

CHƯƠNG ①: ĐẠO HÀM - ỨNG DỤNG

🌀 **Bài 1: SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN**☒ **Dạng ①. Tìm khoảng ĐB, NB**✚ **Note!**• Cho BBT của hàm số $y=f(x)$ • Quan sát dấu $y' > 0$ hay $y' < 0$ 👉 **A - Bài tập minh họa:****Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

Diagram showing the function values at critical points: $+\infty \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(-2; 0)$. Ⓑ. $(2; +\infty)$. Ⓒ. $(0; 2)$. Ⓓ. $(0; +\infty)$.

Lời giải

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**☞ **Chọn C.**

• Trong khoảng $(0; 2)$ ta thấy $y' < 0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến.

• Nghịch biến ta quan sát dấu $y' < 0$, chọn đáp án phù hợp theo BBT

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				4		$-\infty$

Diagram showing the function values at critical points: $+\infty \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow -\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(-2; +\infty)$. Ⓑ. $(-2; 3)$. Ⓒ. $(3; +\infty)$. Ⓓ. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**☞ **Chọn B.**

• Trong khoảng $(-2; 3)$ ta thấy $y' > 0$. Suy ra hàm số đồng biến.

☞ Đồng biến ta quan sát dấu $y' > 0$, chọn khoảng đáp án phù hợp theo BBT

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- Ⓐ. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 Ⓑ. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
 Ⓒ. Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

Diagram showing the function values at critical points: $+\infty \rightarrow -1 \rightarrow 2 \rightarrow -\infty$

Ⓓ. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Lời giải

⇒ Chọn C

• Trong khoảng $(0; 1)$ ta thấy $y' > 0$. Suy ra hàm số đồng biến.

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

• Đồng biến ta quan sát dấu $y' > 0$, chọn khoảng đáp án phù hợp theo BBT

🔥 B - Bài tập áp dụng:

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ. $(-1; 0)$. Ⓑ. $(-1; +\infty)$. Ⓒ. $(-\infty; -1)$. Ⓓ. $(0; 1)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		1	3	1		$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

Ⓐ. $(0; +\infty)$. Ⓑ. $(0; 2)$. Ⓒ. $(-2; 0)$. Ⓓ. $(-\infty; -2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		3	
	$-\infty$			-1		$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ. $(-2; 0)$. Ⓑ. $(-\infty; -2)$. Ⓒ. $(0; 2)$. Ⓓ. $(0; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ Ⓑ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

- Ⓒ. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ Ⓓ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$			

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(-1;+\infty)$. Ⓑ. $(1;+\infty)$. Ⓒ. $(-1;1)$. Ⓓ. $(-\infty;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	3	2		

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$. Ⓑ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
 Ⓒ. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$. Ⓓ. Hàm số nghịch biến trên khoảng $1;2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Hãy chọn mệnh đề đúng.

- Ⓐ. $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
 Ⓑ. $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
 Ⓒ. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 Ⓓ. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$. Ⓑ. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;3)$.

- ©. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$. ©. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Ⓑ. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 ©. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. ©. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	3	2	

Mệnh đề nào sau đây đúng.

- Ⓐ. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$. Ⓑ. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.
 ©. Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$. ©. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.C	5.B	6.D	7.A	8.D	9.A	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng ②. Tìm khoảng ĐB, NB

• Đề cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$

✚ Note!

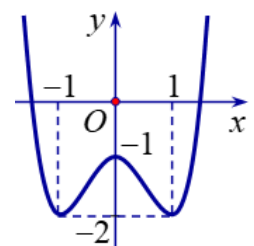
①. Dáng đồ thị tăng trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số ĐB trên $(a; b)$

②. Dáng đồ thị giảm trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số NB trên $(a; b)$

🔪 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(0; 1)$. Ⓑ. $(-\infty; 1)$.
 ©. $(-1; 1)$. ©. $(-1; 0)$.



Lời giải

⇒ Chọn D.

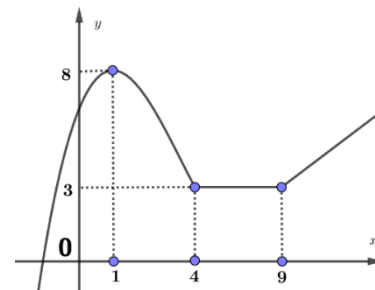
- Trong khoảng $(-1; 0)$ ta thấy dáng đồ thị đi lên. Suy ra hàm số đã cho đồng biến.

🔪 PP nhanh trắc nghiệm

- Đồng biến ta quan sát dáng đồ thị đi lên (*chú ý đọc kết quả trên trục Ox*)
 ⇒ chọn khoảng đáp án phù hợp theo DT

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- (A). $(-\infty; 8)$. (B). $(1; 4)$.
(C). $(4; +\infty)$. (D). $(0; 1)$.



Lời giải

⇒ **Chọn B.**

- Trong khoảng $(1; 4)$ ta thấy dáng đồ thị đi xuống. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
(B). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
(C). Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
(D). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$

Lời giải

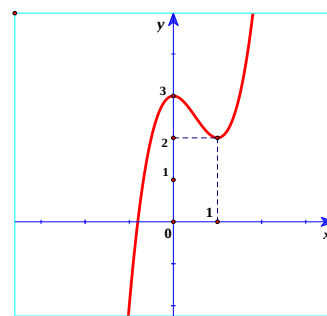
⇒ **Chọn B.**

- Trong khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy dáng đồ thị đi lên. Suy ra hàm số đã cho đồng biến.
- Trong các khoảng khác đồ thị hàm số có dáng đi lên và có cả đi xuống

👉 **B - Bài tập áp dụng:**

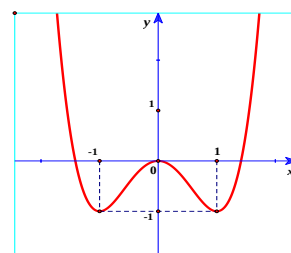
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
(B). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
(C). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và $(1; +\infty)$.
(D). Hàm số đi qua điểm $(1; 2)$.



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
(B). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
(C). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
(D). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.



👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

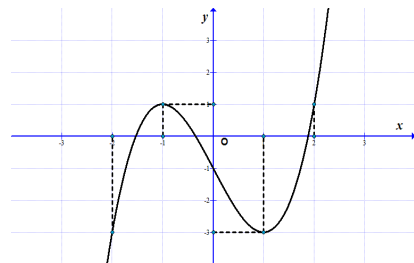
- Nghịch biến ta quan sát dáng đồ thị đi xuống
⇒ chọn khoảng đáp án phù hợp theo đồ thị

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Đồng biến ta quan sát dáng đồ thị đi lên (chú ý đọc kết quả trên trục Ox)
⇒ chọn khoảng đáp án phù hợp theo đồ thị

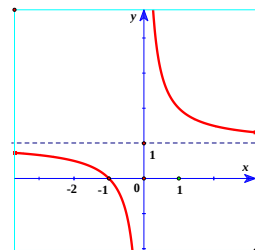
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A). $(-2;0)$. (B). $(-1;1)$.
(C). $(0;2)$. (D). $(-2;-1)$.



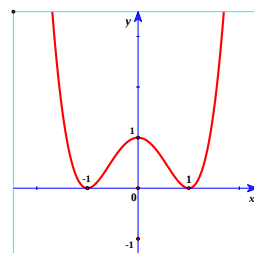
Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.
(B). Đồ thị hàm số chỉ có tiệm cận đứng.
(C). Hàm số có hai cực trị.
(D). Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.



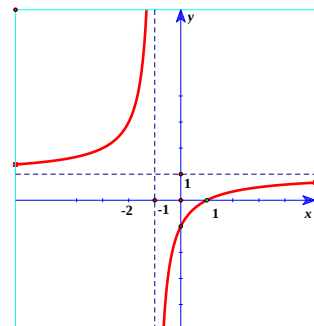
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$:

- (A). Hàm số $f(x)$ tiếp xúc với Ox .
(B). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$.
(C). Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.
(D). Đồ thị hàm số $f(x)$ không có đường tiệm cận.



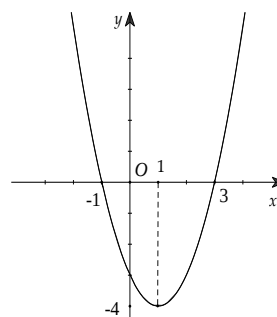
Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hình bên. Khẳng định nào đúng?

- (A). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.
(B). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
(C). Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
(D). Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.



Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

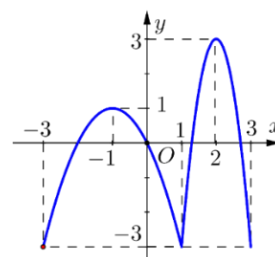
- (A). Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.
(B). Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.
(C). Hàm số nghịch biến trên $(-4;3)$.
(D). Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.



Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

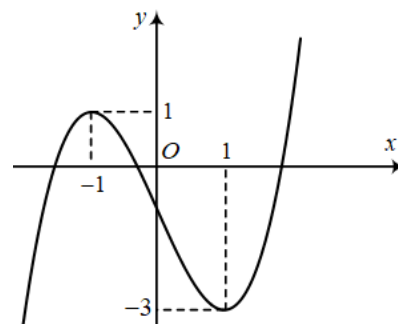
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- (A). $(0;2)$. (B). $(-2;0)$.
(C). $(-3;-1)$. (D). $(2;3)$.



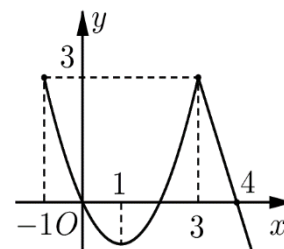
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số đồng biến trên khoảng $-\infty; 1$.
 (B). Hàm số đồng biến trên khoảng $-\infty; -1$.
 (C). Hàm số đồng biến trên khoảng $0; +\infty$.
 (D). Hàm số đồng biến trên khoảng $-3; +\infty$.



Câu 10 Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A). $2; 4$.
 (B). $0; 3$.
 (C). $2; 3$.
 (D). $-1; 4$.



☑ - BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.D	4.D	5.B	6.C	7.A	8.B	9.B	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☑ Dạng ③. Tìm khoảng ĐB, NB

• Đề cho hàm số $y = f(x)$ tường minh

✚ Note!

- ①_Lập BBT
 ②_Dựa vào BBT kết luận nhanh khoảng ĐB, NB
 ☒- Casio: INEQ, d/dx, table.

🔥A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A). $(2; +\infty)$.
 (B). $(1; +\infty)$.
 (C). $(1; 3)$.
 (D). $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$

Lời giải

☞ Chọn D .

• $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 3 = 0$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{7}{3}$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$		

BBT $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$

🔥PP nhanh trắc nghiệm

• Casio: INEQ

$x < a, b < x$

$x < 1, 3 < x$

Câu 2: Hỏi hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- (A). $(-\infty; -1)$.
 (B). $(-1; 1)$.
 (C). $(-1; 0)$.
 (D). $(-\infty; 1)$.

Lời giải

☞ Chọn A .

• $y = x^4 - 2x^2 + 2020 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

🔥PP nhanh trắc nghiệm

• Casio: INEQ

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

• BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	
		2019		2020		2019			

• $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$x < a, b < x < c$$

$$x < -1, 0 < x < 1$$

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ (C), chọn phát biểu **đúng**

- (A). Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.
 (B). Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 (C). Hàm số có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (D). Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng xác định.

Lời giải

• Chọn D.

$$y = \frac{-2x-3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

• $\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng xác định.

PP nhanh trắc nghiệm

• Công thức

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0) \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

• Casio: table.

$$f(x) = \frac{-2x-3}{x+1}$$

Phạm vi bảng

Đầu: -10

Khúc: 10

Bước: 0.5

x	$f(x)$
-2	-1
-1.5	0
-1	ERROR
-0.5	-4

-1

B - Bài tập áp dụng:

Câu 1: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ đồng biến trên các khoảng

- (A). $(-\infty; 1)$. (B). $(0; 2)$. (C). $(2; +\infty)$. (D). $\mathbb{R}$.

Câu 2: Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ là

- (A). $(-\infty; -1)$. (B). $(1; +\infty)$. (C). $(-1; 1)$. (D). $(0; 1)$.

Câu 3: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ nghịch biến trên

- (A). $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$ (B). $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. (C). $\mathbb{R}$. (D). $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Câu 4: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 4$ đồng biến trên các khoảng

- (A). $(-\infty; 0)$. (B). $(0; +\infty)$. (C). $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. (D). $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 5: Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên

- (A). $\mathbb{R}$. (B). $(-\infty; 3)$. (C). $(-3; +\infty)$. (D). $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng

- (A). $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. (B). $(1; +\infty)$. (C). $(-1; +\infty)$. (D). $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ (C). Chọn phát biểu đúng?

- (A). Hàm số luôn nghịch biến trên miền xác định.
 (B). Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.
 (C). Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 (D). Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

- (A). $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$. (B). $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.
 (C). $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$. (D). $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A). $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. (B). $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; \frac{1}{2})$.
 (C). $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. (D). $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{2}; 1)$.

Câu 10: Trong các hàm số sau, hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

- (A). $y = \frac{x-3}{x-1}$. (B). $y = \frac{x^2-4x+8}{x-2}$. (C). $y = 2x^2 - x^4$. (D). $y = x^2 - 4x + 5$.

☑ - BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.B	5.D	6.A	7.B	8.A	9.C	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☑ **Dạng ④. Tìm khoảng ĐB, NB**

• Đề cho hàm số $y = f'(x)$

✚ **Note!**

- ① _ Lập BBT
 ② _ Dựa vào BBT tìm khoảng ĐB, NB
 ☒ - **Casio:** INEQ, d/dx, table.

👉 **A - Bài tập minh họa:**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$. (B). Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
 (C). Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$. (D). Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

☞ **Chọn D**

• Do $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

• Quan sát nhanh dấu đạo hàm

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x) = (x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$. (B). Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
(C). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. (D). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải

⇒ **Chọn D**

- Do $f'(x) = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Chú ý: Mệnh đề sai.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- **Mất nhanh:** Nhìn

$$f'(x) = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

- **Casio:** table nhìn dấu đạo hàm.

$\sqrt{x}$	$f(x)$
1.5	0.25
2	0
2.5	0.25
3	1

0

- Dễ thấy $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2 - x - 1$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- (A). $1; +\infty$. (B). $-\infty; +\infty$. (C). $0; 1$. (D). $-\infty; 1$.

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	

- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $1; +\infty$.

👉 **B - Bài tập áp dụng:**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- (A). $(-1; 1)$. (B). $(1; 2)$. (C). $(-\infty; -1)$. (D). $(2; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
(B). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
(C). Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
(D). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2021}(x-2)^{2020}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x=\pm 2$.
(B). Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(C). Hàm số có ba điểm cực trị.
(D). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- **Casio:** INEQ

$$a < x$$

$1 < x$

- **Chọn A**.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2(x-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$. (B). Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
(C). Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (D). Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(5; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
(B). Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
(C). Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
(D). Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.
(B). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
(C). Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
(D). Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A). $f(-1) \geq f(1)$. (B). $f(-1) = f(1)$. (C). $f(-1) > f(1)$. (D). $f(-1) < f(1)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(x+3)^{2021}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
(B). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.
(C). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
(D). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.

☑ - BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.D	4.A	5.A	6.D	7.D	8.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

☒ Dạng ⑤. Tìm khoảng ĐB, NB

• Đề cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$

† Note!

①. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục ox trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$

②. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục ox trong khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$

③. Nếu cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ mà hỏi sự biến thiên của hàm số hợp $y = f(u)$ thì sử dụng đạo hàm của hàm số hợp và xét dấu hàm số $y = f'(u)$

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$

là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
 (B). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
 (C). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.
 (D). Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải

⇒ Chọn (D).

• Dựa vào đồ thị của hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$				$+\infty$

The diagram illustrates a path starting from y_{CT} , moving up and to the right to y_{CD} , then down and to the right to y_{CT} , and finally up and to the right to y_{CT} .

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:

- (A). $(1;3)$. (B). $(2;+\infty)$.
 (C). $(-2;1)$. (D). $(-\infty;2)$.

Lời giải

⇒ Chọn C

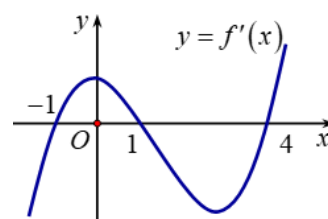
• Ta có: $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$

$$(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$$

• Hàm số đồng biến khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$

⇒ PP nhanh trắc nghiệm

- Từ đồ thị dễ thấy trên khoảng $(0;2)$ đồ thị nằm dưới trục ox nên $f'(x) < 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến



⇒ PP nhanh trắc nghiệm

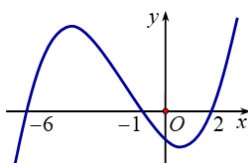
- Casio
- ①. Nhập đạo hàm $-(2-x+1)(2-x-1)$ (↵)

②. Calc loại các đáp án không thỏa đề bài.

Loại A, B, D

③. Chọn đáp án đúng C

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng



- (A). $(2;3)$. (B). $(-2;-1)$. (C). $(-1;0)$. (D). $(0;1)$.

⇒ Chọn C.

⇒ PP nhanh trắc nghiệm

- Casio
- ①. Nhập đạo hàm hàm số hợp

- Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2xf'(3-x^2) > 0$
 $\Leftrightarrow 2xf'(3-x^2) < 0$.

$$\bullet \begin{cases} x < 0 \\ f'(3-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3-x^2 > 2 \\ -6 < 3-x^2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \\ 4 < x^2 < 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x > 0 \\ f'(3-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3-x^2 < -6 \\ -1 < 3-x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 9 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

- So sánh với đáp án Chọn C.

$$-2x(3-x^2+6)(3-x^2) \rightarrow$$

②. Calc loại các đáp án không thỏa đề bài.

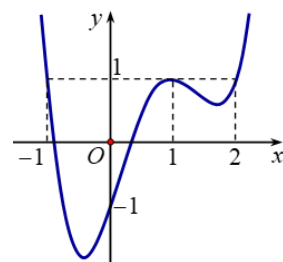
Loại A, B, D

③. Chọn đáp án đúng C

⚡ chú ý khi calc chọn giá trị sát đầu mút.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình sau. Đặt $g(x) = f(x) - x$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng

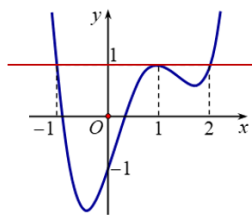
- Ⓐ. $(1; +\infty)$. Ⓑ. $(-1; 2)$.
 Ⓒ. $(2; +\infty)$. Ⓓ. $(-\infty; -1)$.



Lời giải

⇒ **Chọn B**

- Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.
- Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy $\forall x \in (-1; 2)$ thì

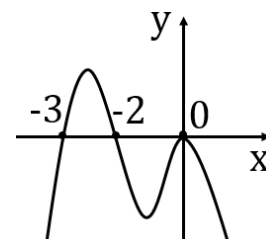


- $f'(x) < 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.

⚡ **B - Bài tập áp dụng:**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$
 Ⓑ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$
 Ⓒ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$



⚡ **PP nhanh trắc nghiệm**

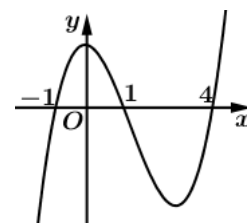
- Vẽ đường thẳng $y = 1$
- Quan sát phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y = 1$
- Dựa vào đồ thị ta thấy $\forall x \in (-1; 2)$ hàm số nghịch biến.

Ⓓ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(3-2x) + 2020$ nghịch biến trên khoảng?

Ⓐ. $(1; 2)$. Ⓑ. $(2; +\infty)$.

Ⓒ. $(-\infty; 1)$. Ⓓ. $(-1; 1)$.

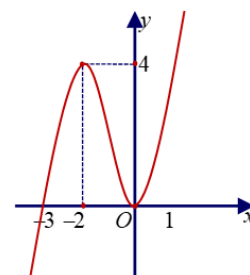


Câu 3: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

Ⓐ. $(-\infty; 0)$. Ⓑ. $(-\infty; 4)$.

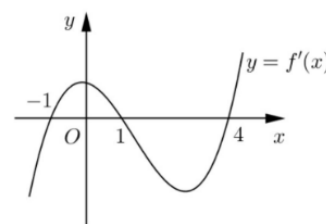
Ⓒ. $(-3; +\infty)$. Ⓓ. $(-4; 0)$.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ. $(-\infty; -1)$. Ⓑ. $(2; +\infty)$.

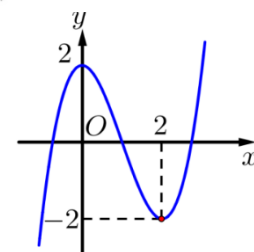
Ⓒ. $(-1; 1)$. Ⓓ. $(1; 4)$



Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ. $(1; 2)$. Ⓑ. $(2; 3)$.

Ⓒ. $(-1; 0)$. Ⓓ. $(-1; 1)$.



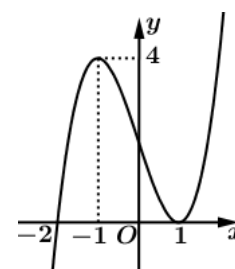
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Ⓑ. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ⓒ. Trên $(-1; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

Ⓓ. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.



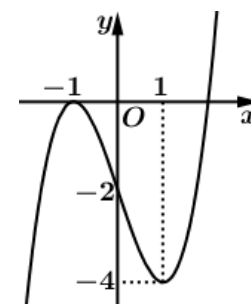
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên M và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Ⓑ. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Ⓒ. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

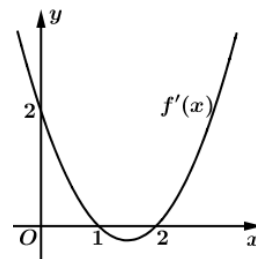
Ⓓ. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.



Câu 8: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- Ⓐ. $(-\infty; 0)$. Ⓑ. $(0; 1)$.
 Ⓒ. $(1; 2)$. Ⓓ. $(0; +\infty)$.



Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(-\infty; -1)$. Ⓑ. $(1; +\infty)$. Ⓒ. $(-1; 0)$. Ⓓ. $(0; 2)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ. $(0; 1)$. Ⓑ. $(-2; -1)$. Ⓒ. $(-2; 1)$. Ⓓ. $(-4; -3)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2. A	3.C	4.C	5.A	6.D	7.D	8.B	9.C	10.B
-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng 6. Toán tham số m

- Tìm tham số m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên từng khoảng xác định, trên khoảng $(a; b)$ hay trên $\mathbb{R}$.

† Note!

1. Hàm đa thức.

➔ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

† Nếu trên K , $f'(x) \geq 0$ và dấu “=” xảy ra tại một số hữu hạn điểm thì $f(x)$ đồng biến trên K .

† Nếu trên K , $f'(x) \leq 0$ và dấu “=” xảy ra tại một số hữu hạn điểm K thì $f(x)$ nghịch biến trên K .

➔ Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có:

$$\bullet f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \bullet f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

➔ Xét bài toán: “Tìm m để hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên K ”. Ta thường thực hiện theo các bước sau:

①. Tính đạo hàm $f'(x, m)$

②. Lý luận: Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x, m) \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq g(x), \forall x \in K$ ($m \leq g(x)$)

③. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên K , từ đó suy ra giá trị cần tìm của m .

➔ Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\bullet \text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

⚠. Chú ý: Xét hệ số $a = 0$ khi nó có chứa tham số.

2. Hàm phân thức hữu tỷ: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

①. Xét tính đơn điệu trên tập xác định:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Nếu $y' > 0 \forall x \in D$, suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$
- Nếu $y' < 0 \forall x \in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$

②. Xét tính đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ thuộc tập xác định D :

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} ad-bc > 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} ad-bc < 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A). 0.

(B). 6.

(C). 5.

(D). 7.

Lời giải**⇒ Chọn D**

- $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$.

- TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9.$$

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \text{ (do } a = -3 < 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3.$$

- Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

PP nhanh trắc nghiệm

- Sử dụng ngay điều kiện

$$b^2 - 3ac \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$$

- **Casio: mode A**

$$a \leq x \leq b$$

$$-9 \leq x \leq -3$$

- Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A). $-1 \leq m \leq 1$.(B). $-1 < m < 1$.(C). $0 \leq m \leq 1$.(D). $0 < m < 1$.**Lời giải****⇒ Chọn A**

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$

- Ta có, $y' = x^2 - 4mx + 4$.

- YCBT

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (-4m)^2 - 4.1.4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$$

PP nhanh trắc nghiệm

- Sử dụng ngay điều kiện

$$b^2 - 3ac \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$$

- **Casio: mode A**

$$a \leq x \leq b$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

- Vậy $-1 \leq m \leq 1$

- Chú ý đề có thể hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = x^2(m-x) - 2018$ (1) đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

(A). $m \in [3; +\infty)$.(B). $m \in [0; +\infty)$.(C). $m \in [-3; +\infty)$.(D). $m \in (-\infty; -1]$.**⇒ Chọn A.**

- Ta có $y' = -3x^2 + 2mx$. Để hàm số (1) đồng biến trên $(1; 2)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

- Khi đó $-3x^2 + 2mx \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \geq \frac{3x}{2} \quad \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \geq 3$

PP nhanh trắc nghiệm

- Sử dụng casio: table

- Thử $m=0$

$$f(x) = x^2(0-x) - 2018$$

	x	$f(x)$
2	1.1	-2019
3	1.2	-2019
4	1.3	-2020
5	1.4	-2020.744

$$-2020.744$$

Loại B, C.

- + Thử $m=-1$

	x	$f(x)$
3	1.2	-2021
4	1.3	-2021
5	1.4	-2022
6	1.5	-2023.625

$$-2023.625$$

Loại D.

Chọn A.

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $2; +\infty$.

(A). 1.

(B). 3.

(C). vô số.

(D). 2.

Lời giải

☞ Chọn A

• Điều kiện: $x \neq -4m$.• Để hàm số xác định trên $2; +\infty$ thì $-4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$ • Ta có: $y' = \frac{4m-3}{x+4m}^2$

• Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in 2; +\infty \Leftrightarrow \frac{4m-3}{x+4m}^2 < 0, \forall x \in 2; +\infty$$

$$\Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

• Vậy $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4}$ nên có 1 số nguyên $m = 0$ thỏa mãn.

☞ PP nhanh trắc nghiệm

• _ Sử dụng ngay điều kiện

$$\begin{cases} ad - bc < 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$$

• _ Sử dụng casio: table: Thử m nguyên

• Với $m=0$ thỏa mãn.

$$f(x) = \frac{x+3}{x+4 \times 0}$$

Phạm vi bảng

Đầu : 2

Khúc : 10

Bước : 0.5

x	f(x)
1	2
2	2.5
3	3
4	3.5

5]2

Thử thêm các m nguyên lân cận

• $m=1, -1, 2, -2, \dots$ thấy không thỏa.

x	f(x)
1	0.8333
2	0.8461
3	0.8571
4	0.8666

2

Câu 5. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

(A). $m \in [-1; +\infty)$.(B). $m \in (-\infty; -1)$.(C). $m \in (-1; +\infty)$.(D). $m \in (-\infty; -1]$.

Lời giải

☞ Chọn C

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.• Ta có: $y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó khi

$$y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \frac{1+m}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 1+m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

☞ PP nhanh trắc nghiệm

• _ Sử dụng casio: d/dx hoặc table

• Thử $m=-1$ thấy không thỏa

x	f(x)
18	-1.5
19	-1
20	-0.5
21	0

ERROR

Loại A, D

• Thử $m=10$ thỏa

x	f(x)
17	-2
18	-1.5
19	-1
20	-0.5

12

• Vậy chọn C

- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- (A). 5. (B). 3. (C). 2. (D). 4.

⇒ **Chọn D**

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

• Ta có: $y' = \frac{m^2 - 9}{(x+m)^2}$.

• Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ -m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

• Sử dụng ngay điều kiện

$$\begin{cases} ad - bc < 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$$

• **Casio: table** dò tìm số m nguyên.

• Với $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$ thỏa.

$$f(x) = \frac{0 \times x + 9}{x + 0}$$

Phạm vi bảng

Đầu : 1

Kthúc : 10

Bước : 0.5

x	$f(x)$
9	5
10	5.5
11	6
12	6.5

1.384615385

• PP dò là giải pháp tình thế. Khi không biết phương pháp giải có thể thử.

🔥 **B - Bài tập áp dụng:**

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

- (A). 1. (B). 4. (C). 3. (D). 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- (A). 5. (B). 6. (C). 7. (D). 4.

Câu 3: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- (A). $m \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$. (B). $m \in \left[1; \frac{7}{4}\right)$.
- (C). $m \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$. (D). $m \in \left[1; \frac{7}{4}\right]$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (-m^2 + 2m)x^3 + (m-2)x^2 + x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- (A). 0. (B). 1. (C). 2. (D). 3.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- (A). 1. (B). 2. (C). 0. (D). 3.

