

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN (Buổi thứ nhất)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)

Câu 1 (5,00 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (5,00 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \frac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}$.

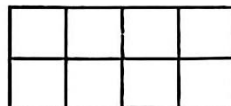
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - x^2y = x^2 - x + y + 1 \\ 5\sqrt{x+2} + \sqrt{y+3} = 3x^2 - y + 1 \end{cases}$.

Câu 3 (5,00 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Gọi M là điểm di động trên (P) , T là điểm trên (P) sao cho $OT \perp OM$ (M và T đều không trùng với O). Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định và đồng thời trung điểm của đoạn thẳng MT luôn chạy trên một parabol cố định.

Câu 4 (5,00 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước 2×4 gồm 8 ô vuông. Sử dụng 4 màu khác nhau để tô cho 8 ô sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu thỏa mãn trong các cặp ô vuông có chung cạnh, có đúng một cặp được tô cùng màu, còn tất cả các cặp chung cạnh khác đều được tô khác màu?



..... **HẾT**

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSGQG THPT
VĨNH LONG**

NĂM HỌC 2026-2027
Khóa thi ngày: 11/9/2026

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (Buổi thứ hai)

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 01 trang, 04 câu)

Câu 1 (5,00 điểm)

a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 1.$$

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(y^2 + z^2) = y + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Câu 2 (5,00 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 3$ và công thức truy hồi

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc $m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$P(k) = u_k, \quad \forall k \in \{m+2; m+3; \dots; 2m+2\}.$$

a) Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(x+2) - P(x+1)$ có bậc $m-1$ và thỏa mãn
 $Q(k) = 2^{k+1}, \quad \forall k \in \{m+1; m+2; \dots; 2m\}.$

b) Chứng minh rằng $P(2m+3) = u_{2m+3} - 2^{m+2}.$

Câu 3 (5,00 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $n \equiv 2 \pmod{4}$ và $A(k) = 3^k n - 1$ là số nguyên tố với mọi $k \in \{1; 2; \dots; n\}.$

Câu 4 (5,00 điểm)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P, Q . Đường thẳng qua P cắt (O_1) , (O_2) lần lượt tại A và B (không trùng với Q). Trên đường tròn (O_1) lấy điểm F thuộc cung $\widehat{PQ}$ không chứa điểm A . Kẻ đường thẳng d qua F song song với AB , d cắt đường tròn (O_2) tại C, E và cắt lại (O_1) tại D (E, F nằm trong đoạn CD). Gọi M là giao điểm AD và BE , N là giao điểm BC và AF , K là điểm đối xứng của P qua CD .

a) Chứng minh M, K, N thẳng hàng.

b) Chứng minh PK là đường phân giác của góc $\widehat{MPN}.$

..... **HẾT**

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

CHỌN ĐTQG VĨNH LONG 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P1)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

 Lời giải.

Hiển nhiên $u_n > 0$ với mọi n . Từ công thức truy hồi, ta có $2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 4u_n}$ nên

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} = u_n.$$

Mặt khác, $\sqrt{u_n^2 + 4u_n} > u_n$, nên $u_{n+1} > u_n$. Nếu (u_n) bị chặn trên thì vì dãy này tăng, dãy có giới hạn $L \geq u_1 > 0$. Cho n tiến ra vô hạn trong đẳng thức trên sẽ cho $L^2 - L^2 = L$, vô lý. Do đó $u_n \rightarrow +\infty$.

Ta có $\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ và vì $u_1 = \frac{1}{2}$ với $n \geq 2$ nên ta suy ra

$$v_n = \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k^2} = 4 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} \right) = 6 - \frac{1}{u_n}.$$

Do $u_n \rightarrow +\infty$, ta được $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 6$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P2)

① Giải phương trình $\sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \frac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}$.

② Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - x^2 y = x^2 - x + y + 1, \\ 5\sqrt{x+2} + \sqrt{y+3} = 3x^2 - y + 1. \end{cases}$

 Lời giải.

