

LÊ BÁ BẢO

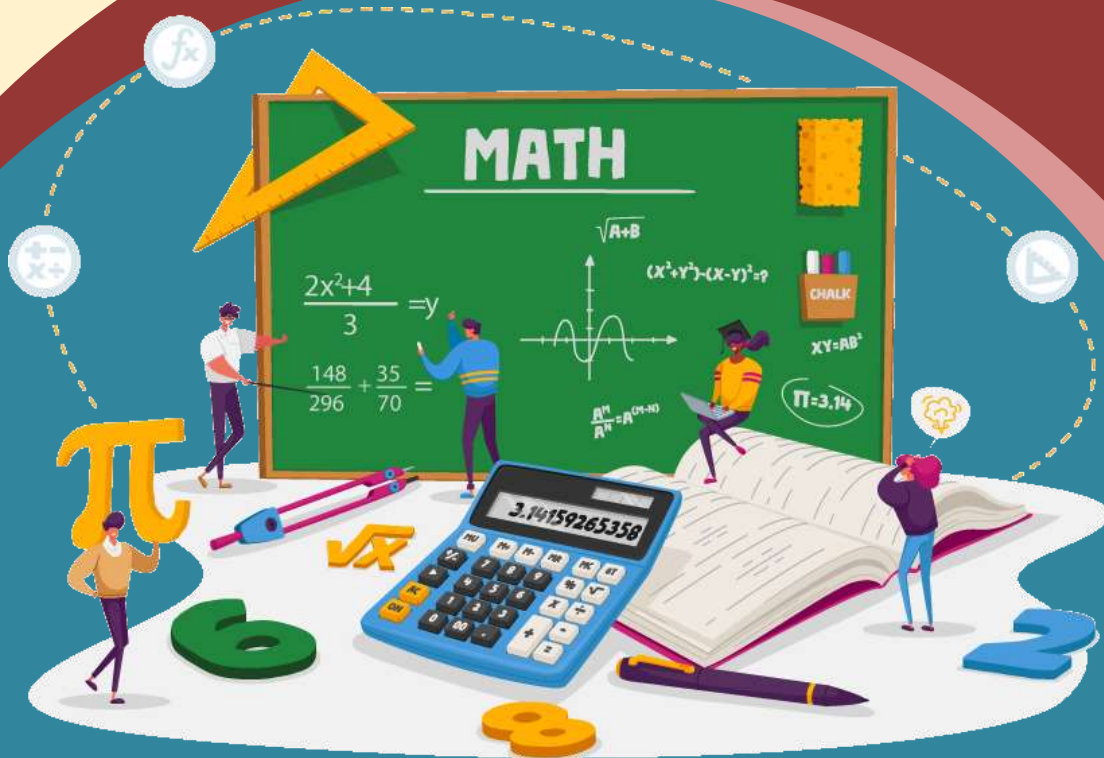
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

TOÁN II

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

GIỚI HẠN DÃY SỐ



CHƯƠNG IV

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chủ đề 1:

GIỚI HẠN DÃY SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Kết quả

- +) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- +) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- +) Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi $n \geq 1$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số

a) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &= a + b; & \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) &= a - b; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) &= a \cdot b; & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0) \end{aligned}$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi hạn (u_n) với công bội q . Khi đó: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Khi $n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$ (tổng của cấp số nhân lùi vô hạn)

Kết quả:
$$S = \frac{u_1}{1 - q}; (|q| < 1)$$

4. Giới hạn vô cực của dãy số

a. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b. Kết quả

+) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương;

+) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ với $q > 1$.

c. Quy tắc

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Để thuận tiện khi tiếp cận các kho bài tập từ ngân hàng, tác giả xin phép dùng kí hiệu $\lim u_n$ thay cho kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n} \right)$.

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{5n+3}$.

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4n + 7}{7n^2 + 3}$.

d) $I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{5n^2 + 2n + 1}$.

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)^2 (5+3n^3)}{(3n+4)^3 (1-n)^2}$.

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^6}{(n+2)^4 (2n-1)^2}$.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)$.

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n + 3 \cdot 7^n}$.

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.

d) $I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 3^n}$.

Câu 4: Tính các tổng sau:

a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

Câu 5: Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $\alpha = 0,353535\dots$

b) $\beta = 5,231231\dots$

Câu 6: Tính giới hạn $\lim \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} \right)$.

Câu 7: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2} + 4n}$.

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 4} + 5n}{\sqrt{n^2 + 2} + n}$.

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{n^2 + 2n + 9}.$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 5}{5n^2 + \sqrt{9n^4 + 1}}.$$

Câu 8: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n + 1).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n^5 + 1).$$

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n + 1}.$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{2 - n}.$$

Câu 9: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt{n^2 + n + 5}).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 + n + 5}).$$

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 1 - \sqrt{4n^2 + 2}).$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$e) I_5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - \sqrt{n^6 + n^3 + 10}).$$

Câu 10: Tính giới hạn: $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n})$.

Câu 11: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5}).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1 - \sqrt[3]{n^3 + 4n^2}).$$

Câu 12: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5}).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3}).$$

Câu 13: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{4n^2 + 1}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$$

Câu 14: Tính các giới hạn sau:

$$a) M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

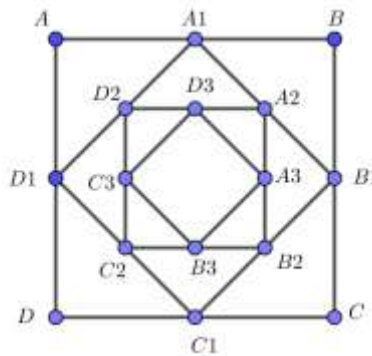
$$b) N = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \right].$$

Câu 15: Biết các số thực a và b thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2 + bn + 1}{2n + 5} = 3$. Tính $T = a + 5b$.

Câu 16: Biết các số thực a và b thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (an - \sqrt{n^2 + bn + 7}) = 1$. Tính $T = a + b$.

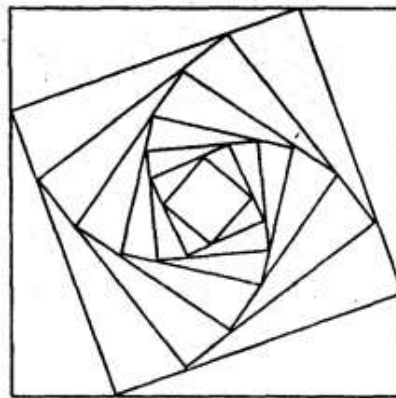
Câu 17: Tìm số nguyên dương a , thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4^{n+a} + 2^{n+1}}{3^n + 4^n}} = 4$.

Câu 18: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy (tham khảo hình vẽ).



Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots$ bằng 8 thì a bằng bao nhiêu?

Câu 19: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (tham khảo hình vẽ).



Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \dots\}$). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 20: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

B. $\lim C = C$ (C là hằng số).

C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Câu 21: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

B. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

Câu 22: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).

B. $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).

C. $\lim n^k = 0$ với k nguyên dương.

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Câu 23: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim \frac{1}{2^n} = 0$.

B. $\lim \frac{3}{n+1} = 0$.

C. $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) = 1$.

D. $\lim (-2)^n = +\infty$.

Câu 24: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.

B. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.

Câu 25: Với $(u_n); (v_n)$ là các dãy số thực, tìm khẳng định sai.

A. Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n \cdot v_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n v_n = 0$.

Câu 26: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim (-n^3 + 2020) = -\infty$.

B. $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

C. $\lim n^{2022} = +\infty$.

D. $\lim \left(-\frac{1}{n} \right) = -\infty$.

Câu 27: $\lim (2^n - 1)$ bằng

A. -1 .

B. 1 .

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim (u_n + 3) = 0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 3 .

B. -3 .

C. 2 .

D. 0 .

Câu 29: Cho $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 2$. Khi đó $\lim (u_n - v_n)$ bằng

A. -5 .

B. -1 .

C. 5 .

D. 1 .

Câu 30: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$, dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim (u_n \cdot v_n)$ bằng

A. 15 .

B. 8 .

C. 5 .

D. 3 .

Câu 31: Tính $A = \lim \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)$.

A. $A = 3$.

B. $A = -\infty$.

C. $A = +\infty$.

D. $A = 0$.

Câu 32: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \left(\frac{8}{3} \right)^n$.

B. $\lim 4^n$.

C. $\lim \left(\frac{1}{4} \right)^n$.

D. $\lim 2^n$.

Câu 33: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{\pi} \right)^n$.

B. $\left(\frac{1}{3} \right)^n$.

C. $\left(\frac{5}{3} \right)^n$.

D. $\left(-\frac{5}{3} \right)^n$.

Câu 34: $\lim \left(\frac{1}{2} \right)^n$ bằng

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 0 .

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 35: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0 ?

- A. $\lim \left(\frac{\pi}{4} \right)^n$. B. $\lim \left(\frac{4}{3} \right)^n$. C. $\lim \frac{1-3n}{5n+1}$. D. $\lim n^{2021}$.

Câu 36: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy có giới hạn 0 ?

