

CHƯƠNG 4

GIỚI HẠN

Mục lục

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	1
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	2
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP.....	3
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	22
BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	25
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	25
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP.....	26
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	70
BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	113
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	113
B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP.....	114
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	138
BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG IV	139
A. BÀI TẬP	139
B. LỜI GIẢI.....	145

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giới hạn bằng 0). Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn bằng a). Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$. Dãy số có giới hạn là số a hữu hạn gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Định nghĩa 3 (Giới hạn vô cực).

1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Ký hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
2. Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.
Ký hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

GIỚI HẠN HỮU HẠN	GIỚI HẠN VÔ CỰC
Các giới hạn đặc biệt $\lim \frac{1}{n^k} = 0, (k \in \mathbb{N}^*)$. $\lim q^n = 0, (q < 1)$. $\lim C = C, (C \in \mathbb{R})$	Các giới hạn đặc biệt $\lim n^k = +\infty, (k \in \mathbb{N}^*)$. $\lim q^n = 0, (q > 1)$.
Định lí 1. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$. $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$. - Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.	Định lí 2. - Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$. - Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n \geq 0, \forall n$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. - Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$.

Định lí 3 (Nguyên lý kẹp). Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$. Lúc đó, nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$.

Định nghĩa 4. Cấp số nhân (u_n) có công bội q được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn nếu $|q| < 1$.

Nhận xét. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q . Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Lúc

$$\text{đó: } \lim S_n = \frac{u_1}{1-q} \quad (4.1)$$

Định nghĩa 5. Giới hạn (4.1) được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) và được ký hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Như vậy:

$$S = \lim S_n = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là các đa thức.

Phương pháp giải:

Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu, rồi sử dụng các công thức:

- $\lim \frac{c}{n^k} = 0, (k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}).$
- $\lim n^k = +\infty (k \in \mathbb{N}^*).$
- $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = +\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = +\infty.$

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}.$

ĐS: $L = 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + 2 \right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = \frac{4 - 0 - 0}{0 + 2} = 2.$$

Nhận xét: Nếu bậc tử $P(n)$ bằng bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = (\text{Hệ số bậc cao nhất của tử}) \div (\text{Hệ số bậc cao nhất của mẫu}).$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n^2 - n^5}{20n^6} \cdot \frac{4n - 1^4}{2n^2 - n + 1^4}.$

ĐS: $L = \frac{128}{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{\left[n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]^5 \left[n \left(4 - \frac{1}{n} \right) \right]^4}{20n^6 \left[n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^4}$$

$$= \lim \frac{n^{10} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^5 n^4 \left(4 - \frac{2}{n}\right)^4}{20n^6 n^8 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^4} = \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^5 \left(4 - \frac{2}{n}\right)^4}{20 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^4} = \lim \frac{(2-0)^5 (4-0)^4}{20(2-0+0)^4} = \frac{128}{5}$$

Nhận xét: Với bài toán có lũy thừa bậc cao, ta thường rút bậc cao trong từng dấu ngoặc, sau đó áp dụng công thức $(a.b)^n = a^n.b^n$ và tính toán như các bài trước.

Ví dụ 3. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$.

ĐS: $L = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right) = 0 \cdot \frac{1-0+0}{1+0} = 0$$

Nhận xét: Nếu bậc tử $P(n)$ nhỏ hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$.

ĐS: $L = +\infty$

Lời giải

$$L = \lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{11}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(n \cdot \frac{2 - \frac{11}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} \right) = +\infty$$

$$(\text{vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \left(\frac{2 - \frac{11}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} \right) = 2 > 0).$$

Nhận xét: - Nếu bậc tử $P(n)$ lớn hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$.

- Để biết là $+\infty$ hay $-\infty$ ta dựa vào dấu của giới hạn trong tích theo quy tắc “cùng dấu thì tích dương, trái dấu thì tích âm”. Thông thường, sẽ để dấu $=\infty$ và xét dấu sẽ điền vào sau.

- Về trắc nghiệm, đó chính là tích của hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

Ví dụ 5. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1+3+5+7+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

ĐS: $L = \frac{1}{3}$

Lời giải

Xét cấp số cộng $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$ công sai $d = 2$ và số hạng cuối cùng là $u_m = 2n+1$ ta có:

$$u_1 + (m-1)d = 2n+1 \Leftrightarrow 1 + 2(m-1) = 2n+1 \Leftrightarrow m = n+1.$$

Vậy cấp số cộng có $n+1$ số hạng. Suy ra tổng

$$S = 1+3+5+7+\dots+2n+1 = \frac{m}{2}(u_1+u_m) = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = n^2+2n+1$$

$$\text{Vì thế } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

Nhận xét: Cần nhớ công thức cấp số cộng:

$$u_{k+1} - u_k = d, \text{ với } d \text{ là công sai.}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \text{ với } d \text{ là công sai.}$$

$$u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k, k \geq 2.$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n).$$

Ví dụ 6. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$

ĐS: $L = 1$

Lời giải

Số hạng tổng quát $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; (\forall k = 1, 2, \dots, n)$ do đó

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

Nhận xét: Phân tích $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ với $a = \frac{1}{k+1} \Big|_{k=0} = 1; b = \frac{1}{k} \Big|_{k=-1} = -1.$

❶ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính giới hạn sau:

a) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1};$

b) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n + 3}{2n^3 + 3n^3 - 1};$

c) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 2n + 1}{5n^3 - n^2 + n - 1};$

d) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 1^2 n + 2^9}{n^{17} + 1};$

e) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1^2}{4n + 2^3} \cdot \frac{3 - 4n^3}{2 - n^2};$

f) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1^3}{2n - 4^4} \cdot \frac{2n + 5^2}{2n^3 + 1} \cdot \frac{9n + 4}{2n^2 - 7};$

$$g) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n + 1} \cdot \frac{n - 1}{2n^2 + 3}.$$

Bài 2. Tính giới hạn sau:

$$a) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 + 1}{n^4 + 5n^3 + n};$$

$$b) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 3}{2n^2 + 3n^3 + 4};$$

$$c) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7};$$

$$d) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n};$$

$$e) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}.$$

Bài 3. Tính giới hạn sau:

$$a) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n + 3}{3n^2 + n - 1};$$

$$b) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - n^3 + 5n^2 + 3}{n^2 - 3n^3 - 1};$$

$$c) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n + 9};$$

$$d) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 2n^4 + 2n + 7}{-6n^4 + 2n^3 + n^2 - 1};$$

Bài 4. Tính giới hạn sau:

$$a) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1};$$

$$b) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1};$$

$$c) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2 - n + 9};$$

$$d) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3)}{3n^2 + 5n - 1};$$

$$e) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{2n + 1};$$

$$f) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right];$$

$$g) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right];$$

$$h) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right].$$

❸ LỜI GIẢI

Bài 1. a)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } L = \lim \frac{n^3 - n + 3}{2n^2 + 3n^3 - 1} = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } L = \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{5n^3 - n^2 + n - 1} = \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{4n^3 - n^2 + n} = \lim \frac{n^3 \left(6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{d) } L = \lim \frac{2n^4 + 1^2 \cdot n + 2^9}{n^{17} + 1} = \lim \frac{n^8 \left(2 + \frac{1}{n^4}\right)^2 n^9 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)} = \lim \frac{\left(2 + \frac{1}{n^4}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{\left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)}$$

$$= \lim \frac{(2+0)^2 \cdot (1+0)^9}{1+0} = 4.$$

$$\text{e) } L = \lim \frac{(2n-1)^2 (3-4n^3)}{(4n+2)^3 (2-n)^2} = \lim \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 4\right)}{n^3 \left(4 + \frac{2}{n}\right)^3 n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n^3} - 4\right)}{\left(4 + \frac{2}{n}\right)^3 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \lim \frac{2-0^2 \cdot 0-4}{4+0^3 \cdot 2-0^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{f) } L = \lim \frac{(3n^2 - 1)^3 (2n+5)^2 (9n+4)}{(2n-4)^4 (2n^3+1)(2n^2-7)}$$

$$L = \lim \frac{\left[n^2 \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)\right]^3 \left[n \left(2 + \frac{5}{n}\right)\right]^2 n \left(9 + \frac{4}{n}\right)}{n^4 \left(2 - \frac{4}{n}\right)^4 n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) n^2 \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)} = \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)^3 \left(2 + \frac{5}{n}\right)^2 \left(9 + \frac{4}{n}\right)}{\left(2 - \frac{4}{n}\right)^4 \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)}$$

$$= \lim \frac{3-0^3 \cdot 2+0^2 \cdot 9+0}{2-0^4 \cdot 2+0 \cdot 2-0} = \frac{243}{16}.$$

$$\text{g) } L = \lim \frac{(n^2+2)(n-1)^3}{(n+1)(2n^2+3)^2} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) n^4 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^2} = \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^2}$$

$$= \lim \frac{1+0 \cdot 1-0^3}{1+0 \cdot 2+0^2} = \frac{1}{4}.$$

Bài 2.

$$\text{a) } L = \lim \frac{7n^3 + 2n^2 + 1}{n^4 + 5n^3 + n} = \lim \frac{n^3 \left(7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) = 0$$

$$(\text{Vì } \lim \frac{1}{n} = 0; \text{ và } \lim \left(\frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) = 7).$$

$$\text{b) } L = \lim \frac{7n + 3}{2n^2 + 3n^3 + 4} = \lim \frac{n \left(7 + \frac{3}{n} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3} \right)} = \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} \right) = 0$$

$$(\text{Vì } \lim \frac{1}{n^2} = 0 \text{ và } \lim \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} = \frac{7}{3}).$$

$$\text{c) } L = \lim \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^3 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3} \right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} \right) = 0$$

$$(\text{Vì } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ và } \lim \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1}{3}).$$

$$\text{d) } L = \lim \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n} = \lim \frac{n^3 \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) = 0 \quad (\text{Vì } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ và } \lim \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} = -2).$$

$$\text{e) } L = \lim \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5} = \lim \frac{n^2 \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^4 \left(3 + \frac{5}{n^4} \right)} = \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} \right) = 0.$$

$$(\text{Vì } \lim \frac{1}{n^2} = 0 \text{ và } \lim \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} = -\frac{2}{3}).$$

Bài 3. a) $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 5n + 3}{3n^2 + n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = +\infty$

(Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$).

b) $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 - n^3 + 5n^2 + 3}{n^2 - 3n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \left(5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3}} \right) = -\infty.$

(Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3}} = -\frac{5}{3}$).

c) $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n + 9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3}} \right) = +\infty.$

(Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3}} = 3$).

d) $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^5 - 2n^4 + 2n + 7}{-6n^4 + 2n^3 + n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5} \right)}{n^4 \left(-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} \right) = -\infty.$

(Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} = -\frac{1}{2}$).

Bài 4. a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

Do đó $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{6n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{6 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{6}.$

b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = \frac{(1 + (2n-1))n}{2} = n^2$

$$\text{Do đó } L = \lim \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n^2+3n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2+3n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

c) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

$$\text{Do đó } L = \lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2-n+9} = \lim \frac{n^2+n}{4n^2-2n+18} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}+\frac{18}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

d) Xét cấp số cộng với $u_1 = 5; d = 4$

$$\Rightarrow u_{n-1} = 5 + (n-2)4 = 4n-3 \Rightarrow 5+9+13+\dots+(4n-3) = \frac{(5+4n-3)(n-1)}{2} = 2n^2-n-1$$

$$\text{Do đó } L = \lim \frac{5+9+13+\dots+(4n-3)}{3n^2+5n-1} = \lim \frac{2n^2-n-1}{3n^2+5n-1} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

e) Ta có

$$1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n = (1-2)+(3-4)+\dots+((2n-1)-2n) = (-1)+(-1)+\dots+(-1) = -n$$

$$\text{Do đó } L = \lim \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{2n+1} = \lim \frac{-n}{2n+1} = \lim \frac{-1}{2+\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}.$$

f) Ta có $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}$$

$$\text{Do đó } L = \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] = \lim \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} \right) = \frac{3}{4}.$$

g) Ta có

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\text{Do đó } L = \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right] = \lim \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

h) Ta có $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right).$$

Dạng 2. Tính giới hạn dạng $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là các hàm mũ a^n .

Phương pháp giải:

Áp dụng $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Sử dụng công thức mũ, rồi chia cả và mẫu cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất.

Công thức mũ cần nhớ

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \text{ và } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$.

ĐS: $L = 20$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho 5^n , ta có

$$L = \lim \frac{\frac{1}{5^n} - \frac{3^n}{5^n} + 100}{2 \cdot \frac{2^n}{5^n} + 9 \cdot \frac{3^n}{5^n} + 5} = \lim \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 100}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0-0+100}{0+0+5} = 20.$$

Nhận xét: Ta chia cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất vì sau khi chia luôn tạo ra cơ số có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 để áp dụng công thức $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^n}{5.2^n+1}$.

ĐS: $L = \frac{2}{5}$

Lời giải

Xét cấp số nhân $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công bội $q = 2$ và có số hạng tổng quát

$$u_m = 2^n \Leftrightarrow u_1 q^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow m-1 = n \Leftrightarrow m = n+1.$$

Suy ra tổng các số hạng của cấp số nhân trên là:

$$S_m = u_1 \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Suy ra

$$L = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{5.2^n + 1} = \lim \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

Nhận xét: Các công thức cần nhớ về cấp số nhân

$$1. \frac{u_{k+1}}{u_k} = q \text{ (} q \text{ là công bội)}.$$

$$2. S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$$3. u_n = u_1 q^{n-1}.$$

$$4. u_{k+1} u_{k-1} = u_k^2 \text{ với } k \geq 2.$$

❷ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$a) L = \lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n}.$$

$$\text{ĐS: } L = 5.$$

$$b) L = \lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}}.$$

$$\text{ĐS: } L = \frac{1}{72}.$$

$$c) L = \lim \frac{2^n - 3^{n-2} + 3 \cdot 5^{n+2}}{2^{n-1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}.$$

$$\text{ĐS: } L = 15.$$

$$d) L = \lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}.$$

$$\text{ĐS: } L = 5.$$

$$e) L = \lim \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}.$$

$$\text{ĐS: } L = -\frac{20}{3}.$$

$$f) L = \lim \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n}.$$

$$\text{ĐS: } L = \frac{1}{3}.$$

$$g) L = \lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}.$$

$$\text{ĐS: } L = 0.$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$a) L = \lim \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}.$$

$$\text{ĐS: } L = 0.$$

$$b) L = \lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$\text{ĐS: } L = \frac{4}{3}.$$

❸ LỜI GIẢI

Bài 1.

$$a) L = \lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n} = \lim \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + 5}{3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \frac{0 + 5}{0 + 1} = 5.$$

$$b) L = \lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}} = \lim \frac{16 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 6}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n + 432} = \frac{0 + 6}{0 + 432} = \frac{1}{72}.$$

$$c) L = \lim \frac{2^n - 3^{n-2} + 3 \cdot 5^{n+2}}{2^{n-1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} = \lim \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 75}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0 - 0 + 75}{0 + 0 + 5} = 15.$$

$$d) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 25}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0 - 0 + 25}{0 + 0 + 5} = 5.$$

$$e) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^n - 20}{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + 3} = \frac{0 - 20}{0 + 3} = -\frac{20}{3}.$$

$$f) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^n + 3} = \frac{0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

$$g) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{243}\right)^n \cdot 2 \cdot \left(\frac{32}{243}\right)^n}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

Bài 2. a) Áp dụng công thức tính tổng của một cấp số nhân, ta lần lượt có

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$$\text{Do đó } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{\frac{3^{n+1} - 1}{2}} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 3^n - 1} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2 \cdot \frac{0 - 0}{3 - 0} = 0.$$

b) Áp dụng công thức tính tổng của một cấp số nhân, ta lần lượt có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = (-2) \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \left(-\frac{3}{2}\right) \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right]$$

$$\text{Do đó } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2) \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]}{\left(-\frac{3}{2}\right) \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right]} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 1}{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 - 1} = \frac{4}{3}.$$

Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số chứa căn thức.