- Câu 6:** Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = \frac{x+2}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $5; +\infty$
- (A). 7. (B). 8. (C). 9. (D). 10.
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên $(0; 10)$.
- (A). $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$. (B). $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
 (C). $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$. (D). $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$
- Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$.
- (A). 5. (B). 3. (C). 4. (D). Vô số.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .
- (A). 3. (B). 4. (C). 5. (D). 1.
- Câu 10:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx-3}{2x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.
- (A). $[-6; 6]$. (B). $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. (C). $[-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. (D). $(-\sqrt{6}; 6]$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.D	4.C	5.B	6.A	7.A	8.C	9.A	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

🕒 **Bài 2: CỰC TRỊ HÀM SỐ**

⚡ Note!
☒ Dạng ①. Tìm cực trị
• Cho BBT, bảng dấu của hàm số $y=f(x)$

- ①. Qua x_0 $f'(x)$ đổi dấu từ $(+) \rightarrow (-)$ thì đây là cực đại.
- ②. Qua x_0 $f'(x)$ đổi dấu từ $(-) \rightarrow (+)$ thì đây là cực tiểu.

🔥 A - Bài tập minh họa:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 4 $-\infty$

- (A). $y_{CD} = 5$. (B). $y_{CT} = 0$. (C). $x_{CD} = 5$. (D). $x_{CT} = 1$.

Lời giải

➡ Chọn A

- Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CD} = y(1) = 5$.

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = ?$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1 $-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- (A). $x = 1$. (B). $x = 0$. (C). $x = 5$. (D). $x = 2$.

Lời giải

➡ Chọn D

- Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = ?$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- (A). 2. (B). 3. (C). 0. (D). 1.

Lời giải

⇒ Chọn A

- Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1; x = 4$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát số lần $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x = ?$.
- Chú ý số lần đổi dấu là số cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

- (A). $x = 5$. (B). $x = 3$. (C). $x = -2$. (D). $x = 2$.

Lời giải

⇒ Chọn B

- Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = ?$.

🔴B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

- (A). $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$. (B). $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.
 (C). $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. (D). $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				1		$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

- (A). $x = 2$. (B). $x = 1$. (C). $x = -1$. (D). $x = -3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- (A). $x = 5$. (B). $x = 3$. (C). $x = -2$. (D). $x = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ 1 $+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- (A). 5. (B). 1. (C). 2. (D). 0.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Giá trị cực tiểu của hàm số là

- (A). $x = 3$. (B). $x = 1$.
(C). $y = -2$. (D). $y = 2$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$				2		$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- (A). $x = 3$. (B). $(1; 3)$.
(C). $(2; -2)$. (D). $x = 2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$				3		$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

- (A). 1. (B). 3. (C). 2. (D). 0.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

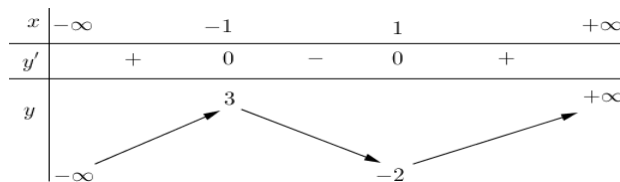
- (A). 1. (B). 3.
(C). 2. (D). 0.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y	-2		$+\infty$		-2

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ $+\infty$ $-\infty$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

- (A). 1. (B). 3.
(C). 2. (D). 0.



Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số có điểm cực đại là

- (A). 0. (B). 1. (C). 3. (D). 2.

☑ - BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.B	4.A	5.C	6.B	7.B	8.D	9.A	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☑ Dạng ②. Tìm cực trị

• Đề cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$

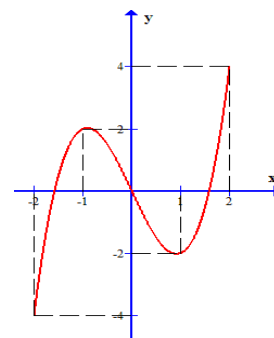
✚ Note!

1. Nếu đồ thị “đi lên” rồi “đi xuống” thì đây là cực đại.
2. Nếu đồ thị “đi xuống” rồi “đi lên” thì đây là cực tiểu.

🔗 A - Bài tập minh họa:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

- (A). $x = -2$. (B). $x = -1$.
(C). $x = 1$. (D). $x = 2$.



Lời giải

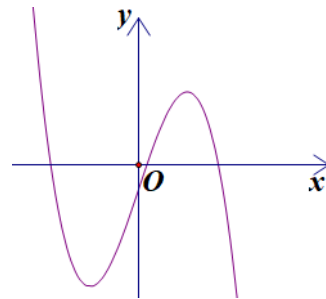
☞ Chọn B

- Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

🔗 PP nhanh trắc nghiệm

- Ta thấy nhánh ngoài cùng bên trái “đi lên” rồi “đi xuống” khi đó hàm số đạt cực đại tại x đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



- (A). 3. (B). 0.
(C). 2. (D). 1.

Lời giải

☛ **Chọn C**

- Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 2 cực trị

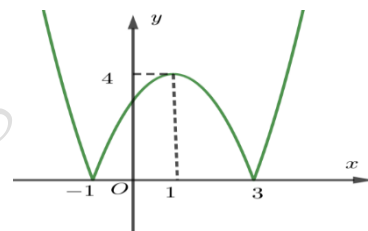
☛ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát đồ thị hàm số, có bao nhiêu khoảng lồi lõm, liên tục thì có bấy nhiêu cực trị?

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 1. (B). 3.
(C). 2. (D). 0.



Lời giải

☛ **Chọn B**

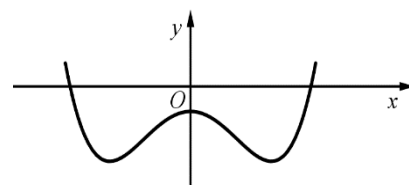
- Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị

☛ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát đồ thị hàm số, có bao nhiêu khoảng lồi lõm, liên tục thì có bấy nhiêu cực trị?

Câu 4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A). 3. (B). 0.
(C). 2. (D). 1



Lời giải

☛ **Chọn A**

- Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị

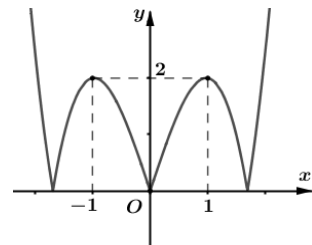
☛ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát đồ thị hàm số, có bao nhiêu khoảng lồi lõm, liên tục thì có bấy nhiêu cực trị?

☛ **B - Bài tập rèn luyện:**

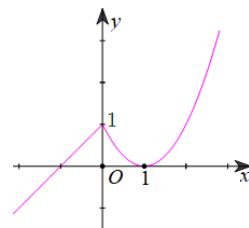
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 4. (B). 5.
(C). 2. (D). 3.



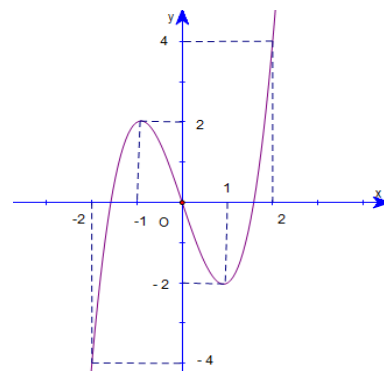
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số đó có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 0. (B). 3.
(C). 1. (D). 2.



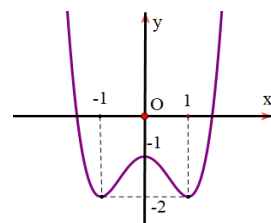
Câu 3: Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- (A). $x = -1$. (B). $x = -2$.
(C). $x = 1$. (D). $x = 2$.



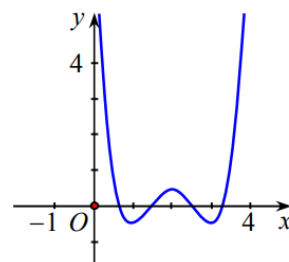
Câu 4: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số bằng

- (A). -1. (B). -2.
(C). 1. (D). 0.



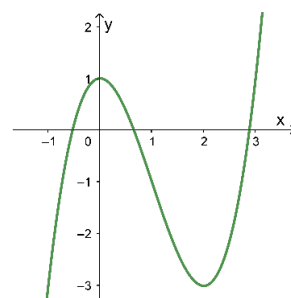
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- (A). 1 (B). 2.
(C). 4. (D). 3.



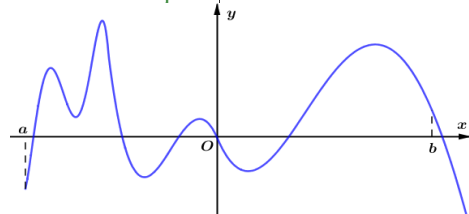
Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

- (A). -3. (B). 0.
(C). 2. (D). 1.



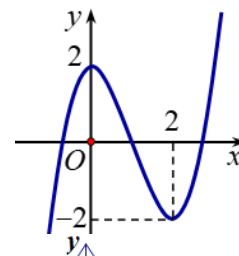
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$?

- (A). 4. (B). 2.
(C). 7. (D). 3.



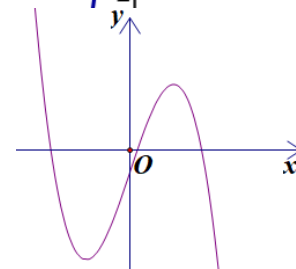
Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). Hàm số có ba cực trị.
 (B). Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
 (C). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.
 (D). Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.



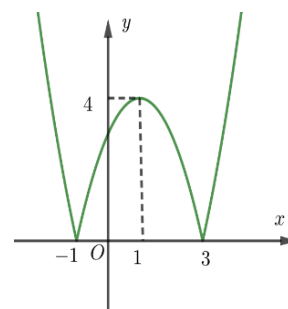
Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A). 3. (B). 0.
 (C). 2. (D). 1.



Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A). 3. (B). 4.
 (C). 2. (D). 1.



☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.B	5.D	6.A	7.B	8.A	9.C	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng ③. Tìm cực trị

• Đề cho hàm số $y=f(x)$ tường minh

† Note!

- ①_Lập BBT
 ②_Dựa vào BBT kết luận cực trị
 ☒- Casio: INEQ, d/dx, table.

👉A - Bài tập minh họa:

Câu 1. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- (A). 1. (B). 4. (C). 0. (D). -1.

Lời giải

⇒Chọn B

• Ta có

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

• Bảng biến thiên

👉PP nhanh trắc nghiệm

• Casio: 580VNX

Cực đại của
 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $y =$

4

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

- Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

- (A). 0. (B). 3. (C). 2. (D). 1.

Lời giải

⇒ **Chọn D**

- Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$ (là nghiệm kép)
- Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y					

- Suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

⇒ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Đề đã cho $f'(x)$ và để dễ xét dấu $f'(x)$ thì nhập $f'(x)$ vào máy tính và chọn 1 số bất kì trong khoảng cần xét thế vào (CALC).

Câu 3. Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- (A). 3. (B). 2. (C). 5. (D). 1.

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Ta có

$$f'(x) = x(x-1)(x+2)^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ các}$$

nghiệm này đều là nghiệm đơn.

- Vậy hàm số có 3 cực trị.

⇒ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Có thể xét dấu $f'(x)$ qua nghiệm bội lẻ và nghiệm bội chẵn.
- **Casio: Table** kiểm tra sự đổi dấu

Câu 4. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực trị tại x_1 và x_2 thì tích các giá trị cực trị bằng ?

- (A). -302. (B). 25. (C). -207. (D). -82.

Lời giải

⇒ Chọn C

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases},$$

• Ta có BBT:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	9	-23	$+\infty$	

• Từ BBT ta có giá trị cực đại bằng 9, giá trị cực tiểu bằng -23.

• Suy ra $y_{CD} \cdot y_{CT} = -207$.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực trị ?

(A). 3.

(B). 0.

(C). 2.

(D). 1.

Lời giải

⇒ Chọn B

• Ta có hàm số đã cho là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị.

⇒ PP nhanh trắc nghiệm

• Giải phương trình $f'(x) = 0$

• **Casio: Table** kiểm tra sự đổi dấu hoặc 580VNX bấm nghiệm biết ngay

⇒ PP nhanh trắc nghiệm

• Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ không có cực trị

Câu 6. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

(A). 3.

(B). 2.

(C). 0.

(D). 1.

Lời giải

⇒ Chọn A.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ các nghiệm này đều là nghiệm}$$

đơn.

• Vậy hàm số có 3 cực trị.

⇒ PP nhanh trắc nghiệm

• Nhìn hệ số a, b thấy trái dấu kết luận có 3 cực trị.

• **Chú ý:** nếu $ab < 0$ thì hàm số có 3 cực trị

⇒ B - Bài tập áp dụng:

Câu 1: Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng?

- (A). 13. (B). 32. (C). 40. (D). 36.

Câu 2: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực trị tại x_1 và x_2 thì tích các giá trị cực trị bằng?

- (A). -302. (B). 25. (C). -207. (D). -82.

Câu 3: Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là

- (A). $y_{CD} = -4$. (B). $y_{CD} = -2$. (C). $y_{CD} = 36$. (D). $y_{CD} = 2$.

Câu 4: Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

- (A). 1. (B). 2. (C). 3. (D). 0.

Câu 5: Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 1. (B). 2. (C). 3. (D). 0.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 3)^2(x + 2)^{2021}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- (A). 5. (B). 2. (C). 3. (D). 4.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)^{2020}(x - 5)(x + 2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

- (A). 4. (B). 3. (C). 1. (D). 2.

Câu 8: Hàm số $y = x^4 + x^2 - 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 3. (B). 0. (C). 2. (D). 1.

Câu 9: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2020$ đạt cực tiểu tại

- (A). $x = -1$. (B). $x = 3$. (C). $x = 1$. (D). $x = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)^2(x + 2)^3(2x - 3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$

- (A). 3. (B). 2. (C). 0. (D). 1.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.B	5.D	6.B	7.D	8.D	9.C	10. B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------

✚ Note!

☒ Dạng ④. Tìm Cực trị

• Đề cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$

(Cho đồ thị của đạo hàm)

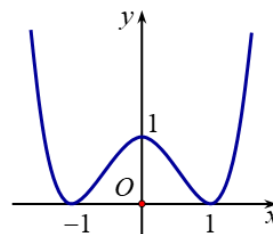
①. Xác định số giao điểm mà đồ thị $f'(x)$ cắt trục ox.

②. Kết luận số cực trị của hàm số $f(x)$ bằng số giao điểm với trục ox. Chú ý nếu đồ thị tiếp xúc với trục ox thì điểm ấy không là cực trị.

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A). 4. (B). 0.
(C). 2. (D). 3.



Lời giải

⇒ **Chọn B**

• Dựa vào hình vẽ ta có : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$, và đồ thị hàm số

$y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

• Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$+$	0	$+$
y	$-\infty$					$+\infty$

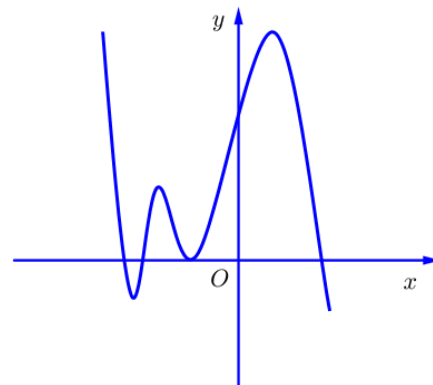
• Vậy hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

⇒ **PP nhanh trắc nghiệm**

• Đồ thị hàm số không cắt trục hoành nên không có cực trị

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- (A). 5. (B). 4.
(C). 3. (D). 6.



Lời giải

⇒ **Chọn C**

• Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu 3 lần.

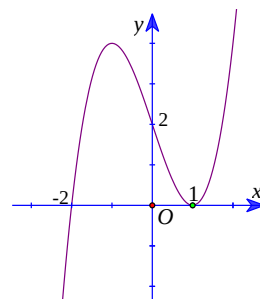
• Vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Đồ thị cắt trục ox tại 3 điểm phân biệt

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

- (A). 3. (B). 2.
(C). 5. (D). 4.



Lời giải

⇒ **Chọn A**

• Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

• Ta có $y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$

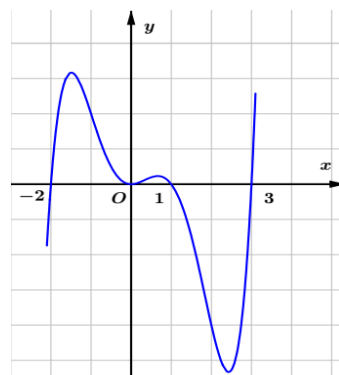
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

• Do đó hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 3. (B). 5.
(C). 2. (D). 4.



Lời giải

• **Chọn B**

• Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

• Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

• Ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

⇒ **PP nhanh trắc nghiệm**

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

✦ Ghi nhớ đạo hàm hàm số hợp:

$$[f(u(x))]' = (u(x))' \cdot f'(u(x))$$

✦ Số nghiệm đơn phân biệt của phương trình $y' = 0$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(u(x))$

⇒ **PP nhanh trắc nghiệm**

$$g'(x) = 2xf'(x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

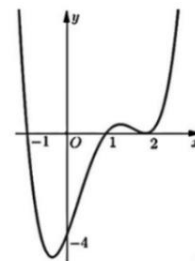
• Số nghiệm đơn bằng số cực trị

⇒ **B - Bài tập áp dụng:**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

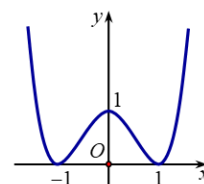
- (A). 2. (B). 4.
(C). 1. (D). 3.



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$

như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

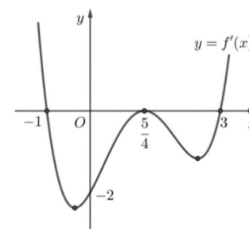
- (A). 4. (B). 0.
(C). 2. (D). 3.



Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.

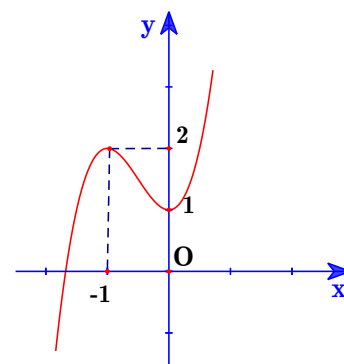
Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- (A). 3. (B). 4.
(C). 2. (D). 1.



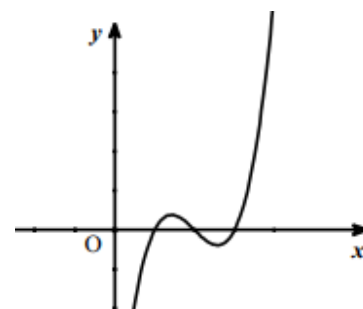
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.
(B). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(C). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và không có cực tiểu.
(D). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.



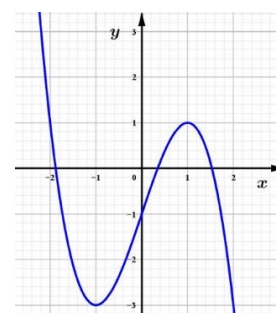
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực đại.
(B). Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
(C). Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
(D). Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.



Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

- (A). 1. (B). 0.
(C). 3. (D). 2.

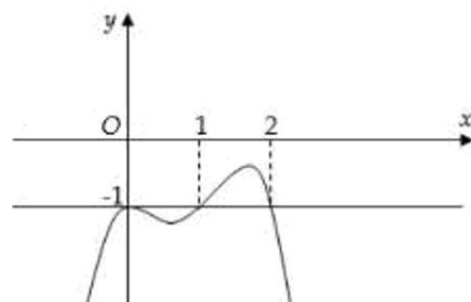


Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$

(A). Không có cực tiểu. (B). $x = 0$.

(C). $x = 1$. (D). $x = 2$.

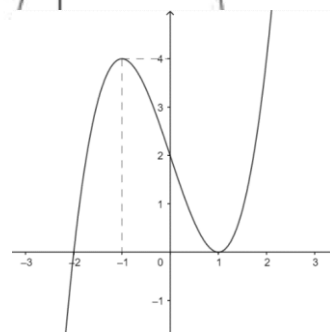


Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

(A). 3. (B). 4.

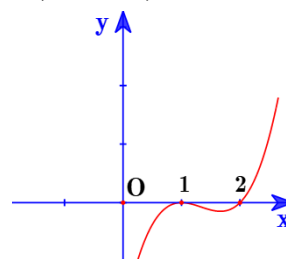
(C). 1. (D). 2.



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A). 1. (B). 2.

(C). 3. (D). 0.



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây: Cho bốn mệnh đề sau:

1. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

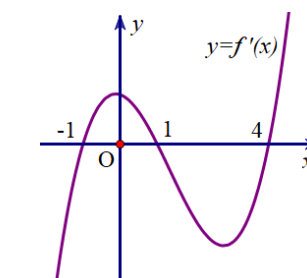
2. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

3. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.

4. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là

(A). 1. (B). 2. (C). 3.



(D). 4.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.A	5.B	6.C	7.C	8.C	9.D	10. C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------

☒ **Dạng 5.** Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm cho trước

✚ **Note!**

❶. Tìm $f'(x); f''(x)$

❷. Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

❸. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

👉 **A - Bài tập minh họa:**

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- (A). $m = 0$. (B). $m = 3$. (C). $m \in \emptyset$. (D). $m = 2$.

Lời giải

⇒ Chọn B

- Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$.

$$y'' = 2x - 2m.$$

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 - m - 1 = 0 \\ 1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

PP nhanh trắc nghiệm

- Casio:
- Thay giá trị $m = 3$ vào giải phương trình bậc 3.

Cực đại của
 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
x =

1

Câu 2: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- (A). $m = -1$. (B). $m = -2$. (C). $m = 2$. (D). $m = 1$.

Lời giải

⇒ Chọn C

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$; $y'' = 2x - 2m$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \Leftrightarrow m = 2 \\ m > 1 \end{cases}$$

PP nhanh trắc nghiệm

- Casio:
- Thay giá trị $m = 2$ vào giải phương trình bậc 3.

Cực đại của
 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
x =

1

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

- (A). $m = 1$. (B). $m = 2$. (C). $m = -2$. (D). $m = 0$.

Lời giải

⇒ Chọn D

- TXĐ $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m, y'' = 6x - 6.$$

- Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$
 $\Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$
- Với $m = 0$ ta có $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

PP nhanh trắc nghiệm

- Casio:
- Thay giá trị $m=0$ vào giải phương trình bậc 3.

$$\begin{array}{l} \text{Cực đại của} \\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ x = \end{array} \quad 0$$

B - Bài tập áp dụng:

Câu 1: Hàm số $y = 2x^3 - (4 - 2m)x^2 + (m - 5)x - 4$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị của m là?

- (A). -5. (B). 5. (C). -2. (D). 13.

Câu 2: Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- (A). $m = 3$. (B). $m = 1$. (C). $m = -1$. (D). $m = -3$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- (A). $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$. (B). $m = -4$. (C). $m = 1$. (D). $m > -\frac{1}{3}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 4x^3 + mx^2 - 4x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- (A). $m = 2$. (B). $m = 4$. (C). $m = 6$. (D). $m = 1$.

Câu 5: Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

- (A). $m \in (3; 5)$. (B). $m \in (-3; -1)$. (C). $m \in (1; 3)$. (D). $m \in (-1; 1)$.

Câu 6: Tìm giá trị thực của m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- (A). $m = 1$. (B). $m = 3$. (C). $m = -1$. (D). $m = -3$.

Câu 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- (A). $m = 4$. (B). $m = -2$. (C). $m = 2$. (D). $m = -4$.

Câu 8: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- (A). $m = 1$. (B). $m = -1$. (C). $m = -7$. (D). $m = 5$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực tiểu.

- (A). $\nexists m$. (B). $m = \frac{5}{2}$. (C). Vô số m . (D). $m = \frac{5}{6}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-1)x^2 + m^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- (A). $m = 1$. (B). $m \geq 1$. (C). $m \in \mathbb{R}$. (D). $m \leq 1$.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.C	4.C	5.D	6.A	7.A	8.D	9.D	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ **Dạng 6.** Tìm tham số m để hàm số bậc ba có cực trị thỏa điều kiện.

† Note!

⊗ -Phương pháp:

① _ Tính $f'(x)$.

② _ Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.

⊗ -Casio: table.

👉 **A - Bài tập minh họa:**

Câu 1: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2020$ có cực trị.

- (A). $m \in (-\infty; 1]$. (B). $m \in (-\infty; 1)$.
(C). $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$. (D). $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Lời giải

Chọn B

- Ta có $y' = x^2 + 2x + m$.
- Hàm bậc ba có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.
- Cách hỏi hàm bậc 3 có cực trị hoặc có hai điểm cực trị, đều như nhau.
- Có thể ta dùng công thức: $b^2 - 3ac$.
 - Có cực trị; hai cực trị: $b^2 - 3ac > 0$.
 - Không có cực trị $b^2 - 3ac \leq 0$.
- Với a, b, c là hệ số của y .

PP nhanh trắc nghiệm

- Nhận xét
- Casio: Thử $m = 1$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

x	$f(x)$
2.5	12.25
3	16
3.5	20.25
4	24

25

- Loại vì đạo hàm không đổi dấu. Suy ra loại A, D
- Thử $m = 0$, thấy đạo hàm đổi dấu nên chọn B

x	$f(x)$
17	-2
18	-1.5
19	-1
20	-0.5

-0.75

Câu 2: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2017$ có cực trị.

(A). $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

(B). $m \in (-\infty - 2) \cup (2; +\infty)$.

(C). $m \in (-2; 2)$.

(D). $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Chọn B

• $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5 \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + 4$

• Điều kiện cần và đủ của để hàm số có hai điểm cực trị là

$\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

• Hay $m \in (-\infty - 2) \cup (2; +\infty)$

PP nhanh trắc nghiệm

• Sử dụng điều kiện

$b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

• Casio:

$x < a, b < x$

$x < -2, 2 < x$

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

(A). $y(-1) = 7$.

(B). $y(-1) = 11$.

(C). $y(-1) = -11$.

(D). $y(-1) = -35$.

Lời giải

Chọn D

• $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

• Theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - (a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

• Vậy $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12 \Rightarrow y(-1) = -35$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1z \\ 12x + 4y + 1z \\ 1x + 1y + 1z \\ 8x + 4y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

👉 B - Bài tập áp dụng:

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 6)x$. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có cực trị.

- (A). 5. (B). Vô số. (C). 4. (D). 6.

Câu 2: Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5$ có hai điểm cực trị là.

- (A). $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$. (B). $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
(C). $m \in (-2; 2)$. (D). $m \in [-2; 2]$.

Câu 3: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ không có cực trị là.

- (A). $m < 1$. (B). $m > 1$. (C). $m \leq 1$. (D). $m \geq 1$.

Câu 4: Tìm các số thực m để hàm số $y = (m - 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.

- (A). $\begin{cases} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$. (B). $-3 < m < 1$. (C). $\begin{cases} m < -3 \\ 1 < m \end{cases}$. (D). $-2 < m < 1$.

Câu 5: Điều kiện cần và đủ của tham số m để hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 5$ có cực trị là

- (A). $m > \frac{1}{3}$. (B). $m < \frac{1}{3}$. (C). $m \leq \frac{1}{3}$. (D). $m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ không có cực trị

- (A). $m > 3$. (B). $m \geq 3$. (C). $m < 3$. (D). $m \leq 3$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu

- (A). $m \in \{-2; 2\}$. (B). $m < -2$ hoặc $m > 2$.
(C). $-2 < m < 2$. (D). $m \in \mathbb{R}$.

Câu 8: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m - 2)x + 1$ không có cực trị

- (A). $m \in [-6; 0)$. (B). $m \in [0; +\infty)$.
(C). $m \in -\infty; -6 \cup 0; +\infty$. (D). $m \in [-6; 0]$.

Câu 9: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$.

- (A). $S = 34$. (B). $S = -14$. (C). $S = 14$. (D). $S = -20$.

Câu 10: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là

- Ⓐ. $m = -3$. Ⓑ. $m = 1$. Ⓒ. $m = -1$. Ⓓ. $m = 3$.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.D	4.A	5.B	6.B	7.C	8.D	9.C	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng 7. Tìm tham số m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa điều kiện

† Note!

⊗-Phương pháp:

①_Tính $f'(x)$.

②_Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.

†. Hoặc xét hệ số $a; b$.

♦. Hàm trùng phương có

①. điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$.

②. điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b \geq 0$.

♦. Từ đó ta có thêm:

①. Có cực đại không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

②. Có cực tiểu không có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

⊗-Casio: table.

👉A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $-10; 10$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

- Ⓐ. 20. Ⓑ. 11. Ⓒ. 10. Ⓓ. 9.

Lời giải

⇒Chọn B

• Ta có $y' = 4x^3 - 4(2m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(2m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì

$$2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

👉PP nhanh trắc nghiệm

• Nhận xét:

+Hàm trùng phương (bậc 4) có

•) 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$.