① Điều kiện xác định: $x \geq 3$. Để ý $x \geq 3$ không thoả mãn, xét $x > 3$, đặt

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x+5)} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x+5}, \quad g(x) = \frac{10-x}{2} + \sqrt{x+12}.$$

Với $x > 3$, ta có $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-3)(x+5)}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ nên f đồng biến trên $(3, +\infty)$.

Hơn nữa $g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+12}} - 1 \right) < 0$ nên g nghịch biến trên $(3, +\infty)$.

Vì vậy phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(3, +\infty)$.

Để ý $f(4) = g(4)$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

② Phương trình thứ nhất tương đương $x^3 - x^2 + x - 1 = y(x^2 + 1)$ hay $(x-1)(x^2 + 1) = y(x^2 + 1)$.

Do $x^2 + 1 > 0$, ta được $y = x - 1$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$6\sqrt{x+2} = 3x^2 - x + 2 \quad (x \geq -2)$$

Đặt $t = \sqrt{x+2} \geq 0$, tức là $x = t^2 - 2$. Phương trình trở thành

$$3t^4 - 13t^2 - 6t + 16 = 0$$

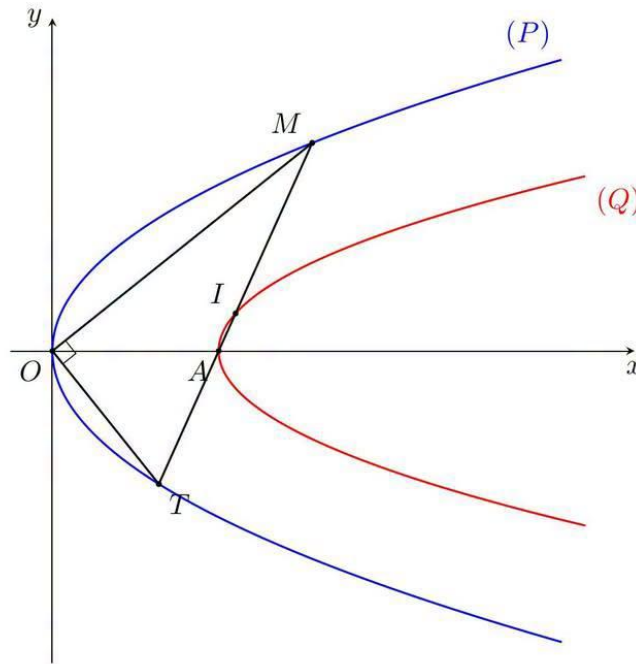
hay $(t-1)(t-2)(3t^2 + 9t + 8) = 0$. Vì $3t^2 + 9t + 8 > 0$ với $t \geq 0$, nên $t = 1$ hoặc $t = 2$.

Thử lại để suy ra tất cả các nghiệm cần tìm là:

$$(x, y) = (-1, -2) \quad \text{hoặc} \quad (x, y) = (2, 1).$$

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P3)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y^2 = 4x$. Gọi M là điểm di động trên (P) , T là điểm trên (P) sao cho $OT \perp OM$; M và T đều không trùng với O . Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định, đồng thời trung điểm của đoạn thẳng MT luôn chạy trên một parabol cố định.



Lời giải.

Từ việc M và T di động trên (P) ta đặt: $M(t^2, 2t)$, $T(u^2, 2u)$ với $t, u \neq 0$.

Do $OM \perp OT$ nên $t^2u^2 + 4tu = 0 \Rightarrow tu = -4$.

- ① Vì $tu = -4 < 0$ nên $t \neq u$. Đường thẳng MT có phương trình $2x - (t+u)y + 2tu = 0$, hay $2x - (t+u)y - 8 = 0$. Do đó MT luôn đi qua điểm cố định $A(4, 0)$.

- ② Gọi $I(x, y)$ là trung điểm của MT . Ta có $x = \frac{t^2 + u^2}{2}$, $y = t + u$, suy ra $y^2 = t^2 + u^2 + 2tu = 2x - 8$.

Vậy I thuộc parabol cố định $(Q) : y^2 = 2x - 8$.