Phương pháp giải: Rút lũy thừa bậc cao hoặc liên hợp và sử dụng $\lim n^k = \infty$.

Lưu ý: Dấu hiệu nhận dạng liên hợp (dạng $+\infty.0$) là sau khi rút n có mũ cao trong căn và nhóm thừa số, xuất hiện số 0. Chẳng hạn:

- Tính giới hạn dãy $u_n = \sqrt{n^2 + 3n + 5} - n$: biểu thức trong căn có n^2 là lũy thừa cao nhất và ta quan tâm đến nó, những hạng tử sau bỏ hết, có nghĩa ta xem $u_n = \sqrt{n^2} - n = n - n = 0$ nên cần liên hợp.

- Tính giới hạn dãy $u_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n$: biểu thức trong căn có $2n^2$ là lũy thừa cao nhất nên nháp $\sqrt{2n^2} - n = n\sqrt{2} - n = n(\sqrt{2} - 1)$, có $\sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên ta không cần liên hợp mà rút ra giải trực tiếp.

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n)$.

ĐS: $L = +\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } L = \lim \left[\sqrt{n^2 \left(\frac{2n^2 + 3n + 5}{n^2} \right)} - n \right] = \lim \left(n \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - n \right) = \lim n \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right)$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0 \text{ nên } L = +\infty.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 20)$.

ĐS: $L = \frac{41}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } L = \lim 20 + \lim \sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n = 20 + \lim \frac{3n - 4}{\sqrt{9n^2 + 3n - 4} + 3n}$$

$$= 20 + \lim \frac{n \left(3 - \frac{4}{n} \right)}{n \sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3n} = 20 + \lim \frac{3 - \frac{4}{n}}{\sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3}$$

$$= 20 + \frac{3 - 0}{\sqrt{9 + 0 - 0} + 3} = \frac{41}{2}.$$

Cần nhớ: Liên hợp là hình thức trục căn dựa vào HĐT $\begin{cases} (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{cases}$

$$\triangleright \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}.$$

$$\triangleright \sqrt{a} - b = \frac{a-b^2}{\sqrt{a} + b}.$$

$$\sqrt[3]{a} - b = \frac{a-b^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + b^2}.$$

$$\triangleright \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}. \quad \sqrt[3]{a} + b = \frac{a+b^3}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + b^2}.$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$

ĐS: $L = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } L &= \lim \frac{n+2-n}{\sqrt[3]{n+2}^2 + \sqrt[3]{n+2} \cdot \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2} = \lim \frac{2}{\left(\sqrt[3]{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^2 + \sqrt[3]{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} \cdot \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2} \\ &= \lim \frac{2}{\sqrt[3]{n^2} \left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1 \right]} = \lim \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n^2}}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1} = \frac{0}{3} = 0. \end{aligned}$$

Cần nhớ: $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}.$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + 5 - 2n)$.

ĐS: $L = \frac{21}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } L &= \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + 5 - 2n = \lim 5 + \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} - 2n \\ &= 5 + \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} - 2n = 5 + \lim \frac{8n^3 + 3n^2 - 2 - 8n^3}{\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2}^2 + \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} \cdot 2n + 4n^2} \\ &= 5 + \lim \frac{3n^2 - 2}{\left(\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}\right)} \cdot 2n + 4n^2} \\ &= 5 + \lim \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{8+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} \cdot 2 + 4} = 5 + \frac{3}{4+4+4} = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Cần nhớ: $\sqrt[3]{a} - b = \frac{a-b^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot b + b^2}$. Trong lời giải trên, đã sử dụng hai tính chất:

- $\triangleright \lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$
- $\triangleright \lim C = C$ với C là hằng số $C \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 5. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$.

ĐS: $L = \frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right) \\
 &= \lim \left[\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) + \left(n - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right) \right] \\
 &= \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) + \lim \left(n - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right) \\
 &= \lim \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{n^3 - (n^3 + n^2)}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} \right)^2} \\
 &= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{-n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} \right)^2} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} + \lim \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \right)^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

❶ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $L = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}.$ | ĐS: $\frac{3}{4}$ |
| b) $L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}.$ | ĐS: $\frac{1}{3}$ |
| c) $L = \lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}.$ | ĐS: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| d) $L = \lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}.$ | ĐS: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ |
| e) $L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1} + \sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 3}}{\sqrt{16n^2 + 4n} - \sqrt[4]{n^4 + 1}}.$ | ĐS: $L = \frac{4}{3}$ |
| f) $L = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 2}.$ | ĐS: $L = +\infty$ |
| g) $L = \lim \frac{\sqrt{1+4+7+\dots+(3n+1)}}{2n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}}.$ | ĐS: $L = 0$ |

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $L = \lim \sqrt{4n^2 + n + 1} - 9n$. | ĐS: $-\infty$ |
| b) $L = \lim \sqrt{9n^2 + 2n - 1} - \sqrt{4n^2 + 1}$. | ĐS: $+\infty$ |
| c) $L = \lim \sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2}$. | ĐS: $\frac{1}{4}$ |
| d) $L = \lim \sqrt{n^2 + n + 1} - n + 10$ | ĐS: $\frac{21}{2}$ |
| e) $L = \lim \sqrt{n^2 + 3n + 5} - n + 25$. | ĐS: $\frac{53}{2}$ |
| f) $L = \lim n^2 + 2019 - \sqrt{n^4 + 3n + 1}$. | ĐS: $L = 2019$ |
| g) $L = \lim 3n - 5 - \sqrt{9n^2 + 1}$. | ĐS: $L = -5$ |
| h) $L = \lim \left[n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right]$. | ĐS: $L = -\frac{1}{2}$ |

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $L = \lim \sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+1}$. | ĐS: $L = 0$ |
| b) $L = \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6$. | ĐS: $L = \frac{25}{4}$ |
| c) $L = \lim \sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1$. | ĐS: $L = -1$ |
| d) $L = \lim \sqrt[3]{n - n^3} + n + 2$. | ĐS: $L = 2$ |
| e) $L = \lim \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n - 1$. | ĐS: $L = -\frac{5}{3}$ |
| f) $L = \lim \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1}$. | ĐS: $L = \frac{1}{2}$ |
| g) $L = \lim \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}$. | ĐS: $L = \frac{1}{6}$ |

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|------------------------------|
| f) $L = \lim \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1}$. | ĐS: $L = \frac{1}{2}$ |
| g) $L = \lim \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}$. | ĐS: $L = \frac{1}{6}$ |

❸ LỜI GIẢI

Bài 1.

$$\text{a) } L = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}}{n \left(4 - \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{n \sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n \left(4 - \frac{2}{n} \right)}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9 - 0 + 0}}{4 - 0} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}} = \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{9 + \frac{3}{n}}} = \frac{\sqrt{4 - 0 + 0} - 1}{\sqrt{9 + 0}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } L = \lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3} = \lim \frac{n^2 \sqrt{2 + \frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4}}}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4}}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{2 + 0 - 0}}{2 - 0 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{d) } L = \lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \lim \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right)}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{4 - \frac{5}{n}}} = \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{4 - \frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\text{e) } L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1} + \sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 3}}{\sqrt{16n^2 + 4n} - \sqrt[4]{n^4 + 1}} = \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(4 - \frac{1}{n^2} \right)} + \sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3} \right)}}{\sqrt{n^2 \left(16 + \frac{4}{n} \right)} - \sqrt[4]{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^4} \right)}}$$

$$= \lim \frac{n \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}} + n \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}}{n \sqrt{16 + \frac{4}{n}} - n \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^4}}} = \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}}{\sqrt{16 + \frac{4}{n}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^4}}} = \frac{2 + 2}{4 - 1} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{f) } L = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 2} = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 \left(1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6} \right)}}{n + 2} = \lim \frac{n^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}$$

$$= \lim n \cdot \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty \text{ (Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{2}{n}} = 1).$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } L &= \lim \frac{\sqrt{1+4+7+\dots+(3n+1)}}{2n^2+\sqrt{n^4+2n+1}} = \lim \frac{\sqrt{(n+1)(3n+2)}}{\sqrt{2}(2n^2+\sqrt{n^4+2n+1})} \\
 &= \lim \frac{\sqrt{3n^2+5n+2}}{2\sqrt{2}n^2+\sqrt{2}\sqrt{n^4+2n+1}} = \lim \frac{\sqrt{n^4\left(\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}}{2\sqrt{2}n^2+\sqrt{2}\sqrt{n^4\left(1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}} \\
 &= \lim \frac{n^2\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{2}{n^4}}}{2\sqrt{2}n^2+\sqrt{2}n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = \lim \frac{\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{2}{n^4}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\text{a) } L = \lim \left(\sqrt{4n^2+n+1} - 9n \right) = \lim \left(\sqrt{n^2 \left(4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} - 9n \right) = \lim \left(n \sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 9n \right)$$

$$\lim n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 9 \right) = -\infty \text{ (Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 9 \right) = -7 < 0 \text{)}.$$

$$\text{b) } L = \lim \left(\sqrt{9n^2+2n-1} - \sqrt{4n^2+1} \right) = \lim n \left(\sqrt{9 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} \right) = +\infty$$

$$\text{(Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \left(\sqrt{9 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} \right) = 1 > 0 \text{)}.$$

$$\text{c) } L = \lim \left(\sqrt{4n^2+n} - \sqrt{4n^2+2} \right) = \lim \frac{(4n^2+n) - (4n^2+2)}{\sqrt{4n^2+n} + \sqrt{4n^2+2}} = \lim \frac{n-2}{\sqrt{4n^2+n} + \sqrt{4n^2+2}}$$

$$= \lim \frac{1 - \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{4+0} + \sqrt{4+0}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{d) } L = \lim \sqrt{n^2+n+1} - n + 10 = \lim 10 + \lim \sqrt{n^2+n+1} - n$$

$$= 10 + \lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = 10 + \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = 10 + \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}.$$

$$\text{e) } L = \lim \sqrt{n^2+3n+5} - n + 25 = \lim 25 + \lim \sqrt{n^2+3n+5} - n$$

$$\begin{aligned}
 &= 25 + \lim \frac{n^2 + 3n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} = 25 + \lim \frac{3n + 5}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} = 25 + \lim \frac{3 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} \\
 &= 25 + \frac{3 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{53}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } L &= \lim n^2 + 2019 - \sqrt{n^4 + 3n + 1} = \lim 2019 + \lim n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1} \\
 &= 2019 + \lim \frac{n^4 - n^4 + 3n + 1}{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n + 1}} = 2019 + \lim \frac{-3n - 1}{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n + 1}} \\
 &= 2019 + \lim \frac{-\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = 2019 + \frac{-0 - 0}{1 + \sqrt{1 + 0 + 0}} = 2019 + 0 = 2019.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } L &= \lim 3n - 5 - \sqrt{9n^2 + 1} = \lim 3n - \sqrt{9n^2 + 1} - \lim 5 \\
 &= \lim \frac{9n^2 - 9n^2 + 1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} - \lim 5 = \lim \frac{-1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} - \lim 5 = 0 - 5 = -5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } L &= \lim \left[n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right] \\
 &= \lim \frac{n \left[n^2 + 1 - n^2 + 2 \right]}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \frac{-n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Bài 3.

$$\text{a) } L = \lim \left(\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+1} \right) = \lim \frac{3}{\sqrt[3]{(n+4)^2} + \sqrt[3]{(n+4) \cdot (n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt[3]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}} \\
 &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{n^2} \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right]} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } L &= \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6 = \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6 \\
 &= 6 + \lim \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n = 6 + \lim \frac{3n^2 + 4}{\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4}^2 + 2n \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} + 4n^2} \\
 &= 6 + \lim \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}\right)^2} + 2 \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}} + 4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } L &= \lim \left(\sqrt[3]{2n-n^3} + n - 1 \right) = \lim \left(\sqrt[3]{2n-n^3} + n - 1 \right) = -1 + \lim \left(\sqrt[3]{2n-n^3} + n \right) \\ &= -1 + \lim \frac{2n}{\sqrt[3]{(2n-n^3)^2} - n\sqrt[3]{2n-2n^3} + n^2} = -1 + \lim \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-1} + 1} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } L &= \lim \sqrt[3]{n-n^3} + n + 2 = \lim \sqrt[3]{n-n^3} + n + 2 = 2 + \lim \sqrt[3]{n-n^3} + n \\ &= 2 + \lim \frac{n}{\sqrt[3]{n-n^3}^2 - n\sqrt[3]{n-n^3} + n^2} = 2 + \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1} + 1} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } L &= \lim \sqrt[3]{n^3-2n^2} - n - 1 = \lim \sqrt[3]{n^3-2n^2} - n - 1 = -1 + \lim \sqrt[3]{n^3-2n^2} - n \\ &= -1 + \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^3-2n^2}^2 + n\sqrt[3]{2n^3-2n^2} + n^2} = -1 + \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + 1} \\ &= -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Bài 4.