•) 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b \geq 0$.

Từ đó ta có thêm

•) Có CĐ không có CT $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Vậy các giá trị nguyên của m trên miền $-10;10$ là $m \in 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10$.

•) Có CT không có CĐ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

✎ **Casio:** Dò tìm giá trị nguyên của m trên miền $-10;10$

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị.

(A). 6.

(B). 5.

(C). 4.

(D). 3.

Lời giải

➡ **Chọn C**

- Để hàm số có 3 điểm cực trị
 $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 2(m^2 - m - 6) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.
- Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

✎ **PP nhanh trắc nghiệm**

• **Casio**

$a < x < b$

$-2 < x < 3$

- Có thể sử dụng cách dò số m nguyên thỏa đề bài
- Nhập đạo hàm vào table kiểm tra sự đổi dấu để nhận m nguyên.

Câu 3: Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 - 3 + m$ có đúng một điểm cực trị.

(A). $m \geq 1$.

(B). $m \leq 1$.

(C). $m > 1$.

(D). $m < 1$.

Lời giải

➡ **Chọn B**

- $ab \geq 0 \Leftrightarrow -2(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

✎ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Sử dụng công thức nhanh $ab \geq 0$

✎ **B - Bài tập áp dụng:**

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + m - 1x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị.

(A). $m \geq 1$.

(B). $m \leq 0$.

(C). $0 \leq m \leq 1$.

(D). $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 2: Tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

(A). $(-\infty; 0)$.

(B). $(-\infty; 0]$.

(C). $(0; +\infty)$.

(D). $[0; +\infty)$.

Câu 3: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 10$ có ba điểm cực trị.

(A). $m = 0$.

(B). $m \neq 0$.

(C). $m > 0$.

(D). $m < 0$.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng 1 cực trị.

- (A). 5. (B). 1. (C). 6. (D). 0.

Câu 5: Hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có ba cực trị khi và chỉ khi

- (A). $m < 0$. (B). $m > 0$. (C). $m \leq 0$. (D). $m \geq 0$.

Câu 6: Hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ (m là tham số) có 3 điểm cực trị khi các giá trị của m là ?

- (A). $4 < m < 5$. (B). $m < 0$. (C). $m > 8$. (D). $m = 1$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu

- (A). $-\frac{3}{2} < m \leq 0$ (B). $-1 \leq m \leq 0$. (C). $0 \leq m < 1$. (D). $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại

- (A). $m \geq 0$. (B). $m \geq 1$. (C). $m = -1$. (D). $m \leq 0$.

Câu 9: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

- (A). $m = -1$. (B). $m \geq 1$. (C). $m \leq 0$. (D). $m \geq 0$.

Câu 10: Xác định các hệ số a, b, c của đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ biết $A(1;4), B(0;3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số ?

- (A). $a = 1; b = 0; c = 3$. (B). $a = -\frac{1}{4}; b = 3; c = -3$.
(C). $a = 1; b = 3; c = -3$. (D). $a = -1; b = 2; c = 3$.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.D	4.C	5.B	6.B	7.C	8.D	9.C	10.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

□ Bài 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-NHỎ NHẤT

☒ Dạng ①. Tìm GTLN-NN

- Đề cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$

✚ **Note!**

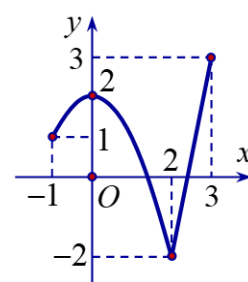
- Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$

và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- (A). 1 (B). 4
(C). 5 (D). 0



Lời giải

☞ **Chọn C.**

- Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 3 \text{ và}$$

$$m = \min_{[-1;3]} f(x) = f(2) = -2$$

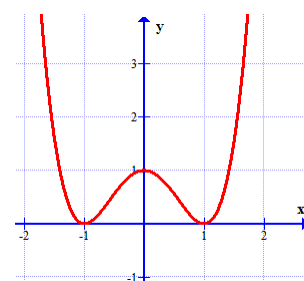
- Vậy $M - m = 5$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.
- Thực hiện phép trừ.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- (A). 0. (B). 1.
(C). 2. (D). 3.



Lời giải

☞ **Chọn B**

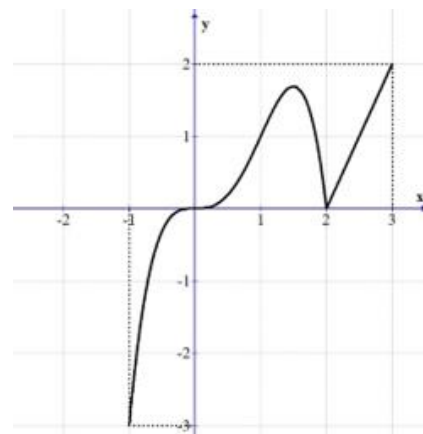
- Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.
- Thực hiện phép trừ.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

- (A). 15. (B). 11.
(C). 4. (D). 13.



Lời giải

⇒ Chọn (D).

- Từ đồ thị ta thấy $M = 2, m = -3$ nên $M^2 + m^2 = 13$.

👉 B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $2M + m$ bằng

- (A). 4. (B). 0.
(C). 3. (D). 5.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $2M + m$ bằng

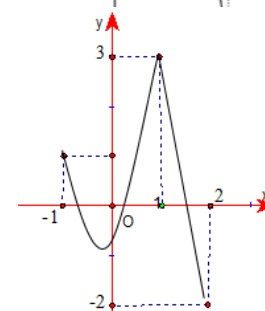
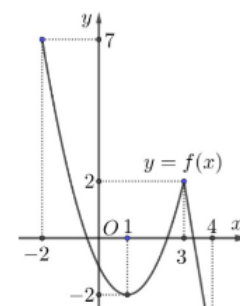
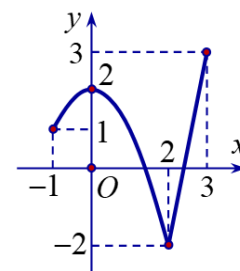
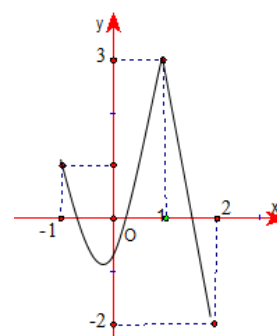
- (A). 1 (B). 4
(C). 5 (D). 0

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

- (A). 8. (B). 20.
(C). 53. (D). 65.

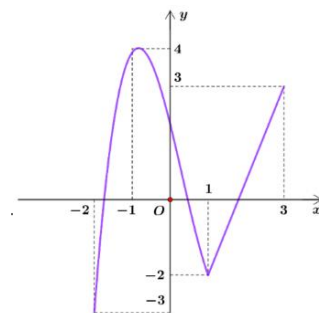
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $M + m$ bằng

- (A). 1. (B). 4.
(C). 2. (D). 0.



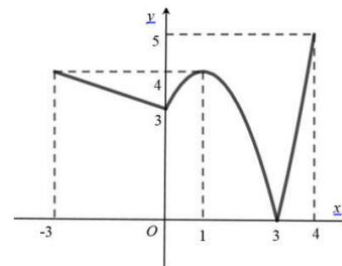
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in [-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị $M + m$ là

- (A). 6. (B). 1.
(C). 5. (D). 3.



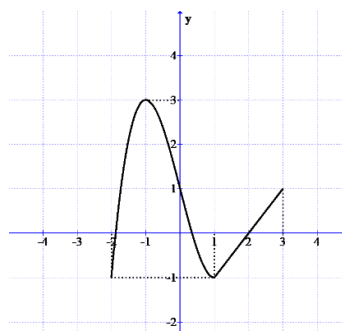
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 4]$. Tính $M + m$.

- (A). 5. (B). 8
(C). 7. (D). 1.



Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- (A). 0. (B). 1.
(C). 4. (D). 5.

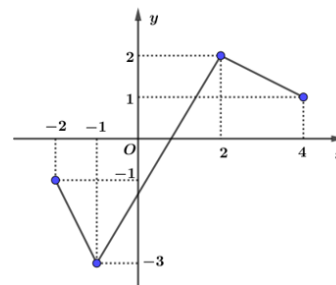


Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 1]$. Giá trị của $2M - m$ bằng

- (A). 0. (B). 1.
(C). 4. (D). 5.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.

- (A). 2. (B). $|f(0)|$.
(C). 3. (D). 1.



Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng:

- (A). -13. (B). -18.
(C). -16. (D). -15.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A

2.B

3.D

4.A

5.B

6.A

7.C

8.D

9.C

10.B

☒ Dạng ②. Tìm GTLN-NN

- Đề cho BBT của hàm số $y=f(x)$

+ Note!

- Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số thông qua chiều BBT

🔗 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ như hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm mệnh đề đúng?

x	-1	0	2	3
y'	+	0	-	0
y	0	5	1	4

Ⓐ. $M = f(0)$.Ⓑ. $M = f(3)$.Ⓒ. $M = f(2)$.Ⓓ. $M = f(-1)$.**Lời giải****⇒ Chọn A.**

- Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 khi $x=0$.

🔗 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát giá trị điểm cao nhất của đồ thị hàm số.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+		-	
y	$+\infty$		4		5		$-\infty$

Ⓐ. $y_{CD} = 5$.Ⓑ. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.Ⓒ. $y_{CT} = 0$.Ⓓ. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.**Lời giải****⇒ Chọn A**

- Dựa vào bảng biến thiên:
 - + Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ ($y_{CT} = 4$).
 - + Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ ($y_{CD} = 5$).

🔗 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát BBT xác định những điểm đặt biệt trên đồ thị mà tại đó hàm số sẽ đạt GTLN hay GTNN hoặc đạt cực đại hay cực tiểu.
- Chọn lựa mệnh đề thích hợp.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y		3	-1	1

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu.

- (A). $\max_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2}$. (B). $\max_{\mathbb{R}} y = -1$. (C). $\max_{\mathbb{R}} y = 1$. (D). $\max_{\mathbb{R}} y = 3$.

Lời giải

⇒ Chọn (D).

- Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = -\frac{1}{2}$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát BBT và thấy giá trị điểm cao nhất của đồ thị hàm số bằng 3 đạt tại $x = -\frac{1}{2}$

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\sqrt{3}$	-1		1	$\sqrt{5}$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	0	2		-2	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$. (B). $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$. (C). $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$. (D). $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3		-1		0		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3				2		

- (A). 3. (B). 2. (C). 1. (D). 4.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$.
 (B). $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$.
 (C). $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$.
 (D). $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng:

- (A). 1.
 (B). 3.
 (C). -1.
 (D). 0.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$		3		2	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

- (A). 3.
 (B). 2.
 (C). 1.
 (D). 4.

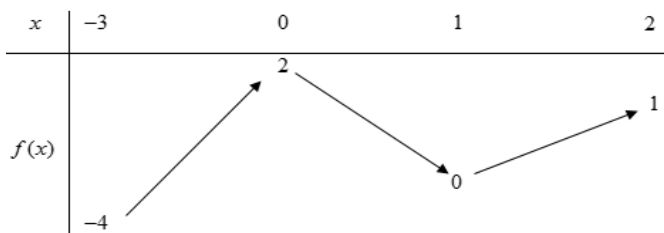
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

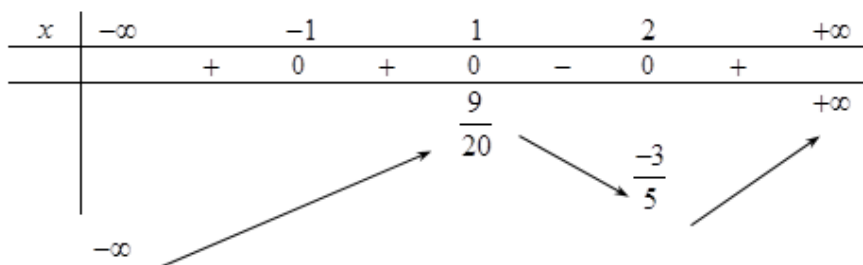
- (A). $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 4$.
 (B). $\max_{[-2; 3]} f(x) = 4$.
 (C). $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -2$.
 (D). $\min_{[1; 3]} f(x) = -1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M - m$.



- Ⓐ. 4. Ⓑ. 5. Ⓒ. 6. Ⓓ. 7.

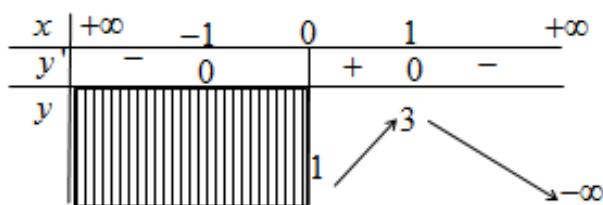
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- Ⓐ. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$
 Ⓑ. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.
 Ⓒ. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ trên đoạn $[-1; 2]$
 Ⓓ. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- Ⓐ. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.
 Ⓑ. Hàm số có giá trị nhỏ nhất 3.
 Ⓒ. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.
 Ⓓ. Tổng của giá trị nhỏ nhất và lớn nhất bằng 4.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	$-1/2$	$1/2$	0	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên R . Tính $M - m$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{2}$.

Ⓑ. -2 .

Ⓒ. 1 .

Ⓓ. 0 .

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.C	4.D	5.A	6.A	7.C	8.C	9.C	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

ⓧ Dạng ②. Tìm GTLN-NN

- Đề cho BBT của hàm số $y = f(x)$

† **Note!**

- Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số thông qua chiều BBT

👉 A - Bài tập minh họa:

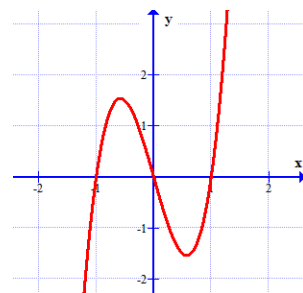
Câu 1: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?

Ⓐ. $x = \frac{3}{2}$.

Ⓑ. $x = 0$.

Ⓒ. $x = 1$.

Ⓓ. $x = 2$.



Lời giải

⇒ Chọn C

- Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$		

- Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại $x = 1$.

👉 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát giao điểm của đồ thị với trục hoành để xác định các giao điểm.
- Xét dấu đạo hàm nhìn đồ thị nằm trên Ox mang dấu +; dưới Ox mang dấu -
- Từ BBT kết luận.

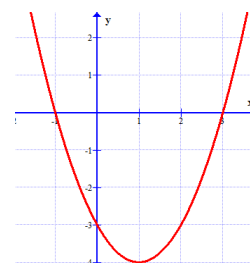
Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[-1; 4]$ tại x bằng bao nhiêu?

Ⓐ. $x = 3$.

Ⓑ. $x = 0$.

Ⓒ. $x = 4$.

Ⓓ. $x = -1$.



Lời giải

☞ Chọn A

- Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	-1		3		4
y'	0	-	0	+	
y					

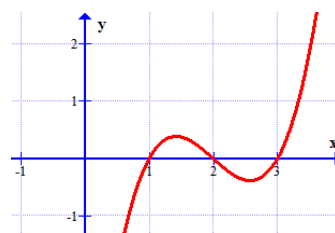
- BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[-1; 4]$ tại $x = 3$

👉 PP nhanh trắc nghiệm

- Từ BBT kết luận.

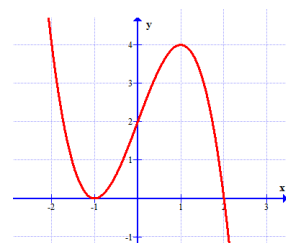
👉 B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2020$ bằng bao nhiêu?



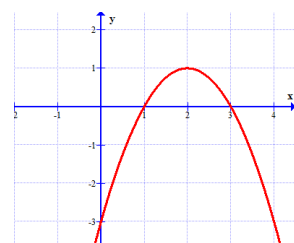
- Ⓐ. 2020. Ⓑ. 2022.
Ⓒ. 2018. Ⓓ. 2024.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?



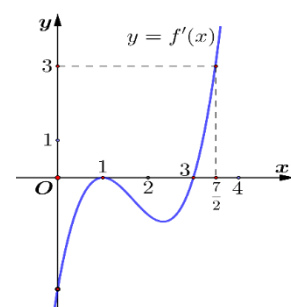
- Ⓐ. $x = 2$. Ⓑ. $x = 0$.
Ⓒ. $x = -2$. Ⓓ. $x = 1$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-2; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?



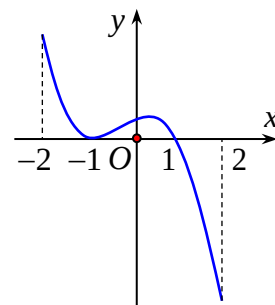
- Ⓐ. $x = 3$. Ⓑ. $x = 0$.
Ⓒ. $x = 2$. Ⓓ. $x = 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau: Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?



- Ⓐ. $x = 0$. Ⓑ. $x = \frac{7}{2}$.
Ⓒ. $x = 3$. Ⓓ. $x = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$.



- (A). $x = 2$. (B). $x = -1$.
(C). $x = -2$. (D). $x = 1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.C	5.D
-----	-----	-----	-----	-----

Dạng 4. Tìm GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$

• Dùng quy tắc tìm GTLN-GTNN

❶. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_m$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

❷. Tính $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$

❸. So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a; b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của f trên đoạn $[a; b]$.

• Đặc biệt:

• Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$

• Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

• **Casio:** table với Star... ; end...; step ... phù hợp trên $[a; b]$

🔥A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- (A). 0. (B). -16. (C). 20. (D). 4.

Lời giải

➡Chọn B

- $f'(x) = 3x^2 - 3$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$
- $f(-3) = -16; f(-1) = 4; f(1) = 0; f(3) = 20.$

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- Dùng table lập bảng với star -3; end 3; step 0.5
- Tìm GTNN và GTLN

- $\min_{[-3;3]} f(x) = -16$

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- (A). -2. (B). 18. (C). 2. (D). -18.

Lời giải

⇒ **Chọn B**

- $f'(x) = 3x^2 - 3$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$
- $f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$
- $\max_{[-3;3]} f(x) = 18$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Dùng table lập bảng với star -3; end 3; step 0.5

$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Tìm GTNN và GTLN.

M	√	f(x)
23	2.5	8.125
24	2.75	12.546
25	3	18
26		

18

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- (A). $M = 5.$ (B). $M = -5.$ (C). $M = \frac{1}{3}.$ (D). $M = -\frac{1}{3}.$

Lời giải

⇒ **Chọn C**

- Hàm số đã cho xác định trên $[0; 2]$.
- Ta có: $y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2].$
- $y(0) = \frac{1}{3}, y(2) = -5$
- Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $M = \frac{1}{3}.$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- **Casio:** Dùng table

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$$

Phạm vi bảng
Đầu : 0
Kthúc : 2
Bước : 0.25

M	√	f(x)
1	0	0.3333
2	0.25	0.0909
3	0.5	-0.2
4	0.75	-0.555

1/3

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- (A). $\min_{[2;4]} y = 6.$ (B). $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}.$ (C). $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}.$ (D). $\min_{[2;4]} y = -6.$

Lời giải

⇒ Chọn A

- $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$.
- $\begin{cases} y' = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.
- $f(2) = \frac{13}{2}$, $f(3) = 6$, $f(4) = \frac{25}{4}$.
- Vậy $\min_{[2;4]} y = f(3) = 6$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio: Dùng table

$$f(x) = x + \frac{9}{x}$$

M	$\sqrt{x}$	D	f(x)
3	2.5		6.1
4	2.75		6.0227
5	3		6
6	3.25		6.0192

6

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- (A). 6. (B). 0. (C). -2. (D). 2.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$.

- (A). $\max_{[1;3]} f(x) = -7$. (B). $\max_{[1;3]} f(x) = -4$.
 (C). $\max_{[1;3]} f(x) = -2$. (D). $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{67}{27}$.

Câu 3: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ lần lượt tại hai điểm x_1 và x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- (A). 2. (B). 4. (C). 5. (D). 3.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4. (B). Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.
 (C). Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$. (D). Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 4]$. Tính $M + m$.

- (A). $M + m = 17$. (B). $M + m = \frac{16}{3}$. (C). $M + m = \frac{13}{3}$. (D). $M + m = 5$.

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- (A). 1. (B). 50. (C). 5. (D). 122.

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+5}{x-7}$ trên đoạn $[8;12]$ là

- (A). 15. (B). $\frac{17}{5}$. (C). 13. (D). $\frac{13}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ là

- (A). $\frac{1}{3}$. (B). $-\frac{2}{3}$. (C). $\frac{1}{2}$. (D). $\frac{2}{3}$.

Câu 9: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng

- (A). 2. (B). $\frac{8}{3}$. (C). $\frac{10}{3}$. (D). 3.

Câu 10: Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+9}{x+3}$ trên $[0;3]$. Khi đó $M+m$ bằng

- (A). $\frac{7}{2}$. (B). $\frac{9}{2}$. (C). $\frac{11}{2}$. (D). $\frac{15}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.A	5.D	6.B	7.C	8.D	9.B	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dang ⑤. Tìm GTLN-GTNN của hàm số trên khoảng $(a;b)$

☒ - Phương pháp:

- ①. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước

Từ bảng biến thiên, tùy theo sự thay đổi giá trị của hàm số suy ra kết quả cần tìm

- ②. Dùng table lập bảng với Star... ; end...; step ... phù hợp. Tìm GTNN và GTLN

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

- (A). $\min_{[-4;2)} y = 4$. (B). $\min_{[-4;2)} y = 7$. (C). $\min_{[-4;2)} y = 5$. (D). $\min_{[-4;2)} y = \frac{15}{2}$.

Lời giải

☞ Chọn B

👉 PP nhanh trắc nghiệm

👉 Dùng table lập bảng với

- Ta có: $y' = -1 + \frac{1}{(x+2)^2}$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	-4		-3		-2
y'		-	0	+	
y	$\frac{15}{2}$				
			7		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min y = 7$.
[-4;2)

star -4; end -2-10⁻⁶step 0.5

🔍 Tìm GTNN

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

Ⓐ. $\min y = 3$.
(1; +∞)

Ⓑ. $\min y = -1$.
(1; +∞)

Ⓒ. $\min y = 5$.
(1; +∞)

Ⓓ. $\min y = -\frac{7}{3}$.
(1; +∞)

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

- Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$

x	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$
		3	

- Từ đó $\min y = 3$.
(1; +∞)

🔍 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Dùng table lập bảng với

star 1; end 10 step 0.5

- Tìm GTNN

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

Ⓐ. không tồn tại.

Ⓑ. -3.

Ⓒ. $-1 + \sqrt{2}$.

Ⓓ. 0.

Lời giải

⇒ Chọn B

- Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y				$+\infty$	-3	$+\infty$

- Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = f(\sqrt{2}) = -3$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Dùng table lập bảng với star 0; end 10 step 0.5
- Tìm GTNN là -2,9999 nên ta chọn -3

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

- (A). 2. (B). $\sqrt{2}$. (C). 0. (D). 1.

Câu 2: Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

- (A). có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 1$. (B). có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = -1$.
 (C). có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$. (D). có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = 3$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$

- (A). $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$. (B). $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
 (C). $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$. (D). $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A). Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$. (B). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0; 1)$.
 (C). Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. (D). Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 5: Tìm x để hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.

- (A). $x = -2$. (B). $x = 0$. (C). $x = 2$. (D). $x = 3$.

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là

(A). 10.

(B). 3.

(C). 5.

(D). 2.

Câu 7: Tìm x để hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A). $x = -2$.

(B). $x = 0$.

(C). $x = 2$.

(D). $x = 3$.

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$

(A). $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$.

(B). $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.

(C). $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$.

(D). $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.

Câu 9: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khi đó, tích mM bằng bao nhiêu?

(A). $\frac{1}{3}$.

(B). 3.

(C). $\frac{10}{3}$.

(D). 1.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m . Tính giá trị biểu thức

$$P = M^2 + m^2$$

(A). $P = \frac{1}{4}$.

(B). $P = \frac{1}{2}$.

(C). 2.

(D). 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.C	5.C	6.D	7.C	8.B	9.D	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ **Dạng ⑥.** Tìm tham số m để hàm số đạt GTLN-GTNN bằng k

• Dùng quy tắc tìm GTLN-GTNN

①. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_m$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

②. Tính $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$

③. So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a; b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó để tìm tham số m

• Đặc biệt:

• Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$

• Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

• **Casio:** table với Star... ; end...; step ... thích hợp với điều kiện

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + a$ (a là tham số) trên đoạn $[-1; 2]$.

- Ⓐ. $\min_{[-1;2]} y = 1 + a$. Ⓑ. $\min_{[-1;2]} y = a$. Ⓒ. $\min_{[-1;2]} y = 4 + a$. Ⓓ. $\min_{[-1;2]} y = 0$.

Lời giải

⇒ Chọn B

- Hàm số liên tục và xác định trên $[-1; 2]$.
- Ta có $y' = 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$y(-1) = 1 + a.$$

$$y(0) = a.$$

$$y(2) = 4 + a.$$

- Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng a đạt được khi $x = 0$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Dùng Casio 580Vnx

Chọn $a=2$

$$f(x) = x^2 + 2$$

Phạm vi bảng
Đầu : -1
Kthúc : 2
Bước : 0.1

M	√	f(x)
10	-0.1	2.01
11	0	2.00
12	0.1	2.01
13	0.2	2.04

2

Câu 2: Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn

$[1; 2]$ bằng 1

- Ⓐ. $m = 1$ Ⓑ. $m = -2$ Ⓒ. $m = 2$ Ⓓ. Không có giá trị m .

Lời giải

⇒ Chọn B

- Ta có $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2}$

- Nếu $m < 3$: $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; 2)$

$$\Rightarrow \min_{[1;2]} f(x) = f(1) = 1.$$

- Vậy $\min_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận)

- Nếu $m > 3$: $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$

$$\Rightarrow \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = 1.$$

- Vậy $\min_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{3+m}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại)

PP nhanh trắc nghiệm

- Dùng table
- Thử giá trị m từ đáp án
- Thử $m = 1$

$$f(x) = \frac{2x+1-1}{x+1}$$

M	√	f(x)
1	1	1.1111
2	1.25	1.1111
3	1.5	1.2
4	1.75	1.2727

1

- Các giá trị m còn lại không thỏa

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + m^2 + 1x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A). $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. (B). $2m_0 - 1 < 0$.
(C). $6m_0 - m_0^2 < 0$. (D). $2m_0 + 1 < 0$.

Câu 2: Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B = \frac{13}{2}$.

- (A). $m=1; m=-2$. (B). $m=-2$. (C). $m=\pm 2$. (D). $m=-1; m=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;0]$ bằng 2, với m là tham số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). $m=-3$. (B). $m=4$. (C). $m=2$. (D). $m=3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x}$ thỏa $\min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = 8$, với m là tham số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). $m > 4$. (B). $0 < m \leq 2$. (C). $2 < m \leq 4$. (D). $m \leq 0$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[0;5]$ bằng 5 khi m là

- (A). 6. (B). 10. (C). 7. (D). 5.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$, với m là tham số. Giá trị lớn nhất của m để $\min_{x \in [0;3]} f(x) = -2$ là

- (A). $m=5$. (B). $m=6$. (C). $m=4$. (D). $m=3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m .

- (A). $m=-6$. (B). $m=-3$. (C). $m=-4$. (D). $m=-5$.

Câu 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{mx-1}{2x+m}$ trên đoạn $[3;5]$ bằng 2 khi và chỉ khi:

- (A). $m=7$. (B). $m \in \{7;13\}$. (C). $m \in \emptyset$. (D). $m=13$.

Câu 9: Tìm m để hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 2021.

- (A). $m=2022$. (B). $m=2020$. (C). $m=2018$. (D). $m=2017$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên $[2;4]$ bằng 2.

- (A). $m=0$. (B). $m=-2$. (C). $m=2$. (D). $m=-4$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.C	5.A	6.C	7.C	8.A	9.B	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng 7. Ứng dụng GTLN-GTNN vào phương trình, bất pt chứa tham số**①. Tìm đk của tham số để phương trình $f(x, m) = 0$ có nghiệm $x \in K$?**

- Chuyển trạng thái tương giao: $g(x) = h(m), x \in I$.
- Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên I .
- Ycbt $\Leftrightarrow x \in E$ (Miền giá trị của $g(x)$ trên I).

☞ **Đặc biệt:** Phương trình $g(x) = h(m)$ có nghiệm $x \in [a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} f(x) \leq h(m) \leq \max_{[a; b]} f(x)$

②. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình $f(x, m) \geq 0$ có nghiệm (nghiệm đúng với mọi) $x \in K$?

- Biến đổi bpt về dạng: $g(x) \geq h(m)$ (1), $(g(x) \leq h(m), g(x) > h(m), g(x) < h(m))$, $x \in I$.
- Bất pt (1) có nghiệm $x \in I \Leftrightarrow \max_I f(x) \geq h(m)$.
- Bất pt (1) nghiệm đúng với mọi $x \in I \Leftrightarrow \min_I f(x) \geq h(m)$.

