.

Trong Δ vuông $AA'I$ ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AA'^2}+\dfrac{1}{AI^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{4}{3a^2}=\frac{8}{3a^2}$$

Suy ra: $AA'=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ là: $V=S_{\Delta ABC}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 65. **Chọn C.**



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của $BC\Rightarrow A'G\perp\left(ABC\right)$.

Trong $\left(AA'M\right)$ dựng $MN\perp AA'$, ta có:

$$\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp A'G\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(AA'G\right)\Rightarrow BC\perp MN.$$

$$\Rightarrow d\left(AA',BC\right)=MN=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

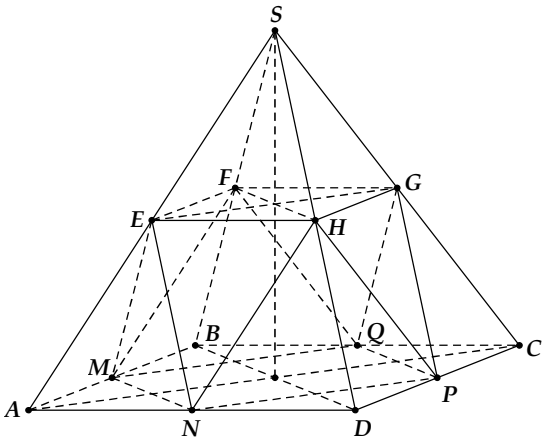
Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH//MN\Rightarrow\dfrac{GH}{MN}=\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GH=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{GA^2}+\dfrac{1}{GA'^2}\Rightarrow\dfrac{1}{GA'^2}=\dfrac{1}{GH^2}-\dfrac{1}{GA^2}=\dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{27}{3a^2}\Rightarrow GA'=\dfrac{a}{3}$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V=S_{ABC}.A'G=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 66. **Chọn D.**

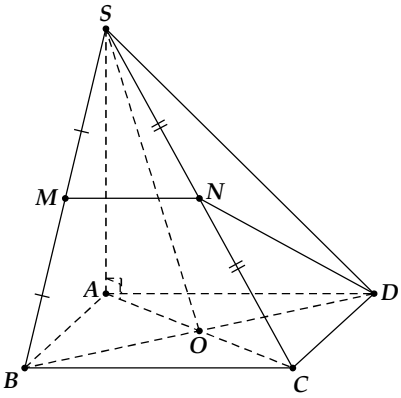


Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, có thể tích $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.1.2=\frac{2}{3}$.

Gọi $M;N;P;Q;E;F;G;H$ là trung điểm tất cả các cạnh của hình chóp (hình vẽ). Khi đó $V_{MNPQEFGH}=V_{S.ABCD}-\left(V_{S.EFGH}+V_{F.MBQ}+V_{G.QCP}+V_{H.PDN}+V_{E.MAN}\right)$, với $V_{S.EFGH}=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.1=\frac{1}{12}$

Các khối chóp còn lại cùng chiêu cao và diện tích đáy bằng nhau nên thể tích của chúng bằng $V_{E.MAN}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{24}$. Vậy thể tích cần tính $V_{MNPQEFGH}=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}-\frac{4}{24}=\frac{5}{12}$.

Câu 67. **Chọn A.**



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó ta có $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$

nên $\widehat{SOA}=60°$. Khi đó $\tan 60°=\frac{SA}{AO}$

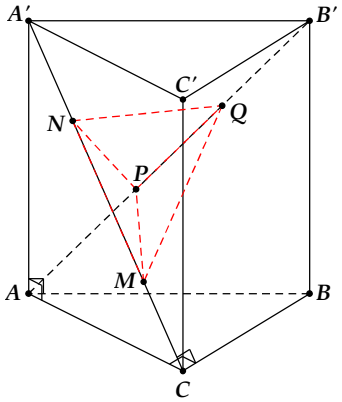
$\Rightarrow SA=AO.\tan 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}a.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{4}$

và $\frac{V_{S.AND}}{V_{S.ACD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{1}{2}$.

Do đó $V_{S.ADMN}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}.V_{S.ABCD}=\frac{3}{8}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 68. **Chọn C.**



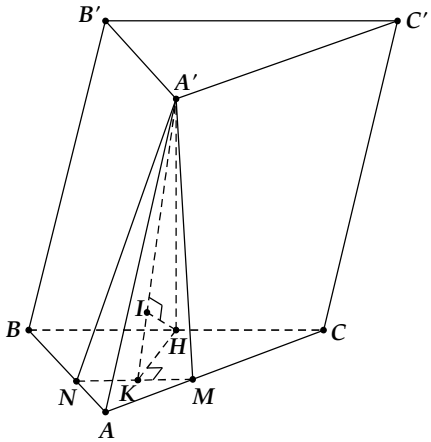
Do $MNPQ$ là tứ diện đều suy ra $AB'\perp A'C$. Đặt $A'A=x$

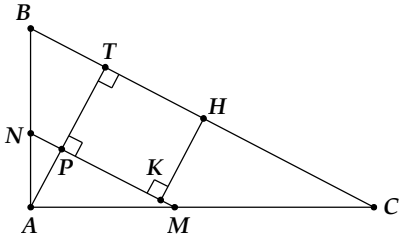
Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{A'C}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{A'C}=0$

$\Leftrightarrow x.\sqrt{a^2+x^2}.\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}-x.\sqrt{a^2+x^2}.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=0\Leftrightarrow x=a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=a.\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3}{2}$.

Câu 69. **Chọn A.**





Kẻ $MN // BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$d(A'M;BC) = d(BC;(A'MN)) = d(H;(A'MN)) = HI \Rightarrow HI = \frac{a}{2}$.

Kẻ $AT // HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \frac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AT^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}AT = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = A'H.S_{ABC} = a.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

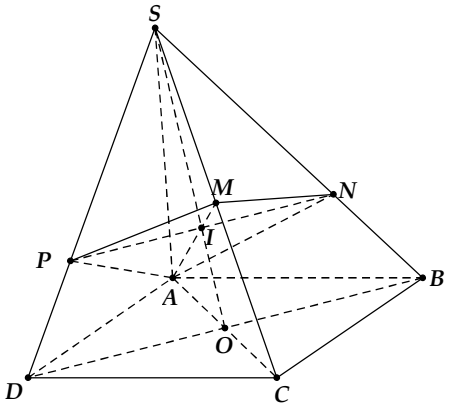
Câu 70. **Chọn B.**

Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

Gọi I là giao điểm của SO và AM.

Do $(P) // BD$ nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến NP qua I và song song với BD; $(N \in SB; P \in SD)$.



Xét tam giác SAC có I là giao điểm hai trung tuyến nên I là trọng tâm.

Ta có $\frac{V_{S.APN}}{V_{S.ADB}} = \frac{SP.SN}{SD.SB} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.APN} = \frac{4}{9}V_{S.ADB} = \frac{4}{9}.\frac{1}{2}V = \frac{2}{9}V$.

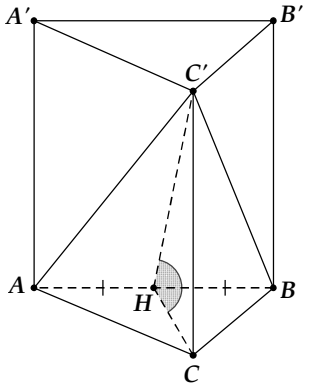
Tương tự $\frac{V_{S.PMN}}{V_{S.DCB}} = \frac{SP.SM.SN}{SD.SC.SB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.PMN} = \frac{2}{9}V_{S.DCB} = \frac{2}{9}.\frac{1}{2}V = \frac{1}{9}V$.

Từ đó $V_1 = V_{S.APN} + V_{S.PMN} = \frac{1}{3}V$. Do đó $\frac{V_2}{V_1} = 2$.

Câu 71. **Chọn C.**

Đặt $CC' = h$, $CH = b$, $AB = a$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.h = S_{\Delta ABC'}.h.\cos\alpha = 8\sqrt{3}h.\cos\alpha$.



Ta có $S_{\Delta ABC'} = \frac{1}{2}C'H.AB = \frac{1}{2}.\frac{h}{\sin\alpha}.a = \frac{1}{2}.\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{2}{\sqrt{3}}.b$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{h}{\sin\alpha}.h\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{h^2}{\sin^2\alpha}\cos\alpha$.

Nên $8\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{h^2}{\sin\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow h^2 = 24.\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

Từ đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}h.\cos\alpha \Leftrightarrow V^2 = 192h^2.\cos^2\alpha = 4608.\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.\cos^2\alpha = 4608\sin^2\alpha\cos\alpha$.

$= 4608(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4608(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$.

Đặt $t=\cos\alpha, t\in[0;1]$. Xét hàm số $f(t)=t-t^3\Rightarrow f'(t)=1-3t^2$.

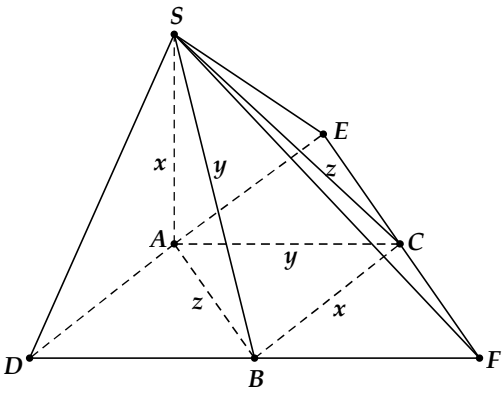
Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow 1-3t^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\ (t\in[0;1])$.

Ta có $f(0)=0,\ f(1)=0,\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max}=4608.\dfrac{2}{\sqrt{3}}=3072\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 72. **Chọn A.**

Cách 1:



Trong mặt phẳng (ABC) dựng D, E, F sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF.

Khi đó ta có $DE=2SA=2x$; $DF=2SB=2y$; $EF=2SC=2z$.

Suy ra SD, SE, SF đôi một vuông góc.

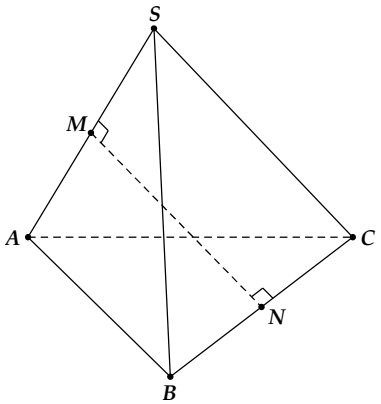
Ta có $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}V_{S.DEF}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{6}.SD.SE.SF$.

Mặt khác $\begin{cases}SD^2+SE^2=4x^2\\SD^2+SF^2=4y^2\\SE^2+SF^2=4z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SD^2=2\left(x^2+y^2-z^2\right)\\SE^2=2\left(x^2+z^2-y^2\right)\\SF^2=2\left(y^2+z^2-x^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SD=2\sqrt{6-z^2}\\SE=2\sqrt{6-y^2}\\SF=2\sqrt{6-x^2}\end{cases}$.

Khi đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{24}.8.\sqrt{\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-z^2\right)}\le\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(\dfrac{6-x^2+6-y^2+6-z^2}{3}\right)^3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2:



Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC.

Lúc đó MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

ΔSMN ta có $MN=\sqrt{SN^2-SM^2}=\sqrt{\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2}}$.

$V=\dfrac{1}{6}SA.BC.MN.\sin(SA,BC)$

$=\dfrac{1}{6}x^2\sqrt{\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2}}.\sqrt{1-\cos^2(SA,BC)}$

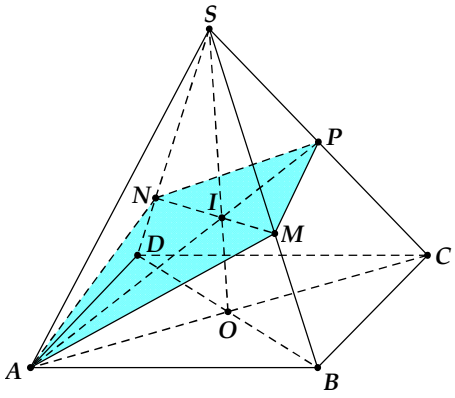
$=\dfrac{1}{6}x^2\sqrt{\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2}}.\sqrt{1-\dfrac{\left(y^2-z^2\right)^2}{x^4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)\left(z^2+x^2-y^2\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(12-2z^2\right)\left(12-2x^2\right)\left(12-2y^2\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{8\left(6-z^2\right)\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)}$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)}\le\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{6-z^2+6-y^2+6-x^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=12\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2$. Lúc đó $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 73. **Chọn D.**



Đặt $\frac{SM}{SB}=x$, $\frac{SN}{SD}=y$, $0<x$, $y\le 1$.

Vì $\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}$ nên

$1+2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$

Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}+\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}$

$$=\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}+\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}$$

$$=\frac{1}{2}.y.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.x.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+y)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$$

Vì $x>0$, $y>0$ nên $\frac{1}{3}<x<1$. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$ trên $\left(\frac{1}{3};1\right]$

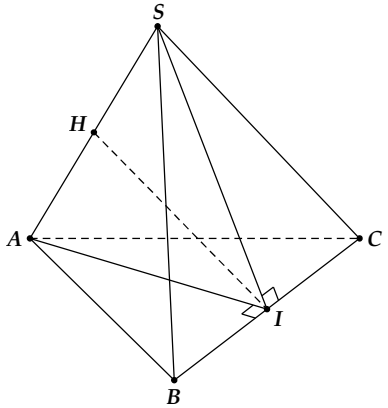
Ta có $f'(x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(3x-1)^2}\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
y'	||	$-$	0	$+$	
y	||	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{8}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 74. **Chọn C.**



Gọi H, I tương ứng là trung điểm của SA, BC.

$\Delta ABC=\Delta SBC$ (c.c.c) $\Rightarrow AI=SI$

Tam giác SAI cân tại I $\Rightarrow IH\perp SA$.

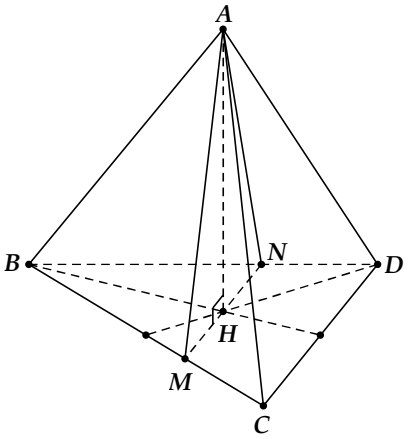
$\left.\begin{matrix}BC\perp SI\\BC\perp AI\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp AI; BC\perp SA$.

$V_{SABC}=\frac{1}{6}SA.BC.HI=\frac{1}{6}xy\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}\le\frac{1}{24}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}$.

$\Rightarrow V_{SABC}\le\frac{1}{12}.\frac{\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}+4-\left(x^2+y^2\right)}{3}=\frac{1}{9}$. Dấu ''='' xảy ra khi $x=y=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy V_{SABC} lớn nhất khi $x+y=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Câu 75. **Chọn A.**



Gọi H là tâm tam giác BCD, ta có $AH\perp(BCD)$, mà $(AMN)\perp(BCD)$ nên $AH\subset(AMN)$ hay MN luôn đi qua H.

Ta có $BH=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp $ABMN$ là :

$V=\frac{1}{3}.AH.S_{BMN}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}BM.BN.\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{12}BM.BN$

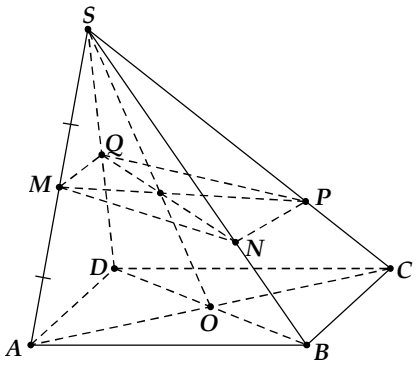
Do MN luôn đi qua H và M chạy trên BC nên :

+ $BM.BN$ lớn nhất khi $M\equiv C$ hoặc $N\equiv D$ khi đó $V_1=\frac{\sqrt{2}}{24}$.

+ $BM.BN$ nhỏ nhất khi $MN//CD$ khi $BM=BN=\frac{2}{3}\Rightarrow V_2=\frac{\sqrt{2}}{27}$.

Vậy $V_1+V_2=\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

Câu 76. **Chọn D.**



Đặt $\frac{SP}{SC}=x\ \ 0<x\le 1$. Ta có $\frac{SM}{SA}+\frac{SP}{SC}=\frac{SN}{SB}+\frac{SQ}{SD}$

$\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{2}+x-\frac{2}{3}=x-\frac{1}{6}\ \left(x>\frac{1}{6}\right)$.

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có

$V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2V_{S.ACD}$

$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{3}x$;

$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{2}x\left(x-\frac{1}{6}\right)$.

Suy ra $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x\left(x-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x$.

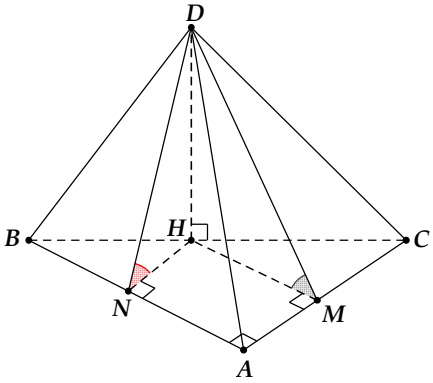
Xét $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x$ với $\frac{1}{6}<x\le 1$; $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\notin\left(\frac{1}{6};1\right]$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{6}$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{8}$

Từ BBT ta có $\max\limits_{\left(\frac{1}{6};1\right]} f(x)=\frac{3}{8}$. Vậy $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$

Câu 77. **Chọn A.**



Kẻ $DH\perp BC\Rightarrow DH\perp(ABC)$. Kẻ

$HN\perp AB, HM\perp AC$, ($N\in AB$, $M\in AC$).

Ta có $\left(\widehat{(DAC),(ABC)}\right)=\widehat{(DM,MH)}=\widehat{DMH}=\alpha$,

$\left(\widehat{(DAB),(ABC)}\right)=\widehat{(DN,NH)}=\widehat{DNH}=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Ta có: $V_{D.ABC}=\frac{1}{3}.DH.S_{ABC}=\frac{a^2}{2}.DH$

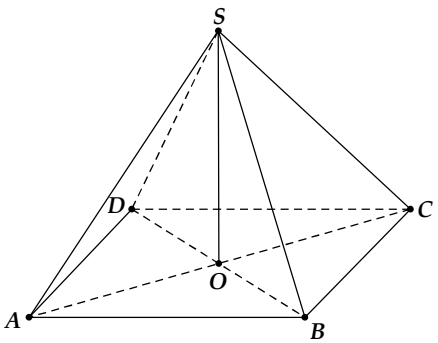
$\Rightarrow V_{D.ABC}$ max khi $DH_{\max}$.

$DH=HM.\tan\alpha=HN.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=HN.\cot\alpha\Rightarrow DH^2=HM.HN$

Theo Talet $\frac{HM}{AB}=\frac{HC}{BC},\frac{HN}{AC}=\frac{HB}{BC}\Rightarrow HM.HN=\frac{AB.AC.HB.HC}{BC^2}\le\frac{AB.AC.BC^2}{4BC^2}$

$\Rightarrow DH^2=HM.HN\le\frac{AB.AC}{4}=\frac{3a^2}{4}$. $DH_{\max}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{D.ABC}=\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 78. **Chọn B.**



Gọi O là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $\Delta SAO=\Delta SBO=\Delta SCO=\Delta SDO$ (tam giác vuông, SO là cạnh chung, $SA=SB=SC=SD$).

Nên $OA=OB=OC=OD$ suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$

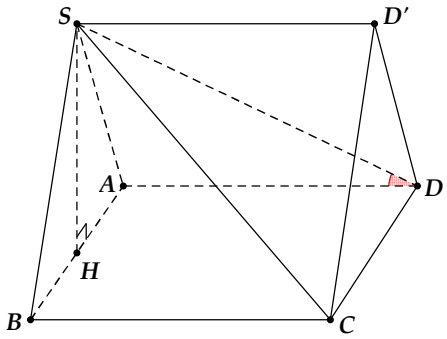
Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật có O là tâm.

Đặt $AD=x\Rightarrow AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2}$

Nên $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}-\frac{a^2+x^2}{4}}=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}ABCD.SO=\frac{1}{3}a.x.\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{3}a.2.\frac{x}{2}.\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}\le\frac{1}{3}a\left(\frac{x^2}{4}+\left(a^2-\frac{x^2}{4}\right)\right)=\frac{1}{3}a^3$.

Câu 79. **Chọn C.**



Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD'//SA$ mà $SA\perp(SBC)$ (vì $SA\perp SB$, $SA\perp BC$) nên D' là hình chiếu vuông góc của D lên (SBC).

Góc giữa SD và (SBC) là $\alpha=\widehat{DSD'}=\widehat{SDA}$

$\Rightarrow SA=AD.\tan\alpha=2a.\tan\alpha$.

Đặt $\tan\alpha=x$, $x\in(0;1)$.

Gọi H là hình chiếu của S lên AB, theo đề ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}4a^2.SH$.

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất. Vì tam giác SAB vuông tại S nên

$$SH=\frac{SA.SB}{AB}=\frac{SA.\sqrt{AB^2-SA^2}}{AB}=\frac{2ax\sqrt{4a^2-4a^2x^2}}{2a}=2ax\sqrt{1-x^2}\le 2a\frac{x^2+1-x^2}{2}=a$$

Từ đó $\max SH=a$ khi $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

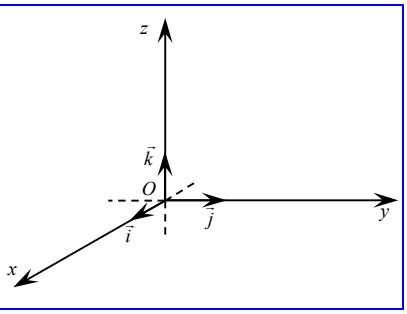
Suy ra $\max V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a.4a^2=\frac{4}{3}a^3$.

PHẦN MỞ RỘNG: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vecto đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là ***hệ trục tọa độ vuông góc*** trong không gian.



Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ vecto

a. Định nghĩa: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b. Tính chất

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0)$, $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ $(k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, $(b_1,\ b_2,\ b_3 \neq 0)$
- $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm

a. Định nghĩa:

$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý: • $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

• $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b. Tính chất: Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ

a. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

b. Tính chất

- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$; $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$ • $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ • $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$; $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$ *(Chương trình nâng cao)*
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ *(chứng minh 3 điểm thẳng hàng)*

Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– ***Tích có hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$; $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *đồng phẳng* $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

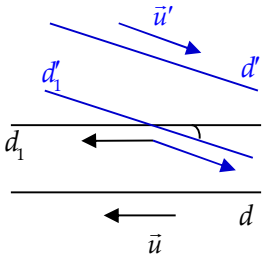
5. Vấn đề về góc

a. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng d, d' có các vectơ chỉ phương lần lượt là:

$\vec{u} = (a, b, c)$; $\vec{u'} = (a', b', c')$.

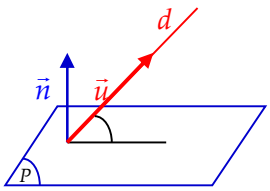
Ta có: $\cos(d; d') = \left|\cos(\vec{u}, \vec{u'})\right| = \frac{|a.a' + b.b' + c.c'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$, $0 \le (d; d') \le 90^0$



b. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có 1 vecto chỉ phương $\vec{u}=(a,b,c)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vecto pháp tuyến $\vec{n}=(A,B,C)$.



Ta có: $\sin(d;(P))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\dfrac{|a.A+b.B+c.C|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $0\le(d;(P))\le 90^0$

c. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}$. Tức là:

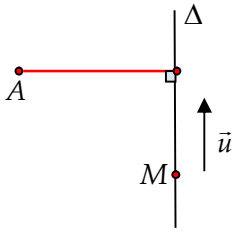
$$\cos((\alpha),(\beta))=\left|\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Đặc biệt: $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0.$

6. Vấn đề về khoảng cách

a. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

Cho điểm A và đường thẳng Δ $(A\notin\Delta)$ đi qua điểm M và có 1 vecto chỉ phương $\vec{u}$.



Ta có: $d(A;\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

b. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$

Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

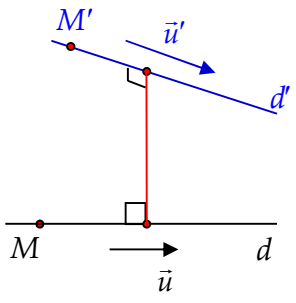
$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

c. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho 2 đường thẳng chéo nhau d,d'.

- d đi qua điểm M và có 1 vecto chỉ phương $\vec{u}$
- d' đi qua điểm M' và có 1 vecto chỉ phương $\vec{u'}$.

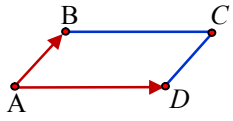


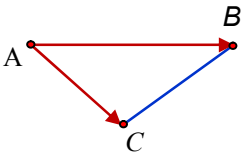
Ta có: $d(d;d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$

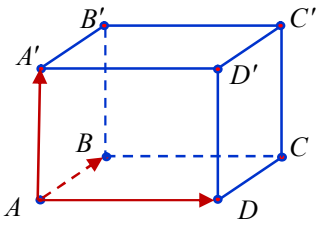
Đặc biệt: Nếu $\Delta//\Delta'$ *thì* $d(\Delta;\Delta')=d(A;\Delta')$ $(A\in\Delta)$.

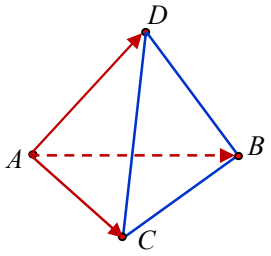
7. Các công thức về tính diện tích và thể tích

- *Diện tích hình bình hành* $ABCD$: $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$
- *Diện tích tam giác* ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- *Thể tích khối hộp* $ABCDA'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- *Thể tích tứ diện* $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA ỨNG DỤNG HÌNH GIẢI TÍCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

Bài toán 1: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CA' bằng

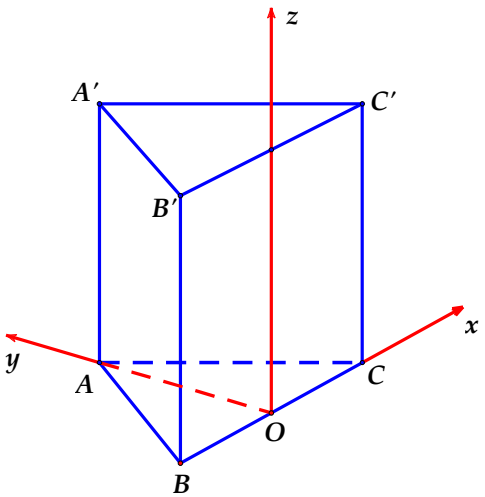
A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{24}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018)

Lời giải:

Chọn A.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào trung điểm O của BC, ta



được: $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$; $C\left(\frac{1}{2}a;0;0\right)$; $C'\left(\frac{1}{2}a;0;\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$;

$A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}a;\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

Ta có: $\overrightarrow{A'C}\left(\frac{1}{2}a;\frac{-\sqrt{3}}{2}a;\frac{-\sqrt{2}}{2}a\right)$; $\overrightarrow{BC'}\left(a;0;\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$;

$\overrightarrow{CB}(a;0;0)$

Suy ra: $d\left[A'C, BC'\right] = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{BC'}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài toán 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a,\ SA=a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG và đường thẳng SA bằng

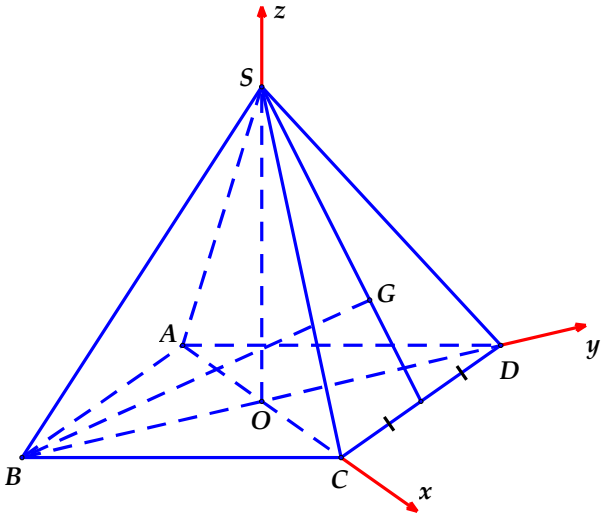
A. $\arccos\dfrac{\sqrt{33}}{22}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{330}}{110}$. **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{11}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

(Trích đề thi thử SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.

Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$OA=OB=OC=OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O:

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Ta có: $A\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$C\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $D\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right)$.

G là trọng tâm tam giác SCD nên: $G\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\dfrac{a\sqrt{10}}{6}\right)$.

$\overrightarrow{SA}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BG}=\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\dfrac{2a\sqrt{2}}{3};\dfrac{a\sqrt{10}}{6}\right)$.

$$\cos(SA,BG)=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BG}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BG}\right|}=\frac{\left|-\dfrac{a^2}{6}-\dfrac{5a^2}{6}\right|}{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{11}}{3}}=\frac{\sqrt{33}}{11}\Rightarrow(SA,BG)=\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Bài toán 3: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên hai tia $Bx,\ Dy$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm $M,\ N$ sao cho $BM=\dfrac{a}{4};\ DN=2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

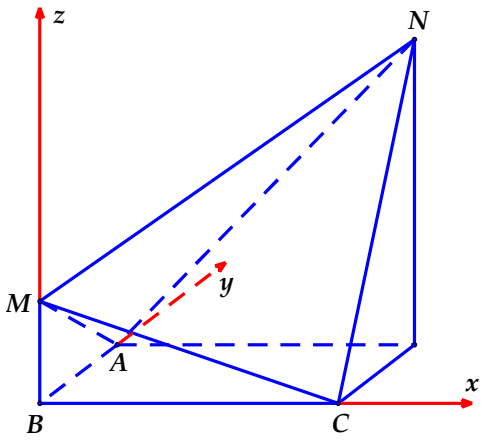
A. $\varphi=30°$. **B.** $\varphi=60°$. **C.** $\varphi=45°$. **D.** $\varphi=90°$.

(THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $B(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $C(a;0;0)$, $M\left(0;0;\frac{a}{4}\right)$, $N(a;a;2a)$.

$\overrightarrow{AM}=\left(0;-a;\frac{a}{4}\right)$, $\overrightarrow{AN}=(0;0;2a)$, $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(-2a^2;\frac{a^2}{4};a^2\right)$ là VTPT của mp(AMN)

$\overrightarrow{CM}=\left(-a;\,0;\,\frac{a}{4}\right)$, $\overrightarrow{CN}=(0;\,a;\,2a)$, $\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right]=\left(\frac{-a^2}{4};2a^2;-a^2\right)$ là VTPT của mp(CMN)

Do đó: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\frac{a^4}{2}+\frac{a^4}{2}-a^4\right|}{\sqrt{4a^4+\frac{a^4}{16}+a^4}\cdot\sqrt{4a^4+\frac{a^4}{16}+a^4}}=0\Rightarrow\varphi=90^\circ$.

Bài toán 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.

Tọa độ hóa với

$Ox\equiv OC$, $Oy\equiv OB$, $Oz\equiv OS$ $(OA=1)$.

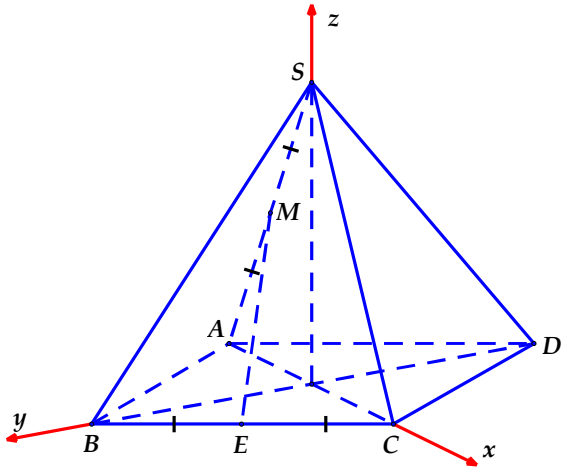
Ta có $C(1;0;0)$, $A(-1;0;0)$

$\Rightarrow(SBD)$ nhận $\overrightarrow{AC}=(2;0;0)$ là một VTPT.

Từ $SA=AB=OA\sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=1$

$\Rightarrow\begin{cases}S(0;0;1)\\A(-1;0;0)\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases}C(1;0;0)\\B(0;1;0)\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$



$\Rightarrow EM$ nhận $\overrightarrow{ME}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là một VTCP

$$\Rightarrow \sin\alpha=\sin\left(\widehat{EM;(SBD)}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{AC}\right|}{ME.AC}=\frac{2}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}.2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{2}.$$

Bài toán 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC và AA' theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

(Trích đề thi thử SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn C.

Theo đề ra ta có: $\left(AA';(ABC)\right)=\widehat{A'AH}=60°$.

Chọn hệ trục toạ độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Tam giác $A'HA$ vuông tại H: $A'H=AH.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

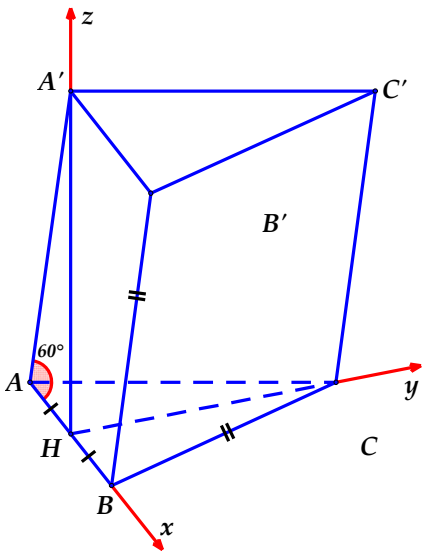
Tam giác ABC đều cạnh $2a\Rightarrow CH=a\sqrt{3}$.

Ta có: $A(-a;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{AA'}=\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{AB}=(2a;0;0)$.

$\left[\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BC}\right]=\left(-3a^2;-a^2\sqrt{3};a^2\sqrt{3}\right)$; $\left[\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}=-6a^3$.

$$d\left(AA';BC\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\frac{6a^3}{a^2\sqrt{15}}=\frac{2a\sqrt{15}}{5}.$$



Bài toán 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=1$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng AE.

A. $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{21}}{54}$. **C.** $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{12}}{4}$. **D.** $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{21}}{18}$.

(Trích đề thi thử SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn B.

Giả sử cạnh đáy có độ dài a; $SH=h$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

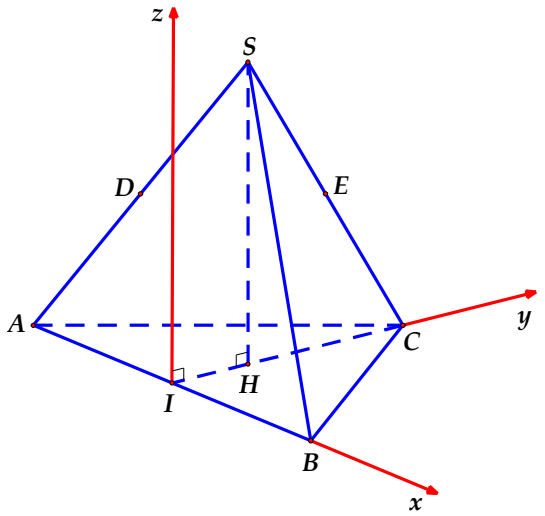
$I(0;0;0)$; $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$;

$S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right)$; $D\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$; $E\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{h}{2}\right)$.

Lại có $BD\perp AE\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AE}=0$

$\Leftrightarrow a=h\sqrt{\frac{6}{7}}=\sqrt{\frac{3-a^2}{3}.\frac{6}{7}}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{7}}{3}.\frac{\frac{2}{3}.\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{21}}{54}$.



Bài toán 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\frac{1}{8}a^3$. **B.** $V=\frac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\frac{1}{36}a^3$. **D.** $V=\frac{1}{12}a^3$.

(Trích đề thi thử THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau:

Gốc $O\equiv A$, trục Ox nhận $\overrightarrow{AD}$ làm véc tơ đơn vị.

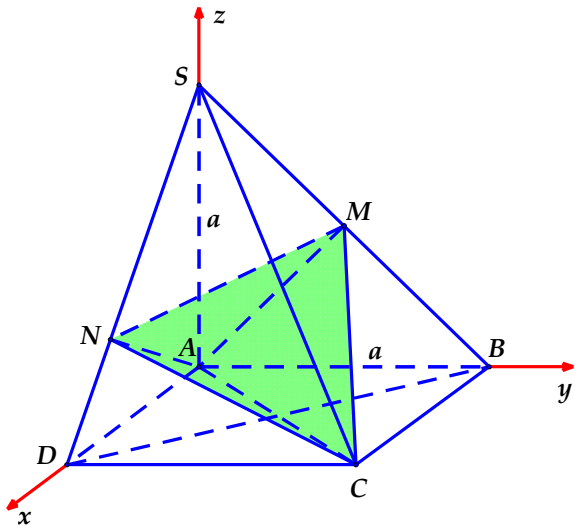
Trục Oy nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc tơ đơn vị, trục Oz nhận $\overrightarrow{AS}$ làm véc tơ đơn vị.

Khi đó $A(0;0;0)$; $M\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $C(1;1;0)$; $N\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{MN}\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right)$; $\overrightarrow{MC}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right]=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$, $\overrightarrow{MA}\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$V_{ACMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right].\overrightarrow{MA}\right|=\frac{1}{12}$. Vậy $V=\frac{1}{12}a^3$.



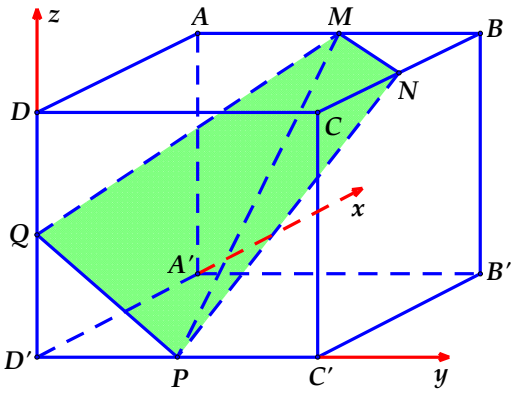
Bài toán 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

(Trích đề thi thử THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn D.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $\begin{cases} D' \equiv O \\ Ox \equiv D'A' \\ Oy \equiv D'C' \\ Oz \equiv D'D \end{cases}$

Khi đó: $A(1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$,

$A'(1;0;0)$, $B'(1;1;0)$, $C'(0;1;0)$

$M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{MP}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MQ}\left(-1;\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

$\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \frac{1}{24}$.

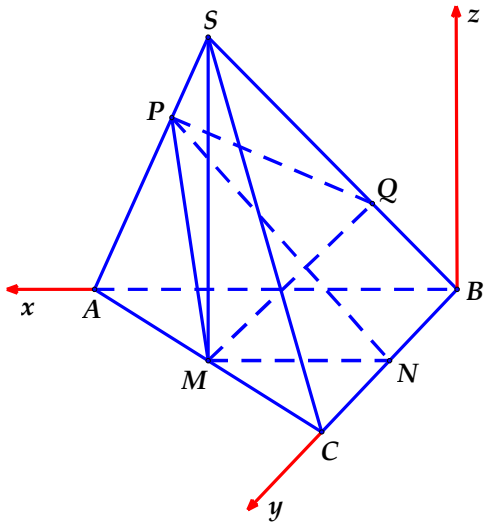
Bài toán 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 3$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên hai cạnh SA, SB lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $SP = 1$, $SQ = 2$. Tính thể tích V của tứ diện $MNPQ$.

A. $V = \frac{\sqrt{7}}{18}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{34}}{12}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{34}}{144}$.

(Trích đề thi thưt SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)

Lời giải:

Chọn A.



Ta có $SA = SB = SC$, $MA = MB = MC \Rightarrow SM \perp (ABC)$

Ta có $AB = BC = 2$, $SM = \sqrt{7}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $B(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $N(0;1;0)$,

$M(1;1;0)$, $S(1;1;\sqrt{7})$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (1;0;0), \overrightarrow{NQ} = \left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{\sqrt{7}}{3}\right), \overrightarrow{NP} = \left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NQ}\right] = \left(0;-\frac{\sqrt{7}}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Suy ra $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NQ}\right].\overrightarrow{NP}\right|=\frac{1}{6}.\left|\frac{\sqrt{7}}{9}-\frac{4\sqrt{7}}{9}\right|=\frac{\sqrt{7}}{18}$ *(đvtt).*

Bài toán 10: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB'}=\vec{0}$; $\overrightarrow{NB'}=3\overrightarrow{NC'}$. Biết hai mặt phẳng (MCA) và (NAB) vuông góc với nhau. Tính thể tích của hình lăng trụ.

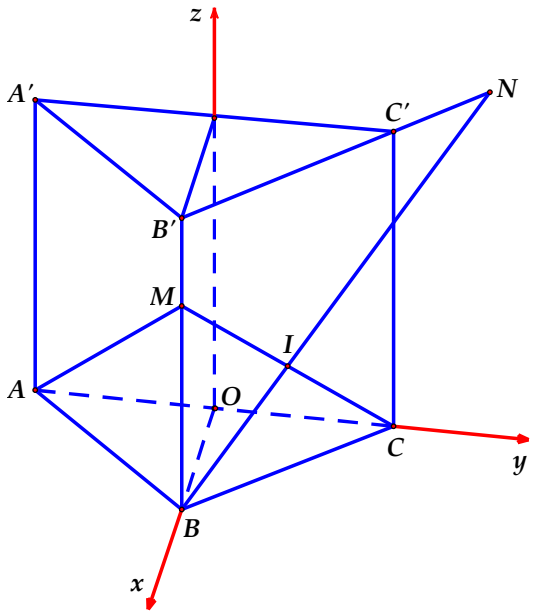
A. $\frac{9a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{9a^3\sqrt{2}}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

(Trích đề thi thử PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018)

Lời giải:

Chọn B.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Ta có: $A\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$,

$M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{2h}{3}\right)$, $I\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};\frac{h}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{BI}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};\frac{h}{3}\right)$

$\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BI}\right]=\left(\frac{ah}{6};\frac{ah\sqrt{3}}{6};\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\overrightarrow{AC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{2h}{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\right]=\left(\frac{2ah}{3};0;\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Ta có $(NAB)\perp(MAC)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow\frac{2a^2h^2}{6.3}-\frac{3a^4}{8}=0\Leftrightarrow h=\frac{3a\sqrt{6}}{4}$

$V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a\sqrt{6}}{4}.\frac{1}{2}.a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9a^3\sqrt{2}}{16}$.

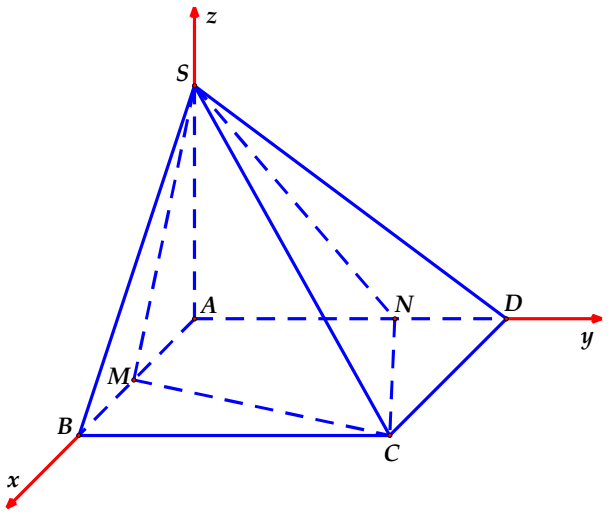
Bài toán 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA=2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{4}$. **C.** $T=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $T=\frac{13}{9}$.

(Trích đề thi thử SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)

Lời giải:

Chọn B.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM=x$, $AN=y$, $x,y\in[0;2]$, suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM}=(x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC}=(2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN}=(0;y;-2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]=(4;2x-4;2x)$, $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right]=(4-2y;-4;-2y)$.

Do $(SMC)\perp(SNC)$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4(4-4y)-4(2x-4)-4xy=0\Leftrightarrow xy+2(x+y)=8$.

$\Leftrightarrow y=\dfrac{8-2x}{x+2}$, do $y\le 2$ nên $\dfrac{8-2x}{x+2}\le 2\Leftrightarrow x\ge 1$.

$S_{AMCN}=S_{ABCD}-S_{BMC}-S_{DNC}=4-(2-x)-(2-y)=x+y$.

Do đó $V_{S.AMCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\dfrac{2}{3}(x+y)=\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{8-2x}{x+2}\right)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$.

Xét $f(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$ với $x\in[1;2]$, $f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-8=0\Leftrightarrow x=-2+2\sqrt{3}$; $x=-2-2\sqrt{3}$ (loại).

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[0;2]}f(x)=f(1)=f(2)=2$.

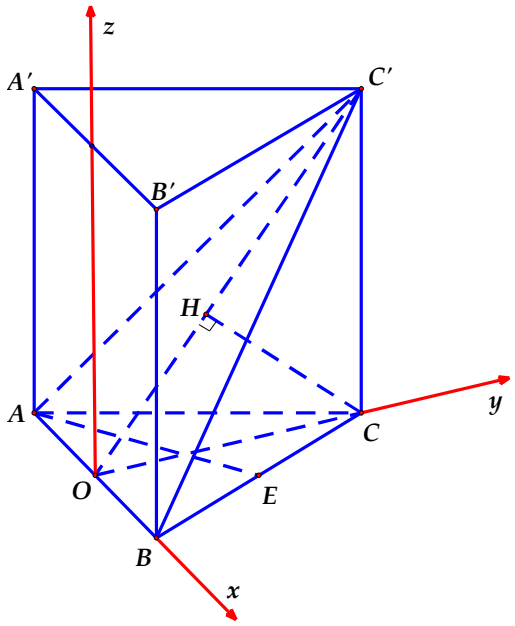
Vậy $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}$.

Bài toán 12: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $3a^3\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $a^3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3a^3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $3a^3\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải:

Chọn C.



Gọi O là trung điểm của AB, E là trung điểm của BC

Trong $mp(C'CO)$ kẻ $CH \perp C'O$ tại H

Khi đó $d(C,(ABC')) = CH = a$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gọi $2x$ là độ dài cạnh của tam giác ABC

Ta có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{C'C^2} + \frac{1}{CO^2} \Rightarrow \frac{1}{C'C^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CO^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\left(\frac{2x\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3x^2 - a^2}{3a^2x^2} \Rightarrow C'C = \frac{\sqrt{3x^2 - a^2}}{ax\sqrt{3}}$

Khi đó $A(-x;0;0)$, $B(x;0;0)$, $C(0;x\sqrt{3};0)$, $C'\left(0;x\sqrt{3};\frac{\sqrt{3x^2-a^2}}{ax\sqrt{3}}\right)$, $E\left(\frac{x}{2};\frac{x\sqrt{3}}{2};0\right)$

VTPT của mặt phẳng (ABC') là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(0;-\frac{2ax^2\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2-a^2}};2x^2\sqrt{3}\right)$

VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{AE} = \left(\frac{3x}{2};\frac{x\sqrt{3}}{2};0\right)$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{3ax^3}{\sqrt{3x^2-a^2}}\right|}{\sqrt{\frac{12a^2x^4}{3x^2-a^2}+12x^4}.\sqrt{\frac{9x^2}{4}+\frac{3x^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = a$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = C'C.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Chủ đề 5

NÓN - TRỤ - CẦU

☆☆☆

A. MẶT NÓN

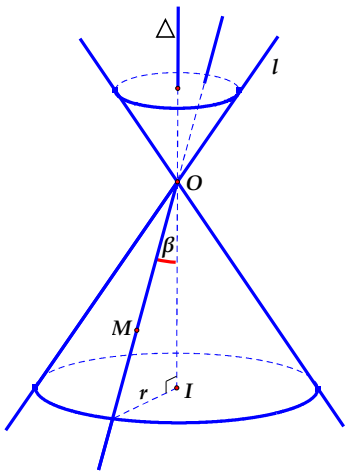
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Mặt nón tròn xoay

Cho đường thẳng Δ. Xét đường thẳng l cắt Δ tại O và chúng tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón. Khi đó:

+ Đường thẳng Δ gọi là trục
+ Đường thẳng l được gọi là đường sinh
+ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

Nếu M là một điểm tùy ý của mặt nón $\aleph$ khác với điểm O thì đường thẳng OM nằm hoàn toàn trên mặt nón đó. Có thể xem mặt nón $\aleph$ sinh bởi đường thẳng OM khi quay quanh Δ. Bởi thế, OM cũng được gọi là đường sinh của mặt nón đó.



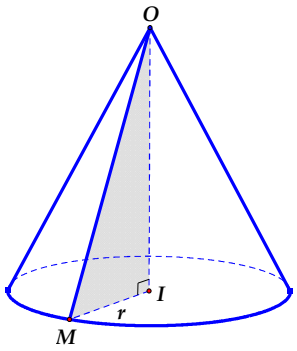
2. Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

Khi đó:

✧ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

✧ Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



3. Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

✪ Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$

✪ Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{S_{đ} = \pi r^2}$

✪ Diện tích toàn phần: $\boxed{S_{tp} = \pi rl + \pi r^2}$

✪ Thể tích khối nón: $\boxed{V_{non} = \frac{1}{3} S_{đ}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

4. Giao tuyến của mặt tròn xoay và mặt phẳng

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng (P) thì giao tuyến sẽ là:

★ Trường hợp 1: Mặt phẳng (P) **đi qua đỉnh** :

+ Nếu mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo 2 đường sinh thì thiết diện là tam giác cân.
+ Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

★ Trường hợp 2: Mặt phẳng (P) **không đi qua đỉnh** :

+ Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với trục hình nón thì giao tuyến là một đường tròn.
+ Nếu mặt phẳng (P) song song với 2 đường sinh hình nón thì giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
+ Nếu mặt phẳng (P) song song với 1 đường sinh hình nón thì giao tuyến là 1 đường parabol.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc $AC'A'$ khi quanh trục AA' bằng

A. $\pi a^2\sqrt{2}$ **B.** $\pi a^2\sqrt{3}$ **C.** $\pi a^2\sqrt{5}$ **D.** $\pi a^2\sqrt{6}$

Câu 2. Một hình nón có đường sinh bằng 8cm, diện tích xung quanh bằng $240\pi\ cm^2$. Đường kính của đường tròn đáy hình nón bằng

A. $2\sqrt{30}\,cm$ **B.** $30\,cm$ **C.** $60\,cm$ **D.** $50\,cm$

Câu 3. Cho điểm M cố định thuộc mặt phẳng (α) cho trước, xét đường thẳng d thay đổi đi qua M và tạo với (α) một góc 60^0. Tập hợp các đường thẳng d trong không gian là

A. Mặt phẳng **B.** Hai đường thẳng **C.** Mặt nón **D.** Mặt trụ

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{3\pi a^2}{2}$ **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\frac{3\pi a^2}{6}$ **D.** $\frac{3\pi a^2}{8}$

Câu 5. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90^0. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy của hình nón bằng 60^0. Khi đó diện tích thiết diện bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ **C.** $\frac{2a^2}{3}$ **D.** $\frac{3a^2}{2}$

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích xung quanh của hình nón đó là

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}\pi a^2}{2}$

Câu 7. Cho hình nón có đường sinh $l=4r$, với r là bán kính đường tròn đáy. Khai triển mặt xung quanh hình nón theo một đường sinh, ta được một hình quạt tròn có bán kính bằng l và góc ở đỉnh của hình quạt là α. Trong các kết luận sau đây, kết luận nào đúng?

A. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ **B.** $\alpha=\frac{\pi}{4}$ **C.** $\alpha=\frac{\pi}{2}$ **D.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=3cm$, $AC=4cm$. Thể tích khối nón tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh AB

A. $80\pi\, cm^3$ **B.** $\frac{80\pi}{3}cm^3$ **C.** $48\pi\ cm^3$ **D.** $16\pi\, cm^3$

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2\sqrt{3}\pi a^2$ **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay các cạnh tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 11. Cho hình nón có đỉnh S, độ dài đường sinh bằng $2a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón theo một thiết diện, diện tích lớn nhất của thiết diện là

A. $2a^2$ **B.** a^2 **C.** $4a^2$ **D.** $\sqrt{3}a^2$

Câu 12. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Khai triển hình nón theo một đường sinh, ta được một hình quạt tròn có góc ở tâm là α. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ **B.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ **C.** $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ **D.** $\alpha=\pi$

Câu 13. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, diện tích xung quanh là S_1 và mặt cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có diện tích S_2. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $2S_2=3S_1$. **B.** $S_1=4S_2$. **C.** $S_2=2S_1$. **D.** $S_1=S_2$.

Câu 14. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2. Khi đó, tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

Câu 15. Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết bán kính đáy bằng a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** πa^2. **D.** $\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 16. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. Thiết diện đi qua trục của hình nón đỉnh S là tam giác vuông cân SAB có cạnh cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón và thể tích V của khối nón lần lượt là:

A. $S_{tp}=\frac{\pi a^2(1+\sqrt{2})}{2}; V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $S_{tp}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}; V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $S_{tp}=\pi a^2(1+\sqrt{2}); V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $S_{tp}=\frac{\pi a^2(\sqrt{2}-1)}{2}; V=\frac{\pi a^3}{12}$.

Câu 18. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng là:

A. $S_{xq}=\pi a^2; V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}; V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{2}; V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $S_{xq}=\pi a^2; V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 19. Một hình nón có đường kính đáy là $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Tính thể tích của khối nón đó theo a.

A. $3\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $2\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 20. **(THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $8cm$ bán kính đáy bằng $6cm$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa đáy được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng $4cm$. Tính thể tích của khối nón (N).

A. $V=\frac{768}{125}\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V=\frac{786}{125}\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $V=\frac{2304}{125}\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $V=\frac{2358}{125}\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 21. **(THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b}+c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b>1$. Tính bc.

A. $bc=5$. **B.** $bc=8$. **C.** $bc=15$. **D.** $bc=7$.

Câu 22. **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2$. **D.** $\sqrt{3}\pi a^2$.

Câu 23. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 4 năm 2017 – 2018)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho?

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $3a\sqrt{2}$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Câu 24. **(THPT Trần Phú – Đà Nẵng - L2 – 2017-2018)** Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh $S_{xp}=2\pi a^2$. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đáy của khối nón (N) và đỉnh S trùng với đỉnh của khối nón (N).

A. $V=\dfrac{2\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V=2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 25. **(SGD Nam Định – năm 2017 – 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết rằng $AB=BC=10a$, $AC=12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=3\pi a^3$. **B.** $V=9\pi a^3$. **C.** $V=27\pi a^3$. **D.** $V=12\pi a^3$.

Câu 26. **(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 27. **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cắt hình nón S bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón bằng:

A. $\dfrac{\pi a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=4$, $AB=BC=CA=3$. Tính thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

A. 3π. **B.** $\sqrt{13}\pi$. **C.** 4π. **D.** $2\sqrt{2}\pi$.

Câu 29. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB=a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có diện tích xung quanh là:

A. $S=\dfrac{3}{2}\pi a^2$. **B.** $S=\pi a^2$. **C.** $S=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{7}+1\right)}{4}$. **D.** $S=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$.

Câu 31. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng 120^0, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB=4a$ và là một tam giác vuông. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\pi\sqrt{3}a^2$. **B.** $\pi 8\sqrt{3}a^2$. **C.** $\pi 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $\pi 4\sqrt{3}a^2$.

Câu 32. Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng $120°$, đáy là hình tròn $(O;3R)$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua S và tạo với đáy góc $60°$. Diện tích thiết diện là:

A. $2\sqrt{2}R^2$. **B.** $4\sqrt{2}R^2$. **C.** $6\sqrt{2}R^2$. **D.** $8\sqrt{2}R^2$.

Câu 33. Xét hình trụ (T) có bán kính R, chiều cao h thoả mãn $R=2h\sqrt{3}$. (N) là hình nón có bán kính đáy R và chiều cao gấp đôi chiều cao của (T). Gọi (S_1) và (S_2) lần lượt là diện tích xung quanh của (T) và (N), khi đó $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 34. Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân. Biết diện tích thiết diện đó là $8\,\text{cm}^2$. Tính diện tích toàn phần của hình nón nói trên.

A. $8\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **B.** $16\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **C.** $12\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **D.** $4\pi\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$.

Câu 35. **(THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018)** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính $60\,\text{cm}$ thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **C.** $V=\frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V=\frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 36. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=3\pi a^3$. **D.** $V=\pi a^3$.

Câu 37. **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018)** Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là:

A. $10\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $50\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **C.** $20\left(\text{cm}\right)$. **D.** $25\left(\text{cm}\right)$.

Câu 38. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kinh đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

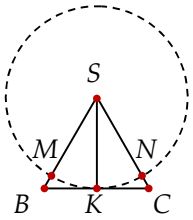
Câu 39. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Tính thể tích khối nón (N).

A. $V=3\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=4\sqrt{3}\pi$. **C.** $V=3\pi$. **D.** $V=6\pi$.

Câu 40. **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{27}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$. **D.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$.

Câu 41. **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Một tấm tôn hình tam giác đều SBC có độ dài cạnh bằng 3. K là trung điểm BC. Người ta dùng compa có tâm là S, bán kính SK vạch một cung tròn MN. Lấy phần hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là S, cung MN thành đường tròn đáy của hình nón (hình vẽ). Tính thể tích khối nón trên.



A. $\dfrac{\pi\sqrt{105}}{64}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{32}$. **C.** $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{32}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{141}}{64}$.

Câu 42. **(THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu nội tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 16.

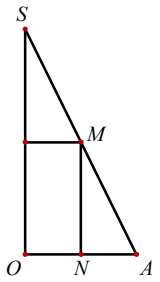
Câu 43. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018)** Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R, phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x. Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

A. $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. **B.** $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$. **C.** $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Câu 44. **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\dfrac{8a}{3}$.

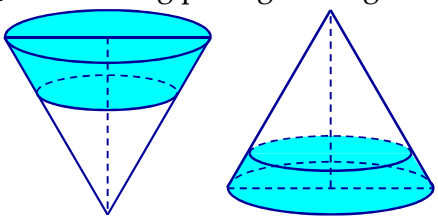
Câu 45. **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tam giác SOA vuông tại O có $MN\,//\,SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA như hình vẽ bên dưới. Đặt $SO=h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R=OA$. Tìm độ dài của MN theo h để thể tích khối trụ là lớn nhất.



A. $MN=\dfrac{h}{2}$. **B.** $MN=\dfrac{h}{3}$. **C.** $MN=\dfrac{h}{4}$. **D.** $MN=\dfrac{h}{6}$.

Câu 46. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20\,\text{cm}$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột

nước trong phễu bằng $10\,\text{cm}$ (hình H1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



A. $0,87\,\text{cm}$. **B.** $10\,\text{cm}$. **C.** $1,07\,\text{cm}$. **D.** $1,35\,\text{cm}$.

Câu 47. **(PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018)** Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

A. $h=\dfrac{3R}{2}$. **B.** $h=\dfrac{5R}{2}$. **C.** $h=\dfrac{5R}{4}$. **D.** $\dfrac{4R}{3}$.

Câu 48. Cho hình nón đỉnh N, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh $120°$. Trên đường tròn đáy lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Gọi S là diện tích của tam giác NAM. Có bao nhiêu vị trí của M để S đạt giá trị lớn nhất?