$$\begin{aligned} \text{a) } L &= \lim \sqrt{n^4+n^2} - \sqrt[3]{n^6+1} = \lim \left[\sqrt{n^4+n^2} - n^2 - \sqrt[3]{n^6+1} + n^2 \right] \\ &= \lim \sqrt{n^4+n^2} - n^2 - \lim \sqrt[3]{n^6+1} + n^2 \\ &= \lim \frac{n^4+n^2-n^4}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} - \lim \frac{n^6+1-n^6}{\sqrt[3]{n^6+1}^2 + n^2\sqrt[3]{n^6+1} + n^4} \\ &= \lim \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} - \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^6+1}^2 + n^2\sqrt[3]{n^6+1} + n^4} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } L &= \lim \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2} = \lim \left[\sqrt{n^2+n+1} - n + n - \sqrt[3]{n^3+n^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} + \frac{n^3-n^3+n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2} + \sqrt[3]{n^3+n^2}^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} - \frac{n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2} + \sqrt[3]{n^3+n^2}^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} - \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^2 + 3} \cdot \text{ĐS: } \frac{2}{5}.$$

$$2) \lim \frac{5n^2 - n + 3}{2n^2 + 3n - 1} \cdot \text{ĐS: } \frac{5}{2}.$$

$$3) \lim \frac{n^3 - n + 3}{2n^2 + 3n^3 - 1} \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{3}.$$

$$4) \lim \frac{8n^3 - 2n^2 + 1}{1 - 3n^2 + 2n^3} \cdot \text{ĐS: } 4.$$

$$5) \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n(n^2 + n - 1)} \cdot \text{ĐS: } 6.$$

$$6) \lim \frac{(n^2 + 2)(3 - n) + 2n^3}{(3n^2 + 2)(5 - n)} \cdot \text{ĐS: } -\frac{1}{3}.$$

$$7) \lim \frac{(2n - 1)^2 (3 - 4n^3)}{(4n + 2)^3 (2 - n)^2} \cdot \text{ĐS: } -\frac{1}{4}.$$

$$8) \lim \frac{(2n^4 + 1)^2 (n + 2)^9}{n^{17} + 1} \cdot \text{ĐS: } 4.$$

$$9) \lim \frac{(n^2 + 2)(n - 1)^2}{(n + 1)(2n + 3)^3} \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{8}.$$

$$10) \lim \frac{4n^4 - n^2 + 1}{(2n + 1)(3 - n)(n^2 + 2)} \cdot \text{ĐS: } -2.$$

$$11) \lim \frac{(n + 2)^3 (3 - n)}{(3n^2 + 2)(5 - n)^2} \cdot \text{ĐS: } -\frac{1}{3}.$$

$$12) \lim \frac{(n + 2)^3 (3 - n)^5}{(3n^2 + 2n + 1)^3 (5 - n)^2} \cdot \text{ĐS: } -\frac{1}{27}.$$

$$13) \lim \left(\frac{1}{n^2 + 2n} - \frac{1}{2n^2 + 3} \right) \cdot \text{ĐS: } 0.$$

$$14) \lim \left(\frac{n^3}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{2n + 1} \right) \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{4}.$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

$$1) \lim \frac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n} \cdot \text{ĐS: } 1.$$

$$2) \lim \frac{3 \cdot 2^n - 5^n}{5 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n} \cdot \text{ĐS: } -\frac{1}{6}.$$

$$3) \lim \frac{4^n + 2 \cdot 3^n}{5 + 3^n} \cdot \text{ĐS: } +\infty.$$

$$4) \lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n}{5 + 3^n} \cdot \text{ĐS: } 2.$$

$$5) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n} \cdot \text{ĐS: } 5.$$

$$6) \lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}} \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{72}.$$

$$7) \lim \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n} \cdot \text{ĐS: } \frac{-20}{3}.$$

$$8) \lim \frac{2^n - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} \cdot \text{ĐS: } 20.$$

$$9) \lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} \cdot \text{ĐS: } 5.$$

$$10) \lim \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n} \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{3}.$$

$$11) \lim \frac{\sqrt{9^n + 1}}{3^n - 1} \cdot \text{ĐS: } 1.$$

$$12) \lim \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n \cdot 3^n} \cdot \text{ĐS: } 0.$$

13) $\lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} . \text{ĐS: } 0 .$

14) $\lim \frac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}} . \text{ĐS: } 0 .$

15) $\lim \frac{4^n + 2 \cdot 2^{2n+1}}{5 \cdot 2^{2(n+1)} + 3^n} . \text{ĐS: } \frac{-1}{4} .$

16) $\lim \frac{3 - 2^n + 5^n}{3^n - 2 \cdot 5^n} . \text{ĐS: } \frac{-1}{2} .$

17) $\lim \frac{2^n + 3^n - 4^n}{2^n + 3^{n+1} + 4^{n+1}} . \text{ĐS: } \frac{1}{4} .$

18) $\lim \frac{4 + 2 \cdot 3^{n-1} - 4^{n-2}}{2^n + 3^{n+1} + 4^{n+1}} . \text{ĐS: } -\frac{1}{64} .$

19) $\lim \frac{(-3)^n - 5^n}{(-3)^{n-2} + 5^{n+1} + 2} . \text{ĐS: } \frac{-1}{5} .$

20) $\lim \frac{3^n \cdot 2^{n-1} + 3^{n+2}}{3^{n+2} + 6^{n+1}} . \text{ĐS: } \frac{1}{12} .$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}} . \text{ĐS: } \frac{1}{3} .$

2) $\lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} . \text{ĐS: } \frac{\sqrt{2}-1}{2} .$

3) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1} + \sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 3}}{\sqrt{16n^2 + 4n} - \sqrt[4]{n^4 + 1}} . \text{ĐS: } \frac{4}{3} .$

4) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt[3]{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{16n^4 + 1}} . \text{ĐS: } 1 .$

5) $\lim \sqrt{3n^2 - n + 5} - n . \text{ĐS: } +\infty .$

6) $\lim \sqrt[3]{8n^3 - n^2 + n - 2} - n . \text{ĐS: } +\infty .$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) . \text{ĐS: } \frac{1}{2} .$

2) $\lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2} \right) . \text{ĐS: } \frac{1}{4} .$

3) $\lim \left(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n \right) . \text{ĐS: } \frac{3}{2} .$

4) $\lim \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) . \text{ĐS: } \frac{3}{4} .$

5) $\lim \left[n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \right] . \text{ĐS: } +\infty .$

6) $\lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \right] . \text{ĐS: } \frac{-1}{2} .$

7) $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n + 3 \right) . \text{ĐS: } 4 .$

8) $\lim \left(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n + 1 \right) . \text{ĐS: } \frac{7}{4} .$

9) $\lim \left(\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 2 \right) . \text{ĐS: } \frac{5}{2} .$

10) $\lim \left(1 + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1} \right) . \text{ĐS: } 1 .$

11) $\lim \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} \right) . \text{ĐS: } 0 .$

12) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n \right) . \text{ĐS: } 1 .$

13) $\lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2 \right) . \text{ĐS: } 2 .$

14) $\lim \left(\sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1 \right) . \text{ĐS: } -1 .$

15) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n - 1 \right) . \text{ĐS: } \frac{-5}{3} .$

16) $\lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2 + 2} - 2n + 3 \right) . \text{ĐS: } \frac{10}{3} .$

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{2+5+8+\dots+3n-1}{4n^2+1}. \quad \text{ĐS: } \frac{3}{8}.$$

$$2) \lim \frac{\sqrt{1+4+7+\dots+3n+1}}{2n^2+\sqrt{n^4+2n+1}}. \quad \text{ĐS: } 0.$$

$$3) \lim \frac{2+4+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n + 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{2}{3}.$$

$$4) \lim \left[\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \right]. \quad \text{ĐS: } 1.$$

BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giới hạn của hàm số tại một điểm).

Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn của hàm số tại vô cực).

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; +\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

GIỚI HẠN HỮU HẠN	GIỚI HẠN VÔ CỰC
Giới hạn đặc biệt 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ($c \in \mathbb{R}$).	Giới hạn đặc biệt 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$. 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{khi } k : 2 \text{ (} k \neq 0 \text{)} \\ -\infty & \text{khi } k \text{ lẻ} \end{cases}$
Định lí Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$. 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$. 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ với $M \neq 0$. Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.	Định lí 1 Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \end{cases}$ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$
Giới hạn một bên $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.	

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức và mẫu thức là các đa thức.

Phương pháp giải:

Khử dạng vô định bằng cách phân tích thành tích bằng cách chia Hooc – nơ (đầu rơi, nhân tới, cộng chéo), rồi sau đó đơn giản biểu thức để khử dạng vô định.

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4}$. **Đs:** $A = \frac{11}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+\frac{7}{2})}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+7}{x+2} = \frac{11}{4}$$

! Cần nhớ: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Học sinh thường quên nhân thêm a .

Ví dụ 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$. **Đs:** $A = \frac{11}{17}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(4x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}$$

Nhận xét: Bảng chia Hooc – nơ (đầu rơi, nhân tới cộng chéo) như sau:

Phân tích $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$ thành tích số:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = (x-3)(2x^2 + x + 1)$$

Phân tích $4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ thành tích số:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -13 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3 = (x-3)(4x^2 - x + 1).$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$. **Đs:** $A = \frac{49}{24}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - x) - (x - 1)}{(x^{50} - x) - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{99} - 1) - (x - 1)}{x(x^{49} - 1) - (x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x^{98} + x^{97} + x^{96} + \dots + x + 1) - (x - 1)}{x(x - 1)(x^{48} + x^{47} + x^{46} + \dots + x + 1) - (x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + x^{47} + \dots + x^2 + x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x - 1)}{(x^{49} + x^{48} + x^{47} + \dots + x^2 + x - 1)} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}
 \end{aligned}$$

!Cần nhớ: Hằng đẳng thức $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$.

Chứng minh: Xét cấp số nhân $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ có n số hạng và $u_1 = 1, q = x$.

Khi đó

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}).$$

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$. ĐS: $A = \frac{1}{4}$.

2) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$. ĐS: $A = \frac{2}{5}$.

3) $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$. ĐS: $A = -\frac{1}{6}$.

4) $A = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x}$. ĐS: $A = \frac{1}{5}$.

5) $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}$. ĐS: $A = 8$.

6) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$. ĐS: $A = \frac{4}{3}$.

7) $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$. ĐS: $A = -16$.

8) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}$. ĐS: $A = -\frac{4}{3}$.

9) $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$. ĐS: $A = 12$.

10) $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}$. ĐS: $A = \frac{12}{7}$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

1) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$. ĐS: $A = -1$.

2) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$. ĐS: $A = \frac{1}{2}$.

3) $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$. ĐS: $A = \frac{1}{2}$.

4) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$. ĐS: $A = -\frac{3}{2}$.

$$5) A = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2}.$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{18 + 19\sqrt{3}}{6}.$$

$$6) A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}. \text{ĐS: } A = 0.$$

$$7) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}. \text{ĐS: } A = \frac{3}{4}.$$

$$8) A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right). \text{ĐS: } A = \frac{1}{2}.$$

$$9) A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x - 2} + \frac{1}{x^2 - 5x - 6} \right).$$

$$\text{ĐS: } A = -2.$$

$$10) A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right).$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{1}{9}.$$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

$$1) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}. \text{ĐS: } A = \frac{8}{14}.$$

$$2) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x^2 - 3x + 2}. \text{ĐS: } A = -50.$$

$$3) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} \text{ (Với } n \text{ là số nguyên).}$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{n^2 - n}{2}.$$

$$4) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}.$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$5) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^m - m} \text{ (} m, n \text{ là số nguyên).}$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{n(n+1)}{m(m+1)}.$$

$$6) A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right).$$

$$\text{ĐS: } A = \frac{m-n}{2}.$$

❸ LỜI GIẢI

Bài 1. 1) Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$

2) Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}.$

3) Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{1}{6}.$

4) Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-4)(x-5)}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-4}{x} = \frac{1}{5}.$

5) Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8.$

$$6) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$7) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2+4)}{(x+4)} = -16.$$

$$8) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-4)} = -\frac{4}{3}.$$

$$9) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x-1)} = 12.$$

! Cần nhớ: Hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ và $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$10) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2-2x+4)}{(x+9)} = \frac{12}{7}.$$

Bài 2.

$$1) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 - 3x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1} = -1.$$

$$2) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}.$$

$$3) A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(2x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

$$4) A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x-3} = -\frac{3}{2}.$$

$$5) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \left(-\frac{(x+\sqrt{3})(2x^2 - (3+2\sqrt{3})x + 7+3\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}-x)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \left(-\frac{2x^2 - (3+2\sqrt{3})x + 7+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x} \right) = \frac{18+19\sqrt{3}}{6}.$$

$$6) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)^2}{(x-3)(x+3)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x^2+1)} = 0.$$

$$7) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{x^4 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2-x-1)}{(x-1)(x^3+x^2-3x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2-x-1)}{(x^3+x^2-3x-3)} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} 8) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-12x+16}{(x-2)(x^3-8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x-2} + \frac{1}{x^2-5x-6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x-6+x^2-3x-2}{(x^2-3x-2)(x^2-5x-6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-3)(x-1)} = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-x^2-x+2}{(x^2+x-2)(x^3-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{(x^2+x-2)(x^3-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Bài 3.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}-x-(x-1)}{x^{30}-x-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{19}-1)-(x-1)}{x(x^{29}-1)-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^{18}+x^{17}+\dots+x+1)-(x-1)}{x(x-1)(x^{28}+x^{27}+\dots+x+1)-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{19}+x^{18}+\dots+x-1)}{(x-1)(x^{29}+x^{28}+\dots+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{19}+x^{18}+\dots+x-1)}{(x^{29}+x^{28}+\dots+x-1)} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\dots+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{49}+x^{48}+\dots+x+1}{x-2} = -50$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)-n(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1-n)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1-n}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1}-1+x^{n-2}-1+\dots+x^2-1+x-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1)+(x-1)(x^{n-3}+x^{n-4}+\dots+x+1)+\dots+(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1)+(x^{n-3}+x^{n-4}+\dots+x+1)+\dots+1 \right] = (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{n^2-n}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{n+1} - x) - n(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^n - 1) - n(x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x - n)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - n}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1 \right] \\
 &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^m - m} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1}{x^m - 1 + x^{m-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x-1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + (x-1)(x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1}{(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + (x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1}{m + (m-1) + (m-2) + \dots + 1} = \frac{n(n+1)}{m(m+1)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \text{ Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{1}{1-x} \right) - \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{1}{1-x} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Và } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{1}{1-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m - (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})}{1-x^m} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) + (1-x^2) + \dots + (1-x^{m-1})}{1-x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \left[1 + (1+x) + \dots + (1+x+x^2 + \dots + x^{m-2}) \right]}{(1-x)(1+x+x^2 + \dots + x^{m-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (1+x) + \dots + (1+x+x^2 + \dots + x^{m-2})}{1+x+x^2 + \dots + x^{m-1}} = \frac{1+2+3+\dots+m-1}{m} = \frac{m-1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right) = \frac{n-1}{2}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-1}{2} - \frac{n-1}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

♦Dạng 2. Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức và mẫu thức có chứa căn thức.

Phương pháp giải:

Nhân lượng liên hợp để khử dạng vô định.

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$.

Đs: $B = -\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3 - \sqrt{x+3})(3 + \sqrt{x+3})}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{9 - (x+3)}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6-x}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+3}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{6+3}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Đs: $E = -1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 + 2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2}}_A + \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2}}_B \\ A &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+2 - 8}{x-2 \cdot \sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x-2 \cdot \sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} = \frac{1}{4} \\ B &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 5x-6}{x-2 \cdot 2 + \sqrt{5x-6}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5-2x}{x-2 \cdot 2 + \sqrt{5x-6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{x-2 \cdot 2 + \sqrt{5x-6}} = -\frac{5}{4} \\ \text{Suy ra } E &= A + B = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3} + 2}{x+1}$.

Đs: $L = \frac{5}{12}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } L &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x-3+8}{x+1 \cdot \sqrt[3]{5x-3}^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{5x-3} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x+1}{x+1 \cdot \sqrt[3]{5x-3}^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{5x-3} + 4} \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5}{\sqrt[3]{5x-3}^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{5x-3} + 4} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$.

Đs: $E = \frac{-1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 - \sqrt{3x-2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+2-8}{x-2 \cdot \sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2-4}{x-2 \cdot \sqrt{3x-2} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x-2 \cdot \sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x-2 \cdot \sqrt{3x-2} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt[3]{3x+2}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{3x-2} + 2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$.