③. Casio: Table: Cô lập m**🔗 A - Bài tập minh họa:****Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

- (A). Không có m . (B). $m \in \{4; 0\}$. (C). $m \in \{-4; 0\}$. (D). $m = 0$.

Lời giải☞ **Chọn B**

- Ta có $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$.
- Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$:
- TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			0		-4	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m = 0$ hoặc $m = -4$.
- Vậy $m \in \{-4; 0\}$.

🔗 PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** Cô lập m
- Tìm giá trị cực đại và cực tiểu.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3; 4]$?

- (A). $\frac{-51}{4} \leq m \leq \frac{19}{4}$. (B). $\frac{-51}{4} < m < \frac{19}{4}$. (C). $-51 < m < 19$. (D). $-51 \leq m \leq 19$.

Lời giải**🔗 PP nhanh trắc nghiệm**

➡ Chọn B

- Ta có $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = 4m$.
- Đặt $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.
- Ta có $f(x)$ liên tục trên $[-3; 4]$.

$$f'(x) = -3x^2 + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(-3) = 19, f(4) = -51, f(-1) = -1, f(1) = 3.$$

- Suy ra $\max_{[-3;4]} f(x) = 19$ khi $x = -3$. $\min_{[-3;4]} f(x) = -51$ khi $x = 4$.

• Phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3; 4]$ khi

$$\min_{[-3;4]} f(x) \leq 4m \leq \max_{[-3;4]} f(x) \Leftrightarrow \frac{-51}{4} \leq m \leq \frac{19}{4}.$$

- **Casio:** Cô lập m , dùng table
- Tìm giá lớn nhất và nhỏ nhất trên $[-3; 4]$

Câu 3: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

(A). 10.

(B). 6.

(C). 4.

(D). 2.

Lời giải

➡ Chọn C

- Ta có: $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ (*) điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

- Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2; 2]$.

- Có $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in [-2; 2]$$

- Hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ liên tục trên $[-2; 2]$; có đạo hàm trên $(-2; 2)$.

- $f(-2) = -2$; $f(2) = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Suy ra

$$\min_{[-2;2]} f(x) = -2; \max_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}.$$

- Vậy phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -2 \leq \frac{m}{2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4\sqrt{2}.$$

- Mặt khác m nguyên âm nên $S = \{-4; -3; -2; -1\}$

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** Cô lập m , dùng table
- Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất trên $[-2; 2]$

B - Bài tập rèn luyện:**Câu 1:** Tìm m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có nghiệm $x \in [0; 2]$?

- (A). $m \in (-\infty; -2]$. (B). $[-2; 2]$. (C). $[2; +\infty)$. (D). Đáp án khác.

Câu 2: Tìm m để phương trình $-2x^3 + 3x^2 + 2m = 0$ có nghiệm $x \in [1; +\infty)$?

- (A). $m \geq -\frac{1}{2}$. (B). $m \leq \frac{1}{2}$. (C). $m \leq 1$. (D). $m \geq -1$

Câu 3: Biết $m \in [a; b]$ thì phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 0]$. Tính $T = b - a$?

- (A). 1. (B). 8. (C). 9. (D). 10.

Câu 4: Tìm m để bất phương trình $2x - 1 \geq m(x - 1)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 0]$?

- (A). $m \leq 1$. (B). $m \leq \frac{1}{2}$. (C). $m \geq \frac{2}{3}$. (D). $m \geq \frac{3}{2}$

Câu 5: Tìm m để bất phương trình $x^2 - 5mx + 9 \geq 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$?

- (A). $m \leq 2$. (B). $m \leq \frac{6}{5}$. (C). $m \geq 2$. (D). $m \geq \frac{6}{5}$

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x^3 + 5x + 7 \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-5; 0]$?

- (A). $m \geq 7$. (B). $m \geq -143$. (C). $m \leq -143$. (D). $m \leq 7$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\frac{2x+1}{x-1} \geq m$ có nghiệm $[-2; 0]$?

- (A). $m \leq 1$. (B). $m \leq \frac{5}{3}$. (C). $m \geq -1$. (D). $m \geq -\frac{5}{3}$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^4 + 2x^2 - 1 = 2m$ có nghiệm $x \in [1; +\infty)$?

- (A). $m \geq 1$. (B). $m \geq 0$. (C). $m \leq 2$. (D). Đáp án khác.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $2x^4 - 4x^2 - 10 \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; -1]$?

- (A). $m \leq -12$. (B). $m \leq 12$. (C). $m \leq -8$. (D). $m \in \emptyset$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 3 = m$ có nghiệm?

- (A). $m \geq 5$. (B). $m \leq 5$. (C). $m \leq 3 + \sqrt{5}$. (D). $m \geq 0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\sqrt{5 - 4x} + 1 \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$?

- (A). $m \geq 4$. (B). $m \geq 2$. (C). $m \leq 3$. (D). $m \geq 1 + \sqrt{5}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\sqrt{4 - x^2} + 2018 < m$ có nghiệm?

- (A). $m > 2018$. (B). $m > 2020$. (C). $m < 2021$. (D). $m < 2022$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.D	5.C	6.A	7.A	8.A	9.A	10.A	11.A	12.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

✧ Bài 4: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

☒ Dạng ①. Tìm tiệm cận bằng định nghĩa, bảng biến thiên hoặc đồ thị.

① _ Định nghĩa:

♦. Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn 1 trong các ĐK: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0$ được gọi là **TCN**.

♦. Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn 1 trong các ĐK: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0$ được gọi là **TCĐ**.

② _ Dựa vào bảng biến thiên hay đồ thị suy ra tiệm cận:

- ♦ _ Nếu $x \rightarrow \pm\infty$ mà $y \rightarrow y_0$ (một số) thì $y = y_0$ là TCN.
- ♦ _ Nếu $x \rightarrow x_0$ (một số) mà $y \rightarrow \pm\infty$ thì $x = x_0$ là TCĐ.

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A). Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- (B). Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
- (C). Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
- (D). Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lời giải

👉 Chọn C

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ tức trục hoành là TCN.

👉 PP nhanh trắc nghiệm

- Sử dụng ĐN, khi $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} y = \pm\infty \end{cases}$ mà $x \rightarrow \pm\infty$ là TCN.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	1	3	2	$-\infty$	-1

Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- (A). Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang.
- (B). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$.
- (C). Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.
- (D). Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 1$ nên $y=1$ là TCN.
- Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -1$ nên $y=-1$ là TCN.

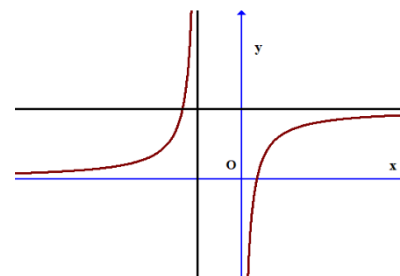
🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát BBT khi $x \rightarrow x_0^+$ hay $x \rightarrow x_0^-$ để suy ra tiệm cận.

Câu 3: Cho đồ thị một hàm số có hình vẽ như hình dưới đây.

Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 4. (B). Không có tiệm cận.
- (C). 2. (D). 3



Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Đồ thị hàm số có 2 TCN là $y=0$; $y=b$ và 2 TCD là $x=a$.

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Quan sát nhanh từ đồ thị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'			$+$		
y			$+\infty$	1	0

- (A). 1 (B). 3 (C). 2 (D). 4

Lời giải

⇒ Chọn B

- Dựa vào bảng biến thiên ta có:

+ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát nhanh từ BBT, sử dụng định nghĩa dễ thấy đồ thị có 2 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang.

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$. Số tiệm cận ngang của (C) là

- (A). 0. (B). 2. (C). 1. (D). 3.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- (A). Đồ thị hàm số không có tiệm cận. (B). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
(C). Đồ thị hàm số có hai tiệm cận. (D). Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y		3		2	

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A). Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.
(B). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.
(C). Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
(D). Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bảng dưới đây

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	-1	$-\infty$	$+\infty$
			1

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- (A). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
 (B). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
 (C). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
 (D). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

Đường biến thiên: Từ $+\infty$ xuống -1 (tiệm cận ngang), từ -1 lên 2 (đỉnh), từ 2 xuống $-\infty$ (tiệm cận ngang).

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 0. (B). 1. (C). 2. (D). 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

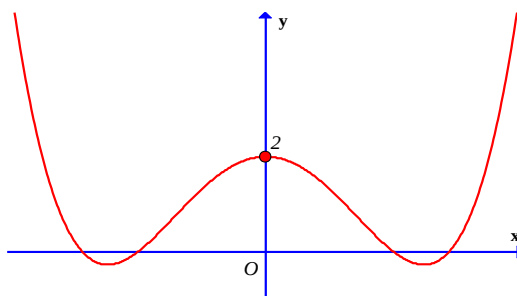
x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
y'		-		+	0	+		-
y	$+\infty$					2		$-\infty$

Đường biến thiên: Từ $+\infty$ xuống -3 (điểm cực tiểu), từ -3 lên 2 (điểm cực đại), từ 2 xuống -4 (điểm cực tiểu).

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

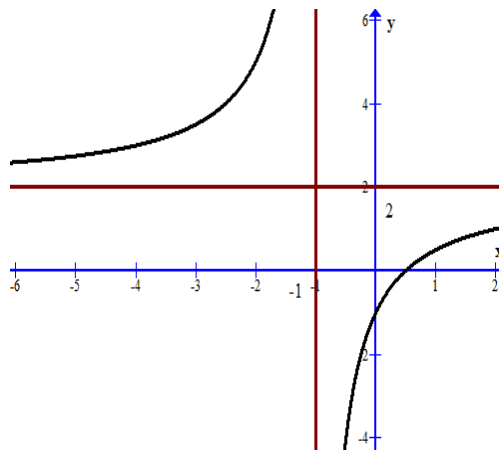
- (A). Hàm số có hai điểm cực trị.
 (B). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
 (C). Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
 (D). Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



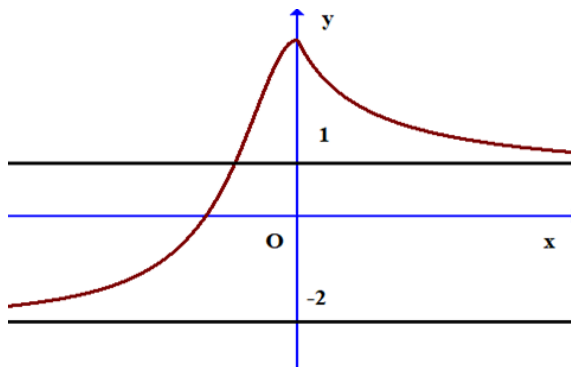
- (A). 0. (B). 1. (C). 3. (D). 4.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Chọn khẳng định **sai**?



- (A). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$. (B). Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
 (C). Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận. (D). Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là?



- (A). $y = 1$ và $y = -2$. (B). $y = -1$ và $y = -2$.
 (C). $y = 1$ và $y = 2$. (D). $y = 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-5	1	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- (A). 4. (B). 2. (C). 3. (D). 1

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.C	5.B	6.B	7.A	8.C	9.A	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng ②. Tìm số tiệm cận của những hàm số tưởng mình thường gặp.

⊗ - Phương pháp:

① Đồ thị hàm đa thức không có tiệm cận.

② Hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$)

☞ Đồ thị hàm số luôn có **1 TCN** là $y = \frac{a}{c}$ và **1 TCD** $x = -\frac{d}{c}$.

③ Tìm tiệm cận ngang của hàm phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

- ♦ Nếu bậc tử bé hơn bậc mẫu có TCN là $y = 0$.
- ♦ Nếu bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu thì đồ thị có TCN.
- ♦ Nếu bậc của tử $>$ bậc của mẫu hoặc có tập xác định là 1 khoảng hữu hạn $(a; b)$ hoặc $[a; b]$ thì không có TCN.

④ Tìm tiệm cận đứng của hàm phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

☞ Hàm phân thức mà mẫu có nghiệm $x = x_0$ nhưng không là nghiệm của tử thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_0$ (với đk hàm số xác định trên khoảng $K \setminus \{x_0\}$; $x_0 \in K$).

①. Tìm nghiệm mẫu $g(x) = 0$.

- ♦ Mẫu $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có **TCD**.
- ♦ Mẫu $g(x) = 0$ có nghiệm x_0 .

②. Thay x_0 vào tử, nếu $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là **TCD**.

③. Thay x_0 vào tử, nếu $f(x_0) = 0$ (tức là x_0 là nghiệm của cả tử và mẫu thì ta tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (dùng máy tính Casio để tính giới hạn).

- ♦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là **TCD**.
- ♦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ **không** là **TCD**.

🔥A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

(A). $x = -2$ và $y = -3$.

(B). $x = -2$ và $y = 1$.

(C). $x = -2$ và $y = 3$.

(D). $x = 2$ và $y = 1$.

Lời giải

⇒ Chọn A

- TCD $x = \frac{-2}{1} = -2$; TCN $y = \frac{-3}{1} = -3$.

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- Dễ thấy $x = -2$ và $y = -3$.
- ♦ TCD: nghiệm mẫu
- ♦ TCN: Hệ số trước x chia nhau

Câu 2: Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-3x-2}$ bằng

(A). 3.

(B). 2.

(C). 1.

(D). 0.

Lời giải

⇒ Chọn B

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = -1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = +\infty$
- Suy ra $x = 2$ là TCD.

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- Vì bậc tử bé hơn bậc mẫu có TCN là $y = 0$.
- $\begin{cases} x^2-3x-2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; x=-1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=2$.
- Suy ra đồ thị hàm số có 1 TCD $x = 2$.

Câu 3: Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận đứng?

(A). $y = -\frac{1}{x}$.

(B). $y = \frac{1}{x^2+2x+1}$.

(C). $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$.

(D). $y = \frac{3x-1}{x^2-1}$.

Lời giải

⇒ Chọn C

- Mẫu có nghiệm $x = -2$ nhưng nó không phải giá trị xác định của hàm số nên đồ thị hàm số không có TCD.

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- (A). TCD $x = 0$.
- (B). TCD $x = -1$.
- (D). TCD $x = \pm 1$.
- ✎ Có thể dùng Casio kiểm tra.

Câu 4: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

(A). 3.

(B). 0.

(C). 2.

(D). 1.

Lời giải

⇒ Chọn C

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus -1; 0$.

• Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = -\infty$.

- Do đó đường $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

• Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$.

- Do đó đường $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng là đường $x = -1$

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Nghiệm mẫu

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1.$$

- Thay nghiệm mẫu lên tử:

$x = 0$ là nghiệm của phương trình $\sqrt{x+4}-2=0$. Nên đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng là $x = -1$.

- Có thể dùng Casio kiểm tra nhanh.

🔥 B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$ là

- (A). $x = 2$. (B). $x = -3$. (C). $y = -1$. (D). $y = -3$.

Câu 2: Đường thẳng $x=3$, $y=2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- (A). $y = \frac{2x-3}{x+3}$. (B). $y = \frac{x-3}{x+3}$. (C). $y = \frac{3x-1}{x-3}$. (D). $y = \frac{2x-3}{x-3}$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- (A). $x = -2$ và $y = -3$. (B). $x = -2$ và $y = 1$.
(C). $x = -2$ và $y = 3$. (D). $x = 2$ và $y = 1$.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- (A). $y = x - \sqrt{x^2+1}$. (B). $y = \frac{x-1}{2x+1}$. (C). $y = x + 2018$. (D). $y = \frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Câu 5: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{-x+3}$ có phương trình là

- (A). $y = 0$. (B). $y = -2$. (C). $x = 3$. (D). $x = -2$.

Câu 6: Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.

- (A). $(2;1)$. (B). $(-2;2)$. (C). $(-2;-2)$. (D). $(-2;1)$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào sau đây không có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- (A). $y = \log_2 x$. (B). $y = \frac{3x-2}{x-1}$. (C). $y = \frac{x^2-2x}{x-2}$. (D). $\frac{1}{x^2+1}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A). Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.
 (B). Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$.
 (C). Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.
 (D). Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 9: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

- (A). 4. (B). 1. (C). 3. (D). 2.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- (A). 0. (B). 1. (C). 3. (D). 2.

Câu 11: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là

- (A). 3. (B). 0. (C). 2. (D). 1.

Câu 12: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}$.

- (A). 4. (B). 2. (C). 1. (D). 3.

Lời giải

Câu 13: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}$ là

- (A). 0. (B). 3. (C). 1. (D). 2.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 0. (B). 3. (C). 1. (D). 2.

Câu 15: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ là

- (A). 2. (B). 1. (C). 3. (D). 4.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- (A). 3 (B). 1 (C). 0 (D). 2

Câu 17: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A). 0. (B). 1. (C). 2. (D). 3.

Câu 18: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

(A). 3.

(B). 4.

(C). 2.

(D). 1.

Câu 19: Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-3x-2}$ là

(A). 1.

(B). 2.

(C). 4.

(D). 3.

Câu 20: Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là

(A). 3.

(B). 1.

(C). 2.

(D). 0.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A	4.B	5.A	6.D	7.C	8.A	9.D	10.B
11.D	12.D	13.C	14.C	15.A	16.A	17.C	18.C	19.D	20.B

☒ **Dạng ③.** Tìm giá trị của tham số để đồ thị hàm số có số tiệm cận thỏa điều kiện

⊗ - Phương pháp:

①. Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận, các tính chất về tiệm cận của hàm số thường gặp và các kiến thức liên quan để giải quyết bài toán.

②. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) có tâm đối xứng là giao điểm của 2 tiệm cận.

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A(3;2)$.

(A). $m = -2$ (B). $m = 2$.(C). $m = 3$.(D). $m = -3$.

Lời giải

👉 Chọn D

• Vì $ad-bc = m^2+1 \neq 0$ nên có TCD $x = -m$.

$$A(3;2) \in x = -m \Rightarrow m = -3.$$

👉 PP nhanh trắc nghiệm

• Thay $x=3$ vào mẫu suy ra $m = -3$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

(A). $m > 1$ (B). $m < 1$.(C). $m \geq 1$.(D). $m \leq 1$.

Lời giải

👉 Chọn A

• Đths có TCN $y=0$.

• Đths không có TCD x^2-2x+m vô nghiệm

PP nhanh trắc nghiệm

• Đồ thị hàm số không có TCD khi mẫu vô nghiệm.

• Casio thử m để PT $x^2-2x+m=0$ vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

- (A). Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài (B). $m < 0$
 (C). $m = 0$ (D). $m > 0$

☞ Chọn D

Xét các trường hợp sau:

• Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x + 1$ nên không có tiệm cận ngang.

• Với $m < 0$:

hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là

$$D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}} \right)$$

suy ra không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

• Với $m > 0$:

Ta có:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

• Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là: $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

☞ PP nhanh trắc nghiệm

- Loại ngược bằng cách thay nhanh đáp án vào mẫu số để xác định 2 tiệm cận ngang.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

- (A). 8. (B). 6. (C). 7. (D). Vô số.

Lời giải

Chọn B

• Điều kiện: $mx^2 - 8x + 2 > 0$.

☞ PP nhanh trắc nghiệm

- Đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang khi $m > 0$.

• Nhận thấy đồ thị hàm số đã cho có đúng bốn đường tiệm cận khi đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng.

• Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - 2m > 0 \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq 6 \\ m < 8 \end{cases}$$

$y = \frac{x-1}{|x|\sqrt{m - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2}}}$ nên đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang khi $m > 0$.

• Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng bốn đường tiệm cận khi đồ thị có đúng hai đường tiệm cận

ngang và hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 8 \\ m \neq 6 \end{cases}$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên

$$m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$$

• Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - 2m > 0 \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq 6 \\ m < 8 \end{cases}$$

• Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$

🔴B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của (C) là

- (A). $I(-2; 3)$. (B). $I(1; 3)$. (C). $I(3; -2)$. (D). $I(3; 1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tọa độ tâm đối xứng I của (C) là

- (A). $I(2; 2)$. (B). $I(-1; 2)$. (C). $I(2; -1)$. (D). $I(1; 2)$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-9}{x+m}$ có tiệm cận đứng

- (A). $m \neq -3$. (B). $m \neq 3$. (C). $m = 3$. (D). $m = -3$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-8}{x+2}$ có tiệm cận đứng

- (A). $m = 4$. (B). $m \neq -4$. (C). $m = -4$. (D). $m \neq 4$.

Câu 5: Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{4-2x}$ nhận đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang

- (A). $m = 4$. (B). $m \neq -4$. (C). $m = -2$. (D). $m = 2$.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{m-2x}$ nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng

- (A). $m = 3$. (B). $m = -3$. (C). $m = -2$. (D). $m = 2$.

Câu 7: Tìm tất các các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung

- (A). $m < 0$. (B). $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$. (C). $m > 0$. (D). $m > 0$ và $m \neq -\frac{5}{4}$.

Câu 8: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A(2;-3)$.

- (A). $m = -2$ (B). $m = 2$. (C). $m = 3$. (D). $m = -3$.

Câu 9: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{(1-m)x-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(2;-1)$.

- (A). $m = -4$ (B). $m = 2$. (C). $m = 3$. (D). $m = -3$.

Câu 10: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-m}$ có đường tiệm cận đứng cắt đường thẳng $d: y = -x+1$ tại điểm $A(1;0)$

- (A). $m = -4$. (B). $m = -2$. (C). $m = 3$. (D). $m = 2$.

Câu 11: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$.
Hiệu $a - 2b$ có giá trị là

- (A). 4. (B). 0. (C). 1. (D). 5.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

- (A). $2x + y = 0$. (B). $y = 2x$. (C). $x - 2y = 0$. (D). $x + 2y = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính giá trị biểu thức $P = m + n$.

- (A). $P = 2$. (B). $P = -1$. (C). $P = 0$. (D). $P = 3$.

Câu 14: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$, (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

- (A). -6. (B). 9. (C). 6. (D). 8.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

- (A). $m > 4$ (B). $m < 4$. (C). $m \geq 4$. (D). $m \leq 4$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$ có đường

tiệm cận đứng.

Ⓐ. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Ⓑ. Không có m thỏa mãn.

Ⓒ. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Ⓓ. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận đứng

Ⓐ. $m < 0; m \neq -1$

Ⓑ. $m < 0$.

Ⓒ. $m > 0; m \neq 1$.

Ⓓ. $m < -1$.

Câu 18: Tính tổng S các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có 3 tiệm cận.

Ⓐ. $S = 6$.

Ⓑ. $S = 19$.

Ⓒ. $S = 3$.

Ⓓ. $S = 15$.

Câu 19: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Ⓐ. $m = 0$.

Ⓑ. $m = 1$.

Ⓒ. $m = -1$

Ⓓ. $m = \pm 1$.

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = x + 3 + \sqrt{x^2 + x + 1}$

Ⓐ. Có tiệm cận đứng $x = -3$.

Ⓑ. Có tiệm cận ngang $y = \frac{5}{2}$.

Ⓒ. Có tiệm cận ngang $y = -3$.

Ⓓ. Không có tiệm ngang.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.B	5.C	6.D	7.B	8.A	9.C	10.D
11.C	12.C	13.C	14.B	15.A	16.C	17.A	18.C	19.D	20.B

N Bài 5: ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

☒ Dạng ①. Nhận dạng hàm số bậc ba khi cho đồ thị hàm số.

☒ -Phương pháp: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

- Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$
- Chú ý điểm cực trị: $ac < 0$: có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung oy .
- Điểm uốn: bên phải trục oy : $ab < 0$; bên trái trục oy : $ab > 0$
- Các giao điểm đặc biệt với trục ox, oy .

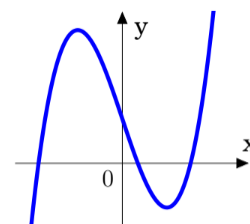
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$		$a > 0$	$a < 0$
①	• $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
②	• $y' = 0$ có nghiệm kép		
③	• $y' = 0$ vô nghiệm		

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây.

Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 - 3x + 1$. (B). $y = x^4 - x^2 + 3$.
 (C). $y = x^3 - 3x + 1$. (D). $y = x^2 - 3x + 1$.



Lời giải

⇒ Chọn C

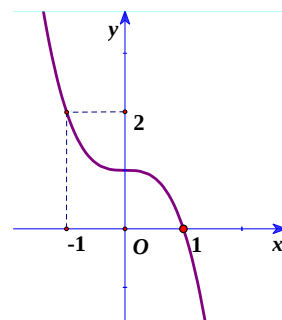
- Đồ thị hàm số đã cho là của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên phương án đúng là hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát nhanh hệ số a
- Nhìn dạng đồ thị

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

- (A). $y = -x^3 + 1$. (B). $y = -4x^3 + 1$.
 (C). $y = 3x^2 + 1$. (D). $y = -2x^3 + x^2$.



Lời giải

⇒ Chọn A

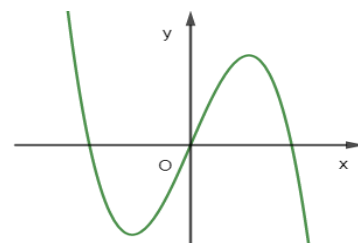
- Ta thấy đồ thị chứa $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;2)$ nên thay tọa độ các điểm này vào đáp án có kết luận đồ thị là của hàm số $y = -x^3 + 1$.

🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Nhìn dáng đồ thị bậc ba $a < 0$
- Chú ý các giao điểm đặc biệt

Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 + 3x$. (B). $y = x^4 - x^2 + 1$.
 (C). $y = -x^3 + 3x - 1$. (D). $y = x^3 - 3x$.



Lời giải

⇒ Chọn A

- Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra hàm bậc ba có hệ số $a < 0$. Loại đáp án B và D.
- Vì đồ thị đi qua gốc tọa độ nên loại đáp án C.

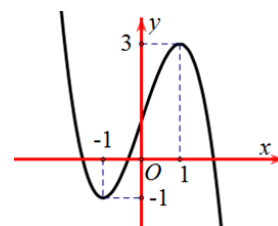
🔥 PP nhanh trắc nghiệm

- Nhìn dáng đồ thị bậc ba $a < 0$
- Chú ý đồ thị đi qua gốc tọa độ

🔥 B - Bài tập rèn luyện:

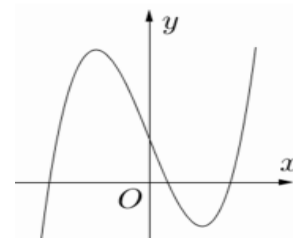
Câu 1: Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 - 3x + 1$. (B). $y = -x^3 + 3x + 1$.
 (C). $y = x^3 - 3x + 1$. (D). $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



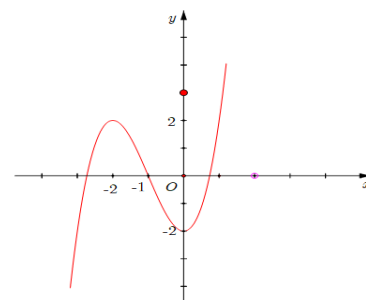
Câu 2: Đường cong trong hình bên là hình dạng đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 + 3x + 1$. (B). $y = x^4 - x^2 + 1$.
(C). $y = -x^2 + x - 1$. (D). $y = x^3 - 3x + 1$.



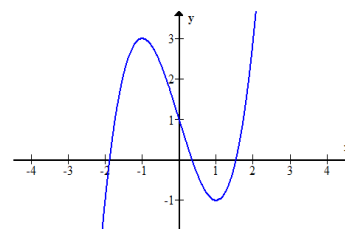
Câu 3: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. (B). $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
(C). $y = x^3 + 3x^2 - 2$. (D). $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.



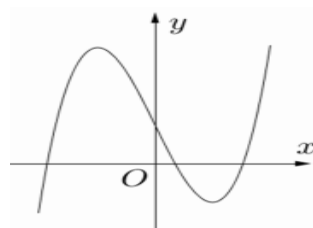
Câu 4: Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau

- (A). $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ (B). $y = x^3 - 3x - 1$
(C). $y = x^3 - 3x + 1$ (D). $y = -x^3 - 3x^2 - 1$



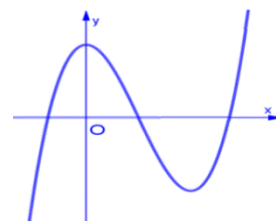
Câu 5: Đường cong trong hình bên là hình dạng đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = -x^3 + 3x + 1$. (B). $y = x^4 - x^2 + 1$.
(C). $y = -x^2 + x - 1$. (D). $y = x^3 - 3x + 1$.



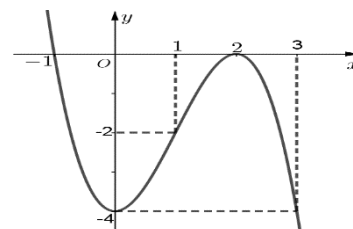
Câu 6: Đường cong ở hình vẽ bên dưới là của đồ thị hàm số nào?

