

I. PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều lựa chọn (8 điểm – 12 câu hỏi – Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án – mỗi câu 0,4 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-m)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m \leq 1$. B. $m > 1$. C. $m = 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ đã cho bằng

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{70}}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{\sqrt{70}}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Câu 3. Cho tập M gồm các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M . Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng trăm nhỏ hơn chữ số hàng chục.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$ bằng 6.

- A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I cắt các cạnh SA , SC , SD lần lượt tại

M , N , P . Gọi m , n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$?

- A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{8}{5}$. C. $\frac{9}{5}$. D. 2.

Câu 6. Biết $\lim(a\sqrt{n^2+bn+1}-2n) = 1$, với a , b là các số thực cho trước. Khi đó, tổng $a^2 + b^2$ bằng

- A. 2. B. 5. C. 1. D. 12.

Câu 7. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Từ bảng trên ta có kết luận nào đúng?

- A. Đa số các con ong có tuổi thọ là 60 ngày.
B. Đa số các con ong có tuổi thọ là 76 ngày.
C. Đa số các con ong có tuổi thọ là 80 ngày.

D. Đa số các con ong có tuổi thọ là 56 ngày.

Câu 8. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Toàn mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

- A. 18. B. 22. C. 21. D. 20.

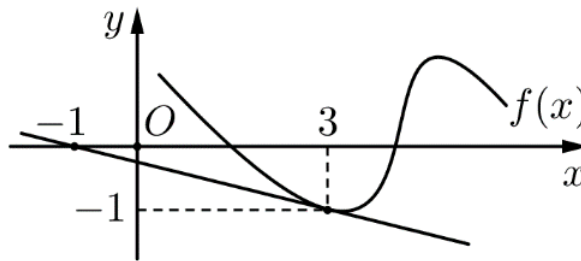
Câu 9. Cho hàm số $f(x) = mx + 2 + \frac{m^2 - m - 3}{x - 1}$ (với m là tham số). Khi hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị $f(5)$ bằng:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{71}{4}$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$. B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$.
C. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$. D. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ tại $x = 3$.

- A. $\frac{1}{36}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{36}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = SC$, đáy là tam giác đều cạnh a . Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng:

- A. $\frac{4a}{7}$ B. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$ C. $\frac{6a}{7}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 13. Cho tập $H = \{n \in \mathbb{N}^* | n \leq 100\}$. Chọn ngẫu nhiên ba phần tử thuộc tập H . Tính xác suất để chọn được ba phần tử lập thành một cấp số cộng.

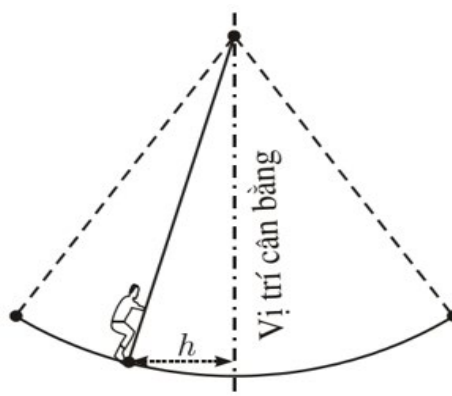
- A. $\frac{1}{132}$. B. $\frac{2}{275}$. C. $\frac{1}{66}$. D. $\frac{4}{275}$.

Câu 14. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (kết quả làm tròn phần nguyên).

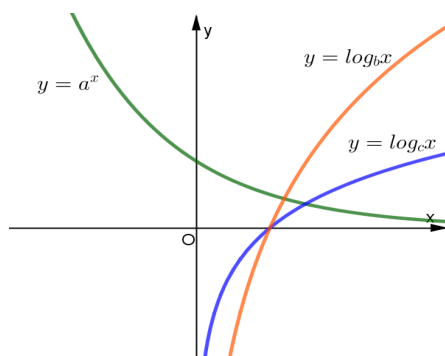
- A. 1385 N. B. 26 N. C. 37 N. D. 676 N.

- Câu 15.** Nam bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 4 500 000 đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì Nam được tăng lương 33%. Hỏi sau tròn 25 năm đi làm tổng tiền lương Nam nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?
- A. 5 901 519 000. B. 4 315 428 000.
C. 3 651 575 000. D. 4 844 125 000.

- Câu 16.** Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (mô phỏng ở hình vẽ dưới đây) được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại. Một người chơi đạt cảm giác mạnh nhất khi ở vị trí xa nhất so với vị trí cân bằng. Hỏi trong khoảng thời gian 1 phút, người chơi đu đạt được cảm giác mạnh bao nhiêu lần?

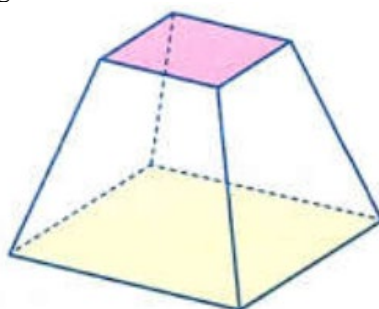


- A. 40 (lần). B. 20 (lần). C. 19 (lần). D. 39 (lần).
- Câu 17.** Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



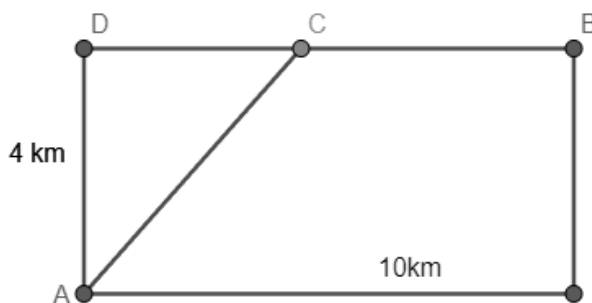
Chọn khẳng định đúng.

- A. $c > b > a$. B. $b > a > c$. C. $a > b > c$. D. $b > c > a$.
- Câu 18.** Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình vẽ minh họa). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



- A. 40538432 (đồng). B. 39538432 (đồng). C. 41538432 (đồng). D. 42538432 (đồng).

- Câu 19.** Một người cần phải chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí C trên bờ BD , sau đó chạy bộ từ C đến B . Biết rằng vận tốc chèo thuyền bằng 6km/h , vận tốc chạy bộ là 8km/h , khoảng cách từ vị trí A đến bờ BD bằng 4km , khoảng cách hai vị trí B, D bằng 10km . Tính khoảng cách giữa hai vị trí B, C để tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ là nhỏ nhất (Làm tròn đến kết quả hàng phần trăm).
- A. 4,56. B. 2,73. C. 5,46. D. 6,54.



- Câu 20.** Cho hàm số $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right)$. Tính giá trị của biểu thức
- $$T = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$
- A. $T = \frac{2025}{2}$. B. $T = 2025$. C. $T = 2024$. D. $T = 1012$.

II. PHẦN II. Trắc nghiệm đúng – sai (7,2 điểm – 6 câu – Trong mỗi mệnh đề chọn đúng hoặc sai)

- Câu 1.** Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Với mọi số thực $a > 0$, ta có $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$;
- b) Cho hàm số $f(x) = 3^{2x-8}$. Tập nghiệm bất phương trình $f'(x) > 18 \ln 3$ là $S = (5; +\infty)$;
- c) Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Phương trình $y' = 0$ có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$;
- d) Cho phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ là $S = (a; b)$. Khi đó $2a + b = 1$.

- Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 5x - 6)$

- a) Trên $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$, đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)\log 2}$.
- b) Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 3$ có dạng $S = [a; b) \cup (c; d]$. Khi đó $a + b + c + d = 10$.
- c) Tập xác định của hàm số $y = f(\ln(x))$ có dạng $D = (0; e^a) \cup (e^b; +\infty)$. Khi đó $6a + b = 0$
- d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình $f(2^x) = m$ có nghiệm.

