

NGUYỄN VĂN HOÀNG

ĐỀ CƯƠNG GIẢI TÍCH 12

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG

SỐ PHỨC CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

TẬP 2

Năm học: 2021 - 2022

HỌ VÀ TÊN:.....

LỚP:.....

“Trên con đường thành công không có dấu chân của kẻ LƯỜI BIẾNG”

MỤC LỤC



Chuyên đề 1: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG 1

§1- NGUYÊN HÀM 1

A. Khái niệm nguyên hàm	1
B. Tính chất	1
C. CÁC DẠNG BÀI TẬP	2
📁 <i>Dạng 1.1: Sử dụng nguyên hàm cơ bản</i>	2
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 1	10
📁 <i>Dạng 1.2: Nguyên hàm cơ bản có điều kiện</i>	19
E. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 2	26
📁 <i>Dạng 1.3: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số</i>	28
F. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 3	39
📁 <i>Dạng 1.4: Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ</i>	43
G. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 4	45
📁 <i>Dạng 1.5: Nguyên hàm từng phần</i>	46
H. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 5	52

§2- TÍCH PHÂN 57

A. Khái niệm tích phân	57
B. Tính chất của tích phân	57
C. CÁC DẠNG BÀI TẬP	58
📁 <i>Dạng 2.6: Tích phân cơ bản & tính chất tích phân</i>	58
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 1	73
📁 <i>Dạng 2.7: Tích phân cơ bản có điều kiện</i>	79
E. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 2	83
📁 <i>Dạng 2.8: Tích phân hàm số hữu tỷ</i>	85
F. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 3	88
📁 <i>Dạng 2.9: Tích phân đổi biến</i>	91
G. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 4	95
📁 <i>Dạng 2.10: Tích phân từng phần</i>	103
H. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 5	106

§3- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN	110
<i>▢ Dạng 3.11: Ứng dụng tích phân để tìm diện tích</i>	<i>110</i>
<i>▢ Dạng 3.12: Ứng dụng tích phân để tìm thể tích</i>	<i>125</i>
A. CÁC VÍ DỤ MẪU	126
B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN - VẬN DỤNG	133

Chuyên đề 2: SỐ PHỨC 145

§1- SỐ PHỨC	145
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	145
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN	146
<i>▢ Dạng 1.13: Xác định các yếu tố cơ bản của số phức</i>	<i>146</i>
<i>▢ Dạng 1.14: Biểu diễn hình học cơ bản của số phức</i>	<i>154</i>
<i>▢ Dạng 1.15: Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức</i>	<i>162</i>
<i>▢ Dạng 1.16: Phương trình bậc hai trên tập số phức</i>	<i>178</i>
C. CÁC DẠNG BÀI TẬP VẬN DỤNG	187
<i>▢ Dạng 1.17: Phương trình bậc hai trên tập số phức</i>	<i>187</i>
<i>▢ Dạng 1.18: Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K</i>	<i>189</i>
<i>▢ Dạng 1.19: Tập hợp điểm biểu diễn số phức</i>	<i>192</i>

Chuyên đề 3: CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN 207

§1- CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN	207
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	207
B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA	207
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	219

Chuyên đề 4: ĐẠI SỐ TỔ HỢP 221

§1- QUY TẮC ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP	221
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	221
B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA	221
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	233
§2- XÁC SUẤT	235
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	235
B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA	235
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	239
Bảng đáp án	245

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

A. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

↻ **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathcal{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{K}$.

↻ **Định lý 1.1.** Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

B. TÍNH CHẤT

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$, $\int f''(x) dx = f'(x) + C$, $\int f'''(x) dx = f''(x) + C \dots$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là một hằng số khác 0).
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- $F'(x) = f(x)$ (định nghĩa).

Bảng nguyên hàm một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

• $\int 0 dx = C$	→ • $\int k dx = kx + C$
• $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	→ • $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
• $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	→ • $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
• $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	→ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{(ax+b)} + C$

• $\int e^x dx = e^x + C$	$\rightarrow$ • $\frac{1}{a} \int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + C$
• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\rightarrow$ • $\int a^u du = \frac{1}{m} \frac{a^{(mx+n)}}{\ln a} + C$
• $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\rightarrow$ • $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
• $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\rightarrow$ • $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\rightarrow$ • $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
• $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\rightarrow$ • $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

Chú ý: Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1.1. Sử dụng nguyên hàm cơ bản

 **Ví dụ 1 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 101).** Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x) dx = 2x + C.$

Ⓑ $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C.$

Ⓒ $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

Ⓓ $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C.$

.....

.....

 **Ví dụ 2 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 102).** Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\int f(x) dx = x^2 + 3x + C.$

Ⓑ $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C.$

Ⓒ $\int f(x) dx = x^3 + 3x + C.$

Ⓓ $\int f(x) dx = 2x + C.$

✎ **Ví dụ 3.** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

☐ (A) $20x^3 - 12x + C$.

☐ (B) $x^5 - 2x^3 + x + C$.

☐ (C) $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

☐ (D) $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

✎ **Ví dụ 4.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

☐ (A) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$.

☐ (B) $x^4 + x^3$.

☐ (C) $3x^2 + 2x$.

☐ (D) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3$.

✎ **Ví dụ 5.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + x - 1$ là:

☐ (A) $x^4 + x^2 + x + C$.

☐ (B) $12x^2 + 1 + C$.

☐ (C) $x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$.

☐ (D) $x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$.

✎ **Ví dụ 6.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là

☐ (A) $x^3 + C$.

☐ (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$.

☐ (C) $6x + C$.

☐ (D) $x^3 - x + C$.

✎ **Ví dụ 7.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ là

☐ (A) $\frac{x^3}{3} + 3x + C$.

☐ (B) $x^3 + 3x + C$.

☐ (C) $\frac{x^3}{2} + 3x + C$.

☐ (D) $x^2 + 3 + C$.

 **Ví dụ 8.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + 3x^3)$ là

(A) $x^2 \left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + C.$

(B) $x^2 \left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C.$

(C) $2x \left(x + \frac{3}{4}x^4\right) + C.$

(D) $x^2 \left(x + \frac{3}{4}x^3\right) + C.$

.....

 **Ví dụ 9.** Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}.$

(A) $F(x) = \frac{1}{\ln 5} \ln |5x+4| + C.$

(B) $F(x) = \ln |5x+4| + C.$

(C) $F(x) = \frac{1}{5} \ln |5x+4| + C.$

(D) $F(x) = \frac{1}{5} \ln(5x+4) + C.$

.....

 **Ví dụ 10.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

(A) $e^x + x^2 + C.$

(B) $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

(C) $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

(D) $e^x + 1 + C.$

.....

 **Ví dụ 11.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

(A) $x^2 + \cos x + C.$

(B) $x^2 - \cos x + C.$

(C) $\frac{x^2}{2} - \cos x + C.$

(D) $\frac{x^2}{2} + \cos x + C.$

.....

 **Ví dụ 12.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \cos x$ là

(A) $2x - \sin x + C.$

(B) $\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C.$

(C) $\frac{1}{3}x^3 - \sin x + C.$

(D) $x^3 + \sin x + C.$

.....

✎ Ví dụ 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$.

(A) $\int e^{2x} dx = 2e^{2x} + C.$

(B) $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C.$

(C) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C.$

(D) $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

.....

✎ Ví dụ 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$?

(A) $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C.$

(B) $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C.$

(C) $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C.$

(D) $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C.$

.....

✎ Ví dụ 15. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

(A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

(B) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

(C) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

(D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

.....

✎ Ví dụ 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$.

(A) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C.$

(B) $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C.$

(C) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C.$

(D) $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C.$

.....

✎ Ví dụ 17. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = 2xe^{x^2}.$

(B) $f(x) = x^2e^{x^2}.$

(C) $f(x) = e^{x^2}.$

(D) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$

.....

✎ Ví dụ 18. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$.

- ☐ A $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.
 ☐ B $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.
 ☐ C $-3^{-x} + C$.
 ☐ D $-3^{-x} \ln 3 + C$.
-
-

✎ Ví dụ 19. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$.

- ☐ A $\frac{1}{5} \cos 5x + C$.
 ☐ B $\cos 5x + C$.
 ☐ C $-\cos 5x + C$.
 ☐ D $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$.
-
-

✎ Ví dụ 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- ☐ A $x^3 + \cos x + C$.
 ☐ B $6x + \cos x + C$.
 ☐ C $x^3 - \cos x + C$.
 ☐ D $6x - \cos x + C$.
-
-

✎ Ví dụ 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

- ☐ A $F(x) = 2x^2 + x$.
 ☐ B $F(x) = 2$.
☐ C $F(x) = C$.
 ☐ D $F(x) = x^2 + x + C$.
-
-

✎ Ví dụ 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- ☐ A $e^x + x^2 + C$.
 ☐ B $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.
☐ C $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.
 ☐ D $e^x + 1 + C$.
-
-

✎ Ví dụ 23. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

☐ (A) $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

☐ (B) $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$

☐ (C) $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

☐ (D) $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C.$

.....

.....

✎ Ví dụ 24. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$

☐ (A) $x + \frac{1}{x-1} + C.$

☐ (B) $x + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

☐ (C) $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

☐ (D) $x^2 + \ln|x-1| + C.$

.....

.....

✎ Ví dụ 25. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{-3x+1}$ là

☐ (A) $\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

☐ (B) $-3e^{-3x+1} + C.$

☐ (C) $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

☐ (D) $3e^{-3x+1} + C.$

.....

.....

✎ Ví dụ 26. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos \frac{x}{2}.$

☐ (A) $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C.$

☐ (B) $F(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + C.$

☐ (C) $F(x) = -2 \sin \frac{x}{2} + C.$

☐ (D) $F(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + C.$

.....

.....

✎ Ví dụ 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = 12^{12x}.$

☐ (A) $\int 12^{12x} dx = 12^{12x-1} \cdot \ln 12 + C.$

☐ (B) $\int 12^{12x} dx = 12^{12x} \cdot \ln 12 + C.$

☐ (C) $\int 12^{12x} dx = \frac{12^{12x}}{\ln 12} + C.$

☐ (D) $\int 12^{12x} dx = \frac{12^{12x-1}}{\ln 12} + C.$

.....

✎ **Ví dụ 28.** Họ nguyên hàm $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2} dx$ bằng

(A) $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{5}{x} + C.$

(B) $-2x + \frac{5}{x} + C.$

(C) $x^2 - 2x - \frac{5}{x} + C.$

(D) $x^2 - x - \frac{5}{x} + C.$

✎ **Ví dụ 29.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}.$

(A) $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C.$

(B) $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

(C) $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

(D) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

✎ **Ví dụ 30.** Tính nguyên hàm $I = \int (2^x + 3^x) dx.$

(A) $I = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

(B) $I = \frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{3^x} + C.$

(C) $I = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + C.$

(D) $I = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + C.$

✎ **Ví dụ 31.** Tìm $H = \int \sqrt[4]{2x-1} dx.$

(A) $H = \frac{2}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

(B) $H = (2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

(C) $H = \frac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

(D) $H = \frac{8}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

✎ **Ví dụ 32.** Hàm số $F(x) = \frac{1}{4} \ln^4 x + C$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

☐ A $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$.
 ☐ B $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$.
 ☐ C $f(x) = \frac{x}{\ln^3 x}$.
 ☐ D $f(x) = \frac{x \ln^3 x}{3}$.

.....

.....

 **Ví dụ 33.** Hàm số $F(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

☐ A $f(x) = -2 \cos x - 3 \sin x$.
 ☐ B $f(x) = -2 \cos x + 3 \sin x$.
☐ C $f(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$.
 ☐ D $f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$.

.....

.....

 **Ví dụ 34.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3^x - 2x$ là

☐ A $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - x^2 - 1$.
 ☐ B $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - 2$.
☐ C $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^2}{2}$.
 ☐ D $F(x) = 3^x \ln 3 - x^2$.

.....

.....

 **Ví dụ 35.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

☐ A $x^3 + \cos x + C$.
 ☐ B $x^3 + \sin x + C$.
 ☐ C $x^3 - \cos x + C$.
 ☐ D $x^3 - \sin x + C$.

.....

.....

 **Ví dụ 36.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 10^x$.

☐ A $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$.
 ☐ B $\int 10^x dx = 10^x \ln 10 + C$.
☐ C $\int 10^x dx = 10^{x+1} + C$.
 ☐ D $\int 10^x dx = \frac{10^{x+1}}{x+1} + C$.

.....

.....

 **Ví dụ 37.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2 \sin x$.

- (A) $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x - \cos^2 x + C$. (B) $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x + \sin^2 x + C$.
 (C) $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x - 2 \cos x + C$. (D) $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x + 2 \cos x + C$.
-
-

 **Ví dụ 38.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2^x$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$. (B) $\int f(x) dx = 2x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$.
 (C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2} + C$. (D) $\int f(x) dx = 2x - 2^x \ln 2 + C$.
-
-

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 1

Câu 1 (MĐ 102- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$. (B) $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$.
 (C) $\int f(x) dx = e^x + C$. (D) $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$.

Câu 2 (MĐ 102- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $f(x) = -\sin x$. (B) $f(x) = \cos x$. (C) $f(x) = \sin x$. (D) $f(x) = -\cos$.

Câu 3 (MĐ 102- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. (B) $\int f(x) dx = x + \tan 2x + C$.
 (C) $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C$. (D) $\int f(x) dx = x - \frac{1}{2} \tan 2x + C$.

Câu 4 (MĐ 103- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int e^x dx = xe^x + C$. (B) $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.
 (C) $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. (D) $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 5 (MĐ 103- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- (A) $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. (B) $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. (C) $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. (D) $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 6 (MĐ 104- BGD&ĐT - Năm 2021 - 2022).

Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\int e^x dx = e^x + C$. (B) $\int e^x dx = xe^x + C$.
(C) $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. (D) $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

Câu 7 (MĐ 104- BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. (B) $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C$.
(C) $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C$. (D) $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 8 (ĐMH - BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ là

- (A) $\int f(x) dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + C$.
(C) $\int f(x) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C$.

Câu 9 (ĐMH - BGD&ĐT - Năm 2021- 2022).

Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = x - \cos x + C$. (B) $\int f(x) dx = x + \sin x + C$.
(C) $\int f(x) dx = x + \cos x + C$. (D) $\int f(x) dx = \cos x + C$.

Câu 10 (MĐ 104- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = 12x^2 + C$. (B) $\int f(x) dx = 4x^3 - 4x + C$.
(C) $\int f(x) dx = x^4 - 4x + C$. (D) $\int f(x) dx = x^4 + C$.

Câu 11 (MĐ 103- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = 1 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = -\sin x + C$. (B) $\int f(x) dx = x - \sin x + C$.
(C) $\int f(x) dx = x + \cos x + C$. (D) $\int f(x) dx = x + \sin x + C$.

Câu 12 (MĐ 102- BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2020 - 2021).

Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\int f(x) dx = x^4 - 2x + C$. (B) $\int f(x) dx = 4x^3 - 2x + C$.
(C) $\int f(x) dx = 12x^2 + C$. (D) $\int f(x) dx = x^4 + C$.

Câu 13 (102- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = 2 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = 2x + \sin x + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2x + \cos x + C.$

(C) $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2x - \sin x + C.$

Câu 14 (104- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = e^x + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = e^x + 4x + C.$

(B) $\int f(x) dx = e^x + C.$

(C) $\int f(x) dx = e^{x-4} + C.$

(D) $\int f(x) dx = e^x - 4x + C.$

Câu 15 (MĐ 101- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = x^4 - 3x + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^4 + C.$

(C) $\int f(x) dx = 4x^3 - 3x + C.$

(D) $\int f(x) dx = 12x^2 + C.$

Câu 16 (MĐ 103- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2020- 2021).

Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = x^3 + x + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$

(C) $\int f(x) dx = x^2 + x + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2x + C.$

Câu 17 (MĐ 103- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2020- 2021).

. Cho hàm số $f(x) = e^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = e^x + 3x + C.$

(B) $\int f(x) dx = e^x + C.$

(C) $\int f(x) dx = e^{x-3} + C.$

(D) $\int f(x) dx = e^x - 3x + C.$

Câu 18 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 101).

Cho hàm số $f(x) = e^x + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = e^{x-1} + C.$

(B) $\int f(x) dx = e^x - x + C.$

(C) $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

(D) $\int f(x) dx = e^x + C.$

Câu 19 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 102).

Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = e^{x-2} + C.$

(B) $\int f(x) dx = e^x + 2x + C.$

(C) $\int f(x) dx = e^x + C.$

(D) $\int f(x) dx = e^x - 2x + C.$

Câu 20 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

(A) $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$

(B) $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

(C) $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

(D) $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 21 (Mã 101-2020 Lần 1). $\int x^2 dx$ bằng

- (A) $2x + C$. (B) $\frac{1}{3}x^3 + C$. (C) $x^3 + C$. (D) $3x^3 + C$.

Câu 22 (Mã 102-2020 Lần 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

- (A) $4x^4 + C$. (B) $3x^2 + C$. (C) $x^4 + C$. (D) $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 23 (Mã 103-2020 Lần 1). $\int x^4 dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + C$. (B) $4x^3 + C$. (C) $x^5 + C$. (D) $5x^5 + C$.

Câu 24 (Mã 104-2020 Lần 1). $\int x^5 dx$ bằng

- (A) $5x^4 + C$. (B) $\frac{1}{6}x^6 + C$. (C) $x^6 + C$. (D) $6x^6 + C$.

Câu 25 (Mã 101- 2020 Lần 2). $\int 5x^4 dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + C$. (B) $x^5 + C$. (C) $5x^5 + C$. (D) $20x^3 + C$.

Câu 26 (Mã 102-2020 Lần 2). $\int 6x^5 dx$ bằng

- (A) $6x^6 + C$. (B) $x^6 + C$. (C) $\frac{1}{6}x^6 + C$. (D) $30x^4 + C$.

Câu 27 (Mã 103-2020 Lần 2). $\int 3x^2 dx$ bằng

- (A) $3x^3 + C$. (B) $6x + C$. (C) $\frac{1}{3}x^3 + C$. (D) $x^3 + C$.

Câu 28 (Mã 104-2020 Lần 2). $\int 4x^3 dx$ bằng

- (A) $4x^4 + C$. (B) $\frac{1}{4}x^4 + C$. (C) $12x^2 + C$. (D) $x^4 + C$.

Câu 29 (Mã 103 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. (B) $x^4 + x^2 + C$. (C) $x^5 + x^3 + C$. (D) $4x^3 + 2x + C$.

Câu 30 (Mã 104-2019). Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- (A) $x^2 + C$. (B) $2x^2 + C$. (C) $2x^2 + 4x + C$. (D) $x^2 + 4x + C$.

Câu 31 (Mã 102-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- (A) $x^2 + C$. (B) $x^2 + 6x + C$. (C) $2x^2 + C$. (D) $2x^2 + 6x + C$.

Câu 32 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- (A) $\sin x + 3x^2 + C$. (B) $-\sin x + 3x^2 + C$. (C) $\sin x + 6x^2 + C$. (D) $-\sin x + C$.

Câu 33 (Mã 105 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- (A) $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$. (B) $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$.
(C) $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$. (D) $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$.

Câu 34 (Mã 101 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- (A) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$. (B) $3x^2 + 1 + C$. (C) $x^3 + x + C$. (D) $x^4 + x^2 + C$.

Câu 35 (Mã 103-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- (A) $x^2 + 3x + C$. (B) $2x^2 + 3x + C$. (C) $x^2 + C$. (D) $2x^2 + C$.

Câu 36 (Đề Minh Họa 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$

- (A) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
(C) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 37 (Đề Tham Khảo 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.
(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 38 (Mã 110 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

- (A) $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C$. (B) $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln |5x-2| + C$.
(C) $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln |5x-2| + C$. (D) $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln |5x-2| + C$.

Câu 39 (Mã 123 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

- (A) $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$. (B) $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.
(C) $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$. (D) $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

Câu 40 (Mã 104 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- (A) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. (B) $3x^2 + 2x + C$. (C) $x^3 + x^2 + C$. (D) $x^4 + x^3 + C$.

Câu 41 (Đề Tham Khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- (A) $e^x + 1 + C$. (B) $e^x + x^2 + C$.
(C) $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. (D) $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 42 (Mã 101-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

- (A) $x^2 + C$. (B) $x^2 + 5x + C$. (C) $2x^2 + 5x + C$. (D) $2x^2 + C$.

Câu 43 (Mã 104 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- (A) $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. (B) $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$.
(C) $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. (D) $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$.

Câu 44 (Mã 102 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

- (A) $4x^3 + 1 + C$. (B) $x^5 + x^2 + C$. (C) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$. (D) $x^4 + x + C$.

Câu 45 (Đề Tham Khảo 2018). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- (A) $x^3 + C$. (B) $\frac{x^3}{3} + x + C$. (C) $6x + C$. (D) $x^3 + x + C$.

Câu 46 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Tìm nguyên hàm $\int x (x^2 + 7)^{15} dx$?

- (A) $\frac{1}{2} (x^2 + 7)^{16} + C.$ (B) $-\frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C.$
 (C) $\frac{1}{16} (x^2 + 7)^{16} + C.$ (D) $\frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C.$

Câu 47 (THPT Ba Đình -2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- (A) $3e^x + C.$ (B) $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$ (C) $\frac{1}{3}e^x + C.$ (D) $3e^{3x} + C.$

Câu 48 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

- (A) $\frac{x^2}{2} + \sin x + C.$ (B) $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C.$ (C) $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C.$ (D) $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$

Câu 49 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019).

Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- (A) $2e^{2x-1} + C.$ (B) $e^{2x-1} + C.$ (C) $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$ (D) $\frac{1}{2}e^x + C.$

Câu 50 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

- (A) $\ln |2x+3| + C.$ (B) $\frac{1}{2} \ln |2x+3| + C.$
 (C) $\frac{1}{\ln 2} \ln |2x+3| + C.$ (D) $\frac{1}{2} \lg (2x+3) + C.$

Câu 51 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}.$

- (A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$ (B) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$
 (C) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$ (D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 52 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

- (A) $-3\cos 3x + C.$ (B) $3\cos 3x + C.$ (C) $\frac{1}{3}\cos 3x + C.$ (D) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

Câu 53 (Chuyên KHTN 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- (A) $x^3 + \cos x + C.$ (B) $6x + \cos x + C.$ (C) $x^3 - \cos x + C.$ (D) $6x - \cos x + C.$

Câu 54 (Chuyên Bắc Ninh -2019). Công thức nào sau đây là sai?

- (A) $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$ (B) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$
 (C) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ (D) $\int e^x dx = e^x + C.$

Câu 55 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- (A) $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$ (B) $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$
 (C) $f(x) = 12x^2 + 2x.$ (D) $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

Câu 56 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

(B) $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(C) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$

(D) $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 57 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

(A) $\int 2^x \, dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$

(B) $\int 2^x \, dx = 2^x + C.$

(C) $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

(D) $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Câu 58 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

(A) $\int f(x) \, dx = 3x^2 + \cos x + C.$

(B) $\int f(x) \, dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$

(C) $\int f(x) \, dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

(D) $\int f(x) \, dx = 3 + \cos x + C.$

Câu 59 (Sở Bình Phước 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

(A) $x^2 + \cos x + C.$

(B) $x^2 - \cos x + C.$

(C) $\frac{x^2}{2} - \cos x + C.$

(D) $\frac{x^2}{2} + \cos x + C.$

Câu 60 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

(A) $\cos x + C.$

(B) $-\cos x + C.$

(C) $-\sin x + C.$

(D) $\sin x + C.$

Câu 61 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019).

Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

(A) $4x^3 + 2x + C.$

(B) $x^4 + x^2 + C.$

(C) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

(D) $x^5 + x^3 + C.$

Câu 62 (THPT Cù Huy Cận 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

(A) $e^x + x^2 + C.$

(B) $e^x - x^2 + C.$

(C) $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$

(D) $e^x - 2 + C.$

Câu 63 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

(A) $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

(B) $\sin x + x^2 + C.$

(C) $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

(D) $-\sin x + x^2 + C.$

Câu 64 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

(A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln |x| + C.$

(B) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

(C) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln |x| + C.$

(D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Câu 65 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

(A) $\ln x - \cos x + C$. (B) $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. (C) $\ln |x| + \cos x + C$. (D) $\ln |x| - \cos x + C$.

Câu 66 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

(A) $f(x) = 3x^2$. (B) $f(x) = x^3$. (C) $f(x) = x^2$. (D) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Câu 67 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

(A) $\int f(x) dx = 2^x + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.
(C) $\int f(x) dx = 2^x \ln 2 + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 68 (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019).

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.
(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 69 (Sở Hà Nội 2019). Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^x$?

(A) $y = \frac{1}{x}$. (B) $y = e^x$. (C) $y = e^{-x}$. (D) $y = \ln x$.

Câu 70 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Tính $F(x) = \int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

(A) $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$. (B) $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$. (C) $F(x) = e^2 x + C$. (D) $F(x) = 2ex + C$.

Câu 71 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $(-\infty; \frac{1}{2})$.

(A) $\frac{1}{2} \ln |2x - 1| + C$. (B) $\frac{1}{2} \ln (1 - 2x) + C$.
(C) $-\frac{1}{2} \ln |2x - 1| + C$. (D) $\ln |2x - 1| + C$.

Câu 72 (Chuyên Hưng Yên 2019). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

(A) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$. (B) $2^x + x^2 + C$. (C) $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$. (D) $2^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 73 (Chuyên Sơn La 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

(A) $1 + \cos x + C$. (B) $1 - \cos x + C$. (C) $x + \cos x + C$. (D) $x - \cos x + C$.

Câu 74 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$ là

(A) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. (B) $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.
(C) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$. (D) $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.

Câu 75 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

- (A) $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$. (B) $\ln(1-3x) + C$. (C) $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$. (D) $\ln(3x-1) + C$.

Câu 76 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- (A) $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$. (B) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.
(C) $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. (D) $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \ (\forall x \neq -1)$.

Câu 77 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4+3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.
(C) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$. (D) $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$.

Câu 78 (Sở Thanh Hóa 2019). Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x) dx$.

- (A) $\int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.
(C) $\int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$.

Câu 79 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

- (A) $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C$.
(C) $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$. (D) $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C$.

Câu 80 (Chuyên Bắc Giang 2019). Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

- (A) $f(x) = 2xe^{x^2}$. (B) $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$. (C) $f(x) = e^{2x}$. (D) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Câu 81 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

- (A) $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. (B) $-3^{-x} + C$. (C) $3^{-x} \ln 3 + C$. (D) $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Câu 82 (Sở Phú Thọ 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- (A) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. (B) $x^4 + x^3 + C$. (C) $3x^2 + 2x + C$. (D) $\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$.

Câu 83 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019).

Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

- (A) $\frac{x^{2020}}{2020} + 1$. (B) $\frac{x^{2020}}{2020}$. (C) $y = 2019x^{2018}$. (D) $\frac{x^{2020}}{2020} - 1$.

Câu 84 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

(A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

(B) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

(C) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

(D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 85 (Quảng Ninh 2019). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

(A) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

(C) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 86 (HSG Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

(A) $2e^x + \tan x + C.$

(B) $2e^x - \tan x + C.$

(C) $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C.$

(D) $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C.$

Câu 87 (Chuyên Hạ Long 2019). Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

(A) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

(B) $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

(C) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

(D) $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Câu 88 (Sở Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là

(A) $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C.$

(B) $\ln|5x+4| + C.$

(C) $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C.$

(D) $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C.$

Dạng 1.2. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện

$$\int f(x) dx \text{ thỏa mãn } F(x_0) = k, (*)$$

- Bước 1: Tìm nguyên hàm $F(x) = G(x) + C$
- Bước 2: Từ $F(x_0) = k$, tìm được C .
- Bước 3: Thay C vào (*) và kết luận.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

(A) $F(x) = e^x - 2020.$

(B) $F(x) = x^2 + e^x - 2019.$

(C) $F(x) = x^2 + e^x + 2017.$

(D) $F(x) = x^2 + e^x + 2018.$

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

☐ (A) $\frac{1}{2}e + 200.$
☐ (B) $2e + 200.$
☐ (C) $\frac{1}{2}e + 50.$
☐ (D) $\frac{1}{2}e + 100.$

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) \cdot g(x)$ biết $F(1) = 3$, biết $\int f(x)dx = x + 2018$ và $\int g(x)dx = x^2 + 2019$.

☐ (A) $F(x) = x^3 + 1.$
☐ (B) $F(x) = x^3 + 3.$
☐ (C) $F(x) = x^2 + 2.$
☐ (D) $F(x) = x^2 + 3.$

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 0$. Tìm $F(x)$.

☐ (A) $F(x) = 2 \ln(x-1) + 2.$
☐ (B) $F(x) = \ln(x-1) + 3.$

☐ (C) $F(x) = 4 \ln(x-1).$
☐ (D) $F(x) = \ln(x-1) - 3.$

.....

.....

 **Ví dụ 5.** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

☐ (A) $\sqrt{3}.$
☐ (B) $1.$
☐ (C) $2\sqrt{3}.$
☐ (D) $2.$

.....

.....

 **Ví dụ 6.** Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1$.

☐ (A) $F(x) = \ln(x^4+1) + 1.$
☐ (B) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}.$

☐ (C) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$
☐ (D) $F(x) = 4 \ln(x^4+1) + 1.$

 **Ví dụ 7.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- ☐ **A** $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$.
 ☐ **B** $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.
 ☐ **C** $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.
 ☐ **D** $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

 **Ví dụ 8.** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{14}{3}$ thì

- ☐ **A** $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{13}{3}$.
 ☐ **B** $F(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x + 5$.
☐ **C** $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + 5$.
 ☐ **D** $F(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x + \frac{13}{3}$.

 **Ví dụ 9.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0; 1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- ☐ **A** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
 ☐ **B** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
 ☐ **C** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
 ☐ **D** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

 **Ví dụ 10.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8 \sin x$ và thỏa mãn $F(0) = 2010$. Tìm $F(x)$.

- ☐ **A** $F(x) = 6x - 8 \cos x + 2018$.
 ☐ **B** $F(x) = 6x + 8 \cos x$.
☐ **C** $F(x) = x^3 - 8 \cos x + 2018$.
 ☐ **D** $F(x) = x^3 - 8 \cos x + 2019$.

✎ Ví dụ 11. Tính nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{2x}$, biết $F(0) = 1$.

- (A) $F(x) = e^{2x}$. (B) $F(x) = e^{2x} - 1$. (C) $F(x) = e^x$. (D) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$.

.....

✎ Ví dụ 12. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- (A) $F(3) = \ln 2 - 1$. (B) $F(3) = \ln 2 + 1$. (C) $F(3) = \frac{1}{2}$. (D) $F(3) = \frac{7}{4}$.

.....

✎ Ví dụ 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(3) = 1$. Tính giá trị của $F(2)$.

- (A) $F(2) = -1 - \ln 2$. (B) $F(2) = 1 - \ln 2$.
 (C) $F(2) = -1 + \ln 2$. (D) $F(2) = 1 + \ln 2$.

.....

✎ Ví dụ 14. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

- (A) $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$. (B) $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.
 (C) $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$. (D) $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

.....

✎ Ví dụ 15. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 3x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- (A) $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{5}{3}$. (B) $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + 2$.
 (C) $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + 2$. (D) $F(x) = -\cos 3x + 2$.

Ví dụ 16. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

☐ (A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

☐ (B) $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

☐ (C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

☐ (D) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Ví dụ 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Tính $F(0) + F(-1)$.