- A. $u_n = \frac{n^3+n}{n^2+2}$. B. $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2n+3}$. C. $u_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3}$. D. $u_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$.

Câu 37: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy có giới hạn 0 ?

- A. $u_n = \frac{n^3+n}{n^2+2}$. B. $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2n+3}$. C. $u_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3}$. D. $u_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$.

Câu 38: Tính $\lim \frac{1}{n^8}$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. $+\infty$.

Câu 39: Giá trị $\lim \frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

- A. $\frac{19}{18}$. B. $\frac{1}{18}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{19}$.

Câu 40: $\lim \frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$ bằng

- A. -1. B. $+\infty$. C. 0. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 41: Tính giới hạn $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$.

- A. $J = -\frac{3}{2}$. B. $J = 2$. C. $J = 0$. D. $J = -2$.

Câu 42: Tính giới hạn $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$.

- A. $J = -\frac{3}{2}$. B. $J = 2$. C. $J = 0$. D. $J = -2$.

Câu 43: $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 44: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1 ?

- A. $\lim \frac{n-2021}{n-2022}$. B. $\lim \frac{n-2022}{2022n-1}$. C. $\lim \frac{2n-2022}{2022n-1}$. D. $\lim \frac{n^2-2022}{2022n-n^2}$.

Câu 45: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy nào có giới hạn bằng $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{9n^2+7n}{n+n^2}$. B. $u_n = n^2+1$.
C. $u_n = \frac{2007+2008n}{n+1}$. D. $u_n = 2008-2007n^2$.

Câu 46: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

- A. $u_n = \frac{1-2n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{1-2n}{5n+5n^2}$. C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $u_n = \frac{1-2n}{5n+5}$.

Câu 47: Tính giới hạn $I = \lim(-3n^2 - n + 2021)$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 1. D. 0.

Câu 48: Tính giới hạn $I = \lim(-3n^2 - n + 2021)$.

- A. $I = +\infty$. B. $I = -\infty$. C. $I = 1$. D. $I = 0$.

Câu 49: Giá trị của $\lim \frac{2n^2+6}{n-2}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 2. C. -3. D. $+\infty$.

Câu 50: $\lim 5^n$ bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2. D. 0.

Câu 51: Tính giới hạn $I = \lim \frac{5 \cdot 4^{n+1} + 3^{n-2}}{2^{2n+1} + 1}$.

- A. $I = +\infty$. B. $I = 10$. C. $I = 0$. D. $I = 20$.

Câu 52: Tính giới hạn $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n}{3 \cdot 4^n + 5^n}$.

- A. 4. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{7}{3}$. D. 7.

Câu 53: Giới hạn $\lim \frac{5^{n+1} + 3^n - 4^n}{2^n - 5^n}$ bằng

- A. -1. B. -5. C. 5. D. $+\infty$.

Câu 54: $\lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n - 3^n}$ bằng

- A. 3. B. -3. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 55: $\lim \frac{3 - 5^{n+1}}{2^n + 5^n}$ bằng

- A. 1. B. 5. C. -1. D. -5.

Câu 56: Kết quả của $\lim \frac{2 - 5^{n-2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ là

- A. $-\frac{25}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $-\frac{1}{50}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 57: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

- A. 2. B. 3. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 58: Tổng $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $-\frac{3}{2}$.

- Câu 59:** Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.
- A. $S = 2$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = \frac{2}{3}$.
- Câu 60:** Cho tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$. Giá trị của S là
- A. $S = -\frac{3}{4}$. B. $S = -\frac{4}{3}$. C. $S = \frac{3}{4}$. D. $S = \frac{4}{3}$.
- Câu 61:** Tổng vô hạn sau đây $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$ có giá trị bằng
- A. 2. B. 4. C. $\frac{8}{3}$. D. 3.
- Câu 62:** Biết tổng $S = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tích $a.b$ bằng
- A. 9 B. 60 C. 7 D. 10
- Câu 63:** Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$.
- A. -2. B. $-\frac{3}{2}$. C. $+\infty$. D. 0.
- Câu 64:** Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.
- Câu 65:** Cho dãy số $u_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ bằng
- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 66:** Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2})$ bằng
- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.
- Câu 67:** Kết quả của $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}) \right]$ là
- A. $I = 0$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = 1,499$. D. $I = +\infty$.
- Câu 68:** Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+3}-n)$ bằng
- A. 1. B. $-\infty$. C. 3. D. $+\infty$.
- Câu 69:** Tính giới hạn $T = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n})$.
- A. $T = \frac{1}{16}$. B. $T = 0$. C. $T = \frac{1}{4}$. D. $T = \frac{1}{8}$.

Câu 70: Tính $\lim \frac{3+3^2+3^3+\dots+3^n}{1+2+2^2+\dots+2^n}$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. 3. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 71: Tính giới hạn $\lim \frac{3+7+11+\dots+(4n+7)}{3n^2+4}$.

- A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 72: Tính $I = \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = +\infty$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Câu 73: Kết quả của $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Câu 74: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$

- A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 75: Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{11}{18}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 76: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 77: Cho $\lim \frac{1+2+\dots+n}{2n^2+1} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}; a \neq 0$), $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a^2 + b^2$ là

- A. 17. B. 5. C. 16. D. 2022.

Câu 78: Giá trị $\lim \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{2n^2+n+1}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 79: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{1011n^2+1012}$. Khi đó $\lim(u_n+1)$ bằng

- A. $\frac{2019}{2022}$. B. $\frac{2023}{2022}$. C. $\frac{2022}{2023}$. D. $\frac{2021}{2022}$.

Câu 80: Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 81: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 82: Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$

- A. $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. C. $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. D. $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 83: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 2018 \\ u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}; \forall n \geq 1 \end{cases}$. Hãy tính $\lim \frac{u_n}{3^n}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3^{2019} . C. $\frac{1}{2}$. D. 3^{2018} .

Câu 84: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 3 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$.

Biết $\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{20n}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{20n}n}}} = \frac{a^{2023} + b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $b < 2023$. Giá trị của $a + b - c$ bằng

- A. 2022. B. 0. C. -1. D. 2023.

Câu 85: Biết $\lim \frac{8n+1}{an-2} = 4$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng:

- A. -4. B. -6. C. 2. D. -2.

Câu 86: Biết $\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+2}{2n+1} = a$ và $\lim \frac{4 \cdot 5^n - 2^n}{5^n + 3^n} = b$, tính $M = a \cdot b$.

- A. $M = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. B. $M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $M = 2\sqrt{3}$. D. $M = 4\sqrt{3}$.

Câu 87: Biết $\lim \frac{an+4}{4n+3} = -2$, tính $2a+1$.

- A. -7. B. -8. C. -15. D. -17.

Câu 88: Tìm a để $\lim \frac{an^2-3n}{9n^2+5} = \frac{2}{3}$.

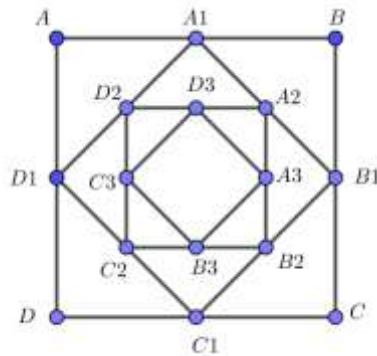
- A. $a = 4$. B. $a = 6$. C. $a = 8$. D. $a = 9$.

Câu 89: Giới hạn $\lim \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Tính $T = a + b$

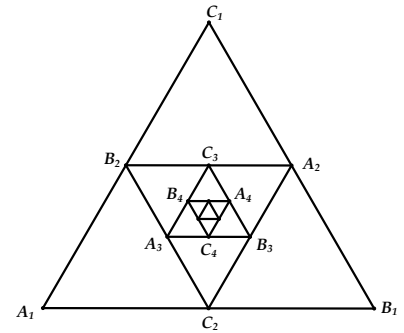
- A. $T = 21$ B. $T = 11$ C. $T = 7$ D. $T = 9$

- Câu 90:** Tìm số nguyên dương a , thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^{n+a} + 2^{n+1}}{3^n + 4^n}} = 4$.
- A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 91:** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{2n^2 + 1} = \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$) và $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $2a^2 + b^2 = 9$. B. $2a^2 + b^2 = 6$. C. $2a^2 + b^2 = 12$. D. $2a^2 + b^2 = 19$.
- Câu 92:** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an - 3} - \sqrt{n^2 + n}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$.
- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.
- Câu 93:** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = 3$, với $a, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $a = -\frac{9b}{2}$. B. $b = -9a$. C. $a = 9b$. D. $b = -3a$.
- Câu 94:** Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \right] = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị $2a + b$ bằng
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 8.
- Câu 95:** Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 2}{n + 2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.
- Câu 96:** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots$ bằng 8 thì a bằng:



- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 97: Gọi S_1 là diện tích tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh bằng a . Gọi S_2 là diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ với các đỉnh trung điểm các cạnh A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 , gọi S_3 là diện tích tam giác $A_3B_3C_3$ với các đỉnh trung điểm các cạnh A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2 , ... và gọi S_n là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ với các đỉnh trung điểm các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, A_{n-1}C_{n-1}$. Khi n tiến về dương vô cực, tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

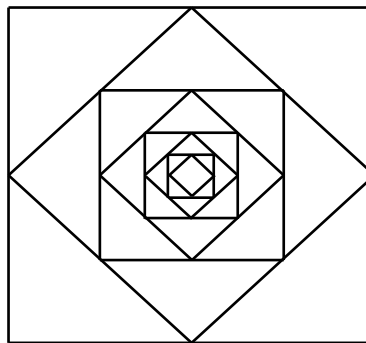


- A. $S = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$. B. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. C. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}$. D. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Câu 98: Một quả bóng tennis được thả từ độ cao $81(m)$. Mỗi lần chạm đất, quả bóng lại nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

- A. $243(m)$. B. $405(m)$. C. $486(m)$. D. $524(m)$.