- Câu 3.** Điểm kiểm tra khảo sát chất lượng đầu năm môn Văn của 2 nhóm học sinh được cho trong 2 bảng sau:

Nhóm học sinh 1

Điểm	Tần số
[4; 5)	1
[5; 6)	2
[6; 7)	4
[7; 8)	6
[8; 9)	3
[9; 10]	2
	$n = 18$

Nhóm học sinh 2

Điểm	Tần số
[4; 5)	1
[5; 6)	1
[6; 7)	3
[7; 8)	9
[8; 9)	3
[9; 10]	1
	$n = 18$

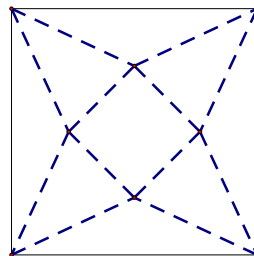
Các phát biểu sau đây đúng hay sai

- a) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu đã cho ở hai bảng trên là 6.
b) Điểm kiểm tra trung bình của hai nhóm học sinh trên là xấp xỉ bằng nhau.
c) Phương sai của mẫu số liệu của nhóm học sinh 1 là 1,73.
d) Điểm kiểm tra của nhóm học sinh 2 đồng đều hơn của nhóm học sinh 1.

Câu 4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích V_0 .

- a) Khi $S_0 = 2a^2, V_0 = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ thì chiều cao của hình chóp là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.
b) Khi $V_0 = \frac{a^3}{3}$ và M là trung điểm của SD thì thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng trên là $\frac{a^3}{9}$.
c) Khi $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ thì khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.
d) Cho tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích là V_0 (tham khảo hình vẽ).



Để mô hình kim tự tháp có thể tích V_0 là lớn nhất, thì diện tích đáy S_0 bằng 3216.

Câu 5.

Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{C}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

- a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
c) $\bar{C}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Câu 6.

Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9.

- a) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ có số khả năng là 120.

b) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, xác suất để lấy được 3 chiếc thẻ để ghép thành một số có 3 chữ số chia hết cho 3 là $\frac{7}{20}$.

c) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5 là $\frac{8}{15}$.

d) Phải rút ít nhất 4 thẻ để xác suất “có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 5” phải lớn hơn $\frac{2}{3}$

III. PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn (4,8 điểm – 6 câu – Trong mỗi câu hỏi chọn câu trả lời đúng – mỗi câu trả lời đáp án đúng 0,8 điểm)

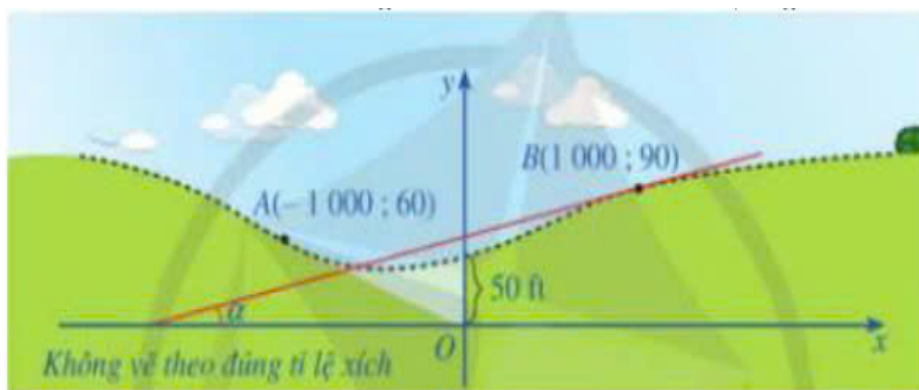
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc H của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$ bằng $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Khi đó $a+b$ bằng

Câu 2. Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương cạnh 5 m có 3 chú nhện sinh sống. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa 2 bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của 2 con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Chúng quy định không có bất kì 2 con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng (biết các sợi tơ khung căng và không nhùn) là $\frac{m}{p}\sqrt{n}$ với $m, n, p \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $m+n+p$.

Câu 3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$.

Câu 4. Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet, người ta có thể làm như sau:



Chọn hệ trục tọa độ Oxy với O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet. Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ hai điểm A, B và góc dốc α tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$. Trong hệ trục tọa độ Oxy , quan sát đường cong mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị hàm số đó trên đoạn $[-1000; 1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: α là góc tạo bởi tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó và chiều dương của trục Ox . Tính khoảng cách từ điểm thấp nhất của đoạn đường đến vị trí hai sườn đồi giao nhau (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 5.

Năm 2025 là một năm đặc biệt đối với người yêu toán học, vì 2025 là một số chính phương (tạm gọi là “**năm chính phương**”), và đây cũng là năm chính phương duy nhất của thế kỷ 21; muốn có được **năm chính phương** tiếp theo, ta phải chờ thêm 91 năm nữa, tức là năm 2116. Để chào đón **năm chính phương** đặc biệt này, một thầy giáo dạy toán đã gọi hai em học sinh lên bảng và cho mỗi em viết ngẫu nhiên một số chính phương mà em biết từ 1 đến 2025. Xác suất để hai em

viết ra hai số chính phương giống nhau và đều là số chia hết cho cả 3 và 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{I}$

và $\frac{m}{n}$ tối giản (biết cả hai em học sinh đều viết đúng số chính phương của mình và khả năng xuất hiện mỗi số chính phương là như nhau). Tính $2m + 3n$



Câu 6.

Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là *Global Positioning System*, viết tắt là **GPS**) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể bất kỳ trong không gian. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, một vệ tinh đang ở vị trí tọa độ $A(-1; -3; -5)$ thường xuyên truyền tín hiệu đến các trạm thu ở các vị trí $B(-1; 1; -1)$ và $C(1; -1; -1)$ trên mặt đất. Biết rằng mặt đất được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Người ta xác định được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài

$MA + MB + MC$ là nhỏ nhất. Tính giá trị $2a - 6b - 8c$ và làm tròn đến hàng phần chục ?.

----- **HẾT** -----

Thang điểm:

Phần I. TN: 20 câu x 0,4 đ

Phần II. Đ-S: 6 câu; Đúng 1 ý được 0,12 điểm; đúng 2 ý được 0,3 điểm; đúng 3 ý được 0,6 điểm; đúng 4 ý được 1,2 điểm.

Phần III. TLN: 6 câu x 0,8đ

PHẦN I. Câu trả lời trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 26. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

1C	2A	3B	4B	5C	6B	7B	8D	9D	10C
11A	12C	13C	14B	15D	16A	17A	18A	19C	20C

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 27 đến câu 31. Trong mỗi ý a),b),c),d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
a)Đ	a)S	a)Đ	a)S	a)Đ	a)Đ
b)Đ	b)Đ	b)Đ	b)S	b)S	b)S
c)S	c)Đ	c)S	c)Đ	c)Đ	c)Đ
d)S	d)S	d)Đ	d)S	d)Đ	d)S

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 32 đến câu 37, đáp số là số nguyên hoặc số thập phân có không quá 4 kí tự kể cả dấu “-” và dấu “;”.

Câu 1: 49

Câu 2: 21

Câu 3: 1

Câu 4: 337

Câu 5: 2027

Câu 6: 17,1

ĐÁP ÁN CHI TIẾT:

I. PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều lựa chọn (8 điểm – 12 câu hỏi – Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án – mỗi câu 0,4 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-m)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. $m \leq 1$.

B. $m > 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)(x-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 4m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ đã cho bằng

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{70}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{\sqrt{70}}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{70}}$

Câu 3. Cho tập M gồm các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng trăm nhỏ hơn chữ số hàng chục.

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

- Số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ đôi một khác nhau lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$: $|\Omega| = 5 \cdot A_4^2 = 60$

- Gọi A là biến cố: “số được chọn có chữ số hàng trăm nhỏ hơn chữ số hàng chục”

+ Vì chữ số hàng trăm nhỏ hơn chữ số hàng chục và $a \neq 0$. Đồng thời cứ 1 bộ 2 chữ số thì có 1 chữ số đứng trước bé hơn chữ số đứng sau. Suy ra số cách chọn $\overline{ab} = C_4^2$,

+ Cách chọn c : 4

Số cách chọn $\overline{abc}$: $n_A = C_4^2 \cdot 4 = 24$

$$\Rightarrow P_A = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$ bằng 6.

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 6 khi:

$$y(0) + y(2) = 6 \Leftrightarrow -m + \frac{2-m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -4.$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I cắt các cạnh SA , SC , SD lần lượt tại

M , N , P . Gọi m , n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$?