Ngược lại, với mỗi điểm $I(x, y) \in (Q)$, phương trình $z^2 - yz - 4 = 0$ có hai nghiệm thực t, u khác 0 thỏa mãn $t + u = y$, $tu = -4$. Khi đó $M(t^2, 2t)$, $T(u^2, 2u)$ thuộc (P) , $OM \perp OT$ và có trung điểm là I . Vậy trung điểm của MT luôn chạy trên parabol (Q) cố định.

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P4)

Cho bảng ô vuông kích thước 2×4 gồm 8 ô vuông. Sử dụng 4 màu khác nhau để tô 8 ô sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu thỏa mãn: trong các cặp ô vuông có chung cạnh, có đúng một cặp được tô cùng màu, còn tất cả các cặp chung cạnh khác đều được tô khác màu?

A	B	C	D
E	F	G	H

 Lời giải.

Bảng có tổng cộng 10 cặp ô chung cạnh chia làm hai loại:

♦ **Loại 1:** $AB, BC, CD, DH, HG, GF, FE, EA$.

♦ **Loại 2:** BF, CG .

Nhận xét: Giả sử ta đã tô màu đúng cho hai ô kề nhau theo chiều dọc (ví dụ ô B và F) bằng 2 màu khác nhau. Nếu ta ghép thêm một cột mới gồm 2 ô kề nhau (ví dụ cột gồm C và G) vào cạnh BF , số cách tô màu cho C và G là 7 cách. Thật vậy, giả sử màu của B là màu 1, màu của F là màu 2. Cần tô cho C (kề B , kề G) và G (kề F , kề C).

♦ Nếu C mang màu 2 (giống F), thì G chỉ cần khác màu 2, tức là G có 3 cách chọn.

♦ Nếu C mang màu khác cả 1 và 2 (có 2 cách chọn). Khi đó G phải khác màu 2 và khác màu C , nên G có 2 cách chọn. Số cách trong trường hợp này là $2 \cdot 2 = 4$ cách.

Tổng cộng ta có $3 + 4 = 7$ cách tô cho mỗi khối ghép thêm, khi đó ta chia làm 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Cặp ô cùng màu là loại 1 (có 8 cách chọn cặp). Giả sử ta chọn A và B cùng màu.

♦ Lúc này, (A và B) kề cả E và F , mà E và F cũng kề nhau, nên số cách chọn là: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cách.

♦ Cột thứ ba (C và G) được ghép vào cạnh của (A và B). Theo nhận xét, có 7 cách tô.

♦ Cột thứ tư (D và H) được ghép vào cạnh (C và G). Theo nhận xét, có thêm 7 cách tô.

Số cách tô màu cho mỗi cặp trong trường hợp này là:

$$24 \cdot 7 \cdot 7 = 1176 \text{ (cách).}$$

Trường hợp 2: Cặp ô cùng màu là loại 2 (có 2 cách chọn cặp). Giả sử ta chọn B và F cùng màu.

♦ (B và F) sẽ kề với A, E (ở cột trái) và kề với C, G (ở cột phải).

♦ Chọn màu cho (B và F): có 4 cách.

♦ Cột trái (A và E) phải chọn cho A và E hai màu khác nhau nên có $3 \cdot 2 = 6$ cách.

♦ Cột phải (C và G) tương tự cũng có 6 cách.

♦ Cột ngoài cùng (D và H), thì theo nhận xét, có 7 cách tô.

Số cách tô màu cho mỗi cặp trong trường hợp này là:

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 1008 \text{ (cách).}$$

Vậy tổng số cách tô cần tính là: $8 \cdot 1176 + 2 \cdot 1008 = \boxed{11424}$

CHỌN ĐTQG VĨNH LONG 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P5)

- ① Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 1.$$

- ② Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(y^2 + z^2) = y + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

Lời giải.

- ① Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ thì $bc \leq a^2$ nên có điều phải chứng minh do

$$16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 16a^2(b^2 + c^2) + 16b^2c^2 \leq 16a^2(b + c)^2 \leq (a + b + c)^4 = 16$$

- ② Ta có $x(y + z)^2 \leq 2x(y^2 + z^2) = 2(y + z)$ nên $y + z \leq \frac{2}{x}$.