☐ (A) -3 .

☐ (B) -4 .

☐ (C) 3 .

☐ (D) 4 .

Ví dụ 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 5x^4 - 3x^2$ trên tập số thực thỏa mãn $F(1) = 3$ là

☐ (A) $x^5 - x^3 + 2x + 1$.

☐ (B) $x^5 - x^3 + 3$.

☐ (C) $x^5 - x^3 + 5$.

☐ (D) $x^5 - x^3$.

Ví dụ 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Biết rằng $F(1) = 4$. Tìm $F(x)$.

☐ (A) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x$.

☐ (B) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$.

☐ (C) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$.

☐ (D) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{49}{12}$.

 **Ví dụ 20.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

(A) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

(B) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$

(C) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x.$

(D) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$

.....

 **Ví dụ 21.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2 \cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

(A) $F(x) = 2 \sin x - \cos x + 2.$

(B) $F(x) = 2 \sin x - \cos x - 2.$

(C) $F(x) = -2 \sin x - \cos x + 2.$

(D) $F(x) = \sin x - 2 \cos x - 2.$

.....

 **Ví dụ 22.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$

(A) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

(B) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$

(C) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x.$

(D) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$

.....

 **Ví dụ 23.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2 \cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

(A) $F(x) = 2 \sin x - \cos x + 2.$

(B) $F(x) = 2 \sin x - \cos x - 2.$

(C) $F(x) = -2 \sin x - \cos x + 2.$

(D) $F(x) = \sin x - 2 \cos x - 2.$

.....

Ví dụ 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $f(1) = 1$. Giá trị $f(5)$ bằng

☐ A $1 + \ln 3$.

☐ B $\ln 2$.

☐ C $1 + \ln 2$.

☐ D $\ln 3$.

.....

Ví dụ 25. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$.

☐ A $F(x) = x^2 + e^x - 1$.

☐ B $F(x) = x^2 + e^x$.

☐ C $F(x) = e^x - 1$.

☐ D $F(x) = x^2 + e^x + 1$.

.....

Ví dụ 26. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x - 1}$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Tính $F(-1)$.

☐ A $F(-1) = -\ln 2$.

☐ B $F(-1) = -2 + \ln 2$.

☐ C $F(-1) = \ln 2$.

☐ D $F(-1) = 2 + \ln 2$.

.....

Ví dụ 27. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{4}{1+2x}$ và $F(0) = 2$. Tìm $F(2)$.

☐ A $4 \ln 5 + 2$.

☐ B $5(1 + \ln 2)$.

☐ C $2 \ln 5 + 4$.

☐ D $2(1 + \ln 5)$.

.....

Ví dụ 28. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

☐ A $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$.

☐ B $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.

$$\textcircled{C} V = F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1.$$

$$\textcircled{D} F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$$

.....

.....

E. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 2

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

$\textcircled{A} 2 + \ln 15.$ $\textcircled{B} 3 + \ln 15.$ $\textcircled{C} \ln 15.$ $\textcircled{D} 4 + \ln 15.$

Câu 2 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

$\textcircled{A} 2 \ln(x-1) + 2.$ $\textcircled{B} \ln(x-1) + 3.$ $\textcircled{C} 4 \ln(x-1).$ $\textcircled{D} \ln(x-1) - 3.$

Câu 3 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$ Giá trị của $F(0)$ bằng

$\textcircled{A} 2 + \ln 2.$ $\textcircled{B} \ln 2.$ $\textcircled{C} 2 + \ln(-2).$ $\textcircled{D} \ln(-2).$

Câu 4 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

$\textcircled{A} F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2.$ $\textcircled{B} F(1) = \ln 3 + 2.$ $\textcircled{C} F(1) = 2 \ln 3 - 2.$ $\textcircled{D} F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$

Câu 5 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019).

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- $\textcircled{A} F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0).$
- $\textcircled{B} F(x) = \ln|x| + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
- $\textcircled{C} F(x) = \ln|x| + \ln 2 \forall x \in (-\infty; 0).$
- $\textcircled{D} F(x) = \ln(-x) + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 6 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

$\textcircled{A} S = \ln 4035.$ $\textcircled{B} S = 4.$ $\textcircled{C} S = \ln 2.$ $\textcircled{D} S = 1.$

Câu 7 (Mã 105 2017). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

(A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.
(C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

(B) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.
(D) $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

Câu 8 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

(A) 2. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

Câu 9 (Sở Bình Phước 2019). Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

(A) $\frac{1}{2}e + 200$. (B) $2e + 100$. (C) $\frac{1}{2}e + 50$. (D) $\frac{1}{2}e + 100$.

Câu 10 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

(A) $y = 2e^x + 2x$. (B) $y = 2e^x + 2$. (C) $y = e^{2x} + x + 2$. (D) $y = e^{2x} + x + 1$.

Câu 11 (Sở Bắc Ninh 2019). Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

(A) $F(x) = x^2 + e^x + 2018$. (B) $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
(C) $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. (D) $F(x) = e^x - 2019$.

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

(A) $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. (B) $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.
(C) $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. (D) $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Câu 13 (Mã 104 2017). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

(A) $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$. (B) $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
(C) $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$. (D) $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

Câu 14 (Mã 123 2017). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$. (B) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.
(C) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$. (D) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

Câu 15 (Việt Đức Hà Nội 2019). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$. (B) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.
(C) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$. (D) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Câu 16 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

- (A) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$. (B) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$. (C) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$. (D) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$.

Câu 17 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

- (A) 55. (B) 44. (C) 45. (D) 0.

Câu 18 (Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-2020).

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.

- (A) $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. (B) $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$.
(C) $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. (D) $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Câu 19 (THPT Quốc Gia 2021 - Lần 1 - Mã 102).

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khí } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khí } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 9. (B) 15. (C) 11. (D) 6.

Câu 20 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 101).

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khí } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khí } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 27. (B) 29. (C) 26. (D) 25.

Dạng 1.3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

“Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ ”

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm:

$I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x)) u'(x) dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Khi đó:

$$I = \int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C.$$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

 **Ví dụ 1.** Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- Ⓐ $2e^x - 4x^2 + C$. Ⓑ $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$. Ⓒ $e^{2x} - 8x^2 + C$. Ⓓ $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- Ⓐ $\int 2u(u^2 - 4) du$. Ⓑ $\int (u^2 - 4) du$.
 Ⓒ $\int 2(u^2 - 4) du$. Ⓓ $\int (u^2 - 3) du$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Cho hàm số $F(x) = \int x\sqrt{x^2+2} dx$. Biết $F(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$, tính $F(\sqrt{7})$.

- Ⓐ $\frac{40}{3}$. Ⓑ 11. Ⓒ $\frac{23}{6}$. Ⓓ 7.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Tính tích phân $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A = \int dt.$

Ⓑ $A = \int \frac{1}{t^2} dt.$

Ⓒ $A = \int t dt.$

Ⓓ $A = \int \frac{1}{t} dt.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{3}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

Ⓐ $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}.$

Ⓑ $\frac{1}{2}e + 2.$

Ⓒ $2e + 1.$

Ⓓ $\frac{1}{2}e + 1.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 6.** Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$.

Ⓐ $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$

Ⓑ $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$

Ⓒ $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C.$

Ⓓ $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 7.** Nếu $F(x) = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ thì

☐ (A) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+3} + C.$

☐ (B) $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C.$

☐ (C) $F(x) = \frac{1}{2} \ln (x^2+2x+3) + C.$

☐ (D) $F(x) = \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 8.** Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là

☐ (A) $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C.$

☐ (B) $-2\sqrt{1-x} + C.$

☐ (C) $\frac{C}{\sqrt{1-x}}.$

☐ (D) $\sqrt{1-x} + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 9.** Nguyên hàm $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ bằng.

☐ (A) $2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x}+1| + C.$

☐ (B) $2\sqrt{x} + C.$

☐ (C) $2 \ln |\sqrt{x}+1| + C.$

☐ (D) $2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x}+1| + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 10.** Nếu $F(x) = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ thì

☐ (A) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+3} + C.$

☐ (B) $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C.$

☐ (C) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C.$

☐ (D) $F(x) = \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 11.** Một nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ là:

☐ (A) $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^3.$

☐ (B) $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^6.$

☐ (C) $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3.$

☐ (D) $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 12.** Một nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ là:

☐ (A) $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^3.$

☐ (B) $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^6.$

☐ (C) $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3.$

☐ (D) $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 13.** Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng.

☐ (A) $I = \int u^5 du.$

☐ (B) $I = \frac{1}{12} \int u^5 du.$

☐ (C) $I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$

☐ (D) $I = \frac{1}{4} \int u^5 du.$

 **Ví dụ 14.** Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 1)^9 dx$.

☐ (A) $\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C$.

☐ (B) $\frac{1}{10}(x^2 + 1)^{10} + C$.

☐ (C) $-\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C$.

☐ (D) $(x^2 + 1)^{10} + C$.

 **Ví dụ 15.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng

☐ (A) $3 \ln 2 + 2$.

☐ (B) $\ln 2 + 2$.

☐ (C) $\ln 2 + 1$.

☐ (D) $2 \ln 2 + 1$.

 **Ví dụ 16.** Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

☐ (A) $y = \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + C$.

☐ (B) $y = -\frac{4}{3} \cos^3 x + \frac{4}{5} \cos^5 x + C$.

☐ (C) $y = \frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \cos^5 x + C$.

☐ (D) $y = -\frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{4}{5} \sin^5 x + C$.

 **Ví dụ 17.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Khi đó $F(0)$ là

☐ (A) $-\frac{2}{3} \ln 2 + 2$.

☐ (B) $-\frac{1}{3} \ln 2 - 2$.

☐ (C) $-\frac{1}{3} \ln 2 + 2$.

☐ (D) $-\frac{2}{3} \ln 2 - 2$.

 **Ví dụ 18.** Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào dưới đây?

☐ (A) $\int 2(u^2 - 4) u du$.

☐ (B) $\int (u^2 - 4) du$.

☐ (C) $\int 2(u^2 - 4) du$.

☐ (D) $\int (u^2 - 3) du$. Lời giải.

 **Ví dụ 19.** Cho nguyên hàm $I = \int x\sqrt{1+2x^2} dx$, khi thực hiện đổi biến $u = \sqrt{1+2x^2}$ thì ta được nguyên hàm theo biến mới u là

☐ (A) $I = \frac{1}{2} \int u^2 du$.

☐ (B) $I = \int u^2 du$.

☐ (C) $I = 2 \int u du$.

☐ (D) $I = \int u du$.

 **Ví dụ 20.** Cho hàm số $F(x) = \int x\sqrt{x^2+1} dx$. Biết $F(0) = \frac{4}{3}$, tính $F(2\sqrt{2})$.

☐ (A) 3.

☐ (B) $\frac{85}{4}$.

☐ (C) 19.

☐ (D) 10.

 **Ví dụ 21.** Tính $I = \int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} dx$, khi thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt{x+1}$, thì được

☐ (A) $I = \int \frac{2u^2-3}{u} du$.

☐ (B) $I = \int (4u^2-6) du$.

☐ (C) $I = \int \frac{4u^2-6}{u} du$.

☐ (D) $I = \int (2u^2-3) du$.

 **Ví dụ 22.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

☐ (A) $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + C$.

☐ (B) $F(x) = \sqrt{x^2+1} + C$.

☐ (C) $F(x) = \ln \sqrt{x^2+1} + C$.

☐ (D) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$.

 **Ví dụ 23.** Xét nguyên hàm $I = \int x\sqrt{x+2} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+2}$ thì ta được

Ⓐ $I = \int (t^4 - 2t^2) dt.$

Ⓑ $I = \int (4t^4 - 2t^2) dt.$

Ⓒ $I = \int (2t^4 - 4t^2) dt.$

Ⓓ $I = \int (2t^4 - t^2) dt.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 24.** Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

Ⓐ $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt.$ Ⓑ $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt.$ Ⓒ $I = \int_1^e (3t+1) dt.$ Ⓓ $I = \int_0^1 (3t+1) dt.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 25.** Tính nguyên hàm $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A = \int dt.$

Ⓑ $A = \int \frac{1}{t^2} dt.$

Ⓒ $A = \int t dt.$

Ⓓ $A = \int \frac{1}{t} dt.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 26.** Tìm nguyên hàm $I = \int \sin^4 x \cos x \, dx$.

☐ (A) $\frac{\sin^5 x}{5} + C$.

☐ (B) $\frac{\cos^5 x}{5} + C$.

☐ (C) $-\frac{\sin^5 x}{5} + C$.

☐ (D) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 27.** Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x} \, dx (x > 0)$ bằng

☐ (A) $x + \ln^2 x + C$.

☐ (B) $\ln^2 x + \ln x + C$.

☐ (C) $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$.

☐ (D) $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 28.** Cho $I = \int x(1 - x^2)^{2019} \, dx$. Đặt $u = 1 - x^2$ khi đó I viết theo u và du ta được:

☐ (A) $I = -\frac{1}{2} \int u^{2019} \, du$.

☐ (B) $I = -2 \int u^{2019} \, du$.

☐ (C) $I = 2 \int u^{2019} \, du$.

☐ (D) $I = \frac{1}{2} \int u^{2019} \, du$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} + 3x$ là

(A) $\frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$

(B) $2x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$

(C) $\frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$

(D) $4x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 30. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$.

(A) $2\sqrt{4+x^3} + C.$

(B) $\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

(C) $2\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

(D) $\frac{1}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C. F.$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^{x^3+1}$.

(A) $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C.$

(B) $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 32.** Tích phân $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x + 2)}$ bằng

(A) $\ln 2$.

(B) $\ln \frac{3}{2}$.

(C) 0.

(D) $\ln 3$.

.....

F. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 3

Câu 1 (Mã 101-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

(A) $2e^x + 2x^2 + C$.

(B) $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$.

(C) $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$.

(D) $e^{2x} + 4x^2 + C$.

Câu 2 (Mã 102-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên

$\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

(A) $2e^x - 4x^2 + C$.

(B) $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$.

(C) $e^{2x} - 8x^2 + C$.

(D) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

Câu 3 (Mã 103-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

(A) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

(B) $e^{2x} - 4x^2 + C$.

(C) $2e^x - 2x^2 + C$.

(D) $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Câu 4 (Mã 104-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên

$\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

(A) $e^{2x} + 8x^2 + C$.

(B) $2e^x + 4x^2 + C$.

(C) $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$.

(D) $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.

Câu 5 (Thi thử Lâmônôxốp-Hà Nội lần V 2019).

Biết $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x) dx$?

(A) $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$.

(B) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C$.

(C) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C$.

(D) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x + C$.

Câu 6. Cho $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C$.

(B) $\int f(x+2) dx = x^2 + 7x + C$.

(C) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C$.

(D) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

Câu 7 (ĐS12.C3.1.D09.b). Cho $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2) dx$.

(A) $I = 2x^6 + x^2 + C$.

(B) $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$.

(C) $I = 4x^6 + 2x^2 + C$.

(D) $I = 12x^2 + 2$.

Câu 8 (Sở Bắc Ninh 2019). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$.

(B) $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.

(C) $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$.

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 9 (THPT Hà Huy Tập-2018). Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

(A) $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C$.

(B) $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C$.

(C) $e^{\sin^2 x} + C$.

(D) $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C$.

Câu 10. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

(A) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$.

(B) $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$.

(C) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$.

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$.

Câu 11 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = \ln(x^4+1) + 1$.

(B) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}$.

(C) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1$.

(D) $F(x) = 4 \ln(x^4+1) + 1$.

Câu 12. Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a = 2b$.

(B) $b = 2a$.

(C) $a = 2018b$.

(D) $b = 2018a$.

Câu 13 (Chuyên Quốc Học Huế-2018).

Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

(A) $m = -\frac{1}{2}$.

(B) $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

(C) $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$.

(D) $m = \frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là:

(A) $S = \{3\}$.

(B) $S = \{2; 3\}$.

(C) $S = \{-2; 3\}$.

(D) $S = \{-3; 3\}$.

Câu 15 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$ là

(A) $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right]$.

(B) $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}$.

(C) $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C$.

(D) $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C$.

Câu 16 (THPT Hà Huy Tập-2018). Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là:

- (A) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$ (B) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C.$
 (C) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C.$ (D) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C.$

Câu 17 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

- (A) $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln |t| + C.$
 (B) $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$
 (C) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$
 (D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

Câu 18 (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

- (A) $\int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$ (B) $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$
 (C) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$ (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

- (A) $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$ (B) $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$
 (C) $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{3x+2} + C.$

Câu 20 (HSG Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

- (A) $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$
 (C) $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$ (D) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 21 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

- (A) $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C.$ (B) $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C.$
 (C) $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C.$ (D) $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$

Câu 22 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- (A) $\int 2(u^2 - 4) du.$ (B) $\int (u^2 - 4) du.$ (C) $\int (u^2 - 3) du.$ (D) $\int 2u(u^2 - 4) du.$

Câu 23 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$ (B) $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$
 (C) $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$ (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 24 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến-2018).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

- (A) $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C$. (B) $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$.
 (C) $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$. (D) $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$.

Câu 25 (Chuyên Hạ Long-2018). Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Câu 26 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$. (B) $\int f(x) dx = \ln |1 + 3 \cos x| + C$.
 (C) $\int f(x) dx = 3 \ln |1 + 3 \cos x| + C$. (D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

Câu 27 (Sở Thanh Hóa 2019). Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

- (A) $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$. (B) $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$.
 (C) $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$. (D) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$.

Câu 28 (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$

- (A) $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$. (B) $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$.
 (C) $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$. (D) $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$.

Câu 29 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Biết $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C$. (B) $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x - 5) + C$.
 (C) $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x - 5) + C$. (D) $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$.

Câu 30 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$.
 (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$.
 (C) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$.
 (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$.

Câu 31 (Hồng Bàng-Hải Phòng-2018).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- (A) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. (B) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. (C) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. (D) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

- Câu 32.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng
- (A) $3 \ln 2 + 2$. (B) $\ln 2 + 2$. (C) $\ln 2 + 1$. (D) $2 \ln 2 + 1$.

Câu 33 (Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019).

Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

- (A) $x = 0$. (B) $x = 1$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1 - \sqrt{3}$.

- Câu 34.** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là
- (A) $\frac{217}{8}$. (B) 27 . (C) $\frac{215}{24}$. (D) $\frac{215}{8}$.

- Câu 35.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là
- (A) $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$. (B) $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$.
(C) $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. (D) $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$.

Dạng 1.4. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

- Công thức thường áp dụng

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C & 2. \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C \\ 3. \ln a + \ln b &= \ln(ab) & 4. \ln a - \ln b &= \ln \frac{a}{b} \\ 5. \ln a^n &= n \ln a & 6. \ln 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.
 - Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
 - Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.
 - Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

- Ví dụ 1 (Đề Minh họa 2020 Lần 1).** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là
- (A) $x + 3 \ln(x-1) + C$. (B) $x - 3 \ln(x-1) + C$.
(C) $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. (D) $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

 **Ví dụ 2 (Mã đề 104-2019).** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$

trên khoảng $(2; +\infty)$ là

☐ (A) $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C.$

☐ (B) $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C.$

☐ (C) $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

☐ (D) $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

 **Ví dụ 3 (Mã đề 101-BGD-2019).** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

☐ (A) $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

☐ (B) $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

☐ (C) $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

☐ (D) $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

 **Ví dụ 4 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

☐ (A) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$

☐ (B) $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

$$\textcircled{C} F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

$$\textcircled{D} F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$$

.....

.....

.....

.....

G. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 4

Câu 1. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

$\textcircled{A} a + 2b = 8.$

$\textcircled{B} a + b = 8.$

$\textcircled{C} 2a - b = 8.$

$\textcircled{D} a - b = 8.$

Câu 2. Cho biết $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = 2a + b$.

$\textcircled{A} 0.$

$\textcircled{B} -1.$

$\textcircled{C} \frac{1}{2}.$

$\textcircled{D} 1.$

Câu 3. Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2$.

$\textcircled{A} 12.$

$\textcircled{B} 13.$

$\textcircled{C} 14.$

$\textcircled{D} 15.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

$\textcircled{A} -\frac{3}{2}.$

$\textcircled{B} 0.$

$\textcircled{C} 5.$

$\textcircled{D} \frac{3}{2}.$

Câu 5 (Mã 102 2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

$\textcircled{A} 3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c.$

$\textcircled{B} 3 \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c.$

$\textcircled{C} 3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c.$

$\textcircled{D} 3 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c.$

Câu 6 (Mã 103-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

$\textcircled{A} 2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$

$\textcircled{B} 2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

$\textcircled{C} 2 \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

$\textcircled{D} 2 \ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C.$

Câu 7 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

(A) $\frac{2019}{2020}$. (B) $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$. (C) $2018 \frac{1}{2020}$. (D) $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 8. Giả sử $\int \frac{(2x+3) dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).
 Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

- (A) -1 . (B) 1 . (C) 3 . (D) -3 .

Câu 9 (Nam Trực-Nam Định-2018).

Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = -\frac{a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

(A) $-\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) 2 .

Câu 10 (Trường VINSCHOOL-2020).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

(A) $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. (B) $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. (C) $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. (D) $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 11 (Quảng Xương-Thanh Hóa-2018).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

(A) $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. (B) $\ln 80 + 1$. (C) $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. (D) $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Câu 12 (Chuyên Nguyễn Quang Diêu-Đồng Tháp-2018).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.
 Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = 1 + \ln^2 2$. (C) $S = 2 \ln 2$. (D) $S = \ln^2 2$.

Câu 13 (Sở Phú Thọ-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

(A) $\ln \frac{6}{5} + 1$. (B) $\ln \frac{6}{5} - 1$. (C) $\ln \frac{4}{5} + 1$. (D) $\ln \frac{4}{5} - 1$.

Dạng 1.5. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du (*)$

Để tính nguyên hàm $I = \int f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

- Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (Chú ý: $dv = v'(x) dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

- Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1: $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $u = P(x)$, $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$.

Dạng 2: $I = \int (x) e^{ax+b} dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3: $I = \int P(x) \ln(Mx + n) dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(Mx + n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

Dạng 4: $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int v du$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$

 **Ví dụ 1.** Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

☐ (A) $I = xe^x - e^x + C$.

☐ (B) $I = e^x + xe^x + C$.

☐ (C) $I = \frac{x^2}{2}e^x + C$.

☐ (D) $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x + 1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

- Ⓐ $F(1) = 11e - 3$. Ⓑ $F(1) = e + 3$. Ⓒ $F(1) = e + 7$. Ⓓ $F(1) = e + 2$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Tính $F(x) = \int x \sin 2x \, dx$. Chọn kết quả đúng?

- Ⓐ $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$. Ⓑ $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.
- Ⓒ $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$. Ⓓ $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

- Ⓐ $S = -2$. Ⓑ $S = 1$. Ⓒ $S = 2$. Ⓓ $S = 0$.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos 2x$ là

☐ A $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$

☐ B $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C.$

☐ C $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C.$

☐ D $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

☐ A $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$

☐ B $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1.$

☐ C $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2.$

☐ D $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1.$

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7. Biết $\int (x+3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $S = m^2 + n^2$ có giá trị bằng

☐ A 10.

☐ B 5.

☐ C 65.

☐ D 41.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 8.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln 2x$ là

☐ (A) $\frac{x^2}{2} \ln 2x - x^2 + C.$

☐ (B) $x^2 \ln 2x - \frac{x^2}{2} + C.$

☐ (C) $\frac{x^2}{2} (\ln 2x - 1) + C.$

☐ (D) $\frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 9.** Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là:

☐ (A) $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

☐ (B) $x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$

☐ (C) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

☐ (D) $x \ln x + \frac{1}{2}x + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 10.** Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ là:

☐ (A) $(x - 1)e^x + C.$

☐ (B) $x^2 + \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

☐ (C) $x^2e^x + C.$

☐ (D) $(x + 1)e^x + C.$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 11.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x + 1)e^x$ là

☐ (A) $(2x - 1)e^x + C.$

☐ (B) $(2x + 3)e^x + C.$

☐ (C) $2xe^x + C.$

☐ (D) $(2x - 2)e^x + C.$

.....

 **Ví dụ 12.** Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

☐ (A) $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C.$

☐ (B) $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C.$

☐ (C) $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C.$

☐ (D) $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C.$

 **Ví dụ 13.** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

☐ (A) $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

☐ (B) $x \cot x - \ln |\sin x| + C.$

☐ (C) $x \cot x + \ln |\sin x| + C.$

☐ (D) $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

 **Ví dụ 14.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

☐ (A) $2x^2 \ln x + 3x^2.$

☐ (B) $2x^2 \ln x + x^2.$

☐ (C) $2x^2 \ln x + 3x^2 + C.$

☐ (D) $2x^2 \ln x + x^2 + C.$

 **Ví dụ 15.** Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \ln x$.

(A) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

(C) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

(D) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

 **Ví dụ 16.** Tính $F(x) = \int x \cos x dx$ ta được kết quả

(A) $F(x) = x \sin x - \cos x + C.$

(B) $F(x) = -x \sin x - \cos x + C.$

(C) $F(x) = x \sin x + \cos x + C.$

(D) $F(x) = -x \sin x + \cos x + C.$

H. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 5

Câu 1 (Mã 101-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) \cdot f'(x)$ là

(A) $\frac{x^2 + 2x - 2}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C.$ (B) $\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2}} + C.$ (C) $\frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} + C.$ (D) $\frac{x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C.$

Câu 2 (Mã 102-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là

(A) $\frac{x^2 + 2x - 3}{2\sqrt{x^2 + 3}} + C.$ (B) $\frac{x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3}} + C.$ (C) $\frac{2x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}} + C.$ (D) $\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 3}} + C.$

Câu 3 (Mã 103-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

- (A) $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. (B) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. (C) $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. (D) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Câu 4 (Mã 104-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- (A) $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. (B) $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. (C) $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. (D) $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

Câu 5 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

- (A) $-\sin 2x + \cos 2x + C$. (B) $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.
(C) $-2\sin 2x - \cos 2x + C$. (D) $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 6 (Đề Tham Khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

- (A) $2x^2 \ln x + 3x^2$. (B) $2x^2 \ln x + x^2$. (C) $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. (D) $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 7. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- (A) $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. (B) $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.
(C) $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$. (D) $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Câu 8 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

- (A) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. (B) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$.
(C) $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$. (D) $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Câu 9 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

- (A) $(2x - 3)e^x + C$. (B) $(2x + 3)e^x + C$. (C) $(2x + 1)e^x + C$. (D) $(2x - 1)e^x + C$.

Câu 10 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

- (A) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. (B) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$.
(C) $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$. (D) $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Câu 11 (Chuyên Sơn La 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

- (A) $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C$. (B) $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C$.
(C) $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C$. (D) $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C$.

Câu 12 (Chuyên Thái Bình-Lần 3-2020).

Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính tích $P = abc$.

- (A) -4. (B) 1. (C) -5. (D) -3.

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

- (A) $(2x - 1)e^x + x^2$. (B) $(2x + 1)e^x + x^2$. (C) $(2x + 2)e^x + x^2$. (D) $(2x - 2)e^x + x^2$.

Câu 14. Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

- (A) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$. (B) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$.
(C) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. (D) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C$.

Câu 15 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$.

- (A) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C$. (B) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$.
(C) $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$. (D) $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Câu 16 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

- (A) $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$. (B) $x \cot x - \ln|\sin x| + C$.
(C) $x \cot x + \ln|\sin x| + C$. (D) $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$.

Câu 17 (Sở Phú Thọ 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

- (A) $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$. (B) $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$.
(C) $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$. (D) $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$.

Câu 18 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + (x + 1)e^x + C$. (B) $\frac{1}{5}x^5 + (x - 1)e^x + C$.
(C) $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. (D) $4x^3 + (x + 1)e^x + C$.

Câu 19. Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $F(x) \cdot G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x) \cdot g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Họ nguyên hàm của $f(x) \cdot G(x)$ là

- (A) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$. (B) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$.
(C) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$. (D) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$.

Câu 20 (Sở Bắc Ninh 2019). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$. (B) $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.
(C) $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$. (D) $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C$.

Câu 21 (Sở Bắc Giang 2019). Cho hai hàm số $F(x)$, $G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x)$, $g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) \cdot G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x)g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)G(x)$.

- (A) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$. (B) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$.
(C) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$. (D) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$.

Câu 22. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

- (A) $x \sin x - \cos x + C$. (B) $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$.
(C) $x \sin x + \cos x + C$. (D) $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

- (A) $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$. (B) $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
(C) $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. (D) $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Câu 24 (Mã 104 2017). Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- (A) $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. (B) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.
(C) $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. (D) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.

Câu 25 (Mã 105 2017). Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

- (A) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$. (B) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.
(C) $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. (D) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Câu 26 (Mã 110 2017). Cho $F(x) = (x - 1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- (A) $\int f'(x)e^{2x} dx = (4 - 2x)e^x + C$. (B) $\int f'(x)e^{2x} dx = (x - 2)e^x + C$.
(C) $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2 - x}{2}e^x + C$. (D) $\int f'(x)e^{2x} dx = (2 - x)e^x + C$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

- (A) $f(1) = 3$. (B) $f(1) = e$. (C) $f(1) = 5 - e$. (D) $f(1) = 8 - 2e$.

Câu 28 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

- (A) $(x - 2)e^x + e^x + C$. (B) $(x + 2)e^{2x} + e^x + C$.

$$\textcircled{\text{C}} (x-1)e^x + C.$$

$$\textcircled{\text{D}} (x+1)e^x + C.$$

Câu 29 (Việt Đức Hà Nội 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$, $f(0) = 0$ và $\int f(x) dx = (ax+b)e^x + C$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

$$\textcircled{\text{A}} a + b = 2.$$

$$\textcircled{\text{B}} a + b = 3.$$

$$\textcircled{\text{C}} a + b = 1.$$

$$\textcircled{\text{D}} a + b = 0.$$

Câu 30 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018).

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

$$\textcircled{\text{A}} F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$$

$$\textcircled{\text{B}} F(x) = (x+1)e^{-x} + 1.$$

$$\textcircled{\text{C}} F(x) = (x+1)e^{-x} + 2.$$

$$\textcircled{\text{D}} F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1.$$

Câu 31 (Sở Quảng Nam-2018). Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

$$\textcircled{\text{A}} ab = \frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{\text{B}} ab = \frac{1}{4}.$$

$$\textcircled{\text{C}} ab = -\frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{\text{D}} ab = -\frac{1}{4}.$$

Câu 32 (Chuyên Đh Vinh-2018). Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

$$\textcircled{\text{A}} \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$$

$$\textcircled{\text{B}} 0.$$

$$\textcircled{\text{C}} \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\textcircled{\text{D}} \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$$

Câu 33 (THCS&THPT Nguyễn Khuyến-Bình Dương-2018).

Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

$$\textcircled{\text{A}} T = 8.$$

$$\textcircled{\text{B}} T = -17.$$

$$\textcircled{\text{C}} T = 2.$$

$$\textcircled{\text{D}} T = -13.$$

Câu 34 (Sở Quảng Nam-2018). Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tích ab bằng?

$$\textcircled{\text{A}} ab = \frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{\text{B}} ab = \frac{1}{4}.$$

$$\textcircled{\text{C}} ab = -\frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{\text{D}} ab = -\frac{1}{4}.$$

§2. TÍCH PHÂN

A. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$. Khi đó $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, (a là cận dưới, b là cận trên).
- Đối với biến số lấy tích phân, có thể chọn bất kỳ một chữ khác nhau thay cho x , nghĩa là $I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = F(b) - F(a)$ (không phụ thuộc biến mà phụ thuộc hai cận).

B. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ và $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với $k \neq 0$.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- $\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b, \int_a^b f''(x) dx = f'(x) \Big|_a^b, \int_a^b f'''(x) dx = f''(x) \Big|_a^b, \dots$

Ví dụ mẫu: Tính các tích phân hoặc tìm tham số m (nhóm đa thức)

a) Tính $I = \int_1^3 (3x^2 - 4x + 5) dx$.

.....

.....

.....

b) Tính $I = \int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 10) dx$.

.....

.....

.....

c) Tính $I = \int_0^1 (2x + 1)^5 dx$.

.....

.....

.....

d) Tính $I = \int_0^3 (1 - 3x)^{10} dx$.

.....

.....

.....

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 2.6. Tích phân cơ bản & tính chất tích phân

 **Ví dụ 1 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 1).** Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$

thì $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng

(A) -1.

(B) -5.

(C) 5.

(D) 1.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 1).** Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^3 3f(x) dx$ bằng

- (A) 36. (B) 12. (C) 3. (D) 4.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 1).** Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4 (Đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 2).** Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 5$ và $\int_1^3 f(x) dx = 210$ thì $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- (A) . (B) -3. (C) 3. (D) 7.

.....

✍ Ví dụ 5 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 2). Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $F(1) = -2$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

(A) -5 .

(B) 1 .

(C) -1 .

(D) 5 .

✍ Ví dụ 6 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 2). Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 2$ thì $\int_0^2 [2x - f(x)] dx$ bằng

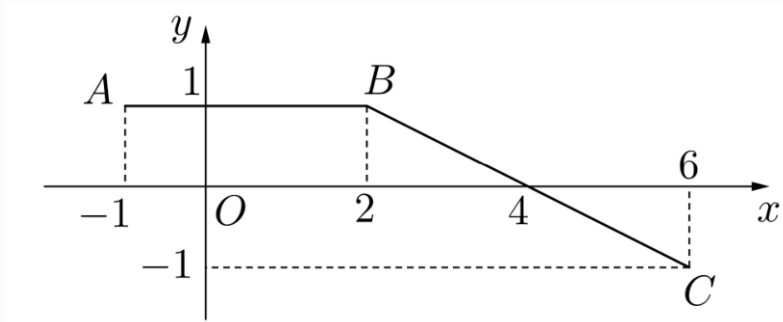
(A) 2 .

(B) 8 .

(C) 6 .

(D) 0 .

✍ Ví dụ 7 (Mã đề 101- TNTHPT 2021- Đợt 2). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng



Ⓐ 3.

Ⓑ 4.

Ⓒ 8.

Ⓓ 5.

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 8 (Mã đề 103- TNTHPT 2021- Đợt 2).** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $F(1) = -1$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

Ⓐ -4.

Ⓑ 2.

Ⓒ -2.

Ⓓ 4.

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 9 (Mã đề 103- TNTHPT 2021- Đợt 2).** Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_1^3 f(x) dx = 4$

thì $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

Ⓐ 1.

Ⓑ 12.

Ⓒ 7.

Ⓓ -1.

.....

Ví dụ 10 (Mã đề 103- THPT 2021- Đợt 2). Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 [2x - f(x)] dx$ bằng

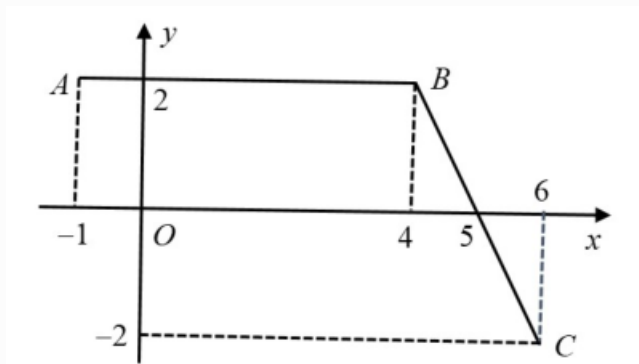
(A) 7.

(B) 10.

(C) 1.

(D) -2.

Ví dụ 11 (Mã đề 103- THPT 2021- Đợt 2). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



(A) 21.

(B) 25.

(C) 23.

(D) 19.

 **Ví dụ 12 (Mã đề 101- 2022).** Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2 \right] dx$ bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 13 (Mã đề 102- 2022).** Nếu $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$ thì $\int_5^{-1} f(x) dx$ bằng

(A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 3.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 14 (Mã đề 103- 2022).** Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2 \right] dx$ bằng?

(A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 15 (Mã đề 104- 2022).** Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -5$ thì $\int_{-1}^5 f(x) dx$ bằng -7 -3 4 7

.....

 **Ví dụ 16 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).** Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

.....

 **Ví dụ 17 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 - Mã 102).** Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^3 3f(x) dx$ bằng

(A) 36. (B) 12. (C) 3. (D) 4.

 **Ví dụ 18 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 - Mã 102).** Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x) dx$ bằng

(A) 3. (B) 18. (C) 2. (D) 6.

 **Ví dụ 19 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 - Mã 102).** Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

 **Ví dụ 20 (THPT Quốc Gia 2021 Lần 1 - Mã 102).** Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

 **Ví dụ 21 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx$ bằng

(A) 16. (B) 4. (C) 2. (D) 8.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 22 (Mã 101-2020 Lần 1).** Biết $\int_1^3 f(x) dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x) dx$ bằng

(A) 5. (B) 9. (C) 6. (D) $\frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 23 (Mã 101-2020 Lần 1).** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

(A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

.....

.....

.....

 ✎ **Ví dụ 24 (Mã 102-2020 Lần 1).** Biết $\int_1^5 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x) dx$ bằng

Ⓐ 7.

Ⓑ $\frac{4}{3}$.

Ⓒ 64.

Ⓓ 12.

.....

 ✎ **Ví dụ 25 (Mã 102-2020 Lần 1).** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

Ⓐ $\frac{23}{4}$.

Ⓑ 7.

Ⓒ 9.

Ⓓ $\frac{15}{4}$.

.....

 ✎ **Ví dụ 26 (Mã 103-2020 Lần 1).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x) dx$ bằng

Ⓐ 5.

Ⓑ 6.

Ⓒ $\frac{2}{3}$.

Ⓓ 8.

✎ Ví dụ 27 (Mã 103-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- (A) 20. (B) 22. (C) 26. (D) 28.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 28 (Mã 104-2020 Lần 1). Biết $\int_2^3 f(x) dx = 6$ Giá trị của $\int_2^3 2f(x) dx$ bằng.

- (A) 36. (B) 3. (C) 12. (D) 8.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 29 (Mã 104-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- (A) 10. (B) 8. (C) $\frac{26}{3}$. (D) $\frac{32}{3}$.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 30 (Mã 101-2020 Lần 2).** Biết $\int_2^3 f(x) dx = 4$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Khi đó:

$\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng:

(A) -3.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

.....

 **Ví dụ 31 (Mã 102-2021 Lần 1).** Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$ thì

$\int_1^4 [f(x) - g(x)]$ bằng

(A) -1.

(B) -11.

(C) 1.

(D) 11.

 **Ví dụ 32 (Mã 101-2020 Lần 2).** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 0.

.....

 **Ví dụ 33 (Mã 102-2020 Lần 2).** Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Khi đó

$\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

(A) 4.

(B) 2.

(C) -2.

(D) 3.

 **Ví dụ 34 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 102).** Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

 **Ví dụ 35 (Mã 102-2020 Lần 2).** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

 **Ví dụ 36 (Mã 103-2020 Lần 2).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

(A) 6. (B) 1. (C) 5. (D) -1.

 **Ví dụ 37 (Mã 103-2020 Lần 2).** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

(A) 3.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 4.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 38 (Mã 104-2020 Lần 2).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$ Khi đó $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

(A) 1.

(B) 5.

(C) -1.

(D) 6.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 39 (Mã 104-2020 Lần 2).** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

(A) 7.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 4.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 40 (Mã 103-2019).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$, khi đó

$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

☐ (A) 8.

☐ (B) -4.

☐ (C) 4.

☐ (D) -8.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 41 (Mã 102-2019).** Biết tích phân $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Khi đó

$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

☐ (A) -7.

☐ (B) 7.

☐ (C) -1.

☐ (D) 1.

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 42 (Mã 104-2019).** Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$, khi đó

$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

☐ (A) 6.

☐ (B) -6.

☐ (C) -2.

☐ (D) 2.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 43 (Mã 101 2019). Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) -5. (D) 5.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 44 (Đề Tham Khảo 2019). Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

(A) -8. (B) 1. (C) -3. (D) 12.

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 45 (THPT Ba Đình 2019). Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K ?

(A) $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx.$

(B) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$

$$\textcircled{C} \int_a^b [f(x) \cdot g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$\textcircled{D} \int_a^b f^2(x) \, dx = \left[\int_a^b f(x) \, dx \right]^2.$$

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 46 (THPT Cẩm Giàng 2 2019).** Cho $\int_{-2}^2 f(x) \, dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) \, dt = -4$. Tính

$$\int_2^4 f(y) \, dy.$$

$$\textcircled{A} I = 5.$$

$$\textcircled{B} I = -3.$$

$$\textcircled{C} I = 3.$$

$$\textcircled{D} I = -5.$$

.....

.....

.....

.....

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 1

Câu 1 (THPT Cù Huy Cận -2019). Cho $\int_0^2 f(x) \, dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) \, dx = 7$,

khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] \, dx$ bằng

$$\textcircled{A} 16.$$

$$\textcircled{B} -18.$$

$$\textcircled{C} 24.$$

$$\textcircled{D} 10.$$

Câu 2 (THPT-YÊN ĐỊNH Thanh Hóa 2019).

Cho $\int_0^1 f(x) \, dx = -1$; $\int_0^3 f(x) \, dx = 5$. Tính $\int_1^3 f(x) \, dx$

$$\textcircled{A} 1.$$

$$\textcircled{B} 4.$$

$$\textcircled{C} 6.$$

$$\textcircled{D} 5.$$

Câu 3 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).

Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và $\int_2^3 f(x) dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 12. (B) 7. (C) 1. (D) -12.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) 7. (C) -9. (D) 9.

Câu 5 (Sở Thanh Hóa-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^2 f(x) dx = 9$; $\int_2^4 f(x) dx =$

4. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$

- (A) $I = 5$. (B) $I = 36$. (C) $I = \frac{9}{4}$. (D) $I = 13$.

Câu 6. Cho $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$ và $\int_0^3 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 6. (B) 4. (C) 2. (D) 0.

Câu 7 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x) dx = 10$, $\int_3^4 f(x) dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 6.

Câu 8 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019).

Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

- (A) $\ln 7$. (B) $1 + \frac{1}{2} \ln 7$. (C) $\ln 3$. (D) $1 + \ln 7$.

Câu 9 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương -2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$, $\int_4^8 f(x) dx = 5$.

Tính $I = \int_1^{12} f(x) dx$.

- (A) $I = 17$. (B) $I = 1$. (C) $I = 11$. (D) $I = 7$.

Câu 10 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P =$

$\int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

- (A) $P = 10$. (B) $P = 4$. (C) $P = 7$. (D) $P = -6$.

Câu 11 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx =$

6. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

(A) 7.

(B) 6.

(C) 8.

(D) 9.

Câu 12 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx =$

7; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

(A) $P = 4$.

(B) $P = 10$.

(C) $P = 7$.

(D) $P = -4$.

Câu 13. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$

đồng thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

(A) 9.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 8.

Câu 14 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$.

Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

(A) 8.

(B) 7.

(C) 9.

(D) 6.

Câu 15 (Mã 104 2017). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

(A) $I = 7$.

(B) $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

(C) $I = 3$.

(D) $I = 5 + \pi$.

Câu 16 (Mã 110 2017). Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

(A) $I = \frac{17}{2}$.

(B) $I = \frac{5}{2}$.

(C) $I = \frac{7}{2}$.

(D) $I = \frac{11}{2}$.

Câu 17 (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019).

Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$

(A) 13.

(B) 27.

(C) -11.

(D) 3.

Câu 18 (Sở Bình Phước 2019). Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{7}{2}$. (C) $\frac{17}{2}$. (D) $\frac{11}{2}$.

Câu 19 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 g(x) dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$ bằng

(A) 12. (B) 0. (C) 8. (D) 10.

Câu 20 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

(A) -140. (B) -130. (C) -120. (D) -133.

Câu 21 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019).

Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

(A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

Câu 22. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$ tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$ bằng

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) -1.

Câu 23 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 (2x + 1) dx$.

(A) $I = 0$. (B) $I = 1$. (C) $I = 2$. (D) $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 24. Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

(A) 12. (B) 9. (C) 5. (D) 6.

Câu 25 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ -2019).

Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 26 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$

(A) $I = 5$. (B) $I = 6$. (C) $I = 2$. (D) $I = 4$.

Câu 27. Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$ bằng

(A) $b^3 - b^2a - b$. (B) $b^3 + b^2a + b$. (C) $b^3 - ba^2 - b$. (D) $3b^2 - 2ab - 1$.

Câu 28 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó giá trị của $a - b$ là

(A) $-\frac{1}{6}$. (B) $-\frac{1}{6}$. (C) $-\frac{3}{10}$. (D) $\frac{1}{5}$.

Câu 29 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

(A) 2. (B) -2. (C) 18. (D) -18.

Câu 30 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(-1; 2)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; 4)$. (D) $(-3; 1)$.

Câu 31 (Mã 104 2018). $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

(A) $\frac{1}{2} \ln 35$. (B) $\ln \frac{7}{5}$. (C) $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$. (D) $2 \ln \frac{7}{5}$.

Câu 32 (Mã 103 2018). $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

(A) $2 \ln 2$. (B) $\frac{1}{3} \ln 2$. (C) $\frac{2}{3} \ln 2$. (D) $\ln 2$.

Câu 33 (Đề Tham Khảo 2018). Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

(A) $\frac{2}{15}$. (B) $\frac{16}{225}$. (C) $\log \frac{5}{3}$. (D) $\ln \frac{5}{3}$.

Câu 34 (Mã 105 2017). Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + 2b = 0$. (B) $a + b = 2$. (C) $a - 2b = 0$. (D) $a + b = -2$.

Câu 35 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

(A) $I = \frac{1}{e}$. (B) $I = \frac{1}{e} + 1$. (C) $I = 1$. (D) $I = e$.

Câu 36 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

- (A) $I = -\frac{21}{100}$. (B) $I = \ln \frac{5}{2}$. (C) $I = \log \frac{5}{2}$. (D) $I = \frac{4581}{5000}$.

Câu 37 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019).

$\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- (A) $2 \ln 2$. (B) $\frac{2}{3} \ln 2$. (C) $\ln 2$. (D) $\frac{1}{3} \ln 2$.

Câu 38. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

- (A) $I = 1 - \ln 2$. (B) $I = \frac{7}{4}$. (C) $I = 1 + \ln 2$. (D) $I = 2 \ln 2$.

Câu 39. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ Tính tổng $S = a + b + c$

- (A) $S = 7$. (B) $S = 5$. (C) $S = 8$. (D) $S = 6$.

Câu 40 (Mã 110 2017). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = \frac{1}{e}$. (C) $I = 1$. (D) $I = e$.

Câu 41 (Mã 102 2018). $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. (B) $e^3 - e$. (C) $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. (D) $e^4 - e$.

Câu 42 (Mã 101 2018). $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$. (B) $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. (C) $\frac{1}{3}e^5 - e^2$. (D) $e^5 - e^2$.

Câu 43 (Mã 123 2017). Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$

- (A) $I = 5$. (B) $I = 36$. (C) $I = 4$. (D) $I = 6$.

Câu 44 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

- (A) $\ln 2 - 1$. (B) $-\ln 2$. (C) $\ln 2$. (D) $1 - \ln 2$.

Câu 45 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên -2019).

Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$.

- (A) $K = \ln 2$. (B) $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$. (C) $K = 2 \ln 2$. (D) $K = \ln \frac{8}{3}$.

Dạng 2.7. Tích phân cơ bản có điều kiện

Ví dụ 1 (Kinh Môn-Hải Dương 2019). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

☐ A $\ln 8 + 1$.

☐ B $4 \ln 2 + 1$.

☐ C $2 \ln 3 + 2$.

☐ D $2 \ln 4$.

Ví dụ 2 (Mã 103-2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

☐ A $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$.

☐ B $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

☐ C $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$.

☐ D $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Ví dụ 3 (Mã 104-2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

☐ A $\frac{\pi^2 - 2}{8}$.

☐ B $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$.

☐ C $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$.

☐ D $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$.

 **Ví dụ 4 (Mã 102-2019).** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$,

khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

(A) $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.

(B) $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

(C) $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

(D) $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.

 **Ví dụ 5 (Đề Tham Khảo 2021).** Cho hàm số $f(x) =$

$$\begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$$

Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx$ bằng

(A) $\frac{23}{3}$.

(B) $\frac{23}{6}$.

(C) $\frac{17}{6}$.

(D) $\frac{17}{3}$.

 **Ví dụ 6 (Mã 102- 2021 Lần 1).** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 9. (B) 15. (C) 11. (D) 6.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 7.** Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân

$\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

- (A) $\frac{a}{6} - 1$. (B) $\frac{2a}{3} + 1$. (C) $\frac{a}{6} + 1$. (D) $\frac{2a}{3} - 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 8 (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022).** Cho hàm số

$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{khi } x < 2 \\ 4x^3 - 1, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(0) = 3$. Giá trị $F(3) - 5F(-5)$ bằng

- (A) 12. (B) 16. (C) 13. (D) 7.

.....

 **Ví dụ 9 (THPT Lương Tài 2- Bắc Ninh - 2022).** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{ khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + b & \text{ khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{thỏa mãn } \int_0^2 f(x) dx = 13. \text{ Tính } T = a + b - ab?$$

☐ (A) $T = -11.$

☐ (B) $T = -5.$

☐ (C) $T = 1.$

☐ (D) $T = -1.$

 **Ví dụ 10.** Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^2 f(x) dx = 8.$

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

☐ (A) $m + n = 4.$

☐ (B) $m + n = -4.$

☐ (C) $m + n = 2.$

☐ (D) $m + n = -2.$

✎ Ví dụ 11 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019). Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$.

(A) $T = 26$.

(B) $T = 12$.

(C) $T = 13$.

(D) $T = 28$.

.....

.....

.....

.....

.....

E. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 2

Câu 1 (Mã 104-2021 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

(A) 18.

(B) 20.

(C) 9.

(D) 24.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 4$. Giá trị của $F(-2) + 3F(4)$ bằng

(A) 106.

(B) 110.

(C) 12.

(D) 36.

Câu 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1 + x| - |1 - x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

(A) 8.

(B) 12.

(C) 14.

(D) 10.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Giá trị của $F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(B) -1.

(C) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 5 (Chuyên Tuyên Quang - 2021).

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3 & \text{khi } x \geq 7 \\ 2x + 3 & \text{khi } x < 7 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3) e^x dx$ bằng A. $\frac{1148}{3}$. B. $\frac{220}{3}$. C. $\frac{115}{3}$. D. $\frac{287}{3}$.

Câu 6 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; 4)$. (D) $(-3; 1)$.

Câu 7 (Thi thử Lô-môn-ô-xốp-Hà Nội 2019).

Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

- (A) 1. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Câu 8 (Sở GD Kon Tum-2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 3.

Câu 9 (THPT Lương Thế Vinh-HN 2018).

Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

- (A) 8. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Câu 10 (Cần Thơ-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, $f(-3) + f(3) = f(-1) + f(1) = 2$. Giá trị biểu thức $f(-4) + f(0) + f(4)$ bằng

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 11 (Chuyên Lương Thế Vinh-Đồng Nai-2018).

Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x+e^x}}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

- (A) $T = -3$. (B) $T = 3$. (C) $T = -4$. (D) $T = -5$.

Câu 12 (Sở Bạc Liêu-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

- (A) $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$. (B) $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$. (C) $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$. (D) $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$.

Câu 13 (Chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng.

- (A) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. (B) $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. (C) $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. (D) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Câu 14 (Sở Hà Tĩnh-2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{\pi^2 - 6}{18}$. (B) $\frac{\pi^2 - 3}{32}$. (C) $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$. (D) $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$.

Dạng 2.8. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

- Nếu bậc của tử $P(x) \geq$ bậc mẫu $Q(x) \xrightarrow{PP}$ chia đa thức.
- Nếu bậc của tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

- Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$- \frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$- \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}.$$

$$- \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$- \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

- Nếu bậc tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu không phân tích được thành tích số, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$- I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in N^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$- I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a} \right) \right]}.$$

$$\text{Ta sẽ đặt } x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$- I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$\text{Ta sẽ phân tích: } I_3 = \frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left(q - \frac{b \cdot p}{2a} \right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A}$$

bằng cách đặt $t =$ mẫu số

 **Ví dụ 1 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

(A) -3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).** Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $a + 4b$ bằng

(A) 50.

(B) 60.

(C) 59.

(D) 40.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Biết $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $m + n$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = 4$.

(C) $S = -5$.

(D) $S = -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 4 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

(A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) 3.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 5 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).** Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

(A) $S = 2$. (B) $S = -2$. (C) $S = 5$. (D) $S = 10$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 6 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019).** Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$?

(A) $P = 1$. (B) $P = 5$. (C) $P = 7$. (D) $P = 2$.

F. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 3

Câu 1 (Chuyên Sơn La 2019). Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 2 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

- (A) 12. (B) 6. (C) 1. (D) 64.

Câu 3. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- (A) $S = 2$. (B) $S = -2$. (C) $S = 5$. (D) $S = 10$.

Câu 4. Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$). Khi đó $a + b$ có giá trị bằng

- (A) 14. (B) 15. (C) 13. (D) 12.

Câu 5 (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019).

Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- (A) -8. (B) -10. (C) -12. (D) 16.

Câu 6 (THPT Nguyễn Trãi-Dà Nẵng-2018).

Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a + 2b$ là

- (A) 30. (B) 60. (C) 50. (D) 40.

Câu 7 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019).

Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.

- (A) -5. (B) -4. (C) 5. (D) 0.

Câu 8. Cho $\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 9 (SGD Bến Tre 2019). Biết $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m + n$.

- (A) $S = -1$. (B) $S = -5$. (C) $S = 1$. (D) $S = 4$.

Câu 10 (THPT Cẩm Bình 2019). Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a + b$ bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Câu 11 (Sở Hà Nam-2019). Cho $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a + b + c$ bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Câu 12 (Chu Văn An-Hà Nội-2019).

Cho biết $\int_0^2 \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng

- (A) 13. (B) 10. (C) 25. (D) 5.

Câu 13 (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019).

Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- (A) -8. (B) -10. (C) -12. (D) 16.

Câu 14 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Biết $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = a - b^2 - c^3$.

- (A) -5. (B) -3. (C) 6. (D) -4.

Câu 15 (Bình Phước-2019). Cho $\int_2^3 \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

- (A) 3. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Câu 16 (SGD Đà Nẵng 2019). Cho $\int_3^4 \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $2a + 3b + 7c$ bằng

- (A) -9. (B) 6. (C) 15. (D) 3.

Câu 17 (SGD Điện Biên-2019). Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \cdot \ln 2 + c \cdot \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a + b + c$ bằng:

(A) -2.

(B) 1.

(C) 2.

(D) -1.

Câu 18 (SP Đồng Nai-2019). Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

(A) -11.

(B) -14.

(C) -2.

(D) 3 .

 Dạng 2.9. Tích phân đổi biến

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 xf(4x) dx = 1$,

khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$ bằng

☐ (A) $\frac{31}{2}$.

☐ (B) -16 .

☐ (C) 8 .

☐ (D) 14 .

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$,

khi đó $\int_0^1 x^2 f'(x) dx$ bằng

☐ (A) 15 .

☐ (B) 23 .

☐ (C) $\frac{123}{5}$.

☐ (D) -25 .

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6) = 1$ và $\int_0^1 xf(6x) dx = 1$,

khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x) dx$ bằng

Ⓐ $\frac{107}{3}$.

Ⓑ 34.

Ⓒ 24.

Ⓓ -36.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

Ⓐ $I = 6$.

Ⓑ $I = 36$.

Ⓒ $I = 2$.

Ⓓ $I = 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5 (Đề Tham Khảo -2019).** Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

Ⓐ 2.

Ⓑ 1.

Ⓒ -2.

Ⓓ -1.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 6.** Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$ bằng

☐ (A) $K = \ln 2.$

☐ (B) $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}.$

☐ (C) $K = 2 \ln 2.$

☐ (D) $K = \ln \frac{8}{3}.$

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 7 (Chuyên Long An-2018).** Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$, giả sử đặt $t = 1 + x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

☐ (A) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$

☐ (B) $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$

☐ (C) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt.$

☐ (D) $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt.$

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 8 (KTNL Gia Bình Năm 2019).** Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1.$

☐ (A) 2.

☐ (B) 1.

☐ (C) 0.

☐ (D) 3.

.....

.....

 **Ví dụ 9 (Nguyễn Huệ-Phú Yên-2020).** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 0$ và $f'(x) = 2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- ☐ (A) $\frac{2}{2021}$.
 ☐ (B) $\frac{1}{1011}$.
 ☐ (C) $-\frac{2}{2021}$.
 ☐ (D) $-\frac{1}{1011}$.

 **Ví dụ 10 (Đề Tham Khảo 2019).** Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- ☐ (A) -2 .
 ☐ (B) -1 .
 ☐ (C) 2 .
 ☐ (D) 1 .

 **Ví dụ 11 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019).** Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A + 7B$.

- ☐ (A) $\frac{23}{252}$.
 ☐ (B) $\frac{241}{252}$.
 ☐ (C) $\frac{52}{9}$.
 ☐ (D) $\frac{7}{9}$.

✍ **Ví dụ 12 (Chuyên Hà Tĩnh-2018).** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

- (A) 13. (B) 5. (C) 4. (D) 10.

G. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 4

Câu 1 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019).

Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

- (A) 10. (B) 6. (C) $\frac{22}{3}$. (D) 8.

Câu 2. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 4. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

Câu 3 (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019). Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$

- (A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 8.

Câu 4 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m + n + p + q$.

(A) $T = 11$.

(B) $T = 10$.

(C) $T = 7$.

(D) $T = 8$.

Câu 5. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{2t dt}{1+t^2}$ là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Câu 6 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = f(1) = 5$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$.

(A) $I = 10$.

(B) $I = -5$.

(C) $I = 0$.

(D) $I = 5$.

Câu 7 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

(A) 7.

(B) $\frac{197}{6}$.

(C) $\frac{29}{2}$.

(D) $\frac{181}{6}$.

Câu 8 (Mã 102 2018). Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a - b = -2c$.

(B) $a + b = -2c$.

(C) $a + b = c$.

(D) $a - b = -c$.

Câu 9 (Mã 101 2018). Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + b = 3c$.

(B) $a - b = -3c$.

(C) $a - b = -c$.

(D) $a + b = c$.

Câu 10 (Đề Tham Khảo 2017). Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

(B) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$.

(C) $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$.

(D) $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$.

Câu 11 (Nguyễn Trãi-Thái Bình-2020).

Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó

(A) $a + b + c = \frac{5}{3}$.

(B) $a + b + c = \frac{4}{3}$.

(C) $a + b + c = \frac{7}{3}$.

(D) $a + b + c = \frac{8}{3}$.

Câu 12 (Liên trường Nghệ An-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng

(A) 250.

(B) 251.

(C) 133.

(D) 221.

Câu 13 (Nam Định-2018). Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

(A) $T = -1$.

(B) $T = 0$.

(C) $T = 2$.

(D) $T = 1$.

Câu 14 (Chuyên Vinh-2018). Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

Câu 15 (Đề Tham Khảo 2018). Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

(A) $P = 18$.

(B) $P = 46$.

(C) $P = 24$.

(D) $P = 12$.

Câu 16 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = \frac{1}{2}$.

(C) $S = \frac{3}{4}$.

(D) $S = \frac{2}{3}$.

Câu 17 (Gang Thép Thái Nguyên 2019).

Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.

(B) $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$.

(C) $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$.

(D) $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$.

Câu 18. Biết $\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) $\frac{7}{3}$.

(B) $\frac{5}{3}$.

(C) $\frac{8}{3}$.

(D) $\frac{4}{3}$.

Câu 19. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{b}{c} + \sqrt{d} \right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

(A) 12.

(B) 10.

(C) 18.

(D) 15.

Câu 20 (Lê Quý Đôn-Quảng Trị-2018).

Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m - 7n$

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 91.

Câu 21 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) $-\frac{10}{3}$.(B) $-\frac{5}{3}$.(C) $\frac{10}{3}$.(D) $\frac{5}{3}$.

Câu 22. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

(A) $S = 1$.(B) $S = \frac{1}{2}$.(C) $S = \frac{3}{4}$.(D) $S = \frac{2}{3}$.**Câu 23 (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019).**

Cho $\int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng:

(A) 9.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 7.

Câu 24 (THPT Ba Đình 2019). Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$, với a, b, c, d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

(A) 16.

(B) 4.

(C) 28.

(D) -2.

Câu 25. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

(A) $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1$.(B) $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1]$.(C) $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1]$.(D) $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1$.**Câu 26 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến-2018).**

Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ bằng tích phân nào dưới đây?

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy$.(B) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$.(C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$.(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy$.**Câu 27 (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018).**

Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x^2-1} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$ với a, b, c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P = 3a + 2b + c$.

(A) 11.

(B) 12.

(C) 14.

(D) 13.

Câu 28 (Bình Giang-Hải Dương-2018).

Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = a + b\sqrt{6} + c \ln \left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12} \right) + d \ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ.

Tính tổng $a + b + c + d$.

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{3}{25}$. (C) $-\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{3}{20}$.

Câu 29 (Sở Hưng Yên-2018). Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

- (A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$. (B) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. (C) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$. (D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

Câu 30 (THPT Phú Lương-Thái Nguyên-2018).

Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b \geq 0$. Tính $P = a + b^2 - c$.

- (A) $P = 3$. (B) $P = 7$. (C) $P = -7$. (D) $P = 5$.

Câu 31. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ theo n .

- (A) $I = \frac{1}{2n+2}$. (B) $I = \frac{1}{2n}$. (C) $I = \frac{1}{2n-1}$. (D) $I = \frac{1}{2n+1}$.

Câu 32 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a - b$ là

- (A) -17 . (B) 5 . (C) -5 . (D) 17 .

Câu 33 (Tiên Du-Bắc Ninh-2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(\sqrt{2}) = -2$ và $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in$

$(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) \cdot dx$ bằng

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $\frac{3\pi+6}{4}$. (C) $\frac{\pi+2}{4}$. (D) $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Câu 34 (Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-2018).

Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2-1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

- (A) $-\frac{1}{9}$. (B) $\frac{86}{27}$. (C) -2 . (D) $\frac{67}{27}$.

Câu 35 (THPT Phan Chu Trinh-Đắc Lắc-2018).

Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

- (A) $P = 44$. (B) $P = 42$. (C) $P = 46$. (D) $P = 48$.

Câu 36 (Sở Phú Thọ-2018). Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a + b + c$.

(A) $T = 4$.

(B) $T = 2$.

(C) $T = 1$.

(D) $T = 3$.

Câu 37 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^\pi f(x) dx$ bằng

(A) $\frac{1042}{225}$.

(B) $\frac{208}{225}$.

(C) $\frac{242}{225}$.

(D) $\frac{149}{225}$.

Câu 38 (Sở Bình Phước-2020). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

(A) 0.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

Câu 39 (Đề Minh Họa 2017). Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

(A) $I = -\frac{1}{4}$.

(B) $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

(C) $I = -\pi^4$.