- (A). $y = x^3 + 3x - 4$. (B). $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
(C). $y = -x^3 - 4$. (D). $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.



Câu 7: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

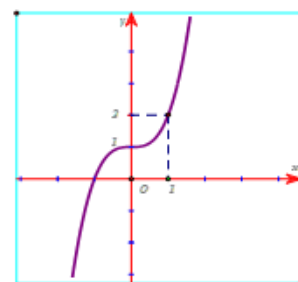
- (A). $y = x^3 - 3x^2 + 4$. (B). $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.
(C). $y = x^3 - 3x^2 - 4$. (D). $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Câu 8: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án

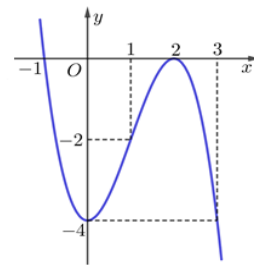
A, B, C, D dưới đây?

- (A). $y = 2x^3 + 1$. (B). $y = x^3 + x + 1$.
(C). $y = x^3 + 1$. (D). $y = -x^3 + 2x + 1$.

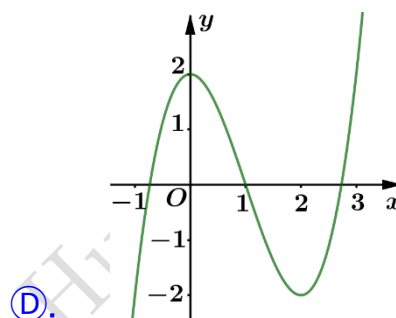
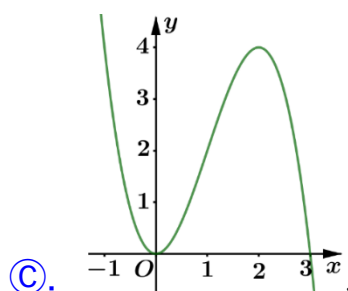
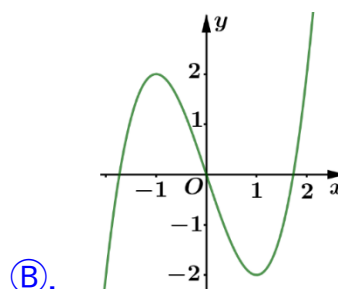
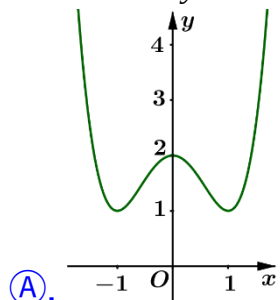


Câu 9: Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = x^3 - 3x^2 + 4$. (B). $y = -x^3 + 3x^2 - 4$
 (C). $y = x^3 - 3x^2 - 4$. (D). $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.



Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Đồ thị của hàm số là hình nào dưới đây?



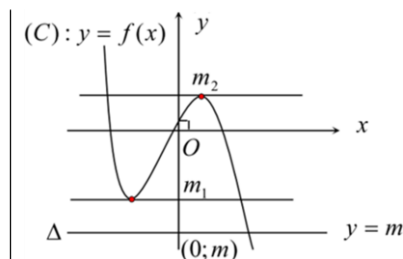
BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.C	4.C	5.D	6.B	7.D	8.C	9.B	10.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ Dạng ②. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị hàm số

⊗ - Phương pháp:

♦ Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ được quy về tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) và đường thẳng (d): $y = g(m)$.



♦ Có 2 cách biện luận số nghiệm của phương trình:

①. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng đồ thị (khi bài toán cho sẵn đồ thị): ta dựa vào sự tịnh tiến của đường thẳng (d): $y = g(m)$ theo hướng lên hoặc xuống trên trục tung.

②. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng bảng biến thiên (bài

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			7		1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- (A). 1. (B). 2. (C). 3. (D). 0.

Lời giải

⇒ **Chọn B**

- Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.
- Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm phân biệt.

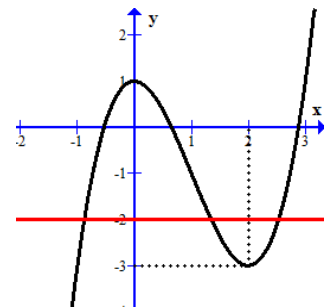
🔪 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Vẽ đường thẳng $y = 2$
- Quan sát thấy 3 giao điểm

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.

Hỏi phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A). Phương trình có đúng một nghiệm.
 (B). Phương trình có đúng hai nghiệm.
 (C). Phương trình không có nghiệm.
 (D). Phương trình có đúng ba nghiệm.



Lời giải

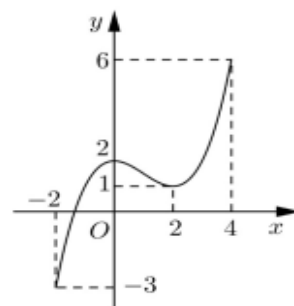
⇒ **Chọn B**

- Ta có phương trình $\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -2$.
- Số nghiệm phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -2$ và đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Từ đồ thị ta thấy có ba giao điểm. Vậy phương trình có ba nghiệm.

🔪 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Vẽ đường thẳng $y = -2$
- Quan sát thấy 3 giao điểm

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



(A). 1. (B). 0.

(C). 2. (D). 3.

Lời giải

⇒ **Chọn D**

- Ta có: $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$
- Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{4}{3}$.
- Xét trên đoạn $[-2; 4]$, đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm $y = f(x)$ tại ba điểm.
- Vậy phương trình $3f(x) - 4 = 0$ có ba nghiệm trên đoạn $[-2; 4]$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Vẽ đường thẳng $y = \frac{4}{3}$
- Quan sát thấy 3 giao điểm

Câu 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

(A). $m < -4$. (B). $m \in [-4; 0]$. (C). $m \in (-4; 0)$. (D). $m > 0$.

Lời giải

⇒ **Chọn C**

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-m$		$-m-4$		$+\infty$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Cô lập m :
 $x^3 - 3x^2 = m$
- **Casio** tìm giá trị cực đại và cực tiểu

- Yêu cầu bài toán thỏa khi $\begin{cases} -m > 0 \\ -m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 0.$

🔗B - Bài tập rèn luyện:

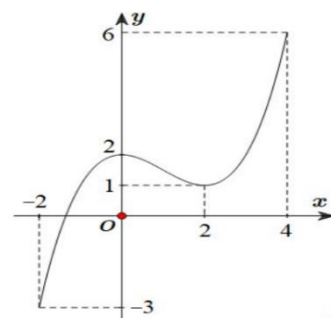
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2021$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3		-1		3		$-\infty$

- (A). 2. (B). 4. (C). 1. (D). 0.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- (A). 1. (B). 2.
(C). 3. (D). 0.



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

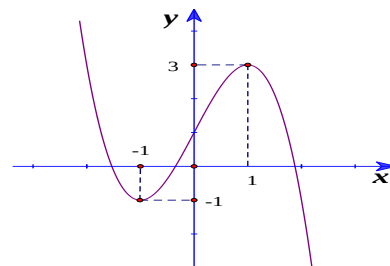
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- (A). 2. (B). 3. (C). 0. (D). 1.

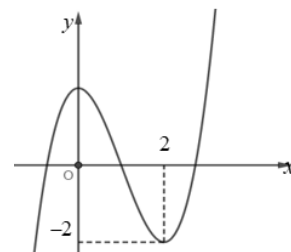
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là

- (A). 1. (B). 3.
(C). 0. (D). 2.



Câu 5: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) + 3 = 0$ là

- ☐ A. 3. ☐ B. 2.
☐ C. 1. ☐ D. 0.



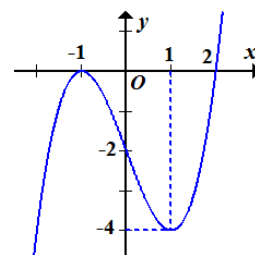
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt là

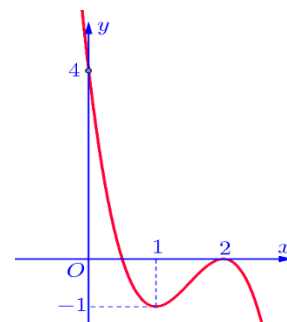
- ☐ A. $(4; +\infty)$. ☐ B. $(-\infty; -2)$. ☐ C. $[-2; 4]$. ☐ D. $(-2; 4)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 1 = 0$ bằng



- ☐ A. 3. ☐ B. 6.
☐ C. 4. ☐ D. 1.

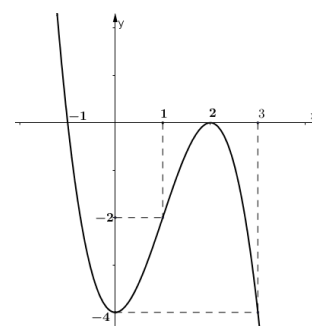
Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng



- ☐ A. 0. ☐ B. 1.
☐ C. 2. ☐ D. 3.

Câu 9: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hãy chọn câu trả lời đúng.

- ☐ A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$. ☐ B. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 4 \end{cases}$.
☐ C. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases}$. ☐ D. $m = 0$.



Câu 10: Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt:

- ☐ A. 4. ☐ B. 3. ☐ C. 2. ☐ D. 0.

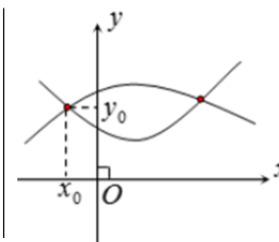
BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.B	5.A	6.D	7.C	8.B	9.A	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Dạng ③. Sự tương giao của 2 đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)**⊗-Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') ①. Lập phương trình hoành độ giao điểm của và : $f(x) = g(x), (1)$

②. Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

③. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị

 $y = f(x), y = g(x)$.**⊗- Casio:** Solve, table, giải phương trình cơ bản**👉A - Bài tập minh họa:****Câu 1:** Có bao nhiêu giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 3$ với trục Ox ?

(A). 2.

(B). 3.

(C). 0.

(D). 1

Lời giải**Lời giải****👉Chọn D**

- Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$		$+\infty$

- Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 3$ và trục Ox có 1 giao điểm.

👉PP nhanh trắc nghiệm

- Casio

Câu 2: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .(A). $y_0 = 0$.(B). $y_0 = 4$.(C). $y_0 = 2$.(D). $y_0 = -1$.**Lời giải****👉Chọn C**

- Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Suy ra tọa độ giao điểm là $(0; 2)$.

👉PP nhanh trắc nghiệm

- Casio

Câu 3: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, có đồ thị (C) và đường thẳng $(d) : y = x - 1$. Tìm số giao điểm của (C) và (d) .

- (A). 3. (B). 2. (C). 0. (D). 1.

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

- Phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên (C) và (d) có 3 giao điểm.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- **Casio**

👉 **B - Bài tập rèn luyện:**

Câu 1: Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = x + 2$ có tất cả bao nhiêu điểm chung.

- (A). 1. (B). 0. (C). 3. (D). 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và d là

- (A). 1. (B). 3. (C). 0. (D). 2.

Câu 3: Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$.

- (A). $x_B + y_B = -5$ (B). $x_B + y_B = -2$ (C). $x_B + y_B = 4$ (D). $x_B + y_B = 7$

Câu 4: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x+3)(x^2 + 3x + 2)$ với trục Ox là:

- (A). 0. (B). 3. (C). 1. (D). 2.

Câu 5: Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 3$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$ có hai điểm chung phân biệt A và B , biết điểm B có hoành độ âm. Tìm x_B .

- (A). $x_B = -1$. (B). $x_B = -5$. (C). $x_B = -2$. (D). $x_B = 0$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

(A). $m \in (-\infty; -4)$.

(B). $m \in (0; +\infty)$.

(C). $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

(D). $m \in (-4; 0)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-5x+6)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A). (C) không cắt trục hoành.

(B). (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.

(C). (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

(D). (C) cắt trục hoành tại 2 điểm.

Câu 8: Tìm tọa độ giao điểm I của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ với đường thẳng $y = -x + 2$.

(A). $I(2;1)$.

(B). $I(2;2)$.

(C). $I(1;2)$.

(D). $I(1;1)$.

Câu 9: Giả sử A và B là các giao điểm của đường cong $y = x^3 - 3x + 2$ và trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

(A). $6\sqrt{5}$.

(B). $4\sqrt{2}$.

(C). 3.

(D). $5\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Giao điểm của (C) và d lần lượt là $A(1;0)$, B và C . Khi đó độ dài BC là

(A). $BC = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

(B). $BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

(C). $BC = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

(D). $BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

(A). 0.

(B). 2.

(C). 1.

(D). 3.

Câu 12: Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$ có bao nhiêu điểm chung?

(A). 1.

(B). 3.

(C). 0.

(D). 2.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ luôn cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

(A). 2.

(B). 3.

(C). 7.

(D). 9.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

(A). $m > -2$.

(B). $m = -2$.

(C). $m > -3$.

(D). $m = -3$.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1(C_m)$. Với giá trị nào của tham số m thì đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 3$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt?

(A). $m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{9}; +\infty) \setminus \left\{ \frac{9}{8} \right\}$.

(B). $m \in (0; \frac{4}{9})$.

(C). $m \in (\frac{4}{9}; +\infty)$.

(D). Không có giá trị m thỏa mãn.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.B	5.A	6.D	7.D	8.D	9.C	10.B
11.B	12.A	13.C	14.C	15.A					

☒ Dạng ④. Xác định hệ số a, b, c, d từ đồ thị hàm số bậc 3.**⊗ - Phương pháp: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:**

↪ Hệ số a: Xác định dáng đi lên hay đi xuống của đồ thị

- Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$

↪ Tích số ab: Xác định vị trí điểm uốn

- Điểm uốn: bên phải trục oy : $ab < 0$; bên trái trục oy : $ab > 0$

↪ Tích số ac: Xác định vị trí hai điểm cực trị

- $ac < 0$: có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung oy .
- $ac > 0$: đồ thị hàm số không có cực trị
- $c = 0$: đồ thị có 1 cực trị nằm trên trục tung

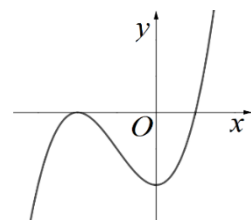
↪ Hệ số d: Xác định giao điểm với trục tung.

- $d > 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên gốc tọa độ O
- $d < 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới gốc tọa độ O
- $d = 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung trùng với gốc tọa độ O

↪ A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$. (B). $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
 (C). $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$. (D). $a < 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

**Lời giải****⇒ Chọn B**

• Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow a > 0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm

có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.

• Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 :

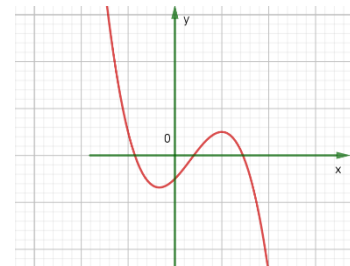
$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{3a} = 0 \Rightarrow c = 0.$$

• Vậy $a > 0; b > 0; c = 0; d < 0$.

↪ PP nhanh trắc nghiệm

- Đồ thị suy ra $a > 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.
- Điểm uốn bên trái oy : $ab > 0$
- $\Rightarrow b > 0$.
- Cực trị nằm trên trục tung $c = 0$

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng ?



- (A). $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. (B). $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
 (C). $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$. (D). $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

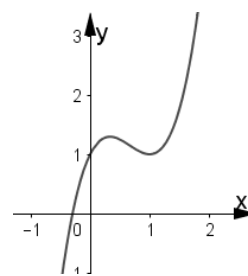
⇒ **Chọn D**

- Nhìn đồ thị ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d)$ nằm dưới trục hoành nên $d < 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu nên $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm trái dấu, mà $a < 0$ nên $c > 0$.

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Đồ thị suy ra $a < 0, d < 0$
- Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu $ac < 0 \Rightarrow c > 0$.
- Điểm uốn bên phải Oy: $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 1: **Câu 3:** Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng trong các mệnh đề sau:



- (A). $ad < 0, bc < 0$. (B). $ad > 0, bc > 0$.
 (C). $ad < 0, bc > 0$. (D). $ad > 0, bc < 0$.

Lời giải

⇒ **Chọn D**

- Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(0; d)$ nên $d > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow ad > 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_{CT} + x_{CD} = -\frac{2b}{3a}$$

- Vì hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho nằm ở góc phần tư thứ nhất.

$$\text{Do đó: } -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

- Ta có $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt nên

$$x_{CT} \cdot x_{CD} = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$$

- Suy ra: $bc < 0$

🔥 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Đồ thị suy ra $a > 0, d > 0$
- Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị cùng dấu $ac > 0 \Rightarrow c > 0$.
- Điểm uốn bên phải Oy: $ab < 0 \Rightarrow b < 0$. Suy ra $ad > 0, bc < 0$.

🔥 **B - Bài tập rèn luyện:**

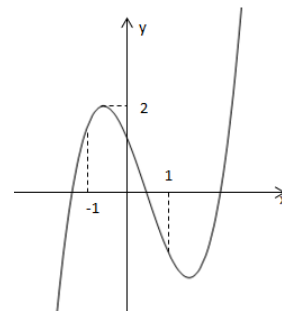
Câu 1: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A). $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

(B). $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

(C). $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(D). $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



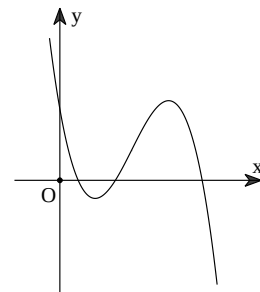
Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A). $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(B). $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(C). $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(D). $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



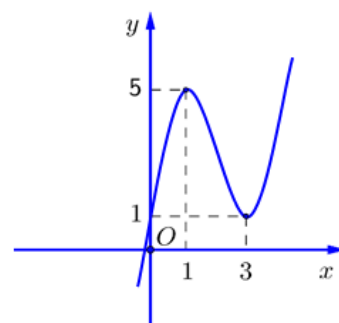
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A). $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

(B). $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(C). $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

(D). $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



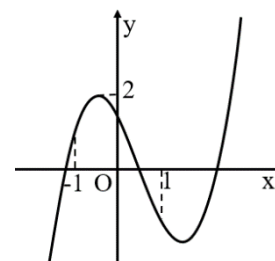
Câu 4: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới: Khẳng định nào là đúng?

(A). $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

(B). $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

(C). $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(D). $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



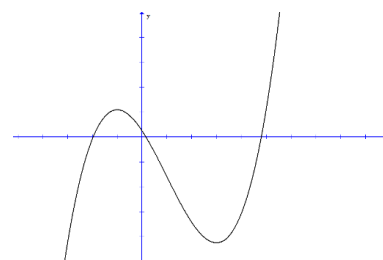
Câu 5: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A). $a, d > 0; b, c < 0$.

(B). $a, b, d > 0; c < 0$.

(C). $a, c, d > 0; b < 0$.

(D). $a, b, c < 0; d > 0$.



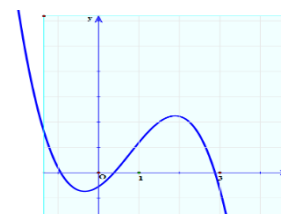
Câu 6: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị được biểu diễn như hình vẽ bên dưới. Nhận xét đúng về dấu của các hệ số là.

(A). $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

(B). $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

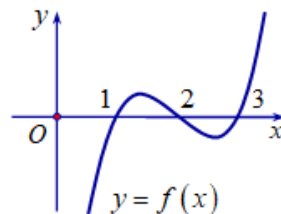
(C). $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

(D). $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



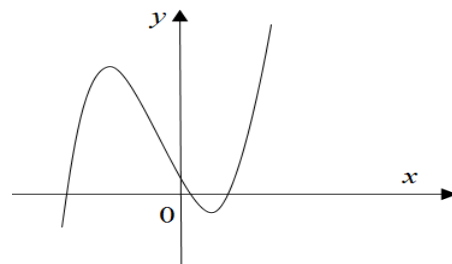
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A). $f(1,5) < 0 < f(2,5)$. (B). $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$.
 (C). $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$. (D). $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.



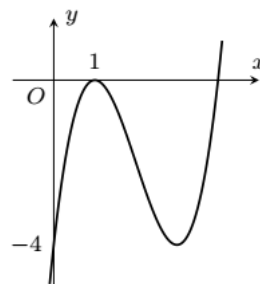
Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 (B). $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 (C). $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 (D). $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



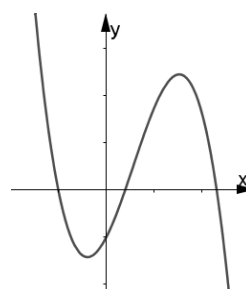
Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A). $a + b + c = -1$.
 (B). $a + c > 2b$.
 (C). $a + b^2 + c^3 = 11$.
 (D). $abc > 0$.



Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 (B). $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
 (C). $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
 (D). $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.C	4.D	5.A	6.B	7.D	8.B	9.B	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Hướng dẫn giải

Câu 1: TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Dựa vào đồ thị ta thấy
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$ loại A
- Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 0 $\Rightarrow d > 0$ loại B

$$\bullet \text{ Đồ thị có } \begin{cases} x_{CD} \in (-1; 0) \\ x_{CT} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = \frac{-2b}{3a} > 0 \\ x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases} \text{ (do } a > 0) \text{ loại C}$$

Câu 2: • Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Quan sát đồ thị ta thấy hàm số có hai điểm cực trị.

• Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$\bullet \text{ Theo định lí Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}.$$

• Quan sát đồ thị ta thấy:

• Đồ thị có nhánh ngoài cùng đi ra $-\infty$ nên $a < 0$.

$$\bullet \text{ Đồ thị có hai điểm cực trị nằm bên phải } Oy \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} \begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

• Vậy $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 3: Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 5 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Câu 4: • Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

• Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $0; d$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

• Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $x_1 < x_2$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

• Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

• Mà $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

• Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 5: Đồ thị có dạng trên thì ta có $a > 0$. Giao điểm của đồ thị với Oy nằm phía trên Ox nên $d > 0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow b < 0; x_1 x_2 < 0 \Rightarrow c < 0$.

Câu 6: • Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ nên $a < 0$.

• Giao điểm $(0; d)$ của đồ thị với trục tung nằm phía trên Ox nên $d > 0$.

•Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

•Từ đồ thị suy ra phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm là số

dương. Tức là:
$$\begin{cases} \frac{c}{3a} < 0 \\ \frac{-2b}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ ab < 0 \end{cases}.$$

•Vì $a < 0$ nên $b > 0, c > 0$.

Câu 7:

•Dựa vào đồ thị ta thấy $f(1,5) > 0$ và $f(2,5) < 0$.

Câu 8:

• Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

+ Nhìn dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

+ Giao điểm của đồ thị và oy tại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.

+ Hai điểm cực trị của hàm số trái dấu nên pt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow 3ac < 0 \Rightarrow c < 0$.

+ Ta có $\frac{-b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 9:

• Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b.$$

•Ta có đồ thị của hàm số qua điểm $(0, -4) \Rightarrow c = -4$.

•Đồ thị của hàm số qua điểm $(1, 0) \Rightarrow 0 = 1 + a + b - 4 \Leftrightarrow a + b = 3$ (1).

•Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$ (2).

•Từ (1) và (2) suy ra $a = -6, b = 9$.

•Do đó $a + c = -10, 2b = 18$.

Câu 10:

• Cho $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$. Loại phương án A

• Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.

• Mà $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• Đồ thị có hai cực trị trái dấu $\Rightarrow 3a.c < 0 \Rightarrow c > 0$. Loại phương án D

• Mặt khác $x_{CT} < x_{CD} \Rightarrow x_{CT} + x_{CD} > 0 \Rightarrow \frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

W Bài 6: ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

☒ Dạng ①. Nhận dạng hàm số trùng phương khi cho đồ thị hàm số.

☒ -Phương pháp: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

- Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$.
- Chú ý điểm cực trị: $ab < 0$: hàm số có 3 điểm cực trị; $ab \geq 0$: hàm số có 1 điểm cực trị
- Các giao điểm đặc biệt với trục ox, oy .
 - ◆ $c > 0$: giao điểm trục tung nằm trên 0
 - ◆ $c < 0$: giao điểm trục tung nằm dưới 0
 - ◆ $c = 0$: giao điểm trục trùng với 0

$y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)	$a > 0$	$a < 0$
①. $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nếu $ab < 0$		
②. $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm nếu $ab \geq 0$		

👉 A - Bài tập minh họa:

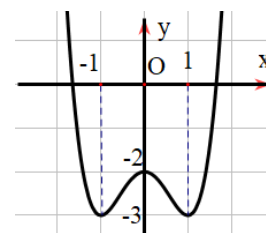
Câu 1: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

Ⓐ. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Ⓑ. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

Ⓒ. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Ⓓ. $y = x^3 - 2x^2 - 2$.



Lời giải

☞ **Chọn B**

- Đồ thị trên là đồ thị của hàm trùng phương có hệ số a dương nên từ các phương án đã cho ta

PP nhanh trắc nghiệm

- Mắt nhanh nhìn dáng đồ thị với $a > 0$

suy ra đồ thị trên là đồ thị của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 - 2$$

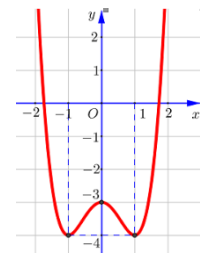
Câu 2: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

Ⓐ. $y = x^4 + 2x^2 - 3.$

Ⓑ. $y = x^4 - 3x^2 - 3.$

Ⓒ. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

Ⓓ. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3.$



Lời giải

⇒ **Chọn C**

• Đồ thị có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ **D** sai.

• Hàm số có các điểm cực trị là: $x = 0, x = \pm 1$

$\Rightarrow$ **A, B** sai.

PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh: 3 điểm cực trị với $a < 0$.

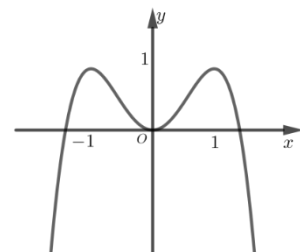
Câu 3: Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

Ⓐ. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

Ⓑ. $y = -x^4 + 2x^2.$

Ⓒ. $y = x^4 - 2x^2.$

Ⓓ. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$



Lời giải

⇒ **Chọn B**

• Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0, c = 0$

nên chỉ có đáp án B thỏa mãn.

PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh.

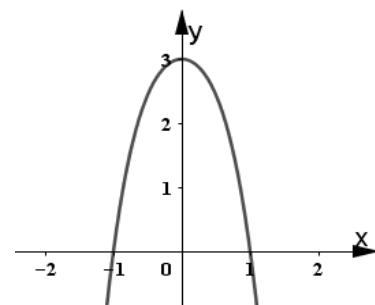
Câu 4: Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ. $y = -x^4 - 2x^2 + 3.$

Ⓑ. $y = x^4 + 2x^2 - 3.$

Ⓒ. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$

Ⓓ. $y = -x^2 + 3.$



Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

☛ Chọn A

- Từ đồ thị ta có nhận xét:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ loại phương án B

- Đồ thị giao với trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-1;0); (1;0)$ loại phương án C, D

- Mất nhanh: 1 cực trị với $a < 0$.

☛ B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = -2x^4 + 3x^2 - 5$. (B). $y = -x^4 + x^2 - 1$.
(C). $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. (D). $y = -x^4 + 3x^2 - 4$.

Câu 2: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

- (A). $y = \frac{x-2}{x+1}$. (B). $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
(C). $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. (D). $y = x^3 - 2x^2 - 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $y = f(x)$ là một trong bốn hàm được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Phương án nào trong các phương án dưới đây là đúng?

- (A). $f(x) = -x^4 + 2x^2$. (B). $f(x) = x^4 + 2x^2$.
(C). $f(x) = x^4 - 2x^2$. (D). $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.

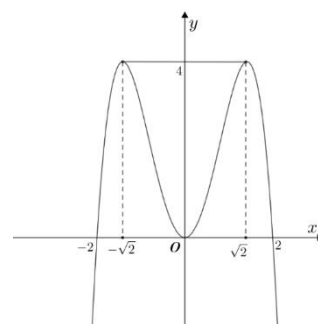
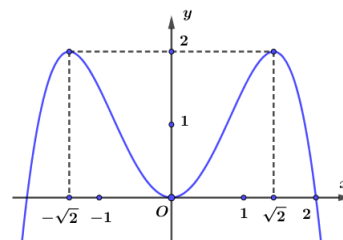
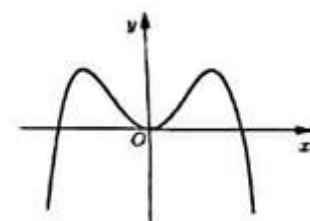
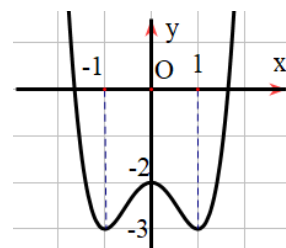
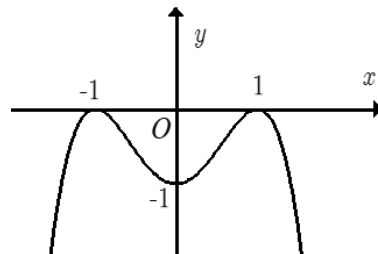
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A). Đồ thị (C) nhận Oy làm trục đối xứng.
(B). (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.
(C). Hàm số có 3 điểm cực trị.
(D). Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \pm\sqrt{2}$.