A. $\frac{7}{5}$.

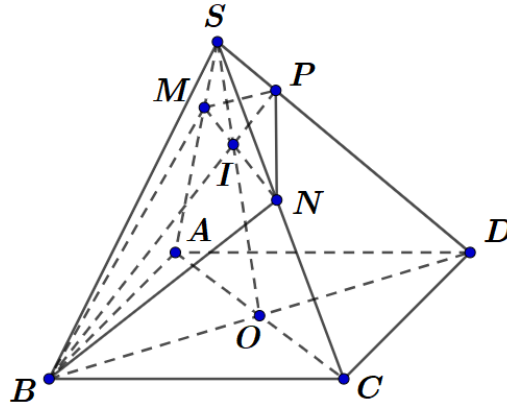
B. $\frac{8}{5}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. 2.

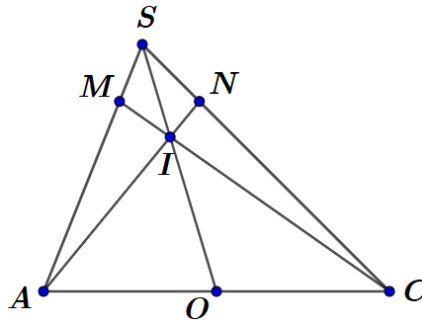
Lời giải

Chọn C



Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{PS}{PD} \cdot \frac{IO}{IS} \cdot \frac{BD}{BO} = 1 \Leftrightarrow \frac{PS}{PD} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5$.

Đặt $x = \frac{SA}{SM}$, $y = \frac{SB}{SN} = 1$, $z = \frac{SC}{SN}$, $t = \frac{SD}{SP} = 5$ với $x + z = y + t = 6 \Rightarrow z = 6 - x$



Khi $N \equiv C$, Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IO}{IS} \cdot \frac{CA}{CO} = 1 \Leftrightarrow \frac{MS}{MA} = \frac{IS}{IO} \cdot \frac{CO}{CA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{MS}{MA} = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow 1 \leq \frac{SA}{SM} \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$, khi đó ta có $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4xyzt} = \frac{3}{5x(6-x)}$ với $1 \leq x \leq 5$.

Ta có $x(6-x) = -(x-3)^2 + 9$ mà $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 5 \leq x(6-x) \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{15} \leq \frac{3}{5x(6-x)} \leq \frac{3}{25}$.

$\Rightarrow m = \frac{3}{25}$ và $n = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{9}{5}$.

- Câu 6.** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt{n^2 + bn + 1} - 2n) = 1$, với a, b là các số thực cho trước. Khi đó, tổng $a^2 + b^2$ bằng
- A. 2. B. 5. C. 1. D. 12.

Lời giải

Chọn B

$I = \lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt{n^2 + bn + 1} - 2n) = 1$ là số hữu hạn nên $a = 2$.

Mặt khác:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n^2 + bn + 1} - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2 + bn + 1) - 4n^2}{2\sqrt{n^2 + bn + 1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4bn + 4}{2\sqrt{n^2 + bn + 1} + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4b + \frac{4}{n}}{2\sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} = b.$$

Suy ra $I = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy $a^2 + b^2 = 5$.

Câu 7. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Từ bảng trên ta có kết luận nào đúng?

- A. Đa số các con ong có tuổi thọ là 60 ngày.
- B. Đa số các con ong có tuổi thọ là 76 ngày.
- C. Đa số các con ong có tuổi thọ là 80 ngày.
- D. Đa số các con ong có tuổi thọ là 56 ngày.

Lời giải

Chọn B

Tần số lớn nhất là 31 nên nhóm chứa một là [60;80). Ta có:

$$j = 4, a_4 = 60, m_4 = 31, m_3 = 23, m_5 = 29, h = 20.$$

$$\text{Do đó } M_o = 60 + \frac{31 - 23}{(31 - 23) + (31 - 29)} \times 20 = 76$$

Ý nghĩa: Đa số các con ong có tuổi thọ là 76 ngày

Câu 8. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Toàn mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

- A. 18.
- B. 22.
- C. 21.
- D. 20.

Lời giải

Chọn D

Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

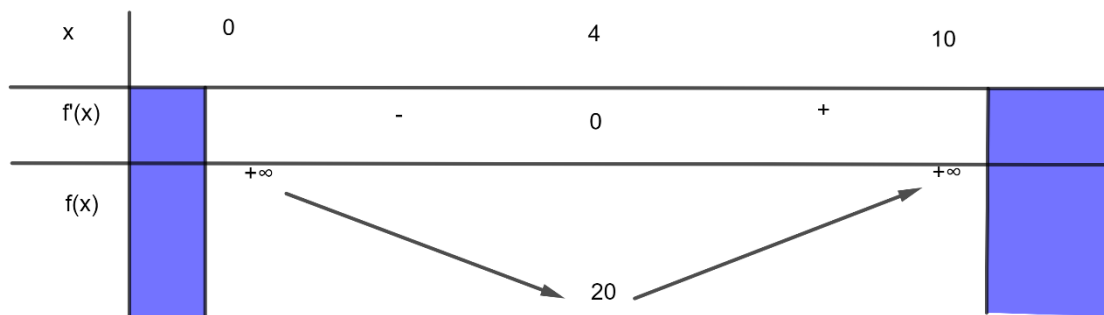
Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Toàn sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Toàn sử dụng hết số xăng được khoán.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{cases}$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}, x \in (0;10)$$



Dựa vào bảng biến thiên ta có ít nhất 20 ngày thì An và Toàn sử dụng hết lượng xăng được khoán.

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = mx + 2 + \frac{m^2 - m - 3}{x - 1}$ (với m là tham số). Khi hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị $f(5)$ bằng:
- A. $\frac{-3}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{71}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f'(x) = m - \frac{m^2 - m - 3}{(x - 1)^2}.$$

Như vậy $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow m = m^2 - m - 3$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Thử lại:

$$* \text{ Với } m = -1: f'(x) = -1 + \frac{1}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$		$+\infty$		-1	
		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$
		3			$-\infty$	$-\infty$

do đó $x = 0$ là điểm cực tiểu (không thỏa mãn).

$$* \text{ Với } m = 3: f'(x) = 3 - \frac{3}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$	11		

do đó $x = 0$ là điểm cực đại (thỏa mãn).

Khi đó $f(5) = \frac{71}{4}$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$.

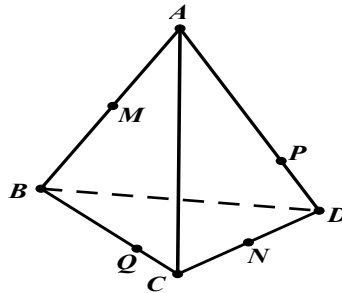
B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MP} \quad (1)$$

$$3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MQ} \quad (2)$$

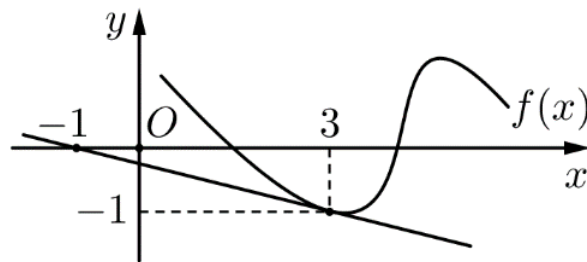
Cộng (1) và (2) theo vế ta có:

$$2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) - 3(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN} - 3(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ tại $x = 3$.

A. $\frac{1}{36}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{36}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$.

Theo yêu cầu bài toán phải tìm $h'(3)$.

Từ đồ thị suy ra $f'(3) = -\tan \alpha = -\frac{1}{4}$ và $f(3) = -1$.