Câu 99: Để trang trí cho một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng $1 m$, bạn A quyết định vẽ các hình vuông lên tấm bìa bằng cách: hình vuông thứ nhất có các đỉnh là trung điểm của các cạnh tấm bìa, hình vuông thứ hai có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ nhất, hình vuông thứ ba có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ hai, ... Giả sử quy trình vẽ hình vuông của bạn A có thể tiến ra vô hạn. Tính độ dài L các nét vẽ hình vuông của bạn A.



- A. $1 + \sqrt{2}$. B. $2 + \sqrt{2}$. C. $4 + 4\sqrt{2}$. D. $8 + 4\sqrt{2}$.

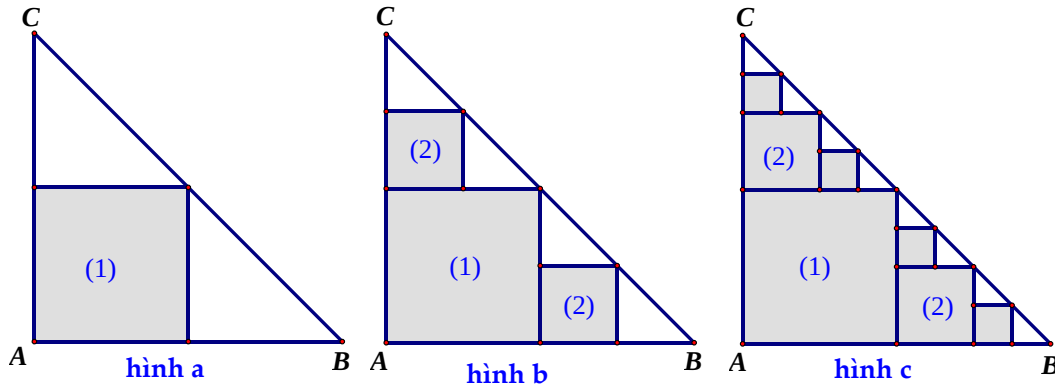
Câu 100: Giả sử tam giác ABC vuông cân tại A với độ dài cạnh góc vuông bằng 1 . Ta tạo ra các hình vuông theo các bước sau đây.

Bước 1: Dựng hình vuông màu xám có một đỉnh là A , ba đỉnh còn lại là các trung điểm của ba cạnh AB, BC, AC (hình a). Kí hiệu hình vuông này là (1) .

Bước 2: Với hai tam giác vuông cân màu trắng còn lại ở hình a, ta lại tạo được hai hình vuông màu xám khác theo cách trên, kí hiệu là (2) (hình b).

Bước 3: Với bốn tam giác vuông cân màu trắng còn lại ở hình b, ta lại tạo được bốn hình vuông màu xám khác theo cách trên (hình c).

Bước thứ n : Ở bước này ta có 2^{n-1} hình vuông màu xám được tạo thành theo cách trên. Kí hiệu là (n) .



Gọi S_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông màu xám có được sau n bước. Tính $\lim S_n$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$

C. 2.

D. $+\infty$.

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n} \right)$.

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{5n+3}$.

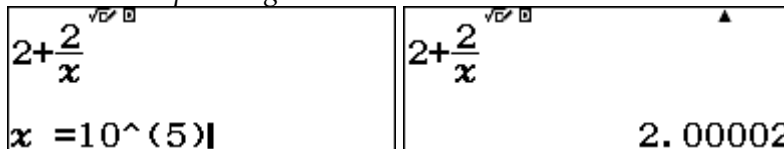
c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+4n+7}{7n^2+3}$.

d) $I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{5n^2+2n+1}$.

Lời giải:

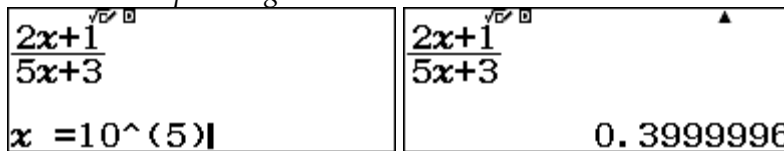
a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 2 + 0 = 2$.

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:



b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}$.

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:



c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+4n+7}{7n^2+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4n}{n^2} + \frac{7}{n^2}}{7 + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{7 + \frac{3}{n^2}} = \frac{2+0+0}{7+0} = \frac{2}{7}$.

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{2x^2+4x+7}{7x^2+3}$ $x = 10^5$	$\frac{2x^2+4x+7}{7x^2+3}$ 0.2857200001
---------------------------------------	---

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{5n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{4x+5}{5x^2+2x+1}$ $x = 10^5$	$\frac{4x+5}{5x^2+2x+1}$ 8.000068×10^{-6}
-------------------------------------	--

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)^2 (5+3n^3)}{(3n+4)^3 (1-n)^2}.$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^6}{(n+2)^4 (2n-1)^2}.$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)^2 (5+3n^3)}{(3n+4)^3 (1-n)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{(5+3n^3)}{n^3}}{\frac{(3n+4)^3}{n^3} \cdot \frac{(1-n)^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{n^3} + 3\right)}{\left(3 + \frac{4}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} = \frac{2^2 \cdot 3}{3^3} = \frac{4}{9}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{(2x-1)^2 (5+3x^3)}{(3x+4)^3 \times (1-x)^2}$ $x = 10^5$	$\frac{(2x-1)^2 (5+3x^3)}{(3x+4)^3 \times (1-x)^2}$ 0.4444311115
--	--

$$b) \text{ Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^6}{(n+2)^4 (2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^6 \left(2 + \frac{1}{n}\right)^6}{n^6 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^6}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = 2^4 = 16.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{(2x+1)^6}{(x+2)^4 (2x-1)^2}$ $x = 10^5$	$\frac{(2x+1)^6}{(x+2)^4 (2x-1)^2}$ 15.99936002
--	---

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n + 3 \cdot 7^n}.$$

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 3^n}.$$

Lời giải:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 4 + 0 + 0 = 4.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$4 + \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{5} \right)^x$	$4 + \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{5} \right)^x$
$x = 10^{(5)}$	4.00002

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n + 3 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^n}{7^n} + \frac{7^n}{7^n}}{\frac{5^n}{7^n} + \frac{3 \cdot 7^n}{7^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{7} \right)^n + 1}{\left(\frac{5}{7} \right)^n + 3} = \frac{0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{2^x + 7^x}{5^x + 3 \times 7^x}$	$\frac{2^x + 7^x}{5^x + 3 \times 7^x}$
$x = 100$	$\frac{1}{3}$

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} = 3.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{5 \times 2^x + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$	$\frac{5 \times 2^x + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$
$x = 100$	3

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{15 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n}{2 + \left(\frac{3}{5} \right)^n} = \frac{15}{2}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{3 \times 5^{x+1} + 2^{x+1}}{2 \times 5^x + 3^x}$	$\frac{3 \times 5^{x+1} + 2^{x+1}}{2 \times 5^x + 3^x}$
$x = 100$	$\frac{15}{2}$

Câu 4: Tính các tổng sau:

a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

Lời giải:

a) Xét dãy số (u_n) : $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ là một cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - 1.$$

$$\text{Vậy } \lim S = \frac{1}{2}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\sum_{x=1}^{100} \left(\frac{1}{3^x} \right) = \frac{1}{2}$$

b) Xét dãy số $(u_n): 16; -8; 4; -2; \dots$ là một cấp số nhân có $u_1 = 16, q = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots \text{ có } \lim S = \frac{16}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{32}{3}.$$

Câu 5: Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $\alpha = 0,353535\dots$

b) $\beta = 5,231231\dots$

Lời giải:

$$\text{a) } \alpha = 0,353535\dots = 0,35 + 0,0035 + \dots = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \dots = \frac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$0.\overline{35} = \frac{35}{99}$$

$$\text{b) } \beta = 5,231231\dots = 5 + 0,231 + 0,000231 + \dots = 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + \dots$$

$$= 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$5.\overline{231} = \frac{1742}{333}$$

Câu 6: Tính giới hạn $\lim \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} \right).$

Lời giải:

Ta có: $\lim \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} \right) = \lim \left[2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) \right] = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$2 + \sum_{x=1}^{100} \left(\frac{2}{3^x} \right)$$

Câu 7: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2+4n}}.$

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+4}+5n}{\sqrt{n^2+2+n}}.$

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n^2+2n+9}.$

d) $I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2+5}{5n^2+\sqrt{9n^4+1}}.$