A. Vô số vị trí. **B.** Hai vị trí. **C.** Ba vị trí. **D.** Một vị trí.

Câu 49. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho mặt cầu đường kính $AB=2R$. Mặt phẳng (P) vuông góc AB tại I (I thuộc đoạn AB), cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Tính $h=AI$ theo R để hình nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất?

A. $h=R$. **B.** $h=\dfrac{R}{3}$. **C.** $h=\dfrac{4R}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2R}{3}$.

Câu 50. **(SGD Ninh Bình năm 2017-2018)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 51. **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là:

A. $\dfrac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\dfrac{32R^3}{81}$. **C.** $\dfrac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\dfrac{32R^3}{27}$.

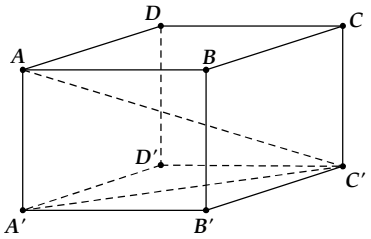
Câu 52. **(THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{81}{32}$. **B.** $\dfrac{76}{32}$. **C.** $\dfrac{32}{81}$. **D.** $\dfrac{8}{19}$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1D	2C	3C	4A	5A	6C	7C	8D	9C	10B
11A	12D	13D	14A	15B	16B	17A	18A	19B	20A
21A	22C	23D	24D	25B	26B	27D	28B	29B	30D
31D	32B	33B	34D	35B	36C	37D	38D	39C	40D
41A	42C	43A	44C	45B	46A	47D	48B	49C	50C
51A	52D								

Câu 1. **Chọn D.**



Hình nón có: $\begin{cases} r = A'C' = a\sqrt{2} \\ l = AC' = \sqrt{\left(AA'\right)^2 + \left(AC'\right)^2} = a\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{6}\pi a^2$

Câu 2. **Chọn C.**

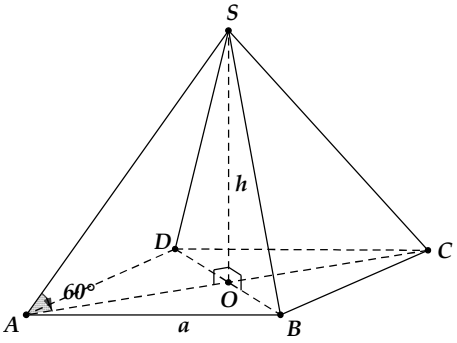
Ta có: $l = 8\,cm$. Suy ra: $S_{xq} = \pi rl = 240\pi\ cm^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{240\pi}{\pi l} = 30\,cm$

Vậy đường kính mặt đáy: $2r = 60\,cm$

Câu 3. **Chọn C.**

Tập hợp các đường thẳng d trong không gian là mặt nón có đỉnh M (cố định), đường sinh d, góc ở đỉnh 60^0 (không đổi)

Câu 4. **Chọn A.**



Góc giữa SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAO}$.

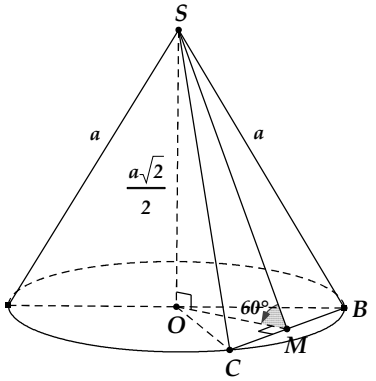
ΔSAO vuông tại O: $\tan\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{AO} \Leftrightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Ta có: $h = SO;\ r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ l = SA = \sqrt{2}a$

Suy ra diện tích đáy của hình nón: $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{2}$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl + \pi r^2 = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

Câu 5. **Chọn A.**



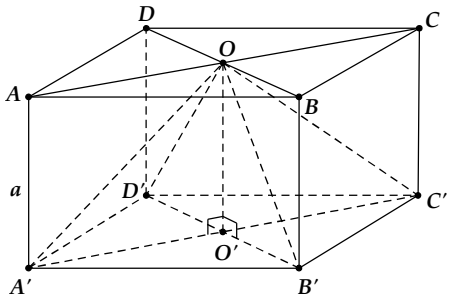
Góc giữa thiết diện và đáy là góc $\widehat{SMO}$

Tam giác SMO vuông tại O: $\sin\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{SM} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow CM = \sqrt{SC^2 - SM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 2CM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy diện tích thiết diện: $S = \dfrac{1}{2}SM.BC = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$

Câu 6. **Chọn C.**



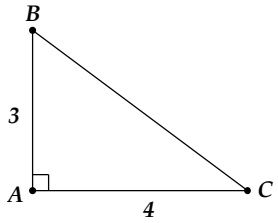
Ta có: $\begin{cases} h = AA' = a \\ r = \dfrac{O'A'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ l = OA' = \sqrt{\left(O'O\right)^2 + \left(O'A'\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2} \end{cases}$

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

Câu 7. **Chọn C.**

Ta có chu vi đáy của hình nón là $C = 2\pi r$, cung AB có độ dài là $l\alpha$.

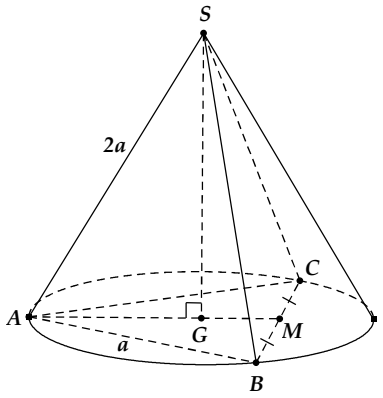
Vậy $l\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2\pi r}{l} = \dfrac{\pi}{2}$, do $l = 4r$



Câu 8. **Chọn D.**

Ta có: $\begin{cases} h = AB = 3\,cm \\ r = AC = 4\,cm \end{cases}$. Suy ra: $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = 16\pi\ cm^2$

Câu 9. **Chọn C.**



Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp \left(ABC\right)$

Tam giác SAG vuông tại G:

$\begin{cases} h = SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3} \\ l = SA = 2a \\ r = GA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$

Câu 10. **Chọn B.**

Ta có: $\begin{cases} BC \perp DA \\ BC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(ABD\right) \Rightarrow BC \perp AB$

Khi quay các cạnh cảu tứ diện $ABCD$ quanh trục AB thì hình thành hai hình nón tròn xoay là hình nón $\left(N\right)$ với đỉnh B, đường sinh BD và hình nón $\left(N'\right)$ với đỉnh A, đường sinh AC.

Câu 11. **Chọn A.**

Thiết diện là tam giác cân tại S với $SA = SB = l$

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}SA.SB.\sin\widehat{ASB} = \dfrac{l^2}{2}\sin\widehat{ASB} \le \dfrac{l^2}{2}$

Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện bằng $\dfrac{l^2}{2}$ khi thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau. Lúc đó: $S_{max} = \dfrac{l^2}{2} = 2a^2$.

Câu 12. **Chọn D.**

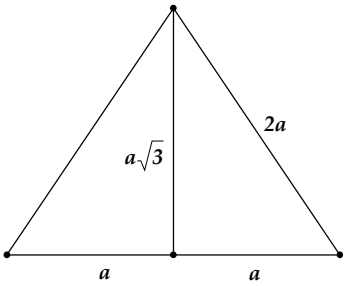
Ta có chu vi đáy của hình nón là $C = 2\pi r$, cung AB có độ dài là $l\alpha$.

Vậy $l\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2\pi r}{l} = \pi$, do $r = \dfrac{l}{2}$

Câu 13. **Chọn D.**

Bán kính đáy của hình nón là a. Đường sinh của hình nón là $2a$.

Do đó, ta có $S_1 = \pi Rl = 3\pi a^2$ (1)



Mặt cầu có bán kính là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, nên ta có

$S_2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 = S_2$.

Câu 14. **Chọn A.**

Hình nón có bán kính đáy là a, chiều cao $a\sqrt{3}$.

Do đó thể tích $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hình cầu có bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên có thể tích $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

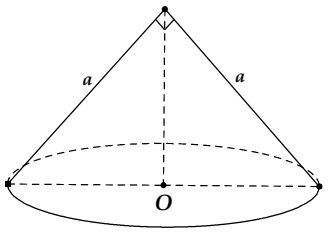
Từ đó suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 15. **Chọn B.**

Hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$ nên $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi a.a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 16. **Chọn B.**

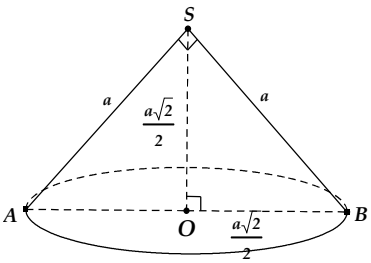
Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cạnh a nên đường sinh của hình nón là a và bán kính đáy là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên



$S_{xq} = \pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. **Chọn A.**

+ Do thiết diện đi qua trục là tam giác ΔSAB vuông cân tại đỉnh S, có cạnh huyền $AB = a\sqrt{2}$ nên suy ra bán kính đáy hình nón là $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; đường sinh hình nón $l = SA = SB = a$



; đường cao hình nón $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

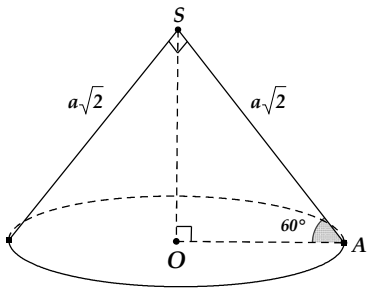
+ Diện tích toàn phần hình nón là:

$S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi rl + \pi r^2 = \pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a + \pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi a^2}{2} = \dfrac{\pi a^2(1+\sqrt{2})}{2}$ *(đvdt).*

+ Thể tích khối nón tương ứng là: $V=\frac{1}{2}Bh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$ *(đvtt).*

Câu 18. **Chọn A.**

Gọi A là một điểm thuộc đường tròn đáy hình nón. Theo giải thiết ta có đường sinh $SA=a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là $\widehat{SAO}=60^0$. Trong tam giác vuông SAO, ta có:



$OA=SA\cos 60^0=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO=SA.\sin 60^0=a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích xung quanh hình nón:

$S_{xq}=\pi rl=\pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}=\pi a^2$ *(đvdt).*

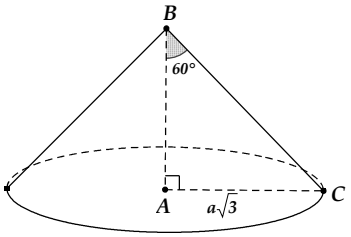
Thể tích của khối nón tròn xoay $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$ *(đvtt).*

Câu 19. **Chọn B.**

Gọi S là đỉnh hình nón, O là tâm đáy, A là một điểm thuộc đường tròn đáy.

Theo giả thiết dễ suy ra đường tròn đáy có bán kính $R=OA=a\sqrt{3}$ (cm)

và góc $\widehat{ASO}=\frac{120^0}{2}=60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $SO=\frac{OA}{\tan 60^0}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=a$. Do đó chiều cao hình nón là $h=a$



Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi.3a^2.a=\pi a^3$.

Câu 20. **Chọn A.**

Đường sinh của hình nón lớn là $l=SB=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,\text{cm}$.

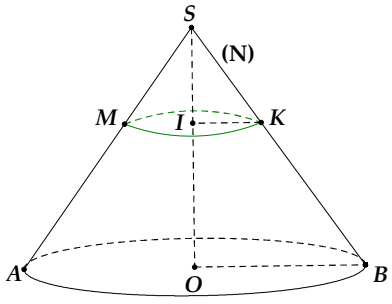
Gọi l_2,r_2,h_2 lần lượt là đường sinh, bán kính đáy và chiều cao của hình nón (N).

$l_2=SK=4\,\text{cm}$

Ta có: ΔSOB và ΔSIK đồng dạng nên:

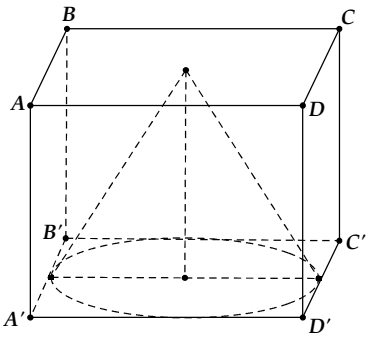
$\frac{SI}{SO}=\frac{IK}{OB}=\frac{SK}{SB}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

$\Rightarrow\frac{h_2}{h}=\frac{r_2}{r}=\frac{l_2}{l}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}h_2=\frac{2}{5}h=\frac{16}{5}\\ r_2=\frac{2}{5}.r=\frac{12}{5}\end{array}\right.$.



Thể tích khối nón (N) là $V_{(N)}=\frac{1}{3}.\pi.r_2^2.h_2=\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{12}{5}\right)^2.\frac{16}{5}=\frac{768}{125}\pi\ \text{cm}^3$.

Câu 21. **Chọn A.**



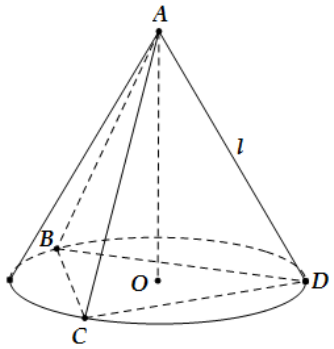
Ta có bán kính hình nón $r=\frac{a}{2}$, đường cao $h=a$, đường sinh $l=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần:

$$S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\pi\frac{a^2\sqrt{5}}{4}+\pi\frac{a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)\Rightarrow b=5,c=1.$$

Vậy $bc=5$.

Câu 22. **Chọn C.**



Gọi tứ diện đều cạnh a là $ABCD$, O là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

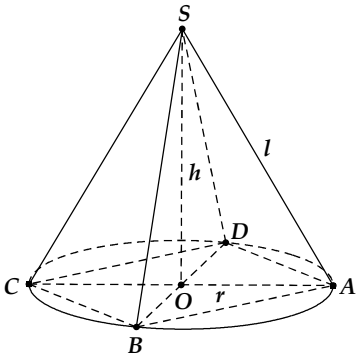
$$S_{xq}=\pi rl\ =\pi.BO.AD=\pi.\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).a=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2.$$

Câu 23. **Chọn D.**

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq}=\pi Rl$, nên ta có:

$$l=\frac{S_{xq}}{\pi R}=\frac{5\pi a^2}{\pi a}=5a.$$

Câu 24. **Chọn D.**



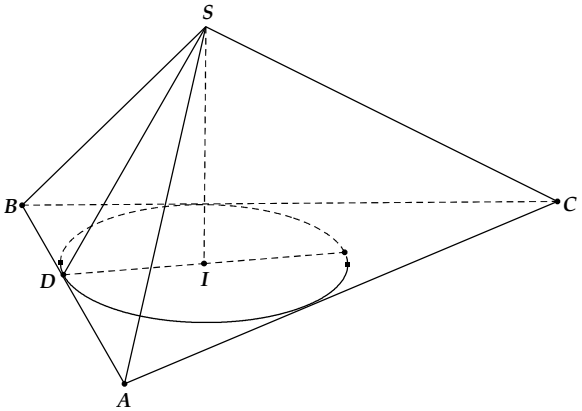
Ta có: Diện tích xung quanh $S_{xp}=2\pi a^2\Rightarrow\pi rl=2\pi a^2$

$\Rightarrow l=2a\Rightarrow h=\sqrt{l^2-r^2}=a\sqrt{3}$.

Đáy $ABCD$ nội tiếp đáy của khối nón (N) có bán kính đáy bằng $a\Rightarrow AB=a\sqrt{2}$.

Vậy: $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}h=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 25. **Chọn B.**



Hạ $ID\perp AB$, khi đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) chính là $\widehat{SDI}=45^\circ$ nên $ID=SI=r=h$.

Lại có $S_{\Delta ABC}=p.r\Rightarrow r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}$.

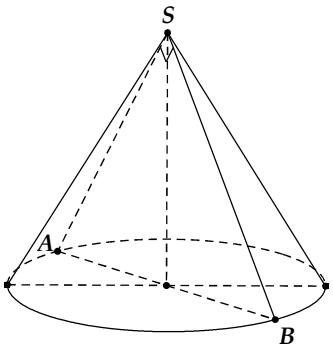
Tính được $p=16a$,

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=48a^2$.

Suy ra $r=3a$.

Vậy $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(3a)^3=9\pi a^3$.

Câu 26. **Chọn B.**

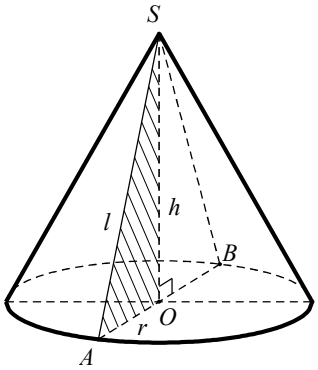


Gọi S là đỉnh hình nón, thiết diện qua trục là tam giác SAB.

Ta có $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a$, suy ra $l = SA = a$; $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

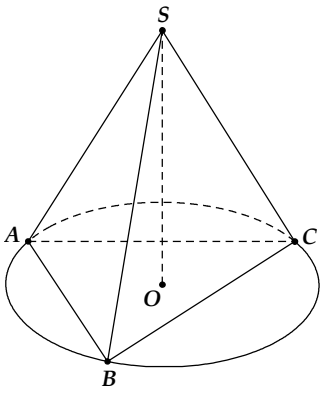
Câu 27. **Chọn D.**



Ta có: ΔSAB vuông cân tại S nên $\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ h = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 28. **Chọn B.**



Đường cao hình chóp là đường cao hình nón:

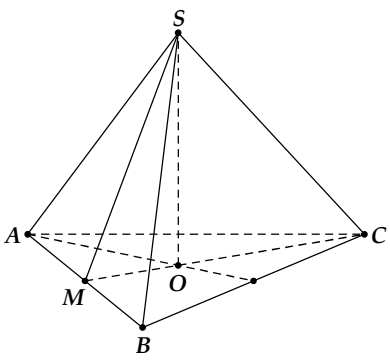
$h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

$R = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón cần tìm: $V = \dfrac{1}{3}h\pi R^2 = \sqrt{13}\pi$.

Câu 29. **Chọn B.**



Gọi M là trung điểm AB và gọi O là tâm của tam giác ABC ta có:

$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp SM$ và $AB \perp CM$

Do đó góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SMO} = 60°$.

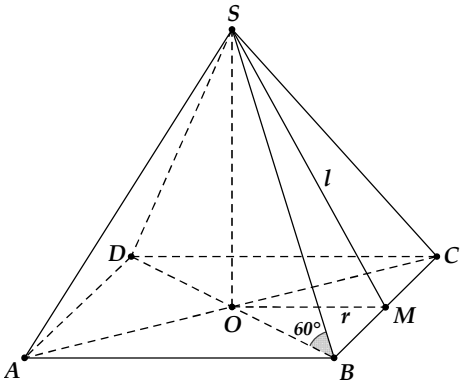
Mặt khác tam giác ABC đều cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OM=\frac{1}{3}CM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $SO=OM.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$.

Hình nón đã cho có chiều cao $h=SO=\frac{a}{2}$, bán kính đáy $R=OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, độ dài đường sinh $l=\sqrt{h^2+R^2}=\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq}=\pi.R.l=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{6}=\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$

Câu 30. **Chọn D.**



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$, M là trung điểm của BC.

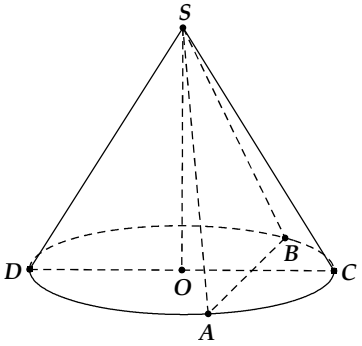
Hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ là hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác SOM quanh SO. Ta có:

$SO=OB.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $OM=\frac{a}{2}=r$.

$SM^2=SO^2+OM^2=\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{7a^2}{4}\Rightarrow l=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2}\pi=\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$.

Câu 31. **Chọn D.**



Theo đề bài ta có ΔSAB vuông cân tại S, $AB=4a$ nên $SB=2a\sqrt{2}$.

Mặt ΔSDC cân tại S và có $\widehat{CSD}=120^\circ$ nên $\widehat{CSO}=60^\circ$.

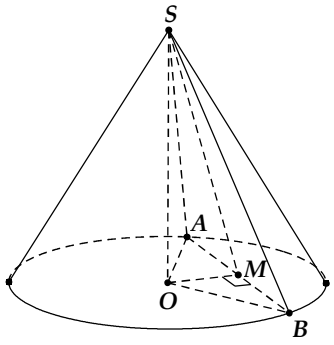
Xét Δ vuông SOC: $\sin\widehat{CSO}=\frac{OC}{SC}\Leftrightarrow OC=SC.\sin\widehat{CSO}$

$\Rightarrow OC=a\sqrt{6}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là:

$S_{xq}=\pi rl=\pi a\sqrt{6}.2a\sqrt{2}=4\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 32. **Chọn B.**



Thiết diện là ΔSAB, gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow OM\perp AB$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(OAB)}\right)=\left(\widehat{OM,SM}\right)=\widehat{SMO}=60^\circ$.

Góc ở đỉnh hình nón bằng 120°

$\Rightarrow\widehat{OSA}=60^\circ$, $SO=\frac{OA}{\tan 60^\circ}=\frac{3R}{\sqrt{3}}=R\sqrt{3}$.

Ta có: $SM=\frac{SO}{\sin 60^\circ}=\frac{R\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$, $OM=\frac{SM}{2}=R$

$AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=2\sqrt{2}R$.

Vậy $S_{SAB}=SM.AM=2R.2\sqrt{2}R=4\sqrt{2}R^2$.

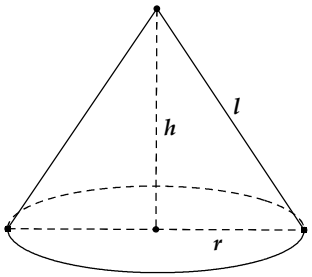
Câu 33. **Chọn B.**

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_1=2\pi.R.h=\dfrac{2\pi R^2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

Diện tích xung quanh hình nón là $S_2=\pi.R.l=\pi.R.\sqrt{h^2+R^2}=\pi.R.\sqrt{\dfrac{R^2}{3}+R^2}=\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 34. **Chọn D.**

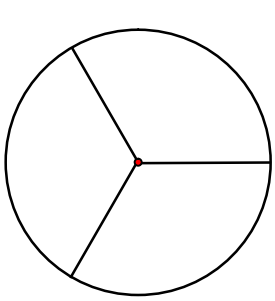


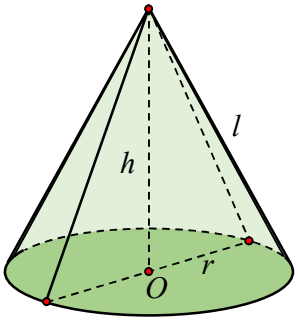
Ta có diện tích thiết diện bằng $\dfrac{1}{2}l^2=8\Rightarrow l=4\Rightarrow h=r=2\sqrt{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón bằng

$S_{tp}=S_{xq}+S_d=\pi rl+\pi r^2=2\sqrt{2}\pi\left(2\sqrt{2}+4\right)=4\sqrt{2}\pi\left(\sqrt{2}+2\right)$.

Câu 35. **Chọn B.**





Đổi $60\,\text{cm}=6\,\text{dm}$.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $l=6\,\text{dm}$.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C=2\pi R=16\pi$.

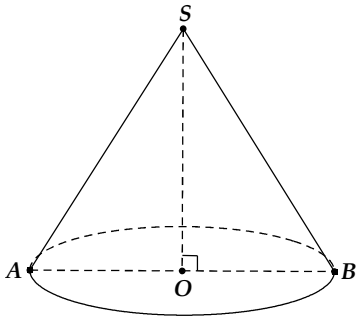
Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là $2\pi.r=\dfrac{2\pi.6}{3}=4\pi\,\text{dm}\Rightarrow r=\dfrac{4\pi}{2\pi}=2\,\text{dm}$.

Đường cao của khối nón tạo thành là $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi cái phễu là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.2^2.4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}\text{dm}^3=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 36. **Chọn C.**



Thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO.$

Ta có $\widehat{ASB}=60^\circ\Rightarrow\widehat{ASO}=30^\circ$

$\Rightarrow\tan 30^\circ=\dfrac{OA}{SO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow SO=OA\sqrt{3}.$

Lại có $S_{xq}=\pi Rl=\pi.OA.SA=\pi.OA\sqrt{OA^2+SO^2}=6\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2+3OA^2}=6a^2\Rightarrow 2OA^2=6a^2\Rightarrow OA=a\sqrt{3}\Rightarrow SO=3a\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi.3a^2.3a=3\pi a^3.$

Câu 37. **Chọn D.**

Ta có diện tích miếng tôn là $S=\pi.2500\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi R^2+\pi.R.l$.

Thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\pi R^2+\pi.R.l=2500\pi\Leftrightarrow R^2+R.l=2500=A\Leftrightarrow l=\frac{A}{R}-R$.

Thể tích khối nón là:

$V=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{l^2-R^2}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\left(\frac{A}{R}-R\right)^2-R^2}$

$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\frac{A^2}{R^2}-2A}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{A^2.R^2-2A.R^4}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{\frac{A^3}{8}-2A\left(R^2-\frac{A}{4}\right)^2}$

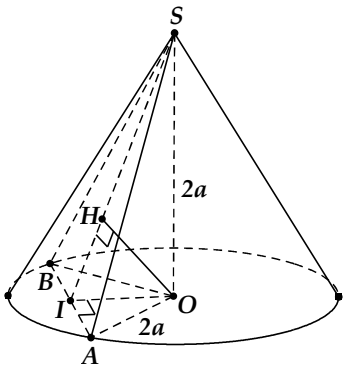
$\Leftrightarrow V\le\frac{1}{3}\pi.\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $R=\sqrt{\frac{A}{4}}=25$, vậy V đạt GTLN khi $R=25$.

Câu 38. **Chọn D.**

Gọi I là trung điểm của AB; đường tròn đáy có tâm O, bán kính R.

Kẻ $OH\perp SI$. Ta có $AB\perp SO$ và $AB\perp OI$. Suy ra $AB\perp OH$.

Khi đó $OH\perp(P)$. Do đó $d\left(O,(P)\right)=OH$.



Ta có $OI=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$.

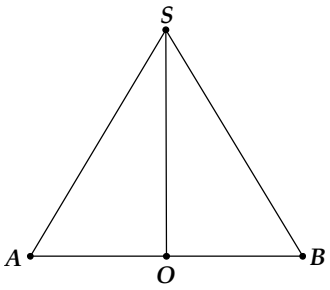
Suy ra $OH=\frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 39. **Chọn C.**

Tam giác SAB đều vì có $SA=SB$ và $\widehat{ASB}=60°$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là:

$r=\frac{2}{3}SO=2\Leftrightarrow SO=3$.

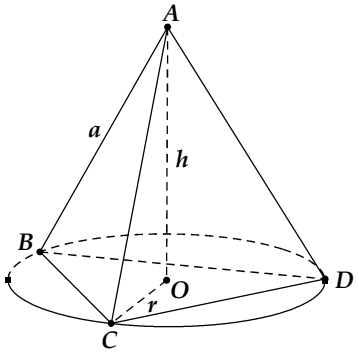


Mà $SO=SA.\sin 60°\Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính đường tròn đáy của khối nón là: $R=\frac{AB}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2.3=3\pi$.

Câu 40. **Chọn D.**

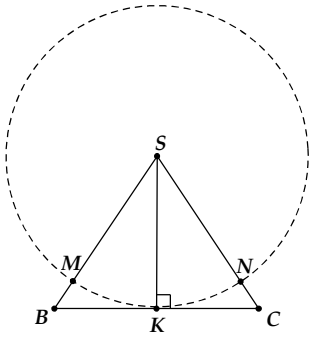


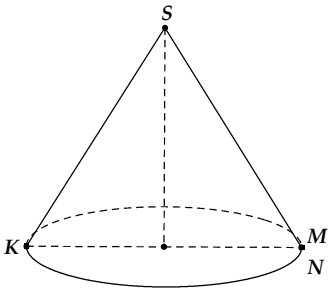
Gọi là O tâm của tam giác đều BCD. Ta có $AO=h$, $OC=r\Rightarrow r=\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $h^2=a^2-r^2=a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{2a^2}{3}\Rightarrow h=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{a^2}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$.

Câu 41. **Chọn A.**





Ta có $SK=SB\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

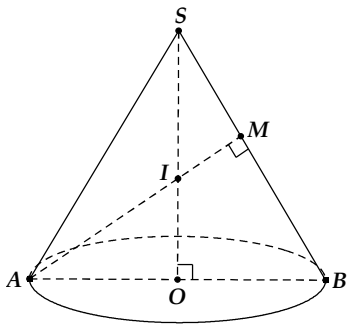
Diện tích phần hình quạt là $S_{quat}=\dfrac{1}{6}\pi SK^2=\dfrac{1}{6}\pi\dfrac{27}{4}=\dfrac{9\pi}{8}$.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón. Suy ra $2\pi r=\dfrac{1}{6}2\pi SK\Rightarrow r=\dfrac{SK}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của khối nón bằng $h=\sqrt{SK^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{105}}{4}$.

Thể tích bằng $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{\sqrt{105}}{4}=\dfrac{\pi\sqrt{105}}{64}$.

Câu 42. **Chọn C.**



Giả sử cạnh của tam giác đều SAB bằng 1.

Gọi thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều SAB.