Ngoài ra $P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)(1+z)} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$ theo Cauchy.

$$\text{Mà } (1+y)(1+z) \leq \frac{(2+y+z)^2}{4} \leq \frac{1}{4} \left(2 + \frac{2}{x}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x^2)} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(1+x)^3}.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{2t^3 + 6t^2 + t + 1}{(1+t)^3} \text{ trên } (0, \infty) \text{ thì } f'(t) = \frac{10t - 2}{(1+t)^4} = 0 \iff t = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Do đó } P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}, \text{ dấu bằng khi } x = \frac{1}{5}, y = z = 5.$$

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P6)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 3$ và công thức truy hồi

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad (n \geq 1).$$

Giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc $m \in \mathbb{N}^*$ và thỏa mãn

$$P(k) = u_k \quad \forall k \in \{m+2, m+3, \dots, 2m+2\}.$$

- ① Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(x+2) - P(x+1)$ có bậc $m-1$ và thỏa mãn

$$Q(k) = 2^{k+1} \quad \forall k \in \{m+1, m+2, \dots, 2m\}.$$

- ② Chứng minh rằng $P(2m+3) = u_{2m+3} - 2^{m+2}$.

Lời giải.

Từ công thức truy hồi ta có $u_n = 2^n - 1$ với mọi $n \geq 1$.

- ① Vì P có bậc m , hiệu $P(x+2) - P(x+1)$ có bậc đúng bằng $m-1$ và

$$Q(k) = P(k+2) - P(k+1) = u_{k+2} - u_{k+1} = 2^{k+1}.$$

② Vì Q có bậc $m - 1$, ta có $\Delta^{(m)}Q = 0$ (sai phân cấp m của Q). Bởi vậy

$$\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j Q(m+1+j) = 0.$$

Trong khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j 2^{m+j+2} = 2^{m+2} \sum_{j=0}^m C_m^j (-1)^{m-j} 2^j = 2^{m+2} (2-1)^m = 2^{m+2}.$$

Với $j = 0, 1, \dots, m-1$ ta có $Q(m+1+j) = 2^{m+j+2}$ nên

$$Q(2m+1) = 2^{2m+2} - 2^{m+2}.$$

Vì $P(2m+2) = u_{2m+2} = 2^{2m+2} - 1$, suy ra

$$P(2m+3) = P(2m+2) + Q(2m+1) = (2^{2m+2} - 1) + (2^{2m+2} - 2^{m+2}) = u_{2m+3} - 2^{m+2}.$$

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P7)

Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $n \equiv 2 \pmod{4}$ và $A(k) = 3^k n - 1$ là số nguyên tố với mọi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Lời giải.

Với $n = 2$, ta có $A(1) = 5$ và $A(2) = 17$ đều là số nguyên tố. Vì vậy $n = 2$ thỏa mãn.

Giả sử $n > 2$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Trước hết, xét trường hợp $3 \nmid n - 1$. Đặt $d = n - 1 > 1$. Khi đó $\gcd(3, d) = 1$. Theo định lý Euler, ta có

$$3^{\varphi(d)} \equiv 1 \pmod{d}.$$

Chọn $k = \varphi(d)$. Ta có $1 \leq k \leq d - 1 = n - 2 < n$ và, do $n \equiv 1 \pmod{d}$,

$$A(k) = 3^k n - 1 \equiv 3^k - 1 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Mặt khác $A(k) > d > 1$, nên $A(k)$ là hợp số, mâu thuẫn.

Do đó chỉ còn trường hợp $3 \mid n - 1$, tức là $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Kết hợp với $n \equiv 2 \pmod{4}$ và $n > 2$, ta có $n \geq 10$. Đặt $d = n - 3 \geq 7$. Khi đó $\gcd(3, d) = 1$.