Suy ra hệ số góc tiếp tuyến $k = h'(3) = \frac{f'(3) \cdot 3 - f(3)}{3^2} = \frac{1}{36}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = SC$, đáy là tam giác đều cạnh a . Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng:

A. $\frac{4a}{7}$

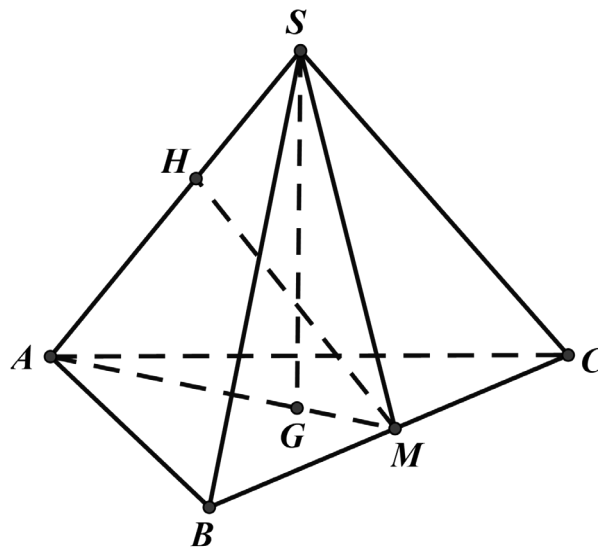
B. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$

C. $\frac{6a}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn C



Do hình chóp $S.ABC$ đều nên SG là đường cao của hình chóp (G là trọng tâm tam giác đều ABC). Kẻ $MH \perp SA$ tại H thì MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng MH .

Ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot SG = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = 4a, AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + 16a^2} = \frac{7a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{. Ta có } SA \cdot MH = SG \cdot AM \Rightarrow MH = \frac{SG \cdot AM}{SA} = \frac{3 \cdot 4a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{7a\sqrt{3}}{3}} = \frac{6a}{7}$$

Câu 13. Cho tập $H = \{n \in \mathbb{N}^* | n \leq 100\}$. Chọn ngẫu nhiên ba phần tử thuộc tập H . Tính xác suất để chọn được ba phần tử lập thành một cấp số cộng.

A. $\frac{1}{132}$.

B. $\frac{2}{275}$.

C. $\frac{1}{66}$.

D. $\frac{4}{275}$.

Lời giải

Chọn C

Có $H = \{1; 2; \dots; 100\}$, tập H có 100 phần tử, trong đó có 50 phần tử là số chẵn và 50 phần tử là số lẻ.

Gọi $H_1 = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$, $H_2 = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$.

Lấy 3 phần tử từ tập H , có $|\Omega| = C_{100}^3 = 161700$.

Gọi a, b, c là 3 số theo tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \frac{a+c}{2} = b$

Do $a, b, c \in H$ nên a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: a, c cùng chẵn. Chọn 2 phần tử thuộc H_2 có: C_{50}^2 (cách). Có duy nhất một

cách chọn $b = \frac{a+c}{2}$.

+ Trường hợp 2: a, c cùng lẻ. Chọn 2 phần tử thuộc H_1 có: C_{50}^2 (cách). Có duy nhất một cách

chọn $b = \frac{a+c}{2}$.

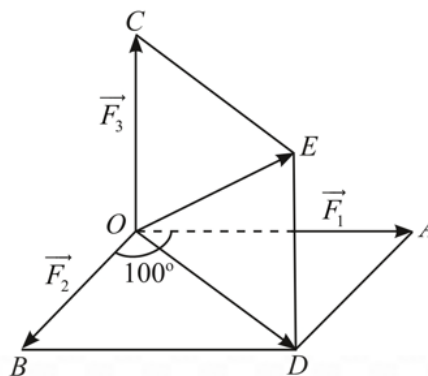
Qua 2 trường hợp có $|\Omega_A| = 1.C_{50}^2 + 1.C_{50}^2 = 2C_{50}^2 = 2450$.

Suy ra xác suất thỏa yêu cầu $p = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1}{66}$.

- Câu 14.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (kết quả làm tròn phần nguyên).
- A. 1385 N. B. 26 N. C. 37 N. D. 676 N.

Lời giải

Chọn B



Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1, \vec{OB} = \vec{F}_2, \vec{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2.BD.OB.\cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$ suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } OE &= \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ} \\ &= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092. \end{aligned}$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26 \text{ N}$.

Câu 15. Nam bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 4 500 000 đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì Nam được tăng lương 33%. Hỏi sau tròn 25 năm đi làm tổng tiền lương Nam nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 5 901 519 000.

B. 4 315 428 000.

C. 3 651 575 000.

D. 4 844 125 000.

Lời giải

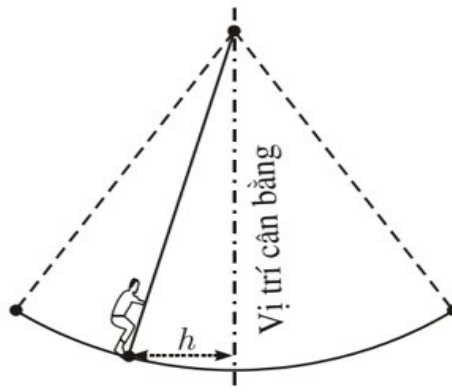
Chọn D

Mức lương 3 năm đầu: 45.10^5	Tổng lương 3 năm đầu: $36.45.10^5$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^5$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^6$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^6$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^7$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36.45.10^5.(1,33)^7$
Mức lương 1 năm tiếp theo: $45.10^5.(1,33)^8$	Tổng lương 1 năm tiếp theo: $12.45.10^5.(1,33)^8$

Tổng lương sau tròn 25 năm là

$$\begin{aligned} S &= 36.45.10^5 \cdot [1 + 1,33 + (1,33)^2 + \dots + (1,33)^7] + 12.(1,33)^8 \\ &= 36.45.10^5 \cdot \frac{1 - (1,33)^8}{1 - 1,33} + 12.45.10^5.(1,33)^8 = 4\,844\,124\,782. \end{aligned}$$

- Câu 16.** Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (mô phỏng ở hình vẽ dưới đây) được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại. Một người chơi đạt cảm giác mạnh nhất khi ở vị trí xa nhất so với vị trí cân bằng. Hỏi trong khoảng thời gian 1 phút, người chơi đu đạt được cảm giác mạnh bao nhiêu lần?



- A. 40 (lần). B. 20 (lần). C. 19 (lần). D. 39 (lần).

Lời giải

Chọn A

Người chơi đu đạt được cảm giác mạnh khi $h = |d|$ lớn nhất

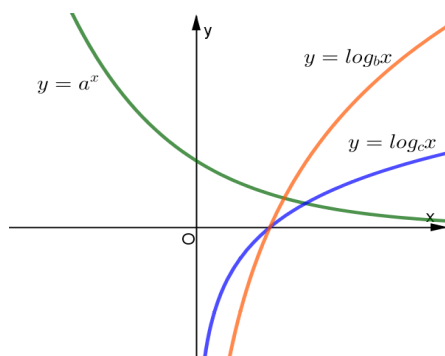
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian 1 phút

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z} \text{ ta có } \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k \leq 60 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{119}{3} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 5; \dots; 39\}$$

Vậy trong khoảng thời gian 1 phút người chơi đu đạt được cảm giác mạnh 40 lần

- Câu 17.** Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

- A. $c > b > a$. B. $b > a > c$. C. $a > b > c$. D. $b > c > a$.

Lời giải:

Chọn A

Hàm số $y = a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0 < a < 1$ (1).

Hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó $b > 1 > a$, $c > 1 > a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0 < x < 1$ thì $\log_b x < \log_c x$, suy ra $c > b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x > 1$ thì $\log_b x > \log_c x$, suy ra $c > b$.

Suy ra $1 < b < c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c > b > a$.

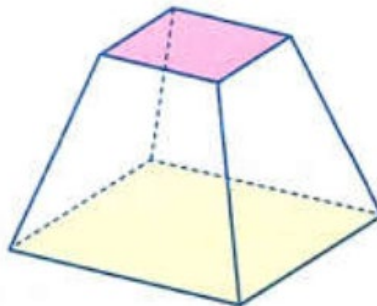
Cách khác:

Để thấy $a < 1$, $b > 1$, $c > 1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b; 1)$ và $C(c; 1)$

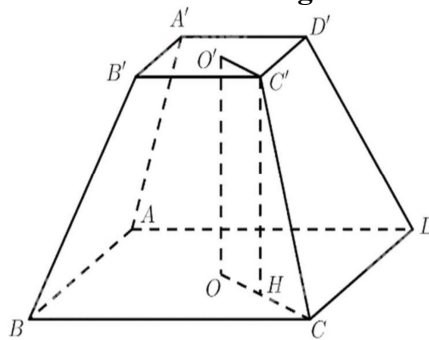
(hình vẽ). Để thấy $c > b$ vậy $c > b > a$.