Lời giải:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2+4n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+4}} = \frac{1}{5}.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2+4x}}$$

$$0.200002$$

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+4}+5n}{\sqrt{n^2+2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}+5}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+1}} = \frac{6}{2} = 3.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+4}+5x}{\sqrt{x^2+2+x}}$$

$$3.0000025$$

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3+n^2+1}+n^2}{n^2+2n+9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+1}{1+\frac{2}{n}+\frac{9}{n^2}} = 2.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}+x^2}{x^2+2x+9}$$

$$1.999964999$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 5}{5n^2 + \sqrt{9n^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{5}{n^2}}{5 + \sqrt{9 + \frac{1}{n^4}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{4x^2+5}{5x^2+\sqrt{9x^4+1}}$ $x = 10^{(5)}$	$\frac{4x^2+5}{5x^2+\sqrt{9x^4+1}}$ 0.5000000001
---	---

Câu 8: Tính các giới hạn sau:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n + 1).$$

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n^5 + 1).$$

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n + 1}.$$

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{2 - n}.$$

Lời giải:

$$a) I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = +\infty.$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 1 > 0.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

x^3-4x+1 $x = 10^{(5)}$	x^3-4x+1 $9.999999996 \times 10^{14}$
------------------------------	--

$$b) I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n^5 + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 \left(\frac{1}{n^2} - 4 + \frac{1}{n^5} \right) = -\infty.$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 4 + \frac{1}{n^5} \right) = -4 < 0.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

x^3-4x^5+1 $x = 10^{(5)}$	x^3-4x^5+1 -4×10^{25}
--------------------------------	-------------------------------------

$$c) I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = +\infty.$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} > 0.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{x^2+1}{3x+1}$	$\frac{x^2+1}{3x+1}$
$x = 10^{(5)}$	33333.22223

$$d) I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(\frac{2}{n} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - 1} = -\infty.$$

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - 1} = -1 < 0$.

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\frac{x^2+5x+1}{2-x}$	$\frac{x^2+5x+1}{2-x}$
$x = 10^{(5)}$	-100007.0002

Câu 9: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \sqrt{n^2 + n + 5} \right).$

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt{n^2 + n + 5} \right).$

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n + 1 - \sqrt{4n^2 + 2} \right).$

d) $I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1} \right).$

e) $I_5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^3 - \sqrt{n^6 + n^3 + 10} \right).$

Lời giải:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \sqrt{n^2 + n + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} \right) = +\infty.$

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} \right) = 2 > 0$.

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$x + \sqrt{x^2 + x + 5}$	$x + \sqrt{x^2 + x + 5}$
$x = 10^{(5)}$	200000.5

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt{n^2 + n + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (n^2 + n + 5)}{n + \sqrt{n^2 + n + 5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n - 5}{n + \sqrt{n^2 + n + 5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{5}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}} = -\frac{1}{2}.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$x - \sqrt{x^2 + x + 5}$	$x - \sqrt{x^2 + x + 5}$
$x = 10^{(5)}$	-0.500023749

c) $I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n + 1 - \sqrt{4n^2 + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n + 1)^2 - (4n^2 + 2)}{2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-1}{2n+1+\sqrt{4n^2+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}} = 1.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$2x+1-\sqrt{4x^2+2}$	$2x+1-\sqrt{4x^2+2}$
$x = 10^{(5)}$	0.999995001

$$\begin{aligned} \text{d) } I_4 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{(n^2+3)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1. \end{aligned}$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$	$x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$
$x = 10^{(5)}$	1

$$\begin{aligned} \text{e) } I_5 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - \sqrt{n^6+n^3+10}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^6 - (n^6+n^3+10)}{n^3 + \sqrt{n^6+n^3+10}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3-10}{n^3 + \sqrt{n^6+n^3+10}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1-\frac{10}{n^3}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{10}{n^6}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

Hết sức chú ý:

$x^3 - \sqrt{x^6+x^3+2}$	$x^3 - \sqrt{x^6+x^3+2}$
Calc 10^5 : $x = 10^{(5)}$	0 → Kết quả SAI .

$x^3 - \sqrt{x^6+x^3+2}$	$x^3 - \sqrt{x^6+x^3+2}$
Calc 10^2 : $x = 10^{(2)}$	-0.50000087 → Kết quả ĐÚNG .

Câu 10: Tính giới hạn: $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n})$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } T = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 3^n}{(\sqrt{16 \cdot 16^n + 4^n} + \sqrt{16 \cdot 16^n + 3^n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\sqrt{16 + \frac{1}{4^n}} + \sqrt{16 + \left(\frac{3}{16}\right)^n}\right)} = \frac{1}{8}.$$

Câu 11: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} \right).$

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + 1 - \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \right).$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } I_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - (n^3 - 2n^2 + 5)}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} + \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} \right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 5}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} + \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} \right)^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$x - \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 5}$ $x = 10^{(5)}$	$x - \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 5}$ 0.6666711113
---	---

$$\text{b) } I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + 1 - \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n^3 + 4n^2)}{(n+1)^2 + (n+1)\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} + \left(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \right)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 + 3n + 1}{(n+1)^2 + (n+1)\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} + \left(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} \right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$ $x = 10^{(5)}$	$x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$ -0.333315555
---	---

Câu 12: Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} \right).$

b) $I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right).$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } I_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n - \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} - n \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} - n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^3 + 2n^2 + 5) - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} \right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} + n^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 5}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5}\right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} + 1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5}$	$\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5}$
$x = 10^{(5)}$	0.333332778

b) Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n + n - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n + n - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} + \frac{n^3 - (n^2 + n^3)}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^2 + n^3} + (\sqrt[3]{n^2 + n^3})^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} + \frac{-n^2}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^2 + n^3} + (\sqrt[3]{n^2 + n^3})^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} + \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n} + 1} + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n} + 1}\right)^2} \right) = \frac{2}{1 + 1} + \frac{-1}{1 + 1 + 1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + x^3}$	$\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + x^3}$
$x = 10^{(5)}$	0.666677778

Câu 13: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{4n^2 + 1}$	b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1}$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$
--	---

Lời giải:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1} \quad (1).$

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (đã chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{\sum_{x=1}^{100} (x)}{3 \times 100^2 + 1} = 0.1683277224$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n^2+3n+1} \quad (1)$$

Ta có: $1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$ (đã chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{\sum_{x=1}^{100} (2x-1)}{100^2+3 \times 100+1} = 0.970779536$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5+8+\dots+(3n-1)}{4n^2+1} \quad (1)$$

Ta có dãy số: $2; 5; 8; \dots; (3n-1)$ là một cấp số cộng với $u_1=2, u_2=5 \Rightarrow d=3$. Số hạng tổng quát: $u_m = u_1 + (m-1)d \Leftrightarrow 3n-1 = 2 + (m-1).3$

$\Leftrightarrow 3n-1 = 3m-1 \Leftrightarrow n=m \Rightarrow$ cấp số cộng có n số hạng.

$$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[4 + (n-1)3]}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(3n+1)}{2}}{4n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 \left(4 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{8}.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\frac{\sum_{x=1}^{100} (3x-1)}{4 \times 100^2 + 1} = 0.376240594$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^n}{1+3+3^2+3^3+\dots+3^n} \quad (1)$$

Ta có: $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ là một cấp số nhân, với $u_1=1, q=2$.

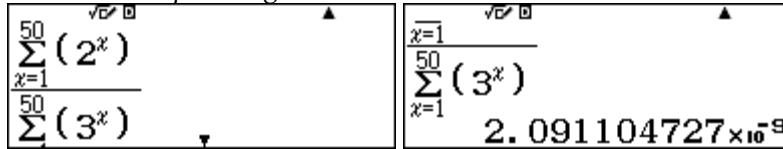
Số hạng tổng quát: $u_m = 2^n = u_1 \cdot q^{m-1} \Leftrightarrow 2^n = 2^{m-1} \Leftrightarrow n = m-1 \Rightarrow m = n+1$.

Vậy cấp số nhân này có $(n+1)$ số hạng $S_m = u_1 \cdot \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$

Tương tự ta tính được: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{3^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3^{n+1}}} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:



Left screen: $\sum_{x=1}^{50} (2^x)$
Right screen: $\sum_{x=1}^{50} (3^x)$ = 2.091104727 × 10⁻⁹

Câu 14: Tính các giới hạn sau:

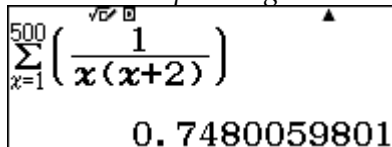
a) $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

b) $N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \right]$.

Lời giải:

a) $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \dots + \frac{2}{n(n+2)} \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{3-1}{1.3} + \frac{4-2}{2.4} + \frac{5-3}{3.5} + \dots + \frac{n+2-n}{n(n+2)} \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:



Screen: $\sum_{x=1}^{500} \left(\frac{1}{x(x+2)} \right)$ = 0.7480059801

b) $N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \right]$

Ta có: $\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Vậy: $\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Vậy $N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$

Kiểm tra kết quả bằng MTCT:

$$\sum_{x=1}^{100} \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} \right) = 0.900496281$$

Câu 15: Biết các số thực a và b thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2 + bn + 1}{2n + 5} = 3$. Tính $T = a + 5b$.