(D) $I = 0$.

Câu 40 (THPT Kinh Môn-2018). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

(A) $S = 1$.

(B) $S = 4$.

(C) $S = 3$.

(D) $S = 0$.

Câu 41 (Bình Dương 2018). Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

(A) $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$.

(B) $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$.

(C) $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$.

(D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$.

Câu 42 (Đồng Tháp-2018). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$.

(B) $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$.

(C) $I = - \int_0^1 u^2 du$.

(D) $I = \int_0^1 u^2 du$.

Câu 43 (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội-2018).

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

☐ (A) $I = \frac{5}{2}$.
 ☐ (B) $I = \frac{3}{2}$.
 ☐ (C) $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.
 ☐ (D) $I = \frac{9}{4}$.

Câu 44 (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-2018).

Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A) $2a + b = 0$.
 ☐ (B) $a - 2b = 0$.
 ☐ (C) $2a - b = 0$.
 ☐ (D) $a + 2b = 0$.

Câu 45 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

☐ (A) 10.
 ☐ (B) 9.
 ☐ (C) 20.
 ☐ (D) 19.

Câu 46 (HSG Bắc Ninh 2019). Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ và

$F(0) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

☐ (A) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 8}{3}$.
 ☐ (B) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} + 8}{3}$.
 ☐ (C) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 8}{3}$.
 ☐ (D) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} + 8}{3}$.

Câu 47. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

☐ (A) 5.
 ☐ (B) 12.
 ☐ (C) 7.
 ☐ (D) -1.

Câu 48. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A) $2a + b = 0$.
 ☐ (B) $a - 2b = 0$.
 ☐ (C) $2a - b = 0$.
 ☐ (D) $a + 2b = 0$.

Câu 49 (THPT Nguyễn-Hà Tĩnh-2018).

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng m .

☐ (A) $S = 3$.
 ☐ (B) $S = 0$.
 ☐ (C) $S = 1$.
 ☐ (D) $S = 4$.

Câu 50 (Thanh Chương 1-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}$, khi đó $b - a$ bằng

☐ (A) 4.
 ☐ (B) 12.
 ☐ (C) 0.
 ☐ (D) -4.

Câu 51 (Tiên Lãng-Hải Phòng-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^\pi 16f(x) dx$.

- (A) $I = 10\pi^2$. (B) $I = 160\pi$. (C) $I = 16\pi^2$. (D) $I = -10\pi^2$.

Câu 52 (Đề Tham Khảo 2017). Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

- (A) $S = -2$. (B) $S = 0$. (C) $S = 1$. (D) $S = 2$.

Câu 53 (Cần Thơ-2018). Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

- (A) $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$. (B) $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$. (C) $I = \int_1^e (3t+1) dt$. (D) $I = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Câu 54 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- (A) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. (B) $a^2 + b^2 + c^2 = 11$. (C) $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. (D) $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Câu 55 (Việt Đức Hà Nội 2019). Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là:

- (A) $T = 11$. (B) $T = 9$. (C) $T = 10$. (D) $T = 8$.

Câu 56. Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $2ab = -1$. (B) $2ab = 1$. (C) $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. (D) $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 57 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Cho $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a + b + c + d$?

- (A) 18. (B) 15. (C) 16. (D) 17.

Câu 58 (Kim Liên-Hà Nội-2018). Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

- (A) $S = 6$. (B) $S = 5$. (C) $S = 7$. (D) $S = 8$.

Câu 59 (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019).

Cho $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$ với a, b, c là các số nguyên và $\ln e = 1$. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- (A) $P = 9$. (B) $P = 14$. (C) $P = 10$. (D) $P = 3$.

Câu 60. Biết $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = 2a - b + c$.

- (A) $P = -3$. (B) $P = -1$. (C) $P = 4$. (D) $P = 3$.

Câu 61 (Chuyên Hạ Long-2018). Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

- (A) 10. (B) 8. (C) 12. (D) 6.

Câu 62 (Chuyên Thái Bình 2018). Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e+c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = -1$. (C) $P = 0$. (D) $P = -2$.

Câu 63 (Chuyên KHTN-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = xe^{x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{e+1}{4}$. (B) $\frac{e-1}{4}$. (C) $\frac{e-1}{2}$. (D) $\frac{e+1}{2}$.

Câu 64 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm-Quảng Nam-2020).

Biết rằng $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = 7$. (C) $S = 10$. (D) $S = 5$.

Dạng 2.10. Tích phân từng phần

 **Ví dụ 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Xét $\int_0^2 xe^{x^2} dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ bằng

- (A) $2 \int_0^2 e^u du$. (B) $2 \int_0^4 e^u du$. (C) $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$. (D) $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$.

.....

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 2 (Đề Minh Họa 2017).** Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x \, dx$:

Ⓐ $I = \frac{e^2 - 1}{4}.$

Ⓑ $I = \frac{1}{2}.$

Ⓒ $I = \frac{e^2 - 2}{2}.$

Ⓓ $I = \frac{e^2 + 1}{4}.$

✍ **Ví dụ 3 (Mã 103 2018).** Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) \, dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a + b = c.$

Ⓑ $a + b = -c.$

Ⓒ $a - b = c.$

Ⓓ $a - b = -c.$

✍ **Ví dụ 4 (Mã 104 2018).** Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) \, dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $a + b = c.$

Ⓑ $a - b = c.$

Ⓒ $a - b = -c.$

Ⓓ $a + b = -c.$

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5 (THPT Nguyễn Viết Xuân-2020).** Biết $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ (với

$a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

(A) 193.

(B) 191.

(C) 190.

(D) 189.

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 6 (Nguyễn Trãi-Thái Bình-2020).** Cho a là số thực dương. Tính $I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx$ bằng:

(A) $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}$.

(B) $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.

(C) $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}$.

(D) $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.

.....

.....

.....

.....

.....

H. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 5

Câu 1 (Sở Hộ Giang 2022). Biết $\int (ax^2 + bx + 5) e^x dx = (3x^2 - 8x + 13) e^x + C$, với a, b là các số nguyên. Tìm $S = a + b$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = 4$.

(C) $S = 5$.

(D) $S = 9$.

Câu 2 (Sở Quảng Nam - 2018). Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

(A) $ab = \frac{1}{8}$.

(B) $ab = \frac{1}{4}$.

(C) $ab = -\frac{1}{8}$.

(D) $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 3 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

(A) $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$.

(B) 0.

(C) $\frac{7}{3} \ln 2$.

(D) $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$.

Câu 4 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

(A) $(x-2)e^x + e^x + C$.

(B) $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

(C) $(x-1)e^x + C$.

(D) $(x+1)e^x + C$.

Câu 5 (Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$ và $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

(A) $3e$.

(B) $3e^{-1}$.

(C) $4 - 3e^{-1}$.

(D) $-3e^{-1}$.

Câu 6 (Chuyên Bắc Ninh-2020). Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

(A) $T = 9$.

(B) $T = 11$.

(C) $T = 8$.

(D) $T = 10$.

Câu 7 (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-2020).

Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

(A) 5622.

(B) 5620.

(C) 5618.

(D) 5621.

Câu 8. Tích phân $\int_0^1 (x-2) e^{2x} dx$ bằng

(A) $\frac{-5 - 3e^2}{4}$.

(B) $\frac{5 - 3e^2}{4}$.

(C) $\frac{5 - 3e^2}{2}$.

(D) $\frac{5 + 3e^2}{4}$.

Câu 9 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1) e^x dx = a + b \cdot e$, tích $a \cdot b$ bằng

(A) -15.

(B) -1.

(C) 1.

(D) 20.

Câu 10 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

(A) $P = 6$.

(B) $P = 5$.

(C) $P = -6$.

(D) $P = 4$.

Câu 11 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019).

Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$ Tìm đẳng thức đúng?

(A) $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

(B) $I = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

(C) $I = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

(D) $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

Câu 12 (Chuyên KHTN 2019). Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a, b, c sao cho

$\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) 19.

(B) -19.

(C) 5.

(D) -5.

Câu 13 (HSG Bắc Ninh 2019). Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ.

Tính $P = a + 4b$.

(A) $P = 0$.

(B) $P = 1$.

(C) $P = 3$.

(D) $P = -3$.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$, ta được

(A) $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$.

(B) $I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

(C) $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$.

(D) $I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Câu 15. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

(A) $6a + 7b = 33$.

(B) $6a + 7b = 25$.

(C) $6a + 7b = 42$.

(D) $6a + 7b = 39$.

Câu 16 (Chuyên Hưng Yên 2019). Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$, ($a > 1$) Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $a \in (18; 21)$.

(B) $a \in (1; 4)$.

(C) $a \in (11; 14)$.

(D) $a \in (6; 9)$.

Câu 17 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$, với $a; b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 5. (D) -1.

Câu 18 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019).

Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx$.

- (A) $I = e^2$. (B) $I = -e^2$. (C) $I = e$. (D) $I = 3e^2 - 2e$.

Câu 19 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m + n + 2p$

- (A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{9}{2}$. (C) 0. (D) $-\frac{5}{4}$.

Câu 20 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

- (A) 42. (B) 21. (C) 12. (D) 32.

Câu 21 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

- (A) $P = 6$. (B) $P = -6$. (C) $P = 5$. (D) $P = 4$.

Câu 22. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

- (A) 11. (B) 7. (C) 13. (D) 9.

Câu 23. Cho $\int \ln(x^2 - x) dx = F(x)$, $F(2) = 2 \ln 2 - 4$. Khi đó $I = \int_2^3 \left[\frac{F(x) + 2x + \ln(x-1)}{x} \right] dx$ bằng

- (A) $3 \ln 3 - 3$. (B) $3 \ln 3 - 2$. (C) $3 \ln 3 - 1$. (D) $3 \ln 3 - 4$.

Câu 24 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$

- (A) $T = 9$. (B) $T = 13$. (C) $T = 7$. (D) $T = 11$.

Câu 25 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + 2(b + c)$ là:

- (A) 0. (B) 9. (C) 3. (D) 5.

Câu 26. Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = ab$.

- (A) $P = \frac{3}{2}$. (B) $P = 0$. (C) $P = \frac{-9}{2}$. (D) $P = -3$.

Câu 27 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 5. (D) -1.

Câu 28 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

- (A) $\frac{15}{8}$. (B) $\frac{5}{8}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{17}{8}$.

Câu 29 (Chuyên Thái Bình 2019). Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc - ad$.

- (A) 12. (B) 1. (C) 24. (D) 64.

Câu 30 (THPT Yên Khánh A 2018). Cho $\int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$ (với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P = (a+b)(c+d)$.

- (A) 7. (B) -7. (C) 3. (D) -3.

Câu 31 (Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương, $b \leq 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 6. (D) 10.

§3. ỨNG DỤNG TÍCH PHẦN

Dạng 3.11. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

- Hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \\ x = a, x = b (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : Ox (y = 0) \\ x = a, x = b (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Hình thức đề thường hay cho

- Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H) : \{y = f(x), y = g(x), x = a, x = b (a < b)\} \xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \text{kết quả, so sánh với bốn đáp án.}$
- Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H) : \{y = f(x), y = g(x)\}$, cho $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, \dots, x_i$, với x_1 nhỏ nhất, x_i lớn nhất $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx$
- Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xỏ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.
- Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ ta nên vẽ hình.

1 CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

(A) $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

(B) $S = \int_a^b f(x) dx.$

(C) $S = - \int_a^b f(x) dx.$

(D) $S = \int_b^a |f(x)| dx.$

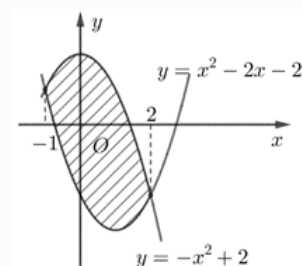
Ví dụ 2 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

(A) $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

(B) $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

(C) $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

(D) $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$



Ví dụ 3 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

(A) $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

(B) $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx.$

(C) $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx.$

(D) $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

Ví dụ 4 (Mã 101-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

(A) 36.

(B) $\frac{4}{3}.$

(C) $\frac{4\pi}{3}.$

(D) $36\pi.$

✎ Ví dụ 5 (Mã 102-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$ là

(A) $\frac{\pi}{6}$.

(B) $\frac{13}{6}$.

(C) $\frac{13\pi}{6}$.

(D) $\frac{1}{6}$.

✎ Ví dụ 6 (Mã 104-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3$ và $y = x - 3$ bằng

(A) $\frac{125\pi}{6}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{125}{6}$.

(D) $\frac{\pi}{6}$.

✎ Ví dụ 7 (Mã 103-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2$ và $y = 3x - 2$ bằng

(A) $\frac{9}{2}$.

(B) $\frac{9\pi}{2}$.

(C) $\frac{125}{6}$.

(D) $\frac{125\pi}{6}$.

✎ Ví dụ 8 (Mã 102 2018). Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.

(B) $S = \int_0^2 2^x dx$.

(C) $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$.

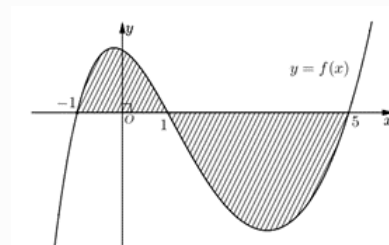
(D) $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

✎ Ví dụ 9 (Mã 101 2018). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $S = \int_0^2 e^x dx$.
 ☐ B $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.
 ☐ C $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.
 ☐ D $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

✎ Ví dụ 10 (Mã 102-2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$.
☐ B $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$.
☐ C $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$.
☐ D $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$.



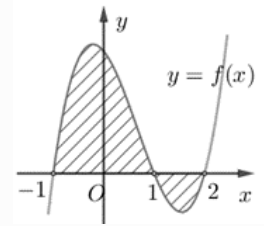
✎ Ví dụ 11 (Mã 103-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{\text{A}} S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\textcircled{\text{B}} S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\textcircled{\text{C}} S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\textcircled{\text{D}} S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 12 (Đề Minh Họa 2017). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$

$$\textcircled{\text{A}} \frac{37}{12}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \frac{9}{4}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \frac{81}{12}.$$

$$\textcircled{\text{D}} 13.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 13 (Đề Tham Khảo 2017). Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$,

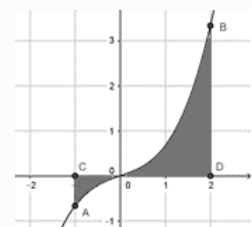
$b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\textcircled{\text{A}} S = b - a.$$

$$\textcircled{\text{B}} S = b + a.$$

$$\textcircled{\text{C}} S = -b + a.$$

$$\textcircled{\text{D}} S = -b - a.$$



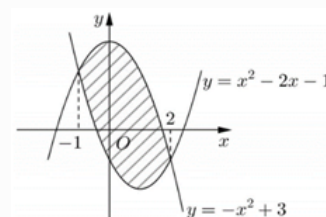
.....

.....

.....

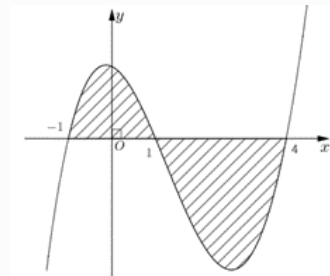
Ví dụ 14 (Đề Tham Khảo 2019). Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

- (A) $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$. (B) $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$.
 (C) $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. (D) $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.



Ví dụ 15 (Mã 101-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.
 (B) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.
 (C) $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.
 (D) $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.



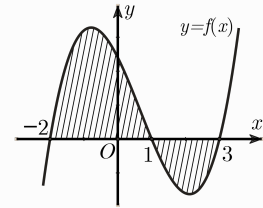
Ví dụ 16 (Mã 104-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{\textbf{A}} S = - \int_{-2}^1 f(x) \, dx - \int_1^3 f(x) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} S = \int_{-2}^1 f(x) \, dx - \int_1^3 f(x) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} S = - \int_{-2}^1 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} S = \int_{-2}^1 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx.$$



.....

.....

.....

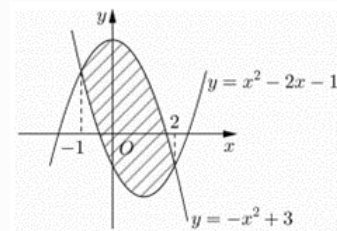
Ví dụ 17 (Chuyên KHTN 2019). Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

$$\textcircled{\textbf{A}} \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} \int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} \int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) \, dx.$$



.....

.....

.....

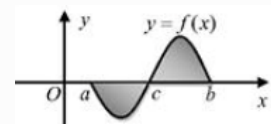
Ví dụ 18. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{\textbf{A}} S = \int_a^b f(x) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} S = \left| \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \right|.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} S = - \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} S = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$



✎ Ví dụ 19 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S .

☐ (A) $S = 4$.

☐ (B) $S = 8$.

☐ (C) $S = 2$.

☐ (D) $S = 0$.

✎ Ví dụ 20 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019). Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A) $S = \int_0^2 3^x dx$.

☐ (B) $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$.

☐ (C) $S = \pi \int_0^2 3^x dx$.

☐ (D) $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

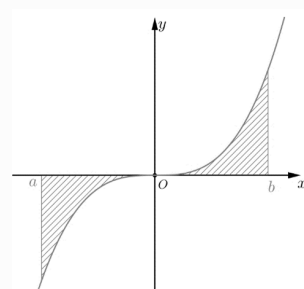
✎ Ví dụ 21 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C) : y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ (A) $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

☐ (B) $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

☐ (C) $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

☐ (D) $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.



✎ Ví dụ 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

Ⓐ $\frac{2}{3}$.

Ⓑ $\frac{3}{2}$.

Ⓒ $\frac{1}{3}$.

Ⓓ $\frac{7}{3}$.

✎ Ví dụ 23. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ bằng

Ⓐ $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$.

Ⓑ $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$.

Ⓒ $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Ⓓ $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

✎ Ví dụ 24 (KTNL GV Bắc Giang 2019). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox

Ⓐ 11.

Ⓑ $\frac{34}{3}$.

Ⓒ $\frac{31}{3}$.

Ⓓ $\frac{32}{3}$.

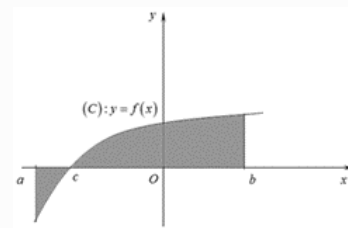
✎ Ví dụ 25 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019). Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?

Ⓐ $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Ⓑ $S = \int_a^b f(x) dx.$

Ⓒ $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Ⓓ $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$



✎ Ví dụ 26 (Việt Đức Hà Nội 2019). Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

Ⓐ $S = 6.$

Ⓑ $S = 16.$

Ⓒ $S = \frac{13}{6}.$

Ⓓ $S = 13.$

✎ Ví dụ 27 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

Ⓐ $\frac{4}{3}.$

Ⓑ $\frac{7}{3}.$

Ⓒ $\frac{8}{3}.$

Ⓓ $\frac{5}{3}.$

✎ Ví dụ 28 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S . Tính S ?

Ⓐ $S = 1 - \ln \frac{4}{3}.$

Ⓑ $S = 4 \ln \frac{4}{3}.$

Ⓒ $S = 4 \ln \frac{4}{3} - 1.$

Ⓓ $S = \ln \frac{4}{3} - 1.$

 **Ví dụ 29.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$ bằng

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{7}{3}$.

(C) $\frac{8}{3}$.

(D) 1.

 **Ví dụ 30 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019).** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số (H) $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

(A) $2 \ln 2 - 1$.

(B) $\ln 2 + 1$.

(C) $\ln 2 - 1$.

(D) $2 \ln 2 + 1$.

 **Ví dụ 31.** (Toán Học Tuổi Trẻ 2019] Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

(B) $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

(C) $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

(D) $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

 **Ví dụ 32 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

Ⓐ 8.

Ⓑ 5.

Ⓒ 4.

Ⓓ 10.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 33 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

Ⓐ $\frac{7}{2}$.

Ⓑ $\frac{9}{2}$.

Ⓒ $\frac{5}{2}$.

Ⓓ $\frac{11}{2}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 34 (Chuyên Hạ Long 2019).** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

Ⓐ $\frac{2}{3}$ (đvdt).

Ⓑ $\frac{1}{3}$ (đvdt).

Ⓒ 1 (đvdt).

Ⓓ $\frac{1}{6}$ (đvdt) .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 35 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019).** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

Ⓐ e^2 .

Ⓑ $e + 2$.

Ⓒ $2e$.

Ⓓ $e - 2$.

.....

.....

.....

Ví dụ 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

(A) 4.

(B) $\frac{20}{3}$.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) $\frac{16}{3}$.

.....

.....

.....

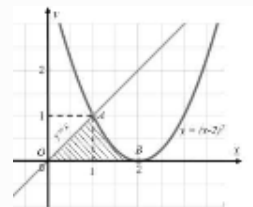
Ví dụ 37 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019). Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.

(A) $\frac{5}{6}$.

(B) $\frac{5\pi}{6}$.

(C) $\frac{8}{15}$.

(D) $\frac{8\pi}{15}$.



.....

.....

.....

Ví dụ 38. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

(A) $S = \frac{2000}{3}$.

(B) $S = 2008$.

(C) $S = 2000$.

(D) $S = \frac{2008}{3}$.

.....

.....

.....

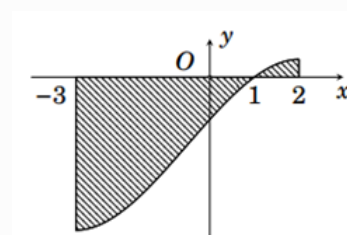
Ví dụ 39 (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

☐ A $S = a + b.$

☐ B $S = a - b.$

☐ C $S = -a - b.$

☐ D $S = b - a.$



Ví dụ 40 (Chuyên Bắc Giang 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

☐ A $\frac{4}{3}.$

☐ B $\frac{5}{3}.$

☐ C $\frac{3}{2}.$

☐ D $\frac{23}{15}.$

Ví dụ 41 (Chuyên Phan Bội Châu 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

☐ A 8.

☐ B 5.

☐ C 4.

☐ D 10.

Ví dụ 42 (HSG Bắc Ninh 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

☐ A $S = 1 + \ln 2.$

☐ B $S = 2 \ln 2 - 1.$

☐ C $S = 2 \ln 2 + 1.$

☐ D $S = \ln 2 - 1.$

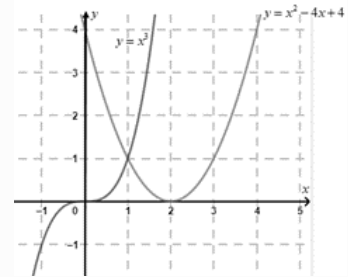
✎ **Ví dụ 43.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| \, dx.$

Ⓑ $-\int_0^1 x^3 \, dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) \, dx.$

Ⓒ $\int_0^1 x^3 \, dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) \, dx.$

Ⓓ $\int_0^1 x^3 \, dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) \, dx.$



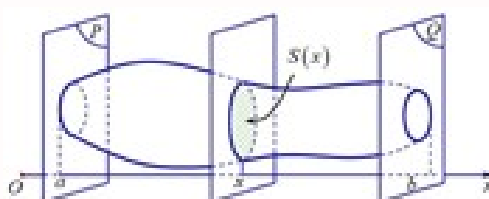
Dạng 3.12. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

a) Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định bởi công thức

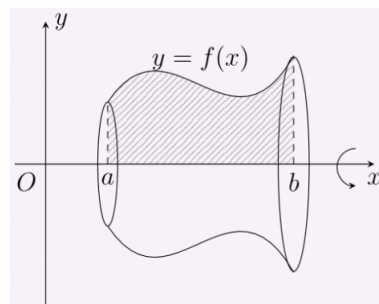
$$S = \int_a^b S(x) dx$$



b) Thể tích khối tròn xoay

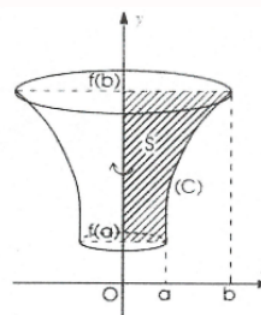
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox .

$$\left\{ \begin{array}{l} (C): y = f(x) \\ \text{Trục } Ox: y = 0 \\ x = a \\ x = b. \end{array} \right. \Rightarrow V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



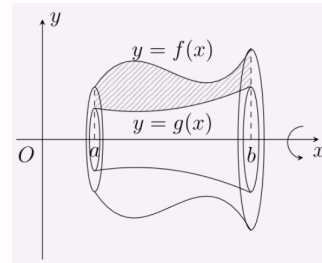
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy

$$\left\{ \begin{array}{l} (C): x = g(y) \\ \text{Trục } Oy: x = 0 \\ y = c \\ y = d. \end{array} \right. \Rightarrow V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox

$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b. \end{cases} \Rightarrow V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$



A. CÁC VÍ DỤ MẪU

✎ Ví dụ 1 (Đề Minh Họa 2017). Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

Ⓐ $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

Ⓑ $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

Ⓒ $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

Ⓓ $V = \pi \int_a^b f(x) dx .$

✎ Ví dụ 2 (Đề Tham Khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

Ⓐ $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

Ⓑ $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

Ⓒ $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx.$

Ⓓ $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx .$

✎ Ví dụ 3 (Mã 101 2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_0^1 e^{3x} dx.$

(B) $\int_0^1 e^{6x} dx.$

(C) $\pi \int_0^1 e^{6x} dx.$

(D) $\int_0^1 e^{3x} dx.$

✎ Ví dụ 4 (Mã 102-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\int_0^1 e^{4x} dx.$

(B) $\pi \int_0^1 e^{8x} dx.$

(C) $\pi \int_0^1 e^{4x} dx.$

(D) $\int_0^1 e^{8x} dx.$

✎ Ví dụ 5 (Mã 103-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh Ox bằng

(A) $\pi \int_0^1 e^{4x} dx.$

(B) $\int_0^1 e^{2x} dx.$

(C) $\pi \int_0^1 e^{2x} dx.$

(D) $\int_0^1 e^{4x} dx.$

✎ Ví dụ 6 (Mã 104-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_0^1 e^{2x} dx.$

(B) $\pi \int_0^1 e^x dx.$

(C) $\int_0^1 e^x dx.$

(D) $\int_0^1 e^{2x} dx.$

✎ Ví dụ 7 (Mã 103 2018). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) \, dx.$

(B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) \, dx.$

(C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 \, dx.$

(D) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 \, dx.$

✎ Ví dụ 8 (Mã 105 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$

(B) $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$

(C) $V = \frac{\pi e^2}{3}.$

(D) $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

✎ Ví dụ 9 (Mã 104 2017). Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = 2.$

(B) $V = \frac{4\pi}{3}.$

(C) $V = 2\pi.$

(D) $V = \frac{4}{3}.$

✎ Ví dụ 10 (Mã 123 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- ☐ (A) $V = (\pi + 1)\pi$.
 ☐ (B) $V = \pi - 1$.
 ☐ (C) $V = \pi + 1$.
 ☐ (D) $V = (\pi - 1)\pi$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 11 (Mã 110 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- ☐ (A) $V = 2\pi(\pi + 1)$.
 ☐ (B) $V = 2\pi$.
 ☐ (C) $V = 2(\pi + 1)$.
 ☐ (D) $V = 2\pi^2$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 12 (Mã 104 2018). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ (A) $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.
 ☐ (B) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.
- ☐ (C) $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.
 ☐ (D) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 13 (Đề Tham Khảo 2017). Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

(A) $V = \frac{124}{3}$.

(B) $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

(C) $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

(D) $V = \frac{124\pi}{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

(A) $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

(B) $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

(C) $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

(D) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 15 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

(B) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

(C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

(D) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019). Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

(B) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

(C) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

(D) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx .$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 17. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

(A) $\frac{16\pi}{15}.$

(B) $\frac{2\pi}{3}.$

(C) $\frac{4\pi}{3}.$

(D) $\frac{8\pi}{15}.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 18 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019). Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

(A) $3\pi.$

(B) $\frac{3\pi}{2}.$

(C) $\frac{2\pi}{3}.$

(D) $\frac{3}{2}.$

.....

.....

.....

Ví dụ 19 (Sở Phú Thọ 2019). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$.

(B) $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(C) $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(D) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

.....

Ví dụ 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

(A) $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(B) $\frac{\pi \ln 3}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\pi \ln 2$.

.....

Ví dụ 21 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019). Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox là

(A) $\frac{81\pi}{35}$.

(B) $\frac{81}{35}$.

(C) $\frac{71\pi}{35}$.

(D) $\frac{71}{35}$.

.....

Ví dụ 22 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019). Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d : $y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

(A) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

(B) $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

Ⓒ $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx.$

Ⓓ $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$

 **Ví dụ 23 (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019).** Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P) : y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng

Ⓐ $V = \frac{19\pi}{15}.$

Ⓑ $V = \frac{13\pi}{15}.$

Ⓒ $V = \frac{17\pi}{15}.$

Ⓓ $V = \frac{16\pi}{15}.$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN - VẬN DỤNG

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

Câu 1 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 – Mã 102).

Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng?

Ⓐ $2 \ln 3.$

Ⓑ $\ln 3.$

Ⓒ $\ln 18.$

Ⓓ $2 \ln 2.$

Câu 2 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 – Mã 102).

Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

Ⓐ $2 \ln 2.$

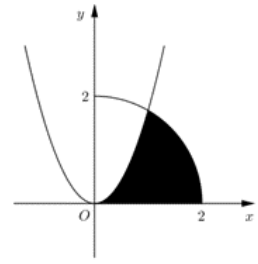
Ⓑ $\ln 6.$

Ⓒ $3 \ln 2.$

Ⓓ $\ln 2.$

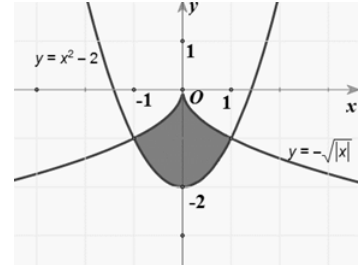
Câu 3.

(Đề Tham Khảo 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



- (A) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. (B) $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.
(C) $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. (D) $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Câu 4. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



- (A) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$. (B) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.
(C) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$. (D) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Câu 5. (Sở Bắc Giang 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- (A) $\frac{e^2 - 1}{2}$. (B) $\frac{e^2 + 1}{2}$. (C) $\frac{e^2 - 1}{4}$. (D) $\frac{e^2 + 1}{4}$.

Câu 6. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

- (A) $m = \frac{7}{2}$. (B) $m = 5$. (C) $m = 2$. (D) $m = 1$.

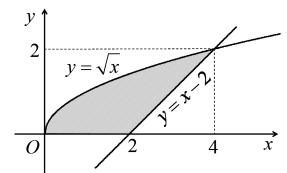
Câu 7. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

- (A) $\frac{16}{3}$. (B) $\frac{20}{3}$. (C) 10. (D) 9.

Câu 8. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

- (A) $S = \frac{937}{12}$. (B) $S = \frac{343}{12}$. (C) $S = \frac{793}{4}$. (D) $S = \frac{397}{4}$.

Câu 9. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



- (A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{10}{3}$. (D) $\frac{16}{3}$.

Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

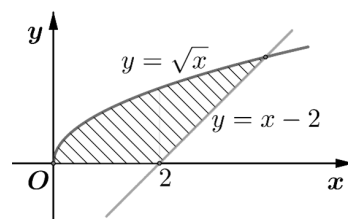
- (A) $\frac{8}{15}$. (B) $\frac{7}{15}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{15}$.