Chọn $k = \varphi(d) - 1$, ta có $1 \leq k \leq d - 2 < n$. Vì $n \equiv 3 \pmod{d}$, định lý Euler cho ta

$$A(k) = 3^k n - 1 \equiv 3^{k+1} - 1 = 3^{\varphi(d)} - 1 \equiv 0 \pmod{d}.$$

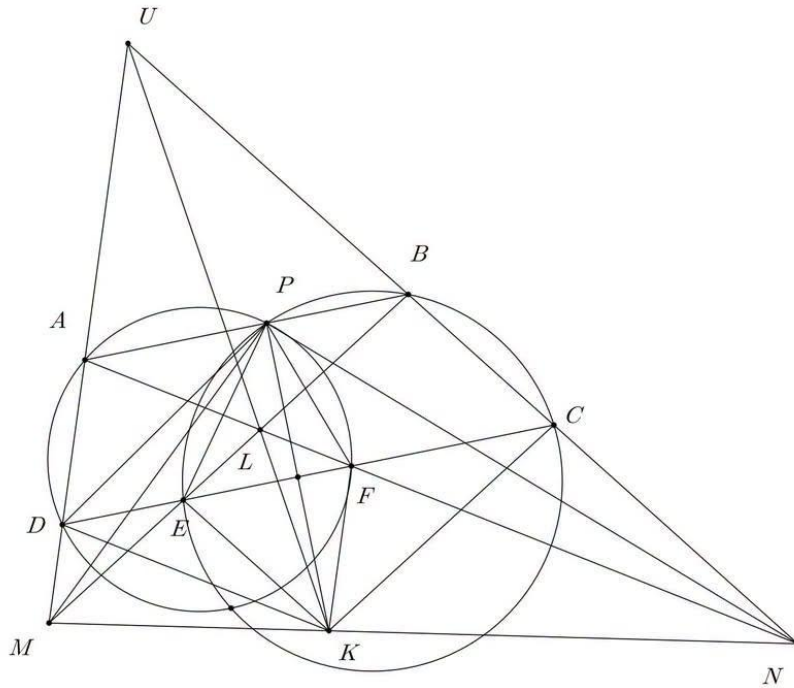
Lại có $A(k) > d > 1$, nên $A(k)$ là hợp số và cũng có mâu thuẫn.

Vậy số nguyên dương duy nhất cần tìm là **$n = 2$**

Bài toán 0.8. (Lim Olympic - Vĩnh Long TST - P8)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P, Q . Đường thẳng qua P cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại A và B (không trùng với Q). Trên đường tròn (O_1) lấy điểm F thuộc cung $\widehat{PQ}$ không chứa điểm A . Kẻ đường thẳng d qua F song song với AB ; d cắt đường tròn (O_2) tại C, E và cắt lại (O_1) tại D ; E, F nằm trong đoạn CD . Gọi M là giao điểm của AD và BE , N là giao điểm của BC và AF , K là điểm đối xứng của P qua đường thẳng CD .

- ① Chứng minh M, K, N thẳng hàng.
- ② Chứng minh PK là đường phân giác của góc MPN .



Lời giải.

- ① Ta có $APFD$ là hình thang cân $\Rightarrow DK = DP = AF$ và $AD = PF = FK$.
 $\Rightarrow ADKF$ là hình bình hành, tương tự $KEBC$ là hình bình hành $\Rightarrow KF \parallel MA, KC \parallel MB$.
 $\Rightarrow \triangle MAB$ và $\triangle KFC$ có các cạnh tương ứng song song.
 $\Rightarrow MK, AF, BC$ đồng quy tại tâm vị tự hai tam giác $\Rightarrow M, K, N$ thẳng hàng.
- ② Gọi AD cắt BC tại U , ta có $\angle UAB = \angle UDC = \angle KFE$ và $\angle UBA = \angle UCD = \angle KEF$
 $\Rightarrow \triangle KEF \sim \triangle UBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{LE}{LB} = \frac{EF}{AB} = \frac{KE}{UB} \Rightarrow U, L, K$ thẳng hàng.
 Vì thế theo hàng điểm tứ giác toàn phần ta có $P(AKMN) = -1$, mà $PA \perp PK$
 $\Rightarrow PK$ là phân giác $\angle MPN$.