Lời giải:

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2 + bn + 1}{2n + 5} = 3$ nên $a = 0$.

Với $a = 0$, ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2 + bn + 1}{2n + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{bn + 1}{2n + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{b}{2}$.

Theo giả thiết: $\frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6$.

Vậy $T = a + 5b = 30$.

Câu 16: Biết các số thực a và b thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (an - \sqrt{n^2 + bn + 7}) = 1$. Tính $T = a + b$.

Lời giải:

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} (an - \sqrt{n^2 + bn + 7}) = 1$ nên $a > 0$.

Ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (an - \sqrt{n^2 + bn + 7}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2 n^2 - (n^2 + bn + 7)}{an + \sqrt{n^2 + bn + 7}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - 1)n^2 - bn - 7}{an + \sqrt{n^2 + bn + 7}}$.

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} (an - \sqrt{n^2 + bn + 7}) = 1$ nên $a^2 - 1 = 0 \xrightarrow{a > 0} a = 1$.

Với $a = 1$, ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - 1)n^2 - bn - 7}{an + \sqrt{n^2 + bn + 7}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-bn - 7}{n + \sqrt{n^2 + bn + 7}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-b - \frac{7}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{7}{n^2}}} = -\frac{b}{2}$.

Theo giả thiết: $-\frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy $T = a + b = -1$.

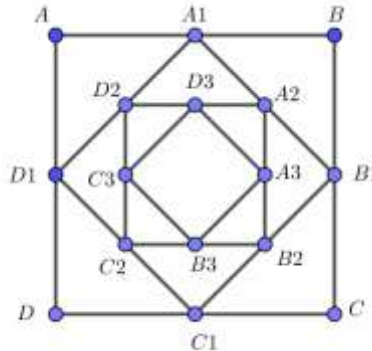
Câu 17: Tìm số nguyên dương a , thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4^{n+a} + 2^{n+1}}{3^n + 4^n}} = 4$.

Lời giải:

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4^{n+a} + 2^{n+1}}{3^n + 4^n}} = 4 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4^a + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4^a} = 4 \Leftrightarrow 4^a = 4^2 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2$.

Câu 18: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy (tham khảo hình vẽ).



Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots$ bằng 8 thì a bằng bao nhiêu?

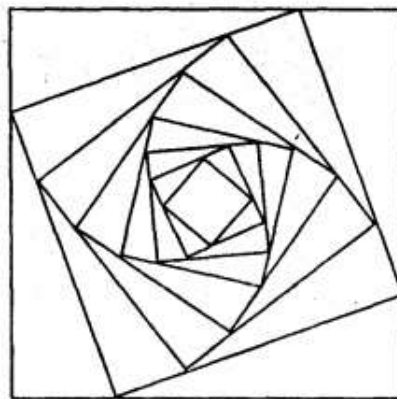
Lời giải:

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = a^2; S_{A_1B_1C_1D_1} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}; S_{A_2B_2C_2D_2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2^2}$$

$$S = S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + S_{A_2B_2C_2D_2} + \dots = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2^2} + \dots = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

$$\text{Mà } S = 8 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 19: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (tham khảo hình vẽ).



Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \dots\}$). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S_1 = a^2, S_2 = \frac{5}{8}a^2, S_3 = \frac{25}{64}a^2, \dots$$

Nên $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ q = \frac{5}{8} \end{cases}$.

Khi đó $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{5}{8}} = \frac{8}{3}a^2$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 20: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = 0 \ (|q| > 1)$.

B. $\lim C = C$ (C là hằng số).

C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \ (k > 1)$.

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Lời giải:

Vì $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 21: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = 0 \ (|q| > 1)$.

B. $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \ (k > 1)$.

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

Lời giải:

Ta có $\lim q^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = +\infty \ (q > 1)$ vì $\lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$ và $\left(\frac{1}{q}\right)^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*, q > 1$.

Nếu $q < -1$ thì không tồn tại $\lim q^n$.

Câu 22: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim q^n = +\infty \ (q > 1)$.

B. $\lim q^n = 0 \ (|q| < 1)$.

C. $\lim n^k = 0$ với k nguyên dương.

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Lời giải:

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim n^k = +\infty$.

Câu 23: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\lim \frac{1}{2^n} = 0$.

B. $\lim \frac{3}{n+1} = 0$.

C. $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) = 1$.

D. $\lim (-2)^n = +\infty$.

Lời giải:

Chọn $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ khi đó ta có

$$\lim (-2)^n = +\infty = \lim (-2)^{2k} = +\infty$$

Chọn $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ khi đó ta có

$$\lim (-2)^n = +\infty = \lim (-2)^{2k+1} = -\infty$$

Câu 24: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.

B. Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim|u_n| = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim|u_n| = a$.

Lời giải:

Ta có nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim|u_n| = 0$.

Câu 25: Với $(u_n); (v_n)$ là các dãy số thực, tìm khẳng định sai.

A. Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n \cdot v_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n v_n = 0$.

Lời giải:

Ta chọn: $u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim u_n = 0; v_n = -n \Rightarrow \lim v_n = -\infty$

$\lim u_n \cdot v_n = \lim \frac{1}{n} \cdot (-n) = -1 \neq 0$. Nên khẳng định sai là “Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim u_n v_n = 0$ ”.

Câu 26: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim(-n^3 + 2020) = -\infty$.

B. $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

C. $\lim n^{2022} = +\infty$.

D. $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

Lời giải:

$\lim(-n^3 + 2020) = \lim\left[n^3\left(-1 + \frac{2020}{n^3}\right)\right] = -\infty$, vì $\lim n^3 = +\infty$; $\lim\left(-1 + \frac{2020}{n^3}\right) = -1 < 0$ nên

A đúng.

$\lim \sqrt{n} = +\infty$ nên B đúng.

$\lim n^{2022} = +\infty$ nên C đúng.

$\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ nên D sai.

Câu 27: $\lim(2^n - 1)$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải:

Ta có: $\lim(2^n - 1) = \lim 2^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Vì $\begin{cases} \lim 2^n = +\infty \\ \lim\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 > 0 \end{cases}$ nên $\lim(2^n - 1) = +\infty$.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n + 3) = 0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

- A. 3. B. -3. C. 2. D. 0.

Lời giải:

Ta có $\lim(u_n + 3) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = -3$.

Câu 29: Cho $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 2$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

- A. -5. B. -1. C. 5. D. 1.

Lời giải:

$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = -3 - 2 = -5$.

Câu 30: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$, dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim(u_n \cdot v_n)$ bằng

- A. 15. B. 8. C. 5. D. 3.

Lời giải:

Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$

$\lim(u_n \cdot v_n) = 3 \cdot 5 = 15$.

Câu 31: Tính $A = \lim\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)$.

- A. $A = 3$. B. $A = -\infty$. C. $A = +\infty$. D. $A = 0$.

Lời giải:

Ta có: $A = \lim\left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = 3 + 0 = 3$.

Câu 32: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim\left(\frac{8}{3}\right)^n$. B. $\lim 4^n$. C. $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n$. D. $\lim 2^n$.

Lời giải:

Ta biết rằng $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$. Do đó $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Câu 33: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$.

Lời giải:

$\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ vì $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

Câu 34: $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n$ bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Câu 35: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \left(\frac{\pi}{4} \right)^n$. **B.** $\lim \left(\frac{4}{3} \right)^n$. **C.** $\lim \frac{1-3n}{5n+1}$. **D.** $\lim n^{2021}$.

Câu 36: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy có giới hạn 0 ?

A. $u_n = \frac{n^3+n}{n^2+2}$. **B.** $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2n+3}$. **C.** $u_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3}$. **D.** $u_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$.

Lời giải:

$$\lim \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} - 1} = 0.$$

Câu 37: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy có giới hạn 0 ?

A. $u_n = \frac{n^3+n}{n^2+2}$. **B.** $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2n+3}$. **C.** $u_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3}$. **D.** $u_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$.

Lời giải:

$$\lim \frac{n^2+2n-1}{n^2-n^3} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} - 1} = 0.$$

Câu 38: Tính $\lim \frac{1}{n^8}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Lời giải:

Ta có: $\lim \frac{1}{n^8} = 0$.

Câu 39: Giá trị $\lim \frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{19}$.

Lời giải:

$$\lim \frac{1+19n}{18n+19} = \lim \frac{\frac{1}{n} + 19}{18 + \frac{19}{n}} = \frac{19}{18}.$$

Câu 40: $\lim \frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$ bằng

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim \frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3} = \lim \frac{3 - \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^4}}{\frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = +\infty.$$

Câu 41: Tính giới hạn $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$.

A. $J = -\frac{3}{2}$.

B. $J = 2$.

C. $J = 0$.

D. $J = -2$.

Lời giải:

Ta có: $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2} = \lim \frac{2n^2+5n+3}{n^3-2} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^3}} = 0$.

Câu 42: Tính giới hạn $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$.