Đs: $F = \frac{7}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1 + \sqrt{1+2x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot 1 + 4x - 1}{x \cdot \sqrt[3]{1+4x}^2 + \sqrt[3]{1+4x} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1}{x \cdot \sqrt{1+2x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sqrt{1+2x}}{\sqrt[3]{1+4x}^2 + \sqrt[3]{1+4x} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$1) B = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3-\sqrt{x+1}}. \text{Đs: } B = -6$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}. \text{Đs: } B = -\frac{1}{4}$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x}-x}{2x-6}. \text{Đs: } B = \frac{1}{4}$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}. \text{Đs: } B = \frac{1}{16}$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}. \text{Đs: } B = -\frac{3}{16}$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}. \text{Đs: } B = -\frac{1}{54}$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2+x-10}. \text{Đs: } B = \frac{1}{36}$$

$$8) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7-2x}+x-2}{x^2-1}. \text{Đs: } B = -\frac{1}{3}$$

$$9) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5-\sqrt{2x^2+x+8}}{x^2+3x+2}. \text{Đs: } B = \frac{5}{2}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$1) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3}. \text{Đs: } B = 3$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}}. \text{Đs: } B = \frac{3}{2}$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}. \text{Đs: } B = -\frac{1}{4}$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}. \text{Đs: } B = -3$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}. \text{Đs: } B = 0$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}. \text{Đs: } B = 1$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}. \text{Đs: } B = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

$$1) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}.$$

$$\text{Đs: } B = \frac{7}{24}$$

$$2) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}.$$

$$\text{Đs: } B = \frac{4}{3}$$

$$3) L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6}+\sqrt{2x-2}-8}{x-3}.$$

$$\text{Đs: } L = \frac{5}{6}$$

$$4) L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1}+x^2-8}{x-2}.$$

$$\text{Đs: } L = 8$$

$$5) L = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x-4\sqrt{2x-3}+x-84}{x-6}.$$

$$\text{Đs: } L = \frac{74}{3}$$

$$6) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}\sqrt{1+6x}-1}{x}.$$

Đs: $L = 5$

$$7) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x-1} - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Đs: $L = -\frac{5}{2}$

$$8) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x-7+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x+1}.$$

Đs: $L = -\frac{17}{16}$

$$9) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2}.$$

Đs: $L = -\frac{5}{12}$

$$10) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{x-1}.$$

Đs: $L = \frac{11}{6}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$$1) L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}.$$

Đs: $L = \frac{1}{3}$

$$2) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

Đs: $L = \frac{1}{3}$

$$3) L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}.$$

Đs: $L = \frac{1}{2}$

$$4) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

Đs: $L = \frac{1}{6}$

$$5) L = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x+9}-5}.$$

Đs: $L = \frac{5}{12}$

$$6) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}.$$

Đs: $L = 1$

$$7) L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Đs: $L = \frac{3}{2}$

$$8) L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}.$$

Đs: $L = \frac{7}{54}$

$$9) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1}.$$

Đs: $L = -\frac{1}{4}$

$$10) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

Đs: $L = -\frac{11}{12}$

$$11) L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4}.$$

Đs: $L = \frac{5}{72}$

$$12) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2+x}.$$

Đs: $L = 1$

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

$$1) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.$$

Đs: $\frac{a}{n}$

$$2) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{x}. \quad \text{Đs: } \frac{a}{n} - \frac{b}{m}$$

$$3) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} (ab \neq 0). \quad \text{Đs: } \frac{am}{bn}$$

$$4) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1}. \quad \text{Đs: } 2 \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{m} \right)$$

❶ LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $B = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3-\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{3+\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{9-x+1} \cdot \frac{3+\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{8-x} \cdot \frac{3+\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \left[- \frac{3+\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}} \right] = -6.$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4+x+x^2} + 2}{\sqrt{4+x+x^2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4+x+x^2-4}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4+x+x^2} + 2}{\sqrt{4+x+x^2} + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4+x+x^2} + 2}{\sqrt{4+x+x^2} + 2} = -\frac{1}{4}.$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x} - x}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x} - x}{2x-6} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-3x} + x}{\sqrt{2x^2-3x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2} \cdot \frac{x-3}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-3x} + x}{\sqrt{2x^2-3x} + x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-3x} + x}{\sqrt{2x^2-3x} + x} = \frac{1}{4}.$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{16}.$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-3x+2}{x^2-4} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \cdot \frac{2-x}{x+2} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{x+2} = -\frac{3}{16}.$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{x(9-x)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{x(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{54}.$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2+x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{1}{2x+5} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x+5} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{36}.$$

$$8) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7-2x}+x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7-2x-x-2^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-2x}+2-x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2+2x+3}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-2x}+2-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+1} \cdot \frac{3-x}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-2x}+2-x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3-x}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-2x}+2-x} = -\frac{1}{3}.$$

$$9) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5-\sqrt{2x^2+x+8}}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5^2-2x^2+x+8}{x^2+3x+2} \cdot \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x^2+x+8}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+19x+17}{x^2+3x+2} \cdot \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x^2+x+8}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+1} \cdot \frac{2x+17}{x+2} \cdot \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x^2+x+8}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+17}{x+2} \cdot \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x^2+x+8}} = \frac{5}{2}.$$

Bài 2.

$$1) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = 3$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}} = \frac{3}{2}.$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2} \cdot \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{4}.$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3} \cdot \frac{3-x}{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}} = -3.$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+2-1-x}{x^4+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - x + 2} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - x + 2} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{1-x}}$$

$$= 0.$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-1}{x-1 \cdot \sqrt[4]{4x-3}^3 + \sqrt[4]{4x-3}^2 + \sqrt[4]{4x-3} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt[4]{4x-3}^3 + \sqrt[4]{4x-3}^2 + \sqrt[4]{4x-3} + 1} = 1.$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-2x-4}{x^2-x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x+5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x+5}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Bài 3.

$$1) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3 + \sqrt{x+9}-4}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{x}{\sqrt{x+16}+4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \right) = \frac{7}{24}.$$

$$2) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}-2 + \sqrt{5x+4}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{5x-1}{\sqrt{5x+4}+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+3} \right) = \frac{4}{3}.$$

$$3) L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6}+\sqrt{2x-2}-8}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6}-6 + \sqrt{2x-2}-2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \frac{x+6-9}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{2x-2-4}{\sqrt{2x-2}+2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + 2 \frac{x-3}{\sqrt{2x-2}+2}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} \right) = \frac{5}{6}.$$

$$\begin{aligned}
 4) L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} - x^2 + 2x^2 - 4}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \frac{4x-4-x^2}{2\sqrt{x-1}+x} + 2x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x \frac{x-2^2}{2\sqrt{x-1}+x} + 2x-2}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-x \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}+x} + 2x-2 \right) = 8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) L &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x-4\sqrt{2x-3}+x-84}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{[5x-4\sqrt{2x-3}-3]5x-4}{x-6} + 16x-96 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x-4\sqrt{2x-3}-3}{x-6} + 16 = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x-4\sqrt{2x-3}+3}{x-6} + 16 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{10x-8}{\sqrt{2x-3}+3} + 16 \right) = \frac{74}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}\sqrt{1+6x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{24x^2+10x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x^2+10x+1-1}{x\sqrt{24x^2+10x+1}+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(24x+10)}{x\sqrt{24x^2+10x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x+10}{\sqrt{24x^2+10x+1}+1} = 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-1}-3x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x-1^2} + \frac{\sqrt{4x-3}-2x+1}{x-1^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x-1-x^2}{x-1^2\sqrt{2x-1}+x} + \frac{4x-3-2x+1^2}{x-1^2\sqrt{4x-3}+2x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{\sqrt{2x-1}+x} + \frac{4}{\sqrt{4x-3}+2x-1} \right] = -\frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x-7+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{x+3}-x-7+2\sqrt{2x-1}-2x}{x-1^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{16x+48-x^2-14x-49}{x+7+4\sqrt{x+3}} + \frac{4(2x-1)-4x^2}{2x+2\sqrt{2x-1}}}{x-1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-x-1^2}{x+7+4\sqrt{x+3}} + \frac{-4x-1^2}{2x+2\sqrt{2x-1}}}{x-1^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x+7+4\sqrt{x+3}} - \frac{4}{2x+2\sqrt{2x-1}} \right) = -\frac{17}{16}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} - x + 2 + \sqrt{9-6x} + x - 3}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x+4-x^2-4x-4}{\sqrt{4x+4}+x+2} + \frac{9-6x-x^2+6x-9}{\sqrt{9-6x}-x-3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{x+2+\sqrt{4x+3}} - \frac{-x^2}{\sqrt{9-6x}-x-3}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x+2+\sqrt{4x+4}} - \frac{1}{\sqrt{9-6x}-x-3} \right) = -\frac{5}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x + 1 + \sqrt{6x+3}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1 + \frac{6x+3-x^2-4x-4}{\sqrt{6x+3}+x+2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1 + \frac{x-1}{\sqrt{6x+3}+x+2}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{6x+3}+x+2} \right) = \frac{11}{6}.
 \end{aligned}$$

Bài 4.

$$1) \quad L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-8}{x-2 \cdot \sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}.$$

$$2) \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - x}{x \cdot 1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1-x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1-x}^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3 \left(\sqrt[3]{x^2-1}^2 + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}^2 + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \sqrt[3]{x+7}^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x+7}^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$5) \quad L = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{2x+9} - 5} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}}{\frac{2x-16}{\sqrt{2x+9} + 5}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x+9} + 5}{2 \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{5}{12}.$$

$$6) L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}}{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2}^2 - \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 1.$$

$$\begin{aligned} 7) L &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} - 2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x^3 + 2}{\sqrt[3]{10+2x^3}^2 + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x + 1}{\sqrt[3]{10+2x^3}^2 + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{10+2x^3}^2 + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + 1}{x + 2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{x^2 - 3x + 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{8x + 11 - 27}{\sqrt[3]{8x+11}^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9}}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x + 7 - 9}{\sqrt{x+7} + 3}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{8}{\sqrt[3]{8x+11}^2 + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9}}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+7} + 3}}{x - 1} = \frac{8}{27} - \frac{1}{7} = \frac{7}{54}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - 2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 + 7 - 8}{\sqrt[3]{x^3+7}^2 + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4}}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 + 3 - 4}{\sqrt{x^2+3} + 2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x^3+7}^2 + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4}}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2+3} + 2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x^3+7}^2 + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4}}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x + 1}{\sqrt{x^2+3} + 2}}{x-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - 2}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - 2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \frac{1-x-4}{2\sqrt{1-x}+2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8-x-8}{x \sqrt[3]{8-x^2} + 2\sqrt[3]{8-x} + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{2\sqrt{1-x}+2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{8-x^2} + 2\sqrt[3]{8-x} + 4} = -1 - \frac{-1}{12} = -\frac{11}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 3}{x^2-4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 27}{x^2-4 \left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}^2 + 3\sqrt[3]{2x^2+4x+11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7-9}{x^2-4 \sqrt{x+7}-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-2}{x^2-4 \left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}^2 + 3\sqrt[3]{2x^2+4x+11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4 \sqrt{x+7}-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x+2 \left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}^2 + 3\sqrt[3]{2x^2+4x+11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2 \sqrt{x+7}-3} \\
 &= \frac{1}{9} - \frac{1}{24} = \frac{5}{72}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 2 + 2\sqrt{4+x} - 4}{x^2+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 2}{x^2+x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{4+x} - 4}{x^2+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot 8 + 3x - 8}{x \cdot x + 1 \cdot \left(\sqrt[3]{8+3x}^2 + 2\sqrt[3]{8+3x} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 4 + x - 4}{x \cdot x + 1 \cdot \sqrt{4+x} + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot 3}{x + 1 \cdot \left(\sqrt[3]{8+3x}^2 + 2\sqrt[3]{8+3x} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x + 1 \cdot \sqrt{4+x} + 2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Bài 5. 1) $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+ax-1}{x \sqrt[n]{1+ax}^{n-1} + \sqrt[n]{1+ax}^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt[n]{1+ax}^{n-1} + \sqrt[n]{1+ax}^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1} = \frac{a}{n}.$$

2) $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1 - \sqrt[m]{1+bx} + 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} = \frac{a}{n} - \frac{b}{m}.$$

$$3) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x}} \right]$$

$$\text{Xét } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}; B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} = \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow F = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{\frac{b}{m}} = \frac{am}{bn}.$$

$$\begin{aligned} 4) F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1 - \sqrt[m]{1+bx} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} = \frac{b}{m} \quad C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = 2$$

$$\Rightarrow F = \frac{a}{n} \cdot 2 - \frac{b}{m} \cdot 2 = 2 \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{m} \right).$$

♦Dạng 3. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \infty$.

Phương pháp giải:

- Đối với dạng đa thức không căn, ta rút bậc cao và áp dụng công thức khi $x \rightarrow +\infty$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{khi } k = 2l \\ -\infty & \text{khi } k = 2l + 1 \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \text{ (c hằng số)}$$

- Đối với dạng phân số không căn, ta làm tương tự như giới hạn dãy số, tức rút bậc cao nhất của tử và mẫu, sau đó áp dụng công thức trên.

- Ngoài việc đưa ra khỏi căn bậc chẵn cần có trị tuyệt đối, học sinh cần phân biệt khi nào đưa ra ngoài căn, khi nào liên hợp. Phương pháp suy luận cũng tương tự như giới hạn của dãy số, nhưng cần phân biệt khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1).$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$.

Đs: $\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x} - 6 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x} - 6} = \frac{1 + 0 + 0}{0 - 0 - 6} = -\frac{1}{6}.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + 2x$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = -\infty \\ &\text{(Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right] = 2 - 1 = 1 > 0). \end{aligned}$$

❷ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 2$. **Đs:** $-\infty$.

2) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x^2 - 1$. **Đs:** $+\infty$.

3) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 2x^2 + 1$. **Đs:** $+\infty$.

4) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 + 2x^2 + 3$. **Đs:** $-\infty$.

5) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 - x^2 + 6$. **Đs:** $-\infty$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

1) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 8x}{2x - 1}$.

Đs: $B = -4$.

2) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x - 1}$.

Đs: $B = 1$.

- 3) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$. Đs: $B = 2$.
- 4) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$. Đs: $B = -2$.
- 5) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$. Đs: $B = 0$.
- 6) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$. Đs: $B = \frac{2}{9}$.
- 7) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3^3 \cdot 2x + 1^4}{2 + 2x^7}$. Đs: $B = 8$.
- 8) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3^{20} \cdot 3x + 2^{30}}{1 + 2x^{50}}$. Đs: $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.
- 9) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4}$. Đs: $B = -\infty$.
- 10) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{5 - x}$. Đs: $B = -\infty$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

- 1) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 10$. Đs: $\frac{17}{2}$.
- 2) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x}$. Đs: $-\infty$.
- 3) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 13$. Đs: 14 .
- 4) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x + 5$. Đs: $\frac{9}{2}$.
- 5) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} + x$. Đs: $+\infty$.
- 6) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x + 2021$. Đs: 2019 .
- 7) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$. Đs: $-\frac{1}{2}$.
- 8) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$. Đs: -2 .