Câu 11. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H) : $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- (A) $S = \ln 2 + 1$. (B) $S = 2 \ln 2 + 1$. (C) $S = \ln 2 - 1$. (D) $S = 2 \ln 2 - 1$.

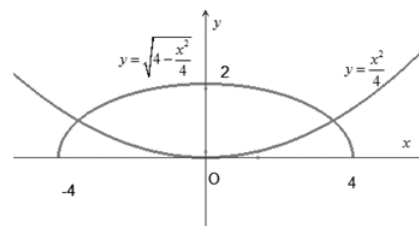
Câu 12. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:

- (A) $\frac{10}{3}$. (B) 4. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{11}{3}$.



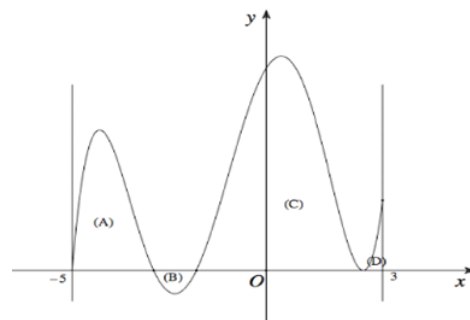
Câu 13. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên) Diện tích hình phẳng (H) bằng:

- (A) $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$. (B) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$.
(C) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$. (D) $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$.



Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành lần lượt là 6; 3; 12; 2. Tính tích phân $\int_{-3}^1 [2f(2x+1) + 1] dx$ bằng

- (A) 27. (B) 25. (C) 17. (D) 21.

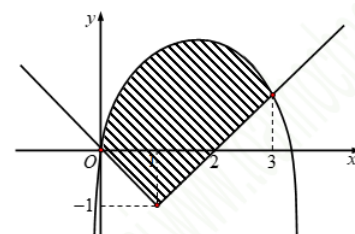


Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

- (A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. (B) $\frac{\pi - 1}{2}$. (C) $\frac{\pi}{2} - 1$. (D) $\frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 16 (Kim Liên-Hà Nội-2018). Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?

- (A) $\frac{11}{6}$. (B) $\frac{13}{2}$. (C) $\frac{11}{2}$. (D) $\frac{14}{3}$.

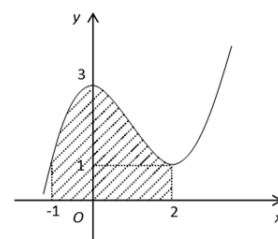


Câu 17. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến-Bình Dương-2018) Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch caro trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?

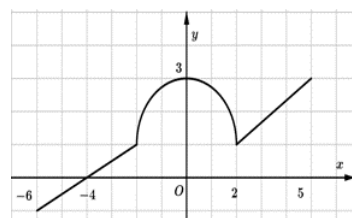
- (A) $S = 4, 8$. (B) $S = 3, 9$. (C) $S = 3, 7$. (D) $S = 3, 4$.

Câu 18. (THPT Trần Quốc Tuấn-2018) Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.

- (A) $S = \frac{51}{8}$. (B) $S = \frac{52}{8}$. (C) $S = \frac{50}{8}$. (D) $S = \frac{53}{8}$.



Câu 19. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu-2018) Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx$.



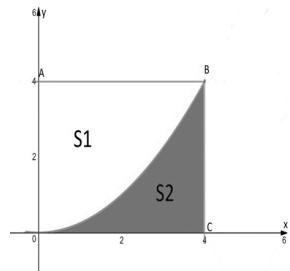
(A) $I = 2\pi + 35$.

(B) $I = 2\pi + 34$.

(C) $I = 2\pi + 33$.

(D) $I = 2\pi + 32$.

Câu 20. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



(A) $\frac{3}{2}$.

(B) 3.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 2.

Câu 21. (Viết Đức Hà Nội 2019) Ký hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1, y = 0, x = 1, x = t (t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$.

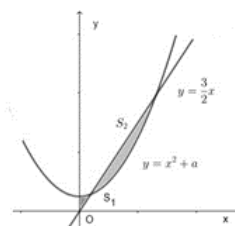
(A) $t = 3$.

(B) $t = 4$.

(C) $t = 13$.

(D) $t = 14$.

Câu 22. (Mã 104-2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



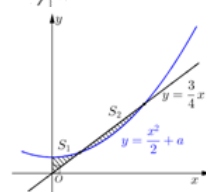
(A) $\left(0; \frac{2}{5}\right)$.

(B) $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$.

(C) $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right)$.

(D) $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 23. (Mã 102-2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



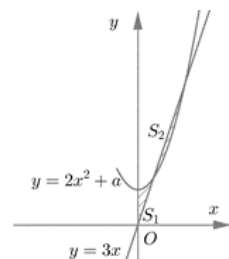
(A) $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

(B) $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$.

(C) $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

(D) $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Câu 24. (Mã 103-2019) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



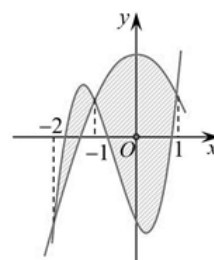
(A) $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

(B) $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$.

(C) $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

(D) $\left(0; \frac{4}{5}\right)$.

Câu 25. (Mã 102 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = d^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

(A) $\frac{37}{12}$.

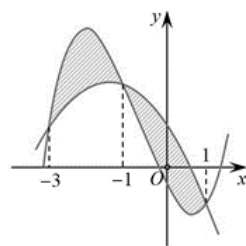
(B) $\frac{37}{6}$.

(C) $\frac{13}{2}$.

(D) $\frac{9}{2}$.

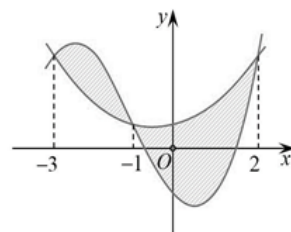
Câu 26. (Mã 101 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = d^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

- (A) 5. (B) $\frac{9}{2}$. (C) 8. (D) 4.



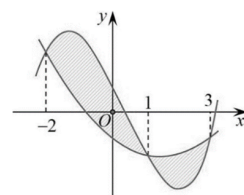
Câu 27. (Mã 103 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = d^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- (A) $\frac{253}{12}$. (B) $\frac{125}{12}$. (C) $\frac{253}{48}$. (D) $\frac{125}{48}$.



Câu 28. (Mã 104 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = d^2 + ex - \frac{3}{4}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- (A) $\frac{253}{48}$. (B) $\frac{125}{24}$. (C) $\frac{125}{48}$. (D) $\frac{253}{24}$.

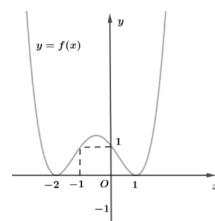


Câu 29. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

- (A) $T = 99$. (B) $T = 64$. (C) $T = 32$. (D) $T = 72$.

Câu 30. (Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

- (A) $\frac{127}{40}$. (B) $\frac{127}{10}$. (C) $\frac{107}{5}$. (D) $\frac{13}{5}$.

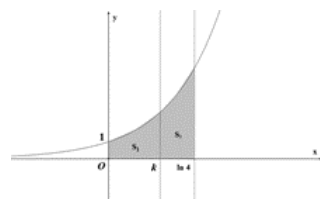


Câu 31. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2, mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

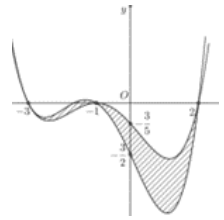
- (A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = 3$. (D) $m = 4$.

Câu 32. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

- (A) $k = \frac{4}{3} \ln 2$. (B) $k = \ln \frac{8}{3}$. (C) $k = \ln 2$. (D) $k = \ln 3$.



Câu 33. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



- (A) 3, 11. (B) 2, 45. (C) 3, 21. (D) 2, 95.

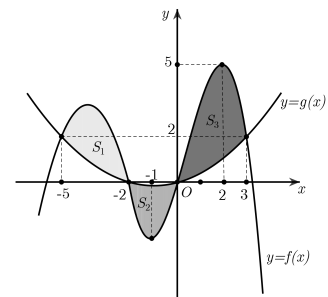
Câu 34. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 35. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho Parabol (P): $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

- (A) $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$. (D) $(\frac{1}{2}; 3)$.

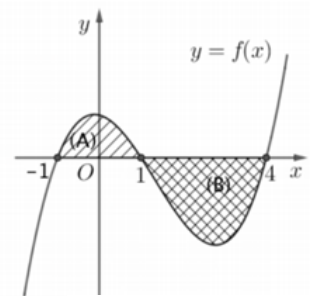
Câu 36. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng



- (A) $-m + n - p - \frac{208}{45}$. (B) $m - n + p + \frac{208}{45}$.
(C) $m - n + p - \frac{208}{45}$. (D) $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích

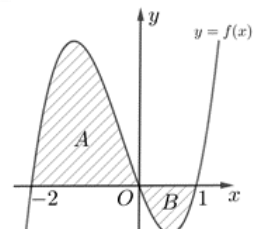
phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx$ bằng



- (A) $-\frac{4}{5}$. (B) 2. (C) $\frac{4}{5}$. (D) -2.

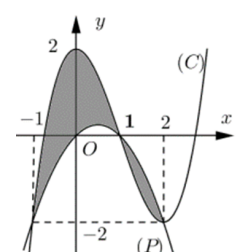
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần

A, B lần lượt bằng 11 và 2. Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ bằng



- (A) 3. (B) $\frac{13}{3}$. (C) 9. (D) 13.

Câu 39. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng



- (A) $\frac{37}{12}$. (B) $\frac{7}{12}$. (C) $\frac{11}{12}$. (D) $\frac{5}{12}$.

Câu 40. (Việt Đức Hà Nội -2019) Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 , trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- Ⓐ $\frac{3\pi + 2}{12\pi}$. Ⓑ $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$. Ⓒ $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$. Ⓓ $\frac{3\pi + 2}{21\pi - 2}$.

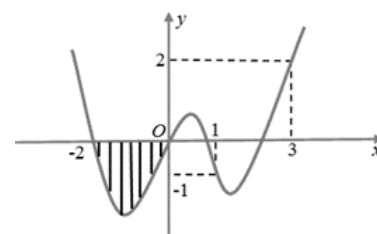
Câu 41. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6}$ và $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6}$ có diện tích lớn nhất.

- Ⓐ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ $\sqrt[3]{3}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx$$

- Ⓐ $T = \frac{9}{2}$. Ⓑ $T = 6$. Ⓒ $T = 0$. Ⓓ $T = \frac{3}{2}$.

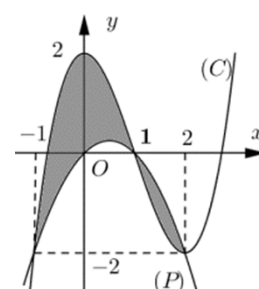


Câu 43. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

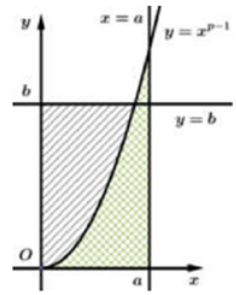
- Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 44. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng

- Ⓐ $\frac{37}{12}$. Ⓑ $\frac{7}{12}$. Ⓒ $\frac{11}{12}$. Ⓓ $\frac{5}{12}$.



Câu 45. (Chuyên Hạ Long-2018) Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



- (A) $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab.$
 (B) $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab.$
 (C) $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab.$
 (D) $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$

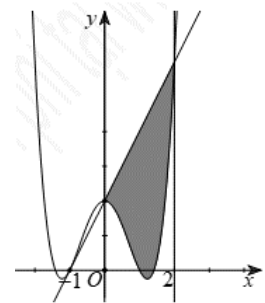
Câu 46. (Hà Nội-2018) Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

- (A) $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2.$
 (B) $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2.$
 (C) $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2.$
 (D) $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2. .$

Câu 47. (Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-2018) Cho parabol $(P) : y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S

- (A) $S_{max} = \frac{2018^3 + 1}{6}.$
 (B) $S_{max} = \frac{2018^3}{3}.$
 (C) $S_{max} = \frac{2018^3 - 1}{6}.$
 (D) $S_{max} = \frac{2018^3}{3}.$

Câu 48. (Chuyên KHTN-2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ có diện tích bằng

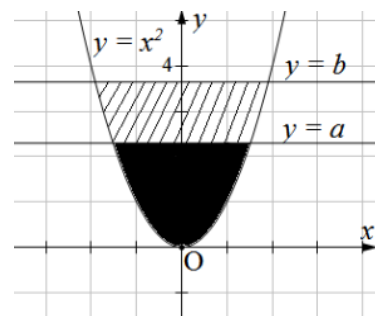


- (A) $\frac{2}{5}.$
 (B) $\frac{1}{4}.$
 (C) $\frac{2}{9}.$
 (D) $\frac{1}{5}.$

Câu 49. (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương-2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2, x = m, (-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

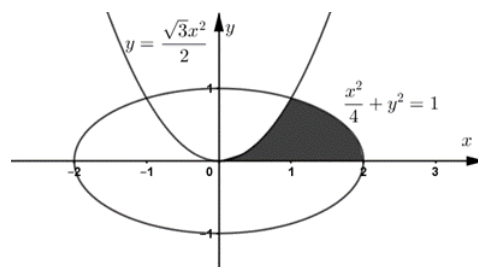
- (A) 2.
 (B) 3.
 (C) 4.
 (D) 1.

Câu 50. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



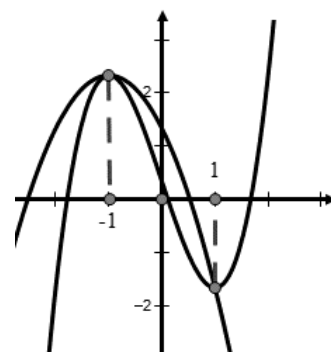
- (A) $b = \sqrt[3]{4}a$. (B) $b = \sqrt[3]{2}a$. (C) $b = \sqrt[3]{3}a$. (D) $b = \sqrt[3]{6}a$.

Câu 51. (THPT Yên Khánh A-2018) Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T = \frac{a}{b}\pi + \frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S = a + b + c + d$.



- (A) $S = 32$. (B) $S = 10$. (C) $S = 15$. (D) $S = 21$.

Câu 52. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



- (A) $(0; 1)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(2; 3)$. (D) $(3; 4)$.

Dạng 2. Tính thể tích khối tròn xoay

Câu 53. (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

- (A) $V = (e^2 - 5)\pi$. (B) $V = (4 - 2e)\pi$. (C) $V = e^2 - 5$. (D) $V = 4 - 2e$.

Câu 54. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

- (A) 550. (B) 400. (C) 670. (D) 335.

Câu 55. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

$$\textcircled{A} V = \frac{4\pi}{3}. \quad \textcircled{B} V = \frac{16\pi}{15}. \quad \textcircled{C} V = \frac{7\pi}{8}. \quad \textcircled{D} V = \frac{15\pi}{8}.$$

Câu 56. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

$$\textcircled{A} \frac{64\pi}{15}. \quad \textcircled{B} \frac{32}{15}. \quad \textcircled{C} \frac{32\pi}{15}. \quad \textcircled{D} \frac{64}{15}.$$

Câu 57. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

$$\textcircled{A} 5. \quad \textcircled{B} \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad \textcircled{C} \frac{3\pi}{2}. \quad \textcircled{D} \pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right).$$

Câu 58. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

$$\textcircled{A} V = \frac{7}{6}. \quad \textcircled{B} V = \frac{5\pi}{6}. \quad \textcircled{C} V = \frac{7\pi}{11}. \quad \textcircled{D} V = \frac{11\pi}{6}.$$

Câu 59. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

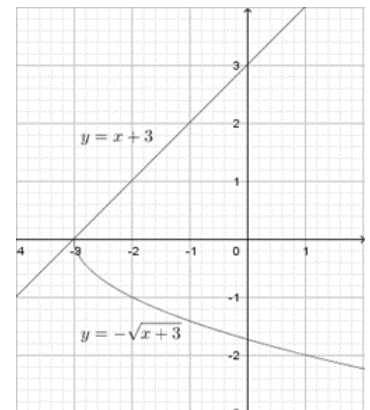
$$\textcircled{A} \frac{31\pi}{3}. \quad \textcircled{B} \frac{32\pi}{3}. \quad \textcircled{C} \frac{34\pi}{3}. \quad \textcircled{D} \frac{35\pi}{3}.$$

Câu 60. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

$$\textcircled{A} V = \frac{4}{3}\pi. \quad \textcircled{B} V = \frac{16}{15}\pi. \quad \textcircled{C} V = \frac{16}{15}. \quad \textcircled{D} V = \frac{4}{3}.$$

Câu 61. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x + 3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox .

$$\textcircled{A} \frac{41}{2}\pi. \quad \textcircled{B} \frac{43}{2}\pi. \quad \textcircled{C} \frac{41}{3}\pi. \quad \textcircled{D} \frac{40}{3}\pi.$$



Câu 62. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

$$\textcircled{A} V = e^2 - 1. \quad \textcircled{B} V = \pi(e^2 - 1). \quad \textcircled{C} V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1. \quad \textcircled{D} V = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1).$$

Câu 63. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình 2019) Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0; x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x + 1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

- (A) $\frac{\pi(13e^4 - 1)}{4}$. (B) $\frac{13e^4 - 1}{4}$. (C) $2e^2$. (D) $2\pi e^2$.

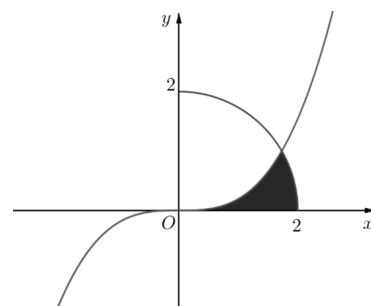
Câu 64. Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính $R = 3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1), (S_2)$.

- (A) $V = \frac{45\pi}{8}$. (B) $V = \frac{45\pi}{4}$. (C) $V = \frac{45}{4}$. (D) $V = \frac{45}{8}$.

Câu 65. (Toán Học Tuổi Trẻ-2018) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{2\pi}{15}$. (D) $\frac{4\pi}{15}$.

Câu 66. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2018) Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

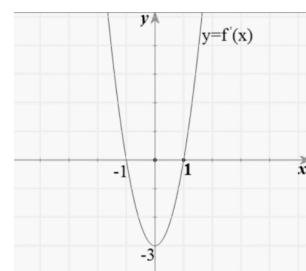


- (A) $P = 52$. (B) $P = 40$. (C) $P = 46$. (D) $P = 34$.

Câu 67. (HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

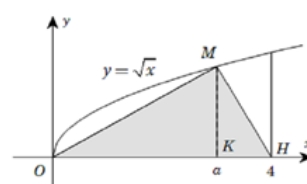
- (A) 18. (B) 20. (C) 19. (D) 21.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



- (A) $\frac{725}{35}\pi$. (B) $\frac{1}{35}\pi$. (C) 6π . (D) đáp án khác.

Câu 69. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



(A) $a = 2$.

(B) $a = 2\sqrt{2}$.

(C) $a = \frac{5}{2}$.

(D) $a = 3$.

Câu 70. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y = x - \pi$, $y = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V = p\pi^4$, ($p \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $24p$ bằng

(A) 8.

(B) 4.

(C) 24.

(D) 12.

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $(H_1) : \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = -\frac{x^2}{4} \\ x = -4, x = 4 \end{cases}$, $(H_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \\ x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \end{cases}$. Cho

$(H_1), (H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng.

(A) $V_1 = V_2$.

(B) $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

(C) $V_1 = 2V_2$.

(D) $V_1 = \frac{3}{2}V_2$.

Câu 72. (THPT Chu Văn An -Thái Nguyên-2018) Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a, CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB .

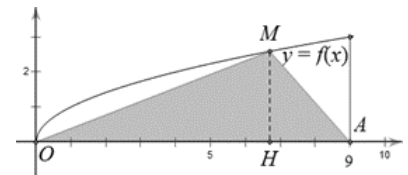
(A) $\frac{5}{4}\pi a^3$.

(B) $\frac{5}{2}\pi a^3$.

(C) $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

(D) πa^3 .

Câu 73. (Chuyên Lê Hồng Phong-Tphcm-2018) Cho đồ thị $(C) : y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9; 0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



(A) $S = 3$.

(B) $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$.

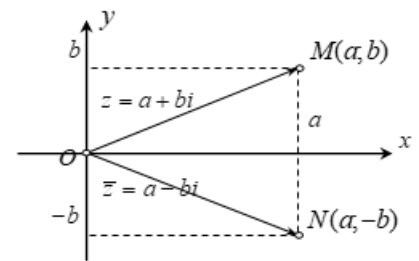
(C) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(D) $S = \frac{4}{3}$.

§1. SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a , phần ảo là b
- Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ và cần nhớ $i^2 = -1$
- Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$
 - Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ có điểm biểu diễn $N(a; -b)$
 - Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành Ox
 - $\bar{\bar{z}} = z; \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
 - $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$;
 - $\bar{z} \cdot \bar{z'} = \overline{z \cdot z'}$;
 - $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$;
 - $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.
- Mô đun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\blacksquare |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\blacksquare \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\blacksquare ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\blacksquare ||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

- Phép cộng hai số phức: Cho số phức $z_1 = a + b \cdot i$ và $z_2 = c + d \cdot i$. Khi đó

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

- Phép trừ hai số phức

$$z_1 - z_2 = (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

- Phép nhân hai số phức

$$- z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$

$$- k \cdot z = k \cdot (a + bi) = ka + kbi.$$

- Phép chia hai số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad) i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1.13. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Loại 1: Xác định phần thực, phần ảo của số phức

 **Ví dụ 1 (Mã 103 - 2022).** Phần ảo của số phức $z = (2 - i)(1 + i)$ bằng

- (A) 3. (B) 1. (C) -1. (D) -3.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 101).** Phần thực của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- (A) 5. (B) 2. (C) -5. (D) -2.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 102).** Phần thực của số phức $z = 6 - 2i$ bằng

(A) -2 .

(B) 2 .

(C) 6 .

(D) -6 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4 (Mã 102-2020 Lần 2).** Phần thực của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

(A) 3 .

(B) 4 .

(C) -3 .

(D) -4 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5 (Mã 103-2020 Lần 2).** Phần thực của số phức $z = -5 - 4i$ bằng

(A) 5 .

(B) 4 .

(C) -4 .

(D) -5 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 6 (Mã 104 2018).** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

(A) $1 - 3i$.

(B) $-1 + 3i$.

(C) $1 + 3i$.

(D) $-1 - 3i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 7 (Mã 103 -2018).** Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

(A) -6 .

(B) 6 .

(C) -5 .

(D) 5 .

.....

 **Ví dụ 8 (Mã 102 2018).** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

☐ (A) $3 + 4i$.

☐ (B) $4 - 3i$.

☐ (C) $3 - 4i$.

☐ (D) $4 + 3i$.

 **Ví dụ 9 (Đề Tham Khảo 2017).** Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b .

☐ (A) $a = 3; b = \sqrt{2}$.

☐ (B) $a = 3; b = -2\sqrt{2}$.

☐ (C) $a = 3; b = 2$.

☐ (D) $a = 3; b = 2\sqrt{2}$.

 **Ví dụ 10 (Mã 101 2018).** Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng:

☐ (A) 7.

☐ (B) -7.

☐ (C) -3.

☐ (D) 3.

 **Ví dụ 11 (Mã 123 2017).** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

☐ (A) $z = \sqrt{3} + i$.

☐ (B) $z = -2$.

☐ (C) $z = -2 + 3i$.

☐ (D) $z = 3i$.

Ví dụ 12 (Mã 105 2017). Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z ?

- ☐ (A) $a = 2$.
 ☐ (B) $a = 3$.
 ☐ (C) $a = -2$.
 ☐ (D) $a = -3$.

.....

.....

.....

Ví dụ 13 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- ☐ (A) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
 ☐ (B) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
 ☐ (C) Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
 ☐ (D) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

.....

.....

.....

2 Loại 2. Xác định số phức liên hợp, số phức đối, môđun của số phức

Ví dụ 14 (Đề minh họa 2022). Môđun của số phức bằng

- ☐ (A) 8 .
 ☐ (B) $\sqrt{10}$.
 ☐ (C) 10 .
 ☐ (D) $2\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 15 (Mã 101-2022). Môđun của số phức $z = 3 + 4i$ bằng

- ☐ (A) 25 .
 ☐ (B) $\sqrt{7}$.
 ☐ (C) 5 .
 ☐ (D) 7 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 16 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).** Môđun của số phức $1 + 2i$ bằng

☐ (A) 5.

☐ (B) $\sqrt{3}$.

☐ (C) $\sqrt{5}$.

☐ (D) 3.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 17 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

☐ (A) $\bar{z} = -2 + i$.

☐ (B) $\bar{z} = -2 - i$.

☐ (C) $\bar{z} = 2 - i$.

☐ (D) $\bar{z} = 2 + i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 18 (Mã 101-2020 Lần 1).** Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là:

☐ (A) $\bar{z} = -3 - 5i$.

☐ (B) $\bar{z} = 3 + 5i$.

☐ (C) $\bar{z} = -3 + 5i$.

☐ (D) $\bar{z} = 3 - 5i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 19 (Mã 102-2020 Lần 1).** Số phức liên hợp của số phức $Z = -2 + 5i$ là

☐ (A) $\bar{z} = 2 - 5i$.

☐ (B) $\bar{z} = 2 + 5i$.

☐ (C) $\bar{z} = -2 + 5i$.

☐ (D) $\bar{z} = -2 - 5i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 20 (Mã 103-2020 Lần 1).** Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 5i$ là

☐ (A) $\bar{z} = 2 + 5i$.

☐ (B) $\bar{z} = -2 + 5i$.

☐ (C) $\bar{z} = 2 - 5i$.

☐ (D) $\bar{z} = -2 - 5i$.

.....

Ví dụ 21 (Mã 104-2020 Lần 1). Số phức liên hợp của số phức $z = 3 - 5i$ là

- ☐ A $\bar{z} = -3 - 5i$.
 ☐ B $\bar{z} = 3 + 5i$.
 ☐ C $\bar{z} = -3 + 5i$.
 ☐ D $\bar{z} = 3 - 5i$.

Ví dụ 22 (Đề Minh Họa 2017). Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$:

- ☐ A Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$.
☐ B Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.
☐ C Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$.
☐ D Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2 .

Ví dụ 23 (Mã 104 2019). Số phức liên hợp của số phức $z = 3 - 2i$ là.

- ☐ A $3 + 2i$.
 ☐ B $-3 - 2i$.
 ☐ C $-2 + 3i$.
 ☐ D $-3 + 2i$.

Ví dụ 24 (Mã 103-2019). Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là:

- ☐ A $-1 - 2i$.
 ☐ B $1 + 2i$.
 ☐ C $-2 + i$.
 ☐ D $-1 + 2i$.

 **Ví dụ 25 (Mã 104 2017).** Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

☐ (A) $|z| = \sqrt{5}$.

☐ (B) $|z| = 5$.

☐ (C) $|z| = 2$.

☐ (D) $|z| = 3$.

 **Ví dụ 26 (Mã 102-2019).** Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

☐ (A) $-3 + 5i$.

☐ (B) $-5 - 3i$.

☐ (C) $5 + 3i$.

☐ (D) $-5 + 3i$.

 **Ví dụ 27 (Mã 101-2019).** Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là

☐ (A) $3 + 4i$.

☐ (B) $-4 + 3i$.

☐ (C) $-3 - 4i$.

☐ (D) $-3 + 4i$.

 **Ví dụ 28 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

☐ (A) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .

☐ (B) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2 .

☐ (C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.

☐ (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

Ví dụ 29. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- (A) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
 (B) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
 (C) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
 (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Ví dụ 30 (Chuyên Hạ Long 2019). Số phức đối của $z = 5 + 7i$ là?

- (A) $\bar{z} = 5 + 7i$. (B) $-z = -5 - 7i$. (C) $-z = -5 + 7i$. (D) $-z = 5 - 7i$.

Ví dụ 31 (Chuyên Sơn La 2019). Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- (A) $\bar{z} = 1 + 2i$. (B) $\bar{z} = 2 - i$. (C) $\bar{z} = -1 + 2i$. (D) $\bar{z} = -1 - 2i$.

Ví dụ 32 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019). Số phức liên hợp của số phức $z = 5 + 6i$ là

- (A) $\bar{z} = -5 + 6i$. (B) $\bar{z} = -5 - 6i$. (C) $\bar{z} = 6 - 5i$. (D) $\bar{z} = 5 - 6i$.

 **Ví dụ 33 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).** Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

☐ (A) $\bar{z} = 3 - 2i$.

☐ (B) $\bar{z} = 3 + 2i$.

☐ (C) $\bar{z} = -2 - 3i$.

☐ (D) $\bar{z} = 2 + 3i$.

Dạng 1.14. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

 **Ví dụ 1 (Đề minh họa 2022).** Trên mặt phẳng tọa độ, cho $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Phần thực của z bằng

☐ (A) 2.

☐ (B) 3.

☐ (C) -3.

☐ (D) -2.

 **Ví dụ 2 (Mã 101-2022).** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 7i$ có tọa độ là

☐ (A) $(2; 7)$.

☐ (B) $(-2; 7)$.

☐ (C) $(2; -7)$.

☐ (D) $(-7; 2)$.

 **Ví dụ 3 (Mã 103 - 2022).** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là

☐ (A) $(2; -7)$.

☐ (B) $(2; 7)$.

☐ (C) $(7; 2)$.

☐ (D) $(-2; -7)$.

✎ Ví dụ 4 (Mã 101-2022). Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

(A) $5 + i$.

(B) $3 + 2i$.

(C) $1 + 4i$.

(D) $3 + 4i$.

✎ Ví dụ 5 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 – Mã 102). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

(A) $z_3 = 3 - 2i$.

(B) $z_4 = 3 + 2i$.

(C) $z_1 = -3 - 2i$.

(D) $z_2 = -3 + 2i$.

✎ Ví dụ 6 (THPT Quốc Gia 2021 – Lần 1 – Mã 102). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 4)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

(A) $z_2 = 3 + 4i$.

(B) $z_3 = -3 + 4i$.

(C) $z_4 = -3 - 4i$.

(D) $z_1 = 3 - 4i$.

✎ Ví dụ 7 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

(A) $P(-3; 4)$.

(B) $Q(5; 4)$.

(C) $N(4; -3)$.

(D) $M(4; 5)$.

 **Ví dụ 8 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

- ☐ (A) $Q(1; 2)$.
 ☐ (B) $P(-1; 2)$.
 ☐ (C) $N(1; -2)$.
 ☐ (D) $M(-1; -2)$.

 **Ví dụ 9 (Mã 101-2020 Lần 1).** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- ☐ (A) 1.
 ☐ (B) -3.
 ☐ (C) -1.
 ☐ (D) 3.

 **Ví dụ 10 (Mã 102-2020 Lần 1).** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1; 3)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- ☐ (A) 3.
 ☐ (B) -1.
 ☐ (C) -3.
 ☐ (D) 1.

 **Ví dụ 11 (Mã 103-2020 Lần 1).** Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng:

- ☐ (A) -2.
 ☐ (B) 2.
 ☐ (C) 1.
 ☐ (D) -1.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 12 (Mã 102-2020 Lần 2). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$?

- (A)** $Q(1; 2)$. **(B)** $M(2; 1)$. **(C)** $P(-2; 1)$. **(D)** $N(1; -2)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 13 (Mã 103-2020 Lần 2). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 2i$?