Câu 5: Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = -x^4 - 2x^2$. (B). $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.
(C). $y = -x^4 + 4x^2$. (D). $y = x^4 - 3x^2$.

Câu 6: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- (A). $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. (B). $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
 (C). $y = x^4 - 3x^2 + 1$. (D). $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 7: Đường cong ở hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = -x^4 + 4x^2 + 2$. (B). $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 (C). $y = x^4 - 4x^2 + 2$. (D). $y = x^4 + 4x^2 + 2$.

Câu 8: Đồ thị hình bên là của hàm số

- (A). $y = x^4 - 2x^2 + 2$. (B). $y = -x^4 + 2x^2$.
 (C). $y = x^4 + 2x^2$. (D). $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Câu 9: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong 4 hàm số sau:

- (A). $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 1$. (B). $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$.
 (C). $y = \frac{x^4}{4} - x^2 - 1$. (D). $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-3		-4		-4		$+\infty$

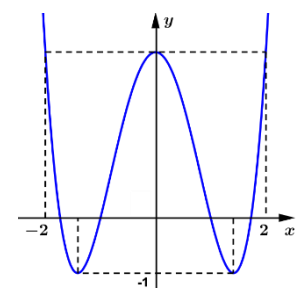
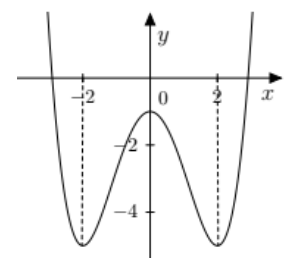
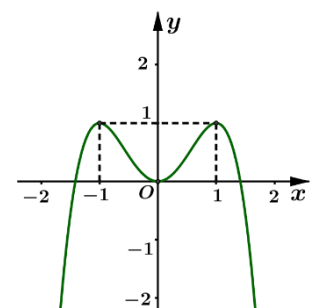
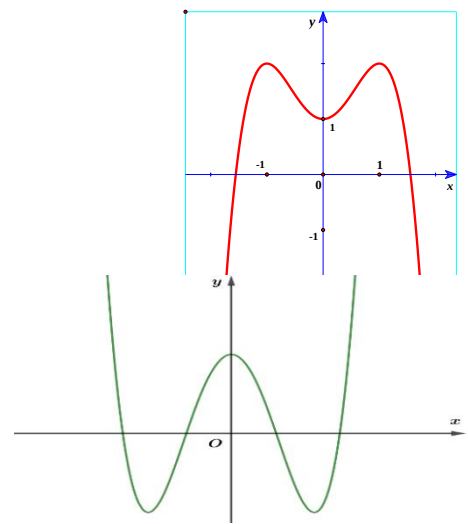
Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào sau đây?

- (A). $y = -x^4 + 2x^2 - 3$. (B). $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$.
 (C). $y = x^4 + 2x^2 - 3$. (D). $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

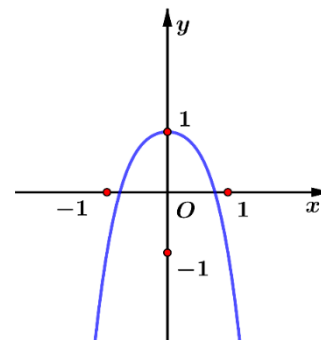
Câu 11: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

- (A). $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. (B). $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
 (C). $y = (x^2 - 2)^2 - 1$. (D). $y = (x^2 + 2)^2 - 1$.

Câu 12: Đồ thị hàm số trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



- Ⓐ. $y = x^4 + x^2 + 1$. Ⓑ. $y = -x^4 + x^2 + 1$.
 Ⓒ. $y = -x^4 - x^2 + 1$. Ⓓ. $y = x^4 - x^2 + 1$.



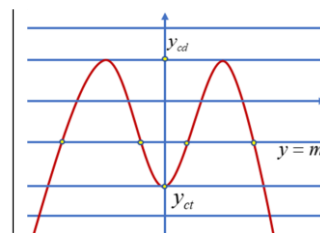
BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.A	7.C	8.B	9.A	10.D	11.C	12.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

⊠ Dạng ②. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị hàm số

⊗ - Phương pháp:

♦ Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ được quy về tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) và đường thẳng (d): $y = g(m)$.



♦ Có 2 cách biện luận số nghiệm của phương trình:

①. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng đồ thị (khi bài toán cho sẵn đồ thị): ta dựa vào sự tịnh tiến của đường thẳng (d): $y = g(m)$ theo hướng lên hoặc xuống trên trục tung.

②. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng bảng biến thiên (bài toán cho sẵn bảng biến thiên hoặc tự xây dựng)

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	3	1	5	$-\infty$

Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

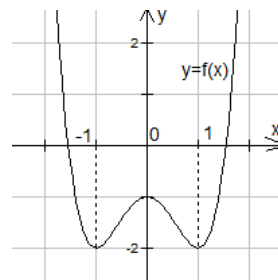
- Ⓐ. 4. Ⓑ. 2. Ⓒ. 3. Ⓓ. 0.

Lời giải

➡ Chọn B

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là



(A). 1.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 4.

Lời giải

➡ Chọn C

- Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là số giao điểm có hoành độ dương phân biệt của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\sqrt{3}$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ, đường thẳng $y = -\sqrt{3}$ song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; -\sqrt{3})$
- Suy ra phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 5 = 0$ là

(A). 4.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 0.

Lời giải

➡ Chọn A

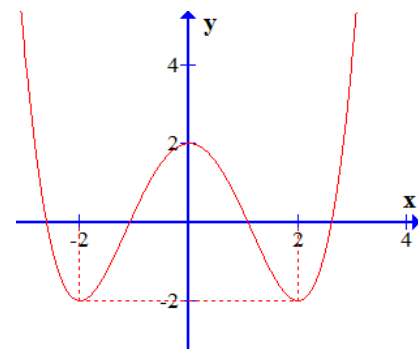
- $4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{4}$.
- Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = \frac{5}{4}$ có 4 nghiệm phân biệt.

PP nhanh trắc nghiệm

- Vẽ nhanh đường thẳng $y = 4$

PP nhanh trắc nghiệm

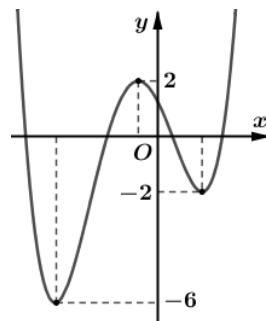
- Vẽ nhanh đường thẳng $y = -\sqrt{3}$



PP nhanh trắc nghiệm

- Vẽ nhanh đường thẳng $y = \frac{5}{4}$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có mấy nghiệm?



(A). 2.

(B). 3.

(C). 1.

(D). 4.

Lời giải

☛ **Chọn D**

- Ta có : $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.
- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại bốn điểm phân biệt.
- Vậy phương trình $f(x) - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

☛ **PP nhanh trắc nghiệm**

- Vẽ nhanh đường thẳng $y = 1$.

☛ **B - Bài tập rèn luyện:**

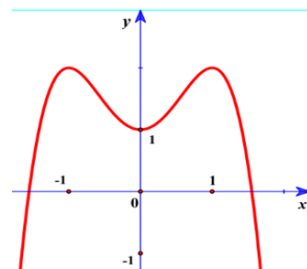
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau
Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A). 0.

(B). 2.

(C). 4.

(D). 1.



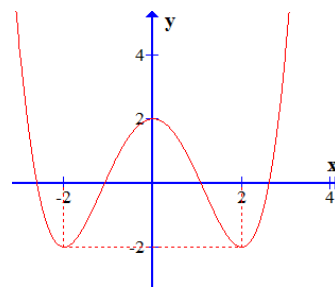
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây :Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 5 = 0$ là

(A). 4.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 0.



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

(A). $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$

(B). $-2 < m < -1$.

(C). $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$

(D). $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$

Câu 4: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

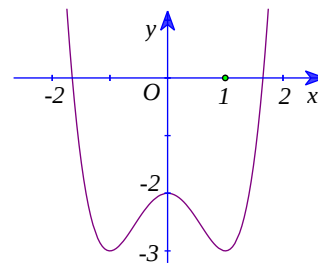
A. $-1; 3$.

B. $-3; 1$.

C. $2; 4$.

D. $-3; 0$.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm $y = x^4 - 2x^2 - 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.



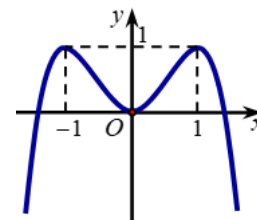
A. $m > -3$.

B. $-2 < m < -1$.

C. $m < -2$.

D. $-3 < m < -2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 1 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.



A. $0 \leq m \leq 1$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $0 < m < 1$.

D. $1 < m < 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$		
y'		+	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	3	1	5	$-\infty$		

Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

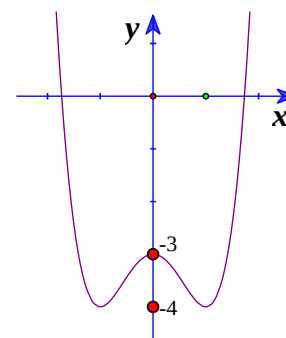
A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 2$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-4 < m < -3$.

B. $-4 \leq m \leq -3$.

C. $-6 \leq m \leq -5$.

D. $-6 < m < -5$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			4		4		0	

Diagram illustrating the relationship between x , y' , and y values:

- For $x = -\infty$, $y = -\infty$.
- For $x = -2$, $y = 4$.
- For $x = 0$, $y = 0$.
- For $x = 2$, $y = 4$.
- For $x = +\infty$, $y = -\infty$.

A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ⓒ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

Ⓓ. Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = m + 1$ (m là tham số).

Đường thẳng (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi các giá trị của m là

Ⓐ. $3 < m < 5$.

Ⓑ. $1 < m < 2$.

Ⓒ. $-1 < m < 0$.

Ⓓ. $-5 < m < -3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3		-1		3		$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2020$ tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 0.

Ⓒ. 2.

Ⓓ. 1.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

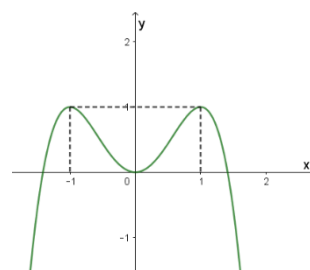
Phương trình $1 - 2f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ. 2.

Ⓑ. Vô nghiệm.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 4.



Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau:

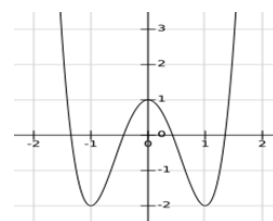
Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

Ⓐ. 0.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 4.

Ⓓ. 3.



Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			0			$+\infty$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-1			-1		

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

Ⓐ. $m = -2, m \geq -1$.

Ⓑ. $m > 0, m = -1$.

Ⓒ. $m = -2, m > -1$.

Ⓓ. $-2 < m < -1$.

Câu 15: Tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ tại 4 điểm phân biệt là

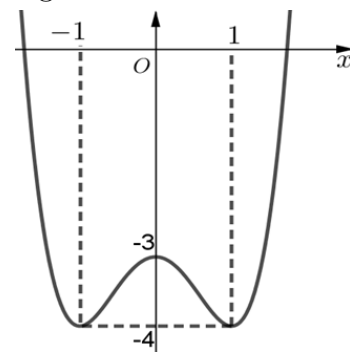
Ⓐ. $m > -3$.

Ⓑ. $m < 1$.

Ⓒ. $-12 < m < 3$.

Ⓓ. $-3 < m < 1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị hàm số như hình bên dưới. Với giá trị nào của tham số m phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?



Ⓐ. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

Ⓑ. $0 < m < \frac{1}{2}$

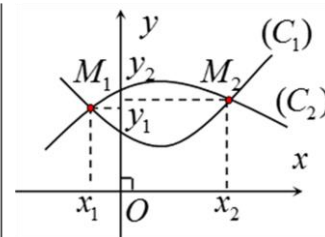
Ⓒ. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ⓓ. $m \leq \frac{1}{2}$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.B	8.D	9.D	10.C
11.C	12.D	13.B	14.C	15.D	16.A				

FB: Duong Hung

☒ Dạng ③. Sự tương giao của 2 đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)**☒-Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') **①.** Lập phương trình hoành độ giao điểm của và : $f(x) = g(x)$,
(1)**②.** Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.**③.** Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x), y = g(x)$.**☒- Casio: Solve, table, giải phương trình cơ bản****♦.Nghịệm của PT:** $ax^4 + bx^2 + c = 0$ **✓. Nhắm nghiệm:****①.** Nhắm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.**②.** Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ **③.** Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$ **✓. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:****①.** Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$.**②.** Nếu có đúng 1 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$ **③.** Nếu có đúng 2 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$ **④.** Nếu có đúng 3 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$ **⑤.** Nếu có đúng 4 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$ **✓. PP đồ thị hàm số.****①.** Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ **👉A - Bài tập minh họa:****Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 4 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.**(A).** $m \in \emptyset$.**(B).** $m = 1$.**(C).** $m = 2$.**(D).** $m = 3$.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

☞ Chọn B.

- Ta có $x^4 - 2x^2 + 4 - m = 0$ (1).
- Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta được phương trình $t^2 - 2t + 4 - m = 0$ (2).
- (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2 > 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases} \quad 3 < m < 4.$$

- Vậy $m \in \emptyset$.

✎ **Casio:** Thay m vào máy tính 580vnx, nếu 570VN plus thì giải PT bậc 2 có nghiệm dương phân biệt.

Câu 2: Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại mấy điểm phân biệt?

(A). 2.

(B). 4.

(C). 1.

(D). 3.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

☞ Chọn A

- Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - x^2 + 1 = x + 1$.

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

- Xét $x^3 - x - 1 = 0$ không có nghiệm $x = 0$ và hàm số $f(x) = x^3 - x - 1$.

- Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ và

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0.$$

- Nên đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - x - 1$ cắt trục hoành tại một điểm. Suy ra phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có một nghiệm.

- Vậy đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt.

• **Casio:** 580vnx, nếu 570VN plus thì sử dụng table.

Câu 3: Hai đồ thị $y = x^4 - x^2$ và $y = 3x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm chung?

(A). 2.

(B). 4.

(C). 1.

(D). 0.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

☞ Chọn A

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - x^2 = 3x^2 + 1$ (1).

• **Casio:** 580vnx, nếu 570VN plus thì sử dụng table.

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + \sqrt{5} \\ x^2 = 2 - \sqrt{5} \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

• Số điểm chung của hai đồ thị $y = x^4 - x^2$ và $y = 3x^2 + 1$ bằng số nghiệm của phương trình (1) là hai.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Ⓐ. $(0; +\infty)$.

Ⓑ. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Ⓒ. $[0; +\infty)$.

Ⓓ. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Lời giải

⇒ **Chọn B**

• Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$. (1)

$$\Leftrightarrow x^4 - mx^2 - x^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - m) - (x^2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - m)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

• Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi phương trình $x^2 = m$ có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

👉 **B - Bài tập rèn luyện:**

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 2.

Ⓓ. 0.

Câu 2: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Ⓐ. $m > 0$.

Ⓑ. $m > 1$.

Ⓒ. $m \geq 1$.

Ⓓ. $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^2(x^2 - 3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x$ tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ. 0.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 1.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

Ⓐ. 2.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 4.

Câu 5: Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tại 4 điểm phân biệt.

Ⓐ. $2 < m < 3$.

Ⓑ. $m > 2$.

Ⓒ. $1 < m < 2$.

Ⓓ. $m < 2$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

• **Casio:** thay m từ đáp án vào máy 580vnx. Đáp án nào có 4 nghiệm thì chọn.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=4m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3$ tại bốn điểm phân biệt?

- (A). $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$. (B). $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$. (C). $m \leq \frac{3}{4}$. (D). $m \geq -\frac{13}{4}$.

Câu 7: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2x^2+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm là

- (A). $-1 \leq m < 0$. (B). $0 \leq m < 1$. (C). $-1 < m < 0$. (D). $0 < m < 1$.

Câu 8: Phương trình $x^4-4x^2+m-3=0$ (m là tham số) có đúng bốn nghiệm khi và chỉ khi

- (A). $m < 7$. (B). $m \leq 7$. (C). $m < 3$. (D). $3 < m < 7$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

- (A). $m=-2, m \geq -1$. (B). $m > 0, m=-1$. (C). $m=-2, m > -1$. (D). $-2 < m < -1$.

Câu 10: Cho hàm số $y=x^4-(m-1)x^2+m-2$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

- (A). $m \in (1; +\infty)$ (B). $m \in (2; +\infty)$ (C). $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$ (D). $m \in (2; 3)$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.A	5.C	6.A	7.D	8.D	9.C	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

☒ **Dạng ④.** Xác định hệ số a, b, c từ đồ thị hàm trùng phương.

⊗ **-Phương pháp:** Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

↪ **Hệ số a :** Xác định dáng đi lên hay đi xuống của đồ thị

- Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$

↪ **Tích số ab :** Xác định số điểm cực trị

- $ab < 0$: hàm số có 3 cực trị
- $ab \geq 0$: hàm số có 1 cực trị

↪ **Hệ số c :** Xác định giao điểm với trục tung.

- $c > 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên gốc tọa độ O
- $c < 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới gốc tọa độ O
- $c = 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung trùng với gốc tọa độ O

🔥A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ sau.

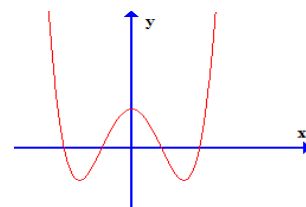
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải

➡Chọn B

- Hàm số là hàm bậc 4 trùng phương có:
 - + Nhìn dạng đồ thị suy ra $a > 0$
 - + Chọn $x = 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow c > 0$
 - + Vì hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow a, b$ trái dấu nên $b < 0$

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- Dễ thấy $a > 0, c > 0, b < 0$

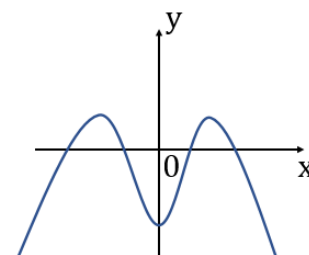
Câu 2: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$



Lời giải

➡Chọn C

- Đồ thị có bề lõm quay xuống nên $a < 0$
- $x = 0$ suy ra $y = c$. Đồ thị cắt trục Oy tại $y = -3 \Rightarrow c = -3 < 0$
- Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$
- Đồ thị hàm số có 3 cực trị nên $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

🔥PP nhanh trắc nghiệm

- Dễ thấy $a < 0, b > 0, c < 0$

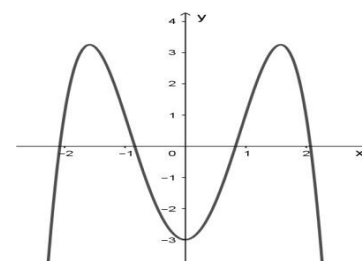
🔥B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

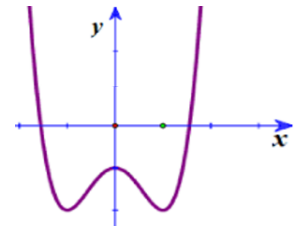
C. $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.



Câu 2: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

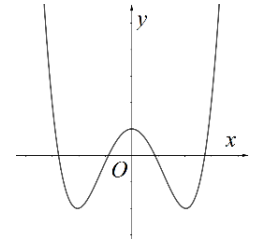
Tìm kết luận đúng.

- (A). $a+b > 0$. (B). $bc > 0$.
(C). $ab > 0$. (D). $ac > 0$.



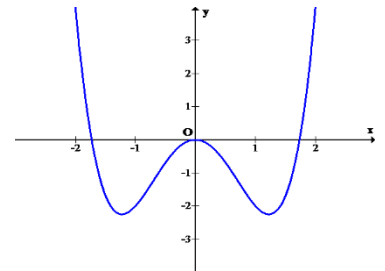
Câu 3: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). $a > 0, b > 0, c < 0$. (B). $a < 0, b > 0, c < 0$.
(C). $a > 0, b < 0, c > 0$. (D). $a > 0, b < 0, c < 0$.



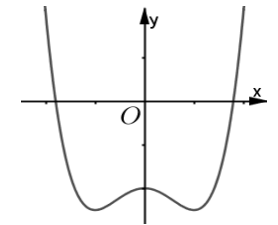
Câu 4: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.

- (A). $a < 0, b < 0, c = 0$. (B). $a < 0, b > 0, c = 0$.
(C). $a > 0, b < 0, c = 0$. (D). $a > 0, b < 0, c > 0$.



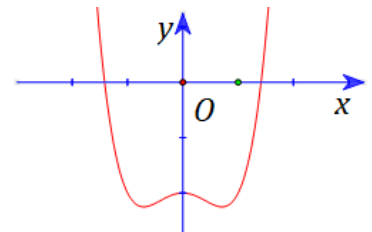
Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). $a > 0, b < 0, c > 0$. (B). $a > 0, b < 0, c < 0$.
(C). $a > 0, b > 0, c < 0$. (D). $a < 0, b > 0, c < 0$.



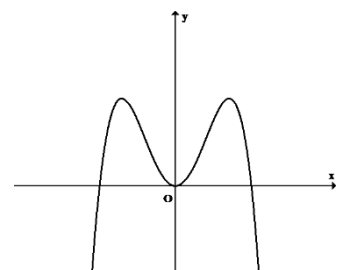
Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng

- (A). $a+b > 0$. (B). $bc > 0$.
(C). $ab > 0$. (D). $ac > 0$.



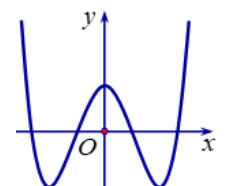
Câu 7: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- (A). $a < 0, b > 0, c > 0$. (B). $a > 0, b < 0, c > 0$.
(C). $a < 0, b > 0, c = 0$. (D). $a > 0, b < 0, c < 0$.



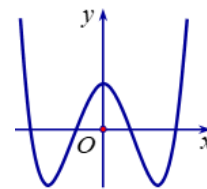
Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- (A). $a < 0; b > 0; c < 0$. (B). $a > 0; b > 0; c > 0$.
(C). $a < 0; b < 0; c < 0$. (D). $a > 0; b < 0; c > 0$



Câu 9: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- (A). $abc > 0$. (B). $abc = 0$.
 (C). $a < 0; b > 0; c > 0$. (D). $a > 0; b < 0; c > 0$



BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.C	4.C	5.B	6.B	7.C	8.D	9.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Hướng dẫn giải

Câu 1: Từ đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.

- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $\frac{b}{a} < 0$ do đó $b > 0$.
- Đồ thị hàm cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.
- Suy ra: Mệnh đề đúng $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 2: Từ hình vẽ suy ra $a > 0$.

- Giao điểm của đồ thị và trục tung là $(0; c)$ nằm dưới trục hoành nên $c < 0$, suy ra loại đáp án D
- Suy ra $bc > 0$

Câu 3: Dựa vào đồ thị:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
- Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.
- Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 4: Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :

- Hệ số $a > 0$
- Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0$
- Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Câu 5: Từ đồ thị hàm số ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
- Cho $x = 0 \Rightarrow y = c < 0$.

Câu 6: Từ hình vẽ ta thấy:

- Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a > 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.
- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
- Vậy chỉ có $bc > 0$.

Câu 7:

- Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :

- Hệ số $a < 0$.
- Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.
- Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0$.
- Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$.

Câu 8: • Hàm số trên là hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow$ Loại B, C

- Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^4 + bx^2 + c) = +\infty$ suy ra hệ số $a > 0$ nên $b < 0$. $\Rightarrow$ Loại A
- Suy ra chọn D
- Vậy: $a > 0; b < 0; c > 0$.

Câu 9: • Hàm số trên là hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow$ Loại B, C

- Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^4 + bx^2 + c) = +\infty$ suy ra hệ số $a > 0$ nên $b < 0$. $\Rightarrow$ Loại A
- Suy ra chọn D
- Vậy: $a > 0; b < 0; c > 0$.

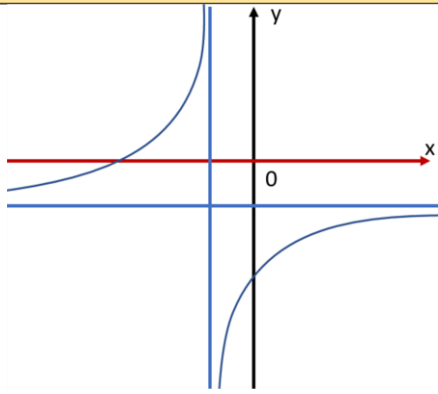
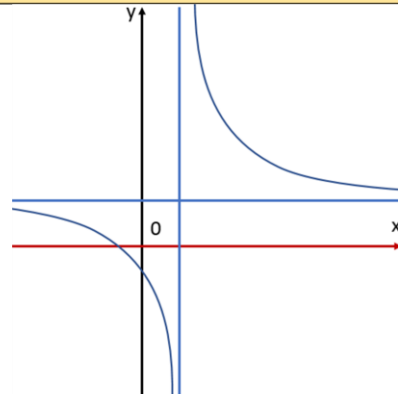
FB: Duong Hung

✚ Bài 7: ĐỒ THỊ HÀM SỐ HỮU TỈ

☒ Dạng ①. Nhận dạng hàm số hữu tỉ khi cho đồ thị hàm số.

⊗ **-Phương pháp:** Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

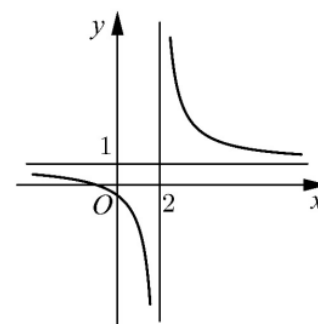
- Quan sát dáng đồ thị, chú ý dấu đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Xác định các đường tiệm cận đứng: $x = \frac{-d}{c}$, ngang: $y = \frac{a}{c}$
- Các giao điểm đặc biệt với trục ox , oy .

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0, ad-bc \neq 0$	①. $ad-bc > 0$	②. $ad-bc < 0$
①. $y' > 0$: Hàm số tăng ②. $y' < 0$: Hàm số giảm		

👉 A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). $y' < 0, \forall x \neq 1$ (B). $y' < 0, \forall x \neq 2$
 (C). $y' > 0, \forall x \neq 2$ (D). $y' > 0, \forall x \neq 1$



Lời giải

☞ Chọn C

- Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2,
- Hàm số nghịch biến vậy chọn B

PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát đồ thị

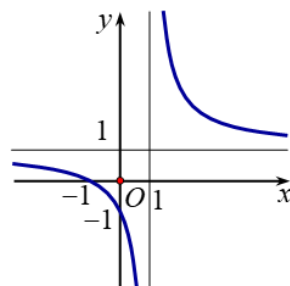
Câu 2: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A). $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

(B). $y = \frac{x+1}{x-1}$.

(C). $y = x^4 + x^2 + 1$.

(D). $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải

☛ Chọn (B).

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$.

$\Rightarrow x=1$ là đường tiệm cận đứng.

• Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát đồ thị với đáp án
- Loại nhanh đáp án C, D

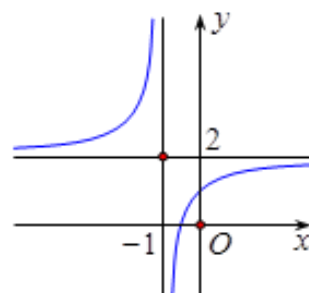
Câu 3: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các phương án A, B, C, D dưới đây?

(A). $y = \frac{x-1}{x+1}$.

(B). $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

(C). $y = \frac{x+2}{x+1}$.

(D). $y = \frac{x+3}{1-x}$.



Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

☛ Chọn B

• Từ đồ thị ta có: Tiệm cận đứng $x=-1$; tiệm cận ngang $y=2$.