Câu 18. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình vẽ minh hoạ). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



A. 40538432 (đồng). B. 39538432 (đồng). C. 41538432 (đồng). D. 42538432 (đồng).

Lời giải



Mô hình hoá chân tháp bằng cụt chóp tứ giác đều $ABCD A'B'C'D'$ với $O O'$ là tâm của hai đáy. Vậy $AB = 5$, $A'B' = 2$, $CC' = 3$

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2} AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông} \Rightarrow A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow C'O' = \frac{1}{2} A'C' = \sqrt{2}$$

Kẻ $C'H \perp OC$, ($H \in OC$)

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow OH = O'C' = \sqrt{2}, C'H = C'H \Rightarrow CH = OC - OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle DC'C' \text{ vuông tại } H \Rightarrow C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

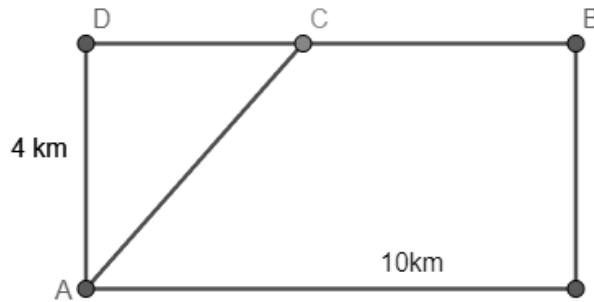
$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 25(m^2)$$

$$\text{Diện tích đáy bé là: } S = A'B'^2 = 4(m^2)$$

Thể tích hình chóp cụt là: $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S.S'} + S') = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3)$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: $\frac{39\sqrt{2}}{2} \cdot 1470000 \approx 40538432$ (đồng)

- Câu 19.** Một người cần phải chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí C trên bờ BD , sau đó chạy bộ từ C đến B . Biết rằng vận tốc chèo thuyền bằng $6km/h$, vận tốc chạy bộ là $8km/h$, khoảng cách từ vị trí A đến bờ BD bằng $4km$, khoảng cách hai vị trí B, D bằng $10km$. Tính khoảng cách giữa hai vị trí B, C để tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ là nhỏ nhất (Làm tròn đến kết quả hàng phần trăm).
- A. 4,56. B. 2,73. C. 5,46. D. 6,54.



Lời giải

Chọn C

Đặt $x = BC$ (km), $0 \leq x \leq 10$.

Ta có $AC = \sqrt{16 + (10 - x)^2}$ (km).

Từ đó suy ra tổng thời gian người đó đi bộ và chèo thuyền là:

$$t(x) = \frac{\sqrt{116 - 20x + x^2}}{6} + \frac{x}{8} \text{ (h)}.$$

Ta cần tìm x để $t(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } t'(x) = \frac{-20 + 2x}{12\sqrt{116 - 20x + x^2}} + \frac{1}{8}.$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-20 + 2x}{12\sqrt{116 - 20x + x^2}} + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2(20 - 2x) = 3\sqrt{116 - 20x + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 7x^2 - 140x + 556 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{70 - 12\sqrt{7}}{7}.$$

$$t(0) = \frac{\sqrt{29}}{3}, t(8) = \frac{23}{12}; t\left(\frac{70 - 12\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{15 + 2\sqrt{7}}{12}.$$

Vậy tổng thời gian nhỏ nhất đạt được khi $BC = x = \frac{70 - 12\sqrt{7}}{7} \approx 5,46$.

- Câu 20.** Cho hàm số $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right)$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

A. $T = \frac{2025}{2}$.

B. $T = 2025$.

C. $T = 2024$.

D. $T = 1012$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right) = \log_2 \left(\frac{(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2 + 16}}{2} \right)$.

$$f(x) + f(1-x) = \log_2 \left(\frac{(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2 + 16}}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{-(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2 + 16}}{2} \right) \\ = \log_2 4 = 2.$$

Vậy $T = \left[f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1012}{2025}\right) + f\left(\frac{1013}{2025}\right) \right] = 2 \cdot 1012 = 2024$.

II. PHẦN II. Trắc nghiệm đúng – sai (7,2 điểm – 6 câu – Trong mỗi mệnh đề chọn đúng hoặc sai)

Câu 1. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

a) Với mọi số thực $a > 0$, ta có $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$;

b) Cho hàm số $f(x) = 3^{2x-8}$. Tập nghiệm bất phương trình $f'(x) > 18 \ln 3$ là $S = (5; +\infty)$;

c) Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Phương trình $y' = 0$ có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$;

d) Cho phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ là $S = (a; b)$. Khi đó $2a + b = 1$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai.

a) **Mệnh đề đúng** vì

Với mọi số thực $a > 0$, ta có $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$;

b) **Mệnh đề đúng** vì

Ta có

$$f'(x) = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x-8} \Rightarrow f'(x) > 18 \ln 3 \Leftrightarrow 2 \ln 3 \cdot 3^{2x-8} > 18 \ln 3 \Leftrightarrow 3^{2x-8} > 9 \Leftrightarrow 2x-8 > 2 \Leftrightarrow x > 5.$$

c) **Mệnh đề sai** vì

Ta có $y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Suy ra: $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Mà $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ nên $-\frac{3\pi}{2} \leq k\frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -3 \leq k \leq 2$.

Và $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 6 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

d) **Mệnh đề sai** vì

Ta có

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m(1 - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m(1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x - m + m \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \notin \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos 2x = m \end{cases}$$

Ta có $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos 2x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Vậy $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Khi đó $2a + b = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 5x - 6)$

a) Trên $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$, đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)\log 2}$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 3$ có dạng $S = [a; b) \cup (c; d]$. Khi đó $a + b + c + d = 10$.

c) Tập xác định của hàm số $y = f(\ln(x))$ có dạng $D = (0; e^a) \cup (e^b; +\infty)$. Khi đó $6a + b = 0$

d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình $f(2^x) = m$ có nghiệm.

Lời giải

Chọn a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai.

a) Chọn Sai.

Trên $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$, Ta có: $f'(x) = \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)\ln 2}$

b) Chọn Đúng.

Điều kiện: $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 6 \end{cases}$.

Xét $f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 7$.

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 3$ là $S = [-2; -1) \cup (6; 7]$.

$\Rightarrow a = -2; b = -1; c = 6; d = 7 \Rightarrow a + b + c + d = 10$.

c) Chọn Đúng.

Ta có: $y = f(\ln(x)) = \log_2(\ln^2 x - 5 \ln x - 6)$.

Xét $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x - 5 \ln x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < -1 \\ \ln x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e^{-1} \\ x > e^6 \end{cases}$.

$\Rightarrow D = (0; e^{-1}) \cup (e^6; +\infty) \Rightarrow a = -1, b = 6 \Rightarrow 6a + b = 0$.

d) Chọn Sai.

Ta có: $y = f(2^x) = \log_2(2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6)$

Điều kiện: $2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < -1 \\ 2^x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_2 6$

có $f(2^x) = m \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6) = m \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6 = 2^m$.