- 9) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2$. Đs: $\frac{3}{4}$.
- 10) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$. Đs: $\frac{1}{2}$.
- 11) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1$. Đs: $\frac{3}{2}$.
- 12) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$. Đs: -2 .
- 13) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 9x - 21} - \sqrt{4x^2 - 7x + 13}$. Đs: $\frac{1}{2}$
- 14) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2|x| - 3x^2 + 7x - 1}{2x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 3x}$. Đs: 1 .
- 15) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3$. Đs: 4
- 16) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 \sqrt{\frac{3 - x}{5 - 3x - x^3}} \right]$. Đs: -1
- 17) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{16x^2 + 3x} - 4x + 5$. Đs: $\frac{43}{8}$
- 18) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right)$. Đs: $-\sqrt{2}$
- 19) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1}$. Đs: $-\frac{5}{2}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right]$. Đs: $-\sqrt{2}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$. Đs: 2 .
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x}$. Đs: 4 .
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - x^2} - x\sqrt{x^2 + 3}}{x^5 - 2x}$. Đs: $-\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

- | | |
|---|---------------------|
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1+3\sqrt{4x^2+x-5}}{1-3x+2\sqrt{9x^2-x+10}}.$ | Đs: $\frac{8}{3}.$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{1-8x^3}}{6x+9}.$ | Đs: $-\frac{1}{6}.$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1 \sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}.$ | Đs: $\frac{2}{5}.$ |
| 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+3x-1}}{\sqrt{9x^2-x+3}-5x-3}.$ | Đs: $-\frac{1}{4}.$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}.$ | Đs: 1. |
| 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}}.$ | Đs: 2. |
| 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-7x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+5x+3}.$ | Đs: -1. |
| 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2\sqrt{1-2x}}{1-x}.$ | Đs: -1. |

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|----------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x}-x.$ | Đs: $+\infty.$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-4x}-x.$ | Đs: -2. |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}.$ | Đs: 0. |
| 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}.$ | Đs: $-\frac{1}{2}.$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x+1}-x-2.$ | Đs: 0. |
| 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+5}+x+1.$ | Đs: $\frac{5}{2}.$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{27x^3-x^2}-3x.$ | Đs: $-\frac{1}{27}.$ |
| 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-\sqrt{4x^2+2x-1}.$ | Đs: $-\frac{1}{2}.$ |

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 - \sqrt{4x^2 + 4x + 3}.$$

Đs: -4 .

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2.$$

Đs: $\frac{3}{4}$.

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x + 4.$$

Đs: $\frac{19}{4}$.

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3.$$

Đs: 4 .

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[3]{4x^2 - x^3}}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}}.$$

Đs: $\frac{16}{9}$.

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x + 1.$$

Đs: 1 .

3 LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$, (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = 1 > 0$).

2) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$, (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0$).

3) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$, (vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1 > 0$).

4) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) \right] = -\infty$, (vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -1 < 0$).

5) $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) \right] = -\infty$, (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -1 < 0$).

Bài 2. 1) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-8x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 8 \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 8}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{0-8}{2-0} = -4$.

2) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$.

3) $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{2+0-0}{1+0} = 2$.

$$4) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)}{x^3 \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)}{\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{2+0-0}{-1-0+0} = -2.$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{\left(2 - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{0-0+0}{2-0} = 0.$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x^2 - 4} \cdot \frac{2x + 4}{3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{4}{x} \right)}{\left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{2+0}{3-0} \cdot \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{9}$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 + \frac{3}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x} \right)^4}{\left(2 + \frac{3}{x} \right)^7} = \frac{4+0}{2+0} = 8.$$

$$8) B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x} \right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x} \right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x} \right)^{50}} = \frac{2-0}{2+0} = \left(\frac{3}{2} \right)^{30}.$$

$$9) B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} \right) = -\infty,$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} = 3 \end{array} \right).$$

$$10) B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{5 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x \left(\frac{5}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \cdot \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} \right) = -\infty,$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} = -2 \end{array} \right).$$

Bài 3. 1) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 10 = 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$

$$= 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x}$$

$$= 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = 10 + \frac{-3}{2} = \frac{17}{2}.$$

2) $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{x \left(\frac{1}{x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x} - 2} = -\infty,$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{\left(\frac{1}{x} - 2 \right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \right)$$

3) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 13 = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x$

$$13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2x} = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x}$$

$$= 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \sqrt{\left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x} = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{-x \sqrt{\left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x}$$

$$= 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2} = 14$$

4) $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x + 5 = 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right) = 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \right]$

$$= 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{1 - 1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right) \right] = 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right) = \frac{9}{2}.$$

$$5) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = +\infty,$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \right).$$

$$6) C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x + 2021 = 2021 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - x \right) = 2021 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 1 \right) \right]$$

$$= 2021 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1 - \frac{4}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} \right) \right] = 2021 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} \right) = 2021 - \frac{4}{2} = 2019.$$

$$7) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

$$8) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x} + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2|x|}{x} + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{5}{x}} = \frac{2 + 0}{-\sqrt{1 + 0} + 0} = -2.$$

$$9) C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - 2x^2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \frac{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} - 4}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2} = \frac{3}{4}.$$

$$10) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2x}{2x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2 \right)}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$11) C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1 = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \frac{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \right]$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$12) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - \sqrt{x^2 + x}}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{|x|}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{10}{x}} = \frac{-1 - 1}{1} = -2.$$

$$13) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 9x - 21} - \sqrt{4x^2 - 7x + 13} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{\left(-4 + \frac{9}{x} + \frac{21}{x^2} + 4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2} \right)}{\left(\sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{34}{x}}{\sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}}} = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

$$14) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2|x| - 3x^2 + 7x - 1}{2x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{4|x|}{x} - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right) \cdot -x \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{4|x|}{x} - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{-\left(2 + \frac{1}{x} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{-4}{-2^2 \cdot 1} = 1$$

$$15) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3 = 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \right)$$

$$= 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{\left(4 - 4 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} \right] = 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = 3 + \frac{4}{4} = 4.$$

$$16) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 \sqrt{\frac{3 - x}{5 - 3x - x^3}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{\frac{3}{x} - 1}{x^2 \left(\frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^2} - 1 \right)}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[- \left(1 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{\frac{3}{x} - 1}{\left(\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} - 1 \right)}} \right] = -1 \cdot \sqrt{\frac{0-1}{0-0-1}} = -1.$$

$$17) C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{16x^2 + 3x} - 4x + 5$$

$$= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{16 + \frac{3}{x}} - 4x \right) = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{16 + \frac{3}{x}} - 4 \right) \right]$$

$$= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \frac{16 + \frac{3}{x} - 16}{\sqrt{16 + \frac{3}{x}} + 4} \right] = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{16 + \frac{3}{x}} + 4} = 5 + \frac{3}{4+4} = 5 + \frac{3}{8} = \frac{43}{8}.$$

$$18) C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \sqrt{\frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} \right)}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[- \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}}} \right] = -\sqrt{2}.$$

$$19) C = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1} = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \frac{1 - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \right]$$

$$= -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Bài 4.

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \frac{-x}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 \cdot \sqrt{\frac{2x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}}} \right] = -\sqrt{2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = 2.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3x + 1}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{1+3}{2-1} = 4.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - x^2} - x\sqrt{x^2 + 3}}{x^2(5 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x^2\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{x^2\left(\frac{5}{x} - 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{\left(\frac{5}{x} - 2\right)} = -\frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3\sqrt{4x^2 + x - 5}}{1 - 3x + 2\sqrt{9x^2 - x + 10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}}{1 - 3x + 2x\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x} - 3 + 2\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}}} = \frac{8}{3}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{1 - 8x^3}}{6x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 8}}{6x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 8}}{6 + \frac{9}{x}} = -\frac{1}{6}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x - 5x^2} \sqrt{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1 - x\sqrt{1 - \frac{3}{x}}}{x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right) - \sqrt{1 - \frac{3}{x}}}{\frac{1}{x} - 5} = \frac{2}{5}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 3x - 1}}{\sqrt{9x^2 - x + 3} - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 5 - \frac{3}{x}} = -\frac{1}{4}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{6x + \sqrt{4x^2 + x + 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{6x - x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 + \frac{3}{x}}{6 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = 2.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 7x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 7x + 2}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 7 + \frac{2}{x}}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 5 + \frac{3}{x}} = -1.$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2\sqrt{1 - 2x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}}{\frac{1}{x} - 1} = -1.$$

Bài 5.

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} = -2.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2 - x-2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = 0.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = \frac{1}{2}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 1 - x^2 - 2^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}\right)} = 0.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 5 - x^2 - 1^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 4}{-x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{4}{x}}{\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{27x^3 - x^2} - 3x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27x^3 - x^2 - 27x^3}{\sqrt[3]{27x^3 - x^2}^2 + 3x\sqrt[3]{27x^3 - x^2} + 9x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} \right)^2 + 3x^2 \sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} + 9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} \right)^2 + 3\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} + 9} = -\frac{1}{27}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 2x + 1}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 1}{2x + x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 - \sqrt{4x^2 + 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3^2 - 4x^2 - 4x - 3}{2x - 3 + \sqrt{4x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x + 6}{2x - 3 + \sqrt{4x^2 + 4x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x + 6}{\left(2x - 3 + x\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16 + \frac{6}{x}}{\left(2 - \frac{3}{x} + \sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 3x^2 + 1 - 4x^4}{\sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 \sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2} = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x + 4 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - 2x - 4^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19x - 15}{\left(x\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x - 4 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19 - \frac{15}{x}}{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{4}{x} \right)} = \frac{19}{4}.
 \end{aligned}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1 - 2x + 3^2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16x - 8}{\left(-x\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x - 3 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16 - \frac{8}{x}}{\left(-\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 - \frac{3}{x} \right)} = 4.$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[3]{4x^2 - x^3}}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 4x^2 - x^3}{4x^2 - 4x^2 + 3x} \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}}{x^2 - x\sqrt{4x^2 - x^3} + \sqrt[3]{4x^2 - x^3}^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - \frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{4}{x} - 1} + \left(\sqrt[3]{\frac{4}{x} - 1} \right)^2} \right] = \frac{16}{9}.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 1 - (2x - 1)^3}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}^2 + 2x - 1 \sqrt[3]{8x^3 + 1} + 2x - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 6x + 2}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}^2 + 2x - 1 \sqrt[3]{8x^3 + 1} + 2x - 1^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}} \right)^2 + \left(2 - \frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}} + \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2} = 1.$$

♦Dạng 4. Giới hạn một bên $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

Phương pháp giải:

- Sử dụng các định lý về giới hạn hàm số

Chú ý: $x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$

$x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1}$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x-3 = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0 \\ x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = -\infty.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 15 = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0 \\ x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2} = -\infty.$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-x}{3-x}$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (2-x) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0 \\ x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3-x > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-x}{3-x} = -\infty.$$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4}$.

Đs: $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4) = 0 \\ x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow 2x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4} = +\infty.$$

Ví dụ 5. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-5) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4)^2 = 0 \\ x \rightarrow 4^- \Rightarrow (x-4)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2} = -\infty.$$

Ví dụ 6. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-8}{(3-x)^2}$.

Đs: $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x-8) = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)^2 = 0 \\ x \rightarrow 3^- \Rightarrow (3-x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-8}{(3-x)^2} = +\infty.$$

Ví dụ 7. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$.

Đs: $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x-1}{x+3}$

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (2x-1) = -7 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (x+3) = 0 \\ x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = -\infty.$

Ví dụ 8. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$

Đs: $-\infty.$

Lời giải

Ta có: $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x-2)(x+2)] = 0 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0 \end{cases} \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty.$

Ví dụ 9. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}.$

Đs: $-\frac{1}{3}.$

Lời giải

Vì $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |2-x| = 2-x$

Do đó $B = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x-1} = -\frac{1}{3}.$

Ví dụ 10. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15}.$

Đs: $\frac{1}{5}.$

Lời giải

Vì $x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow |x-3| = x-3$

Do đó $B = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{5(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3}.$ **Đs:** $-\frac{1}{7}.$

2) $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}.$ **Đs:** Không tồn tại.

$$3) C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}.$$

Đs: Không tồn tại.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$1) C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2x + |x - 1|\sqrt{x + 3}}{x^2 - 2x + 1}.$$

Đs: $\frac{7}{4}$.

$$2) C = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x - 1} - 1}.$$

Đs: -2.

$$3) D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Đs: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$4) D = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Đs: $\frac{1}{2}$.

$$5) D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}.$$

Đs: 1.

$$6) D = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \sqrt{\frac{x + 5}{x^3 + 2x^2 - 3}}.$$

Đs: 0.

$$7) D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4}.$$

Đs: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 3.

$$1) \text{ Tính giới hạn } C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ với } f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}. \quad \text{Đs: } -2$$

$$2) \text{ Tính giới hạn } C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ với } f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2 + 2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}. \quad \text{Đs: } -2.$$

$$3) \text{ Tính giới hạn } C = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ với } f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 2}{x + 1} & \text{khi } x < -2 \\ x + 10 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}. \quad \text{Đs: } 8.$$

Bài 4.

$$\text{Tìm } m \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \text{ có giới hạn tại } x = -1.$$

Đs: $m = 1$ hoặc $m = -2$.

❸ LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3 + x - 3}$.

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$.

Do đó $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2x^2 + 2x + 3} = -\frac{1}{7}$.

2) $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

+) Vì $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) = -1$.

+) Vì $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại giới hạn của $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

3) $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$.

Ta có $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| \cdot |x+3|}{x-3}$. Do đó:

+) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3) \cdot |x+3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} |x+3| = 6$.

+) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3) \cdot |x+3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-|x+3|) = -6$.

Suy ra giới hạn của $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$ không tồn tại.

Bài 2. 1) $C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2x + |x-1|\sqrt{x+3}}{x^2 - 2x + 1}$.

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$. Do đó

$C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x(x-1) - (x-1)\sqrt{x+3}}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(2x + \sqrt{x+3})}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x+3}{2x + \sqrt{x+3}} = \frac{7}{4}$.

2) $C = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}-1}$.

Vì $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$. Do đó:

$$C = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-(\sqrt{x-1}+1) \right] = -2.$$

$$3) D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)(x-4)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$4) D = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2+x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2}.$$

$$5) D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}.$$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - (1-x)}{\sqrt{x^2(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{(1-x)^2}}{|x|\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{|x|} = 1.$$

$$6) D = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^3+2x^2-3}}.$$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)(x^2+3x+3)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x^2+3x+3}} \right] = 0.$$

$$7) D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}.$$

$$\text{Ta có } D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{x+2}}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+2}}{4-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 3. 1) Ta có:

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 3x) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^4 - 6x^2 - x) = 5 - 6 - 1 = -2.$$

+) Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$ nên hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

2) Ta có:

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-3) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \sqrt{7x^2 + 2}) = -2.$$

$$+) \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \text{ nên } C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2.$$

3) Ta có:

$$+) \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3x-2}{x+1} = 8.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+10) = 8.$$

$$+) \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 8 \text{ nên } C = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 8.$$

Bài 4. Ta có:

$$+) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 - x + 1) = 3.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (mx^2 - x + m^2) = m^2 + m + 1.$$

+) Để hàm số có giới hạn tại $x = -1$ thì

$$3 = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

◆Dạng 5. Giới hạn của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

- Sử dụng các định lý về giới hạn hàm số
- Sử dụng các công thức biến đổi lượng giác

- Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{4\cos^2 x - 3}$. **Đs:** $A = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{4\cos^2 x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{4(1 - \sin^2 x) - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{1 - 4\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-1}{1 + 2\sin x} = -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{2\cos^2 x - 1}$. **Đs:** $A = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2(1 - \sin^2 x) - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{1 - 2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \sin x} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x}$.

Đs: $A = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 2x - \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$.