Gọi I là trọng tâm tam giác đều SAB, khi đó I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là:

$R=SI=\dfrac{2}{3}SO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

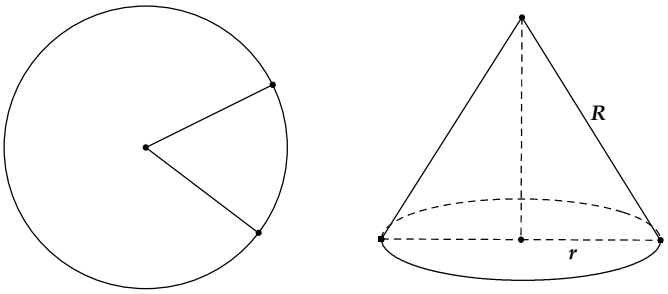
Bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón là $r=IO=\dfrac{1}{3}SO=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.

Thể tích mặt cầu nội tiếp hình nón là $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

Câu 43. **Chọn A.**



Chu vi đường tròn đĩa là: $C = 2\pi R$; Chu vi đường tròn đáy của hình nón là: $C' = x$

Bán kính đường tròn đáy hình nón là: $r = \frac{x}{2\pi}$.

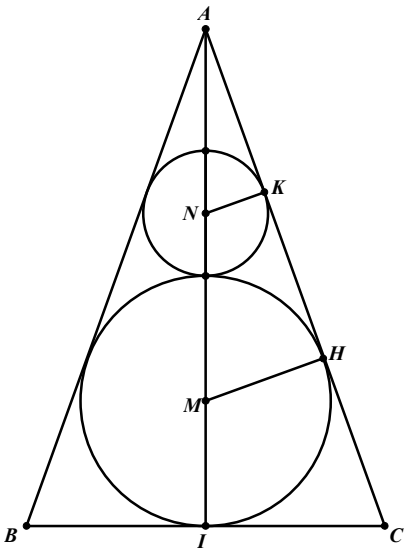
Chiều cao của hình nón là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}.\pi r^2.h = \frac{1}{3}.\pi \frac{x^2}{4\pi^2}.\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

$$\Rightarrow V' = \frac{1}{6\pi}x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} - \frac{1}{3}\pi\frac{x^2}{4\pi^2}\frac{\frac{1}{4\pi^2}x}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}} = \frac{1}{12\pi^2}x\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2} - \frac{1}{24\pi^2}\frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}}.$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12\pi^2}x\left(4\pi^2R^2 - x^2\right) = \frac{1}{24\pi^2}x^3 \Leftrightarrow 2\left(4\pi^2R^2 - x^2\right) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8\pi^2R^2}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 44. **Chọn C.**



Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác ABC với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón có tâm đáy là I.

Gọi M và N lần lượt là tâm của hai khối cầu có bán kính $2a$ và a. H và K lần lượt là điểm tiếp xúc của AC với hai đường tròn tâm M và N.

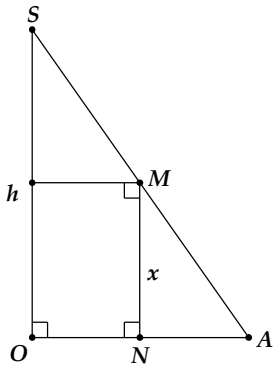
Ta có: NK là đường trung bình trong tam giác AMH suy ra N là trung điểm của AM.

$AM = 2MN = 2.3a = 6a \Rightarrow AI = 8a$.

Ta lại có hai tam giác vuông AIC và AHM đồng dạng suy ra $\frac{IC}{HM} = \frac{AI}{AH} \Leftrightarrow IC = \frac{8a.2a}{\sqrt{36a^2 - 4a^2}} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy bán kính hình nón là $R = 2a\sqrt{2}$.

Câu 45. **Chọn B.**



Đặt $MN = x, (x > 0)$ và $OA = a, (a > 0)$, a là hằng số.

Ta có $\frac{MN}{SO} = \frac{NA}{OA} \Rightarrow NA = \frac{MN.OA}{SO} \Rightarrow NA = \frac{xa}{h} \Rightarrow ON = a - \frac{xa}{h}$.

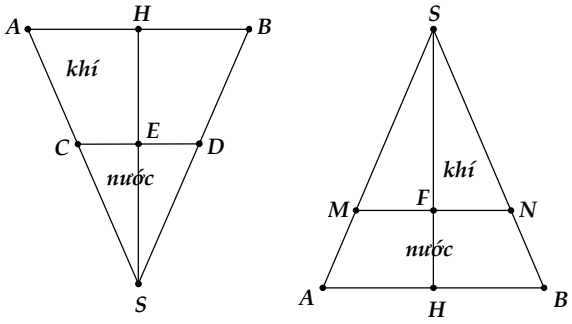
Khối trụ thu được có bán kính đáy bằng ON và chiều cao MN.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi.ON^2.MN = \pi.x.a^2\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$

$$= \pi a^2 \frac{1}{2h^2} 2x(h-x)^2 \le \frac{\pi a^2}{2h^2}\left(\frac{2h}{3}\right)^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Câu 46. **Chọn A.**



Trước khi lật phễu lên:

Theo bài ra ta có $SE = 10\text{cm}$, $SH = 20\text{cm}$. $\Delta SCD \backsim \Delta SAB \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{SE}{SH} = \frac{ED}{HB}$

Suy ra $\frac{V_{nuoc}}{V_{pheu}} = \frac{ED^2.SE}{HB^2.SH} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{khi} = \frac{7}{8}V_{pheu}$.

Sau khi lật phễu lên:

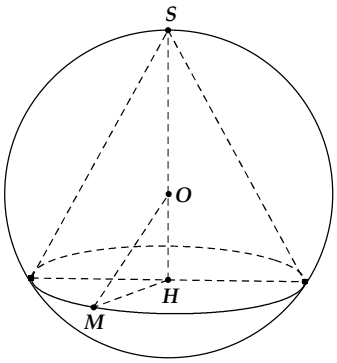
$\Delta SMN \backsim \Delta SAB \Rightarrow \frac{SF}{SH} = \frac{FN}{HB}$

Do $V_{khi} = \frac{7}{8}V_{pheu} \Leftrightarrow \left(\frac{FN}{HB}\right)^2.\frac{SF}{SH} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{SF}{SH}\right)^3 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow SF = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}SH$.

Vậy chiều cao của nước sau khi lật phễu là

$$FH = SH - SF = SH\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 20.\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 0,8706$$

Câu 47. **Chọn D.**



Gọi chiều cao của hình nón là x, $(0 < x < 2R)$. Gọi bán kính đáy của hình nón là r ta có

$r^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2 = x(2R-x)$.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2.x = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$.

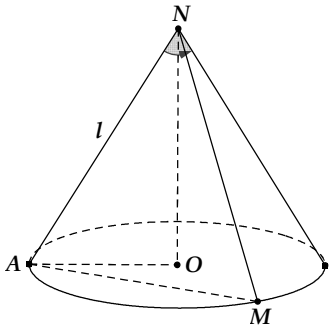
Mặt khác ta lại có: $\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(2R-x) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}(2R-x) \le \frac{8R^3}{27}$

Suy ra $V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x) \le \frac{32\pi R^3}{27}$.

Vậy $\max V = \frac{32\pi R^3}{27}$, dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2} = 2R-x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$.

Chú ý: Ta có thể khảo sát hàm $V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x) = f(x)$ trên $(0;2R)$ để tìm $\max V$.

Câu 48. **Chọn D.**



Gọi l $(l>0)$ là độ dài đường sinh của hình nón.

Vì góc ở đỉnh bằng $120°$ nên $\widehat{ANO} = 60°$. Ta có bán kính đường tròn đáy là $OA = NA.\sin\widehat{ANO} = l.\sin 60° = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Vì hình nón đã cho có góc ở đỉnh là $120°$ nên $0° \le \widehat{ANM} \le 120°$

Ta có $S = \frac{1}{2}.NA.NM.\sin\widehat{ANM} = \frac{1}{2}l^2.\sin\widehat{ANM}$.

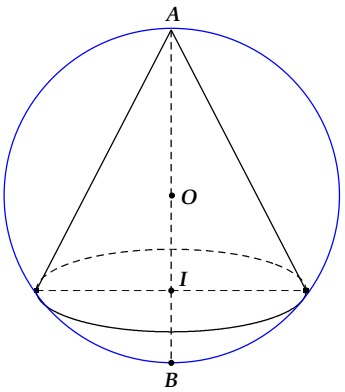
Diện tích S lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{ANM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{ANM} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ANM} = 90^\circ \Leftrightarrow$ Tam giác ANM vuông cân tại N. Khi đó $AM = l\sqrt{2}$. Mà A cố định nên M nằm trên đường tròn $(A;l\sqrt{2})$.

Mặt khác M nằm trên đường tròn đáy nên M là giao điểm của đường tròn $(A;l\sqrt{2})$ và đường tròn đáy. Dễ thấy 2 đường tròn này cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Vậy có hai vị trí điểm M.

Câu 49. **Chọn C.**

Gọi O là trung điểm AB, M là điểm bất kì trên đường tròn (C).



Ta có $IM = \sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.

Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}.AI.S_{(C)} = \frac{1}{3}.h.\pi.(2Rh-h^2)$.

Đặt $f(h) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$ (R là tham số).

Tập xác định $D = [0;2R]$.

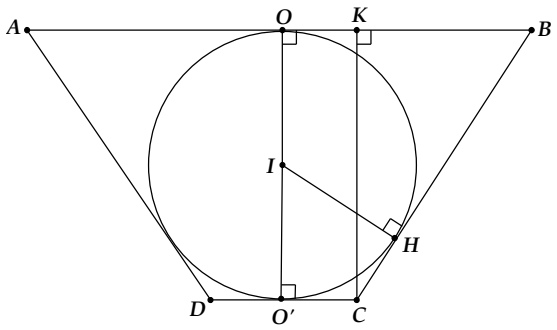
$f'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$; $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

$f(0) = 0$; $f(R) = \frac{\pi}{3}.R^3$; $f\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi}{81}R^3$.

Vậy hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h = \frac{4R}{3}$.

Hay thể tích hình nón lớn nhất đạt khi $h=\dfrac{4R}{3}$.

Câu 50. **Chọn C.**



Đặt $AB=2a$, $DC=2b$, $O'O=2c$. Ta có V_1 là thể tích chiếc cốc, V_2 là thể tích của bi.

Ta có $CK=2c$, $CB=a+b$, $BK=a-b$.

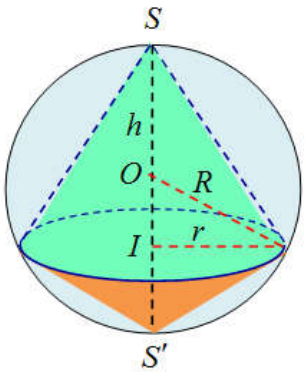
Do ΔCKB vuông tại K ta có: $CB^2=CK^2+BK^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=4c^2+a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow ab=c^2$

Mặt khác $V_1=\dfrac{\pi 2c}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)$, $V_2=\dfrac{4\pi}{3}c^3$.

Theo giả thiết lượng nước tràn ra bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu, suy ra $V_1=2V_2 \Leftrightarrow c\left(a^2+b^2+ab\right)=4c^3$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+ab=4ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, do $a>b$ nên $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 51. **Chọn A.**



Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S'. Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI=h$ với $h\ge R$.

Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là:

$$V=\frac{1}{3}h.S_{(C)}=\frac{1}{3}h.\pi.r^2=\frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2-\left(h-R\right)^2\right]=\frac{1}{3}\pi\left(-h^3+2h^2R\right).$$

Xét hàm số: $f\left(h\right)=-h^3+2h^2R$ với $h\in\left[R;2R\right)$.

Ta có $f'\left(h\right)=-3h^2+4hR$.

$f'\left(h\right)=0 \Leftrightarrow -3h^2+4hR=0 \Leftrightarrow h=0$ (loại) hoặc $h=\dfrac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	R		$\dfrac{4R}{3}$		$2R$
$f'\left(h\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(h\right)$	R^3	↗	$\dfrac{32R^3}{27}$	↘	0

Ta có: $\max f\left(h\right)=\dfrac{32}{27}R^3$ tại $h=\dfrac{4R}{3}$.

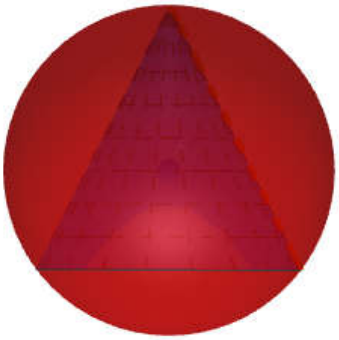
Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V=\frac{1}{3}\pi\frac{32}{27}R^3=\frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h=\frac{4R}{3}$.

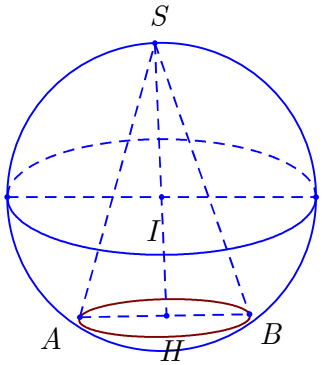
Chú ý: Sau khi tính được $V=\frac{1}{3}\pi\left(-h^3+2h^2R\right)$ ta có thể làm như sau:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(-h^3+2h^2R\right)=\frac{1}{3}\pi h^2\left(2R-h\right)=\frac{\pi}{6}.h.h\left(4R-2h\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $h=4R-2h\Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

Câu 52. **Chọn D.**





Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Ta có $\frac{V_1}{V_2}+1=\frac{V}{V-V_1}$. Do đó để $\frac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

TH1: Xét trường hợp $SI\le R$

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI=R$ Lúc đó $V_1=\frac{\pi R^3}{3}$.

TH2: $(SI>R)$ I nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.

Đặt $IH=x(x>0)$. Ta có

$$V_1=\frac{1}{3}\pi HA^2.SH=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)\left(R+x\right)=\frac{\pi}{6}\left(2R-2x\right)\left(R+x\right)\left(R+x\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}R^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{R}{3}$.

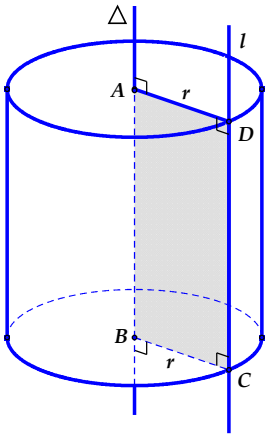
Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V}{V-V_1}-1=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{32}{81}\pi R^3}-1=\frac{8}{19}$.

B. MẶT TRỤ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Mặt trụ tròn xoay

Trong $mp(P)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay $mp(P)$ quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.



+ Đường thẳng Δ được gọi là trục.
+ Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
+ Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

2. Hình trụ tròn xoay

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

+ Đường thẳng AB được gọi là trục.
+ Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
+ Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.
+ Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.
+ Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3. Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r, khi đó:

✪ Diện tích xung quanh của hình trụ: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$

✪ Diện tích toàn phần của hình trụ: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$

✪ Thể tích khối trụ: $\boxed{V = B.h = \pi r^2 h}$

4. Tính chất

★ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng là bán kính của mặt trụ đó.

★ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trụ nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\dfrac{2r}{\sin\varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^0 < \varphi < 90^0$.

★ Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng d.

+ Nếu $d<r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh $\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật.

+ Nếu $d=r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.

+ Nếu $d>r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Một khối trụ có thể tích bằng 25π. Nếu chiều cao khối trụ tăng lên năm lần và giữ nguyên bán kính đáy thì được khối trụ mới có diện tích xung quanh bằng 25π. Bán kính đáy của khối trụ ban đầu là

A. $r=10$. **B.** $r=5$. **C.** $r=2$. **D.** $r=15$.

Câu 2. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD=a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC}=60^{\circ}$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Câu 3. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Một khối trụ có thể tích bằng 16π. Nếu chiều cao khối trụ tăng lên hai lần và giữ nguyên bán kính đáy thì được khối trụ mới có diện tích xung quanh bằng 16π. Bán kính đáy của khối trụ ban đầu là

A. $r=1$. **B.** $r=4$. **C.** $r=3$. **D.** $r=8$.

Câu 4. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $AC=a\sqrt{2}$, $\widehat{DCA}=30°$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **C.** $n=8$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Câu 5. **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$. **D.** $V=3\pi a^2h$.

Câu 6. **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có bán kính bằng a. Một mặt phẳng đi qua các tâm của hai đáy và cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Thể tích của hình trụ bằng

A. $2a^3$. **B.** πa^3. **C.** $2\pi a^3$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Câu 7. **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Thể tích khối trụ tròn xoay sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh cạnh AD biết $AB=3$, $AD=4$ là

A. 48π. **B.** 36π. **C.** 12π. **D.** 72π.

Câu 8. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2R}{3}$. **D.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. **(THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, chiều cao là h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $V=\frac{\pi a^2h}{9}$. **B.** $V=\frac{\pi a^2h}{3}$. **C.** $V=3\pi a^2h$. **D.** $V=\pi a^2h$.

Câu 10. **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a. Thể tích khối trụ đó bằng

A. πa^3. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

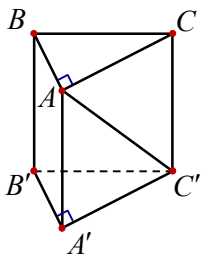
Câu 11. **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy là $R=a$, mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ lần lượt là

A. $8\pi a^2$, $4\pi a^3$. **B.** $6\pi a^2$, $6\pi a^3$. **C.** $16\pi a^2$, $16\pi a^3$. **D.** $6\pi a^2$, $3\pi a^3$.

Câu 12. **(PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình trụ (T) có đáy là các đường tròn tâm O và O', bán kính bằng 1, chiều cao hình trụ bằng 2. Các điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho góc $(OA,O'B)=60°$. Tính diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$.

A. $S=\frac{4+\sqrt{19}}{2}$. **B.** $S=\frac{4+\sqrt{19}}{4}$. **C.** $S=\frac{3+\sqrt{19}}{2}$. **D.** $S=\frac{1+2\sqrt{19}}{2}$.

Câu 13. **(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:



A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$.

C. $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Câu 14. **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $V=27\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=81\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=24\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=36\sqrt{3}a^3$.

Câu 15. **(ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018)** Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD; BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp}=8\pi$. **B.** $S_{tp}=8a^2\pi$. **C.** $S_{tp}=4a^2\pi$. **D.** $S_{tp}=4\pi$.

Câu 16. **(THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2. **B.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $16\pi a^3$.

Câu 17. **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình trụ có tỉ số diện tích xung quanh và diện tích toàn phần bằng $\frac{1}{3}$. Biết thể tích khối trụ bằng 4π. Bán kính đáy của hình trụ là

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 18. Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a,b,c. Thể tích khối trụ là

A. $\frac{1}{4}\pi\left(c^2+a^2\right)b$. **B.** $\frac{1}{4}\pi\left(a^2+b^2\right)c$ hoặc $\frac{1}{4}\pi\left(b^2+c^2\right)a$ hoặc $\frac{1}{4}\pi\left(c^2+a^2\right)b$.

C. $\frac{1}{4}\pi\left(a^2+b^2\right)c$. **D.** $\frac{1}{4}\pi\left(b^2+c^2\right)a$.

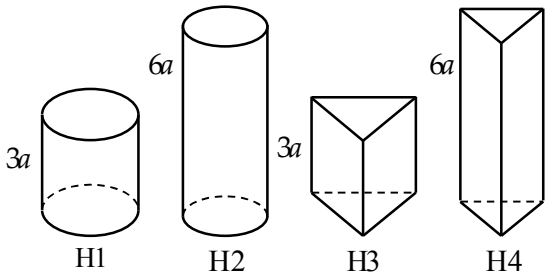
Câu 19. Cho hình trụ có đường cao $h=5\,\text{cm}$, bán kính đáy $r=3\,\text{cm}$. Xét mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục $2\,\text{cm}$. Tính diện tích S của thiết diện của hình trụ với mặt phẳng (P).

A. $S=5\sqrt{5}\,\text{cm}^2$. **B.** $S=10\sqrt{5}\,\text{cm}^2$. **C.** $S=3\sqrt{5}\,\text{cm}^2$. **D.** $S=6\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

Câu 20. **(THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1. Một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích V_2. Tính tỷ số lớn nhất $k=\frac{V_2}{V_1}$?

A. $k=\frac{1}{4}$. **B.** $k=\frac{\pi}{2}$. **C.** $k=\frac{\pi}{4}$. **D.** $k=\frac{\pi}{3}$.

Câu 21. **(THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a$, $6a$. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành bốn hình không đáy như hình vẽ, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a$, $6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt $3a$, $6a$.



Trong 4 hình H1, H2, H3, H4 lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là

A. H1, H4. **B.** H2, H3. **C.** H1, H3. **D.** H2, H4.

Câu 22. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=6$, $AD=8$, $AC'=12$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$

A. $S_{xq}=20\sqrt{11}\pi.$ **B.** $S_{xq}=10\sqrt{11}\pi.$

C. $S_{xq}=10\left(2\sqrt{11}+5\right)\pi.$ **D.** $S_{xq}=5\left(4\sqrt{11}+5\right)\pi.$

Câu 23. **(THPT Chuyên Hùng Vương-Bình Phước-lần 2-năm 2017-2018)** Cho khối trụ có bán kính đáy R và có chiều cao $h=2R$. Hai đáy của khối trụ là hai đường tròn có tâm lần lượt là O và O'. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm A cố định. Trên đường tròn (O') ta lấy điểm B thay đổi. Hỏi độ dài đoạn AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2R\sqrt{2}$ **B.** $AB_{\max}=4R\sqrt{2}$. **C.** $AB_{\max}=4R$. **D.** $AB_{\max}=R\sqrt{2}$.

Câu 24. **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm-2018)** Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

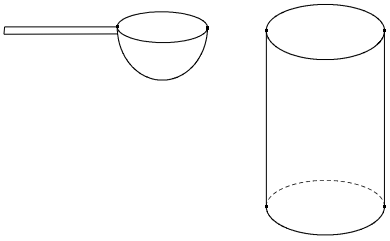
A. $\frac{4}{3}\pi$. **B.** $\frac{5}{3}\pi$. **C.** $\frac{2}{3}\pi$. **D.** $\frac{7}{3}\pi$.

Câu 25. **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^2h}{4}.$ **B.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^2h}{4}.$

C. $V=\frac{\pi}{3}\left(h^2+\frac{4a^2}{3}\right)\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{a^2}{3}}.$ **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}\pi a^2h}{4}.$

Câu 26. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018)** Một người dùng một cái ca hình bán cầu (Một nửa hình cầu) có bán kính là $3(\text{cm})$ để múc nước đổ vào một cái thùng hình trụ chiều cao $10(\text{cm})$ và bán kính đáy bằng $6(\text{cm})$. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng? (Biết mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy)



A. 10 lần. **B.** 24 lần. **C.** 12 lần. **D.** 20 lần.

Câu 27. **(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$ **B.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi.$ **C.** $S_{xq}=\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}.$ **D.** $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi.$

Câu 28. **(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29. **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng

A. $h=R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $h=\sqrt{3}R$. **D.** $h=2R$.

Câu 30. **(THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội năm 2017-2018)**. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{9}$.

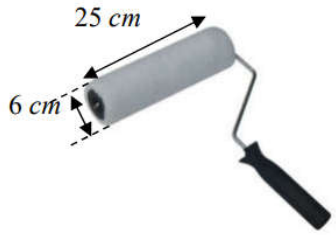
Câu 31. **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cần đẽo thanh gỗ hình hộp có đáy là hình vuông thành hình trụ có cùng chiều cao. Tỉ lệ thể tích gỗ cần phải đẽo đi ít nhất (tính gần đúng) là

A. 30%. **B.** 50%. **C.** 21%. **D.** 11%.

Câu 32. **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB=a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

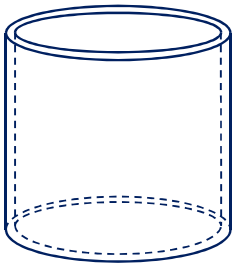
A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 33. **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 6 cm, chiều dài lăn là 25 cm (như hình dưới đây). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên bức tường phẳng một diện tích là:



A. $1500\pi\ (\text{cm}^2)$. **B.** $150\pi\ (\text{cm}^2)$. **C.** $3000\pi\ (\text{cm}^2)$. **D.** $300\pi\ (\text{cm}^2)$.

Câu 34. **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)** Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5$ cm, thành xung quanh cốc dày $0,2$ cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh ?



A. $75,66\pi$ cm^3. **B.** $80,16\pi$ cm^3. **C.** $85,66\pi$ cm^3. **D.** $70,16\pi$ cm^3.

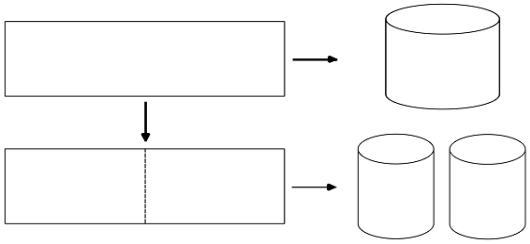
Câu 35. **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AD=CD=a$, $AB=2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng CD. Thể tích khối tròn xoay thu được là:

A. $\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{7\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Câu 36. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018)** Cần phải thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng nước sạch có dung tích $V\left(\text{cm}^3\right)$. Hỏi bán kính $R(\text{cm})$ của đáy hình trụ nhận giá trị nào sau đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$. **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Câu 37. **(THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50 cm và 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):



- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=1$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=4$.

Câu 38. **(THPT Lê Quý Đôn-Quãng Trị-lần 1 năm 2017-2018)** Một nhà máy cần sản xuất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước Mối quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất là

A. $h=3R$. **B.** $R=h$. **C.** $h=2R$. **D.** $R=2h$.

Câu 39. **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Một hộp bóng bàn hình trụ có bán kính R, chứa được 10 quả bóng sao cho các quả bóng tiếp xúc với thành hộp theo một

đường tròn và tiếp xúc với nhau. Quả trên cùng và quả dưới cùng tiếp xúc với hai nắp hộp. Tính phần thể tích khối trụ mà thể tích của các quả bóng bàn không chiếm chỗ.

A. 0. **B.** $\dfrac{20\pi R^3}{3}$. **C.** $\dfrac{40\pi R^3}{3}$. **D.** πR^3.

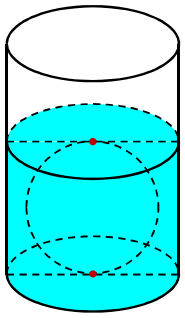
Câu 40. **(THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018)** Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao $4,2\text{m}$. Trong số các cây đó có hai cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40cm, sau cây cột còn lại phân bổ đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng $26\,\text{cm}$. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng một loại sơn giả đá, biết giá thuê là $380000/1\text{m}^2$ (kể cả vật liệu sơn và thi công). Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)? (lấy $\pi = 3,14159$).

A. $\approx 11.833.000$. **B.** $\approx 12.521.000$. **C.** $\approx 10.400.000$. **D.** $\approx 15.642.000$.

Câu 41. **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,\text{cm}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,\text{cm}$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,\text{cm}^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5\,\text{cm}$. **B.** $3\sqrt{2}\,\text{cm}$. **C.** $4\,\text{cm}$. **D.** $5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

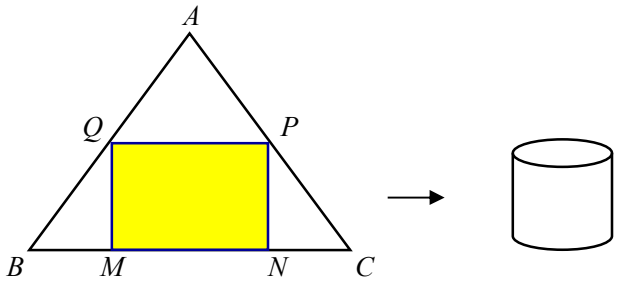
Câu 42. **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\,\text{cm}$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên).



Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,\text{cm}$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,\text{cm}$. Bán kính của viên billiards đó bằng

A. $2,7\,\text{cm}$. **B.** $4,2\,\text{cm}$. **C.** $3,6\,\text{cm}$. **D.** $2,6\,\text{cm}$.

Câu 43. **(THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018)** Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng $90\,(\text{cm})$. Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC; P, Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là



A. $\dfrac{91125}{4\pi}(\text{cm}^3)$. **B.** $\dfrac{91125}{2\pi}(\text{cm}^3)$. **C.** $\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}(\text{cm}^3)$. **D.** $\dfrac{108000\sqrt{3}}{\pi}(\text{cm}^3)$.

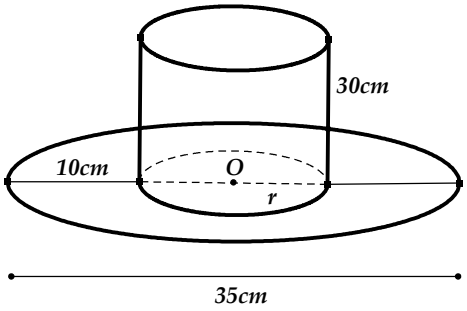
Câu 44. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S=56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=46\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 45. **THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho hình trụ đứng có hai đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O', bán kính bằng a, chiều cao hình trụ bằng $2a$. Mặt phẳng đi qua trung điểm OO' và tạo với OO' một góc $30°$, cắt đường tròn đáy tâm O theo dây cung AB. Độ dài đoạn AB là:

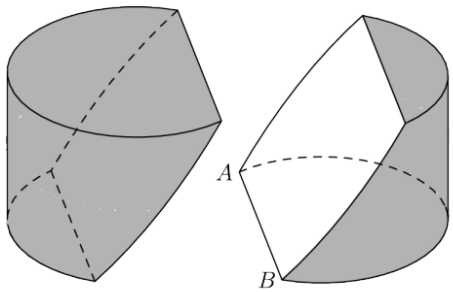
A. a. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 46. **(THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ dưới đây. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi\ (\text{cm}^2)$. **B.** $700\pi\ (\text{cm}^2)$. **C.** $756,25\pi\ (\text{cm}^2)$. **D.** $754,25\pi\ (\text{cm}^2)$.