Xét hàm số $g(x) = 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6; g'(x) = 2 \cdot 2^{2x} \ln 2 - 5 \cdot 2^x \ln 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{5}{2} < \log_2 6$$

Bảng xét dấu

x	$\log_2 6$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu và vì $2^m > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f(2^x) = m$ luôn có nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ và $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Câu 3. Điểm kiểm tra khảo sát chất lượng đầu năm môn Văn của 2 nhóm học sinh được cho trong 2 bảng sau:

Nhóm học sinh 1

Điểm	Tần số
$[4; 5)$	1
$[5; 6)$	2
$[6; 7)$	4
$[7; 8)$	6
$[8; 9)$	3
$[9; 10]$	2
	$n = 18$

Nhóm học sinh 2

Điểm	Tần số
$[4; 5)$	1
$[5; 6)$	1
$[6; 7)$	3
$[7; 8)$	9
$[8; 9)$	3
$[9; 10]$	1
	$n = 18$

Các phát biểu sau đây đúng hay sai

- a) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu đã cho ở hai bảng trên là 6.
b) Điểm kiểm tra trung bình của hai nhóm học sinh trên là xấp xỉ bằng nhau.
c) Phương sai của mẫu số liệu của nhóm học sinh 1 là 1,73.
d) Điểm kiểm tra của nhóm học sinh 2 đồng đều hơn của nhóm học sinh 1.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng.

a) Mệnh đề đúng vì

Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu đã cho ở 2 bảng trên là $R = 10 - 4 = 6$ cm.

b) Mệnh đề đúng, vì:

Điểm kiểm tra trung bình của nhóm học sinh 1 là

$$\bar{x}_1 = \frac{1.4,5 + 2.5,5 + 4.6,5 + 6.7,5 + 3.8,5 + 2.9,5}{18} = \frac{131}{18} \approx 7,3$$

Điểm kiểm tra trung bình của nhóm học sinh 2 là

$$\bar{x}_2 = \frac{1.4,5 + 1.5,5 + 3.6,5 + 9.7,5 + 3.8,5 + 1.9,5}{18} = \frac{22}{3} \approx 7,3$$

Vậy điểm kiểm tra trung bình của hai nhóm học sinh trên là xấp xỉ bằng nhau

c) Mệnh đề đúng, vì

Phương sai của mẫu số liệu của nhóm học sinh 1 là

$$s_1^2 = \frac{1.(4,5 - 7,3)^2 + 2.(5,5 - 7,3)^2 + 4.(6,5 - 7,3)^2 + 6.(7,5 - 7,3)^2 + 3.(8,5 - 7,3)^2 + 2.(9,5 - 7,3)^2}{18} = \frac{389}{225} \approx 1,73$$

d) Mệnh đề đúng, vì

Phương sai của mẫu số liệu của nhóm học sinh 2 là

$$s_2^2 = \frac{1 \cdot (4,5-7,3)^2 + 1 \cdot (5,5-7,3)^2 + 3 \cdot (6,5-7,3)^2 + 9 \cdot (7,5-7,3)^2 + 3 \cdot (8,5-7,3)^2 + 1 \cdot (9,5-7,3)^2}{18}$$

$$= \frac{563}{450} \approx 1,25$$

Vì $s_1^2 > s_2^2$ nên điểm kiểm tra của nhóm học sinh 2 đồng đều hơn của nhóm học sinh 1.

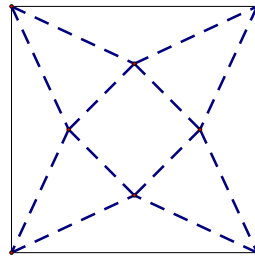
Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích V_0 .

a) Khi $S_0 = 2a^2, V_0 = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ thì chiều cao của hình chóp là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

b) Khi $V_0 = \frac{a^3}{3}$ và M là trung điểm của SD thì thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng trên là $\frac{a^3}{9}$.

c) Khi $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ thì khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.

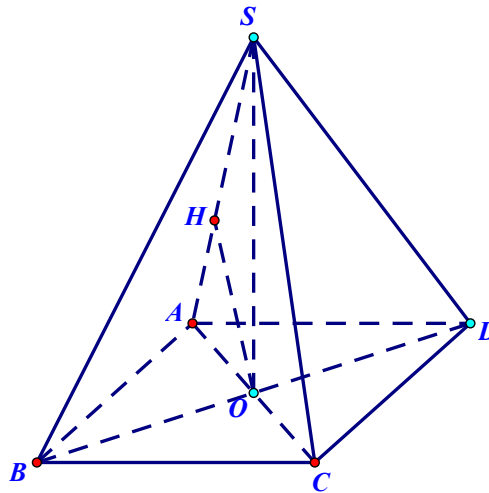
d) Cho tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích là V_0 (tham khảo hình vẽ).



Để mô hình kim tự tháp có thể tích V_0 là lớn nhất, thì diện tích đáy S_0 bằng 3216.

Lời giải

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.



a) Chiều cao của khối chóp là $h = \frac{3V_0}{S_0} = a\sqrt{5}$.

Chọn SAI.

b) Ta có $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(M, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} SO = \frac{1}{4} V_0 = \frac{a^3}{12}$.

Chọn SAI.

c) Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD, AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAO)$.

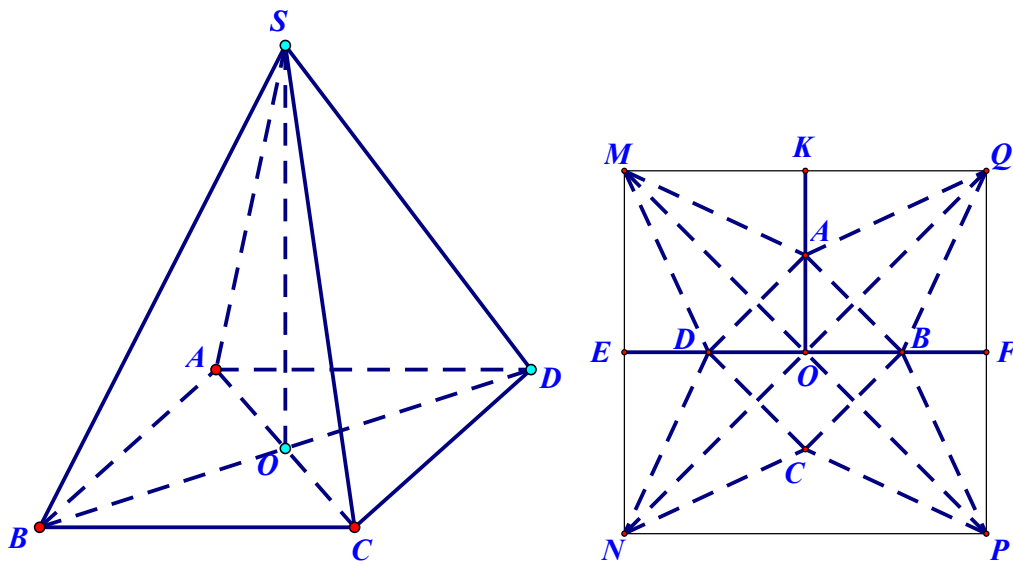
Dựng $OH \perp SA, H \in SA \Rightarrow BD \perp OH$. Suy ra $d(BD, SA) = OH = \frac{OA \cdot SO}{\sqrt{OA^2 + SO^2}}$.

$$\text{Vi } S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3 \sqrt{5}}{3} \Rightarrow AB = a, OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \frac{3V_0}{S_0} = a\sqrt{5}.$$

$$d(BD, SA) = OH = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + 5a^2}} = \frac{a\sqrt{55}}{11}.$$

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $a = 180, h = 98$.



Gọi cạnh đáy của mô hình kim tự tháp bằng $x = AB = BC = CD = AD$.

Gọi O là tâm hình vuông $MNPQ$ cạnh 50 cm $\Rightarrow O$ cũng là tâm hình vuông $ABCD$.

Xét tam giác OAD vuông cân tại O nên $OD = OA = \frac{x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AK = OK - OA = 25 - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác vuông MKA có: $MA = \sqrt{MK^2 + KA^2} = \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$

Giả sử sau khi gấp lên (với $S \equiv M \equiv N \equiv P \equiv Q$), ta được hình chóp $S.ABCD$, có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{MA^2 - OA^2} = \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{5}{3} \sqrt{x^4 (50 - \sqrt{2}x)} = \frac{40}{3} \sqrt{\frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot (50 - \sqrt{2}x)} \leq \frac{40}{3} \sqrt{\frac{50}{5}} = \frac{40\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20\sqrt{2}$.

Vậy V_0 đạt giá trị lớn nhất là $\frac{40\sqrt{10}}{3}$ khi đó $S_0 = 3200$.

Chọn SAI.