- (A)** $P(-3; 2)$. **(B)** $Q(2; -3)$. **(C)** $N(3; -2)$. **(D)** $M(-2; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14 (Mã 104-2020 Lần 2). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

- (A)** $N(-1; 2)$. **(B)** $P(2; -1)$. **(C)** $Q(-2; 1)$. **(D)** $M(1; -2)$.

.....

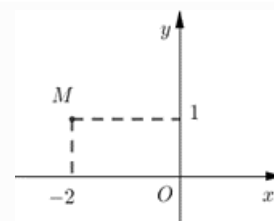
.....

.....

✎ Ví dụ 15 (Đề Tham Khảo 2018).

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

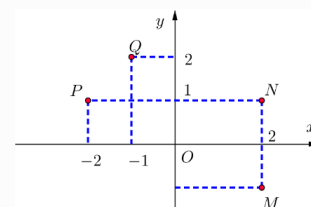
- (A) $z = 1 + 2i$. (B) $z = 1 - 2i$. (C) $z = 2 + i$. (D) $z = -2 + i$.



Ví dụ 16 (Đề Tham Khảo 2019).

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$?

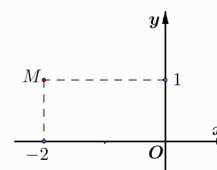
- (A) P . (B) M . (C) Q . (D) N .



Ví dụ 17 (Mã 110 2017).

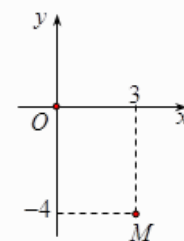
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?

- (A) $z_1 = 1 - 2i$. (B) $z_2 = 1 + 2i$. (C) $z_3 = -2 + i$. (D) $z_4 = 2 + i$.



Ví dụ 18.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



- ☐ (A) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- ☐ (B) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- ☐ (C) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
- ☐ (D) Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

.....

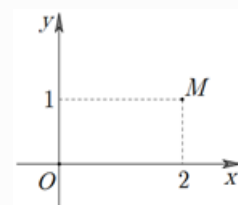
.....

.....

✎ Ví dụ 19 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là:

- ☐ (A) $1 - 2i$.
- ☐ (B) $2 + i$.
- ☐ (C) $1 + 2i$.
- ☐ (D) $2 - i$.



.....

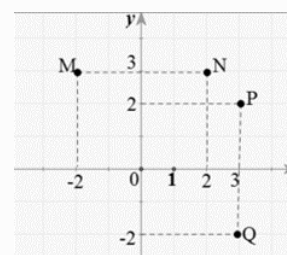
.....

.....

✎ Ví dụ 20.

Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$?

- ☐ (A) M .
- ☐ (B) N .
- ☐ (C) P .
- ☐ (D) Q .



.....

.....

.....

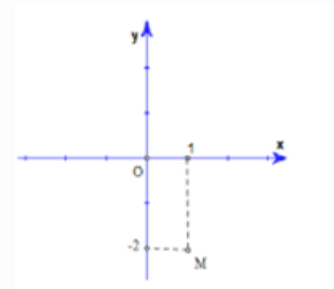
✎ Ví dụ 21 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019). Điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 2 - 3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

- ☐ (A) $M(-2; 3)$.
- ☐ (B) $Q(-2; -3)$.
- ☐ (C) $N(2; -3)$.
- ☐ (D) $P(2; 3)$.

✍ Ví dụ 22 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

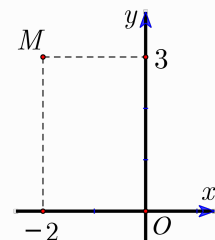
- Ⓐ $1 - 2i$. Ⓑ $i + 2$. Ⓒ $i - 2$. Ⓓ $1 + 2i$.



✍ Ví dụ 23 (Thanh Hóa 2019).

Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức

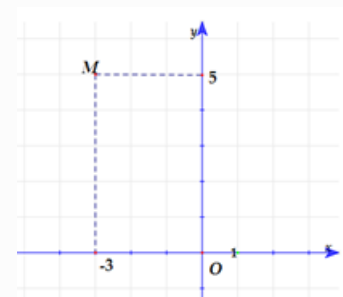
- Ⓐ $3 + 2i$. Ⓑ $2 - 3i$. Ⓒ $-2 + 3i$. Ⓓ $3 - 2i$.



✍ Ví dụ 24 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

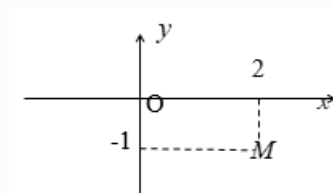
Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Chọn kết luận đúng về số phức $\bar{z}$.

- Ⓐ $\bar{z} = 3 + 5i$. Ⓑ $\bar{z} = -3 + 5i$.
Ⓒ $\bar{z} = 3 - 5i$. Ⓓ $\bar{z} = -3 - 5i$.



✍ Ví dụ 25 (Đề Thi Công Bằng KHTN -2019).

Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



☐ (A) $z = 2 - i$.

☐ (B) $z = 2 + i$.

☐ (C) $z = -1 + 2i$.

☐ (D) $z = -1 - 2i$.

✍ Ví dụ 26 (Sở Bình Phước 2019). Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$?

☐ (A) $-1 - 2i$.

☐ (B) $1 + 2i$.

☐ (C) $1 - 2i$.

☐ (D) $-2 + i$.

✍ Ví dụ 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

☐ (A) hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .

☐ (B) hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

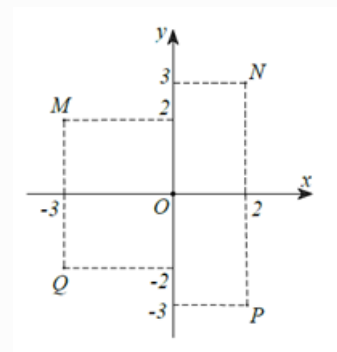
☐ (C) hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

☐ (D) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

✎ Ví dụ 28.

Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = -3i + 2$?

- (A) M. (B) N. (C) Q. (D) P.



.....

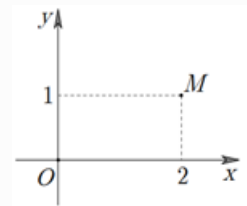
.....

.....

✎ Ví dụ 29 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là:

- (A) $1 - 2i$. (B) $2 + i$. (C) $1 + 2i$. (D) $2 - i$.



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , 3 điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1 = 3 - 7i$, $z_2 = 9 - 5i$ và $z_3 = -5 + 9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- (A) $z = 1 - 9i$. (B) $z = 3 + 3i$. (C) $z = \frac{7}{3} - i$. (D) $z = 2 + 2i$.

.....

.....

.....

📄 Dạng 1.15. Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức

3 Loại 1. Phép tính cộng trừ 2 số phức

 **Ví dụ 1 (MĐ 102- BGD&ĐT - Năm 2022).** Cho 2 số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - i$.

Số phức $z_1 + z_2$ bằng

☐ (A) $3 + 4i$.

☐ (B) $1 + 4i$.

☐ (C) $z = 5 + i$.

☐ (D) $3 + 2i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2 (Đề THPT Quốc Gia 2021 - Lần 1 - Mã 102).** Cho hai số phức $z = 5 + 2i$

và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

☐ (A) $6 + 2i$.

☐ (B) $4 + 6i$.

☐ (C) $6 - 2i$.

☐ (D) $-4 - 6i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).** Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$ Phần

ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

☐ (A) -2 .

☐ (B) $2i$.

☐ (C) 2 .

☐ (D) $-2i$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4 (MĐ 103- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2021).** Cho hai số phức $z = 2 + 3i$ và

$w = 1 - i$. Số phức $z - w$ bằng

☐ (A) $1 + 4i$.

☐ (B) $-1 - 4i$.

☐ (C) $3 + 2i$.

☐ (D) $5 + i$.

.....

.....

 **Ví dụ 5 (MĐ 104- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2021).** Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - i$. Số phức $z - w$ bằng

- ☐ (A) $2 + 3i$.
 ☐ (B) $4 + i$.
 ☐ (C) $-2 - 3i$.
 ☐ (D) $5 - i$.

 **Ví dụ 6 (MĐ 104- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2021).** Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

- ☐ (A) $4 + 2i$.
 ☐ (B) $4 - 2i$.
 ☐ (C) $-2 - 6i$.
 ☐ (D) $2 + 6i$.

 **Ví dụ 7 (MĐ 101- BGD&ĐT - Đợt 2- Năm 2021).** Cho hai số phức $z = 3 + 4i$ và $w = 1 - i$. Số phức $z - w$ là

- ☐ (A) $7 + i$.
 ☐ (B) $-2 - 5i$.
 ☐ (C) $4 + 3i$.
 ☐ (D) $2 + 5i$.

 **Ví dụ 8 (MĐ 101- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2021).** Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

- ☐ (A) $1 + 6i$.
 ☐ (B) $7 - 2i$.
 ☐ (C) $7 + 2i$.
 ☐ (D) $-1 - 6i$.

Ví dụ 9 (MĐ 104- BGD&ĐT - Đợt 1- Năm 2020- 2021). Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

- (A) $4 + 2i$. (B) $4 - 2i$. (C) $-2 - 6i$. (D) $2 + 6i$.

Ví dụ 10 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) -2.

Ví dụ 11 (Mã 101-2020 Lần 1). Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) $5 + i$. (B) $-5 + i$. (C) $5 - i$. (D) $-5 - i$.

Ví dụ 12 (Mã 103-2020 Lần 1). Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) $3 + i$. (B) $-3 - i$. (C) $3 - i$. (D) $-3 + i$.

.....

✎ Ví dụ 13 (Mã 104-2020 Lần 1). Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng.

(A) $4 - 2i$.

(B) $-4 + 2i$.

(C) $4 + 2i$.

(D) $-4 - 2i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14 (Mã 102-2020 Lần 2). Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 4 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

(A) $3 + 3i$.

(B) $-3 - 3i$.

(C) $-3 + 3i$.

(D) $3 - 3i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 15 (Mã 103-2020 Lần 2). Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

(A) $-2 - 4i$.

(B) $2 - 4i$.

(C) $-2 + 4i$.

(D) $2 + 4i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16 (Mã 104-2019). Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn của số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

(A) $(0; 5)$.

(B) $(5; -1)$.

(C) $(-1; 5)$.

(D) $(5; 0)$.

.....

.....

✎ Ví dụ 17 (Mã 104-2020 Lần 2). Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

(A) $-1 + 3i$.

(B) $-1 - 3i$.

(C) $1 + 3i$.

(D) $1 - 3i$.

✎ Ví dụ 18 (Mã 103-2019). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

(A) $(3; 5)$.

(B) $(5; 2)$.

(C) $(5; 3)$.

(D) $(2; 5)$.

✎ Ví dụ 19 (Mã 123 2017). Cho 2 số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

(A) $z = 3 - 10i$.

(B) 14 .

(C) $z = 7 - 4i$.

(D) $z = 2 + 5i$.

✎ Ví dụ 20 (Đề Minh Họa 2017). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

(A) $|z_1 + z_2| = 5$.

(B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

(C) $|z_1 + z_2| = 1$.

(D) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

 **Ví dụ 21 (Mã 110 2017).** Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- ☐ (A) $z = -3 - 6i$.
 ☐ (B) $z = 11$.
 ☐ (C) $z = -1 - 10i$.
 ☐ (D) $z = 3 + 6i$.
-
-
-

 **Ví dụ 22 (Mã 104 2017).** Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- ☐ (A) $M(2; -5)$.
 ☐ (B) $P(-2; -1)$.
 ☐ (C) $Q(-1; 7)$.
 ☐ (D) $N(4; -3)$.
-
-
-

 **Ví dụ 23 (Mã 104 2017).** Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

- ☐ (A) $z = 5 - 5i$.
 ☐ (B) $z = 1 - i$.
 ☐ (C) $z = 1 - 5i$.
 ☐ (D) $z = 1 + i$.
-
-
-

 **Ví dụ 24 (Mã 105 2017).** Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- ☐ (A) $b = -3$.
 ☐ (B) $b = 2$.
 ☐ (C) $b = -2$.
 ☐ (D) $b = 3$.
-
-
-

✎ Ví dụ 25 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- (A) $|z_1 + z_2| = 1$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. (C) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (D) $|z_1 + z_2| = 5$.

.....

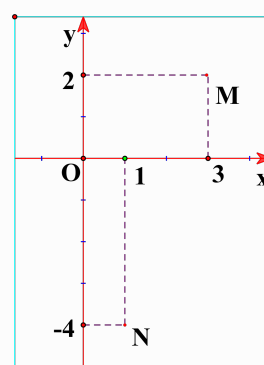
.....

.....

✎ Ví dụ 26 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1 + z_2|$.

- (A) $2\sqrt{29}$. (B) 20. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 116.



.....

.....

.....

4 Loại 2. Phép tính nhân, chia 2 số phức

✎ Ví dụ 27 (Đề minh họa 2022). Cho số phức $z = 3 - 2i$, khi đó $2z$ bằng:

- (A) $6 - 2i$. (B) $6 - 4i$. (C) $3 - 4i$. (D) $-6 + 4i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 28 (Đề minh họa 2022). Cho số phức z thỏa mãn $i \cdot \bar{z} = 5 + 2i$. Phần ảo của z bằng

- (A) 5. (B) 2. (C) -5. (D) -2.

 **Ví dụ 29 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = -1 + i$.

Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng

- (A) 4. (B) $4i$. (C) -1 . (D) $-i$.

 **Ví dụ 30 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 102).** Cho số phức z thỏa mãn $iz = 6 + 5i$. Số phức liên hợp của z là

- (A) $\bar{z} = 5 - 6i$. (B) $\bar{z} = -5 + 6i$. (C) $\bar{z} = 5 + 6i$. (D) $\bar{z} = -5 - 6i$.

 **Ví dụ 31 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 102).** Cho số phức z thỏa mãn $iz = 5 + 4i$. Số phức liên hợp của z là

- (A) $\bar{z} = 4 + 5i$. (B) $\bar{z} = 4 - 5i$. (C) $\bar{z} = -4 + 5i$. (D) $\bar{z} = -4 - 5i$.

 **Ví dụ 32 (Mã 101-2020 Lần 1).** Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) 26. (D) 50.

 **Ví dụ 33 (Mã 102-2020 Lần 1).** Cho hai số phức $z = 2 + 2i$ và $w = 2 + i$. Mô đun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) 40. (B) 8. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{10}$.

 **Ví dụ 34 (Mã 103-2020 Lần 1).** Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 1 + i$. Mô đun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 8. (C) $2\sqrt{10}$. (D) 40.

 **Ví dụ 35 (Mã 104-2020 Lần 1).** Cho hai số phức $z = 1 + 3i$ và $w = 1 + i$. Mô đun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 20. (D) 8.

 **Ví dụ 36 (Mã 102-2020 Lần 2).** Cho số phức $z = 2 - i$, số phức $(2 - 3i)\bar{z}$ bằng

- (A) $-1 + 8i$. (B) $-7 + 4i$. (C) $7 - 4i$. (D) $1 + 8i$.

✎ Ví dụ 37 (Mã 103-2020 Lần 2). Cho số phức $z = -2 + 3i$, số phức $(1 + i)\bar{z}$ bằng

(A) $-5 - i$.

(B) $-1 + 5i$.

(C) $1 - 5i$.

(D) $5 - i$.

✎ Ví dụ 38 (Mã 104-2020 Lần 2). Cho số phức $z = -3 + 2i$, số phức $(1 - i)\bar{z}$ bằng

(A) $-1 - 5i$.

(B) $5 - i$.

(C) $1 - 5i$.

(D) $-5 + i$.

✎ Ví dụ 39 (Đề Minh Họa 2017). Cho số phức $z = 2 + 5i$ Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

(A) $w = -3 - 3i$.

(B) $w = 3 + 7i$.

(C) $w = -7 - 7i$.

(D) $w = 7 - 3i$.

✎ Ví dụ 40 (Đề Tham Khảo 2017). Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

(A) $|z| = 5\sqrt{2}$.

(B) $|z| = \sqrt{2}$.

(C) $|z| = 25\sqrt{2}$.

(D) $|z| = 7\sqrt{2}$.

Ví dụ 41 (Mã 110 2017). Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- Ⓐ $a = 1, b = 0$. Ⓑ $a = 0, b = 1$. Ⓒ $a = 1, b = -2$. Ⓓ $a = -2, b = 1$.

.....

.....

.....

Ví dụ 42 (Mã 123 2017). Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ

- Ⓐ $Q(1; 2)$. Ⓑ $N(2; 1)$. Ⓒ $P(-2; 1)$. Ⓓ $M(1; -2)$.

.....

.....

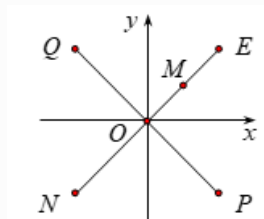
.....

Ví dụ 43 (Đề Tham Khảo 2017).

Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z .

Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

- Ⓐ Điểm Q . Ⓑ Điểm E . Ⓒ Điểm P . Ⓓ Điểm N .



.....

.....

.....

Ví dụ 44 (Mã 101-2019). Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là:

- Ⓐ $(1; 4)$. Ⓑ $(-1; 4)$. Ⓒ $(4; 1)$. Ⓓ $(4; -1)$.

.....

.....

Ví dụ 45 (Mã 102-2019). Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$ Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

(A) $(-3; 3)$.

(B) $(-3; 2)$.

(C) $(3; -3)$.

(D) $(2; -3)$.

Ví dụ 46. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

(A) $\bar{z} = 3 + i$.

(B) $\bar{z} = -3 - i$.

(C) $\bar{z} = 3 - i$.

(D) $\bar{z} = -3 + i$.

Ví dụ 47 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) = 4 - 3i$. Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$ của z .

(A) $\bar{z} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$.

(B) $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$.

(C) $\bar{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$.

(D) $\bar{z} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Ví dụ 48. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z

(A) $|z| = \sqrt{17}$.

(B) $|z| = 16$.

(C) $|z| = 17$.

(D) $|z| = 4$.

Ví dụ 49 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019). Cho số phức $z = (1 - 2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\frac{1}{z}$.

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\sqrt{5}$.

(C) $\frac{1}{25}$.

(D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

.....

Ví dụ 50 (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019). Cho số phức $z = (1 - i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là:

(A) 2.

(B) -2.

(C) 4.

(D) -2i.

.....

Ví dụ 51 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019). Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

(A) $w = \frac{8}{3}$.

(B) $w = \frac{8}{3} + i$.

(C) $w = \frac{10}{3}$.

(D) $w = \frac{10}{3} + i$.

.....

Ví dụ 52 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019). Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $M(-1; -2)$.

(B) $P(-2; 1)$.

(C) $N(2; 1)$.

(D) $Q(1; 2)$.

.....

 **Ví dụ 53 (Chuyên Bắc Giang 2019).** Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

☐ (A) 3.

☐ (B) 5.

☐ (C) 1.

☐ (D) 2.

 **Ví dụ 54 (Chuyên KHTN 2019).** Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là sai?

☐ (A) $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. ☐ (B) $z \cdot \bar{z}$ là số thực. ☐ (C) $z + \bar{z}$ là số thực. ☐ (D) $z - \bar{z}$ là số ảo.

 **Ví dụ 55 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).** Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

☐ (A) $10i$.

☐ (B) $-10i$.

☐ (C) $11 + 8i$.

☐ (D) $11 - 10i$.

 **Ví dụ 56 (THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019).** Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1 + i)\bar{z} = 3 - 5i$.

☐ (A) $M(-1; 4)$.

☐ (B) $M(-1; -4)$.

☐ (C) $M(1; 4)$.

☐ (D) $M(1; -4)$.

✎ Ví dụ 57 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019). Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ (A) $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
 ☐ (B) $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
 ☐ (C) $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.
 ☐ (D) $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

✎ Ví dụ 58 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019). Cho số phức $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy .

- ☐ (A) $(1; 4)$.
 ☐ (B) $(-1; 4)$.
 ☐ (C) $(-1; -4)$.
 ☐ (D) $(1; -4)$.

✎ Ví dụ 59 (Chuyên Hạ Long 2019). Cho $z_1 = 2 + 4i, z_2 = 3 - 5i$. Xác định phần thực của $w = z_1 \cdot \bar{z_2}^2$

- ☐ (A) -120 .
 ☐ (B) -32 .
 ☐ (C) 88 .
 ☐ (D) -152 .

✎ Ví dụ 60 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- ☐ (A) $M(-1; 1)$.
 ☐ (B) $M(-1; -1)$.
 ☐ (C) $M(1; 1)$.
 ☐ (D) $M(1; -1)$.

 **Ví dụ 61 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).** Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 4 - 3i$. Môđun của z bằng

(A) $\frac{5}{4}$.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

 **Ví dụ 62 (THPT Ngô Quyền-Quảng Ninh-2018).** Cho $z = \frac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

(A) $\frac{2x-4}{2}$.

(B) $\frac{4x+2}{2}$.

(C) $\frac{4x-2}{x^2+1}$.

(D) $\frac{2x+6}{x^2+1}$.

Dạng 1.16. Phương trình bậc hai trên tập số phức

Xét phương trình bậc hai với $a \neq 0$ có: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì (*) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì (*) có hai nghiệm phân biệt: $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \vee z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.
- Lưu ý

– Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

– Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức w và tìm như sau:

– Đặt $w = \sqrt{z} = \sqrt{x + yi} = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$- w^2 = x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}.$$

– Giải hệ này với $a, b \in \mathbb{R}$ sẽ tìm được a và $b \Rightarrow w = \sqrt{z} = a + bi$

✍ Ví dụ 1 (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An -2019). Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $10\sqrt{3}$.

(B) $5\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{10}$.

(D) 20.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 2 (SGD và ĐT Đà Nẵng 2019). Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ là

(A) $1 + 2i$.

(B) $-1 + 2i$.

(C) $-1 - 2i$.

(D) $1 - 2i$.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 3 (Mã 101-2020 Lần 1). Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

(A) $N(-2; 2)$.

(B) $M(4; 2)$.

(C) $P(4; -2)$.

(D) $Q(2; -2)$.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 4 (Mã 103-2020 Lần 1). Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

(A) $P(-1; -3)$.

(B) $M(-1; 3)$.

(C) $N(3; -3)$.

(D) $Q(3; 3)$.

.....
.....
.....

.....

✎ Ví dụ 5 (Mã 104-2020 Lần 1). Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

- ☐ (A) $M(3; -3)$.
 ☐ (B) $P(-1; 3)$.
 ☐ (C) $Q(1; 3)$.
 ☐ (D) $N(-1; -3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6 (Mã 102-2020 Lần 2). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- ☐ (A) $\sqrt{3}$.
 ☐ (B) $2\sqrt{3}$.
 ☐ (C) 6.
 ☐ (D) 3.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7 (Mã 103-2020 Lần 2). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- ☐ (A) 2.
 ☐ (B) 4.
 ☐ (C) $2\sqrt{2}$.
 ☐ (D) $\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8 (Mã 104-2020 Lần 2). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- ☐ (A) 3.
 ☐ (B) $2\sqrt{3}$.
 ☐ (C) $\sqrt{3}$.
 ☐ (D) 6.

.....

.....

✎ Ví dụ 9 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

- (A) 2. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) 10.

✎ Ví dụ 10 (Mã 104 2017). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- (A) $T = 8$. (B) 4. (C) $T = \sqrt{2}$. (D) $T = 2$.

✎ Ví dụ 11 (Mã 123 2017). Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm.

- (A) $z^2 + 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (C) $z^2 + 2z - 3 = 0$. (D) $z^2 - 2z - 3 = 0$.

✎ Ví dụ 12 (Mã 110 2017). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- (A) $P = \frac{2}{3}$. (B) $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

✎ Ví dụ 13 (Mã 102-2019). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- (A) 36. (B) 8. (C) 28. (D) 18.

✎ Ví dụ 14 (Mã 104-2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- (A) 2. (B) 8. (C) 16. (D) 10.

✎ Ví dụ 15 (Đề Tham Khảo 2017). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

- (A) $P = 2$. (B) $P = -1$. (C) $P = 0$. (D) $P = 1$.

✎ Ví dụ 16 (Đề Tham Khảo 2019). Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng:

- (A) 10. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) 3.

✎ Ví dụ 17 (Mã 105 2017). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $-\frac{1}{6}$.

(C) 6.

(D) $\frac{1}{12}$.

✎ Ví dụ 18 (Đề Tham Khảo 2018). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng:

(A) $3\sqrt{2}$.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) 3.

(D) $\sqrt{3}$.

✎ Ví dụ 19 (Mã 103-2019). Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 16.

(B) 26.

(C) 6.

(D) 8.

✎ Ví dụ 20 (Mã 101-2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng:

(A) 16.

(B) 56.

(C) 20.

(D) 26.

✎ Ví dụ 21 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) $10\sqrt{3}$. (B) $5\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) 20.

✎ Ví dụ 22 (Chuyên Sơn La 2019). Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1| \cdot |z_2|$ bằng

- (A) 5. (B) $\frac{5}{2}$. (C) 10. (D) 20.

✎ Ví dụ 23. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 = -3$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) 6. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$.

✎ Ví dụ 24 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019). Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị $|z_1 - z_2|$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) 8. (D) 6.

Ví dụ 25. Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$.

Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = \frac{z}{\bar{z}}$.

(A) $\frac{7}{5}$.

(B) $\frac{1}{5}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

Ví dụ 26 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + i(z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1)$.

(A) $w = -\frac{4}{5} + 20i$.

(B) $w = \frac{4}{5} + 20i$.

(C) $w = 4 + 20i$.

(D) $w = 20 + \frac{4}{5}i$.

Ví dụ 27. Với các số thực a, b biết phương trình $z^2 + 8az + 64b = 0$ có nghiệm phức $z_0 = 8 + 16i$. Tính môđun của số phức $w = a + bi$

(A) $|w| = \sqrt{19}$.

(B) $|w| = \sqrt{3}$.

(C) $|w| = \sqrt{7}$.

(D) $|w| = \sqrt{29}$.

Ví dụ 28 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019). Phương trình $z^2 + a.z + b = 0$, với a, b là các số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm.

Tính $a - b$?

(A) -2 .

(B) -4 .

(C) 4 .

(D) 0 .

 **Ví dụ 29 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_2} \cdot z_1$ bằng

- (A) 2. (B) 10. (C) $2i$. (D) $10i$.

 **Ví dụ 30.** Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1 |z_2| + z_2 |z_1|$ bằng:

- (A) 2. (B) 6. (C) $3\sqrt{6}$. (D) $\sqrt{6}$.

 **Ví dụ 31 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 29 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4 + |z_2|^4$.

- (A) 841. (B) 1682. (C) 1282. (D) 58.

 **Ví dụ 32 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).** Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- (A) $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$. (B) $P = \frac{2}{3}$. (C) $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

✎ Ví dụ 33 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) $T = \frac{2}{3}$. (B) $T = \frac{8}{3}$. (C) $T = \frac{4}{3}$. (D) $T = -\frac{11}{9}$.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1.17. Phương trình bậc hai trên tập số phức

Câu 1 (Đề Minh Họa 2017). Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

- (A) $T = 2 + 2\sqrt{3}$. (B) $T = 4$. (C) $T = 2\sqrt{3}$. (D) $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 2 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Tính modun của số phức $w = b + ci$, $b, c \in \mathbb{R}$ biết số phức $\frac{i^8 - 1 - 2i}{1 - i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.

- (A) 2. (B) 3. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 3 (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019).

Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

- (A) Là tam giác đều. (B) Là tam giác vuông.
(C) Là tam giác cân, không đều. (D) Là tam giác tù.

Câu 4 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ có các nghiệm z_1, z_2 đều không là số thực. Tính $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ theo a, b, c

- (A) $P = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$. (B) $P = \frac{2c}{a}$. (C) $P = \frac{4c}{a}$. (D) $P = \frac{2b^2 - 4ac}{a^2}$.

Câu 5 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh -2019).

Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S

- (A) $S = 6$. (B) $S = 10$. (C) $S = -3$. (D) $S = 7$.

Câu 6 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019).

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

- (A) $S = -6$. (B) $S = 6$. (C) $S = -5$. (D) $S = 5$.

Câu 7. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .

- (A) 20. (B) 12. (C) 14. (D) 8.

Câu 8 (Sở GD Kon Tum 2019). Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $M = z^{2019} + z^{2018} + \frac{1}{z^{2019}} + \frac{1}{z^{2018}} + 5$ bằng

- (A) 5. (B) 2. (C) 7. (D) -1.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng?

- (A) 2^{1009} . (B) 2^{1010} . (C) 0. (D) -2^{1010} .

Câu 10. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$, có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB .

- (A) $8\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 11 (Chu Văn An-Hà Nội-2019).

Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w + i$ và $2w - 1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a + b$ bằng

- (A) $\frac{5}{9}$. (B) $-\frac{5}{9}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

Câu 12. Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- (A) 4. (B) $4 - 2\sqrt{3}$. (C) $3 + 2\sqrt{2}$. (D) 3.

Câu 13. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng

- (A) $\sqrt{3}$. (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 14 (SGD và ĐT Đà Nẵng 2019).

Cho phương trình $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ (với phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy . Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P = c + 2d$.

- (A) $P = 18$. (B) $P = -10$. (C) $P = -14$. (D) $P = 22$.

Câu 15 (Đề thử nghiệm 2017). Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\frac{3}{2} < |z| < 2$. (B) $|z| > 2$. (C) $|z| < \frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Dạng 1.18. Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K

- Bước 1. Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z, \bar{z}, |z|$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x, y$.
- Lưu ý: Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z = x + y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó, ta cần nhớ:
 - Môđun của số phức $z = x + y.i$ là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{thực})^2 + (\text{ảo})^2}$.
 - Số phức liên hợp của $z = x + y.i$ là $\bar{z} = x - y.i$ (ngược dấu ảo).
 - Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1.i$ và $z_2 = x_2 + y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \text{ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo)}$$

Câu 1 (Mã 104 2018). Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = -1; y = -1$. (B) $x = -1; y = 1$. (C) $x = 1; y = -1$. (D) $x = 1; y = 1$.

Câu 2 (Mã 105 2017). Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

- (A) $x = \sqrt{2}, y = 2$. (B) $x = -\sqrt{2}, y = 2$. (C) $x = 0, y = 2$. (D) $x = \sqrt{2}, y = -2$.

Câu 3 (Mã 101 2018). Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 1; y = -1$. (B) $x = 1; y = -3$. (C) $x = -1; y = -3$. (D) $x = -1; y = -1$.

Câu 4 (Mã 104-2019). Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z + 3 + 16i = 2(\bar{z} + i)$. Môđun của z bằng

- (A) $\sqrt{13}$. (B) 5. (C) $\sqrt{5}$. (D) 13.

Câu 5 (Mã 103-2019). Cho số z thỏa mãn $(2 + i)z - 4(\bar{z} - i) = -8 + 19i$. Môđun của z bằng

- (A) 13. (B) 5. (C) $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 6 (Mã 102 2018). Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 2; y = -2$. (B) $x = 2; y = -1$. (C) $x = -2; y = -2$. (D) $x = -2; y = -1$.

Câu 7 (ĐỀ Tham Khảo -2019). Tìm các số thực a, b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = 0, b = 1$. (B) $a = 1, b = 2$. (C) $a = 0, b = 2$. (D) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

Câu 8 (Mã 103 2018). Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 2; y = 4$. (B) $x = -2; y = 0$. (C) $x = 2; y = 0$. (D) $x = -2; y = 4$.

Câu 9 (Mã 102-2019). Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$ Môđun của z bằng

- (A) 3. (B) $\sqrt{5}$. (C) 5. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 10 (Mã 101-2019). Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$. Môđun của z bằng

- (A) $\sqrt{3}$. (B) 3. (C) 5. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 11 (THPT Cẩm Giàng 2 Năm 2019).

Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = 1; y = -3$. (B) $x = -1; y = -3$. (C) $x = -1; y = -1$. (D) $x = 1; y = -1$.

Câu 12. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = -1, y = -1$. (B) $x = 1, y = 1$. (C) $x = -1, y = 1$. (D) $x = 1, y = -1$.

Câu 13 (Chuyên Sơn La 2019). Tìm các số thực x và y thỏa mãn $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$, 1 với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = \frac{3}{2}, y = -2$. (B) $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{4}{3}$. (C) $x = 1, y = \frac{4}{3}$. (D) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}$.

Câu 14 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$

- (A) $P = 1$. (B) $P = -\frac{1}{2}$. (C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = -1$.

Câu 15 (Chuyên KHTN -2019). Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z + 4 - 3i = 13 + 4i$. Môđun của z bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{10}$.

Câu 16 (HSG Bắc Ninh 2019). Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 2i)\bar{z} + z = 3 - 4i$. Tính giá trị của biểu thức $S = 3x - 2y$.

- (A) $S = -12$. (B) $S = -11$. (C) $S = -13$. (D) $S = -10$.

Câu 17 (Sở Bình Phước 2019). Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1 - i)\bar{z} = -2i$ bằng

- (A) 6. (B) -2. (C) 2. (D) -6.

Câu 18 (Sở Bình Phước 2019). Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a + bi)i - 2a = 1 + 3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a - b$ bằng

- (A) 4. (B) -10. (C) -4. (D) 10.

Câu 19 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$

- (A) $P = 1$. (B) $P = -\frac{1}{2}$. (C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = -1$.

Câu 20 (Chuyên Hạ Long -2019). Tìm số phức z biết $4z + 5\bar{z} = 27 - 7i$.

- (A) $z = -3 + 7i$. (B) $z = -3 - 7i$. (C) $z = 3 - 7i$. (D) $z = 3 + 7i$.

Câu 21 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Môđun của số phức $w = (z + 1)\bar{z}$ bằng.

- (A) 2. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) 4.

Câu 22 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = -3, b = 1$. (B) $a = 3, b = -1$. (C) $a = -3, b = -1$. (D) $a = 3, b = 1$.

Câu 23. Cho hai số phức $z_1 = m + 1 - 2i$ và $z_2 = 2 - (m + 1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1 \cdot z_2 - 8 + 8i$ là một số thực.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 24 (Chuyên Bắc Giang 2019). Tìm môđun của số phức z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 25. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) + \bar{z}(1 - i) + 4 - i = 0$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Dạng 1.19. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

Bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước?

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

a) Mối liên hệ giữa x và y

1. $Ax + By + C = 0$

2. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

3. $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$

4. $R_1^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R_2^2$

5. $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

6. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ với $MF_1 + MF_2 = 2a$ và $F_1F_2 = 2c < 2a$.

7. $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ với $|MF_1 - MF_2| = 2a$ và $F_1F_2 = 2c > 2a$.

8. $MA = MB$

b) Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$

1. Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$

2. Là đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Là hình tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

4. Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .

5. Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

6. Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b > 0)$.

7. Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.

8. Là đường trung trực đoạn thẳng AB .

Lưu ý: Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

- Trực tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn tính chất K .
- Gián tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f(z, \bar{z}, |z|) = 0$

1 Loại 1. Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn

Câu 1 (Mã 102 2018). Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

- (A) $\frac{9}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2 (Mã 103 2018). Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Câu 3 (Mã 104 2019). Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{5 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) 44. (B) 52. (C) $2\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{11}$.

Câu 4 (Mã 104 2018). Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

- (A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 5 (Đề Minh Họa 2017). Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

- (A) $r = 22$. (B) $r = 4$. (C) $r = 5$. (D) $r = 20$.

Câu 6 (Đề Tham Khảo 2019). Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- (A) $(1; 1)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(-1; -1)$. (D) $(1; -1)$.

Câu 7 (Mã 101 2018). Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8 (Mã 101 2019). Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{26}$. (B) $\sqrt{34}$. (C) 26. (D) 34.

Câu 9 (Mã 102-2019). Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $2\sqrt{5}$.

(B) 20.

(C) 12.

(D) $2\sqrt{3}$.

Câu 10 (Mã 103-2019). Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \frac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $\sqrt{10}$.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) 2.

(D) 10.

Câu 11 (THPT Gia Lộc Hải Dương -2019).

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

(A) $I(3; -2)$.

(B) $I(-3; 2)$.

(C) $I(3; 2)$.

(D) $I(-3; -2)$.

Câu 12 (ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TPHCM 2019).

Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ là

(A) một đường thẳng.

(B) một đường tròn.

(C) một elip.

(D) một điểm.

Câu 13 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho số phức z thỏa $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z + i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

(A) $I(2; -3)$.

(B) $I(1; 1)$.

(C) $I(0; 1)$.

(D) $I(1; 0)$.

Câu 14 (Chuyên Sơn La 2019). Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(1; 1)$.

(B) $(0; -1)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $(-1; 0)$.

Câu 15 (Quang Trung Đồng Đa Hà Nội -2019).

Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{i+2} \right| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

(A) $r = 1$.

(B) $r = \sqrt{5}$.

(C) $r = 2$.

(D) $r = \sqrt{3}$.

Câu 16 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 3$ là

(A) đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 9$.

(B) đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$.

(C) đường tròn tâm $I(-1; -2)$, bán kính $R = 3$.

(D) đường thẳng có phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

Câu 17 (Sở Thanh Hóa 2019). Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

(A) Đường tròn tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(B) Đường tròn tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(C) Đường tròn tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

(D) Đường tròn tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2; 0); B(0; 1)$.

Câu 18 (Chuyên Bắc Giang 2019). Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$.

(A) Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(B) Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(C) Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(D) Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = 4$ là đường cong có phương trình

(A) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

(B) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

(C) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$.

(D) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$.

Câu 20 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019).

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

(A) $I(2; -1); R = 4$. (B) $I(2; -1); R = 2$. (C) $I(-2; -1); R = 4$. (D) $I(-2; -1); R = 2$.

Câu 21 (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019).

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

(A) $I(-1; 1), R = 4$. (B) $I(-1; 1), R = 2$. (C) $I(1; -1), R = 2$. (D) $I(1; -1), R = 4$.

Câu 22 (Chuyên KHTN 2019). Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z - 5 + i| = 2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

(A) $I(2; -3), R = \sqrt{2}$. (B) $I(2; -3), R = 2$. (C) $I(-2; 3), R = \sqrt{2}$. (D) $I(-2; 3), R = 2$.

Câu 23 (Chuyên KHTN -2019). Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

(A) 1.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{2}$.

(D) 2.

Câu 24 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019).

Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

(A) 4.

(B) 6.

(C) 9.

(D) 10.

Câu 25 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $w = 1 + \bar{z}$ là

- (A) Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.
 (B) Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.
 (C) Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.
 (D) Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 26 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w = i + (2 - i)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

- (A) $r = \sqrt{5}$. (B) $r = 10$. (C) $r = 20$. (D) $r = 2\sqrt{5}$.

Câu 27. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{13}$. (B) $\sqrt{11}$. (C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{8})z + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- (A) 9. (B) 36. (C) 6. (D) 3.

Câu 29. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

- (A) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$. (B) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.
 (C) $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 9$. (D) $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Câu 30 (Chuyên KHTN-2018). . Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

- (A) $I(-2; -1); R = 4$. (B) $I(-2; -1); R = 2$.
 (C) $I(2; -1); R = 4$. (D) $I(2; -1); I(2; -1)$.

Câu 31 (Toán Học Tuổi Trẻ-2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - i)\bar{z} + 2i$ là

- (A) Một đường tròn. (B) Một đường thẳng.
 (C) Một Elip. (D) Một parabol hoặc hyperbol.

Câu 32 (Đồng Tháp 2018). Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |1 - i - 2z|$ là đường tròn (C) . Tính bán kính R của đường tròn (C)

- (A) $R = \frac{10}{9}$. (B) $R = 2\sqrt{3}$. (C) $R = \frac{7}{3}$. (D) $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 33 (SGD-Hà Tĩnh-2018). Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

- (A) 3. (B) $6\sqrt{2}$. (C) 6. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 34 (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018).

Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z - 3i + 5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

- (A) $I(-6; -4), R = 2\sqrt{5}$. (B) $I(6; 4), R = 10$.
(C) $I(6; 4), R = 2\sqrt{5}$. (D) $I(-6; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 35 (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2018).

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

- (A) 7. (B) 20. (C) $2\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{7}$.

Câu 36 (SGD Thanh Hóa-2018). Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

- (A) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. (B) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.
(C) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$. (D) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Câu 37 (THPT Thái Phiên-Hải Phòng-2018).

Xét số phức z thỏa mãn $|z - 3i + 4| = 3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (12 - 5i)\bar{z} + 4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = 13$. (B) $r = 39$. (C) $r = 17$. (D) $r = 3$.

Câu 38 (THPT Thực Hành-TPHCM-2018).

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 1 - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = 2$. (B) $r = 1$. (C) $r = 4$. (D) $r = \sqrt{2}$.

Câu 39 (THPT Lê Thủy-Quảng Bình 2017).

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + m - 1 + \sqrt{3}i| = 4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy .

- (A) $m = -5; m = 3$. (B) $m = 5; m = -3$. (C) $m = -3$. (D) $m = 5$.

Câu 40 (Cụm 4 HCM 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = 2$. (B) $r = 4$. (C) $r = \sqrt{2}$. (D) $r = 2\sqrt{2}$.

Câu 41 (Chuyên Lương Thế Vinh-Hà Nội -2018).

Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 18. (B) 20. (C) 10. (D) 17.

Câu 42 (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một hình tròn. (C) Một đường tròn. (D) Một đường elip.

Câu 43 (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019).

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$ và $|z| = 1$

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Câu 44 (SGD Điện Biên-2019). Xét các số phức z thỏa mãn $(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

- (A) $(-1; -2)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(1; -2)$.

Câu 45 (SGD Bắc Ninh 2019). Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 1 + 2i| = 1$ là

- (A) đường tròn $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$. (B) đường tròn $I(-1; -2)$, bán kính $R = 1$.
(C) đường tròn $I(-1; 2)$, bán kính $R = 1$. (D) đường tròn $I(1; -2)$, bán kính $R = 1$.

Câu 46 (Sở Hà Nam-2019). Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Tổng $a + b + c$ bằng

- (A) 9. (B) 3. (C) 2. (D) 7.

Câu 47 (Ngô Quyền-Hải Phòng 2019).

Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 1| = 2$ Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là đường tròn có bán kính bằng R Tính R

- (A) $R = 8$. (B) $R = 2$. (C) $R = 16$. (D) $R = 4$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- (A) $5\sqrt{13}$. (B) $5\sqrt{17}$. (C) $5\sqrt{10}$. (D) $5\sqrt{5}$.

Câu 49 (SGD Hưng Yên 2019). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = \sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z + i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = \sqrt{5}$. (B) $r = 10$. (C) $r = 5$. (D) $r = 2\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1 - i)(z + 1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

- (A) 5. (B) 7. (C) 1. (D) 3.

Câu 51 (SP Đồng Nai-2019). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

- (A) $I(0; 1)$. (B) $I(0; -1)$. (C) $I(-1; 0)$. (D) $I(1; 0)$.

2 Loại 2. Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng

Câu 52 (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019).

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2| = |z - i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A) $4x + 2y + 3 = 0$. (B) $2x + 4y + 13 = 0$. (C) $4x - 2y + 3 = 0$. (D) $2x - 4y + 13 = 0$.

Câu 53 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |z + 2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z .

- (A) là đường thẳng $3x + y + 1 = 0$. (B) là đường thẳng $3x - y + 1 = 0$.
(C) là đường thẳng $3x + y - 1 = 0$. (D) là đường thẳng $3x - y - 1 = 0$.

Câu 54. Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = -x + 1$. (C) $y = -x - 1$. (D) $y = x - 1$.

Câu 55 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |\bar{z} + 1 + 2i|$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $x - 2y + 1 = 0$. (B) $x + 2y = 0$. (C) $x - 2y = 0$. (D) $x + 2y + 1 = 0$.

Câu 56. Xét các số phức z thỏa mãn $z(\bar{z} - 2 + i) + 4i - 1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d . Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

- (A) 8. (B) 4. (C) 2. (D) 10.

Câu 57 (Đề Thi Công Bằng KHTN -2019).

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2| = |z - i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A) $4x + 2y + 3 = 0$. (B) $2x + 4y + 13 = 0$. (C) $4x - 2y + 3 = 0$. (D) $2x - 4y + 13 = 0$.

Câu 58 (Liên Trường-Nghệ An-2018).

Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1| = |z - 2 + 3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- (A) Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$.
 (B) Đường thẳng có phương trình $2x - 6y + 12 = 0$.
 (C) Đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.
 (D) Đường thẳng có phương trình $x - 5y - 6 = 0$.

Câu 59 (Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM-2018).

Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left| \frac{(12 - 5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$.

- (A) $d : 6x + 4y - 3 = 0$. (B) $d : x + 2y - 1 = 0$.
 (C) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$. (D) $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

Câu 60 (SGD BRVT-2018). Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

- (A) $x - y + 5 = 0$. (B) $x - y + 2 = 0$. (C) $x + y - 2 = 0$. (D) $x + y + 1 = 0$.

Câu 61. Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

- (A) $d(d_1, d_2) = 1$. (B) $d(d_1, d_2) = 6$. (C) $d(d_1, d_2) = 2$. (D) $d(d_1, d_2) = 4$.

Câu 62. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ là?

- (A) Parabol $y^2 = 4x$. (B) Đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$.
 (C) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4 = 0$. (D) Elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Câu 63. Cho số phức z thỏa: $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

- (A) Một đường thẳng có phương trình: $-20x + 32y + 47 = 0$.
 (B) Một đường có phương trình: $3y^2 + 20x + 2y - 20 = 0$.
 (C) Một đường thẳng có phương trình: $20x + 16y + 47 = 0$.
 (D) Một đường thẳng có phương trình: $20x - 16y - 47 = 0$.

Câu 64 (SGD Hưng Yên 2019). Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

- (A) Hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x$.
 (B) Trục Ox .
 (C) Trục Oy .
 (D) Hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x$, bỏ đi điểm $O(0; 0)$.

Câu 65 (SGD Bến Tre 2019). Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $4x - 2y - 1 = 0$. (B) $4x - 6y - 1 = 0$. (C) $4x + 2y - 1 = 0$. (D) $4x - 2y + 1 = 0$.

Câu 66 (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019).

Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2 + z| = |z - i|$.

- (A) Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$. (B) Điểm $M(-1; 1/2)$.
(C) Đường thẳng $2x + y + 3 = 0$. (D) Đường thẳng $4x + 2y - 3 = 0$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

- (A) $20x - 16y - 47 = 0$. (B) $20x + 6y - 47 = 0$.
(C) $20x + 16y + 47 = 0$. (D) $20x + 16y - 47 = 0$.

Câu 68 (Kim Liên-Hà Nội 2019). Cho số phức thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- (A) $x + 7y + 9 = 0$. (B) $x + 7y - 9 = 0$. (C) $x - 7y - 9 = 0$. (D) $x - 7y + 9 = 0$.

3 Loại 3. Tập hợp điểm biểu diễn là đường conic

Câu 69 (Sở Bình Phước 2019). Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

- (A) Một điểm. (B) Một đường tròn. (C) Một đường thẳng. (D) Một Parabol.

Câu 70 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

- (A) Một đường elip. (B) Một đường parabol.
(C) Một đoạn thẳng. (D) Một đường tròn.

Câu 71. Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z - 1 + i}{(z + \bar{z})i + 1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\frac{z}{2}$ là parabol có tọa độ đỉnh

- (A) $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. (B) $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. (C) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. (D) $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 72 (Chuyên KHTN 2019). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

- (A) 15π . (B) 12π . (C) 20π . (D) Đáp án khác.

Câu 73 (CHUYÊN VINH 2017). Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z + i| = |2\bar{z} + -z + 3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một parabol. (C) Một elip. (D) Một đường tròn.

Câu 74 (Sở Bình Phước 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

- (A) $(C) : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$. (B) $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.
(C) $(E) : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$. (D) $(C) : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Câu 75 (THPT Nguyễn Trãi 2017). Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là hình gì?

- (A) Một đường tròn. (B) Một đường Parabol.
(C) Một đường Elip. (D) Một đường thẳng.

Câu 76 (THPT Hai Bà Trưng- Huế 2017).

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + 4| + |z - 4| = 10$.

- (A) Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
(B) Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 12$.
(C) Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0; 0)$ và có bán kính $R = 4$.
(D) Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 77 (Chuyên Bến Tre 2017). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + 4| + |z - 4| = 10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

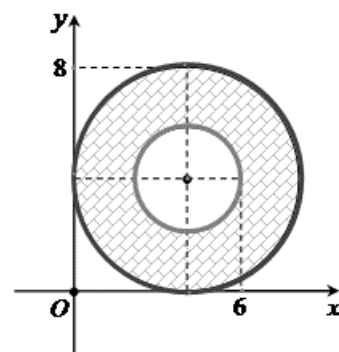
- (A) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. (B) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. (C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. (D) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4 Loại 4. Tập hợp điểm biểu diễn là một miền

Câu 78.

Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- (A) $6 \leq |z| \leq 8$. (B) $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.
(C) $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$. (D) $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.



Câu 79 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một hình tròn. (C) Một đường tròn. (D) Một đường Elip.

Câu 80. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z + 4 - 4i| \leq 2$ là

- (A) Hình tròn tâm $I(4; -4)$, bán kính $R = 4$. (B) Hình tròn tâm $I(4; -4)$, bán kính $R = 2$.
(C) Hình tròn tâm $I(-4; 4)$, bán kính $R = 2$. (D) Hình tròn tâm $I(-4; 4)$, bán kính $R = 4$.

Câu 81 (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội -2019).

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

- (A) $S = 25\pi$. (B) $S = 8\pi$. (C) $S = 4\pi$. (D) $S = 16\pi$.

Câu 82 (THPT Thực Hành-TPHCM-2018).

Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

- (A) Cung (IV). (B) Cung (II). (C) Cung (III). (D) Cung (I).

Câu 83 (Sở Nam Định-2018). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0; 1]$. Tính diện tích S của (H)

- (A) $S = 32(6 - \pi)$. (B) $S = 16(4 - \pi)$. (C) $S = 256$. (D) $S = 64\pi$.

Câu 84 (Sở Yên Bái-2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

- (A) $S = 4\pi$. (B) $S = 25\pi$. (C) $S = 8\pi$. (D) $S = 16\pi$.

Câu 85 (Sở Hà Tĩnh 2017). Biết số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

- (A) 2π . (B) π^2 . (C) $\frac{\pi}{2}$. (D) π .

Câu 86 (Chuyên Võ Nguyên Giáp 2017).

Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

- (A) $\frac{3\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{4}$. (C) 6π . (D) 3π .

Câu 87 (Chuyên Thái Nguyên 2017).

Tập hợp các số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

- (A) 2π . (B) π . (C) 3π . (D) 4π .

Câu 88. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{z + 2\bar{z} - 3i}{z^2 + 2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i) = 3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

- (A) Góc phần tư thứ (IV). (B) Góc phần tư thứ (I).
(C) Góc phần tư thứ (II). (D) Góc phần tư thứ (III).

Câu 89 (TRẦN HƯNG ĐẠO-NB-2017).

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$ Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- (A) $S = 9\pi$. (B) $S = 12\pi$. (C) $S = 16\pi$. (D) $S = 25\pi$.

Câu 90 (THPT Hoàng Hoa Thám-Khánh Hòa-2017).

Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

- (A) 9π . (B) 16π . (C) 25. (D) 4π .

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

- (A) Một đường Parabol. (B) Một đường Elip.
(C) Một đoạn thẳng. (D) Một đường tròn.

Câu 92 (THPT Ngô Quyền-Ba Vì-Hải Phòng 2019).

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- (A) $S = 25\pi$. (B) $S = 9\pi$. (C) $S = 12\pi$. (D) $S = 16\pi$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

- (A) $4\pi - 4$. (B) $8\pi - 8$. (C) $2\pi - 4$. (D) $8\pi - 4$.

Dạng 5. Một số dạng toán khác

Câu 94 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 101).

Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$ Khi $|z + iw - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{221}}{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 3. (D) $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 95 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 102).

Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 5$?

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Câu 96 (THPT QUỐC GIA 2021 – ĐỢT 1 - Mã 102).

Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Câu 97 (THPT 2021 – Lần 1 – Mã 102).

Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\bar{w} + 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

- (A) $\sqrt{5}$. (B) $\frac{\sqrt{221}}{5}$. (C) 3. (D) $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 98. Các điểm A, B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy , G là trọng tâm tam giác OAB , biết $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 12$. Độ dài đoạn OG bằng

- (A) $4\sqrt{3}$. (B) $5\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Câu 99. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

- (A) 15π . (B) 12π . (C) 20π . (D) Đáp án khác.

Câu 100. Cho hai điểm A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì? (O là gốc tọa độ) Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

- (A) Vuông cân tại O . (B) Vuông tại O . (C) Đều. (D) Cân tại O .

Câu 101 (Sở Kon Tum 2019). Cho các số phức $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 + 4i, z_3 = -1 + i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A, B, C . Tính diện tích tam giác ABC .

- (A) $2\sqrt{17}$. (B) 12. (C) $4\sqrt{13}$. (D) 9.

Câu 102 (Chuyên Bắc Giang 2019).

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN , O là gốc tọa độ, (3 điểm O, M, N không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây luôn đúng?

- (A) $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$. (B) $|z_1 + z_2| = OI$.
(C) $|z_1 - z_2| = OM + ON$. (D) $|z_1 + z_2| = 2OI$.

Câu 103. Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

(A) $\frac{32}{3}$.

(B) $\frac{8}{3}$.

(C) 1.

(D) $\frac{4}{3}$.

Câu 104. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$; $1 - 2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

(A) $\sqrt{3}$.

(B) 2.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) 1.

Câu 105 (Chu Văn An-Hà Nội-2019).

Xét hai điểm A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1 + 3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

(A) 2.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) 4.

Câu 106 (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An-2019).

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$?

(A) $\{2; 2\sqrt{2}\}$.

(B) $[2; 2\sqrt{2}]$.

(C) $\{2\}$.

(D) $(2; 2\sqrt{2})$.

Câu 107 (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019).

Có bao nhiêu số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $|z + i| + |z - 3i| = |z + 4i| + |z - 6i|$ và $|z| \leq 10$.

(A) 12.

(B) 2.

(C) 10.

(D) 5.

Câu 108. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn: $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2 + 9z_2^2|$ bằng

(A) 18.

(B) $36\sqrt{3}$.

(C) $24\sqrt{3}$.

(D) $36\sqrt{2}$.

Câu 109 (SP Đồng Nai-2019). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$

(A) $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(B) $|b| = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

(C) $|b| = \frac{3}{8}$.

(D) $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

§ 1. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1 Cấp số cộng

- Một dãy số được gọi là cấp số cộng nếu số liền sau trừ số liền trước bằng một hằng số không thay đổi, hằng số không thay đổi đó được gọi là công sai

$$\blacksquare u_k - u_{k-1} = d$$

$$\blacksquare u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

$$\blacksquare u_n = u_1 + (n - 1)d$$

$$\blacksquare S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

2 Cấp số nhân

- Một dãy số được gọi là cấp số nhân nếu số liền sau chia số liền trước bằng một hằng số không thay đổi, hằng số không thay đổi đó được gọi là công bội q .

$$\blacksquare \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$$

$$\blacksquare u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$$

$$\blacksquare u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\blacksquare S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

✎ Ví dụ 1 (Mã 101-2020 Lần 1). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.

Giá trị của u_2 bằng

(A) 8.

(B) 9.

(C) 6.

(D) $\frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 2 (Mã 102-2020 Lần 1). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$.

Giá trị của u_2 bằng

☐ (A) 6.

☐ (B) 9.

☐ (C) 8.

☐ (D) $\frac{2}{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 3 (Mã 103-2020 Lần 1). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 4$.

Giá trị của u_2 bằng

☐ (A) 64.

☐ (B) 81.

☐ (C) 12.

☐ (D) $\frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 4 (Mã 104-2020 Lần 1). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$.

Giá trị của u_2 bằng

☐ (A) 64.

☐ (B) 81.

☐ (C) 12.

☐ (D) $\frac{4}{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5 (Mã 102-2020 Lần 2). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

☐ (A) 11.

☐ (B) $\frac{9}{2}$.

☐ (C) 18.

☐ (D) 7.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6 (Mã 103-2020 Lần 2). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

☐ A $\frac{8}{3}$.

☐ B 24.

☐ C 5.

☐ D 11.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7 (Mã 104-2020 Lần 2). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ công sai $d = 2$. Giá trị u_2 bằng

☐ A 14.

☐ B 9.

☐ C $\frac{7}{2}$.

☐ D 5.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

☐ A 3.

☐ B -4.

☐ C 4.

☐ D $\frac{1}{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 9. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$; $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ A 6.

☐ B 3.

☐ C 12.

☐ D -6.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 10.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_7 = -10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) 2.

☐ (B) 3.

☐ (C) -1.

☐ (D) -2.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 11.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 4$ và $d = 8$. Số hạng u_{20} của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) 156.

☐ (B) 165.

☐ (C) 12.

☐ (D) 245.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 12.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $d = -3$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) 26.

☐ (B) -26.

☐ (C) -105.

☐ (D) 105.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 13.** Cho cấp số cộng 2; 5; 8; 11; 14 Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) -3.

☐ (B) 3.

☐ (C) 2.

☐ (D) 14.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 14.** Công thức tính số hạng tổng quát của cấp số cộng với công sai d và số hạng đầu u_1 là

☐ (A) $u_n = nu_1 + n(n-1)d.$

☐ (B) $u_n = u_1 + (n-1)d.$

☐ (C) $u_n = u_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$

☐ (D) $u_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$

.....

 **Ví dụ 15.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 5; u_2 = 10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) $-5.$

☐ (B) $5.$

☐ (C) $2.$

☐ (D) $15.$

.....

 **Ví dụ 16.** Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

☐ (A) $1; -3; 9; -27; 54.$

☐ (B) $1; 2; 4; 8; 16.$

☐ (C) $1; -1; 1; -1; 1.$

☐ (D) $1; -2; 4; -8; 16.$

.....

 **Ví dụ 17.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_{10} bằng

☐ (A) $2^8.$

☐ (B) $2^9.$

☐ (C) $\frac{1}{2^{10}}.$

☐ (D) $\frac{37}{2}.$

.....

 **Ví dụ 18.** Xác định x để 3 số $x-1; 3; x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

☐ (A) $x = 2\sqrt{2}$.

☐ (B) $x = \sqrt{5}$.

☐ (C) $x = \sqrt{10}$.

☐ (D) $x = 3$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 19.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

☐ (A) $\frac{1}{3}$.

☐ (B) -2 .

☐ (C) 3 .

☐ (D) 2 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 20.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}; u_6 = 16$. Tìm q ?

☐ (A) $q = \pm 2$.

☐ (B) $q = 2$.

☐ (C) $q = -2$.

☐ (D) $q = \frac{33}{10}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 21.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 8$ và công bội $q = 3$. Số hạng đầu tiên u_1 của cấp số nhân đã cho bằng

☐ (A) 24 .

☐ (B) $\frac{8}{3}$.

☐ (C) 5 .

☐ (D) $\frac{3}{8}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 22.** Cho cấp số nhân có $u_1 = 3$, $q = -2$. Tính u_5

☐ A $u_5 = -6$.

☐ B $u_5 = -5$.

☐ C $u_5 = 48$.

☐ D $u_5 = -24$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 23.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_4 = -26$. Công sai của (u_n) bằng

☐ A -27 .

☐ B -9 .

☐ C -26 .

☐ D $\sqrt[3]{-26}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 24.** Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 21$. Tìm n ?

☐ A $n = 10$.

☐ B $n = 3$.

☐ C $n = 7$.

☐ D Không có giá trị của n .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 25.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_5 bằng

☐ A 15 .

☐ B 27 .

☐ C -26 .

☐ D 2816 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 26.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_2 = 2$ và $u_3 = 5$. Giá trị của u_5 bằng

(A) 12.

(B) 15.

(C) 11.

(D) 25.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 27.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị của u_6 bằng

(A) 32.

(B) 64.

(C) 42.

(D) -64.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 28.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_3 = -1$ và $u_4 = 2$. Công sai d bằng

(A) 3.

(B) -3.

(C) 5.

(D) 2.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 29.** Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3^n$. Công bội q bằng

(A) -3.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) ± 3 .

(D) 3.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 30.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Tổng của 2019 số hạng đầu bằng

(A) 4080 399.

(B) 4800 399.

(C) 4399 080.

(D) 8154 741.

 **Ví dụ 31.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ số hạng thứ 2019 của dãy là

(A) 4039.

(B) 4390.

(C) 4930.

(D) 4093.

 **Ví dụ 32.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

(A) 2.3^{2018} .

(B) 3.2^{2018} .

(C) 2.3^{2019} .

(D) 3.2^{2019} .

 **Ví dụ 33.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

(A) $q = 3$.

(B) $q = 5$.

(C) $q = \frac{3}{2}$.

(D) $q = \frac{2}{3}$.

 **Ví dụ 34.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

(A) 401.

(B) 403.

(C) 402.

(D) 404.

 **Ví dụ 35.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$; $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

☐ (A) 226.

☐ (B) 225.

☐ (C) 223.

☐ (D) 224.

 **Ví dụ 36.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$ bằng

☐ (A) $S_{10} = 110$.

☐ (B) $S_{10} = 100$.

☐ (C) $S_{10} = 21$.

☐ (D) $S_{10} = 19$.

 **Ví dụ 37.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

☐ (A) $q = 3$.

☐ (B) $q = 5$.

☐ (C) $q = \frac{3}{2}$.

☐ (D) $q = \frac{2}{3}$.

 **Ví dụ 38.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Khi đó u_5 bằng

☐ (A) 24.

☐ (B) 11.

☐ (C) 48.

☐ (D) 9.

Ví dụ 39. Cho cấp số cộng (u_n) , với $u_1 = 2, u_5 = 14$. Công sai của cấp số cộng là

(A) 3.

(B) -3.

(C) 4.

(D) -4.

Ví dụ 40. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 2, u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đó là

(A) -2.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 2.

Ví dụ 41. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3, d = -2$. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng đó là:

(A) -5.

(B) -15.

(C) 15.

(D) 5.

Ví dụ 42. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 2, u_6 = 32$. Công bội của cấp số nhân đó là

(A) 2.

(B) ± 2 .

(C) -2.

(D) $\pm \frac{1}{2}$.

 **Ví dụ 43.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5, q = 2$. Số hạng thứ 6 của cấp số nhân đó là

☐ (A) $\frac{1}{160}$.

☐ (B) 25.

☐ (C) 32.

☐ (D) 160.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 44.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) 4.

☐ (B) -4.

☐ (C) 8.

☐ (D) 3.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 45.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) 4.

☐ (B) -3.

☐ (C) 3.

☐ (D) 5.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 46.** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

☐ (A) -6.

☐ (B) 3.

☐ (C) 12.

☐ (D) 6.

.....

.....

.....

Ví dụ 47. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- (A) 10. (B) 6. (C) 4. (D) -6.

.....

Ví dụ 48. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$, $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 3. (B) -4. (C) 4. (D) $\frac{1}{3}$.

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 110 (Mã 120-2021-Lần 2). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- (A) $\frac{3}{7}$. (B) $\frac{7}{3}$. (C) -4. (D) 4.