Câu 47. Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120°. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Biết diện tích S của thiết diện thu được có dạng $S=a\pi+b\sqrt{3}$. Tính $P=a+b$.



A. $P=60$. **B.** $P=30$. **C.** $P=50$. **D.** $P=45$.

Câu 48. **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r=20(cm)$, chiều cao $h=60(cm)$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

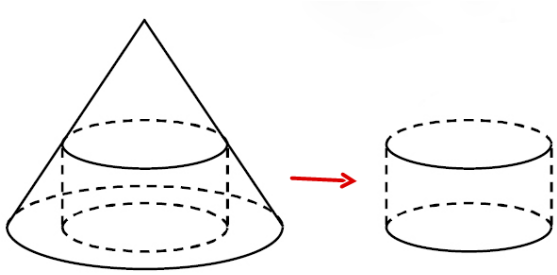
A. $V=3000\pi(cm^3)$. **B.** $V=\dfrac{32000}{9}\pi(cm^3)$.

C. $V=3600\pi(cm^3)$. **D.** $V=4000\pi(cm^3)$.

Câu 49. **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x=\dfrac{h}{2}$. **B.** $x=\dfrac{h}{3}$. **C.** $x=\dfrac{2h}{3}$. **D.** $x=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Câu 50. **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm-2018)** Một khúc gỗ có dạng khối nón có bán kính đáy $r=30$ cm, chiều cao $h=120$ cm. Anh thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ dạng khối trụ có thể chế tác được. Tính V.



A. $V=0,16\pi\left(\text{m}^3\right)$. **B.** $V=0,024\pi\left(\text{m}^3\right)$. **C.** $V=0,36\pi\left(\text{m}^3\right)$. **D.** $V=0,016\pi\left(\text{m}^3\right)$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1B	2B	3B	4A	5C	6C	7B	8A	9B	10D
11A	12A	13C	14B	15C	16C	17D	18B	19B	20C
21A	22A	23A	24D	25B	26D	27A	28C	29A	30B
31C	32A	33A	34A	35A	36D	37B	38C	39B	40A
41C	42A	43C	44A	45D	46C	47C	48A	49B	50D

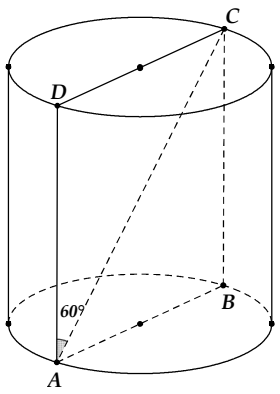
Câu 1. **Chọn B.**

Khối trụ ban đầu có: $V=25\pi \Leftrightarrow \pi r^2h=25\pi \Leftrightarrow r^2h=25 \quad (1)$.

Khối trụ lúc sau có: $S_{xq}=25\pi \Leftrightarrow \pi r(5h)=25\pi \Leftrightarrow rh=5 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $r=5$.

Câu 2. **Chọn B.**



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \Delta ADC$ vuông tại D và $BD=AC=a\sqrt{2}$.

Xét Δ vuông ADC có $DC=AC\sin\widehat{DAC}=a\sqrt{2}.\sin 60°=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Suy ra bán kính mặt đáy của hình trụ là $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\cos\widehat{DAC}=\dfrac{AD}{AC}\Leftrightarrow AD=AC\cos\widehat{DAC}=a\sqrt{2}\cos 60°=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chiều cao của hình trụ là $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra thể tích khối trụ: $V=\pi\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$

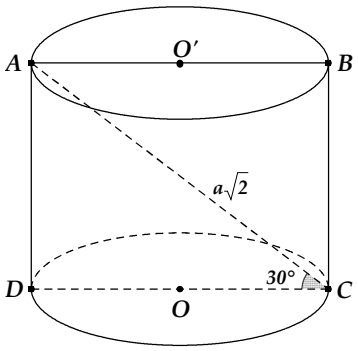
Câu 3. **Chọn B.**

Thể tích khối trụ: $V=\pi r^2h=16\pi \Rightarrow h=\dfrac{16}{r^2}$.

Nếu chiều cao khối trụ tăng lên hai lần và giữ nguyên bán kính đáy, suy ra:

Diện tích xung quanh: $S=2\pi r.\dfrac{2.16}{r^2}=16\pi \Rightarrow r=\dfrac{2.2.16}{16}=4$

Câu 4. **Chọn A.**



Tam giác ADC vuông tại D có:

+ $DC=AC.\cos 30° \Leftrightarrow DC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

+ $AD=AC.\sin 30° \Leftrightarrow AD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó hình trụ đã cho có $h=AD$, $r=\dfrac{1}{2}DC$.

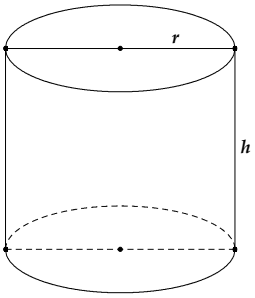
Vậy thể tích khối trụ $V=\pi r^2h=\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

Câu 5. **Chọn C.**

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a là $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao khối trụ bằng chiều cao khối lăng trụ bằng h.

Thể tích khối trụ là $V=\pi R^2h\Rightarrow V=\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2h=\dfrac{\pi a^2h}{3}$.



Câu 6. **Chọn C.**

Bán kính của hình trụ là $r=a$.

Chiều cao của hình trụ là $h=2r=2a$.

Vậy thể tích của hình trụ là $V=\pi r^2.h=\pi a^2.2a=2\pi a^3$.

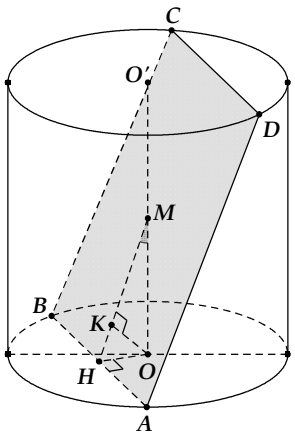
Câu 7. **Chọn B.**

Ta có $r=3$, $h=4$ nên thể tích khối trụ tròn xoay sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh cạnh AD là $V=\pi r^2h=\pi.3^2.4=36\pi$.

Câu 8. **Chọn A.**

Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên $AB\Rightarrow AB\perp(MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK\perp MH$, $(K\in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $\widehat{OMK}=30°$.



Xét Δ vuông MHO ta có: $HO=OM\tan 30°=R\tan 30°=\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét Δ vuông AHO ta có $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{3}}=\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB=\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. **Chọn B.**

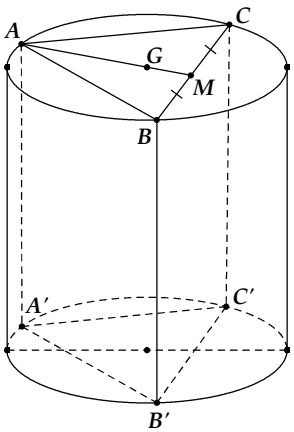
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Do ABC là Δ đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ là

$V=\pi R^2h=\dfrac{\pi a^2h}{3}$.



Câu 10. **Chọn D.**

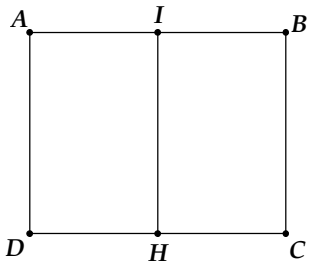
Bán kính của đường tròn đáy là $r=\dfrac{a}{2}$.

Chiều cao của hình trụ là $h=a$.

Thể tích của khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.a=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Câu 11. **Chọn A.**

Hình vẽ thiết diện:

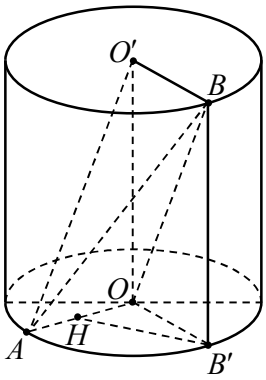


Theo giả thiết hình trụ có bán kính đáy là $R=a$ suy ra $IB=R=a$.

Vì mp qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2 \Rightarrow h=BC=\dfrac{8a^2}{2a}=4a$

Vậy $S_{xq}=2\pi Rh=8\pi a^2$, $V=\pi R^2h=4\pi a^3$.

Câu 12. **Chọn A.**



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O), khi đó $(\widehat{OA,O'B})=(\widehat{OA,OB'})=60°$.

Suy ra $\widehat{AOB'}=60°$ hoặc $\widehat{AOB'}=120°$.

Gọi H là là hình chiếu của B' trên OA.

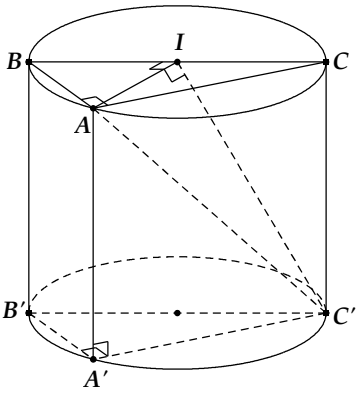
Trong cả hai trường hợp, ta đề có $HB'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$BH=\sqrt{HB'^2+BB'^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+4}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$ thì $S=S_{\Delta AOO'}+S_{\Delta AO'B}+S_{\Delta AOB}+S_{BOO'}$

$=2\left(S_{\Delta AOO'}+S_{\Delta AOB}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}OA.OO'+\dfrac{1}{2}OA.BH\right)=2\left(\dfrac{1}{2}.1.2+\dfrac{1}{2}.1.\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right)=\dfrac{4+\sqrt{19}}{2}$.

Câu 13. **Chọn C.**



Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có: $CC'\perp(ABC)\Rightarrow CC'\perp AI$.

Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI\perp BC$ do đó $AI\perp(BCC'B')$ hay góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

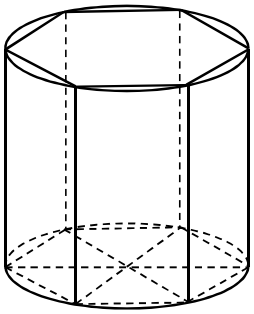
Xét tam giác AIC' ta có: $IC'=\dfrac{AI}{\tan\widehat{IC'A}}=R\sqrt{3}$.

Xét tam giác CIC' ta có: $IC'^2=IC^2+CC'^2\Leftrightarrow 3R^2=R^2+4a^2$

$\Rightarrow R=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=\pi R^2.h=4\pi a^3$.

Câu 14. **Chọn B.**



Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq}=2\pi rl=2\pi r.2r=36\pi a^2\Rightarrow r=3a$

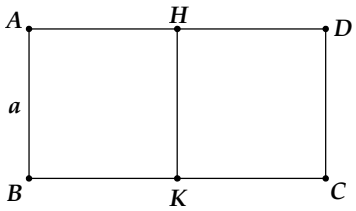
Lăng trụ lục giác đều có đường cao $h=l=6a$

Lục giác đều nội tiếp đường tròn có cạnh bằng bán kính của đường tròn

Suy ra diện tích lục giác đều $S=6.\dfrac{\left(3a\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích $V=S.h=81\sqrt{3}a^3$.

Câu 15. **Chọn C.**



Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h=AB=a$, bán kính đường tròn đáy là $R=BK=\dfrac{1}{2}BC=a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=4\pi a^2$.

Câu 16. **Chọn C.**

Gọi chu vi đáy là P .bTa có: $P=2\pi R\Leftrightarrow 4\pi a=2\pi R\Leftrightarrow R=2a$

Khi đó thể tích khối trụ: $V=\pi R^2h=\pi\left(2a\right)^2.a=4\pi a^3$.

Câu 17. **Chọn D.**

Gọi bán kính của hình trụ là R.

$V=4\pi\Leftrightarrow h.\pi R^2=4\pi\Leftrightarrow h=\dfrac{4}{R^2}\ \left(1\right)$.

$S_{XQ}=\dfrac{1}{3}S_{TP}\Leftrightarrow 2\pi Rh=\dfrac{1}{3}2\pi R\left(R+h\right)\Leftrightarrow 3h=R+h\Leftrightarrow h=\dfrac{R}{2}\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra: $\dfrac{4}{R^2}=\dfrac{R}{2}\Rightarrow R=2$

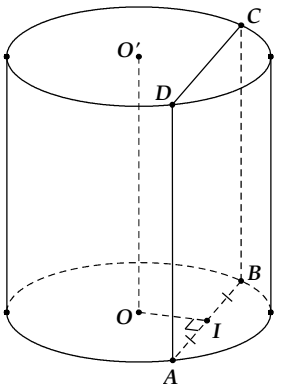
Câu 18. **Chọn B.**

Khối hộp nội tiếp khối trụ thì ta thấy một kích thước của khối hộp sẽ bằng chiều cao của khối trụ và hai kích thước còn lại sẽ là hai cạnh của đáy

Gọi h là chiều cao của khối hộp ta có $h=a$ hoặc $h=b$ hoặc $h=c$

$\Leftrightarrow$ Thể tích sẽ có giá trị $\dfrac{1}{4}\pi\left(a^2+b^2\right)c$ hoặc $\dfrac{1}{4}\pi\left(b^2+c^2\right)a$ hoặc $\dfrac{1}{4}\pi\left(c^2+a^2\right)b$.

Câu 19. **Chọn B.**



Thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi I là trung điểm AB

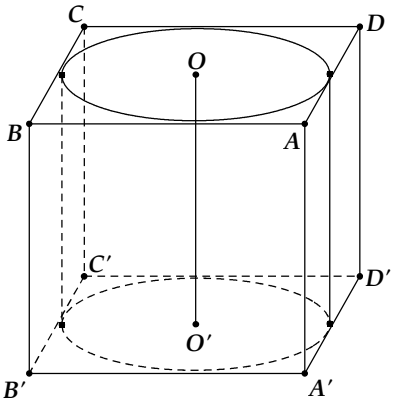
$\Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow d\left(OO',\left(P\right)\right) = OI = 2\text{cm}$.

Xét tam giác AOI vuông tại I: $AI = \sqrt{r^2 - OI^2} = \sqrt{5}\,\text{cm}$

$\Rightarrow AB = 2AI = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$.

$S_{ABCD} = AB.AD = 10\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

Câu 20. **Chọn C.**



Để $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ Hình trụ nội tiếp hình lập phương cạnh a

Hình trụ có bán kính đáy là $r = OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, chiều cao là $h = OO' = AA' = a$.

Ta có thể tích khối lập phương là $V_1 = a^3$, thể tích khối trụ lớn nhất là $V_2 = \pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

$\Rightarrow$ Tỷ số lớn nhất là $k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 21. **Chọn A.**

Gọi các hình H1, H2, H3, H4 lần lượt theo thứ tự có thể tích V_1, V_2, V_3, V_4.

Ta có: $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi\left(\dfrac{6a}{2\pi}\right)^2.3a = \dfrac{27}{\pi}a^3$ (Vì $2\pi r_1 = 6a \Rightarrow r_1 = \dfrac{6a}{2\pi}$).

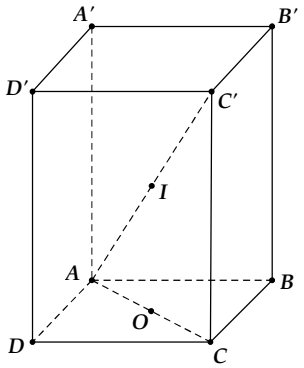
$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi\left(\dfrac{3a}{2\pi}\right).6a = \dfrac{27}{2\pi}a^3$ (Vì $2\pi r_2 = 3a \Rightarrow r_2 = \dfrac{3a}{2\pi}$).

$V_3 = h.B = 3a.\left(\dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a\right) = 3\sqrt{3}a^3$ (Đáy là tam giác đều cạnh $6a:3 = 2a$).

$V_4 = h.B = 6a.\left(\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.a\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$ (Đáy là tam giác đều cạnh $3a:3 = a$).

Ta có: $V_1 > V_3 > V_2 > V_4$.

Câu 22. **Chọn A.**



Bán kính đường tròn đáy:

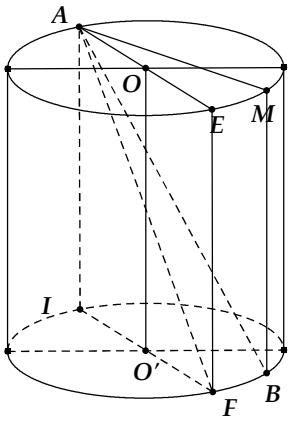
$R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \dfrac{\sqrt{6^2 + 8^2}}{2} = 5.$

Đường sinh của hình trụ

$l = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}.$

Vậy S_{xq} của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.5.2\sqrt{11} = 20\sqrt{11}\pi.$

Câu 23. **Chọn A.**



Gọi $AEFI$ là thiết diện đi qua trục của khối trụ.

Với mỗi điểm B thay đổi trên đường tròn (O'), gọi BM là đường sinh của trụ, M thuộc đường tròn (O), khi đó:

$AB^2 = AM^2 + MB^2 = AM^2 + 4R^2 \le AE^2 + 4R^2$

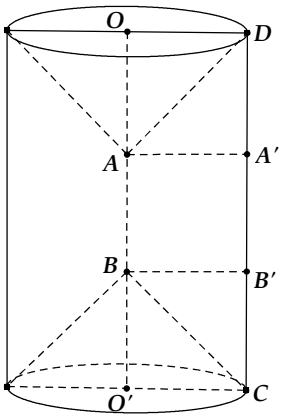
(dây cung luôn bé hơn hoặc bằng đường kính).

Suy ra $AB_{\max}^2 = AE^2 + 4R^2 = 8R^2$.

Vậy $AB_{\max} = 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow AM = AE$ hay M trùng E, B trùng F.

Câu 24. **Chọn D.**

Gọi V là thể tích vật tròn xoay cần tìm. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A, và đỉnh B, V_T là thể tích khối trụ trục $O'O$ như hình vẽ.



Gọi A', B' là hình chiếu vuông góc của A, B trên cạnh CD.

Suy ra $\Delta AA'D = \Delta BB'C$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Suy ra $2A'D = CD - A'B' = 3 - 1 = 2$. Suy ra $A'D = B'C = 1$.

Mặt khác $O'C = \sqrt{BC^2 - BO'^2} = 1$

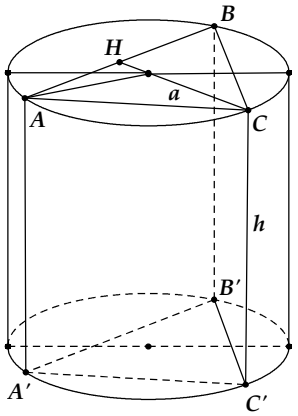
Ta có $AO = BO' = 1$ và $OD = O'C = 1$ nên ta có $V_1 = V_2$.

Thể tích vật tròn xoay cần tìm là

$V = V_T - 2V_1 = \pi.R^2CD - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.AO = \pi R^2\left(CD - \frac{2}{3}AO\right)$.

$V = \pi.1^2.\left(3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi$.

Câu 25. **Chọn B.**



Ta có tam giác đều ABC có đường cao $CH = \frac{3}{2}CO = \frac{3}{2}a$ nên cạnh

$AC = \frac{2CH}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $CC' = h$.

Vậy thể tích khối lăng trụ cần tìm là $V = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{3\sqrt{3}\,a^2h}{4}$.

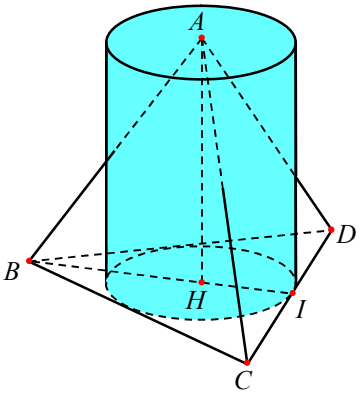
Câu 26. **Chọn D.**

Thể tích nước cần múc bằng thể tích của trụ: $V = \pi R^2h = \pi 6^2 10 = 360\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Thể tích của mỗi ca nước bằng một nửa thể tích khối cầu bán kính $3\left(\text{cm}\right)$, nên thể tích nước mỗi lần múc là $V' = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi.3^3 = 18\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Suy ra số lần cần múc để đổ đầy thùng nước là: $\frac{360\pi}{18\pi} = 20$ (lần).

Câu 27. **Chọn A.**



Tam giác BCD đều cạnh 4 có diện tích: $S_{BCD}=\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$

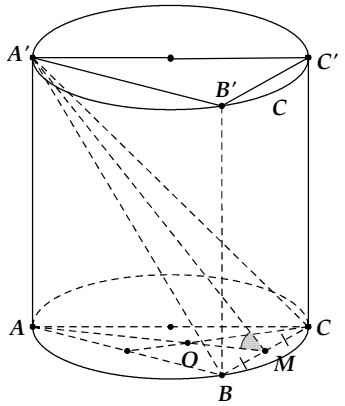
Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Độ dài đường cao khối tứ diện: $h=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Bán kính đáy đường tròn nội tiếp ΔBCD: $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 28. **Chọn C.**



Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $BC\perp AM$, $BC\perp A'M$

Suy ra: $\widehat{(A'BC),(ABC)}=\widehat{A'MA}=45^\circ\Rightarrow A'A=AM$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Đặt $BC=x$, $x>0$. Ta có $AM=A'A=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'M=\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Nên $S_{\Delta A'BC}=\dfrac{1}{2}.A'M.BC=\dfrac{x^2\sqrt{6}}{4}=a^2\sqrt{6}\Rightarrow x=2a$.

Khi đó: $AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $A'A=a\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích xung quang khối trụ là: $S_{xq}=2\pi.OA.A'A=2\pi.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3}=4\pi a^2$.

Câu 29. **Chọn A.**

Thể tích hộp sữa là $V=\pi R^2h\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Ta có diện tích của tấm tôn để làm hộp sữa là $S=S_{xq}+S_{đáy}=2\pi Rh+\pi R^2=\dfrac{2V}{R}+\pi R^2$.

Vậy $S=\dfrac{V}{R}+\dfrac{V}{R}+\pi R^2\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{R^2}.\pi R^2}=3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Vậy $S_{\min}=3\sqrt[3]{\pi V^2}$ khi $\dfrac{V}{R}=\pi R^2\Leftrightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}=R$.

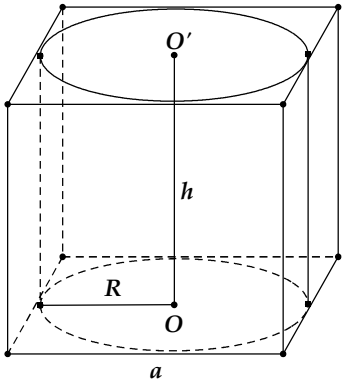
Câu 30. **Chọn B.**

Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên khối trụ có chiều cao bằng $2r$.

Ta có: $S_{tp}=4\pi\Leftrightarrow 2\pi r^2+2\pi rl=4\pi\Leftrightarrow 6\pi r^2=4\pi\Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Tính thể tích khối trụ là $V=\pi r^2 h=2\pi r^3=2\pi\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\pi\sqrt{6}}{9}$.

Câu 31. **Chọn C.**



Để gỗ bị đẽo ít nhất thì hình hộp đó phải là hình hộp đứng.

Gọi h là chiều cao của hình hộp chữ nhật và R là bán kính đáy của hình trụ.

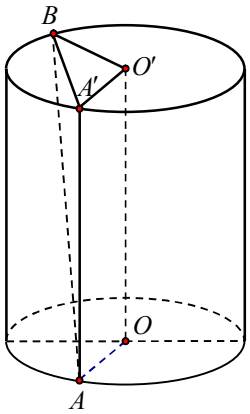
Do hình hộp chữ nhật và hình trụ có cùng chiều cao nên thể tích gỗ đẽo đi ít nhất khi và chỉ khi diện tích đáy của hình trụ lớn nhất (thể tích khối trụ lớn nhất). Suy ra $R=\dfrac{a}{2}$.

Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối hộp và thể tích của khối trụ có đáy lớn nhất.

Ta có: $V_1=a^2.h$ và $V_2=\pi R^2.h=\pi.\dfrac{a^2}{4}.h$.

Suy ra: $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\pi.\dfrac{a^2}{4}.h}{a^2.h}=\dfrac{\pi}{4}\approx 78,54\%$. Vậy thể tích gỗ ít nhất cần đẽo đi là khoảng $21,46\%$.

Câu 32. **Chọn A.**



Ta có $OO'=2a$, $A'B=\sqrt{AB^2-AA'^2}=\sqrt{6a^2-4a^2}=a\sqrt{2}$.

Do đó $A'B^2=O'B^2+O'A'^2=2a^2$ nên tam giác $O'A'B$ vuông cân tại O' hay $O'A'\perp O'B$

$\Rightarrow OA\perp O'B$.

Khi đó $V_{OO'AB}=\dfrac{1}{6}OA.O'B.d\left(OA,O'B\right).\sin\left(OA,O'B\right)=\dfrac{1}{6}a.a.2a.\sin 90^\circ=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 33. **Chọn A.**

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rh=\pi.6.25=150\pi$.

Khi lăn sơn quay một vòng sẽ quét được một diện tích bằng diện tích xung quanh của hình trụ. Do đó trục lăn quay 10 vòng sẽ quét được diện tích là $S=10.S_{xq}=1500\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 34. **Chọn A.**

Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là r và h.

Ta có: $V_1=\pi r^2 h\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là: $V_2=\pi\left(r+0,2\right)^2.\left(h+1,5\right)=\pi\left(r+0,2\right)^2.\left(\frac{480}{r^2}+1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $V=\pi\left(r+0,2\right)^2.\left(\frac{480}{r^2}+1,5\right)-480\pi$.

Xét $f\left(r\right)=\pi\left(r+0,2\right)^2.\left(\frac{480}{r^2}+1,5\right)$, $r>0$.

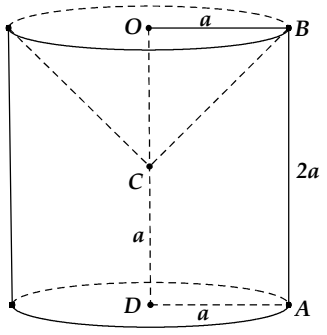
Khi đó $f'\left(r\right)=2\pi\left(r+0,2\right)\left(\frac{480}{r^2}+1,5\right)+\pi\left(r+0,2\right)^2.\left(-\frac{960}{r^3}\right)$

$f'\left(r\right)=0\Leftrightarrow 2\left(\frac{480}{r^2}+1,5\right)=\left(r+0,2\right).\frac{960}{r^3}\Leftrightarrow 3=\frac{192}{r^3}\Leftrightarrow r=4$.

r	0		4		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27783}{50}\pi$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\frac{27783}{50}\pi-480\pi\approx 75,66\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 35. **Chọn A.**



Gọi $\left(T\right)$ là khối trụ có đường cao là $2a$, bán kính đường tròn đáy là a và $\left(N\right)$ là khối nón có đường cao là a, bán kính đường tròn đáy là a.

Thể tích khối trụ $\left(T\right)$ là: $V_1=\pi.a^2.2a=2\pi.a^3$.

Thể tích khối nón $\left(N\right)$ là: $V_2=\frac{1}{3}\pi.a^2.a=\frac{\pi.a^3}{3}$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=V_1-V_2=2\pi.a^3-\frac{\pi.a^3}{3}=\frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 36. **Chọn D.**

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của thùng phải ít nhất.

Ta có $V=\pi R^2h\Leftrightarrow h=\frac{V}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R.\frac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2$

$=\frac{V}{R}+\frac{V}{R}+2\pi R^2\ge 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Vậy $\left(S_{tp}\right)_{\min}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ khi $\frac{V}{R}=2\pi R^2\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 37. **Chọn B.**

Theo cách 1: Ta thu được hình trụ có chiều cao $h=50$, $2\pi R=240\Rightarrow R=\frac{120}{\pi}$.

Suy ra $V_1 = \pi.\left(\dfrac{120}{\pi}\right)^2.50\ \text{cm}^3$

Theo cách 2: Ta thu được hai hình trụ có chiều cao $h = 50$, $2\pi R = 120 \Rightarrow R = \dfrac{60}{\pi}$.

Suy ra $V_2 = 2\pi.\left(\dfrac{60}{\pi}\right)^2.50\ \text{cm}^3$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$.

Câu 38. **Chọn C.**

$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$

$S_{TP} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R.\dfrac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} \ge 3.\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{V}{R}.\dfrac{V}{R}} = 3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$

S_{TP} đạt giá trị nhỏ nhất khi $2\pi R^2 = \dfrac{V}{R} \Leftrightarrow 2\pi R^2 = \dfrac{\pi R^2 h}{R} \Leftrightarrow 2R = h$

Câu 39. **Chọn B.**

Ta có: $h = 20R$

Suy ra thể tích khối trụ $V_1 = 20R.R^3.\pi = 20\pi R^3$

Thể tích 10 quả bóng $V_2 = \dfrac{4}{3}R^3\pi.10 = \dfrac{40R^3\pi}{3}$

Thể tích bóng không chiếm chỗ là $V_3 = 20R^3\pi - \dfrac{40}{3}R^3\pi = \dfrac{20R^3\pi}{3}$.

Câu 40. **Chọn A.**

Cột lớn dạng hình trụ có chiều cao $h = 4,2\text{m}$, đáy là đường tròn có bán kính $R_1 = 0,2\text{m}$ nên mỗi cột lớn có diện tích xung quanh là $S_1 = 2\pi R_1 h = 1,68\pi\left(\text{m}^2\right)$.