Câu 5. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố

định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{C}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{C}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Lời giải

a) **Đúng:** Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) **Sai:** Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \times 100^2 + 0,15 \times 100 + 5 = 25$.

c) **Đúng:** Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là:

$$\bar{C}(x) = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}.$$

d) **Đúng:** Xét hàm số $\bar{C}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$, $0 < x \leq 200$.

Ta có $\bar{C}'(x) = \frac{5}{10^4} - \frac{5}{x^2}$, $\bar{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100$ (do $x \in (0; 200]$)

Bảng biến thiên:

x	0	100	200
$\bar{C}'(x)$		– 0 +	
$\bar{C}(x)$	$+\infty$	0,25	0,275

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{C}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

Câu 6.

Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9.

a) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ có số khả năng là 120.

b) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, xác suất để lấy được 3 chiếc thẻ để ghép thành một số có 3 chữ số chia hết cho 3 là $\frac{7}{20}$.

c) Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5 là $\frac{8}{15}$.

d) Phải rút ít nhất 4 thẻ để xác suất “có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 5” phải lớn hơn $\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Số cách lấy 3 thẻ từ 10 thẻ là C_{10}^3 nên ta có $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Chọn ĐÚNG.

b) Để ghép ba tấm thẻ thành số có ba chữ số chia hết cho 3 thì tổng của chúng phải chia hết cho 3.

Đặt $A = \{0; 3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$ và $C = \{2; 5; 8\}$.

TH 1. Rút được ba tấm thẻ cùng thuộc một tập A hoặc B hoặc C là $C_4^3 + 1 + 1 = 6$.

TH 2. Rút được một tấm thẻ thuộc tập A , một tấm thuộc tập B và một tấm thuộc C là $C_4^1 + C_3^1 + C_3^1 = 10$.

Như vậy, có $6 + 10 = 16$ cách rút thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra, xác suất lấy được ba tấm thẻ thỏa mãn là $P = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$.

Chọn SAI.

c) Gọi biến cố A : “3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5”. Để cho biến cố A xảy ra thì trong 3 thẻ lấy được phải có thẻ mang chữ số 0 hoặc chữ số 5 $\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố “3 thẻ lấy ra không có thẻ mang chữ số 0 và cũng không có thẻ mang chữ số 5”, có C_8^3 cách.

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = C_8^3 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{7}{15} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{8}{15}.$$

Chọn ĐÚNG.

d) Gọi số thẻ cần rút là x ($0 \leq x \leq 9; x \in \mathbb{N}$), suy ra $n(\Omega) = C_{10}^x$.

Gọi A là biến cố: “Trong số x thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 5”

Thì $\bar{A}$ là biến cố: “Trong số x thẻ rút ra không có thẻ nào ghi số chia hết cho 5”

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = C_8^x.$$

$$\text{Ta có } P(\bar{A}) = \frac{C_8^x}{C_{10}^x} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_8^x}{C_{10}^x}.$$

$$\text{Do đó } P(A) > \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - \frac{C_8^x}{C_{10}^x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{(10-x)(9-x)}{9 \cdot 10} > \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 19x}{10 \cdot 9} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x^2 + 19x - 60 > 0 \Leftrightarrow 4 < x < 15.$$

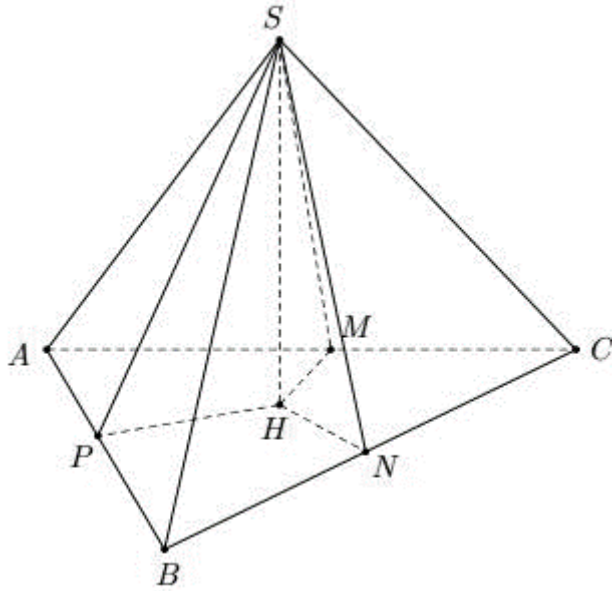
$$\text{Vì } \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq 9 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 4 < x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow x \in \{5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Chọn SAI.

III. PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn (4,8 điểm – 6 câu – Trong mỗi câu hỏi chọn câu trả lời đúng – mỗi câu trả lời đúng 0,8 điểm)

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc H của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$ bằng $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC, BC, AB .

$$\text{Đặt } SH = h \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Ta có } SP = \frac{2S_{SAB}}{AB} = 2S_{SAB} = \frac{6V_{S.ABC}}{d(C, (SAB))} = \frac{h\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{30}}{20} = h\sqrt{10}.$$

$$\Rightarrow PH = \sqrt{SP^2 - SH^2} = 3h$$

Tương tự, tính được $HM = 2h, HN = h$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} + S_{HBC} = \frac{1}{2}(HP + HM + HN) \Leftrightarrow 3h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{48}.$$

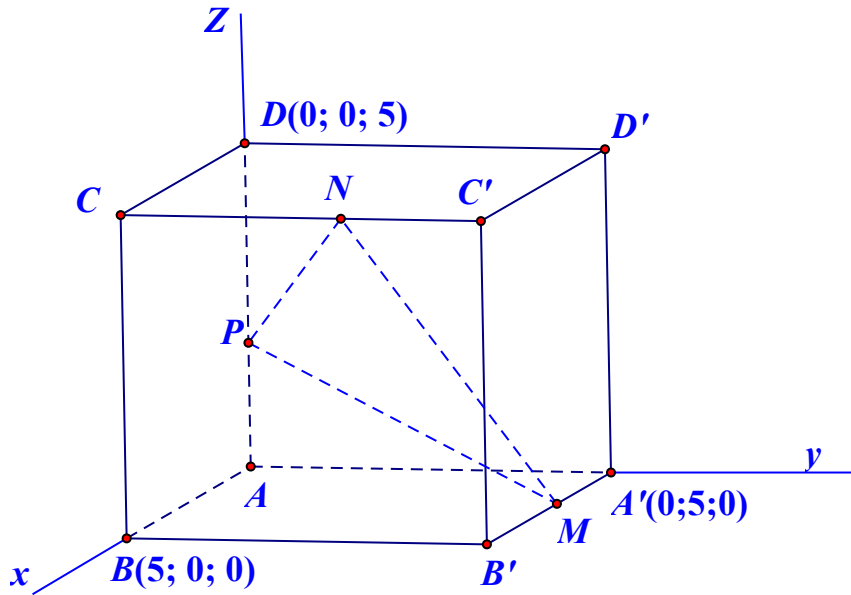
Suy ra $a + b = 49$.

Câu 2. Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương cạnh $5m$ có 3 chú nhện sinh sống. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa 2 bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí của 2 con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Chúng quy định không có bất kì 2 con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng (biết các sợi tơ khung căng và không nhùn) là $\frac{m}{p}\sqrt{n}$ với $m, n, p \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $m + n + p$.

Lời giải

Trả lời: 21

Bài toán này ta sẽ giải quyết bằng cách ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian. Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, và dựa vào yêu cầu về vị trí 3 con nhện ta xác định là các điểm M, N, P nằm trên các cạnh $A'B', CC', AD$ như hình vẽ.