A. $J = -\frac{3}{2}$.

B. $J = 2$.

C. $J = 0$.

D. $J = -2$.

Lời giải:

Ta có $J = \lim \frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2} = \lim \frac{2n^2+5n+3}{n^3-2} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$.

Câu 43: $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}} = \lim \frac{\left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^4}}} = \frac{-1+0+0}{\sqrt{3+0}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1 ?

A. $\lim \frac{n-2021}{n-2022}$.

B. $\lim \frac{n-2022}{2022n-1}$.

C. $\lim \frac{2n-2022}{2022n-1}$.

D. $\lim \frac{n^2-2022}{2022n-n^2}$.

Lời giải:

Ta có: $\lim \frac{n^2-2022}{2022n-n^2} = \lim \frac{1 - \frac{2022}{n^2}}{\frac{2022}{n} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$.

Câu 45: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy nào có giới hạn bằng $+\infty$?

A. $u_n = \frac{9n^2+7n}{n+n^2}$.

B. $u_n = n^2+1$.

C. $u_n = \frac{2007+2008n}{n+1}$.

D. $u_n = 2008-2007n^2$.

Lời giải:

Ta có $\lim(n^2 + 1) = +\infty$.

Câu 46: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

- A. $u_n = \frac{1-2n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{1-2n}{5n+5n^2}$. C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $u_n = \frac{1-2n}{5n+5}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim \frac{n^2-2n}{5n+5n^2} = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n^2 \left(\frac{5}{n} + 5\right)} = \frac{1}{5}.$$

Câu 47: Tính giới hạn $I = \lim(-3n^2 - n + 2021)$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 1. D. 0.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim(-3n^2 - n + 2021) = \lim n^2 \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right).$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty \text{ và } \lim \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right) = -3 < 0 \text{ nên } \lim n^2 \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right) = -\infty.$$

$$\text{Vậy } I = -\infty.$$

Câu 48: Tính giới hạn $I = \lim(-3n^2 - n + 2021)$.

- A. $I = +\infty$. B. $I = -\infty$. C. $I = 1$. D. $I = 0$.

Lời giải:

Ta có

$$I = \lim(-3n^2 - n + 2021) = \lim n^2 \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right)$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty \text{ và } \lim \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right) = -3 < 0 \text{ nên } I = \lim n^2 \left(-3 - \frac{1}{n} + \frac{2021}{n^2}\right) = -\infty.$$

Câu 49: Giá trị của $\lim \frac{2n^2+6}{n-2}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 2. C. -3. D. $+\infty$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n^2+6}{n-2} = \lim \frac{n^2 \left(2 + \frac{6}{n^2}\right)}{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{n \left(2 + \frac{6}{n^2}\right)}{1 - \frac{2}{n}} = +\infty$$

$$(\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{2}{n}} = 2 > 0).$$

Câu 50: $\lim 5^n$ bằng

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2. D. 0.

Lời giải:

$$\lim 5^n = +\infty.$$

Câu 51: Tính giới hạn $I = \lim \frac{5 \cdot 4^{n+1} + 3^{n-2}}{2^{2n+1} + 1}.$

A. $I = +\infty.$

B. $I = 10.$

C. $I = 0.$

D. $I = 20.$

Lời giải:

$$I = \lim \frac{5 \cdot 4^{n+1} + 3^{n-2}}{2^{2n+1} + 1} = \lim \frac{180 \cdot 4^n + 3^n}{18 \cdot 4^n + 9} = \lim \frac{\frac{180 \cdot 4^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n}}{\frac{18 \cdot 4^n}{4^n} + \frac{9}{4^n}} = \lim \frac{180 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{18 + \frac{9}{4^n}} = \frac{180}{18} = 10.$$

Câu 52: Tính giới hạn $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n}{3 \cdot 4^n + 5^n}.$

A. 4.

B. $\frac{4}{3}.$

C. $\frac{7}{3}.$

D. 7.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n}{3 \cdot 4^n + 5^n} = \lim \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 7}{3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 7.$$

Câu 53: Giới hạn $\lim \frac{5^{n+1} + 3^n - 4^n}{2^n - 5^n}$ bằng

A. -1.

B. -5.

C. 5.

D. $+\infty.$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim \frac{5^{n+1} + 3^n - 4^n}{2^n - 5^n} = \lim \frac{5 \cdot 5^n + 3^n - 4^n}{2^n - 5^n} = \lim \frac{5 + \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = -5.$$

Câu 54: $\lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n - 3^n}$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. 0.

D. $+\infty.$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n - 3^n} = \lim \frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{2^n - 3^n} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{0 + 3}{0 - 1} = -3.$$

Câu 55: $\lim \frac{3 - 5^{n+1}}{2^n + 5^n}$ bằng

A. 1.

B. 5.

C. -1.

D. -5.

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-5^{n+1}}{2^n+5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{5^n}-5}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = -5.$$

Câu 56: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n}$ là

- A. $\frac{-25}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. **C. $\frac{-1}{50}$.** D. $\frac{-5}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5^n.5^{-2}}{3^n+2.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2}{5^n} - \frac{1}{25} \right)}{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 2 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5^n} - \frac{1}{25} \right)}{\left(\frac{3^n}{5^n} + 2 \right)} = \frac{-1}{50}.$$

Câu 57: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

- A. 2.** B. 3. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Câu 58: Tổng $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là

- A. $-\frac{2}{3}$. **B. $\frac{3}{2}$.** C. $\frac{2}{3}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$; $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Suy ra: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Câu 59: Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

- A. $S = 2$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = 1$. **D. $S = \frac{2}{3}$.**

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Câu 60: Cho tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$. Giá trị của S là

A. $S = -\frac{3}{4}$.

B. $S = -\frac{4}{3}$.

C. $S = \frac{3}{4}$.

D. $S = \frac{4}{3}$.

Lời giải:

Ta có dãy số $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ là 1 cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = -\frac{1}{3}$ nên

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Câu 61: Tổng vô hạn sau đây $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$ có giá trị bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Câu 62: Biết tổng $S = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}; \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tích $a.b$ bằng:

A. 9

B. 60

C. 7

D. 10

Lời giải:

Ta có dãy $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$ nên

$$S = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = 2 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$$

Vậy $a.b = 5.2 = 10$.

Câu 63: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$.

A. -2.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $+\infty$.

D. 0.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+n}{1-2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-2} = 0.$$

Câu 64: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\lim \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} = \lim \frac{-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 65: Cho dãy số $u_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có

$$\lim u_n = \lim n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim \frac{n(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Câu 66: Kết quả của $\lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2})$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2}) &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2})(\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{3n^2 + 2})}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{3n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{(n^2 - 1) - (3n^2 + 2)}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{3n^2 + 2}} = \lim \frac{-2n^2 - 3}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{3n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{n^2(-2 - \frac{3}{n^2})}{n(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}})} = \lim \frac{n(-2 - \frac{3}{n^2})}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà: } \lim n = +\infty; \lim \frac{-2 - \frac{3}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}} < 0.$$

Suy ra: $\lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2}) = -\infty$.

Câu 67: Kết quả của $I = \lim \left[n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}) \right]$ là

A. $I = 0$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 1,499$.

D. $I = +\infty$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right] = \lim \frac{n \left[n^2 + 2 - (n^2 - 1) \right]}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim \frac{3n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \lim \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{3}{2}$.

Câu 68: Giá trị của $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right)$ bằng

A. 1.

B. $-\infty$.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) &= \lim \frac{(n^2 + 2n + 3) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} \\ &= \lim \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 69: Tính giới hạn $T = \lim \left(\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n} \right)$.

A. $T = \frac{1}{16}$.

B. $T = 0$.

C. $T = \frac{1}{4}$.

D. $T = \frac{1}{8}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n} &= \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16^{n+1} + 4^n} + \sqrt{16^{n+1} + 3^n}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{4 + \frac{1}{4^n}} + \sqrt{4 + \left(\frac{3}{16}\right)^n}}. \\ \text{Vậy } T &= \lim \left(\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n} \right) = \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{4 + \frac{1}{4^n}} + \sqrt{4 + \left(\frac{3}{16}\right)^n}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Câu 70: Tính $\lim \frac{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $+\infty$.

Lời giải:

Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $q = 3$.

$$\text{Do đó } 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} (3^n - 1).$$

Mẫu thức là tổng của $n + 1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_1 = 1$ và $q = 2$. Do đó

$$1+2+2^2+\dots+2^n=1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2\cdot 2^n-1.$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+3^2+3^3+\dots+3^n}{1+2+2^2+\dots+2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{3^n-1}{2\cdot 2^n-1} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = +\infty$$

Câu 71: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+7+11+\dots+(4n+7)}{3n^2+4}$.