Câu 111 (Đề minh họa 2022). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_2 bằng

- (A) 11. (B) 3. (C) $\frac{7}{4}$. (D) 28.

Câu 112 (Mã 101-2022). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là:

- (A) $q = \frac{1}{2}$. (B) $q = 2$. (C) $q = -2$. (D) $q = -\frac{1}{2}$.

Câu 113 (Mã 104-2022). Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n ($n \geq 2$) bằng

- (A) 3.2^n . (B) 3.2^{n+2} . (C) 3.2^{n+1} . (D) 3.2^{n-1} .

Câu 114. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 21. (B) ± 4 . (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 115. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và $u_2 = 8$. Giá trị của u_4 bằng

- (A) $\frac{512}{25}$. (B) $\frac{125}{512}$. (C) $\frac{625}{512}$. (D) $\frac{512}{125}$.

Câu 116. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_8 = 26$. Tìm công sai d .

- (A) $d = \frac{11}{3}$. (B) $d = \frac{10}{3}$. (C) $d = \frac{3}{10}$. (D) $d = \frac{3}{11}$.

Câu 117. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_3 = 26$. Tìm công sai d .

- (A) $d = \frac{11}{3}$. (B) $d = \frac{10}{3}$. (C) $d = \frac{3}{10}$. (D) $d = \frac{3}{11}$.

Câu 118. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_{99} bằng

- (A) 401. (B) 403. (C) 402. (D) 404.

Câu 119. Biết bốn số 5, x , 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

- (A) 50. (B) 70. (C) 30. (D) 80.

Câu 120. Cho ba số x , 5, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x , 4, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x - 2y|$ bằng

- (A) 8. (B) 9. (C) 6. (D) 10.

Câu 121. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tổng 16 số hạng đầu tiên bằng

- (A) 100. (B) 200. (C) 400. (D) 300.

§ 1. QUY TẮC ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- Quy tắc nhân: Để hoàn thành công việc cần chia ra giai đoạn $\Rightarrow$ Sử dụng quy tắc nhân.
- Quy tắc cộng: Để hoàn thành công việc bằng nhiều trường hợp $\Rightarrow$ Sử dụng quy tắc cộng.
- Hoán vị: Xếp n phần tử theo thứ tự $\Rightarrow$ Sử dụng hoán vị $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$
- Tổ hợp: Chọn k phần tử trong n phần tử tùy ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- Chỉnh hợp: Chọn k phần tử trong n phần tử và xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

 **Ví dụ 1 (Mã 101-2020 Lần 1).** Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 36.

(B) 720.

(C) 6.

(D) 1.

 **Ví dụ 2 (Mã 102-2020 Lần 1).** Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 7.

(B) 5040.

(C) 1.

(D) 49.

 **Ví dụ 3 (Mã 103-2020 Lần 1).** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

☐ (A) 1.

☐ (B) 25.

☐ (C) 5.

☐ (D) 120.

 **Ví dụ 4 (Mã 104-2020 Lần 1).** Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

☐ (A) 8.

☐ (B) 1.

☐ (C) 40320.

☐ (D) 64.

 **Ví dụ 5 (Mã 102-2020 Lần 2).** Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ?

☐ (A) 9.

☐ (B) 54.

☐ (C) 15.

☐ (D) 6.

 **Ví dụ 6 (Mã 103-2020 Lần 2).** Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ là

☐ (A) 7.

☐ (B) 12.

☐ (C) 5.

☐ (D) 35.

 **Ví dụ 7 (Mã 104-2020 Lần 2).** Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ?

☐ A 8.

☐ B 15.

☐ C 56.

☐ D 7.

 **Ví dụ 8.** Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

☐ A 14.

☐ B 48.

☐ C 6.

☐ D 8.

 **Ví dụ 9.** Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?

☐ A C_{10}^2 .

☐ B A_{10}^2 .

☐ C 10^2 .

☐ D 2^{10} .

 **Ví dụ 10.** Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

☐ A 2^7 .

☐ B A_7^2 .

☐ C C_7^2 .

☐ D 7^2 .

 **Ví dụ 11.** Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

☐ (A) 5^2 .

☐ (B) 2^5 .

☐ (C) C_5^2 .

☐ (D) A_5^2 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 12.** Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

☐ (A) C_8^2 .

☐ (B) 8^2 .

☐ (C) A_8^2 .

☐ (D) 2^8 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 13.** Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

☐ (A) A_6^2 .

☐ (B) C_6^2 .

☐ (C) 2^6 .

☐ (D) 6^2 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 14.** Trên mặt phẳng cho 2019 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ, khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ 2019 điểm đã cho?

☐ (A) 2^{2019} .

☐ (B) 2019^2 .

☐ (C) C_{2019}^2 .

☐ (D) A_{2019}^2 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 15.** Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Số cách chọn là

(A) 9.

(B) $C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$.

(C) C_{15}^3 .

(D) A_{15}^3 .

 **Ví dụ 16.** Một tổ có 12 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh trong tổ làm nhiệm vụ trực nhật.

(A) 132.

(B) 66.

(C) 23.

(D) 123.

 **Ví dụ 17.** Lớp 11A có 32 học sinh, giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra 3 học sinh trong đó một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó, một bạn làm sao đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn.

(A) 6.

(B) 3.

(C) C_{32}^3 .

(D) A_{32}^3 .

 **Ví dụ 18.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 120.

(B) 25.

(C) 15.

(D) 10.

 **Ví dụ 19.** Cần chọn 4 người đi công tác trong một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là:

☐ (A) C_{30}^4 .

☐ (B) A_{30}^4 .

☐ (C) 30^4 .

☐ (D) 4^{30} .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 20.** Cho tập hợp A có 20 phần tử. Hỏi A có bao nhiêu tập con gồm 6 phần tử?

☐ (A) C_{20}^6 .

☐ (B) 20.

☐ (C) P_6 .

☐ (D) A_{20}^6 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 21.** Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra từ hộp đó cùng lúc 3 quả cầu là:

☐ (A) 720.

☐ (B) 120.

☐ (C) 10^3 .

☐ (D) 3^{10} .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 22.** Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là

☐ (A) A_6^4 .

☐ (B) 10.

☐ (C) C_6^4 .

☐ (D) 6^4 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 23.** Tập hợp M có 12 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

☐ (A) $A_1^{2^8}$.

☐ (B) $A_1^{2^2}$.

☐ (C) $C_1^{2^2}$.

☐ (D) 12^2 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 24.** Trong một hộp bánh có 6 loại bánh nhân thịt và 4 loại bánh nhân đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 bánh để phát cho các em thiếu nhi?

☐ (A) A_{10}^6 .

☐ (B) $6!$.

☐ (C) 10^6 .

☐ (D) C_{10}^6 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 25.** Có bao nhiêu cách trao 4 phần quà khác nhau cho 4 học sinh?

☐ (A) 8.

☐ (B) 256.

☐ (C) 16.

☐ (D) 24.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 26.** Cho 3 cái quần và 4 cái áo. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cái quần hoặc một cái áo từ số quần áo đã cho?

☐ (A) $3 + 4$.

☐ (B) A_7^2 .

☐ (C) C_7^2 .

☐ (D) 3.4 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 27.** Từ một lớp có 14 học sinh nam và 16 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

☐ (A) 224.

☐ (B) 16.

☐ (C) 14.

☐ (D) 30.

.....

 **Ví dụ 28.** Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ có khả năng như nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp?

☐ (A) A_{35}^3 .

☐ (B) C_{15}^3 .

☐ (C) C_{20}^3 .

☐ (D) C_{35}^3 .

.....

 **Ví dụ 29.** Nam muốn qua nhà Lan để cùng Lan tới trường. Từ nhà Nam tới nhà Lan có 3 con đường, từ nhà Lan đến trường có 5 con đường. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến trường?

☐ (A) 8.

☐ (B) 243.

☐ (C) 15.

☐ (D) 10.

.....

 **Ví dụ 30.** Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

☐ (A) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

☐ (B) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$.

☐ (C) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

☐ (D) $A_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

.....

Ví dụ 31. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3 + 9A_n^2 = 1152$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Ví dụ 32. Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{x+1}^1 + 3C_{x+2}^2 = C_{x+1}^3$

(A) $x = 12$.

(B) $x = 9$.

(C) $x = 16$.

(D) $x = 2$.

Ví dụ 33. Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_n^2 \cdot C_n^{n-1} = 48$

(A) $n = 4$.

(B) $n = 3$.

(C) $n = 7$.

(D) $n = 12$.

Ví dụ 34. Có bao nhiêu các sắp xếp 10 bạn học sinh thành một hàng ngang ?

(A) P_{10} .

(B) C_{10}^1 .

(C) A_{10}^1 .

(D) $C_{10}^1 0$.

Ví dụ 35. Tính số các chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử ?

(A) 21.

(B) 2520.

(C) 5040.

(D) 120.

 **Ví dụ 36.** Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A ?

☐ (A) A_6^3 .

☐ (B) P_6 .

☐ (C) P_3 .

☐ (D) C_6^3 .

 **Ví dụ 37.** Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

☐ (A) 120.

☐ (B) 5.

☐ (C) 625.

☐ (D) 24.

 **Ví dụ 38.** Cho tập hợp M có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của M là

☐ (A) $A_3^{0^4}$.

☐ (B) 30^5 .

☐ (C) 30^5 .

☐ (D) $C_3^{0^5}$.

 **Ví dụ 39.** Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

☐ (A) 7^4 .

☐ (B) P_7 .

☐ (C) C_7^4 .

☐ (D) A_7^4 .

Ví dụ 40. Một tổ có 10 học sinh. Số cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ 2 chức vụ tổ trưởng và tổ phó là

☐ A C_{10}^2 .

☐ B A_{10}^8 .

☐ C 10^2 .

☐ D A_{10}^2 .

Ví dụ 41. Cho 20 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

☐ A 6840.

☐ B 400.

☐ C 1140.

☐ D 600.

Ví dụ 42. Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

☐ A 25.

☐ B 455.

☐ C 50.

☐ D 252.

Ví dụ 43. Số cách chọn 5 học sinh trong một lớp có 25 học sinh nam và 16 học sinh nữ là

☐ A $C_{25}^5 + C_{16}^5$.

☐ B C_{25}^5 .

☐ C A_{41}^5 .

☐ D C_{41}^5 .

 **Ví dụ 44.** Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 10 cạnh là

(A) 35.

(B) 120.

(C) 240.

(D) 720.

 **Ví dụ 45.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

(A) 60.

(B) 10.

(C) 120.

(D) 125.

 **Ví dụ 46.** Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là 2 trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là

(A) P_6 .

(B) C_6^2 .

(C) A_6^2 .

(D) 36.

 **Ví dụ 47.** Nếu tất cả các đường chéo của đa giác đều 12 cạnh được vẽ thì số đường chéo là:

(A) 121.

(B) 66.

(C) 132.

(D) 54.

Ví dụ 48. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

- (A) 14. (B) 48. (C) 6. (D) 8.

.....
.....
.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Mã 102-2021-Lần 2). Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây đúng?

- (A) $C_n^3 = \frac{(n-3)!}{n!}$. (B) $C_n^3 = \frac{3!(n-3)!}{n!}$. (C) $C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!}$. (D) $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$.

Câu 2 (Mã 101-2021-Lần 1). Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 4$, công thức nào dưới đây đúng?

- (A) $A_n^4 = \frac{(n-4)!}{n!}$. (B) $A_n^4 = \frac{4!}{(n-4)!}$. (C) $A_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}$. (D) $A_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!}$.

Câu 3 (Đề minh họa 2022). Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây đúng?

- (A) $P_n = n!$. (B) $P_n = n - 1$. (C) $P_n = (n - 1)!$. (D) $P_n = n$.

Câu 4 (Mã 102- 2022). Số các tổ hợp chập 3 của 12 phần tử là

- (A) 1728. (B) 220. (C) 1320. (D) 36.

Câu 5 (Mã 103- 2022). Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau?

- (A) 120. (B) 5. (C) 3125. (D) 1.

Câu 6. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

- (A) A_{30}^3 . (B) 3^{30} . (C) 10. (D) C_{30}^3 .

Câu 7. Cho một tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- (A) A_{10}^8 . (B) A_{10}^2 . (C) C_{10}^2 . (D) 10^2 .

Câu 8. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ

- (A) C_{38}^2 . (B) A_{38}^2 . (C) $C_{20}^2 C_{18}^1$. (D) $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Câu 9. Số véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác bằng

(A) P_6 .

(B) C_6^2 .

(C) A_6^2 .

(D) 36.

Câu 10. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 5^5 .

(B) $5!$.

(C) $4!$.

(D) 5.

Câu 11. Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

(A) 6^{10} .

(B) $6!$.

(C) A_{10}^6 .

(D) C_{10}^6 .

Câu 12. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ. Số cách chọn 6 người trong đó có đúng 2 nữ là

(A) 1078.

(B) 1414.

(C) 1050.

(D) 1386.

Câu 13. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất có 10 điểm, trên đường thẳng thứ hai có 15 điểm, có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho.

(A) 1725.

(B) 1050.

(C) 675.

(D) 1275.

§2. XÁC SUẤT

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1 Tính xác suất bằng định nghĩa

Công thức tính xác suất của biến cố A : $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

2 Tính xác suất bằng công thức

- Quy tắc cộng xác suất:

- Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Nếu các biến cố $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ xung khắc nhau thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

3 Công thức tính xác suất biến cố đối

- Xác suất của biến cố $\bar{A}$ của biến cố A là: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Quy tắc nhân xác suất:
 - Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1, A_2, A_3, \dots, A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_k)$$

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

✍ Ví dụ 1 (Đề minh họa 2022). Từ một hộp chứa 16 quả cầu gồm 7 quả màu đỏ và 9 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Xác suất để lấy được hai quả có màu khác nhau bằng

(A) $\frac{7}{40}$.

(B) $\frac{21}{40}$.

(C) $\frac{3}{10}$.

(D) $\frac{2}{15}$.

.....

✎ Ví dụ 2 (Mã 101-2022). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[40; 60]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

(A) $\frac{4}{7}$.

(B) $\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{3}{5}$.

(D) $\frac{3}{7}$.

.....

✎ Ví dụ 3 (Mã 102 - 2022). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[40; 60]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $\frac{4}{7}$.

(C) $\frac{3}{7}$.

(D) $\frac{3}{5}$.

.....

✎ Ví dụ 4 (Mã 103 - 2022). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[30; 50]$. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

(A) $\frac{11}{21}$.

(B) $\frac{8}{21}$.

(C) $\frac{13}{21}$.

(D) $\frac{10}{21}$.

.....

✎ Ví dụ 5 (Mã 102-2021-Lần 2). Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

Ⓐ $\frac{7}{34}$.

Ⓑ $\frac{9}{34}$.

Ⓒ $\frac{9}{17}$.

Ⓓ $\frac{8}{17}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6 (Mã 101-2021-Lần 1). Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

Ⓐ $\frac{7}{44}$.

Ⓑ $\frac{2}{7}$.

Ⓒ $\frac{1}{22}$.

Ⓓ $\frac{5}{12}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy 3 quả màu đỏ bằng

Ⓐ $\frac{1}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{6}$.

Ⓒ $\frac{2}{5}$.

Ⓓ $\frac{1}{30}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

Ⓐ $\frac{1}{6}$.

Ⓑ $\frac{1}{30}$.

Ⓒ $\frac{3}{5}$.

Ⓓ $\frac{2}{5}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

(A) $\frac{1}{22}$.

(B) $\frac{7}{44}$.

(C) $\frac{5}{12}$.

(D) $\frac{2}{7}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10 (Đề Tham Khảo 2021). Chọn ngẫu nhiên một số trong 15 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được số chẵn bằng?

(A) $\frac{7}{8}$.

(B) $\frac{8}{15}$.

(C) $\frac{7}{15}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11 (Mã 120-2021-Lần 2). Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số lẻ bằng

(A) $\frac{9}{19}$.

(B) $\frac{10}{19}$.

(C) $\frac{4}{19}$.

(D) $\frac{5}{19}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12 (Mã 101-2021-Lần 2). Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

(A) $\frac{10}{19}$.

(B) $\frac{5}{19}$.

(C) $\frac{4}{19}$.

(D) $\frac{9}{19}$.

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

- (A) $\frac{25}{42}$. (B) $\frac{5}{21}$. (C) $\frac{65}{126}$. (D) $\frac{55}{126}$.

Câu 2 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

- (A) $\frac{17}{42}$. (B) $\frac{41}{126}$. (C) $\frac{31}{126}$. (D) $\frac{5}{21}$.

Câu 3 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

- (A) $\frac{9}{35}$. (B) $\frac{16}{35}$. (C) $\frac{22}{35}$. (D) $\frac{19}{35}$.

Câu 4 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng lẻ bằng

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{13}{35}$. (C) $\frac{9}{35}$. (D) $\frac{2}{7}$.

Câu 5 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 6 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn lẻ bằng

- (A) $\frac{50}{81}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{5}{18}$. (D) $\frac{5}{9}$.

Câu 7 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ bằng

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{32}{81}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{32}{45}$.

Câu 8. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp số có ba chữ số khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn bằng

(A) $\frac{41}{81}$.

(B) $\frac{4}{9}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{16}{81}$.

Câu 9. Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{3}{20}$.

(C) $\frac{2}{15}$.

(D) $\frac{1}{5}$.

Câu 10. Cho đa giác đều 12 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $\frac{31}{55}$.

(C) $\frac{28}{55}$.

(D) $\frac{52}{55}$.

Câu 11. Từ một đội văn nghệ gồm 5 nam và 8 nữ cần lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Xác suất để trong 4 người được chọn đều là nam bằng

(A) $\frac{C_8^4}{C_{13}^4}$.

(B) $\frac{A_5^4}{C_8^4}$.

(C) $\frac{C_5^4}{C_{13}^4}$.

(D) $\frac{C_8^4}{A_{13}^4}$.

Câu 12. Một em bé có bộ 6 thẻ chữ, trên mỗi thẻ có ghi một chữ cái, trong đó có 3 thẻ chữ T, một thẻ chữ N, một thẻ chữ H và một thẻ chữ P. Em bé đó xếp ngẫu nhiên 6 thẻ đó thành một hàng ngang. Tính xác suất em bé xếp được thành dãy T N T H P T

(A) $\frac{1}{120}$.

(B) $\frac{1}{720}$.

(C) $\frac{1}{6}$.

(D) $\frac{1}{20}$.

Câu 13. Một chiếc hộp chứa 9 quả cầu gồm 4 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ và 2 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất 1 quả màu đỏ bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{19}{28}$.

(C) $\frac{16}{21}$.

(D) $\frac{17}{42}$.

Câu 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?

(A) 165.

(B) 1296.

(C) 343.

(D) 84.

Câu 15. Ban chỉ đạo phòng chống dịch Covid-19 của sở Y tế Nghệ An có 9 người, trong đó có đúng 4 bác sĩ. Chia ngẫu nhiên Ban đó thành ba tổ, mỗi tổ 3 người để đi kiểm tra công tác phòng dịch ở địa phương. Trong mỗi tổ, chọn ngẫu nhiên một người làm tổ trưởng. Xác suất để ba tổ trưởng đều là bác sĩ là

(A) $\frac{1}{42}$.

(B) $\frac{1}{21}$.

(C) $\frac{1}{14}$.

(D) $\frac{1}{7}$.

Câu 16. Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là

(A) $\frac{5}{38}$.

(B) $\frac{7}{38}$.

(C) $\frac{3}{38}$.

(D) $\frac{1}{114}$.

Câu 17. Một công ty may mặc có hai hệ thống máy chạy song song. Xác suất để hệ thống máy thứ nhất hoạt động tốt là 90%, xác suất để hệ thống máy thứ hai hoạt động tốt là 80%. Công ty

chỉ có thể hoàn thành đơn hàng đúng hạn nếu ít nhất một trong hai hệ thống máy hoạt động tốt. Xác suất để công ty hoàn thành đúng hạn là

- (A) 98%. (B) 2%. (C) 80%. (D) 72%.

Câu 18. Giải bóng chuyền VTV cup gồm 12 đội tham gia, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc cho thăm ngẫu nhiên và chia thành 3 bảng đấu A, B, C mỗi bảng 4 đội. Xác suất để ba đội Việt Nam nằm ở 3 bảng gần nhất với số nào dưới đây?

- (A) $\frac{11}{25}$. (B) $\frac{3}{20}$. (C) $\frac{39}{100}$. (D) $\frac{29}{100}$.

Câu 19. Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một dãy 5 ghế thẳng hàng (mỗi bạn ngồi một ghế). Tính xác suất để hai bạn A và B không ngồi cạnh nhau.

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

Câu 20. Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ nhóm 10 học sinh đó đi lao động. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh nữ.

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{17}{24}$. (C) $\frac{17}{48}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

- (A) 72000. (B) 64800. (C) 36000. (D) 60000.

Câu 22. Cho S là tập các số tự nhiên có 8 chữ số. Lấy một số bất kì của tập S . Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

- (A) $\frac{3}{8}$. (B) $\frac{1}{9}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{1}{18}$.

Câu 23. Đội học sinh giỏi trường trung học phổ thông chuyên bến tre gồm có 8 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là

- (A) $\frac{71131}{75582}$. (B) $\frac{35582}{3791}$. (C) $\frac{143}{153}$. (D) $\frac{71128}{75582}$.

Câu 24. Cho một đa giác đều 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O . Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác trên. Tính xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

- (A) $P = \frac{144}{136}$. (B) $P = \frac{7}{816}$. (C) $P = \frac{23}{136}$. (D) $P = \frac{21}{136}$.

Câu 25. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi S là tập hợp các tam giác có độ dài ba cạnh là các phần tử của A . Chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc S . Xác suất để phần tử được chọn là một tam giác cân bằng.

- (A) $\frac{6}{34}$. (B) $\frac{19}{34}$. (C) $\frac{27}{34}$. (D) $\frac{7}{34}$.

Câu 26. Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên khác nhau từ 70 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để bốn số được chọn lập thành một cấp số nhân có công bội nguyên.

- (A) $\frac{12}{916895}$. (B) $\frac{11}{916895}$. (C) $\frac{10}{916895}$. (D) $\frac{9}{916895}$.

Câu 27. Có 6 học sinh gồm 2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Tính xác suất để nhóm bất kì 3 học sinh liên kề nhau trong hàng luôn có mặt học sinh của cả 3 lớp A, B, C?

- (A) $\frac{1}{120}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{30}$. (D) $\frac{1}{15}$.

Câu 28. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất để tích số chấm 3 lần gieo là chẵn.

- (A) $\frac{7}{8}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{5}{8}$. (D) $\frac{3}{8}$.

Câu 29. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh gồm 3 nam 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

- (A) $\frac{1}{10}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{1}{20}$. (D) $\frac{2}{5}$.

Câu 30. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C vào sáu ghế xếp quanh một bàn tròn (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để học sinh lớp C ngồi giữa 2 học sinh lớp B

- (A) $\frac{2}{13}$. (B) $\frac{1}{10}$. (C) $\frac{2}{7}$. (D) $\frac{3}{14}$.

Câu 31. Có 12 học sinh gồm 6 nam và 6 nữ ngồi vào hai hàng ghế đối diện nhau tùy ý. Xác suất để mỗi một em nam ngồi đối diện với một em nữ là?

- (A) $\frac{1}{924}$. (B) $\frac{4}{165}$. (C) $\frac{8}{165}$. (D) $\frac{16}{231}$.

Câu 32. Có 50 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3 bằng

- (A) $\frac{8}{89}$. (B) $\frac{11}{171}$. (C) $\frac{769}{2450}$. (D) $\frac{409}{1225}$.

Câu 33. Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H). Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng

- (A) $\frac{39}{140}$. (B) $\frac{39}{58}$. (C) $\frac{45}{58}$. (D) $\frac{39}{280}$.

Câu 34. Một hộp chứa 10 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu. Xác suất để tích các số ghi trên 5 quả cầu đó chia hết cho 3 bằng

- (A) $\frac{5}{12}$. (B) $\frac{7}{12}$. (C) $\frac{1}{12}$. (D) $\frac{11}{12}$.

Câu 35. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 25 bằng

(A) $\frac{43}{324}$.

(B) $\frac{1}{27}$.

(C) $\frac{11}{324}$.

(D) $\frac{17}{81}$.

Câu 36. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chia hết cho 6.

(A) $\frac{13}{60}$.

(B) $\frac{2}{9}$.

(C) $\frac{17}{45}$.

(D) $\frac{11}{45}$.

Câu 37. Trước kì thi học sinh giỏi, nhà trường tổ chức buổi gặp mặt 10 em học sinh trong đội tuyển. Biết các em đó có số thứ tự trong danh sách lập thành cấp số cộng. Các em ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy bàn đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế và mỗi ghế chỉ được ngồi một học sinh. Tính xác suất để tổng các số thứ tự của hai em ngồi đối diện nhau là bằng nhau.

(A) $\frac{1}{954}$.

(B) $\frac{1}{252}$.

(C) $\frac{1}{945}$.

(D) $\frac{1}{126}$.

Câu 38. Người ta muốn chia tập hợp 16 học sinh gồm 3 học sinh lớp 12A, 5 học sinh lớp 12B và 8 học sinh lớp 12C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 8 học sinh. Xác suất sao cho ở mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B là

(A) $\frac{42}{143}$.

(B) $\frac{84}{143}$.

(C) $\frac{356}{1287}$.

(D) $\frac{56}{143}$.

Câu 39. Một hộp đựng 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ trong hộp. Xác suất để tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ được chọn là một số lẻ bằng.

(A) $\frac{71}{143}$.

(B) $\frac{56}{715}$.

(C) $\frac{72}{143}$.

(D) $\frac{56}{143}$.

Câu 40. Một số điện thoại có bảy chữ số, trong đó chữ số đầu tiên là 8. Số điện thoại này được gọi là may mắn nếu bốn chữ số đầu là chữ số chẵn phân biệt và ba chữ số còn lại là lẻ, đồng thời hai chữ số 0 và 9 không đứng liền nhau. Tính xác suất để một người khi lắp điện thoại ngẫu nhiên được số điện thoại may mắn.

(A) $P(A) = \frac{5100}{10^7}$.

(B) $P(A) = \frac{2850}{10^7}$.

(C) $P(A) = \frac{5100}{10^6}$.

(D) $P(A) = \frac{2850}{10^6}$.

Câu 41. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn.

(A) $\frac{24}{35}$.

(B) $\frac{144}{245}$.

(C) $\frac{72}{245}$.

(D) $\frac{18}{35}$.

Câu 42. Cho tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

(A) $\frac{7}{38}$.

(B) $\frac{5}{38}$.

(C) $\frac{3}{38}$.

(D) $\frac{1}{114}$.

Câu 43. Một bàn cờ vua gồm 8×8 ô vuông, mỗi ô có cạnh bằng 1 đơn vị. Một ô vừa là hình vuông hay hình chữ nhật, hai ô là hình chữ nhật, ... Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên bàn cờ. Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị bằng

(A) $\frac{5}{216}$.

(B) $\frac{17}{108}$.

(C) $\frac{51}{196}$.

(D) $\frac{29}{216}$.

Câu 44. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số lập được từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 số từ tập M . Xác suất để cả 2 số lấy được đều có chữ số hàng chục nhỏ hơn các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị là

(A) $\frac{8}{21}$.

(B) $\frac{5}{16}$.

(C) $\frac{296}{2051}$.

(D) $\frac{695}{7152}$.

Câu 45. Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A , 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C , ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{3}{20}$.

(C) $\frac{2}{15}$.

(D) $\frac{1}{5}$.

Câu 46. Có 7 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A , 2 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C , ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để 2 học sinh lớp C không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi cạnh học sinh lớp A bằng

(A) $\frac{(2 \cdot 2 \cdot 3)!}{7!}$.

(B) $\frac{2!2!}{7!}$.

(C) $\frac{1}{70}$.

(D) $\frac{1}{105}$.

Câu 47. Một hộp có chứa 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và n viên bi vàng (các viên bi kích thước như nhau, n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Biết xác suất để trong ba viên bi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182}$. Tính xác suất P để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ.

(A) $P = \frac{135}{364}$.

(B) $P = \frac{177}{182}$.

(C) $P = \frac{45}{182}$.

(D) $P = \frac{31}{56}$.

Câu 48. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0. Lấy ngẫu nhiên một số từ S . Xác suất để lấy được số chỉ có mặt 3 chữ số gần với số nào nhất trong các số sau?

(A) 0, 34.

(B) 0, 36.

(C) 0, 21.

(D) 0, 13.

Câu 49. Một xưởng sản xuất thực phẩm gồm 4 kỹ sư chế biến thực phẩm, 3 kỹ thuật viên và 13 công nhân. Để đảm bảo sản xuất thực phẩm chống dịch Covid 19, xưởng cần chia thành 3 ca sản xuất theo thời gian liên tiếp nhau sao cho ca I có 6 người và 2 ca còn lại mỗi ca có 7 người. Tính xác suất sao cho mỗi ca có 1 kỹ thuật viên, ít nhất một kỹ sư chế biến thực phẩm.

(A) $\frac{440}{3320}$.

(B) $\frac{441}{3230}$.

(C) $\frac{41}{230}$.

(D) $\frac{401}{3320}$.

Câu 50. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có năm ghế. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh, gồm 5 nam và 5 nữ ngồi vào hai dãy ghế sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{30}$.

(C) $\frac{8}{63}$.

(D) $\frac{8}{37}$.

Câu 51. Một con châu chấu nhảy từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến điểm $A(9;0)$ dọc theo trục Ox của hệ trục tọa độ Oxy . Con châu chấu có bao nhiêu cách nhảy để đến điểm A biết mỗi lần nó có thể nhảy 1 bước hoặc 2 bước (1 bước có độ dài 1 đơn vị).

- (A) 47. (B) 51. (C) 55. (D) 54.

Câu 52. Hai bạn A và B mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để các chữ số có mặt ở hai số bạn A và B viết giống nhau bằng

- (A) $\frac{31}{2916}$. (B) $\frac{1}{648}$. (C) $\frac{1}{108}$. (D) $\frac{25}{2916}$.

Câu 53. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Rút ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để rút được số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

- (A) $\frac{2}{7}$. (B) $\frac{11}{64}$. (C) $\frac{3}{16}$. (D) $\frac{3}{32}$.

Câu 54. Đội thanh niên tình nguyện của một trường $THPT$ gồm 15 HS , trong đó có 4 HS khối 12, 5 HS khối 11 và 6 HS khối 10. Chọn ngẫu nhiên 6 HS đi thực hiện nhiệm vụ. Tính xác suất để 6 HS được chọn có đủ 3 khối.

- (A) $\frac{4248}{5005}$. (B) $\frac{757}{5005}$. (C) $\frac{151}{1001}$. (D) $\frac{850}{1001}$.

Câu 55. Từ một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 8 quả màu đỏ, 3 quả màu xanh và 1 quả màu vàng, lấy ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu bằng:

- (A) $\frac{23}{44}$. (B) $\frac{21}{44}$. (C) $\frac{139}{220}$. (D) $\frac{81}{220}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	4. B	5. A	6. D	7. A	8. A	9. D	10. C	12. A
13. C	14. D	15. B	16. C	17. A	18. D	19. B	20. B	21. B	22. D
23. D	24. C	25. C	26. B	27. D	28. A	29. D	30. B	31. D	32. D
33. B	34. D	35. C	36. A	37. C	38. B	39. C	40. D	41. D	42. C
43. A	44. D	45. D	46. D	47. B	48. C	49. B	50. C	51. C	52. D
53. C	54. D	55. C							