Cột nhỏ dạng hình trụ có chiều cao $h = 4,2\,\text{m}$, đáy là đường tròn có bán kính $R_2 = 0,13\text{m}$ nên mỗi cột lớn có diện tích xung quanh là $S_2 = 2\pi R_2 h = \dfrac{273}{250}\pi\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích cần sơn cho hai cột lớn và sáu cột nhỏ là $\left(2.1,68 + 6.\dfrac{273}{250}\right).\pi\ \left(\text{m}^2\right)$.

Vậy số tiền cần phải bỏ ra là $380\,000.\left(2.1,68 + 6.\dfrac{273}{250}\right).\pi \approx 11.833.000$ (đồng).

Câu 41. **Chọn C.**

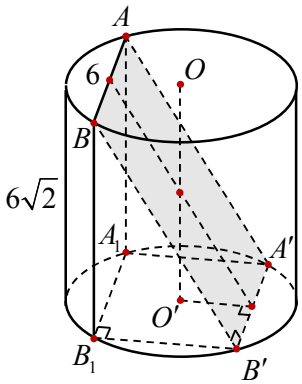
Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).

Vì $AB = A'B'$ nên $\left(ABB'A'\right)$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10\left(\text{cm}\right)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6\left(\text{cm}\right)$,



$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}\left(\text{cm}\right)$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4\left(\text{cm}\right)$.

Câu 42. **Chọn A.**

Gọi r là bán kính của viên billiards snooker.

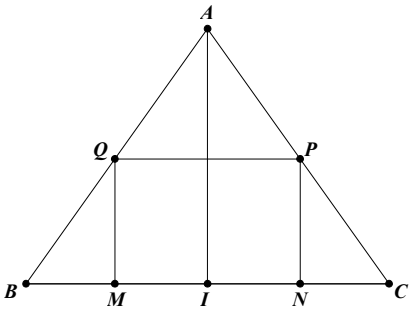
Thể tích viên billiards là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Phần thể tích nước dâng lên sau khi bỏ viên billiards vào là $V = \pi.\left(5,4\right)^2.\left(2r - 4,5\right)$.

Vì thể tích nước dâng lên chính là thể tích của viên billiards nên ta có $V_{bi} = V_n$

Ta có phương trình $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.\left(5,4\right)^2.\left(2r - 4,5\right) \overset{0<r<4,5}{\Leftrightarrow} r = 2,7$.

Câu 43. **Chọn C.**



Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN.

Đặt $MN = x$, $\left(0 < x < 90\right)$.

Ta có: $\frac{MQ}{AI} = \frac{BM}{BI} \Leftrightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(90 - x\right)$;

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$.

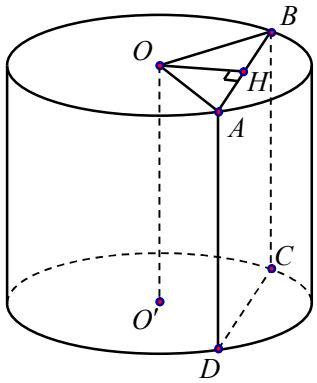
Thể tích của khối trụ là: $V_T = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\left(90 - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3 + 90x^2\right)$

Xét $f\left(x\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3 + 90x^2\right)$ với $0 < x < 90$.

$f'\left(x\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-3x^2 + 180x\right)$, $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 60 \end{array}\right.$.

Khi đó suy ra $\max\limits_{x\in(0;90)} f\left(x\right) = f\left(60\right) = \frac{13500.\sqrt{3}}{\pi}$.

Câu 44. **Chọn A.**



Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và $\left(P\right)$ là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm.

Mp$\left(P\right)$ cắt hai hình tròn đáy $\left(O\right), \left(O'\right)$ theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, BC. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi H là trung điểm của AB.

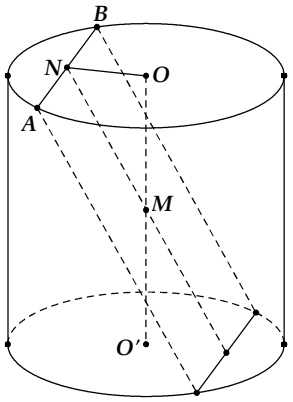
Ta có $OH \perp AB; OH \perp AD \Rightarrow OH \perp \left(ABCD\right)$

$\Rightarrow d\left(OO', \left(P\right)\right) = d\left(O, \left(ABCD\right)\right) = OH = 3\text{cm}$.

Khi đó: $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB.AD = 56\left(cm^2\right)$.

Câu 45. **Chọn D.**



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OO' và AB.

Ta có $\left(OO';\left(ABM\right)\right)=\left(OO';MN\right)=\widehat{OMN}=30°$.

Tam giác OMN vuông tại O có:

$ON=OM.\tan\widehat{OMN}=a.\tan 30°=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AB=2NB=2\sqrt{OB^2-ON^2}=2\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$

Câu 46. **Chọn C.**

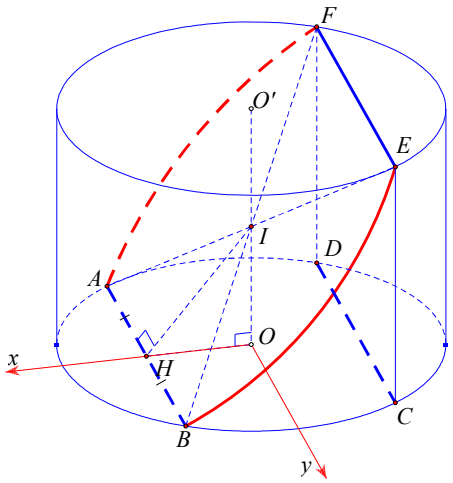
Ta có tổng diện tích vải cần để làm nên cái mũ là tổng diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hình tròn vành nón.

Ta có $r=\dfrac{15}{2}\text{cm}\Rightarrow S_{xq}=2\pi rh=2\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Diện tích vành nón là $\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2=\dfrac{1225\pi}{4}\left(\text{cm}^2\right)$.

Vậy diện tích vải cần dùng là $450\pi+\dfrac{1225\pi}{4}=\dfrac{3025}{4}\pi\approx 756,25\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 47. **Chọn C.**



Gọi I là trung điểm của OO', với O, O' là tâm của hai đáy; H là trung điểm của OO'; α là góc tạo bởi thiết diện với mặt đáy.

Ta có $AB=6\sqrt{3}$; $OH=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=3$; $\tan\alpha=\dfrac{IO}{OH}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

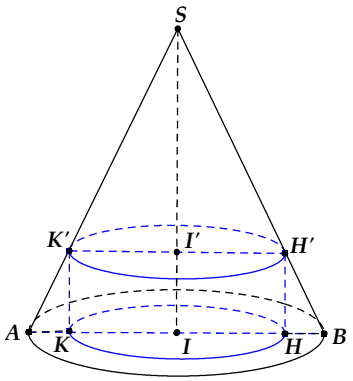
Đưa hệ trục tọa độ Oxy vào mặt phẳng đáy, gốc trùng với tâm O, trục Ox vuông góc với AB, trục Oy song song với AB.

Ta có $S_{ABCD}=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}dx=18\sqrt{3}+12\pi$.

Mặt khác, ta lại có $\cos\alpha=\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABEF}}\Rightarrow S_{ABEF}=\dfrac{S_{ABCD}}{\cos\alpha}=30\sqrt{3}+20\pi$. Do đó $a=20$, $b=30$.

Vậy $P = a + b = 50$.

Câu 48. **Chọn A.**



Gọi độ dài bán kính hình trụ là $x\,cm\left(0 < x < 20\right)$, chiều cao của hình trụ là h'.

Ta có: $\frac{h'}{h} = \frac{SI'}{SI} = \frac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \frac{SI - II'}{SI} = \frac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \frac{h - h'}{h} = \frac{x}{r}$

$\Leftrightarrow \frac{60 - h'}{60} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow 60 - h' = 3x \Leftrightarrow h' = 60 - 3x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

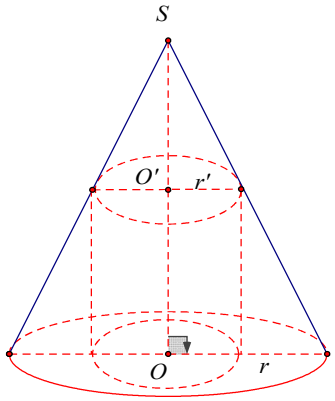
$S = 2\pi x.h' = 2\pi x\left(60 - 3x\right)\ 2\pi\left(60x - 3x^2\right)$

$= 2\pi\left[100 - 3\left(x - 10\right)^2\right] \le 200\pi$.

Diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất khi $x = 10$.

Khi đó thể tích khối trụ là: $V = \pi x^2.h' = \pi.10^2.30 = 3000\pi$.

Câu 49. **Chọn B.**



Theo định lí Ta-Let ta có: $\frac{SO'}{SO' + x} = \frac{h - x}{h} = \frac{r'}{r}$, $\left(0 < x < h\right)$.

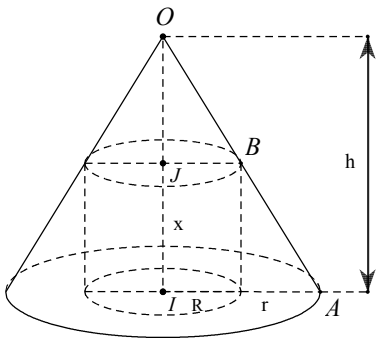
Thể tích hình trụ là: $V = \pi r'^2 x = \pi \frac{\left[\left(h - x\right)r\right]^2}{h^2}.x = \frac{\pi r^2}{h^2} x\left(h - x\right)^2$.

Xét

$$M\left(x\right) = x\left(h - x\right)^2 = 4.\frac{h - x}{2}.\frac{h - x}{2}.x \le 4\left(\frac{\frac{h - x}{2} + \frac{h - x}{2} + x}{3}\right)^3 = \frac{4h^3}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{h - x}{2} = x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Câu 50. **Chọn D.**



Gọi x là chiều cao của khúc gỗ hình khối trụ, R khúc gỗ hình khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I. OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ.

Ta có $\frac{R}{r} = \frac{h - x}{h} \Rightarrow R = \frac{r\left(h - x\right)}{h}$.

Thể tích khối trụ là $V=\pi x.R^2=\pi x.\dfrac{r^2}{h^2}\left(h-x\right)^2$

Xét hàm số $V\left(x\right)=\pi x.\dfrac{r^2}{h^2}\left(h-x\right)^2$, $0<x<h$.

Ta có $V'\left(x\right)=\pi\dfrac{r^2}{h^2}\left(h-x\right)\left(h-3x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$ hay $x=h$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{h}{3}$		h
$V'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$V\left(x\right)$	0	↗	$\dfrac{4\pi r^2h}{27}$	↘	0

Dựa vào BBT, thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x=\dfrac{h}{3}=40$ cm;

$V_{\max}=\dfrac{4\pi r^2h}{27}=\dfrac{4.\pi.30^2.120}{27}=16000\pi\left(\text{ cm}^3\right)=0,016\pi\left(m^3\right)$.

C. MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

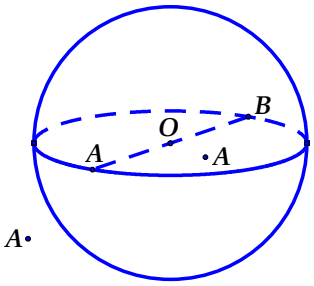
Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu là: $S(O;R)$. Khi đó $S(O;R)=\{M \mid OM=R\}$

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

- Nếu $OA=R \Leftrightarrow A \in S(O;R)$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu. Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là một đường kính của mặt cầu.
- Nếu $OA<R \Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- Nếu $OA>R \Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.

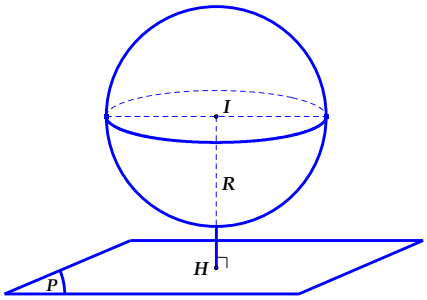
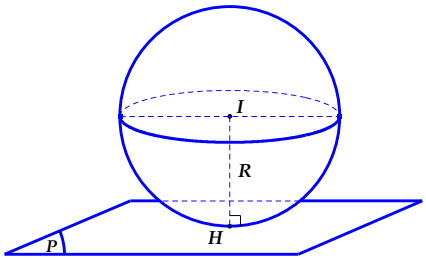
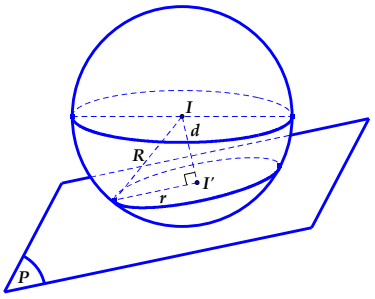
$\Rightarrow$ Khối cầu $S(O;R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \le R$



3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

$\Rightarrow d=IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

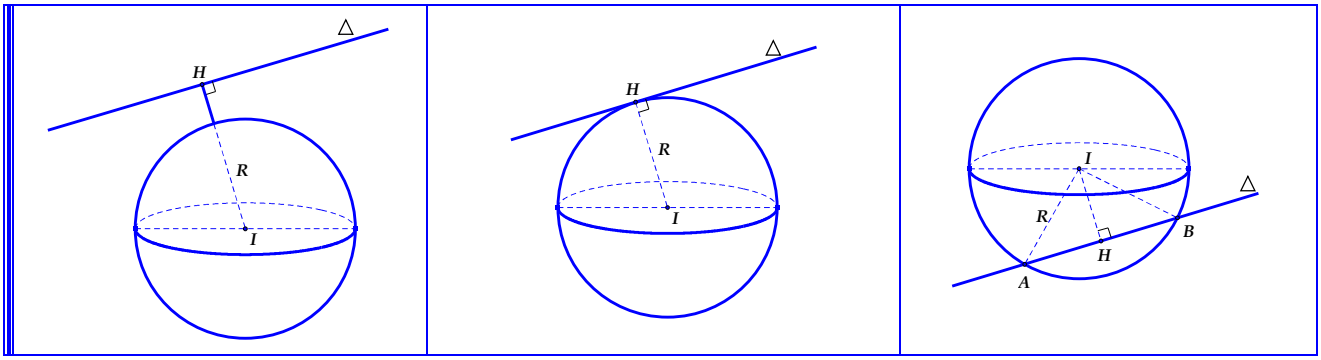
+ Nếu $d>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	+ Nếu $d=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng *tiếp diện* của mặt cầu và H là *tiếp điểm.*	+ Nếu $d<R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là *mặt phẳng kính* và thiết diện lúc đó được gọi là *đường tròn lớn.*

4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó :

+ $IH>R$: Δ không cắt mặt cầu.	+ $IH=R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là *tiếp tuyến* của (S) và H là *tiếp điểm.*	+ $IH<R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



* **Lưu ý:** Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định: $\boxed{d\left(I;\Delta\right)=IH.}$

+ Lúc đó: $R=\sqrt{IH^2+AH^2}=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

5. Diện tích và thể tích mặt cầu

✪ Diện tích mặt cầu: $\boxed{S_C=4\pi R^2}$.

✪ Thể tích mặt cầu: $\boxed{V_C=\frac{4}{3}\pi R^3}$.

6. Một số khái niệm về mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

a. Các khái niệm cơ bản:

Trục của đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trực của đoạn thẳng: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trực của đoạn thẳng: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

b. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

Bán kính: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. **(THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho khối cầu (S) có thể tích bằng $36\pi\,(\text{cm}^3)$. Diện tích mặt cầu 1 bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** $18\pi\ (\text{cm}^2)$. **C.** $36\pi\ (\text{cm}^2)$. **D.** $27\pi\ (\text{cm}^2)$.

Câu 2. **(THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho mặt cầu (S) tâm I. Một mặt phẳng (P) cách I một khoảng bằng $3(\text{cm})$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn đi qua ba điểm A, B, C biết $AB=6(\text{cm})$, $BC=8(\text{cm})$, $CA=10(\text{cm})$. Diện tích của mặt cầu (S) bằng:

A. $68\pi\ \text{cm}^2$. **B.** $20\pi\ \text{cm}^2$. **C.** $136\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $300\pi\ \text{cm}^2$.

Câu 3. **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

A. $V=\dfrac{16\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{64\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

Câu 4. **(THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. 3π. **B.** 12π. **C.** π. **D.** 6π.

Câu 5. **(THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB=2$ và $SA=3\sqrt{2}$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 6. **(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Trên đường Δ lấy hai điểm A, B với $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC=BD=AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB=AA'=a$, $AC=2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$ bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Câu 8. **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $SC=2a$ và $\widehat{SCA}=30^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

A. $R=a\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $R=a$. **D.** $R=\dfrac{a}{2}$.

Câu 9. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên hợp với đáy một góc bằng $60°$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính thể tích V của khối cầu (S).

A. $V=\dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{6}\pi a^3}{9}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Câu 10. **(THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$.Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=a$. **B.** $R=3a$. **C.** $R=4a$. **D.** $R=2a$.

Câu 11. **(THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V=\dfrac{125\pi}{6}$. **B.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{108\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 12. **(THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{3}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. 6π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** 12π. **D.** 2π.

Câu 13. **(THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 2. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. 6π. **B.** $4\sqrt{3}\pi$. **C.** 8π. **D.** 12π.

Câu 14. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa đường chéo của mặt bên và đáy của lăng trụ là $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

A. $\dfrac{13}{3}\pi a^2$. **B.** $\dfrac{5}{3}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{13}{9}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{5}{9}\pi a^2$.

Câu 15. **(THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018)** Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là $68.5(\text{cm})$. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49.83\ (\text{cm}^2)$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. ≈ 40 (miếng da). **B.** ≈ 20 (miếng da). **C.** ≈ 35 (miếng da). **D.** ≈ 30 (miếng da).

Câu 16. **(Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $\widehat{ASB}=90°$, $\widehat{BSC}=60°$, $\widehat{CSA}=120°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ là

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 17. **(THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S=\dfrac{49\pi a^2}{144}$. **B.** $S=\dfrac{7a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{49a^2}{144}$.

Câu 18. **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h=1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó là:

A. $S=9\pi$. **B.** $S=6\pi$. **C.** $S=5\pi$. **D.** $S=27\pi$.

Câu 19. **(THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=2a$, SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC đều cạnh $3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=a$. **B.** $R=2a$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $R=a\sqrt{3}$.

Câu 20. **(THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của hình chóp bằng $\dfrac{a^3}{6}$. Bán kính r mặt cầu nội tiếp của tứ diện là

A. $r=\dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r=2a$. **C.** $r=\dfrac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r=\dfrac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Câu 21. **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10/2017-2018)** Một hình lập phương có cạnh bằng $2a$ vừa nội tiếp hình trụ (T), vừa nội tiếp mặt cầu (C), hai đáy của hình lập phương nằm trên hai đáy của hình trụ. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{(C)}}{V_{(T)}}$ giữa khối cầu và khối trụ giới hạn bởi (C) và (T)

A. $\dfrac{V_{(C)}}{V_{(T)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{V_{(C)}}{V_{(T)}}=\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{V_{(C)}}{V_{(T)}}=\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{V_{(C)}}{V_{(T)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. **(Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 23. **(Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là các tam giác đều cạnh a, $AD=\dfrac{4}{3}a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{55}}{11}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{57}}{11}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{59}}{11}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{61}}{11}a$.

Câu 24. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Câu 25. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $6a$, tam giác SBC vuông tại S và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V=96\sqrt{3}\pi a^3$. **B.** $V=32\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **D.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$.

Câu 26. **(THPT Chuyên Hùng Vương-Bình Phước-lần 2-năm 2017-2018)** Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $AA'=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $R=2a\sqrt{2}$. **B.** $R=a$. **C.** $R=a\sqrt{2}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

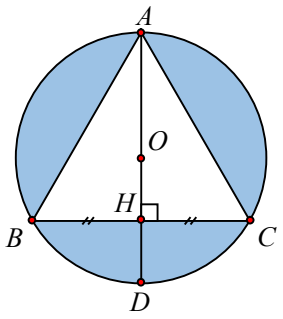
Câu 27. **(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$.

A. $R=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $R=\dfrac{5a}{3}$. **D.** $R=\dfrac{4a}{3}$.

Câu 28. **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC là tam giác cân với $\widehat{BAC}=120^\circ$, $AB=AC=a$. Hình chiếu của D trên mặt $mp(ABC)$ là trung điểm BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết $V_{ABCD}=\dfrac{a^3}{16}$.

A. $R=\dfrac{\sqrt{91}a}{8}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. **C.** $R=\dfrac{13a}{2}$. **D.** $R=6a$.

Câu 29. **(THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tam giác ABC đều cạnh 3 và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD bằng



A. $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\pi$. **B.** $\dfrac{23\sqrt{3}\pi}{8}$.

C. $V=\dfrac{23\sqrt{3}}{24}\pi$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{8}$.

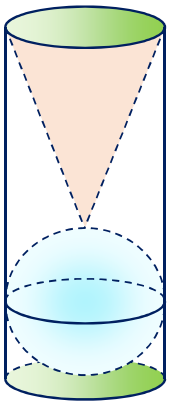
Câu 30. **(THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC}=45^\circ$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$.

A. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$.

Câu 31. **(THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=4a$, $CD=6a$, các cạnh còn lại có độ dài $a\sqrt{22}$. Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{79}}{3}$. **B.** $R=\dfrac{5a}{2}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{85}}{3}$. **D.** $R=3a$.

Câu 32. **(THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018)** Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy ; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 33. **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=3, AD=2$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{32\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{20\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{16\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{10\pi}{3}$.

Câu 34. **(THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, (S) là mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên (S). Tính tổng $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$.

A. $\frac{3a^2}{8}$. **B.** a^2. **C.** $4a^2$. **D.** $2a^2$.

Câu 35. **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=2a$. Mặt bên (SAB), (SCA) lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R=a\sqrt{2}$. **B.** $R=a$. **C.** $R=\frac{3a}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 36. **(THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018)** Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA.IC=IB.ID=h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A. $2h$. **B.** $\frac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h. **D.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37. **(THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$.

A. $\frac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3$. **B.** $\frac{7\sqrt{21}}{162}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{21}}{216}\pi a^3$. **D.** $\frac{49\sqrt{21}}{36}\pi a^3$.

Câu 38. **(THPT Lương Văn Chánh Phú Yên năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=\sqrt{3}a$, $AD=a$, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=5\pi a^2$. **B.** $S=10\pi a^2$. **C.** $S=4\pi a^2$. **D.** $S=2\pi a^2$.

Câu 39. **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp hình cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất.

A. $h=R\sqrt{2}$. **B.** $h=R$. **C.** $h=\dfrac{R}{2}$. **D.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

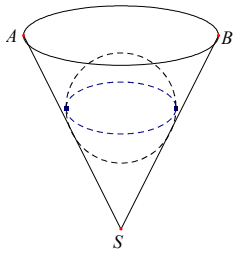
Câu 40. **(PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018)** Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

A. $h=\dfrac{3R}{2}$. **B.** $h=\dfrac{5R}{2}$. **C.** $h=\dfrac{5R}{4}$. **D.** $\dfrac{4R}{3}$.

Câu 41. **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp đa giác đều có các cạnh bên bằng a và tạo với mặt đáy một góc $30°$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 42. **(THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018)** Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10cm và độ dài đường sinh là 8cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{64}{\sqrt{39}}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{39}}{13}\text{cm}$ **C.** $\dfrac{32}{\sqrt{39}}\text{cm}$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{39}}{13}\text{cm}$.

Câu 43. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $144\sqrt{6}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $576\sqrt{2}$.

Câu 44. Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng $1;\ 2;\ 4$. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó bằng.

A. 6. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 45. **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018)** Khối cầu nội tiếp hình tứ diện đều có cạnh bằng a thì thể tích khối cầu là:

A. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{216}$. **B.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{144}$. **C.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{96}$. **D.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{124}$.

Câu 46. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB=2a$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi I là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho $SI\perp(P)$ và $SI=2a$. Tính bán kính R mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{65}}{4}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{65}}{16}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{65}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{7a}{4}$.

Câu 47. **(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)** Cho mặt cầu đường kính $AB=2R$. Mặt phẳng (P) vuông góc AB tại I (I thuộc đoạn AB), cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Tính $h=AI$ theo R để hình nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất?

A. $h=R$. **B.** $h=\dfrac{R}{3}$. **C.** $h=\dfrac{4R}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2R}{3}$.

Câu 48. **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp mặt cầu bán kính bằng a, thể tích V của khối chóp có thể tích nhỏ nhất.

A. $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{10a^3}{3}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\dfrac{32a^3}{3}$.

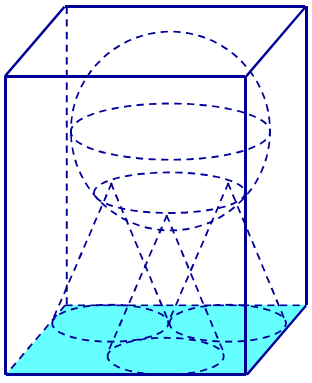
Câu 49. **(THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $84\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\left(\text{cm}\right)$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}\left(\text{cm}\right)$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}\left(\text{cm}\right)$.

Câu 50. **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60°, độ dài đường sinh bằng a. Dãy hình cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... thỏa mãn: (S_1) tiếp xúc với mặt đáy và các đường sinh của hình nón (N); (S_2) tiếp xúc ngoài với (S_1) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N); (S_3) tiếp xúc ngoài với (S_2) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N). Tính tổng thể tích các khối cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... theo a.

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{52}$. **B.** $\dfrac{27\pi a^3\sqrt{3}}{52}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\dfrac{9\pi a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 51. **(THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\dfrac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón.



Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và lượng nước trào ra là $\dfrac{337\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. Tính thể tích nước ban đầu ở trong bể.

A. $\approx 885,2\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\approx 1209,2\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\approx 1106,2\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\approx 1174,2\left(\text{cm}^3\right)$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1C	2C	3C	4A	5D	6B	7C	8C	9A	10D
11B	12A	13D	14A	15D	16A	17C	18A	19B	20A
21B	22A	23A	24D	25B	26C	27C	28A	29B	30A
31C	32A	33A	34D	35C	36B	37A	38A	39A	40D
41A	42D	43C	44B	45A	46A	47C	48D	49D	50A
51B									

Câu 1. **Chọn C.**

Thể tích khối cầu bằng $36\pi \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là: $S = 4\pi r^2 = 4\pi.3^2 = 36\pi \ (\text{cm}^2)$.

Câu 2. **Chọn C.**

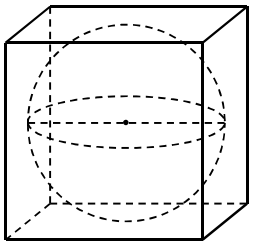
Gọi S là diện tích tam giác ABC và R bán kính đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

$S = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$; $R = \frac{6.8.10}{4.24} = 5$

Khi đó bán kính mặt cầu $r = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$

Diện tích của mặt cầu (S) bằng $S = 4\pi r^2 = 4.\pi.\left(\sqrt{34}\right)^2 = 136\pi \text{cm}^2$.

Câu 3. **Chọn C.**



Khối lập phương có thể tích $64a^3$ nên cạnh bằng $4a$. Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính $R = \frac{4a}{2} = 2a$ nên thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32\pi a^3}{3}$.

Câu 4. **Chọn A.**

Đường chéo hình lập phương bằng $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

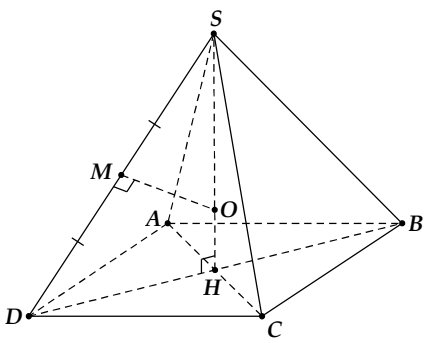
Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi$.

Câu 5. **Chọn D.**

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là tâm đáy thì SH là trục của hình vuông $ABCD$.

Gọi M là trung điểm của SD, trong $mp(SDH)$ kẻ đường trung trực của đoạn SD cắt SH tại O thì $OS = OA = OB = OC = OD$ nên O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu là $R = SO$.

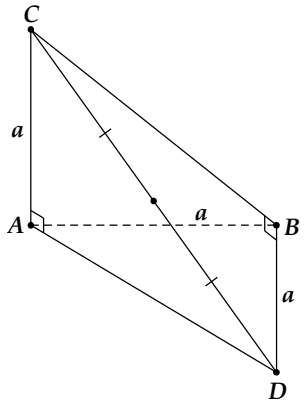


Ta có $\Delta SMO \backsim \Delta SHD \Rightarrow \dfrac{SO}{SD} = \dfrac{SM}{SH} \Rightarrow R = SO = \dfrac{SD.SM}{SH} = \dfrac{SD^2}{2SH}$.

Với $SH^2 = SD^2 - HD^2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow SH = 4$.

Vậy $R = \dfrac{SD^2}{2SH} = \dfrac{9}{4}$.

Câu 6. **Chọn B.**



Ta có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB mà $CA \perp AB \Rightarrow CA \perp (ABD)$ suy ra $CA \perp AD$.

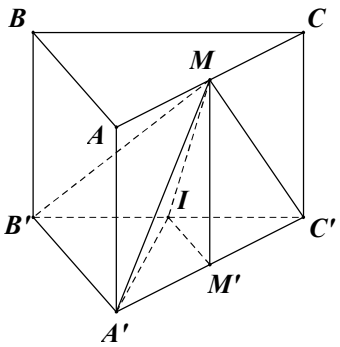
Tương tự, ta cũng có $DB \perp BC$.

Hai điểm A, B cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông nên bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu đường kính CD, tâm I là trung điểm CD.