- A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải:

Ta có dãy số $3, 7, 11, \dots, (4n+7)$ là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$ lại có

$$4n+7 = 3+4(n+1) = u_1 + (n+2-1)d \text{ nên dãy số có } n+2 \text{ số hạng } u_1 = 3, u_{n+2} = 4n+7$$

$$\text{Suy ra } 3+7+11+\dots+(4n+7) = \frac{(n+2)(u_1+u_{n+2})}{2} = \frac{(n+2)(3+4n+7)}{2} = 2n^2+9n+10$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+7+11+\dots+(4n+7)}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+9n+10}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{9}{n}+\frac{10}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 72: Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = +\infty$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Lời giải:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{(3+2n+1)\cdot n}{2}}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+4n+2}{2n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{2} = \frac{2+0+0}{2} = 1.$$

Câu 73: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Lời giải:

Xét cấp số cộng $1, 3, 5, 7, \dots, 2n+1$ có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 2$ và số hạng tổng quát có dạng $u_m = 2n+1$ ta được $u_1 + (m-1)d = 2n+1 \Leftrightarrow 1+2(m-1) = 2n+1 \Leftrightarrow m = n+1$ suy ra cấp số cộng có $n+1$ số hạng.

Suy ra tổng $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = \frac{m}{2}(u_1 + u_m) = \frac{n+1}{2}(1 + 2n+1) = n^2 + 2n + 1$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 74: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$

- A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] &= \lim \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \dots + \frac{2}{n(n+2)} \right] \\ &= \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Câu 75: Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{11}{18}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right] = \lim \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

Câu 76: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{2}{2n(2n+1)} = 2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Suy ra:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{2.3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{2.6} = \frac{2}{3.4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{2.10} = \frac{2}{4.5} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

...

$$\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{2}{2n \cdot (2n+1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\text{Khi đó } u_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1.$$

Câu 77: Cho $\lim \frac{1+2+\dots+n}{2n^2+1} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}; a \neq 0$), $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a^2 + b^2$ là

A. 17.

B. 5.

C. 16.

D. 2022.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim \frac{1+2+\dots+n}{2n^2+1} = \lim \frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4}. \text{ Khi đó } a=1; b=4 \Rightarrow a^2+b^2=17.$$

Câu 78: Giá trị $\lim \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{2n^2+n+1}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2.$$

$$\text{Vậy } \lim \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{2n^2+n+1} = \lim \frac{n^2}{2n^2+n+1} = \lim \frac{1}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 79: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{1011n^2+1012}$. Khi đó $\lim(u_n+1)$ bằng

A. $\frac{2019}{2022}$.

B. $\frac{2023}{2022}$.

C. $\frac{2022}{2023}$.

D. $\frac{2021}{2022}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Nên } u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{1011n^2+1012} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{1011n^2+1012} = \frac{n^2+n}{2022n^2+2024}$$

Do đó $u_n + 1 = \frac{2023n^2 + n + 2024}{2022n^2 + 2024}$

Suy ra $\lim(u_n + 1) = \lim \frac{2023n^2 + n + 2024}{2022n^2 + 2024} = \lim \frac{2023 + \frac{1}{n} + \frac{2024}{n^2}}{2022 + \frac{2024}{n^2}} = \frac{2023}{2022}$.

- Câu 80:** Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$:
- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. **D. 1.**

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Suy ra $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 1$.

- Câu 81:** Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$
- A. 1. **B. $\frac{3}{2}$.** C. 3. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3} = \frac{3!}{1.2.3} + \frac{3!}{2.3.4} + \frac{3!}{3.4.5} + \dots + \frac{3!}{n(n-1)(n-2)}$$

$$= 6 \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} - \frac{1}{4.3} + \frac{1}{3.2} + \dots - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2.1} - \frac{1}{n(n-1)} \right)$$

Vậy $\lim S_n = \lim 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \right) = \frac{3}{2}$

- Câu 82:** Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$. Tính

$\lim n\sqrt{u_n}$

- A. $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.** B. $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. C. $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. D. $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Cách 1

$$g(n) = \frac{f(2n-1)}{f(2n)} \Rightarrow g(n) = \frac{(4n^2 - 2n + 1)^2 + 1}{(4n^2 + 2n + 1)^2 + 1}$$

Đặt $\begin{cases} a = 4n^2 + 1 \\ b = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b^2 + 1 \\ a - 2b = (2n-1)^2 \\ a + 2b = (2n+1)^2 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } g(n) = \frac{(a-b)^2 + 1}{(a+b)^2 + 1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 1}{a^2 + 2ab + b^2 + 1} = \frac{a^2 - 2ab + a}{a^2 + 2ab + b} = \frac{a - 2b + 1}{a + 2b + 1} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow u_n = g(1)g(2).....g(n) = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

$$\lim n\sqrt{u_n} = \lim n \cdot \sqrt{\frac{2}{(2n+1)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cách 2

$$\text{Có } f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$$

$$= \frac{(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1)(6^2 + 1) \dots [(2n-1)^2 + 1][(2n)^2 + 1]}{(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1)(6^2 + 1)(7^2 + 1) \dots [(2n)^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]} \\ = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim n \sqrt{\frac{2}{(2n+1)^2 + 1}} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{4n^2 + 4n + 2}} = \lim \sqrt{\frac{1}{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 83: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 2018 \\ u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}; \forall n \geq 1 \end{cases}$. Hãy tính $\lim \frac{u_n}{3^n}$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3^{2019} .

C. $\frac{1}{2}$.

D. 3^{2018} .

Lời giải:

$$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}; \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3(u_n - u_{n-1}); \forall n \geq 1 (*)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - u_{n-1} \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

$$(*) \text{ trở thành } v_{n+1} = 3v_n; \forall n \geq 1.$$

Suy ra dãy số (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 3$, số hạng đầu $v_1 = u_1 - u_0 = 2019 - 2018 = 1$.

Số hạng tổng quát của dãy số (v_n) là $v_n = 3^{n-1} \cdot 1 = 3^{n-1}$.

$$\Rightarrow u_n - u_{n-1} = 3^{n-1}; \forall n \geq 1.$$

Ta có

$$u_1 - u_0 = 3^0$$

$$u_2 - u_1 = 3^1$$

$$u_3 - u_2 = 3^2$$

...

$$u_n - u_{n-1} = 3^{n-1}$$

Cộng các vế tương ứng của các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_0 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = 1 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2} + u_0 = \frac{3^n - 1}{2} + 2018 = \frac{3^n + 4035}{2}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n + 4035}{2}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{4035}{2 \cdot 3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Câu 84: Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 3 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2023}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2023}n}}} = \frac{a^{2023} + b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $b < 2023$. Giá trị của $a + b - c$ bằng

A. 2022.

B. 0.

C. -1.

D. 2023.

Lời giải:

Ta có: $u_k = u_{k-1} + 4(k-1) + 3 = u_{k-2} + 4(k-2) + 4(k-1) + 2.3$
 $= \dots = a_1 + 4(1+2+\dots+k-1) + 3(k-1) = (2k+3)(k-1)$

$$\text{Suy ra: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u_{kn}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2kn+3)(kn-1)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(2k + \frac{3}{n}\right) \left(k - \frac{1}{n}\right)} = k\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2023}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2023}n}}} = \frac{1\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4^2\sqrt{2} + \dots + 4^{2012}\sqrt{2}}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} + \dots + 2^{2012}\sqrt{2}} = \frac{2^{2013} + 1}{3}.$$

Vậy $a = 2; b = 1; c = 3 \Rightarrow a + b - c = 2 + 1 - 3 = 0$.

Câu 85: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+1}{an-2} = 4$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng:

A. -4.

B. -6.

C. 2.

D. -2.

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+1}{an-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(8 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(a - \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{1}{n}}{a - \frac{2}{n}} = \frac{8}{a} = 4 \Rightarrow a = 2$$

Khi đó $a - a^2 = 2 - 2^2 = -2$.

Câu 86: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}+2}{2n+1} = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n - 2^n}{5^n + 3^n} = b$, tính $M = a \cdot b$.

A. $M = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

B. $M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $M = 2\sqrt{3}$.

D. $M = 4\sqrt{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n - 2^n}{5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} = 4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow M = 2\sqrt{3}.$$

Câu 87: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{4n+3} = -2$, tính $2a+1$.

A. -7.

B. -8.

C. -15.

D. -17.

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{4n+3} = -2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{4}{n}}{4+\frac{3}{n}} = -2 \Leftrightarrow \frac{a}{4} = -2 \Leftrightarrow a = -8 \Rightarrow 2a+1 = -15.$$

Câu 88: Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-3n}{9n^2+5} = \frac{2}{3}$.

A. $a = 4$.

B. $a = 6$.

C. $a = 8$.

D. $a = 9$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-3n}{9n^2+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-\frac{3}{n}}{9+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a}{9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 6.$$

Vậy $a = 6$.

Câu 89: Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Tính $T = a+b$

A. $T = 21$

B. $T = 11$

C. $T = 7$

D. $T = 9$

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{2\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 5; b = 6 \Rightarrow T = 11.$$

Câu 90: Tìm số nguyên dương a , thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^{n+a}+2^{n+1}}{3^n+4^n}} = 4$.

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^{n+a} + 2^{n+1}}{3^n + 4^n}} = 4 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^a + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4^a} = 4 \Leftrightarrow 4^a = 4^2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy $a = 2$.

Câu 91: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{2n^2 + 1} = \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$) và $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $2a^2 + b^2 = 9$. **B.** $2a^2 + b^2 = 6$. **C.** $2a^2 + b^2 = 12$. **D.** $2a^2 + b^2 = 19$.