$y = \frac{x-1}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x=-1$; tiệm cận ngang $y=1$

A sai

• Mất nhanh quan sát đồ thị với đáp án

- $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 2$

B đúng

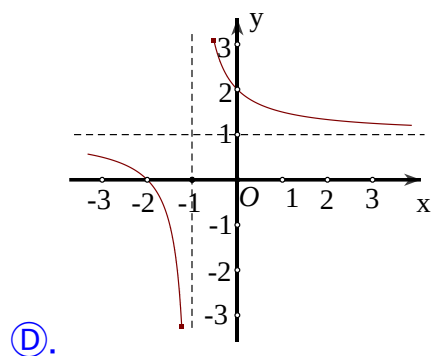
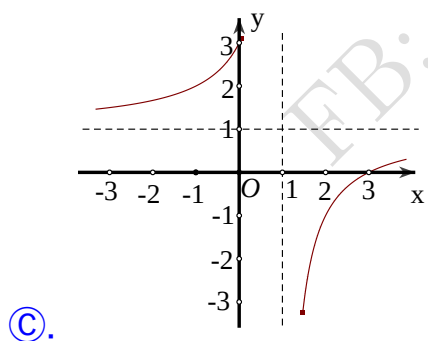
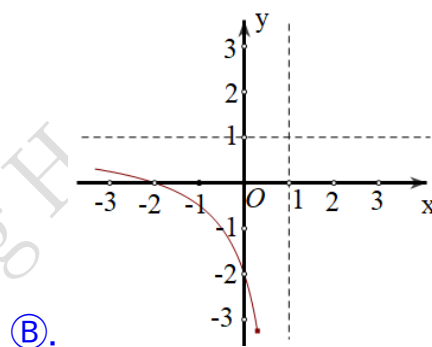
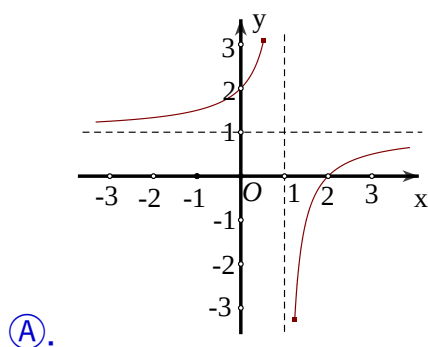
- $y = \frac{x+2}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 1$

C sai

- $y = \frac{x+3}{1-x}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1-x} = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = 1$; tiệm cận ngang $y = -1$

D sai

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây?



Lời giải

⇒ Chọn A.

- $C : y = f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.
- C có tiệm cận đứng $x=1$, nên loại D
- C đi qua điểm $A(2;0)$, nên loại (B).
- C đi qua điểm $B(0;2)$, nên loại (C).

PP nhanh trắc nghiệm

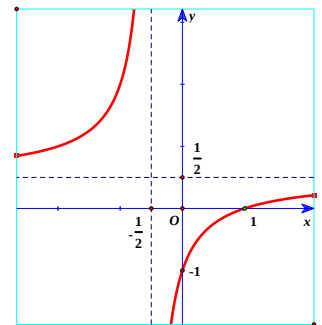
- Mất nhanh quan sát hàm số với đồ thị từ đáp án

- Vậy $C : y = \frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình A.

🔴B - Bài tập rèn luyện:

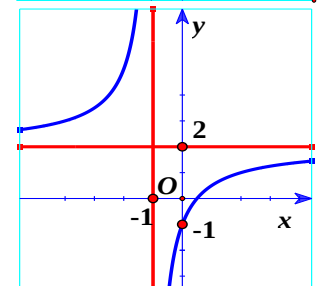
Câu 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = \frac{x+1}{2x+1}$. (B). $y = \frac{x-1}{2x-1}$.
 (C). $y = \frac{x-1}{1-2x}$. (D). $y = \frac{x-1}{2x+1}$.



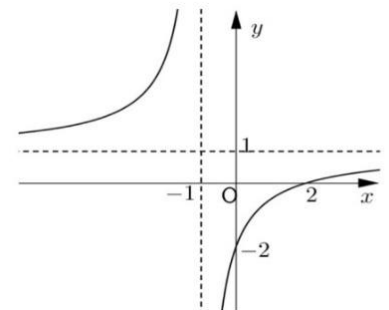
Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = \frac{2x+1}{x+1}$. (B). $y = \frac{x-1}{x-2}$.
 (C). $y = \frac{2x-1}{x-1}$. (D). $y = \frac{2x-1}{x+1}$.



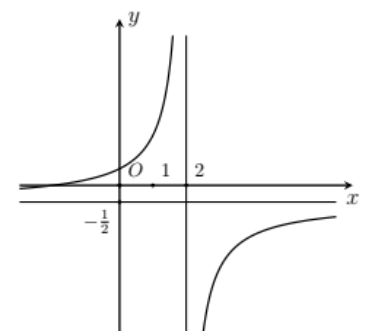
Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = x^4 - 2x^2 + 1$. (B). $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 (C). $y = \frac{2x-1}{x+2}$. (D). $y = \frac{x-2}{x+1}$.



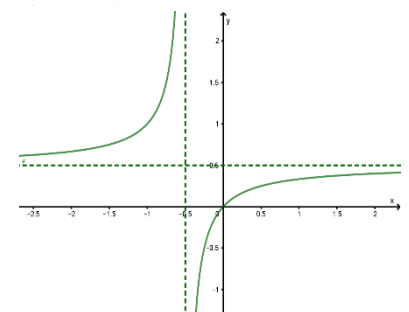
Câu 4: Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = \frac{x+2}{-2x+4}$. (B). $y = \frac{2x-3}{x+2}$.
 (C). $y = \frac{-x+1}{x-2}$. (D). $y = \frac{-x+3}{2x-4}$.



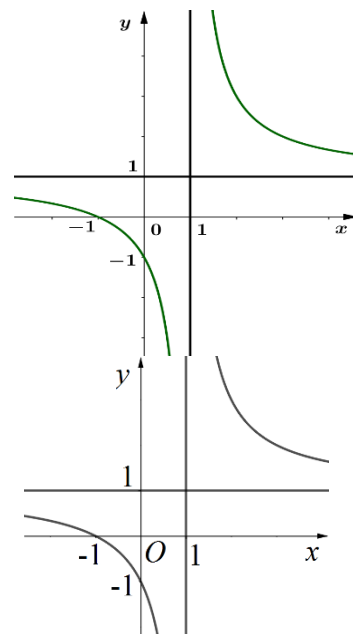
Câu 5: Hình vẽ bên đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

- (A). $y = \frac{x}{2x+1}$. (B). $y = \frac{-x}{2x+1}$.
 (C). $y = \frac{x}{2x-1}$. (D). $y = \frac{-x}{2x-1}$.



Câu 6: Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A). $y = \frac{x}{x-1}$. (B). $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.
 (C). $y = \frac{x+1}{x-1}$. (D). $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 7: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- (A). $y = \frac{x+1}{x-1}$. (B). $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.
 (C). $y = \frac{-x}{1-x}$. (D). $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

- (A). $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. (B). $y = \frac{x+3}{x+1}$. (C). $x^3 + 3x^2 + 4$. (D). $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	1	$+\infty$	1

- (A). $y = \frac{2x+3}{x-2}$. (B). $y = \frac{x+3}{x-2}$. (C). $y = \frac{2x-7}{x-2}$. (D). $y = \frac{x-3}{x-2}$.

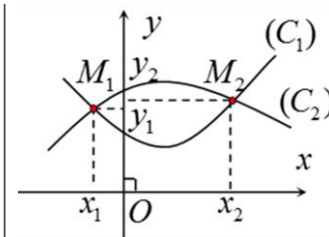
Câu 10: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		
$f(x)$	1	$+\infty$	1

- (A). $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$. (B). $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$. (C). $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. (D). $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.A	5.A	6	7.A	8.D	9.B	10.A
-----	-----	-----	-----	-----	---	-----	-----	-----	------

☒ Dạng ②. Sự tương giao của 2 đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)**☒-Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') **①.** Lập phương trình hoành độ giao điểm của và : $f(x) = g(x)$,
(1)**②.** Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.**③.** Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị
 $y = f(x), y = g(x)$.**☒- Casio:** Solve, table, giải phương trình cơ bản**👉A - Bài tập minh họa:****Câu 1:** Tìm tung độ giao điểm của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng $d: y = x-1$.**(A).** 1.**(B).** -3.**(C).** -1.**(D).** 3.**Lời giải****☞Chọn C**•Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường (C) và d là

$$\frac{2x-3}{x+3} = x-1 \quad (x \neq -3) \Rightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1.$$

PP nhanh trắc nghiệm• **Casio:** Solve

$$\frac{2x-3}{x+3} - x + 1 = 0$$

$$x = 0$$

$$L-R = 0$$

Suy ra $y = -1$.**Câu 2:** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y = 2x+3$ là**(A).** 2.**(B).** 3.**(C).** 1.**(D).** 0.**Lời giải****☞Chọn A**

•Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (2x+3)(x-1) \quad (\text{do } x=1 \text{ không là nghiệm của phương trình})$$
PP nhanh trắc nghiệm• **Casio:** table

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - 2x - 3$$

Phạm vi bảng
 Đầu :-7
 Kthúc:7
 Bước :0.5

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

$\sqrt{x}$	$f(x)$
11	-2
12	-1.5
13	-1
14	-0.5

-1.2

$\sqrt{x}$	$f(x)$
17	1
18	1.5
19	2
20	2.5

2

Ta thấy đổi dấu 2 lần.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y = -2x+11$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B .
 Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

(A). $x_I = 3$.

(B). $x_I = 2$.

(C). $x_I = \frac{5}{2}$.

(D). $x_I = \frac{7}{2}$.

Lời giải

⇒ Chọn A.

• Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\frac{x+1}{x-1} = -2x+11$.

• Hay x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 6x - 6 = 0 \quad (*)$$

• Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên

$$I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

• Từ phương trình (*), ta có

$$x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 3.$$

• Vậy hoành độ của điểm I bằng 3.

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio:** Solve, sto

$$\frac{x+1}{x-1} + 2x - 11$$

Ans→A

4.732050808

Ans→B

1.267949192

$$\frac{A+B}{2}$$

3

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $(d): y = x+1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M và N thì tung độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

(A). -2.

(B). -3.

(C). 1.

(D). 2.

Lời giải

⇒ Chọn D

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio:** Solve, sto

- Ta có x_M, x_N là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x+2}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1.$$

- Vì I thuộc (d) $\Rightarrow y_I = 2$.

$$\frac{2x+2}{x-1} - x - 1$$

Ans→A

Ans→B

$$\frac{A+1+B+1}{2}$$

🔗B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y = 2x+3$ là

- (A). 2. (B). 3. (C). 1. (D). 0.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x}$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + x + 1$ cắt nhau tại hai điểm, ký hiệu $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm đó. Tìm $y_1 + y_2$.

- (A). $y_1 + y_2 = 0$. (B). $y_1 + y_2 = 2$. (C). $y_1 + y_2 = 6$. (D). $y_1 + y_2 = 4$.

Câu 3: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x+1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn MN bằng

- (A). $\frac{5}{2}$. (B). $-\frac{5}{2}$. (C). 2. (D). 1.

Câu 4: Tìm tung độ giao điểm của đồ thị (C): $y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng d: $y = x-1$.

- (A). 1. (B). -3. (C). -1. (D). 3.

Câu 5: Đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là

- (A). (-1;0); (2;1) (B). (1;2) (C). (0;-1); (2;1) (D). (0;2)

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

- (A). $\frac{1}{2}$. (B). $\frac{1}{4}$. (C). 1. (D). 2.

Câu 7: Đường cong $y = \frac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $y = -x$ tại hai điểm M, N. Tính độ dài đoạn thẳng MN

- (A). $MN = 4$. (B). $MN = 2\sqrt{5}$. (C). $MN = 4\sqrt{2}$. (D). $MN = 6\sqrt{2}$.

- Câu 8:** Đường thẳng $y = -x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Trung điểm của đoạn thẳng AB có hoành độ là
- (A). -5. (B). -7. (C). $-\frac{11}{2}$. (D). -3.
- Câu 9:** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB bằng
- (A). 2. (B). 3. (C). $\frac{1}{2}$. (D). $\frac{1}{4}$.
- Câu 10:** Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- (A). $AB = 6$. (B). $AB = \sqrt{17}$. (C). $AB = \sqrt{34}$. (D). $AB = 8$.
- Câu 11:** Biết đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là $x_A; x_B$. Tính giá trị của $x_A + x_B$.
- (A). $x_A + x_B = 2$. (B). $x_A + x_B = -2$. (C). $x_A + x_B = 0$. (D). $x_A + x_B = 1$.
- Câu 12:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x - m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$
- (A). $m = -2$. (B). $m \in \{-1; -5\}$. (C). $m = -5$. (D). $m \in \{-2; 2\}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.D	4.C	5.C	6.A	7.D	8.D	9.C	10.C	11.A	12.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

☒ Dạng ③. Xác định hệ số a, b, c, d từ đồ thị hàm số hữu tỷ

⊗ - Phương pháp: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

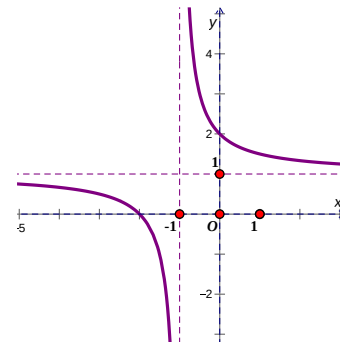
☞ ①. Tiệm cận đứng: $cd > 0$; TCD nằm bên trái trục oy $cd < 0$; TCD nằm bên phải trục oy - Đặc biệt: $d = 0$: TCD trùng với trục oy	☞ ③. Giao điểm trục ox: $ba > 0$; nằm bên trái gốc tọa độ O $ba < 0$; nằm bên phải gốc tọa độ O - Đặc biệt: $a = 0$: Đồ thị không cắt trục ox
☞ ②. Tiệm cận ngang: $ca > 0$; TCN nằm bên trên trục ox $ca < 0$; TCN nằm bên dưới trục ox - Đặc biệt: $a = 0$: TCN trùng với trục ox	☞ ④. Giao điểm trục oy: $bd > 0$; nằm bên trên gốc tọa độ O $bd < 0$; nằm bên dưới gốc tọa độ O - Đặc biệt: $b = 0$: Giao trục tung trùng với gốc tọa độ O

☞ **A - Bài tập minh họa:**

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- Ⓐ. $b < 0 < a$. Ⓑ. $0 < a < b$.
 Ⓒ. $a < b < 0$. Ⓓ. $0 < b < a$.



Lời giải

☛Chọn B

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 = a > 0$,
 $x = 0 \Rightarrow y = b = 2 > 0$.
- Vậy $0 < a < b$

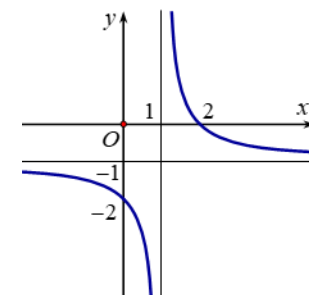
PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát tiệm cận và điểm đặc biệt.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- Ⓐ. $0 < a < b$. Ⓑ. $b < 0 < a$.
 Ⓒ. $0 < b < a$. Ⓓ. $b < a < 0$.



Lời giải

☛Chọn D

- Nhìn đồ thị ta thấy đồ thị cắt Ox tại $x = 2$ và cắt Oy tại $y = -2$. Nên với hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$, cho $x = 0$
 $y = -2 \Rightarrow b = 2$, cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ hay $2 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 1$.
- Vậy $b < a < 0$. Đáp án được chọn là D

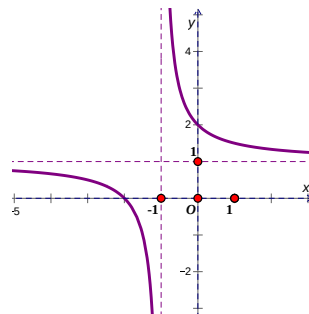
PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát tiệm cận và điểm đặc biệt.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- Ⓐ. $b < 0 < a$. Ⓑ. $0 < a < b$.
 Ⓒ. $a < b < 0$. Ⓓ. $0 < b < a$.



Lời giải

☛Chọn D

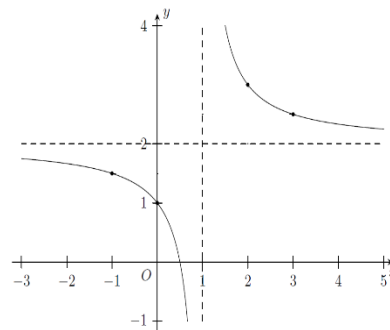
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 = a > 0$,
 $x = 0 \Rightarrow y = b = 2 > 0$.
- Vậy $0 < a < b$

PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát tiệm cận ngang; điểm đặc biệt.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b + 3c$.

- (A). $T = 1$. (B). $T = 2$.
(C). $T = 3$. (D). $T = 4$.



Lời giải

☛ Chọn A

- Đồ thị nhận $x=1$ là tiệm cận đứng $\Rightarrow \frac{-c}{b} = 1 \Rightarrow b = -c$.
- Đồ thị nhận $y=2$ là tiệm cận ngang $\Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.
- Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$
 $\Rightarrow \frac{a \cdot 0 - 1}{b \cdot 0 + c} = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$.
- Vậy $T = a + 2b + 3c = 2 + 2(1) + 3(-1) = 1$.

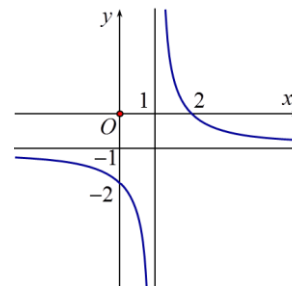
PP nhanh trắc nghiệm

- Mất nhanh quan sát tiệm cận ngang; tiệm cận đứng, điểm đặc biệt.

🔴 B - Bài tập rèn luyện:

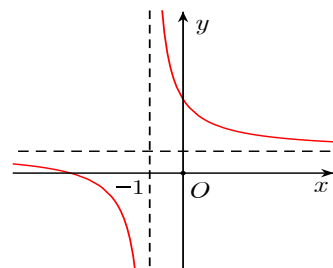
Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A). $b < 0 < a$. (B). $b < a < 0$.
(C). $a < b < 0$. (D). $0 < b < a$.



Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

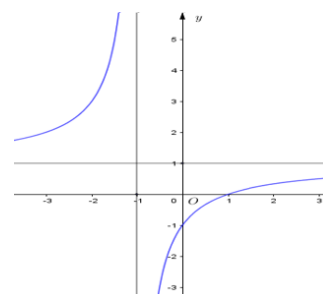
- (A). $a < b < 0$. (B). $b < 0 < a$.
(C). $0 < b < a$. (D). $0 < a < b$.



Câu 3: Biết hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

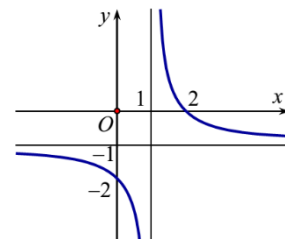
- (A). $ac < 0, cd > 0$. (B). $ad > 0, bc < 0$.
(C). $ac > 0, ab > 0$. (D). $cd > 0, ad < 0$.



Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên

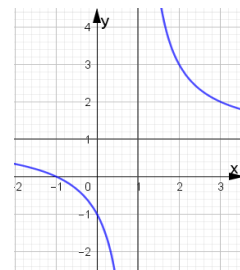
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A). $b < 0 < a$. (B). $b < a < 0$.
(C). $a < b < 0$. (D). $0 < b < a$.



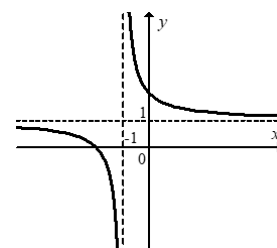
Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A). $b < 0 < a$. (B). $a < 0 < b$.
(C). $0 < b < a$. (D). $b < a < 0$.



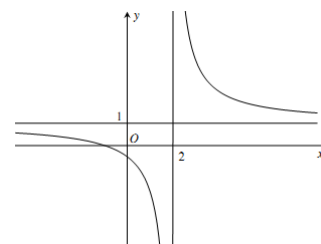
Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A). $0 < a < b$. (B). $b < 0 < a$.
(C). $a < b < 0$. (D). $0 < b < a$.



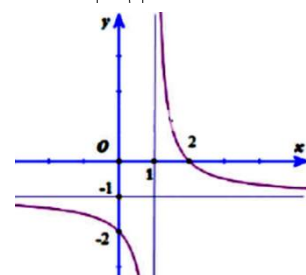
Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a+b$

- (A). $T = 2$ (B). $T = 0$
(C). $T = -1$ (D). $T = 3$



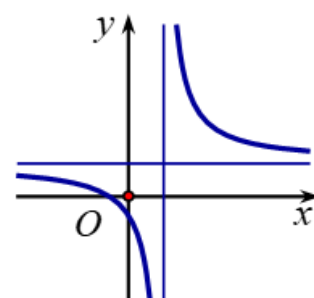
Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$ bằng

- (A). $T = 12$. (B). $T = 10$.
(C). $T = -7$. (D). $T = -9$.



Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A). $c < 0; b < 0$. (B). $b < 0; c > 0$.
(C). $b > 0; c > 0$. (D). $b > 0; c < 0$.



Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

Ⓐ. $a > 1, b > 0, c < 1$. Ⓑ. $a > 1, b < 0, c > 1$.

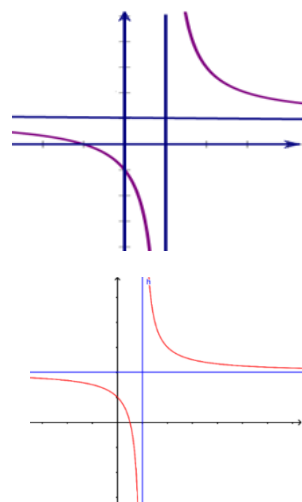
Ⓒ. $a < 1, b > 0, c < 1$. Ⓓ. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

Ⓐ. $0 < ad < bc$. Ⓑ. $ad < bc < 0$.

Ⓒ. $bc < ad < 0$. Ⓓ. $ad < 0 < bc$.



BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.B	4.B	5.A	6.A	7	8.D	9.C	10.D	11.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	-----	-----	------	------

Lời giải chi tiết

Câu 1: • Hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = a$.

• Theo đồ thị ta có tiệm cận ngang là $y = -1 \Rightarrow a = -1$.

• Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ cắt Oy tại điểm có tung độ là b , theo hình vẽ ta có $b = -2$.

• Nên ta chọn đáp án $b < a < 0$.

Câu 2: • Ta có $y' = \frac{a(x+1) - (ax+b)}{(x+1)^2} = \frac{a-b}{(x+1)^2}$.

• Quan sát đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định, vậy $y' < 0$ hay $a < b$.

• Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương, mà điểm đó có tọa độ là $0; b$, vậy $b > 0$.

• Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ âm, mà điểm đó có tọa độ là $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

• Vậy $-\frac{b}{a} < 0$ hay $a > 0$. Vậy $0 < a < b$.

Câu 3: • Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = \frac{a}{c} > 0$ suy ra $ac > 0 \rightarrow$ Loại A

• Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \frac{d}{c} > 0$ suy ra $cd > 0$.

- Ta có: $y(0) = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.
- Từ đó suy ra: $\frac{ac}{cd} > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{d} > 0 \Rightarrow ad > 0$; $\frac{bd}{cd} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{c} < 0 \Leftrightarrow bc < 0$.
- Vậy B đúng.

- Câu 4:**
- Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1 \Rightarrow \frac{a}{1} = -1 \Rightarrow a = -1$
 - Giao của đồ thị hàm số với trục tung là $y = -2 \Rightarrow \frac{-b}{-1} = -2 \Rightarrow b = -2$
 - Vậy $b < a < 0$ chọn đáp án B

- Câu 5:** Ta có $\begin{cases} y = a \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$. Mà đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0; -1)$ nên $-1 = \frac{-b}{-1} \Rightarrow b = -1$.
- Vậy $b < 0 < a$.

- Câu 6:** Dựa vào đồ thị:
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = 1 > 0$.
 - Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ad - bc = a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.
 - Vậy $0 < a < b$.

- Câu 7:**
- Tiệm cận đứng $x = \frac{2}{b} = 2 \Rightarrow b = 1$
 - Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b = 1$
 - Vậy $T = a + b = 2$

- Câu 8:**
- Đồ thị hàm số trên hình vẽ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$ mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = a$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$ suy ra $a = -1$
 - Suy ra $y = \frac{-x+b}{x+c}$

- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0; -2), B(2; 0)$ suy ra $\begin{cases} \frac{b}{c} = -2 \\ 0 = \frac{-2+b}{2+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$
- $T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$.

- Câu 9:**
- Giao điểm với trục tung: $x = 0 \Rightarrow y = -b$.
 - Mà $-b < 0 \Leftrightarrow b > 0$.
 - Mặt khác, tiệm cận ngang $y = \frac{1}{c}$.
 - Mà $\frac{1}{c} > 0 \Leftrightarrow c > 0$.

Câu 10: • $(H)y = f(x) = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}, d < 0$

• Nhìn đồ thị:

• $f(0) < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{d} < 0$, mà $d < 0$. Suy ra $b > 0$.

• (H) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ âm. Suy ra $-\frac{b}{a-1} < 0$, mà $b > 0$.

Suy ra $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

• (H) có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c-1}$, và $-\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0$.

Suy ra $c-1 > 0 \Leftrightarrow c > 1$.

• Vậy $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 11: Dựa vào hình vẽ ta thấy:

• Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0 \Leftrightarrow ad < bc$, loại đáp án C

• Đồ thị hàm số có đường TCD là đường thẳng: $x = -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$ (1)

• Đồ thị hàm số có đường TCN là đường thẳng: $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $ad < 0$ nên loại đáp án A

• Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $bc < 0$ nên loại đáp án D

• Vậy mệnh đề đúng là B

☒ Dạng ④. Tìm điều kiện tham số m thỏa ĐK cho trước

☒ -Phương pháp:

①. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$.

②. Phương trình hoành độ giao điểm của và: $\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$

③. Xử lý điều kiện và tìm tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

👉B - Bài tập vận dụng rèn luyện:

Câu 1: Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh đồ thị.

(A). $m \in (-\infty; 0)$.

(B). $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

(C). $m \in (0; +\infty)$.

(D). $m = 0$.

Câu 2: Giả sử $m = -\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a, b = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng

$d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng

tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ. Tính $a + 2b$.

(A). 2.

(B). 5.

(C). 11.

(D). 21.

Câu 3: Cho đường cong $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị của m để

d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB có hoành độ bằng 3.

(A). $m = 0$.

(B). $m = 1$.

(C). $m = -1$.

(D). $m = -2$.

Câu 4: Tìm m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.

(A). 3.

(B). -1.

(C). 2.

(D). 1.

Câu 5: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

(A). -6.

(B). 0.

(C). 9.

(D). -27.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$?

(A). 2.

(B). 1.

(C). 0.

(D). 3.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

(A). $m \in (-\infty; +\infty)$.

(B). $m \in (-1; +\infty)$.

(C). $m \in (-2; 4)$.

(D). $m \in (-\infty; -2)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng $\forall m \neq 0$ đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của tham số m tìm được để đường thẳng d cắt Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2 lần diện tích tam giác OCD bằng

Ⓐ. $-\frac{4}{9}$.

Ⓑ. -4 .

Ⓒ. -1 .

Ⓓ. 0 .

Câu 9: Cho đường cong $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị của m để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB có hoành độ bằng 3 .

Ⓐ. $m = 0$.

Ⓑ. $m = 1$.

Ⓒ. $m = -1$.

Ⓓ. $m = -2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Giá trị nhỏ nhất của AB là

Ⓐ. 4 .

Ⓑ. $2\sqrt{3}$.

Ⓒ. $2\sqrt{2}$.

Ⓓ. 2 .

Câu 11: Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B . Khi đó $x_A + x_B$ là:

Ⓐ. $x_A + x_B = 5$.

Ⓑ. $x_A + x_B = 2$.

Ⓒ. $x_A + x_B = 1$.

Ⓓ. $x_A + x_B = 3$.

Câu 12: Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị m thuộc khoảng nào?

Ⓐ. $m \in (-4; -2)$.

Ⓑ. $m \in (2; 4)$.

Ⓒ. $m \in (-2; 0)$.

Ⓓ. $m \in (0; 2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.D	4.A	5.A	6.C	7.A	8.A	9.D	10.A	11.A	12.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

Hướng dẫn giải

Câu 1: • Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = mx + 1$ và đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ là

$$mx + 1 = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow (mx+1)(x-1) = x+1 \quad \forall x \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - mx - 2 = 0. \quad (1)$$

• Đặt $f(x) = mx^2 - mx - 2$.

• Để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh đồ thị

thì phương trình (1) phải có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1 và thỏa mãn:

$$x_1 < 1 < x_2 \text{ hay } (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 8m > 0 \\ -2 \neq 0 \\ \frac{-2}{m} - 1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \Leftrightarrow m > 0. \\ m > 0 \end{cases}$$

- Vậy với $m \in (0; +\infty)$ thì đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh đồ thị.

Câu 2:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m \Leftrightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 \quad (1) \quad (x \neq 1).$$

- Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 11 \\ m < -1 \end{cases} (*)$.

luôn khác 1 vì thay $x = 1$ vào phương trình thì không thỏa mãn).

- Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt gọi là p và q , ta đặt lần lượt là hoành độ của các điểm A và $B \Rightarrow$ Tọa độ $A(p; -3p + m)$, $B(q; -3q + m)$.

- Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình ta có: $p + q = \frac{m+1}{3}$.

$$\Rightarrow \text{Tọa độ của } G \text{ là: } \begin{cases} x_G = \frac{p+q+0}{3} = \frac{m+1}{9} \\ y_G = \frac{(-3p+m) + (-3q+m) + 0}{3} = \frac{m-1}{3} \end{cases}$$

- G thuộc đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-11}{5}$

$$\Rightarrow a = 11, b = 5 \Rightarrow a + 2b = 21.$$

Câu 3:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$\frac{x-3}{x+1} = x + 3m, (x \neq -1) \Leftrightarrow x-3 = x^2 + x + 3mx + 3m \Leftrightarrow x^2 + 3mx + 3m + 3 = 0 \quad (1).$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $x \neq -1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 9m^2 - 12m - 12 > 0 \\ 1 - 3m + 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 12m - 12 > 0.$$

- Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1)

- Khi đó $A(x_1; x_1 + 3m), B(x_2; x_2 + 3m)$ với $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3m \\ x_1 \cdot x_2 = 3m + 3 \end{cases}$.
- Gọi I là trung điểm AB , ta có $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 + 6m}{2}\right)$.
- Theo giả thiết $\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{-3m}{2} = 3 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 4:

- Phương trình hoành độ giao điểm: $2x + m = \frac{x+3}{x+1}$

$$\Leftrightarrow (2x+m)(x+1) = x+3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

- Để có hai giao điểm thì pt (1) phải có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 25 > 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Giả sử $M(x_1; 2x_1 + m), N(x_2; 2x_2 + m)$
- Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= 5(x_1 - x_2)^2 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 5\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 4\frac{m-3}{2}\right] \\ &= \frac{5}{4}[(m-3)^2 + 16] \geq \frac{5}{4} \cdot 16 = 20. \end{aligned}$$

Câu 5:

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x+m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ f(x) = x^2 - (m+1)x + 1 - m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

- Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 6m - 3 > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 - 2\sqrt{3}, m > -3 + 2\sqrt{3} \\ 1 + m + 1 - m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m < -3 - 2\sqrt{3}, m > -3 + 2\sqrt{3} \quad (*)$$

- Giả sử $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$; x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

$$\bullet \text{ Ta có: } AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) \leq 4 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 1$$

- Kết hợp (*) ta có: $-7 \leq m < -3 - 2\sqrt{3}$ hoặc $-3 + 2\sqrt{3} < m \leq 1$

- Do m nguyên nên $m = -7$ hoặc $m = 1$.

- Vậy $S = -6$.

Câu 6:

- Phương trình hoành độ giao điểm: $-3x + m = \frac{2x+1}{x-1}$
- Với điều kiện $x \neq 1$, $\Leftrightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$
- Đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện:

$$\begin{cases} (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (m+1) \cdot 1 + m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 11 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

- Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt phương trình. Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{3}$.
- Gọi M là trung điểm AB , ta có: $M\left(\frac{m+1}{6}; \frac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác

$$OAB, \text{ ta có } \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \cdot \frac{m+1}{6} \\ y = \frac{2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+1}{9} \\ y = \frac{m-1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } G\left(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3}\right).$$

- Mặt khác, điểm G thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$ nên ta có: $\frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow m = -\frac{11}{5}$. Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7:

- Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+3}{x+1} = 2x + m$ (*), với điều kiện xác định $x \neq -1$.
 - Biến đổi về thành: $2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0$ (**).
 - Theo yêu cầu đề bài, phương trình cần có hai nghiệm phân biệt khác -1 , tức là:
- $$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-3) > 0 \\ 2 \cdot (-1)^2 + (m+1) \cdot (-1) + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 25 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; +\infty).$$

Câu 8:

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ là:

$$\frac{3x-2m}{mx+1} = 3x - 3m \stackrel{x \neq -\frac{1}{m}}{\Leftrightarrow} g(x) = 3x^2 - 3mx - 1 = 0 \quad (1)$$

- Ta có: $g\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{3}{m^2} + 2 \neq 0, \forall m \neq 0$ và phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu $\forall m \neq 0$
- Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1).
- Khi đó tọa độ hai điểm A, B là $A(x_1; 3x_1 - 3m)$, $B(x_2; 3x_2 - 3m)$

$$\Rightarrow AB^2 = 10(x_1 - x_2)^2 = 10[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2].$$

$$\bullet \text{ Áp dụng Viet ta có } AB^2 = 10\left(m^2 + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow AB = \sqrt{10\left(m^2 + \frac{4}{3}\right)} \text{ và } d(O; d) = \frac{|3m|}{\sqrt{10}}.$$

$$\bullet \text{ Do đó, } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}d(O; d).AB = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + \frac{4}{3}} \cdot |3m|.$$

$$\bullet \text{ Tọa các điểm } C, D \text{ là: } C(m; 0), D(0; -3m), \text{ suy ra } S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2}.OC.OD = \frac{1}{2}|3m^2|.$$

$$\bullet \text{ Theo giả thiết: } S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}. \text{ Vậy tích các nghiệm là } -\frac{4}{9}.$$

Câu 9:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$\frac{x-3}{x+1} = x+3m, (x \neq -1) \Leftrightarrow x-3 = x^2 + x + 3mx + 3m \Leftrightarrow x^2 + 3mx + 3m + 3 = 0 \quad (1).$$

- d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $x \neq -1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 9m^2 - 12m - 12 > 0 \\ 1 - 3m + 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 12m - 12 > 0.$$

- Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1)

$$\bullet \text{ Khi đó } A(x_1; x_1 + 3m), B(x_2; x_2 + 3m) \text{ với } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3m \\ x_1 \cdot x_2 = 3m + 3 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm } AB, \text{ ta có } I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 + 6m}{2}\right).$$

$$\bullet \text{ Theo giả thiết } \frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{-3m}{2} = 3 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 10:

$$\bullet y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \forall x \neq 1$$

phương trình tiệm cận đứng là: $d: x=1$ phương trình tiệm cận ngang là: $d': y=2$

$$\bullet \text{ Tiếp tuyến của } (C) \text{ là } y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \text{ với } x_0 \neq 1 \text{ là hoành độ tiếp điểm}$$

- Giả sử:

$$(C) \cap d = A\left(1; \frac{2(x_0+2)}{x_0-1}\right);$$

$$\bullet (C) \cap d' = B(2x_0-1; 2)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2x_0-2)^2 + \left(\frac{4}{x_0-1}\right)^2} \geq \sqrt{2\sqrt{(2x_0-2)^2 \cdot \left(\frac{4}{x_0-1}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow AB \geq 4$$

$$\bullet \text{ Đẳng thức xảy ra } (2x_0 - 2)^2 = \left(\frac{4}{x_0 - 1}\right)^2 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{2} + 1 \\ x_0 = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

• Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là: 4

Câu 11:

• Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là:

$$x - 2 = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 2x+1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0. \quad (1)$$

• Khi đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B thì x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (1).

• Vậy theo định lý Viet ta có: $x_A + x_B = \frac{-(-5)}{1} = 5.$

Câu 12:

• Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) đã cho và đường thẳng d là:

$$\frac{2x}{x-1} = x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (1+m)x + m - 2 = 0 \quad (1) \text{ với } x \neq 1.$$

• Do $x=1$ không thỏa phương trình (1) nên đồ thị (C) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Tức là } \Delta = (1+m)^2 - 4(m-2) = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

• Vậy với mọi giá trị thực của m đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Theo Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1+m \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}.$$

• Có $A(x_1; x_1 - m + 2), B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ hai giao điểm mà Δ cắt đồ thị hàm số đã cho.

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2m^2 - 4m + 18.$$

$$\text{Ta có: } 2m^2 - 4m + 18 = 2(m-1)^2 + 16 \geq 16 \text{ hay } AB^2 \geq 16 \Leftrightarrow AB \geq 4.$$

• Vậy độ dài nhỏ nhất của AB bằng 4 đạt được khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1.$

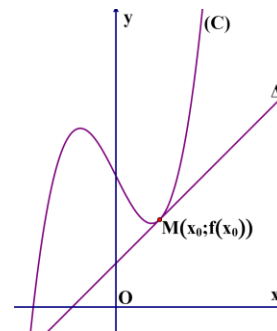
Bài 8: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

Dạng ①. Tiếp tuyến tại tiếp điểm của đồ thị

Phương pháp:

- Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- Để viết PTTT của (C) tại $M(x_0; f(x_0))$:
 - ①. Xác định tọa độ tiếp điểm $x_0; y_0$ từ giả thiết
 - ②. Tính hệ số góc tiếp tuyến: $f'(x_0)$
 - ③. Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



Chú ý: Tọa độ giao điểm đặc biệt sau:

- ◆ Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; y_0)$
- ◆ Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(x_0; 0)$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- (A). $y = 4x - 6$.
(B). $y = 4x + 2$.
(C). $y = 4x + 6$.
(D). $y = 4x - 2$.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn C

- Ta có $y' = 4x^3 - 8x$, $y'(-1) = 4$.
- Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.
- Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là

$$y = y'(-1)(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

- Casio: tìm $y'(-1) = 4$.

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 4x^2 + 5) \Big|_{x=-1}$$

4

Câu 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- (A). $y = 7x + 13$.
(B). $y = -7x + 30$.
(C). $y = 3x + 9$.
(D). $y = -x - 2$.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn C

- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 9$;
- $y' = \frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -7$.

- Casio: $y'(3) = -7$

- Phương trình tiếp tuyến tương ứng là
 $y = -7(x-3) + 9 \Leftrightarrow y = -7x + 30.$

Câu 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là

- Ⓐ. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$ Ⓑ. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$ Ⓒ. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$ Ⓓ. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$

Lời giải

⇒ **Chọn A**

- Giao điểm của (C) và Ox là: $A(1;0)$
- Ta có: $y' = \frac{-3}{(2x+1)^2}$ nên $y'(1) = -\frac{1}{3}$
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;0)$ là: $y = y'(1)(x-1) + 0$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x-1)$ hay $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$

PP nhanh trắc nghiệm

- Casio: $y'(1) = -\frac{1}{3}$

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

- Ⓐ. $y = 3x + 1.$ Ⓑ. $y = -3x - 1.$ Ⓒ. $y = -3x + 1.$ Ⓓ. $y = -3x + 3.$

Lời giải

⇒ **Chọn C**

- Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà $y_0 = -2$.
- Khi đó $\frac{x_0+1}{x_0-2} = -2 \Rightarrow x_0+1 = -2(x_0-2) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow M(1; -2)$.
- Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1) = -3$.
- Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $M(1; -2)$ là $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1.$

PP nhanh trắc nghiệm

- Casio: $y'(1) = -3$

🔴 B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là

- Ⓐ. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$ Ⓑ. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$ Ⓒ. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$ Ⓓ. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $x = 1$.

- Ⓐ. $y = -5x + 3.$ Ⓑ. $y = 5x - 3.$ Ⓒ. $y = 3x - 5.$ Ⓓ. $y = -3x + 5.$

- Câu 3:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là
- (A). $y = x + 2$. (B). $y = -x + 2$. (C). $y = -x - 3$. (D). $y = x - 1$.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là
- (A). $y = 3x - 2$. (B). $y = -3x + 2$. (C). $y = x - \frac{2}{3}$. (D). $y = -x + \frac{2}{3}$.
- Câu 5:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2; 3)$ là
- (A). $y = 2x + 7$. (B). $y = 2x + 1$. (C). $y = -2x + 7$. (D). $y = -2x - 1$.
- Câu 6:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2 .
- (A). $y = -9x + 16$. (B). $y = -9x + 20$. (C). $y = 9x - 20$. (D). $y = 9x - 16$.
- Câu 7:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $M(-3; 2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?
- (A). $\frac{1}{2}$. (B). 2 . (C). 0 . (D). -2 .
- Câu 8:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + x$ tại điểm $M(2; 4)$.
- (A). $y = 3x$. (B). $y = 3x - 2$. (C). $y = 3x - 1$. (D). $y = -3x + 10$.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $A(-2; 3)$ là
- (A). $y = -2x - 1$. (B). $y = -2x - 7$. (C). $y = 2x + 1$. (D). $y = 2x + 7$.
- Câu 10:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là
- (A). $y = -2x - 5$. (B). $y = -2x + 1$. (C). $y = -2x - 2$. (D). $y = 10x - 13$.
- Câu 11:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là
- (A). $y = -3x + 13$. (B). $y = 3x - 5$. (C). $y = 3x + 13$. (D). $y = -3x - 5$.
- Câu 12:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là
- (A). $y = -9x - 3$ (B). $y = 9x - 26$ (C). $y = 9x + 2$ (D). $y = -9x - 26$
- Câu 13:** Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.
- (A). $\frac{9}{5}$. (B). $-\frac{5}{9}$. (C). $\frac{5}{9}$. (D). -10 .
- Câu 14:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- (A). $y = -2x + 1$. (B). $y = 2x + 1$. (C). $y = 3x - 2$. (D). $y = -3x - 2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

- (A). $y = 3x - 2$. (B). $y = -3x - 2$. (C). $y = 3x - 3$. (D). $y = 3x + 2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2; 2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

- (A). 9. (B). 0. (C). 24. (D). 45.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.C	4.C	5	6.D	7.A	8.B	9.D	10.B
11.A	12.B	13.C	14.C	15.A	16.A				

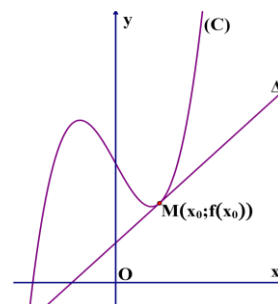
☒ Dạng ②. Tiếp tuyến của đồ thị biết hệ số góc k

⊗ - Phương pháp:

♦ **Đề cho hệ số góc tiếp tuyến bằng k**

↳ Viết PTTT của (C) tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$

- Hệ số góc tiếp tuyến: $f'(x_0) = k \Rightarrow x_0 = ?$
- Xác định $x_0 \Rightarrow y_0 = ?$
- Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



⊗ - Chú ý: Các vị trí tương đối cơ bản:

♦ Cho $\Delta_1: y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2: y = k_2x + m_2$. Ta có:

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 = m_2 \end{cases}$;
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{cases}$;
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$;
- Cho $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, ta có: Δ_1 tạo với Δ_2 góc $\alpha \Leftrightarrow \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \tan \alpha$;

↳ **Đặc biệt:** nếu $k_2 = 0$ thì: Δ_1 tạo với Δ_2 góc $\alpha \Leftrightarrow |k_1| = \tan \alpha$.

↳ **Hàm số bậc ba:** Tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc bé nhất khi $a > 0$ và lớn nhất khi $a < 0$

↳ A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.

(A). $\frac{9}{5}$.

(B). $-\frac{5}{9}$.

(C). $\frac{5}{9}$.

(D). -10 .

Lời giải

⇒ Chọn C

• $y = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{3-4x}{x-2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1$.

• Ta có: $y' = \frac{5}{(x-2)^2}$.

• Vậy hệ số góc cần tìm là $y'(-1) = \frac{5}{9}$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio: $y'(-1) = \frac{5}{9}$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

(A). $\frac{4}{3}$.

(B). $\frac{5}{3}$.

(C). $\frac{2}{3}$.

(D). $\frac{1}{3}$.

Lời giải

⇒ Chọn D

• Ta có hệ số góc: $y'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 2$

• Hệ số góc nhỏ nhất khi $y''(x_0) = 0 \Rightarrow 6x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$

• Thay $x_0 = \frac{1}{3}$ vào $y'(x_0) = \frac{5}{3}$

• Casio: $y'(x_0) = \frac{5}{3}$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C). Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2021$ là

(A). 2.

(B). 1.

(C). 3.

(D). 0.

Lời giải

⇒ Chọn D

• $y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$

• Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

• Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ nên

$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$

• Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là

$y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3x - 4\sqrt{2}$

• Với $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là

$y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3x + 4\sqrt{2}$

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio hỗ trợ tìm $x_0; y_0$

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2020$ là

(A). 2.

(B). 1.

(C). 0.

(D). 3.

Lời giải**PP nhanh trắc nghiệm****➡ Chọn A**

- Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

- Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

- Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2020$

$$\text{nên } y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, suy ra PTTT là: $y = -9(x+1) + 1$
 $\Leftrightarrow y = -9x - 8$

- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3$, suy ra PTTT là: $y = -9(x-3) - 3$
 $\Leftrightarrow y = -9x + 24$.

- Casio hỗ trợ tìm $x_0; y_0$

🔴 B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2; 2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

(A). 9.

(B). 0.

(C). 24.

(D). 45.

Câu 2: Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

(A). -3.

(B). 3.

(C). 4.

(D). 0.

Câu 3: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là

(A). $\frac{1}{2}$.(B). $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C). 1.

(D). 2.

Câu 4: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến với (C) , tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A). $k = 3$ (B). $k = 2$ (C). $k = 1$ (D). $k = 0$

Câu 5: Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

(A). $x = -3$.(B). $y = -4$.(C). $y = 4$.(D). $x = 3$.

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là:

- (A). $y - 16 = -9(x + 3)$. (B). $y = -9(x + 3)$. (C). $y - 16 = -9(x - 3)$. (D). $y + 16 = -9(x + 3)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2 - \frac{4}{x}$ có đồ thị (H) . Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 2$ và tiếp xúc với (H) thì phương trình của Δ là

- (A). $y = x + 4$. (B). $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$. (C). $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 6 \end{cases}$. (D). Không tồn tại.

Câu 8: Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2020$?

- (A). $y = x + 2021$. (B). $y = x + 4$.
(C). $y = x - 4; y = x + 28$. (D). $y = x - 2021$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau

- (A). 0. (B). 2. (C). 1. (D). Vô số.

Câu 10: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -9x - 7$ là

- (A). 1. (B). 3. (C). 4. (D). 2.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2020$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- (A). $\frac{4}{3}$. (B). $-\frac{4}{3}$. (C). $\frac{1}{3}$. (D). -1.

Câu 12: Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là

- (A). 1 (B). 0 (C). 2. (D). Vô số

Câu 13: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{2-x}$ cắt đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 + 1$ tại hai điểm A, B . Tiếp tuyến tại hai điểm A, B với đồ thị (C) có hệ số góc lần lượt là $k_1; k_2$. Tính tổng $k_1 + k_2$.

- (A). $k_1 + k_2 = 3$. (B). $k_1 + k_2 = \frac{5}{2}$. (C). $k_1 + k_2 = 1$. (D). $k_1 + k_2 = -\frac{5}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, (C) . Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là

- (A). $y = -3x - 1; y = -3x + 11$. (B). $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.
(C). $y = -3x + 5; y = -3x - 5$. (D). $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tiếp tuyến của vuông góc với đường thẳng $x+3y+2=0$ tại điểm có hoành độ

- (A). $x=0$. (B). $x=-2$. (C). $\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$. (D). $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=9x+10$ là

- (A). $y=9x+6, y=9x-28$. (B). $y=9x, y=9x-26$.
(C). $y=9x-6, y=9x-28$. (D). $y=9x+6, y=9x-26$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x-y+7=0$ là

- (A). $y=9x+25$. (B). $y=-9x-25$. (C). $y=9x-25$ (D). $y=-9x+25$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x-3y+6=0$.

- (A). $y = \frac{1}{3}x - 1$. (B). $y = \frac{1}{3}x + 1$. (C). $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. (D). $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

- (A). $y+16=-9(x+3)$. (B). $y=-9(x+3)$.
(C). $y-16=-9(x-3)$. (D). $y-16=-9(x+3)$.

Câu 20: Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{7}{3}$ mà tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm đó song song với trục tung.

- (A). vô số. (B). 2. (C). 0. (D). 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.C	5.B	6.A	7.C	8.C	9.D	10.D
11.A	12.B	13.B	14.A	15.C	16.D	17.C	18.D	19.C	20.C

☒ **Dạng ④.** Bài toán tìm tham số, diện tích tam giác, ...

☒ **-Phương pháp:**

- ◆ Ứng dụng phương trình tiếp tuyến của đồ thị
- ◆ Khai thác điều kiện của bài toán
- ◆ Giải quyết bài toán

👉A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

(A). $m \neq 0$.

(B). $m > 1$.

(C). $m \neq 1$.

(D). $m \in \emptyset$

Lời giải

⇒ **Chọn D**

- Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số
 - $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là
 - $y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$
 - Hệ số góc luôn dương
- $$\Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

•

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

(A). 3.

(B). $\frac{3}{2}$.

(C). 9.

(D). $\frac{9}{2}$.

Lời giải

⇒ **Chọn B**

- $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Theo đề $x_0 = 2; y_0 = 1; y'(x_0) = -1$.
- Suy ra pttt Δ là: $y = -x + 3$.
- Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(3; 0), B(0; 3)$.
- Do đó diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục tọa độ bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{9}{2}$.

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Casio

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$

(A). $m = 1$.

(B). $m = 2$.

(C). $m = \frac{11}{6}$.

(D). $m = \frac{6}{11}$.

Lời giải

⇒ **Chọn C**

- $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$
- Ta có $y' = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \geq m - \frac{7}{3}$

👉 **PP nhanh trắc nghiệm**

- Sử dụng: $y'' = 0$
- Suy ra $x_0 = \frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất

- Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc đó có giá trị $k = m - \frac{7}{3}$.
- Theo bài ra: $2k = -1 \Leftrightarrow 2\left(m - \frac{7}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{11}{6}$.
- $2\left(m - \frac{7}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{11}{6}$.

🔗B - Bài tập rèn luyện:

- Câu 1:** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.
- (A). $m = 3$. (B). $m = 2$. (C). $m = 1$. (D). $m = -2$.
- Câu 2:** Cho hàm số $y = x^3 - 1 - m(x+1)$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến tại (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?
- (A). 1. (B). 2. (C). 3. (D). 4.
- Câu 3:** Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.
- (A). $S = \frac{1}{2}$. (B). $S = 2$. (C). $S = -1$. (D). $S = 1$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x = 1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k \cdot f(-1) < 0$.
- (A). $m > 2$. (B). $m \leq -2$. (C). $-2 < m < 1$. (D). $m \geq 1$.
- Câu 5:** Gọi là tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 . Khi đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là:
- (A). $S = \frac{169}{6}$ (B). $S = \frac{121}{6}$ (C). $S = \frac{25}{6}$ (D). $S = \frac{49}{6}$
- Câu 6:** Đường thẳng $y = 9x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 1$ khi m bằng
- (A). -6 hoặc 26 . (B). -1 hoặc 3 . (C). -3 hoặc 1 . (D). 3 hoặc -5 .
- Câu 7:** Tìm m để đồ thị: $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (3m-4)x + 1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 2013 = 0$.
- (A). $m \leq 1$ (B). $-\frac{1}{2} \leq m$ (C). $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ (D). $-\frac{1}{2} < m < 1$
- Câu 8:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị là (C) . Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N , tìm tọa độ N .
- (A). $N(1; -1)$ (B). $N(2; 3)$ (C). $N(-4; -51)$ (D). $N(3; 19)$
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x + 1$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến với đồ thị (C) , hãy tìm phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất?

- Ⓐ. $y = -8x - 10$. Ⓑ. $y = x - 10$. Ⓒ. $y = -8x + 10$. Ⓓ. $y = -x + 10$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - mx + 2m - 3$ có đồ thị là (C) , với m là tham số thực. Gọi T là tập tất cả các giá trị nguyên của m để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương. Tính tổng các phần tử của T .

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 6. Ⓒ. -6. Ⓓ. -3.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của (C) đi qua gốc tọa độ O ?

- Ⓐ. 2. Ⓑ. 1. Ⓒ. 3. Ⓓ. 4.

Câu 12: Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

- Ⓐ. $y = x + 2$. Ⓑ. $y = x - 2$. Ⓒ. $y = -x + 2$. Ⓓ. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.D	4.C	5.A	6.A	7.C	8.C	9.C	10.D	11.B	12.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

Hướng dẫn giải

Câu 1:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Ta có: $y' = \frac{m+1}{(x+1)^2}$.
- Gọi $M(0; -m) \in (C_m)$; k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M và $d: y = 3x + 1$.
- Do tiếp tuyến tại M song song với d nên $k = 3 \Leftrightarrow y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + m = 3 \Leftrightarrow m = -2$

Câu 2:

- (C_m) giao với $Oy: M(0; 1-m)$
 $y' = 3x^2 - m, y(0) = -m$
- Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $M: y = -mx + 1 - m$
- Nếu $m = 0$ tiếp tuyến song song với Ox
- Xét $m \neq 0$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm tiếp tuyến và hai trục tọa độ
 $\Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m}; 0\right); B(0; 1-m)$.
- Ta có $S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right| |1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{cases}$.
- Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 3:

- Ta có:

$$\bullet x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet y' = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \text{Phương trình tiếp tuyến có dạng: } y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a - b = 1.$$

Câu 4:

$$\bullet \text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1; k = f'(1) = 4 + 2m; k \cdot f(-1) = 4 + 2m \cdot m - 1.$$

$$\bullet \text{Khi đó: } k \cdot f(-1) < 0 \Leftrightarrow (4 + 2m)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

Câu 5:

$$\bullet \text{Tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị là } M(-3; 4).$$

$$\bullet f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}, f'(-3) = 3.$$

$$\bullet \text{Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm } M(-3; 4) \text{ là:}$$

$$\bullet y = 3 \cdot (x + 3) + 4 \text{ hay } y = 3x + 13.$$

$$\bullet \text{Các giao điểm của tiếp tuyến này với các trục tọa độ là: } A(0; 13), B\left(-\frac{13}{3}; 0\right).$$

$$\bullet \text{Tam giác } OAB \text{ tạo thành có diện tích là:}$$

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{6}.$$

$$\bullet \text{Vậy } S = \frac{169}{6}.$$

Câu 6:

$$\bullet y' = 3x^2 + 6x.$$

$$\bullet \text{Đường thẳng } d: y = 9x + m \text{ có hệ số góc là } 9.$$

$$\bullet \text{Đường thẳng } d: y = 9x + m \text{ là tiếp tuyến của đường cong } y = x^3 + 3x^2 - 1 \text{ khi đó } y' = 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{Tại } A(1; 3) \text{ ta có } d: 3 = 9 + m \Leftrightarrow m = -6.$$

$$\bullet \text{Tại } A(-3; -1) \text{ ta có } d: -1 = -27 + m \Leftrightarrow m = 26.$$

Câu 7:

- Để tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x - y + 2012 = 0$ khi và chỉ khi $y' \cdot 1 = -1$ hay $mx^2 + (m+1)x + 3m - 3 = 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$. Đáp số: $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Câu 8:

- Tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$
- Ta có $y'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = y'(2) = 9$
- Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 9(x - 2) + 3 \Rightarrow y = 9x - 15$
- Xét phương trình $x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 2$
- Vậy $N(-4; -51)$ là điểm cần tìm

Câu 9:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- $y' = x^2 - 6x + 1$
- Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- Tiếp tuyến có hệ số góc là $k = y'(x_0) = x_0^2 - 6x_0 + 1 = (x_0 - 3)^2 - 8 \geq -8$.
- Do đó tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là $k = -8$ khi $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -14$.
- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -8(x - 3) - 14 \Rightarrow y = -8x + 10$

Câu 10:

- Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - m$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 - m = 3\left(x_0 - \frac{m}{3}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{3} + m\right) \geq -\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right)$.
- Để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương thì :
 $-\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0$.
 $\Rightarrow$ Tập các giá trị nguyên của m là: $T = \{-2; -1\}$. Vậy tổng các phần tử của T là: -3 .

Câu 11:

- Ta có $y' = -3x^2 + 2mx + m = -3\left(x - \frac{m}{3}\right)^2 + \frac{m^2}{3} + m \leq \frac{m^2}{3} + m$.

- Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{m}{3}$, khi đó hệ số góc tiếp tuyến là $f'(x_0) = \frac{m^2}{3} + m$ và tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = \left(\frac{m^2}{3} + m\right)\left(x - \frac{m}{3}\right) + \frac{2m^3}{27} + \frac{m^2}{3} + 1$
- Tiếp tuyến qua $O \Rightarrow 0 = -\frac{m^3}{27} + 1 \Rightarrow m = 3$.

Câu 12:

- Ta có $y = \frac{2x+3}{x+2}$ (C)

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

- Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$(d): y = \frac{1}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0+3}{x_0+2}$$

- Ta có $(d) \cap Ox = A(-2x_0^2 - 6x_0 - 6; 0)$; $(d) \cap Oy = B\left(0; \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 6}{(x_0+2)^2}\right)$

- Ta thấy tiếp tuyến (d) chắn trên hai trục tọa độ tam giác OAB luôn vuông tại O

- Để tam giác OAB cân tại O ta có $OA = OB \Rightarrow |-2x_0^2 - 6x_0 - 6| = \left| \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 6}{(x_0+2)^2} \right|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

- Ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn (d): $y = x$ và (d): $y = x + 2$.