Đs: $A = -1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 + 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x - \cos x)}{2 \sin x (\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = -1. \end{aligned}$$

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

- 1) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$. **Đs:** $A = -1$.
- 2) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$. **Đs:** $A = -1$.
- 3) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x}$. **Đs:** $A = 2$.
- 4) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$. **Đs:** $A = 2$.
- 5) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. **Đs:** $A = 0$.
- 6) $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x}$. **Đs:** $A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- 7) $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x}$. **Đs:** $A = 2$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

- 1) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$. **Đs:** $B = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.
- 2) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$. **Đs:** $B = 5$.

3) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3}$. Đs: $B = \frac{1}{3}$.	4) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Đs: $B = \frac{1}{2}$.
5) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. Đs: $B = \frac{25}{9}$.	6) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a x}{x^2}$. Đs: $B = \frac{a^2}{2}$.
7) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$. Đs: $B = 4$.	8) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$. Đs: $B = -\frac{1}{2}$.
9) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$. Đs: $B = \frac{1}{2}$.	10) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$. Đs: $B = \frac{3}{2}$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

1) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 8x} - 1) \sin^2 3x}{3x^4}$. Đs: $B = -48$.	2) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x}$. Đs: $B = -\frac{1}{2}$.
3) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$. Đs: $B = \frac{3}{2}$.	4) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x}$. Đs: $B = \frac{1}{6}$.
5) $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$. Đs: $B = \frac{1}{3}$.	
6) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$. Đs: $B = \frac{1}{4}$.	7) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \sqrt{1-x})^2}$. Đs: $B = 2$.
8) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$. Đs: $B = 1$.	9) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}$. Đs: $B = 0$.
10) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$. Đs: 1 .	

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

1) $C = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$.	Đs: $C = \frac{1}{2}$
2) $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$.	Đs: $C = \frac{1}{2}$
3) $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$.	Đs: $C = -\frac{1}{2}$.
4) $C = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.	Đs: $C = \cos a$.

❸ LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \sin x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = -1.$$

2) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} = -1.$$

3) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 6x \cdot \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 6x = 2.$

4) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \cdot \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$

5) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0.$

6) $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2}{3 \sin x - 4 \sin^3 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \cos^2 x}{\sin x (3 - 4 \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (4 \cos^2 x - 3 + 4 \cos x)}{\sin x [3 - 4(1 - \cos^2 x)]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x [(2 \cos x + 1)^2 - 4]}{\sin x [4 \cos^2 x - 1]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x + 3)(2 \cos x - 1)}{\sin x (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x + 3)}{\sin x (2 \cos x + 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

7) $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (\cos x + \sin x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(\cos x + \sin x) = 2.$$

Bài 2. 1) $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \cdot \frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} \right)^2 = \left(\frac{a}{b} \right)^2.$

$$(\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} = 1).$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \right) = 5. (\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1).$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$(\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1).$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{1}{2}, (\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1).$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{5x}{2} \cdot \left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{3x}{2}} \cdot \frac{25}{9} \right] = \frac{25}{9}$$

$$(\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{3x}{2}} = 1).$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{4} \right] = \frac{a^2}{2}, (\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} = 1).$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot 4 \cos^2 x \right) = 4, (\forall \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1).$$

$$8) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-2 \sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{-2}{4 \cos x} \right] = \frac{-1}{2}.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} = 1 \right).$$

$$9) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{\sin^3 x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$10) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{2 \cos \frac{x}{2}} \right) = \frac{3}{2}, \left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right).$$

Bài 3.

$$1) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 8x} - 1) \sin^2 3x}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 8x - 1) \sin^2 3x}{3x^4 (\sqrt{\cos 8x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 4x \sin^2 3x}{3x^4 (\sqrt{\cos 8x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot \frac{-96}{\sqrt{\cos 8x} + 1} \right] = -48$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2x+1}} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$3) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1 + 2 \cos^2 x}{1 + \cos x \sqrt{\cos 2x}} \right] = \frac{3}{2}.$$

$$4) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{6}.$$

$$5) B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{(\sin^2 x - \cos^2 x) \left(\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\sin^2 x - \cos^2 x) \left(\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\sin x + \cos x) \left(\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1\right)} = \frac{1}{3}.$$

$$6) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \left(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x \left(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x \left(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{2}{4 \left(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}\right)} \right] = \frac{1}{4}$$

$$7) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \sqrt{1 - x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \sqrt{1 - x})^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{2(1 + \sqrt{1 - x})^2}{4} \right] = 2.$$

$$8) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - \cos^2 x}{x^2 \left(\sqrt{1 + x^2} + \cos x\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2 \left(\sqrt{1 + x^2} + \cos x\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \cos x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$9) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x + 1} + \sin x}{\sqrt{3x + 4} - 2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{3x + 4} - 2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{3x + 4} - 2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{3x + 4} + 2 + x)}{(-x^2 - x)(1 + \sqrt{2x + 1})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\sqrt{3x + 4} + 2 + x)}{-x(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\sqrt{3x + 4} + 2 + x)}{(-x - 1)(1 + \sqrt{2x + 1})} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x + 4} + 2 + x}{-x - 1} \right)$$

$$= 4 - 4 = 0.$$

$$10) B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x (\sqrt{2x+1} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{\sin x (1 + \sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2})} = 1.$$

Bài 4. 1) $C = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$, vì $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó:

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\tan \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) (-1) \tan t \right] = \lim_{t \rightarrow 0} (\cot 2t \tan t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{2 \cos^2 t} = \frac{1}{2}.$$

2) $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$

Đặt $t = x - \pi$, vì $x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó:

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

3) $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$

Đặt $t = x - \pi$, vì $x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó:

$$C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t(t-2)} = -\frac{1}{2}.$$

4) $C = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

Đặt $t = x - a$. vì $x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó:

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t+a) - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{t+2a}{2} \cdot \sin \frac{t}{2}}{2 \cdot \frac{t}{2}} = \cos a.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}.$	ĐS: $\frac{1}{5}$	2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$	ĐS : 8
3. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 2x - 3}$	ĐS: $\frac{1}{4}$	4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$	ĐS: $\frac{1}{4}.$

- | | | | |
|---|--------------------------------|--|---------------------|
| 5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{4 - x^2}.$ | ĐS: $-\frac{1}{4}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}.$ | ĐS: $-\frac{1}{6}.$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}.$ | ĐS: $\frac{2}{5}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}.$ | ĐS: $\frac{5}{4}.$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4}.$ | ĐS: $\frac{11}{4}.$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}.$ | ĐS: 3 |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{4x^2 + x - 18}.$ | ĐS: $\frac{11}{7}.$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}.$ | ĐS: $\frac{1}{2}.$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - 10x + 12}.$ | ĐS: 2 | 14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - x - 6}.$ | ĐS: $-\frac{4}{7}.$ |
| 15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}.$ | ĐS: $\frac{1}{3}.$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x}.$ | ĐS: $\frac{1}{5}.$ |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}.$ | ĐS: 8 | 18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}.$ | ĐS: 4 |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2}.$ | ĐS: $-\frac{1}{2}.$ | 20. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}.$ | ĐS: -16. |
| 21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 5x + 6}.$ | ĐS: 12 | 22. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + x^3}{x^2 + 11x + 18}.$ | ĐS: $\frac{12}{7}.$ |
| 23. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}}.$ | ĐS: $\frac{2\sqrt{2} - 1}{6}.$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}.$ | ĐS: 12. |
| 25. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}.$ | ĐS: $-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}.$ | ĐS: 3. |
| 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 27}{x}.$ | ĐS: 27. | 28. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}.$ | ĐS: 9. |
| 29. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 10x - 8}{x - 2}.$ | ĐS: 2. | 30. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$ | ĐS: -1. |
| 31. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4}.$ | ĐS: $\frac{5}{2}.$ | 32. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$ | ĐS: $-\frac{2}{5}.$ |
| 33. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6}.$ | ĐS: $-\frac{9}{11}.$ | 34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$ | ĐS: 2. |
| 35. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2}.$ | ĐS: $\frac{4}{9}.$ | 36. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}.$ | ĐS: $\frac{3}{4}.$ |
| 37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 + x^2 - 3}.$ | ĐS: $\frac{5}{8}$ | 38. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 2x - 1}.$ | ĐS: $-\frac{1}{4}$ |

- | | |
|---|--|
| 39. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ ĐS: 11 | 40. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ ĐS: -1 |
| 41. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^2 - x + 6}$ ĐS: $-\frac{6}{19}$. | 42. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}$ ĐS: $\frac{3}{4}$. |
| 43. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$ ĐS: 0. | 44. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1}$ ĐS: $\frac{2}{5}$. |
| 45. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}$ ĐS: $-\frac{4}{3}$. | 46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ ĐS: $\frac{1}{2}$. |
| 47. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4}$ ĐS: $\frac{17}{4}$. | 48. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$ ĐS: $-\frac{3}{2}$. |
| 49. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$ ĐS: $\frac{11}{17}$. | 50. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$ ĐS: $\frac{1}{2}$. |
| 51. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}$ ĐS: $\frac{11}{20}$. | 52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$ ĐS: $\frac{1}{9}$. |
| 53. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8}$ ĐS: $-\frac{7}{4}$. | 54. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2}$ ĐS: $\frac{7\sqrt{3}}{6}$. |
| 55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}$ ĐS: 0. | 56. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5}{x^2 - 1}$ ĐS: $\frac{15}{2}$. |
| 57. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ ĐS: $\frac{1}{2}$. | 58. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$ ĐS: $\frac{1}{2}$. |
| 59. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \right)$ ĐS: -2. | 60. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right)$ ĐS: $\frac{7}{2}$. |
| 61. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1} \right)$ ĐS: $\frac{2}{9}$. | 62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ ĐS: 6. |
| 63. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ ĐS: $\frac{n}{m}$. | 64. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$ ĐS: $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. |
| 65. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ ĐS: 2. | 66. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ ĐS: $\frac{n(n+1)}{2}$. |

Lời giải

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$.
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8$

3. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-1)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$
5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{2-x} = -\frac{1}{4}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{1}{6}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3x-14}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+7)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+7}{x+2} = \frac{11}{4}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-1} = 3.$
11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-x-10}{4x^2+x-18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(4x+9)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{4x+9} = \frac{11}{17}.$
12. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x+5} = \frac{1}{2}.$
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2x^2-10x+12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-2}{2(x-3)} = 2.$
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-2}{2x+3} = \frac{-4}{7}.$
15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x} = \frac{1}{3}.$
16. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-9x+20}{x^2-5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-4)(x-5)}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-4}{x} = \frac{1}{5}.$
17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8.$
18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2x-1} = 4.$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-2)(x-3)}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-2)}{-x-3} = -\frac{1}{2}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x-2)(x+2)}{(x+2)(4+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x-2)}{x+4} = -16$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + x^3}{x^2 + 11x + 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x+9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^2 + 2x + 4)}{x-3} = 12.$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x+9} = \frac{12}{7}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x-1+\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-1} = 12.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x+\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 3) = 3.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(x+3)^2 + 3(x+3) + 9]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [(x+3)^2 + 3(x+3) + 9] = 27.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{2x+3} = 9.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 10x - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 3x + 4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4) = 2.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 - 3x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1} = -1.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x+2} = \frac{5}{2}.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-5}{x^2 - 2x + 3} = -\frac{9}{11}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{4}{9}.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x+2} = \frac{3}{4}.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 + x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(2x^2 + 3x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{2x^2 + 3x + 3} = \frac{5}{8}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 - x - 3)}{(x-1)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 3}{3x+1} = -\frac{1}{4}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 3x + 1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x-1} = 11.$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x-2} = -1.$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^2 - x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(3x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{3x^2 - 2x + 3} = -\frac{6}{19}.$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - 3x - 3} = \frac{3}{4}.$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = 0.$$

$$44. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(2x^2 - x + 1)}{(3x-1)(3x^3 + x^2 + 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 3x + 1} = \frac{2}{5}.$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4} = -\frac{4}{3}.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}.$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^4 + 1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 1}{x+2} = \frac{17}{4}.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x-3} = -\frac{3}{2}.$$

49. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(4x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}.$
50. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)(x^2 + 2x + 1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2}.$
51. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{4(x-3)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4(x^2 + 1)} = \frac{11}{20}.$
52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[3]{x}-1)^2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} = \frac{1}{9}.$
53. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}{(3x + 2)(x^2 + 4x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 1}{3x + 2} = -\frac{7}{4}.$
54. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(2x^2 - (3 - 2\sqrt{3})x + 7 - 3\sqrt{3})}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^2 - (3 - 2\sqrt{3})x + 7 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$
55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$
56. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)}{(x-1)(x+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x+1} = \frac{15}{2}.$
57. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$
58. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}.$
59. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-3)(x-1)} = -2.$
60. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-5)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-5)}{x-2} = \frac{7}{2}.$
61. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{2}{9}.$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6x^2+11x+6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2+11x+6) = 6.$
63. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1} = \frac{n}{m}.$

$$\begin{aligned}
 64. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \dots + (x^2 - 1) + (x - 1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left((x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + (x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x + 1) + \dots + 1 \right) \\
 &= (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1) - (x-1)}{(x-1)(x^{49} + x^{48} + \dots + x + 1) - (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \dots + x}{x^{49} + x^{48} + \dots + x} = \frac{49}{24}$$

$$\begin{aligned}
 66. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \dots + (x^n-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x-1)(x+1) + \dots + (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + (x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

- | | | | |
|---|----------------------|--|-----------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ | ĐS: $\frac{1}{4}$. | 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1}$ | ĐS: 2 |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$ | ĐS: $-\frac{1}{6}$. | 4. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3 - \sqrt{x+1}}$ | ĐS: -6. |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$ | ĐS: $-\frac{1}{4}$. | 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-3x-x}}{2x-6}$ | ĐS: $\frac{1}{4}$. |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2-4}$ | ĐS: $\frac{1}{16}$. | 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x^2-4}$ | ĐS: $-\frac{3}{16}$. |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ | ĐS: 24. | 10. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$ | ĐS: $-\frac{1}{54}$. |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2-49}{2-\sqrt{x-3}}$ | ĐS: -56. | 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2-1}$ | ĐS: $\frac{7}{8}$. |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3+2x}}{x^2-3x}$ | ĐS: $\frac{2}{9}$. | 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{2x-x^2}-1}$ | ĐS: ∞ . |
| 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-2x}$ | ĐS: $\frac{1}{3}$. | 16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{x^2-4x}$ | ĐS: $\frac{1}{8}$. |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2+x-10}$ | ĐS: $\frac{1}{4}$. | 18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}-1}$ | ĐS: 2. |