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{2n^2 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 1 = 9.$$

Câu 92: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an - 3} - \sqrt{n^2 + n}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$.

- A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an - 3} - \sqrt{n^2 + n}) = 3 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-1)n - 3}{\sqrt{n^2 + an - 3} + \sqrt{n^2 + n}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-1) - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 3 \Leftrightarrow \frac{a-1}{2} = 3 \Leftrightarrow a = 7.$$

Vậy giá trị của a cần tìm là $a = 7$.

Câu 93: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = 3$, với $a, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a = -\frac{9b}{2}$. **B.** $b = -9a$. **C.** $a = 9b$. **D.** $b = -3a$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{n^3}}{\frac{(1 + bn^2)(5 - 3n)}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + b\right)\left(\frac{5}{n} - 3\right)} = \frac{2a}{-3b}.$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = 3 \Rightarrow \frac{2a}{-3b} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{9b}{2}.$$

Câu 94: Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \right] = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị $2a + b$ bằng

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } I = \lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \right] = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3} + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra : $a = 1; b = 2 \longrightarrow 2a + b = 4.$

Câu 95: Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

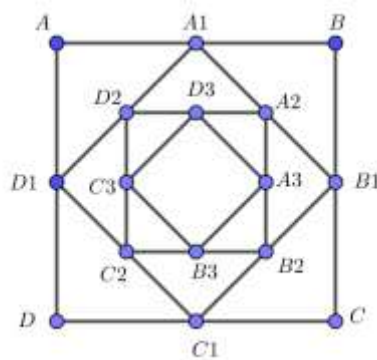
Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) \\ = \lim \left(\frac{(a^2 - 4a + 3)n + 2 + 2a^2 - 8a}{n+2} \right) = \lim \left(\frac{a^2 - 4a + 3 + \frac{2 + 2a^2 - 8a}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = a^2 - 4a + 3. \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết: } \lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = 1.$$

$$\text{Vậy } S = \{1; 3\} \Rightarrow 1 + 3 = 4.$$

Câu 96: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots$ bằng 8 thì a bằng:



A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

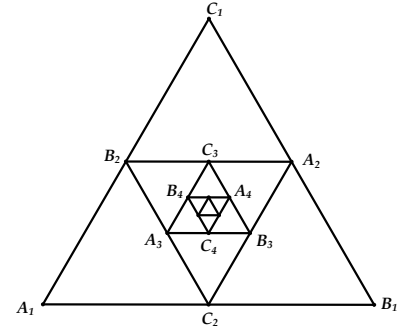
Lời giải:

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = a^2; S_{A_1B_1C_1D_1} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}; S_{A_2B_2C_2D_2} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2^2}$$

$$S = S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + S_{A_2B_2C_2D_2} + \dots = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2^2} + \dots = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

Mà $S = 8 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 97: Gọi S_1 là diện tích tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh bằng a . Gọi S_2 là diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ với các đỉnh trung điểm các cạnh A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 , gọi S_3 là diện tích tam giác $A_3B_3C_3$ với các đỉnh trung điểm các cạnh A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2 , ... và gọi S_n là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ với các đỉnh trung điểm các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, A_{n-1}C_{n-1}$. Khi n tiến về dương vô cực, tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$



A. $S = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$.

B. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}$.

D. $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{16}, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{64}, \dots, S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4^{n-1}}$.

Khi $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{4^{n-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n \rightarrow 0$. Lúc đó: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$ là tổng cấp số nhân lùi

vô hạn với $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2$ và công bội $q = \frac{1}{4}$. Vậy tổng diện tích các hình là

$$S = S_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}.$$

Câu 98: Một quả bóng tennis được thả từ độ cao $81(m)$. Mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

A. $243(m)$.

B. $405(m)$.

C. $486(m)$.

D. $524(m)$.

Lời giải:

Đặt $h_1 = 81(m)$. Sau lần chạm đất đầu tiên, quả bóng nảy lên một độ cao $h_2 = \frac{2}{3}h_1$. Tiếp đó,

bóng rơi từ độ cao h_2 , chạm đất và nảy lên độ cao $h_3 = \frac{2}{3}h_2$ rồi rơi từ độ cao h_3 và cứ tiếp tục

như vậy. Sau lần chạm đất thứ n từ độ cao h_n , quả bóng nảy lên $h_{n+1} = \frac{2}{3}h_n, \dots$

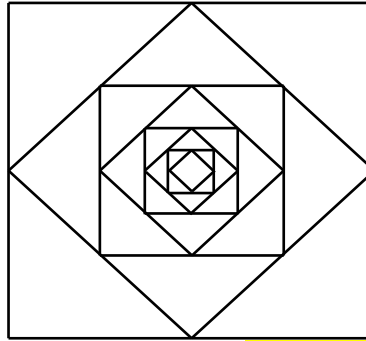
Vậy tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa là $d = (h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots) + (h_2 + \dots + h_n + \dots) \Rightarrow d$ là tổng của hai cấp số nhân lùi vô

hạn có số hạng đầu, theo thứ tự là h_1, h_2 và có cùng công bội $q = \frac{2}{3}$. Suy ra:

$$d = \frac{h_1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{h_2}{1 - \frac{2}{3}} = 405(m).$$

Câu 99: Để trang trí cho một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng $1 m$, bạn A quyết định vẽ các hình vuông lên tấm bìa bằng cách: hình vuông thứ nhất có các đỉnh là trung điểm của các cạnh tấm bìa, hình vuông thứ hai có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ nhất,

hình vuông thứ ba có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ hai,... Giả sử quy trình vẽ hình vuông của bạn A có thể tiến ra vô hạn. Tính độ dài L các nét vẽ hình vuông của bạn A.



A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $4 + 4\sqrt{2}$.

D. $8 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải:

Hình vuông thứ nhất có cạnh là $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên có chu vi $S_1 = 2\sqrt{2}$,

Hình vuông thứ hai có cạnh là $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ nên có chu vi $S_2 = 2$,

Hình vuông thứ ba có cạnh là $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ nên có chu vi $S_3 = \sqrt{2}$,

...

Hình vuông thứ n có cạnh là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ nên có chu vi $S_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n, \dots$

Khi đó độ dài các nét vẽ cạnh hình vuông là $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 + 4\sqrt{2}$.

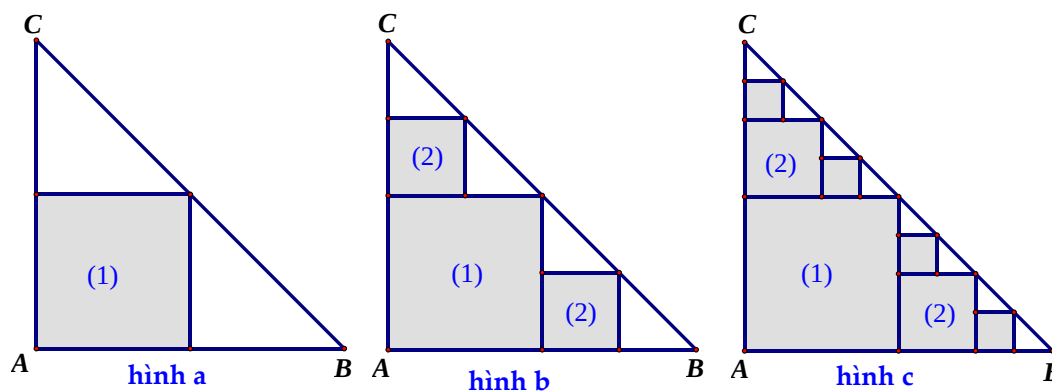
Câu 100: Giả sử tam giác ABC vuông cân tại A với độ dài cạnh góc vuông bằng 1. Ta tạo ra các hình vuông theo các bước sau đây.

Bước 1: Dựng hình vuông màu xám có một đỉnh là A , ba đỉnh còn lại là các trung điểm của ba cạnh AB, BC, AC (**hình a**). Kí hiệu hình vuông này là (1).

Bước 2: Với hai tam giác vuông cân màu trắng còn lại ở **hình a**, ta lại tạo được hai hình vuông màu xám khác theo cách trên, kí hiệu là (2) (**hình b**).

Bước 3: Với bốn tam giác vuông cân màu trắng còn lại ở **hình b**, ta lại tạo được bốn hình vuông màu xám khác theo cách trên (**hình c**).

Bước thứ n : Ở bước này ta có 2^{n-1} hình vuông màu xám được tạo thành theo cách trên. Kí hiệu là (n).



Gọi S_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông màu xám có được sau n bước. Tính $\lim S_n$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$

C. 2.

D. $+\infty$.

Lời giải:

Khi $n \rightarrow +\infty$ thì các hình vuông sẽ lấp đầy tam giác vuông cân ABC . Gọi S là diện tích tam giác ABC , ta có $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2}$. Do đó $\lim S_n = S = \frac{1}{2}$.

Thật vậy, ta có:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]. \text{ Vì } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim S_n = \frac{1}{2}.$$

HẾT

Huế, 08h30' Ngày 23 tháng 5 năm 2023