Xét tam giác vuông ACD, ta có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. **Chọn C.**



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Gọi M' là trung điểm của cạnh $A'C'$.

Khi đó $MM' \perp (A'B'C')$.

Do $MA' = MC' = a\sqrt{2}$ nên $\Delta MA'C'$ vuông tại M.

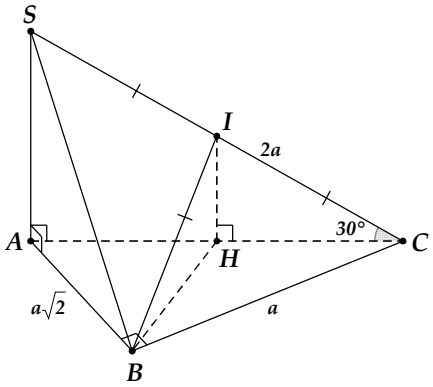
Do đó M' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta MA'C'$.

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$.

Bán kính mặt cầu là $r = IB' = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 5\pi a^2$.

Câu 8. **Chọn C.**



Ta có:

- $AC = SC.\cos 30° = a\sqrt{3}$.
- $AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$
  $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông ở B.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AC, SC.

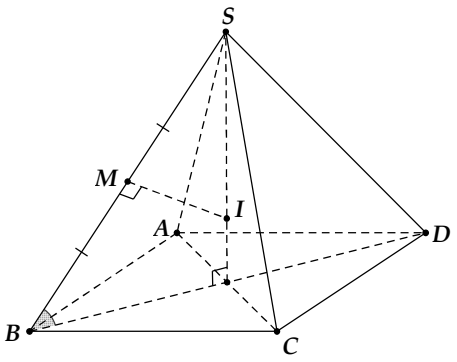
Khi đó ta có:

- H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
- $IH \perp (ABC) \Rightarrow IA = IB = IC = IS$

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Suy ra $R = \dfrac{1}{2}SC = a$.

Vậy $R = a$.

Câu 9. **Chọn A.**



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ hay SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Trong mặt phẳng (SBO) kẻ đường trung trực Δ của cạnh SB và gọi $I = \Delta \cap SO$ khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều và góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng $60°$ nên $\widehat{SBO} = 60°$.

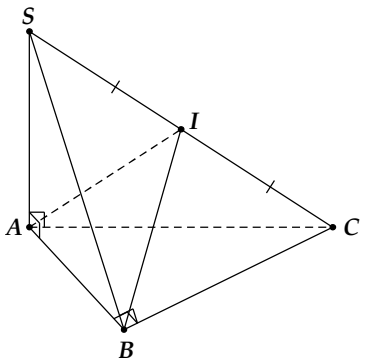
Ta có $\Delta SMI \backsim \Delta SOB$ nên $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SB} \Leftrightarrow SI = \dfrac{SM.SB}{SO}$.

Với $SO = OB\tan 60° \Leftrightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $SB = OB\cos 60° \Leftrightarrow SB = a\sqrt{2}$; $SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $SI = \dfrac{SM.SB}{SO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

Câu 10. **Chọn D.**



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên tam giác SAC vuông tại A

$\Rightarrow$ điểm A thuộc mặt cầu tâm I đường kính SC (1).

Mặt khác ta lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$ hay tam giác SBC vuông tại B

$\Rightarrow$ điểm B thuộc mặt cầu tâm I đường kính SC (2).

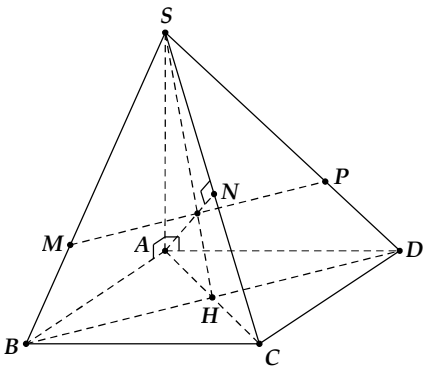
Từ (1) và (2) ta có bốn điểm A, B, S, C cùng thuộc mặt cầu tâm I đường kính BC.

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a$.

Xét tam giác vuông SAC có $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 16a^2 \Rightarrow SC = 4a$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \dfrac{BC}{2} = 2a$.

Câu 11. **Chọn B.**



Theo giả thiết mặt phẳng (α) vuông góc với SC nên ta có $AN \perp SC$, $AP \perp SC$, $AM \perp SC$

Mặt khác $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC)$

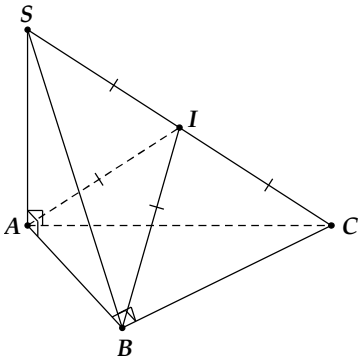
$\Rightarrow AM \perp MC$

Tương tự ta cũng chứng minh được $AP \perp PC$.

Từ đó ba điểm M, N, P cùng nhìn AC dưới góc vuông nên bốn điểm C, M, N, P nằm trên mặt cầu đường kính $AC=4$.

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là $V=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 12. **Chọn A.**



Gọi I là trung điểm của SC.

Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow IA=IS=IC=\dfrac{1}{2}SC$ (1).

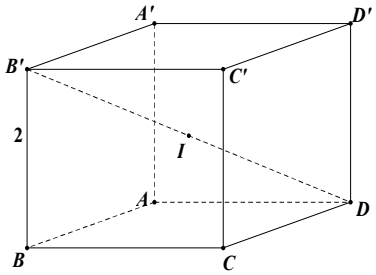
Dễ dàng chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$ hay tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow IB=IS=IC=\dfrac{1}{2}SC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $IA=IB=IC=IS=\dfrac{1}{2}SC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính

$R=\dfrac{1}{2}SC=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+AC^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+AB^2+BC^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu cần tìm là $S=4\pi R^2=6\pi$.

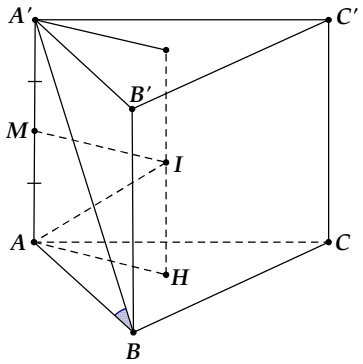
Câu 13. **Chọn D.**



Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính bằng $R=\dfrac{B'D}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt{3}\right)^2=12\pi$.

Câu 14. **Chọn A.**



Gọi H là tâm ΔABC thì $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\left(\widehat{A'B,(ABC)}\right)=\left(\widehat{A'B,AB}\right)=\widehat{A'BA}=60^\circ$

$\Rightarrow AA'=AB.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm AA' thì $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng trung trực của đoạn AA' cắt trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Ta có $R^2=IA^2=IM^2+AM^2=AH^2+AM^2=\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{13a^2}{12}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $S=4\pi R^2=4\pi\dfrac{13a^2}{12}=\dfrac{13}{3}\pi a^2$.

Câu 15. **Chọn D.**

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là $68.5(\text{cm})$, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có: $2\pi R=68.5\Rightarrow R=\dfrac{68.5}{2\pi}$

Diện tích mặt cầu: $S_{xq}=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{68.5}{2\pi}\right)^2\approx 1493.59\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Vì mỗi miếng da có diện tích $49.83\ \left(\text{cm}^2\right)$ nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\dfrac{1493.59}{49.83}\approx 29.97$. Vậy phải cần ≈ 30 (miếng da).

Câu 16. **Chọn A.**

Xét tam giác SAB theo định lí cosin ta có :

$AB^2=SA^2+SB^2-2SA.SB\cos\widehat{ASB}$

$=a^2+a^2-2a.a.\cos 90^\circ=2a^2\Rightarrow AB=a\sqrt{2}$

Xét tam giác SAC theo định lí cosin ta có :

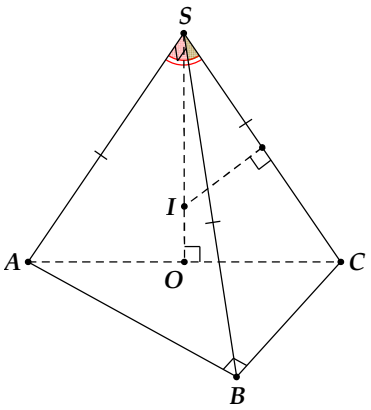
$AC^2=SA^2+SC^2-2SA.SC\cos\widehat{ASC}$

$=a^2+a^2-2a.a.\cos 120^\circ=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$

Xét tam giác SBC theo định lí cosin ta có :

$BC^2=SC^2+SB^2-2SC.SB\cos\widehat{ASB}$

$=a^2+a^2-2a.a.\cos 60^\circ=a^2\Rightarrow BC=a$



Ta có $AB^2+BC^2=AC^2$ nên ΔABC vuông tại B.

Gọi O là trung điểm của AC. Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Vì $SA=SB=SC$ và $OA=OB=OC$ nên SO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SO\perp\left(ABC\right)$ tại O.

Dựng mặt phẳng trung trực của SC cắt SO tại $I\Rightarrow I$ là tâm mặt cấu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Xét $\Delta SEI\backsim SOC\ (g-g)\Rightarrow\dfrac{SI}{SC}=\dfrac{SE}{SO}\quad(1)$ với $SE=\dfrac{a}{2}$, $SC=a$

Mặt khác ΔSOC vuông tại O áp dụng định lí pitago $\Rightarrow SO^2=SB^2-BO^2=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow SO=\dfrac{a}{2}$

Thay vào $(1)\Rightarrow SI=a$ vậy bán kính cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là a.

$\Rightarrow$ Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $4\pi a^2$.

Chú ý: Sau khi chứng minh $SO\perp\left(ABC\right)$ tại O thì ta có $R=\dfrac{SA^2}{2.SO}=\dfrac{a^2}{2.\dfrac{AC}{2}}=a$.

Câu 17. **Chọn C.**

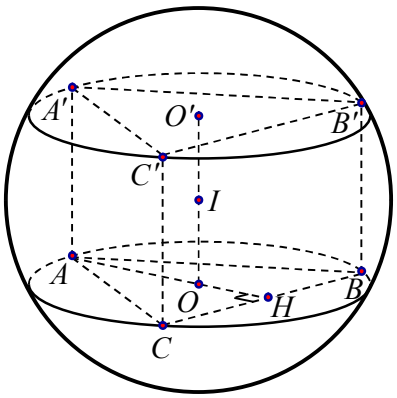
Gọi mặt cầu đi qua 6 đỉnh của lăng trụ là (S) tâm I, bán kính R.

Do $IA=IB=IC=IA'=IB'=IC'=R$

$\Rightarrow$ Hình chiếu của I trên các mặt (ABC), $(A'B'C')$ lần lượt là tâm O của ΔABC và tâm O' của $\Delta A'B'C'$.

Mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều

$\Rightarrow I$ là trung điểm của OO'



$\Rightarrow OI = \dfrac{OO'}{2} = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Do O là tâm tam giác đều ABC cạnh a $\Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông OAI có: $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích của mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{21a^2}{36} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 18. **Chọn A.**

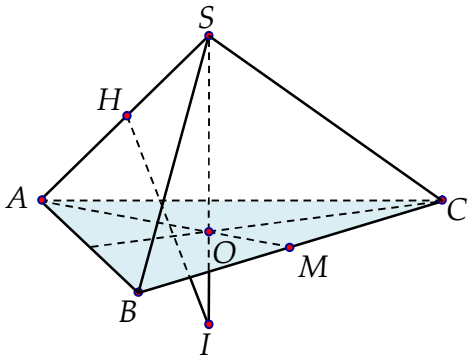
Gọi O là tâm của ΔABC suy ra $SO \perp (ABC)$ và

$SO = h = 1$; $OA = \dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có :

$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

Trong mặt phẳng (SAO) kẻ trung trực của đoạn SA cắt SO tại I, suy ra $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Gọi H là trung điểm của SA. Ta có $\Delta SHI \backsim \Delta SOA$ nên $R = IS = \dfrac{SH.SA}{SO} = \dfrac{3}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu $S_{mc} = 4\pi R^2 = 9\pi$.

Câu 19. **Chọn B.**

Gọi G là trọng tâm ΔABC, I là trung điểm cạnh AB.

Kẻ đường thẳng d qua G và song song với SC

$\Rightarrow d \perp (ABC)$.

Trong (SCI), kẻ đường trung trực của cạnh SC, cắt d tại O.

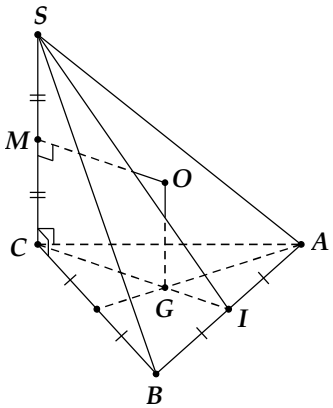
Khi đó, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$R = OC = \sqrt{CG^2 + OG^2}$ với $CG = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$;

$OG = MC = \dfrac{1}{2}SC = a$.

Vậy, $R = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

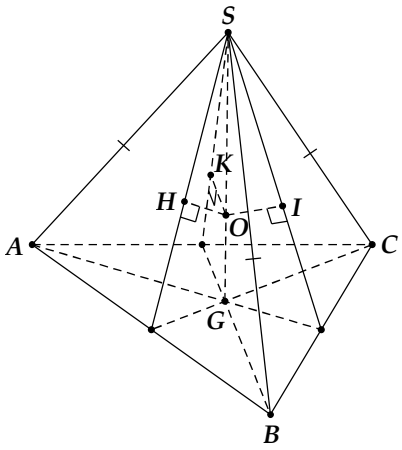


Câu 20. **Chọn A.**

Do $SA = SB = SC$ nên các tam giác SAB, SBC, SCA vuông cân tại S, do SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có:

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}SA.SB.SC = \dfrac{SA^3}{6} = \dfrac{a^3}{6} \Rightarrow SA = SB = SC = a \Rightarrow AB = BC = CA = a\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

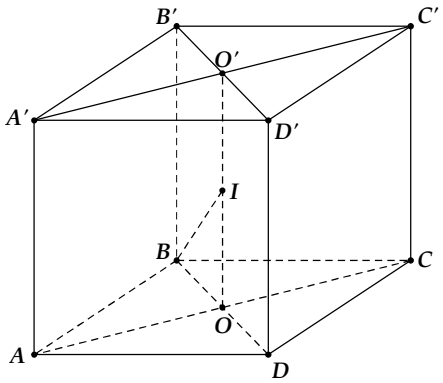


Gọi G, H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC), (SAB), (SBC), (SCA) ta có $OG = OH = OI = OK = r$

Và $V_{S.ABC} = V_{O.ABC} + V_{O.SAB} + V_{O.SBC} + V_{O.SCA} = \frac{r}{3}\left(3S_{\Delta SAB} + S_{\Delta ABC}\right) = \frac{a^2 r}{6}\left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{a^3}{6} \Rightarrow r = \frac{a}{3+\sqrt{3}}$

Câu 21. **Chọn B.**

Xét khối trụ (T) có $\begin{cases} R_{(T)} = OD = \frac{1}{2}BD = a\sqrt{2} \\ h_{(T)} = OO' = 2a \end{cases}$



$\Rightarrow V_{(T)} = \pi R_{(T)}^2 . h_{(T)} = 4\pi a^3$.

Xét khối cầu (C) có :

$R_{(C)} = IB = \sqrt{IO^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R_{(C)}^3 = 4\sqrt{3}\pi a^3$.

Do đó $\frac{V_{(C)}}{V_{(T)}} = \sqrt{3}$.

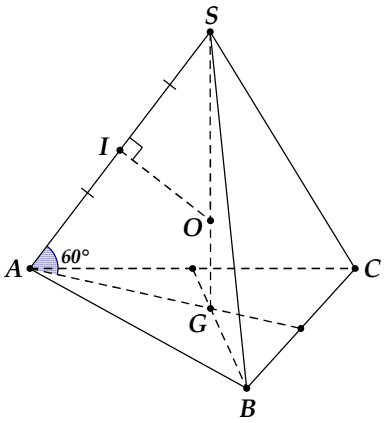
Câu 22. **Chọn A.**

+) Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$ và SG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+) Gọi I là trung điểm SA, đường trung trực của SA qua I và cắt SG tại O

$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính mặt cầu $R = SO$.



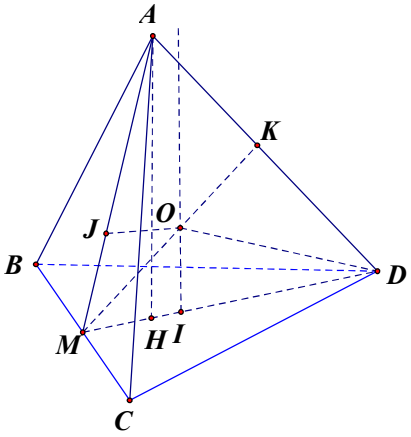
+) Ta có: $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAG} = 60°$, $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SG = \tan 60°.AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$; $SA = \dfrac{SG}{\sin 60°} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $\Delta SIO \backsim \Delta SGA \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SG}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SI.SA}{SG} \Rightarrow SO = \dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}}{a} = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho $R = SO = \dfrac{2a}{3}$.

Câu 23. **Chọn A.**



Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BC \perp AM$, $BC \perp DM$, $AM = DM$ (do ABC và DBC là các tam giác đều). Do đó $BC \perp (AMD)$.

Trong (AMD) là mặt phẳng trung trực của , dựng $AH \perp MD$ thì $AH \perp (BCD)$, $d \perp (BCD)$ tại I là trọng tâm của tam giác DBC nên d là trục của đáy BCD.

Gọi O là giao của d và MK (O cũng chính là giao điểm của hai trục của hai đáy DBC và ABC).

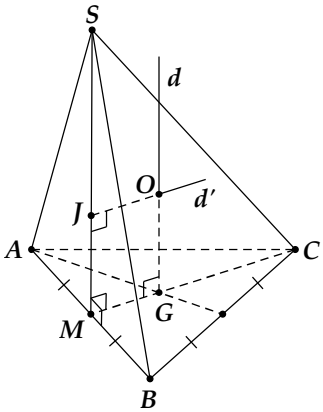
Mặt khác (AMD) là mặt phẳng trung trực của BC nên $OB = OC = OA = OD$ hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$AM = DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $DK = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{2}{3}a$, $MK^2 = MD^2 - DK^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3}a\right)^2 \Rightarrow MK = \dfrac{a\sqrt{11}}{6}$

Ta có $\tan\widehat{KMD} = \dfrac{DK}{MK} = \dfrac{OI}{MI} \Rightarrow OI = \dfrac{DK.MI}{MK} = \dfrac{2a\sqrt{33}}{33}$

$r = OD = \sqrt{OI^2 + ID^2}$ với $ID = \dfrac{2}{3}MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ suy ra $r = \dfrac{a\sqrt{55}}{11}$.

Câu 24. **Chọn D.**



Gọi M là trung điểm của AB.Vì ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SM \perp (ABC)$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC.Vì ΔABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Dựng đường thẳng d đi qua G và vuông góc với $mp(ABC)$.

Gọi J là tâm là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. Dựng đường thẳng d' đi qua J và vuông góc với $mp(SAB)$.

Gọi O là giao điểm của d và d'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với $r = OC$.

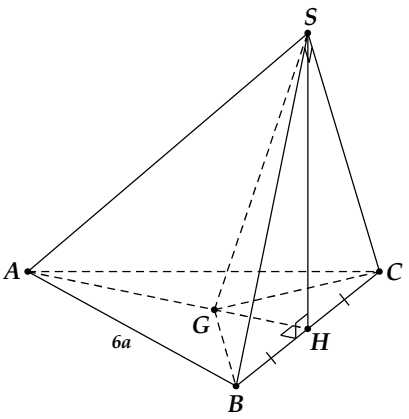
Do ΔSAB và ΔABC là những tam giác đều cạnh bằng 1 nên ta có:

$JM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $GC = \dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Xét ΔOGC vuông tại G ta có: $OC=\sqrt{GC^2+GO^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là: $V=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3\pi=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Câu 25. **Chọn B.**



Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

Vì ΔABC đều nên $AH\perp BC$.

Vì $(SBC)\perp(ABC)$ và $(SBC)\cap(ABC)=BC$ nên $AH\perp(SBC)$.

Do H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC nên AH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC

Vì ΔABC đều nên trọng tâm G chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

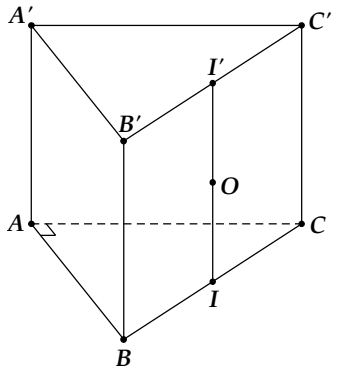
Vậy ta có $GA=GB=GC$. Mà $G\in AH$ nên $GS=GB=GC$.

Suy ra $GS=GA=GB=GC$. Vậy G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính: $R=GA=\frac{2}{3}.6a.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $V=\frac{4}{3}.\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^3=32\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 26. **Chọn C.**



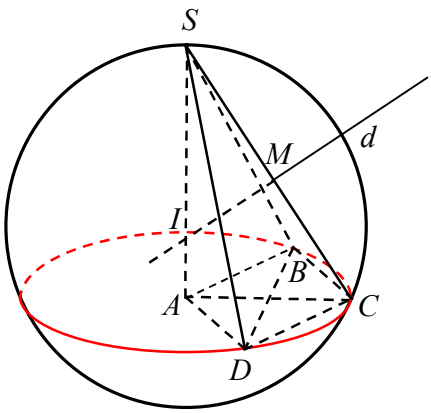
Ta có tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm I của BC. Gọi trung điểm của $B'C'$ là I' thì tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thuộc đường thẳng II'.

Xét hình chữ nhật $BCC'B'$ có tâm của hình chữ nhật là trung điểm O của II'.

Tam giác ICO có $OC=\sqrt{IO^2+IC^2}$

Mà $II'=AA'=2a$, $BC=2a$, nên bán kính $R=OC=a\sqrt{2}$.

Câu 27. **Chọn C.**



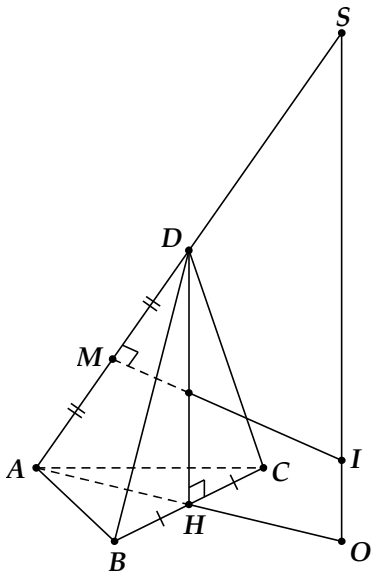
Xét hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=120^\circ$ nên $AD=AC=AB$, suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy BCD.

Theo giả thiết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên đường thẳng SA là trục của đáy BCD.

Gọi M là trung điểm SD, trong mặt phẳng (SAD) kẻ đường thẳng d vuông góc với SD tại M, d cắt SA tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$.
Lúc đó $R = IS$.

Ta có $\Delta ISM \backsim \Delta DSA \Rightarrow \dfrac{IS}{DS} = \dfrac{SM}{SA} \Rightarrow IS = \dfrac{SM.DS}{SA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{10}}{3a} = \dfrac{5a}{3}$.

Câu 28. **Chọn A.**



Gọi H là trung điểm BC.

Có $AB = a, \widehat{BAH} = 60^\circ \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$; $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}DH.S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{a^3}{16} = \dfrac{1}{3}DH.\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $DA = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì bán kính đường tròn đó là $R = AO = \dfrac{BC}{2\sin A} = a$.

Vậy H là trung điểm AO.
Kẻ trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường thẳng này cắt AD tại S với D là trung điểm SA.

Vậy $SO = 2DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = 2DA = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ và $SM = \dfrac{3}{4}SA = \dfrac{3a\sqrt{7}}{8}$.

Từ trung điểm M của đoạn AD kẻ đường vuông góc với AD, cắt SO tại I.
Dễ dàng có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Hai tam giác vuông SAO và SIM đồng dạng nên $\dfrac{MI}{OA} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow MI = a.\dfrac{3\sqrt{7}a}{8.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$.

Bán kính mặt cầu bằng $R_{ABCD} = ID = \sqrt{MI^2 + MD^2} = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$.

Câu 29. **Chọn B.**

Gọi V_1 là thể tích của khối cầu có được bằng cách quay hình tròn tâm (O) quanh trục AD
Gọi V_2 là thể tích của khối nón có được bằng cách quay tam giác AHC quanh trục AD.
Thể tích cần tìm là $V = V_1 - V_2$.

Đường tròn tâm O có bán kính $R = OA = \sqrt{3}$. Ta có $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3 = 4\sqrt{3}\pi$.

Khối nón có bán kính đáy $r = \dfrac{3}{2}$, chiều cao $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, do đó $V_2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\pi = \dfrac{9\sqrt{3}\pi}{8}$

Thể tích cần tìm là $V = V_1 - V_2 = \dfrac{23\sqrt{3}\pi}{8}$.

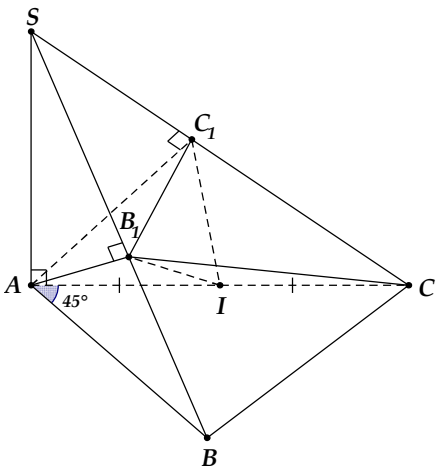
Câu 30. **Chọn A.**

Ta có $BC^2 = a^2 + 2a^2 - 2.a.a\sqrt{2}.\cos 45° = a^2 \Rightarrow BC = a$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại B.

$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$.

$\left.\begin{matrix} AB_1 \perp CB \\ AB_1 \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1$.



Gọi I là trung điểm AC, suy ra $IC = IA = IB$.

Tam giác AB_1C vuông tại B_1 suy ra $IC = IA = IB_1$.

Tam giác AC_1C vuông tại C_1 suy ra $IC = IA = IC_1$.

Do đó hình chóp $A.BCC_1B_1$ nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính $r = IA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

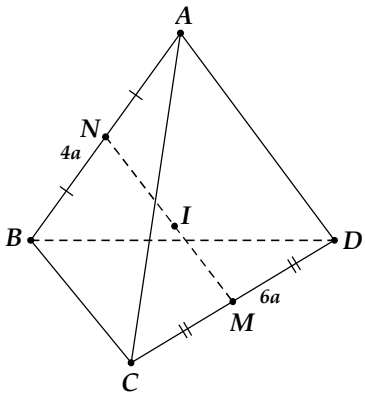
Vậy thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 31. **Chọn C.**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CN \\ AB \perp DN \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN$; tương tự $CD \perp MN$.

Suy ra MN là đường trung trực và là đoạn vuông góc chung của AB và CD.



Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ thì I thuộc MN.

Xét tam giác ANC vuông tại N có:

$CN = \sqrt{AC^2 - NA^2} = \sqrt{22a^2 - 4a^2} = 3\sqrt{2}a$.

Xét tam giác CMN vuông tại M có:

$MN = \sqrt{CN^2 - CM^2} = \sqrt{18a^2 - 9a^2} = 3a$.

Lại có: $\begin{cases} IM + IN = 3a \\ IM^2 + MC^2 = IN^2 + NA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM + IN = 3a \\ IM^2 - IN^2 = NA^2 - MC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} IM + IN = 3a \\ (IM + IN)(IM - IN) = -5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM + IN = 3a \\ IM - IN = -\dfrac{5}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM = \dfrac{2}{3}a \\ IN = \dfrac{7}{3}a \end{cases}$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \sqrt{IM^2 + MC^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}a^2 + 9a^2} = \dfrac{\sqrt{85}}{3}a$.

Câu 32. **Chọn A.**

Gọi bán kính đường tròn đáy của hình trụ là R.

Theo giả thiết và hình vẽ thì:

- Hình trụ có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $6R$.
- Mặt cầu có bán kính là R.

• Hình nón có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $4R$.

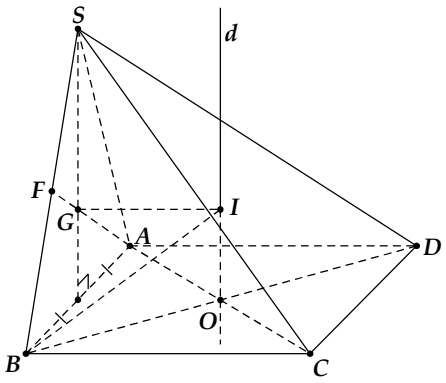
Thể tích lượng nước ban đầu V bằng thể tích khối trụ nên $V=\pi R^2.6R=6\pi R^3$.

Thể tích lượng nước tràn ra V_1 bằng tổng thể tích khối nón và khối cầu nên $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2.4R+\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\pi R^3}{3}$.

Thể tích lượng nước còn lại trong cốc là $V_2=V-V_1=6\pi R^3-\frac{8\pi R^3}{3}=\frac{10\pi R^3}{3}$.

Do đó tỉ số thể tích của lượng nước còn lại và lượng nước ban đầu là: $\frac{V_2}{V}=\frac{\frac{10\pi R^3}{3}}{6\pi R^3}=\frac{5}{9}$.