- | | | | |
|--|----------------------|--|-----------------------------|
| 19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3}$ | ĐS: 30. | 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 + x - 2}$ | ĐS: $\frac{1}{4}$. |
| 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ | ĐS: $\frac{1}{4}$. | 22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 3(x+1)}{3 - \sqrt{4x+1}}$ | ĐS: -12. |
| 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1} - 1}{x^2 + x}$ | ĐS: 0. | 24. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{1-x^3} - 3}$ | ĐS: $-\frac{1}{2}$. |
| 25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^2} - 1}{x^2 - x}$ | ĐS: 0. | 26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} + x - 5}{x^2 - 2x}$ | ĐS: $\frac{2}{3}$. |
| 27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{2x+7} + x - 4}$ | ĐS: $\frac{3}{4}$. | 28. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2+\sqrt{7-2x}}{x^2 - 1}$ | ĐS: $\frac{1}{6}$. |
| 29. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5-\sqrt{2x^2+x+8}}{x^2+3x+2}$ | ĐS: $\frac{5}{2}$. | 30. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-6} - \sqrt{x+2}}{x-2}$ | ĐS: 1. |
| 31. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+2}}$ | ĐS: 6. | 32. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ | ĐS: $-\frac{1}{3}$. |
| 33. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{1-x}}{x^4+4}$ | ĐS: 0. | 34. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3}$ | ĐS: $-\frac{3}{2}$. |
| 35. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$ | ĐS: $-\frac{2}{3}$. | 36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3}$ | ĐS: 3. |
| 37. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}$ | ĐS: $-\frac{1}{4}$. | 38. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+6}}$ | ĐS: $\frac{3}{2}$. |
| 39. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}$ | ĐS: -3. | 40. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}}$ | ĐS: $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. |
| 41. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3} + x^2 - 3x}$ | ĐS: $-\frac{4}{3}$. | 42. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x+3} - 1}{x-1}$ | ĐS: 1. |
| 43. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + x^4 - 3x^3 + x^2 + 3}{\sqrt{2x} - 2}$ | ĐS: 1. | | |

Lời giải

1. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$.
2. Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3} - 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+3} + 1)}{(\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+3} + 1) = 2$.

$$3. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3 - \sqrt{x+3})(3 + \sqrt{x+3})}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+3}} = -\frac{1}{6}$$

$$4. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(3 + \sqrt{x+1})}{(3 - \sqrt{x+1})(3 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3 + \sqrt{x+1}}{-1} = -6.$$

$$5. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{4+x+x^2}-2} = -\frac{1}{4}.$$

$$6. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x}-x}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x^2-3x}-x)(\sqrt{2x^2-3x}+x)}{(2x-6)(\sqrt{2x^2-3x}+x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{2(x-3)(\sqrt{2x^2-3x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2(\sqrt{2x^2-3x}+x)} = \frac{1}{4}.$$

$$7. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{2+x}-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{2+x}-2)} = \frac{1}{16}.$$

$$8. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2-x)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x+2)(2 + \sqrt{3x-2})} = -\frac{3}{16}.$$

$$9. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} [(x+3)(\sqrt{x+1}+2)] = 24.$$

$$10. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{x(9-x)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{x(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{54}.$$

$$11. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2-49}{2-\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})} \\ = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}{7-x} = -\lim_{x \rightarrow 7} (x+7)(2+\sqrt{x-3}) = -56$$

$$12. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-x-3}{(x-1)(x+1)(2x+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{(x+1)(2x+\sqrt{x+3})} = \frac{7}{8}.$$

$$13. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3+2x}}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x(x-3)(x+\sqrt{3+2x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x(x+\sqrt{3+2x})} = \frac{2}{9}.$$

$$14. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{2x-x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{-x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{2x-x^2}+1)}{-(x-1)} = \infty.$$

$$15. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{1}{3}.$$

$$16. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)}{x(x-4)(\sqrt{3x-3}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{x(\sqrt{3x-3}+3)} = \frac{1}{8}.$$

$$17. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2+x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(2x-5)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(2x-5)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2x-5)(\sqrt{x+2}+2)} = -\frac{1}{4}$$

$$18. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(\sqrt{x-1}+1) = 2.$$

$$19. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+1)(\sqrt{x+5}+3) = 30.$$

$$20. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+2)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$21. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}.$$

$$22. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-4(x+1)}{3-\sqrt{4x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+2)(3+\sqrt{4x+1})}{(3-\sqrt{4x+1})(3+\sqrt{4x+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+2)(3+\sqrt{4x+1})}{4(2-x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+2)(3+\sqrt{4x+1})}{4} = -12.$$

$$23. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = 0.$$

$$24. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{1-x^3}-3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{1-x^3}+3)}{-(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3}+3}{-(x^2-2x+4)} = \frac{1}{2}.$$

$$25. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{x(\sqrt{2x-x^2}+1)} = 0$$

$$26. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}+x-5}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+12x-20}{x(x-2)(\sqrt{2x+5}-(x+5))} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-10)}{x(x-2)(\sqrt{2x+5}-(x+5))} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-10)}{x(\sqrt{2x+5}-(x+5))} = \frac{2}{3}$$

$$27. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{2x+7}+x-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{2x+7}-(x-4))}{-x^2+10x-9} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{2x+7}-(x-4))}{-(x-9)} = \frac{3}{4}$$

$$28. \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2+\sqrt{7-2x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x+1)((x-2)-\sqrt{7-2x})} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{(x-1)((x-2)-\sqrt{7-2x})} = \frac{1}{6}$$

29. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5-\sqrt{2x^2+x+8}}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+17}{(x+2)((2x+5)+\sqrt{2x^2+x+8})} = \frac{5}{2}$
30. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-6}-\sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-6}+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(\sqrt{5x-6}+\sqrt{x+2})} = 1.$
31. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+2})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 3(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+2}) = 6.$
32. Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \frac{1}{3}.$
33. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x})} = 0.$
34. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{2+\sqrt{x+2}} = -\frac{3}{2}.$
35. Ta có $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2} = -\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5}+2}{3+\sqrt{x}} = -\frac{2}{3}.$
36. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = 3.$
37. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{4}.$
38. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{3}{2}.$
39. Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}} = -2 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+5}} = -3.$
40. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x+5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$
41. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-(x^2-3x)}{-x^3+5x^2-4x-3} = -\frac{4}{3}.$
42. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt[4]{(4x-3)^3}+\sqrt[4]{(4x-3)^2}+\sqrt[4]{4x-3}+1} = 1.$
43. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2} = 1.$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

- | | | | |
|---|---------------------|---|----------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}.$ | ĐS: $\frac{1}{3}.$ | 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1}$ | ĐS: $\frac{5}{12}.$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x^2+x}$ | ĐS: $\frac{1}{3}.$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{5x+3}}{x-1}$ | ĐS: $-\frac{5}{12}.$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$ | ĐS: 2. | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1+\sqrt[3]{x-2}}$ | ĐS: 3. |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x-4}-x}{2x^2-x-1}$ | ĐS: $\frac{2}{9}.$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ | ĐS: 3. |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}}$ | ĐS: 54. | 10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^3+x-30}$ | ĐS: $\frac{1}{336}.$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2}.$ | ĐS: $\frac{3}{2}.$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ | ĐS: $\frac{2}{3}.$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+7}-2}.$ | ĐS: 6. | 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{x}+1}$ | ĐS: $-\frac{3}{2}.$ |
| 15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}.$ | ĐS: $\frac{2}{3}.$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2-2}+1}$ | ĐS: 1. |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}.$ | ĐS: 1. | 18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}}{x^2-1}$ | ĐS: $-\frac{1}{3}.$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{2x-6}}{x^3+1}.$ | ĐS: $\frac{1}{12}.$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{19-x^3}+2}{\sqrt{4x-3}-3}$ | ĐS: $-\frac{27}{8}.$ |
| 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2-4x}.$ | ĐS: $-\frac{1}{6}.$ | 22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^3-1}$ | ĐS: $\frac{2}{9}.$ |
| 23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt{3x-2}-2}.$ | ĐS: -1. | 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$ | ĐS: $\frac{2}{3}.$ |

Lời giải

- 1) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4} = \frac{1}{3}.$
- 2) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5}{\sqrt[3]{(5x-3)^2}-2\sqrt[3]{5x-3}+4} = \frac{5}{12}.$
- 3) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \frac{1}{3}.$

$$4) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{5x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{4 + 2\sqrt[3]{5x+3} + \sqrt[3]{(5x+3)^2}} = -\frac{5}{12}.$$

$$5) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4}{x+3} = 2.$$

$$6) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1 + \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} \right) = 3.$$

$$7) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x-4}-x}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2-x+4}{(2x+1)\left(\sqrt[3]{(5x-4)^2} + \sqrt[3]{5x-4} + 4\right)} = \frac{2}{9}.$$

$$8) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right) = 3.$$

$$\begin{aligned} 9) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9) \left[(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{4x^2+28} + \sqrt[3]{(4x^2+28)^2} \right]}{(x-3)(x^2+2x+9)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2+3x+9) \left[(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{4x^2+28} + \sqrt[3]{(4x^2+28)^2} \right]}{x^2+2x+9} = 72. \end{aligned}$$

$$10) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^3+x-30} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x^2+3x+10) \left[\sqrt[3]{(x+5)^2} + \sqrt[3]{x+5} + 4 \right]} = \frac{1}{336}.$$

$$\begin{aligned} 11) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3-3x^2+3x+9}{(x+1)(x+2) \left[\sqrt[3]{(10+2x^3)^2} + (x-1)\sqrt[3]{10+2x^3} + (x-1)^2 \right]} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2-6x+9}{(x+2) \left[\sqrt[3]{(10+2x^3)^2} + (x-1)\sqrt[3]{10+2x^3} + (x-1)^2 \right]} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$12) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3}.$$

$$13) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+7}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4}{\sqrt{x}+1} = 6.$$

$$14) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt{x^2+3}+2} = -\frac{3}{2}.$$

$$15) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{x(2x-1)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$16) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 1.$$

$$17) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}{4(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = 1.$$

$$18) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{x(x+2)} + \sqrt[3]{x^2}\right]} = -\frac{1}{3}.$$

$$19) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+9} + \sqrt[3]{2x-6}}{x^3+1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(x^2-x+1)\left[\sqrt[3]{(x+9)^2} - \sqrt[3]{(x+9)(2x-6)} + \sqrt[3]{(2x-6)^2}\right]} = \frac{1}{2}.$$

$$20) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{19-x^3} + 2}{\sqrt{4x-3}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(9-3x+x^2)(\sqrt{4x-3}+3)}{-4\left[\sqrt[3]{(19-x^3)^2} - 2\sqrt[3]{19-x^3} + 4\right]} = -\frac{27}{8}.$$

$$21) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x-4)\left[\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right]} = -\frac{1}{6}.$$

$$22) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x^2+x+1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1\right]} = \frac{2}{9}.$$

$$23) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt{3x-2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+1)^2(\sqrt{3x-2}+2)}{3\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2} + x\sqrt[3]{3x+2} + x^2\right]} = -1.$$

$$24) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+1)}{2\left[\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right]} = \frac{2}{3}.$$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}. \text{ ĐS: } \frac{7}{24}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}. \text{ ĐS: } \frac{4}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3}. \text{ ĐS: } \frac{5}{6}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 4}{x}. \text{ ĐS: } \frac{5}{4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 7}{x-2}. \text{ĐS: } \frac{8}{3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2}. \text{ĐS: } 8$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6}. \text{ĐS: } \frac{74}{3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}. \text{ĐS: } 0$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1}. \text{ĐS: } -\frac{1}{4}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}. \text{ĐS: } \frac{7}{54}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}. \text{ĐS: } \frac{13}{12}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - \sqrt{x+3}}{x-1}. \text{ĐS: } \frac{1}{4}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}. \text{ĐS: } \frac{7}{12}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}. \text{ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}. \text{ĐS: } -1$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4}. \text{ĐS: } \frac{5}{72}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}. \text{ĐS: } -\frac{11}{24}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}. \text{ĐS: } -\frac{17}{16}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}. \text{ĐS: } \frac{5}{6}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} - 2}{x^2-1}. \text{ĐS: } \frac{3}{2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}. \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[4]{7x+2}}{x-2}. \text{ĐS: } -\frac{13}{96}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}. \text{ĐS: } 5$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}. \text{ĐS: } \frac{7}{3}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2-x} - 2}{x-1}. \text{ĐS: } \frac{1}{12}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2+x}. \text{ĐS: } 1$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2}. \text{ĐS: } -\frac{5}{12}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}. \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{(x-1)^2}. \text{ĐS: } \frac{11}{6}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x-1} - 3x+1}{x^2-2x+1}. \text{ĐS: } -\frac{5}{2}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x-7+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x+1}. \text{ĐS: } -\frac{17}{16}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{2x^2+8}-2\sqrt{2x-3}+x-4}. \text{ĐS: } \frac{8}{9}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x^2+2} - 2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}. \text{ĐS: } \frac{1}{8}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2-6x+5} - \sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}. \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}. \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}. \text{ĐS: } 2$$

Lời giải

$$1) I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} + \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+9} + 3)} + \frac{(\sqrt{x+16} - 4)(\sqrt{x+16} + 4)}{x(\sqrt{x+16} + 4)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9} + 3)} + \frac{x+16-16}{x(\sqrt{x+16} + 4)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} + \frac{x}{x(\sqrt{x+16} + 4)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

$$2) I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x-1} + \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt{2x+2} - 2)(\sqrt{2x+2} + 2)}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} + \frac{(\sqrt{5x+4} - 3)(\sqrt{5x+4} + 3)}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x+2-4}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} + \frac{5x+4-9}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2} + 2)} + \frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+2} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x+4} + 3} \right) = \frac{2}{4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$3) I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2\sqrt{x+6} - 6}{x-3} + \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{x-3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{2(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} + \frac{(\sqrt{2x-2} - 2)(\sqrt{2x-2} + 2)}{(x-3)(\sqrt{2x-2} + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{2(x+6-9)}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} + \frac{2x-2-4}{(x-3)(\sqrt{2x-2} + 2)} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} + \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{4} = \frac{5}{6}.$$

4) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 4}{x}.$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x} + \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(x+1-1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \right) = \frac{2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

5) $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 7}{x-2}.$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+2} - 4 + \sqrt{x+7} - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{x+2} + \frac{2\sqrt{x+2}-4}{x-2} + \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \right)$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} + \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \right]$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \right) = 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

6) $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2}.$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} - 4 + x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(2\sqrt{x-1} + \frac{4\sqrt{x-1}-4}{x-2} + \frac{x^2-4}{x-2} \right)$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{4(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \right] = 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{4(x-1-1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} + x+2 \right]$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{\sqrt{x-1}+1} + x+2 \right) = 2 + \frac{4}{2} + 4 = 8.$$