Yêu cầu bài toán là cần tìm tọa độ của 3 điểm M, N, P để chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Đặt $M(x; 5; 0), P(0; 0; z), N(5; y; 5)$. Chu vi tam giác MNP là:

$$\begin{aligned} MN + NP + PQ &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2 + 5^2} + \sqrt{5^2 + y^2 + (z-5)^2} + \sqrt{x^2 + 5^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(5-x)^2 + (y-5)^2 + 5^2} + \sqrt{y^2 + (z-5)^2 + 5^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 5^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức vecto :

$$\begin{aligned} \Rightarrow MN + NP + PM &\geq \sqrt{(5-x+y)^2 + (y+z-10)^2 + 10^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 5^2} \\ &\geq \sqrt{(5-x+y+z)^2 + (y-5+z-5-x)^2 + (5+5+5)^2} \\ &= \sqrt{2\left(y+z-x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{2} + (5+5+5)^2} \geq 15\sqrt{\frac{3}{2}} = 15\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} y+z-x=\frac{5}{2} \\ \frac{5-x}{y}=\frac{y-5}{z-5}=\frac{5}{5} \\ \frac{5-x+y}{z}=\frac{y+z-10}{-x}=\frac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2y-x=\frac{5}{2} \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{5}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm là $\frac{15}{2}\sqrt{6} \Rightarrow m+n+p=21$

Câu 3. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$.

Lời giải

Trả lời: 1

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có:

$$\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+3} + (\sqrt{x+3} - 1)^2 = \log_2(x+1) + x^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{1 + 2 \ln 2 (t^2 - t)}{t \ln 2} = \frac{2 \ln 2 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - \ln \sqrt{2})}{t \ln 2} > 0 \quad \forall t > 0.$$

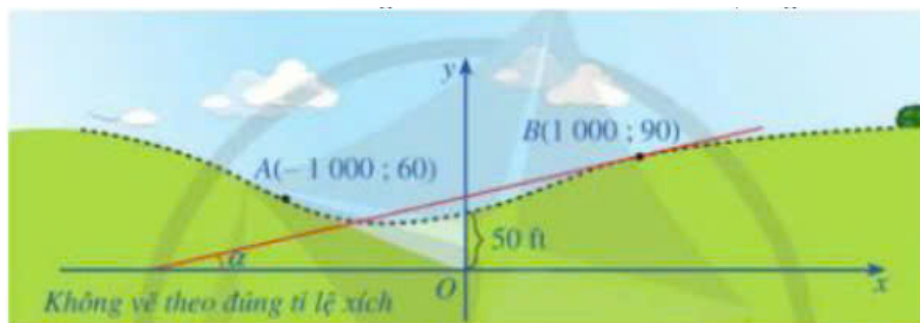
Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+3}) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 1.

Câu 4. Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet, người ta có thể làm như sau:



Chọn hệ trục tọa độ Oxy với O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet. Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ hai điểm A, B và góc dốc α tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$. Trong hệ trục tọa độ Oxy , quan sát đường cong mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị hàm số đó trên đoạn $[-1000; 1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: α là góc tạo bởi tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó và chiều dương của trục Ox . Tính khoảng cách từ điểm thấp nhất của đoạn đường đến vị trí hai sườn đồi giao nhau (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 337

Theo giả thiết ta có:

Đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đi qua hai điểm $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$;

ĐTHS cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; 50)$

Và α là góc tạo bởi tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó và chiều dương của trục Ox ;
 $\tan \alpha = 0,04 \Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến của ĐTHS $f(x)$ tại điểm B là $f'(1000) = 0,04$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(-1000) = 60 \\ f(1000) = 90 \\ d = 50 \\ f'(1000) = 0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1000^3 a + 1000^2 b - 1000c + d = 60 \\ 1000^3 a + 1000^2 b + 1000c + d = 90 \\ d = 50 \\ 3 \cdot 1000^2 a + 2000b + c = 0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2,5 \cdot 10^{-9} \\ b = 25 \cdot 10^{-6} \\ c = 0,0175 \\ d = 50 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = -2,5 \cdot 10^{-9} x^3 + 25 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,0175x + 50$

Điểm thấp nhất của đoạn đường là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)$

Ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M\left(-\frac{1000}{3}; \frac{1270}{27}\right)$

Vậy khoảng cách từ điểm thấp nhất của đoạn đường đến vị trí hai sườn đồi giao nhau là:

$$MO = \sqrt{\left(-\frac{1000}{3}\right)^2 + \left(\frac{1270}{27}\right)^2} \approx 337$$

Câu 5. Năm 2025 là một năm đặc biệt đối với người yêu toán học, vì 2025 là một số chính phương (tạm gọi là “**năm chính phương**”), và đây cũng là năm chính phương duy nhất của thế kỷ 21; muốn có được **năm chính phương** tiếp theo, ta phải chờ thêm 91 năm nữa, tức là năm 2116. Để chào đón **năm chính phương** đặc biệt này, một thầy giáo dạy toán đã gọi hai em học sinh lên bảng và cho mỗi em viết ngẫu nhiên một số chính phương mà em biết từ 1 đến 2025. Xác suất để hai em viết ra hai số chính

phương giống nhau và đều là số chia hết cho cả 3 và 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản (biết cả hai em học sinh đều viết đúng số chính phương của mình và khả năng xuất hiện mỗi số chính phương là như nhau). Tính $2m + 3n$



Giải:

Các năm chính phương cho đến 2025 là: $1^2; 2^2; 3^2; \dots; 45^2$

Mỗi em học sinh có 45 lựa chọn để viết một số chính phương nên $n(\Omega) = 45^2$

Các số chính phương chia hết cho cả 3 và 5 là: $15^2 = 225; 30^2 = 900; 45^2 = 2025$

Số cách để cả hai em viết ra cùng một số chính phương chia hết cho 3 và 5 là:

$$n(A) = 3.1 = 3$$

Xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{45^2} = \frac{1}{675} = \frac{m}{n} \Rightarrow \boxed{2m + 3n = 2027}$

Câu 6. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là *Global Positioning System*, viết tắt là **GPS**) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể bất kỳ trong không gian. Với hệ trục tọa độ *Oxyz* thích hợp, một vệ tinh đang ở vị trí tọa độ $A(-1; -3; -5)$ thường xuyên truyền tín hiệu đến các trạm thu ở các vị trí $B(-1; 1; -1)$ và $C(1; -1; -1)$ trên mặt đất. Biết rằng mặt đất được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Người ta xác định được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài $MA + MB + MC$ là nhỏ nhất. Tính giá trị $2a - 6b - 8c$ và làm tròn đến hàng phần chục ?.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0; 4; 4) \\ \overrightarrow{AC} &= (2; 2; 4) \end{aligned} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; 8; -8) = 8(1; 1; -1).$$

Mặt phẳng (ABC) qua $A(-1; -3; -5)$, vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$ nên có phương trình $x + y - z - 1 = 0$.

Ta có $d(O, (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{3}} < R$ nên (ABC) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - (d(O, (ABC)))^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn điểm D thuộc (C) sao cho $\triangle BCD$ đều, suy ra $D(1; 1; 1)$.

Xét điểm M thuộc cung nhỏ BC, lấy E thuộc đoạn DM sao cho $MC = ME$.

Mặt khác $\angle CME = \angle CBD = 60^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD). Vì vậy tam giác CME đều. Xét hai tam giác $\triangle CMB$ và $\triangle CED$ có

$$CM = CE, CB = CD$$

$$\widehat{CBM} = \widehat{CDE} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung CM)}$$

Do đó hai tam giác $\triangle CMB, \triangle CED$ bằng nhau, suy ra $MB = ED$. Khi đó

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= MA + ME + ED \geq AD = \sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2 + (1+5)^2} = 2\sqrt{14} \\ &\approx 7,48. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \in AD \cap (S)$ hay $M = AD \cap (C)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (2; 4; 6)$; đường thẳng AD có phương trình tham số

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 + 3t \end{aligned}$$

Thay phương trình AD vào phương trình (S) thì:

$$\begin{aligned} (1+t)^2 + (1+2t)^2 + (1+3t)^2 &= 3 \Rightarrow t(7t+6) = 0 \\ \Rightarrow t &= 0 \text{ hoặc } t = -\frac{6}{7}. \end{aligned}$$

- Với $t = 0$ ta có điểm $D(1; 1; 1)$.

- Với $t = -\frac{6}{7}$ ta có điểm $M(\frac{1}{7}; -\frac{5}{7}; -\frac{11}{7})$; suy ra

$$2a - 6b - 8c = \frac{2}{7} + \frac{5.6}{7} + \frac{11.8}{7} = \frac{120}{7} \approx 17,1.$$

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>