Câu 33. **Chọn A.**



Gọi E là trung điểm AB. Dễ thấy $SE\perp(ABCD)$.

Dựng trục d qua O và song song với SE.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng đi qua G vuông góc với mặt phẳng (ABC) cắt d tại I. I là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $SE=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SG=\frac{2}{3}SE=\sqrt{3}$;

$GI=EO=\frac{1}{2}AD=1$; $R=SI=\sqrt{SG^2+GI^2}=\sqrt{4}=2$.

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.8=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 34. **Chọn D.**

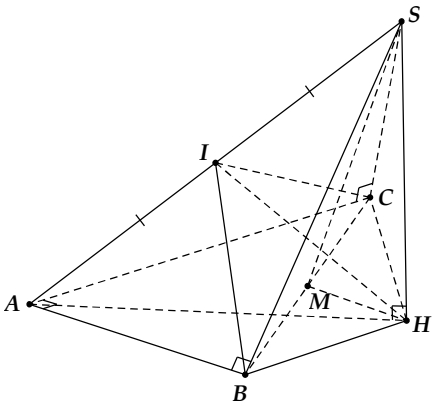
Gọi I là tâm mặt cầu (S), theo giả thiết thì I là tâm của tứ diện đều $ABCD$.Gọi O là tâm tam giác BCD thì $AI=\frac{3}{4}AO=\frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$; $R=\sqrt{AI^2-\frac{AB^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)+4IA^2=4\left(R^2+IA^2\right)=2a^2$

Câu 35. **Chọn C.**



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thì SH là đường cao của hình chóp.

Gọi M,I lần lượt là trung điểm của BC,SA.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$ nên ta có $\frac{1}{3}\frac{1}{2}AB.SH=\frac{2}{3}a^3\Leftrightarrow SH=2a$.

Dễ thấy năm điểm A, B, H, C, S cùng thuộc mặt cầu tâm I ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác A, B, H, C cùng thuộc một mặt phẳng nên tứ giác $ABHC$ nội tiếp đường tròn.

Mà $\widehat{BAC}=90^0 \Rightarrow \widehat{BHC}=90^0 \Rightarrow HM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM=\sqrt{HM^2+SH^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$SM^2=\frac{SB^2+SC^2}{2}-\frac{BC^2}{4} \Rightarrow \frac{SB^2+SC^2}{2}=SM^2+\frac{BC^2}{4}=\frac{13a^2}{2} \quad (1)$$

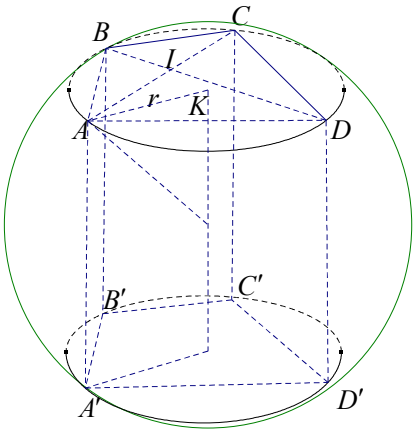
$$R^2=CI^2=\frac{CA^2+SC^2}{2}-\frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2=\frac{4a^2+SC^2}{2}-R^2 \quad (2)$$

$$R^2=BI^2=\frac{BA^2+SB^2}{2}-\frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2=\frac{a^2+SB^2}{2}-R^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2),(3) ta có $4R^2=\dfrac{a^2+SB^2}{2}+\dfrac{4a^2+SC^2}{2}=\dfrac{5a^2}{2}+\dfrac{SB^2+SC^2}{2}=\dfrac{5a^2}{2}+\dfrac{13a^2}{2}=9a^2$

$\Rightarrow R=\dfrac{3a}{2}$

Câu 36. **Chọn B.**



Do lăng trụ nội tiếp mặt cầu nên gọi $(K;r)$ là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

Khi đó $IA.IC=IB.ID=r^2-IK^2$ (theo phương tích của đường tròn).

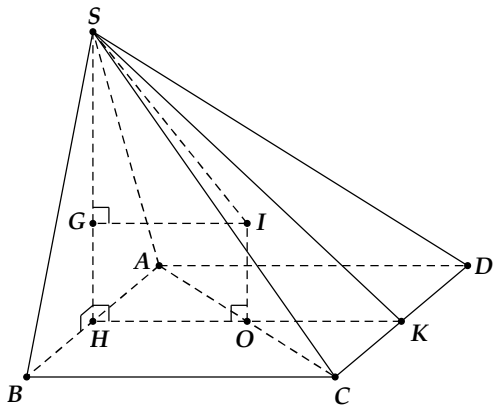
Suy ra $r^2-IK^2=h^2 \Rightarrow r^2=h^2+IK^2$.

Gọi (O,R) là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ta có

$$R^2=OA^2+OK^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{5}{4}h^2+IK^2\geq\frac{5}{4}h^2 \Rightarrow R\geq\frac{h\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $R_{\min}=\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$ khi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

Câu 37. **Chọn A.**



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $AH\perp(ABCD)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ΔSAB và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Từ G kẻ $GI \,//\, HO$ suy ra GI là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔSAB và từ O kẻ $OI \,//\, SH$ thì OI là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

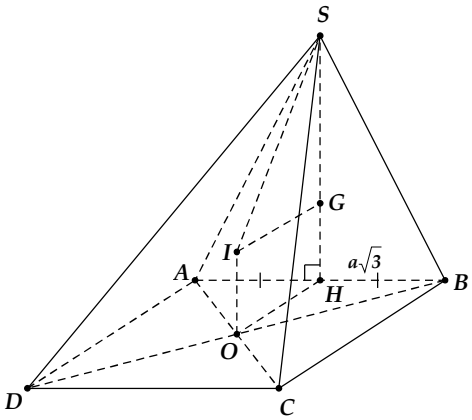
Ta có hai đường này cùng nằm trong mặt phẳng và cắt nhau tại I.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3$.

Câu 38. **Chọn A.**



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (vì ΔSAB đều).

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của $AC, BD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$

Gọi G là trọng tâm $\Delta SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ đều SBC.

Qua O dựng đường thẳng $d // SH \Rightarrow d$ là trục của đường tròn (O)

Qua G dựng đường thẳng $\Delta // OH \Rightarrow \Delta$ là trục của đường tròn (H).

$d \cap \Delta = I \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

Xét tam giác đều SAB có cạnh là $a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SG = a$.

Mặt khác $IG = OH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông SIG: $IS^2 = SG^2 + IG^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow IS = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$

Câu 39. **Chọn A.**

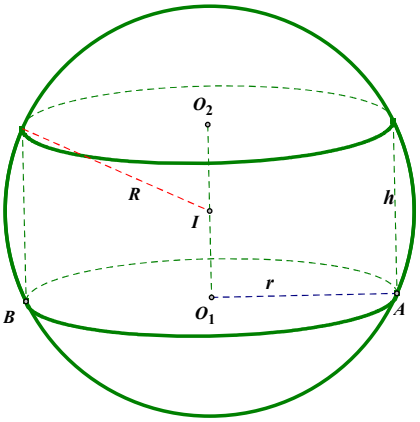
Ta có $R^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}$.

Mà diện tích xung quanh hình trụ là :

$S = 2\pi rh = 2\pi h\sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}$.

Xét hàm số $f(h) = \dfrac{h}{2}\sqrt{4R^2 - h^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{h^2(4R^2 - h^2)} \le R^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h = \sqrt{2}R$.

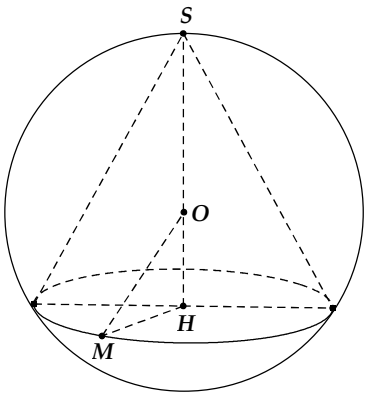


Câu 40. **Chọn D.**

Gọi chiều cao của hình nón là x, $(0<x<2R)$.

Gọi bán kính đáy của hình nón là r ta có:

$r^2=OM^2-OH^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2=x(2R-x)$.



Thể tích của hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2.x=\frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$.

Mặt khác ta lại có $\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(2R-x)\le\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x}{3}\right)^3$

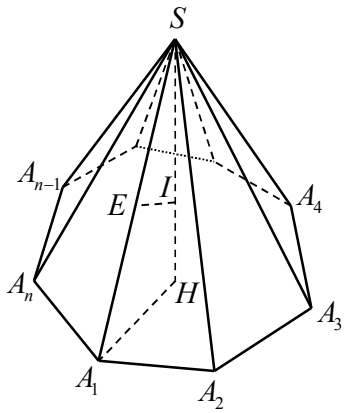
$\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}(2R-x)\le\frac{8R^3}{27}$

Suy ra $V=\frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)\le\frac{32\pi R^3}{27}$.

Vậy $\max V=\frac{32\pi R^3}{27}$, dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2}=2R-x\Leftrightarrow x=\frac{4R}{3}$.

Chú ý: Ta có thể khảo sát hàm $V=\frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)=f(x)$ trên $(0;2R)$ để tìm $\max V$.

Câu 41. **Chọn A.**



Ký hiệu hình chóp đa giác đều là $S.A_1A_2...A_n$ và H là hình chiếu của S trên $(A_1A_2...A_n)$.

Ta có: $\widehat{(SA_1,(A_1A_2...A_n))}=\widehat{(SA_1,HA_1)}=\widehat{SA_1H}=30°$.

Xét ΔSA_1H vuông tại H ta có: $SH=SA_1.\sin 30°=\frac{a}{2}$, $A_1H=SA_1.\cos 30°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp. Kẻ $IE\perp SA_1$, ta có: $\Delta SEI\backsim\Delta SHA_1$

Suy ra: $\frac{SE}{SH}=\frac{SI}{SA_1}\Rightarrow SI=\frac{SE.SA_1}{SH}=\frac{SA_1^2}{2SH}=a$.

Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 42. **Chọn D.**

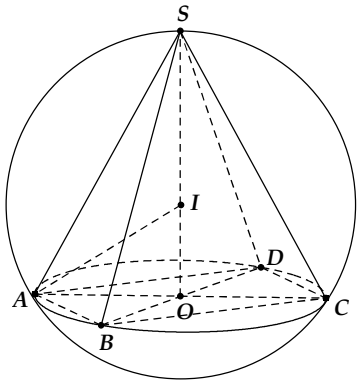
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy của hình nón. Khi đó (P) cắt hình cầu (viên kẹo) theo thiết diện là đường tròn lớn. Viên kẹo có đường kính lớn nhất khi và chỉ khi đường tròn lớn là đường tròn nội tiếp tam giác SAB.

Nửa chu vi tam giác SAB là $p=13$.

Diện tích tam giác SAB là $S=\frac{1}{2}AB.d(S,AB)=\frac{1}{2}.10.\sqrt{8^2-5^2}=5\sqrt{39}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB: $r=\frac{S}{p}=\frac{5\sqrt{39}}{13}$, do đó đường kinh $2r=\frac{10\sqrt{39}}{13}$

Câu 43. **Chọn C.**



Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính $R=9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a $\left(0<a\le 9\sqrt{2}\right)$.

Ta có $OA=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OI=\sqrt{IA^2-OA^2}=\sqrt{81-\frac{a^2}{2}}$.

Mặt khác ta lại có $SO=SI+IO=9+\sqrt{81-\frac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}a^2\left(9+\sqrt{81-\frac{a^2}{2}}\right)=3a^2+\frac{1}{3}a^2\sqrt{81-\frac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2=t$, do $0<a\le 9\sqrt{2}$ nên $0<t\le 162$.

Xét hàm số $f(t)=3t+\frac{1}{3}t\left(\sqrt{81-\frac{t}{2}}\right)$, với $0<t\le 162$ ta có $f'(t)=3+\frac{324-3t}{12\sqrt{81-\frac{t}{2}}}$;

Giải pt: $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{81-\frac{t}{2}}=\frac{t}{12}-9\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\81-\frac{t}{2}=\left(\frac{t}{12}-9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\\left[\begin{array}{l}t=0\\t=144\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=144$.

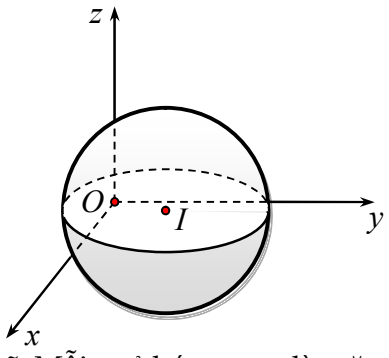
Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		+	0	–	
$f(t)$		↗	576	↘	

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp nội tiếp hình cầu cầu có bán kính bằng 9 là $V=576$.

Câu 44. **Chọn B.**



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Mỗi quả bóng xem là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$.

Vì mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà nên chúng tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ $\Leftrightarrow d\left(I,(xOy)\right)=d\left(I,(yOz)\right)=d\left(I,(zOx)\right)=R\Leftrightarrow a=b=c>0\Rightarrow I(a;a;a)$.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm nằm trên quả bóng có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng $1;\ 2;\ 4\ \Rightarrow M(1;2;4)$.

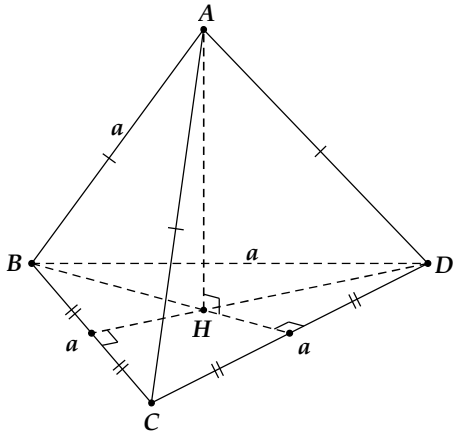
M nằm trên quả bóng khi $IM=d\left(I,(xOy)\right)=a$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(a-2)^2+(a-4)^2=a^2\ \Leftrightarrow 2a^2-14a+21=0\ (*)$.

Vì $(*)$ có biệt thức $\Delta'=7>0$ nên nó có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2 và $a_1+a_2=7$.

Khi đó tổng đường kính của hai quả bóng là $2(a_1+a_2)=14$.

Câu 45. **Chọn A.**



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD và G là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Khi đó bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$r=d\left(G,(ABC)\right)=d\left(G,(BCD)\right)=d\left(G,(ACD)\right)=d\left(G,(ABD)\right)$.

Ta có: $V_{G.BCD}=\frac{1}{3}.S_{BCD}.d\left(G,(BCD)\right)\Rightarrow d\left(G,(BCD)\right)=\frac{3.V_{G.BCD}}{S_{BCD}}$.

Mà $V_{G.BCD}=V_{G.ABC}=V_{G.ABD}=V_{G.ACD}$ (vì $S_{BCD}=S_{ABC}=S_{ABD}=S_{ACD}$).

Mặt khác $V_{G.BCD}+V_{G.ABC}+V_{G.ABD}+V_{G.ACD}=V_{ABCD}\Rightarrow V_{G.BCD}=\frac{1}{4}V_{ABCD}$.

$BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow V_{G.BCD}=\dfrac{1}{4}V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

$\Rightarrow r=d\left(G,\left(BCD\right)\right)=\dfrac{3.V_{G.BCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

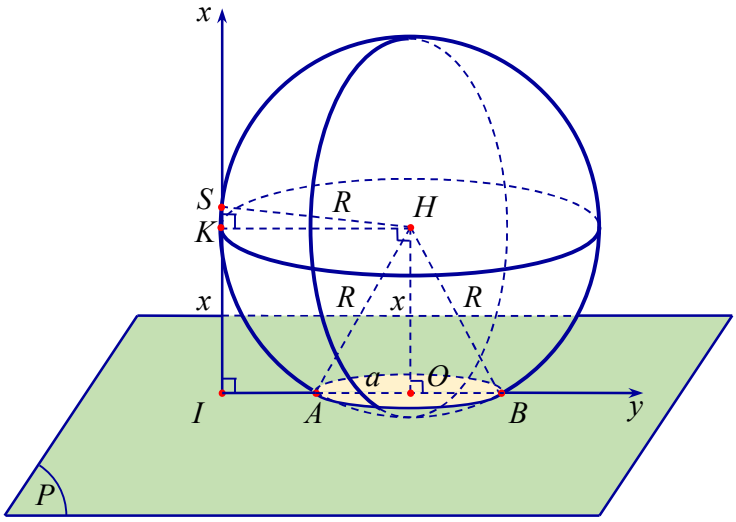
Vậy thể tích khối cầu nội tiếp tứ diện là: $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{216}$.

Câu 46. **Chọn A.**

Nhận xét: $\begin{cases}SI\subset\left(SAB\right)\\SI\perp\left(P\right)\end{cases}\Rightarrow\left(SAB\right)\perp\left(P\right)$.

Mặt khác: $\left(SAB\right)$ chứa đường kính của đường tròn tâm O nên $\left(SAB\right)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn đi qua ba điểm S, A, B.

Do đó tâm của mặt cầu cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.



Cách 1: Trong mặt phẳng $\left(SAB\right)$, chọn hệ trục Oxy sao cho $I\left(0;0\right)$; $A\left(a;0\right)$; $B\left(3a;0\right)$; $S\left(0;2a\right)$

Ta có tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}AE=BE\\AE=SE\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-a\right)^2+y^2=\left(x-3a\right)^2+y^2\\\left(x-a\right)^2+y^2=x^2+\left(y-2a\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a\\y=\dfrac{a}{4}\end{cases}\Rightarrow H\left(2a;\dfrac{7a}{4}\right).$$

Khi đó mặt cầu qua ba điểm S, A, B có bán kính $R=AE=\dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Cách 2: Xét ΔSAB có $AB=2a$, $SA=\sqrt{SI^2+IA^2}=a\sqrt{5}$, $SB=\sqrt{SI^2+IB^2}=a\sqrt{13}$.

$S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}SI.AB=\dfrac{SA.SB.AB}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{SA.SB}{2SI}=\dfrac{a\sqrt{5}a\sqrt{13}}{2.2a}=\dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Cách 3: Gọi mặt cầu tâm H qua đường tròn tâm O và điểm S. Khi đó ta có tứ giác $HOIS$ là hình thang vuông tại O và I.

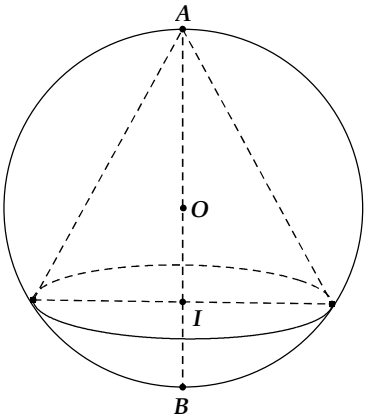
Ta có $SI=OI=2a=2OA$. Gọi $R=HA=HS=HB$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Kẻ $HK\perp SI\ \left(K\in SI\right)$, đặt $HO=x=KI\ \left(x>0\right)\Rightarrow\begin{cases}HA=\sqrt{HO^2+OA^2}=\sqrt{x^2+a^2}\\HS=\sqrt{HK^2+SK^2}=\sqrt{\left(2a-x\right)^2+4a^2}\end{cases}$

Vì $HA=HS$ nên $\sqrt{\left(2a-x\right)^2+4a^2}=\sqrt{x^2+a^2}\Rightarrow x=\dfrac{7a}{4}$.

Vậy $R=HA=\sqrt{\left(\dfrac{7a}{4}\right)^2+a^2}=\dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Câu 47. **Chọn C.**



Gọi O là trung điểm AB, M là điểm bất kì trên đường tròn $\left(C\right)$.

Ta có $IM=\sqrt{OM^2-OI^2}=\sqrt{R^2-\left(h-R\right)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$.

Thể tích hình nón: $V=\dfrac{1}{3}.AI.S_{(C)}=\dfrac{1}{3}.h.\pi.\left(2Rh-h^2\right)$.

Đặt $f\left(h\right)=\dfrac{\pi}{3}\left(2Rh^2-h^3\right)$ (R là tham số).

Tập xác định $D=\left[0;2R\right]$.

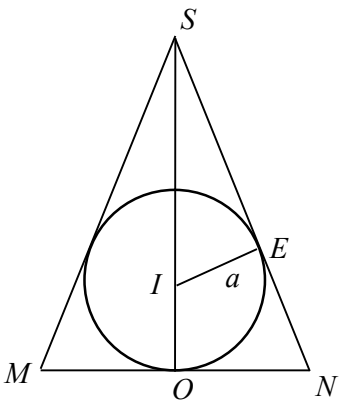
$f'\left(h\right)=\dfrac{\pi}{3}\left(4Rh-3h^2\right)$; $f'\left(h\right)=0\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$.

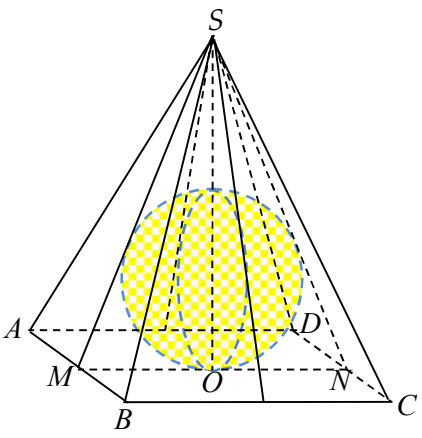
$f\left(0\right)=0$; $f\left(R\right)=\dfrac{\pi}{3}.R^3$; $f\left(\dfrac{4R}{3}\right)=\dfrac{32\pi}{81}R^3$.

Vậy hàm số $f\left(h\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h=\dfrac{4R}{3}$.

Hay thể tích hình nón lớn nhất đạt khi $h=\dfrac{4R}{3}$.

Câu 48. **Chọn D.**





Giả sử $SO=x$ ta có: $SI=x-a;SE=\sqrt{\left(x-a\right)^2-a^2}=\sqrt{x^2-2ax}$

Xét $\Delta SEI \backsim \Delta SON$ ta có: $\frac{SE}{SO}=\frac{IE}{NO}\Rightarrow NO=\frac{IE.SO}{SE}=\frac{ax}{\sqrt{x^2-2ax}}$

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}x.\left(\frac{2ax}{\sqrt{x^2-2ax}}\right)^2=\frac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2}{x-2a}\ (0<2a<x)$

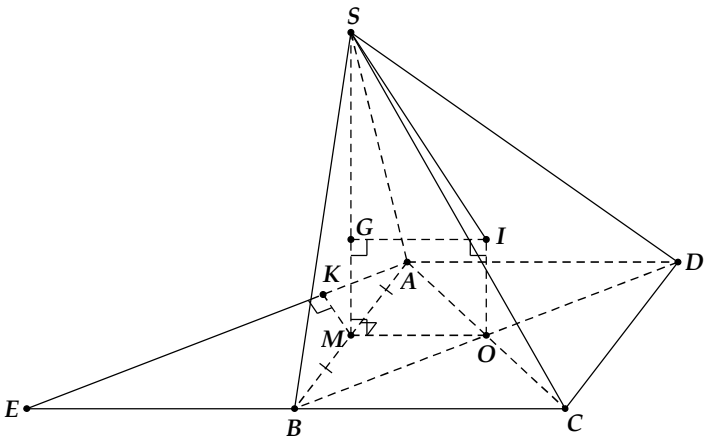
$f'(x)=\frac{x^2-4ax}{(x-2a)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4a$ (do $0<2a<x$)

Bảng biến thiên

x	$2a$		$4a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$8a$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích là $V=\frac{32a^3}{3}$.

Câu 49. **Chọn D.**



Gọi M là trung điểm AB và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB, O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OM\perp(SAB)$. Dựng trục của hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB, khi đó chúng đồng phẳng và cắt nhau tại I tức là OI, GI là các trục hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB.

Bán kính mặt cầu là $R=SI$. Ta có $4\pi R^2=84\pi(\text{cm}^2)\Leftrightarrow R=\sqrt{21}(\text{cm})$. Đặt $AB=x\ (\text{cm})$

Trong tam giác vuông SGI ta có $SI^2=SG^2+GI^2\ (1)$, ta có $GI=\frac{x}{2}$, $SG=\frac{x\sqrt{3}}{3}$ thay vào (1) tính được $x=6$.

Dựng hình bình hành $ADBE$. Khoảng cách d giữa BD và SA là $d=d(BD,(SAE))$

$d=d(B,(SAE))=2d(M,(SAE))$. Kẻ $MK\perp AE$ ta có $(SAE)\perp(SMK)$.

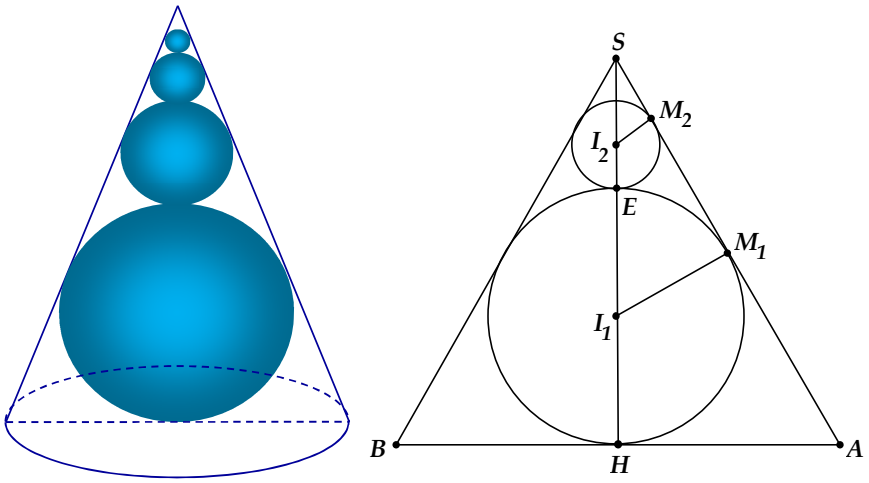
$d\left(M,\left(SAE\right)\right)=d\left(M,SK\right)=\dfrac{SM.MK}{\sqrt{SM^2+MK^2}}$ $\left(2\right)$.

Ta có $SM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, $MK=\dfrac{x\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Thay các giá trị vào $\left(2\right)$ tính được $d\left(M,\left(SAE\right)\right)=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa SA và BD là $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Câu 50. **Chọn A.**



Gọi I_1,I_2 lần lượt là tâm của mặt cầu $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó ta có ΔSAB đều và $R_1=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hạ $I_1M_1\perp SA$, $I_2M_2\perp SA$.

Xét ΔSI_2M_2 có $\sin 30^o=\dfrac{I_2M_2}{SI_2}\Rightarrow SI_2=2I_2M_2$.

Khi đó ta có $SH=SI_2+I_2E+EH\Leftrightarrow 3r_1=3r_2+2r_1\Leftrightarrow r_1=3r_2$.

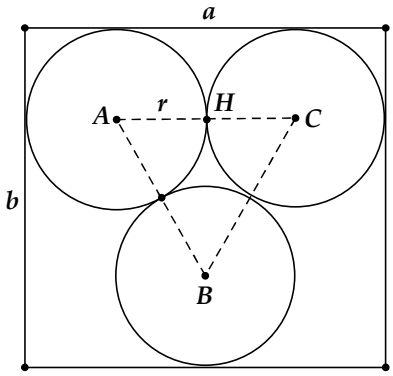
Chứng minh tương tự ta có $r_2=3r_3,\ldots,r_n=3r_{n+1}$.

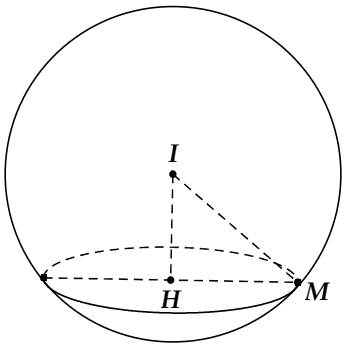
Do đó dãy bán kính r_1, $r_2,\ldots,r_n,$. lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $r_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra dãy thể tích của các khối cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$, …,$\left(S_n\right)$,… lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $V_1=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3$ và công bội $q_1=\dfrac{1}{27}$.

Vậy tổng thể tích của các khối cầu $\left(S_1\right),\left(S_2\right),\ldots,\left(S_n\right),\ldots$ là: $V=\dfrac{V_1}{1-q}=\dfrac{\sqrt{3}}{52}\pi a^3$.

Câu 51. **Chọn B.**





Gọi r, R_{mc} lần lượt là bán kính đáy của khối nón và khối cầu; a, b, c lần lượt là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật.

Dễ dàng thấy $a = 4r$, ΔABC đều cạnh $2r$ nên $BH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} \Rightarrow b = r\sqrt{3} + 2r$.

$R_{mc} = \dfrac{4}{3}r \Rightarrow V_{kc} = \dfrac{4}{3}\pi R_{mc}^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{4}{3}r\right)^3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^4 \pi r^3$. $V_{kn} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^3$ (do $h = r$)

Ta có phương trình $3.\dfrac{1}{3}\pi r^3 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^4 \pi r^3 = \dfrac{337\pi}{3} \Leftrightarrow r = 3 \Rightarrow R_{mc} = 4$.

Từ đó $a = 12$, $b = 6 + 3\sqrt{3}$. Gọi D, E, F lần lượt là 3 đỉnh của hình nón thì ΔDEF đều có cạnh bằng 6 và nội tiếp đường tròn có bán kính $HM = \dfrac{6}{2\sin 60°} = 2\sqrt{3}$.

Từ đó $IH = \sqrt{IM^2 - HM^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $c = R_{mc} + IH + r = 4 + 2 + 3 = 9$.

Vậy thể tích nước ban đầu cũng chính là thể tích khối hộp chữ nhật:

$V_{khcn} = abc = 12.9.\left(6 + 3\sqrt{3}\right) \approx 1209,2 \ \left(\text{cm}^3\right)$.