7) $I = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6}.$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-30)\sqrt{2x-3} + 26\sqrt{2x-3} - 78 + x - 6}{x-6}$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \left[\frac{5(x-6)\sqrt{2x-3}}{x-6} + \frac{26(\sqrt{2x-3}-3)}{x-6} + \frac{x-6}{x-6} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 6} \left[5\sqrt{2x-3} + \frac{26(\sqrt{2x-3}-3)(\sqrt{2x-3}+3)}{(x-6)(\sqrt{2x-3}+3)} + 1 \right] \\
 &= 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{26(2x-3-9)}{(x-6)(\sqrt{2x-3}+3)} + 1 = 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{26.2(x-6)}{(x-6)(\sqrt{2x-3}+3)} + 1 \\
 &= 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{52}{\sqrt{2x-3}+3} + 1 = 15 + \frac{52}{6} + 1 = \frac{74}{3}.
 \end{aligned}$$

$$8) I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1+3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} + \frac{(1 - \sqrt[3]{1+3x})(1 + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{(1+3x)^2})}{x(1 + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{(1+3x)^2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1+2x-1}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} + \frac{1-(1+3x)}{x(1 + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{(1+3x)^2})} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} + \frac{-3}{1 + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{(1+3x)^2}} \right) \\
 &= \frac{2}{2} + \frac{-3}{3} = 0.
 \end{aligned}$$

$$9) I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - 2 + 2 - \sqrt{x^2+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3+7} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt[3]{x^3+7} - 2)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4)} + \frac{(2 - \sqrt{x^2+3})(2 + \sqrt{x^2+3})}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3+7-8}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4)} + \frac{4-(x^2+3)}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3-1}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4)} + \frac{1-x^2}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4} - \frac{x+1}{2 + \sqrt{x^2+3}} \right] = \frac{3}{12} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$10) I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3 + 3 - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(\sqrt[3]{8x+11} - 3)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} + \frac{(3 - \sqrt{x+7})(3 + \sqrt{x+7})}{(x^2 - 3x + 2)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{8x + 11 - 27}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} + \frac{9 - (x+7)}{(x^2 - 3x + 2)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{8(x-2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} + \frac{2-x}{(x-1)(x-2)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} - \frac{1}{(x-1)(3 + \sqrt{x+7})} \right] = \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}. \end{aligned}$$

$$11) I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} + \frac{(2 - \sqrt[3]{8-x})(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2})}{x(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} + \frac{8 - (8-x)}{x(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} \right] = \frac{2}{2} + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

$$12) I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - \sqrt{x+3}}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5}-2+2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{3x^2+5}-2}{x-1} + \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt[3]{3x^2+5}-2) \left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x^2+5} + 4 \right)}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x^2+5} + 4 \right)} + \frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3x^2+5-8}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x^2+5} + 4 \right)} + \frac{4-(x+3)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3(x^2-1)}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x^2+5} + 4 \right)} + \frac{1-x}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3(x+1)}{\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x^2+5} + 4} - \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} \right] = \frac{6}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$13) I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2+2-\sqrt{5-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} + \frac{2-\sqrt{5-x^2}}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt[3]{x+7}-2) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \frac{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2})}{(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+7-8}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \frac{4-(5-x^2)}{(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x-1}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \frac{x^2-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} + \frac{x+1}{2+\sqrt{5-x^2}} \right] = \frac{1}{12} + \frac{2}{4} = \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

$$14) I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 + 2 - \sqrt{3x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} + \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x-2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{(2 - \sqrt{3x-2})(2 + \sqrt{3x-2})}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3x+2-8}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{4-(3x-2)}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{6-3x}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4} - \frac{3}{2 + \sqrt{3x-2}} \right] = \frac{3}{12} + \frac{-3}{4} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$15) I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 + 2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} + \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{(2 - \sqrt{5x-6})(2 + \sqrt{5x-6})}{(x-2)(2 + \sqrt{5x-6})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3x+2-8}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{4-(5x-6)}{(x-2)(2 + \sqrt{5x-6})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} + \frac{10-5x}{(x-2)(2 + \sqrt{5x-6})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4} - \frac{5}{2 + \sqrt{5x-6}} \right] = \frac{3}{12} + \frac{-5}{4} = -1.
 \end{aligned}$$

$$16) I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4}.$$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 3 + 3 - \sqrt{x+7}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 3}{x^2-4} + \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2-4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\left(\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} - 3 \right) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} + \frac{(3 - \sqrt{x+7})(3 + \sqrt{x+7})}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2x^2 + 4x + 11 - 27}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} + \frac{9 - (x+7)}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2x^2 + 4x - 16}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} + \frac{2 - x}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2(x-2)(x+4)}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} + \frac{2 - x}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2(x+4)}{(x+2) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} - \frac{1}{(x+2)(3 + \sqrt{x+7})} \right] = \frac{12}{108} + \frac{-1}{24} = \frac{5}{72}.
 \end{aligned}$$

17) $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - 2 + 2 - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x^3} - 2}{x^2-1} + \frac{2 - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt{5-x^3} - 2)(\sqrt{5-x^3} + 2)}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3} + 2)} + \frac{(2 - \sqrt[3]{x^2+7})(4 + 2\sqrt[3]{x^2+7} + \sqrt[3]{(x^2+7)^2})}{(x^2-1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2+7} + \sqrt[3]{(x^2+7)^2})} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{5-x^3-4}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3} + 2)} + \frac{8-(x^2+7)}{(x^2-1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2+7} + \sqrt[3]{(x^2+7)^2})} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{1-x^2}{(x^2-1)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{-1}{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}} \right] = -\frac{3}{8} + \frac{-1}{12} = -\frac{11}{24}.
 \end{aligned}$$

$$18) I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}.$$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6 + \sqrt{x+2} - 2 + 8 - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6}{4-x^2}}_{I_1} + \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\sqrt{x+2} - 2}{4-x^2}}_{I_2} + \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{8 - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}}_{I_3}
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\left(\sqrt[3]{4x^3-24} - 2\right)\left(\sqrt[3]{4x^3-24}^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)}{(4-x^2)\left(\sqrt[3]{4x^3-24}^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(4x^3 - 24 - 8)}{(4-x^2)\left(\left(\sqrt[3]{4x^3-24}\right)^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot 4(x^3 - 8)}{(4-x^2)\left(\left(\sqrt[3]{4x^3-24}\right)^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12(x-2)(x^2+2x+4)}{(2-x)(2+x)\left(\left(\sqrt[3]{4x^3-24}\right)^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-12(x^2+2x+4)}{(2+x)\left(\left(\sqrt[3]{4x^3-24}\right)^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2\right)} = -\frac{144}{48} = -3.$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(4-x^2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)}{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(2+x)(\sqrt{x+2} + 2)} = -\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 8\sqrt{2x-3}}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8(1 - \sqrt{2x-3})(1 + \sqrt{2x-3})}{(4 - x^2)(1 + \sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8(1 - (2x-3))}{(2+x)(2-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 \cdot 2(2-x)}{(2-x)(2+x)(1 + \sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16}{(2+x)(1 + \sqrt{1+2x-3})} = \frac{16}{8} = 2 \\
 I &= -3 - \frac{1}{16} + 2 = -\frac{17}{16}.
 \end{aligned}$$

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x)$ ĐS: $+\infty$ | 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$ ĐS: $-\infty$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$ ĐS: $-\infty$ | 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 1)$ ĐS: $+\infty$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1)$ ĐS: $+\infty$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 10)$ ĐS: $+\infty$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3)$ ĐS: $-\infty$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^2 + 6)$ ĐS: $-\infty$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ ĐS: $+\infty$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$ ĐS: $+\infty$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x)$ ĐS: $-\infty$ | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - x)$ ĐS: $+\infty$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9x+1})$ ĐS: $-\infty$ | |
| 14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3})$ ĐS: không tồn tại giới hạn | |

Lời giải

1. $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x)$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) = 2 > 0$)

2. $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = 1$).

3. $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

(vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0$).

4. $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 1)$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0$).

$$5. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1)$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1 > 0$).

$$6. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 10)$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^4} \right) = 1 > 0$ (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^4} \right) = 1 > 0$)

$$7. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3)$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -1 < 0$).

$$8. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^2 + 6)$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -\infty$. (vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -1$)

$$9. I = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = +\infty$.

(vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = 1 > 0$).

$$10. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$$

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$.

(vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = -\sqrt{2} + 1 < 0$).

$$11. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = -\infty.$$

(vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 1 > 0$).

$$12. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = +\infty$$

(vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = 1 > 0$).

$$13. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{9 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

(vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{9 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty$).

$$14. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3})$$

Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}$ là $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Ta có khi $x \rightarrow -\infty$ hàm số $f(x) = \sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}$ không xác định. Do đó

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3})$ không tồn tại.

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1}. \text{ĐS: } 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1}. \text{ĐS: } 2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2x-1}. \text{ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1}. \text{ĐS: } 3$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}. \text{ĐS: } -2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}. \text{ĐS: } \frac{6}{5}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}. \text{ĐS: } 2$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}. \text{ĐS: } 0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2(5x+2)^2}{(3x+1)^4}. \text{ĐS: } \frac{25}{81}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^4(1-2x)^3}{(2x+2)^5(x^2+3)}. \text{ĐS: } -\frac{1}{4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+2)^2(x+2)}{(2x^2+1)(1-x)^2}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3(1-x)^4}{(1-2x)^5 x^2}. \text{ĐS: } -\frac{1}{32}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right). \text{ĐS: } \frac{2}{9}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}. \text{ĐS: } 0$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x+2}{2x^4+x+3}. \text{ĐS: } 0$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}. \text{ĐS: } 0$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x^2+1)(2x+3)}{x^2-6x+1}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x+2}{2x^2+x+3}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+2x^3+x+2}{2x^3+x+3}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+2x^3+x+2}{2x^2-x^3}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-x^3+11}{2x-7}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}. \text{ĐS: } 1$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{2x+1}. \text{ĐS: } 1$$

$$26. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}. \text{ĐS: } -\infty$$

Lời giải

$$1. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

$$2. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

$$3. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

$$4. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 3.$$

$$5. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^3 \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = -2.$$

$$6. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \cdot x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(5 - \frac{1}{x}\right) x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(5 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{6}{5}.$$

$$7. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = 2.$$

$$8. I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right) x \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right) x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x^2}\right) x \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{\left(2 - \frac{1}{x^3}\right) x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = 0.$$

$$9. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2 (5x+2)^2}{(3x+1)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 x^2 \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2}{x^4 \left(3 + \frac{1}{x}\right)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2}{\left(3 + \frac{1}{x}\right)^4} = \frac{25}{81}.$$

$$10. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^4 (1-2x)^3}{(2x+2)^5 (x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 x^3 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3}{x^5 \left(2 + \frac{2}{x}\right)^5 x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3}{\left(2 + \frac{2}{x}\right)^5 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

$$11. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+2)^2(x+2)}{(2x^2+1)(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2 x \left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(2+\frac{1}{x^2}\right) x^2 \left(\frac{1}{x}-1\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2 \left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x}-1\right)^2} = -\infty$$

$$(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2 \left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x}-1\right)^2} = \frac{1}{2} > 0).$$

$$12. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3(1-x)^4}{(1-2x)^5 x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1+\frac{2}{x}\right)^3 x^4 \left(\frac{1}{x}-1\right)^4}{x^5 \left(\frac{1}{x}-2\right)^5 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^3 \left(\frac{1}{x}-1\right)^4}{\left(\frac{1}{x}-2\right)^5} = -\frac{1}{32}.$$

$$13. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right).$$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(3x+2) - x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+4x^2}{(3x^2-4)(3x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2+\frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(3-\frac{4}{x}\right) x \left(3+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\left(3-\frac{4}{x}\right) \left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{9}.$$

$$14. I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = 0.$$

Bài 7. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-x}{3-x}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+1}{x-2}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1}{x-1}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6-5x}{4x-8}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4}. \text{ĐS: } +\infty$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15}. \text{ĐS: } \frac{1}{5}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{7x-1}{|x+3|}. \text{ĐS: } -\infty$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}. \text{ĐS: } \frac{1}{3}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3}. \text{ĐS: } \frac{1}{7}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3}. \text{ĐS: } -\frac{1}{7}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2-3x+2|}{x-2}. \text{ĐS: } 1$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} \text{ ĐS: không tồn tại}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{|x^2 + x - 20|} \text{ ĐS: không tồn tại}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x - 1} - 1} \text{ ĐS: 2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{\sqrt{5x - 11} - 2} \text{ ĐS: } -\frac{4}{5}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt[3]{x - 1} - 1} \text{ ĐS: } -3$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 - 25|}{\sqrt[3]{x - 4} - 1} \text{ ĐS: } -30$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 8}{(3 - x)^2} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x + 25} - 3}{x^2 - x - 2} \text{ ĐS: } \frac{1}{81}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 16}} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \text{ ĐS: } -1$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}} \text{ ĐS: 0}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \text{ ĐS: } -2$$

$$27. \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x + 2)(x + 1)}}{\sqrt{x + 1} - x - 1} \text{ ĐS: 1}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9} \text{ ĐS: } -\frac{1}{6}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{-x^2 + 6x - 5} \text{ ĐS: } -\infty$$

$$30. \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} \text{ ĐS: 0}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} \text{ ĐS: 0}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \text{ ĐS: 0}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \sqrt{\frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}} \text{ ĐS: 0}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x} + 1 - x} \text{ ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x \sqrt{\frac{1 - x}{x}} \right) \text{ ĐS: 0}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} \text{ ĐS: } -\infty$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) \text{ ĐS: } -\infty$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} \text{ ĐS: } -\frac{\sqrt{3}}{5}$$

Lời giải

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \\ x - 1 > 0, \forall x \rightarrow 1^+ \end{cases}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 15) = -13 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \\ x - 2 > 0, \forall x \rightarrow 2^+ \end{cases}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (2 - x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 0 \\ 3 - x > 0, \forall x \rightarrow 3^- \end{cases}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-5) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4)^2 = 0 \\ (x-4)^2 > 0, \forall x \rightarrow 4^- \end{cases}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+1}{x-2} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x+1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0 \\ x-2 < 0, \forall x \rightarrow 2^- \end{cases}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1}{x-1} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \\ x-1 < 0, \forall x \rightarrow 1^- \end{cases}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6-5x}{4x-8} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (6-5x) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x-8) = 0 \\ 4x-8 > 0, \forall x \rightarrow 2^+ \end{cases}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4) = 0 \\ 2x-4 > 0, \forall x \rightarrow 2^+ \end{cases}.$$

$$9. \text{ Do } x \rightarrow 3^+ \text{ nên } |x-3| = x-3 \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{5x-15} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{7x-1}{|x+3|} = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (7x-1) = -22 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} |x+3| = 0 \\ |x+3| > 0, \forall x \rightarrow (-3)^- \end{cases}.$$

$$11. \text{ Do } x \rightarrow 2^- \text{ nên } |2-x| = 2-x \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(2x-1)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{3}.$$

$$12. \text{ Do } x \rightarrow 1^+ \text{ nên } |x-1| = x-1 \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(2x^2+2x+3)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x^2+2x+3} = \frac{1}{7}.$$

$$13. \text{ Do } x \rightarrow 1^- \text{ nên } |x-1| = 1-x \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)(2x^2+2x+3)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2x^2+2x+3} = -\frac{1}{7}.$$

$$14. \text{ Ta có } x^2-3x+2 = (x-1)(x-2), \text{ do } x \rightarrow 2^+ \text{ nên } x^2-3x+2 > 0, \text{ suy ra}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2-3x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1.$$

15. Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$

TH1: $x > 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6$.

TH2: $x < 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x-3) = -6$.

Do $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$.

16. Ta có $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|(x-4)(x+5)|}$

TH1: $x > 4$, ta có $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{9}$

TH2: $x < 4$, ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{(4-x)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x+5} = \frac{-1}{9}$

Do $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|} \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x^2 + x - 20|}$.

17. Do $x \rightarrow 2^-$ nên $|x-2| = 2-x$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x-1}+1) = 2$.

18. Do $x \rightarrow 3^-$ nên $|x-2| = 3-x$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{5x-11}-2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-x)(\sqrt{5x-11}+2)}{5x-11-4}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(\sqrt{5x-11}+2)}{5} = -\frac{4}{5}$.

19. Do $x \rightarrow 2^-$ nên $|x-2| = 2-x$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt[3]{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1}+1)}{x-1-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-(\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1}+1) \right) = -3$.

20. Ta có $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$, do $x \rightarrow 5^-$ nên $x^2 - 25 < 0$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 - 25|}{\sqrt[3]{x-4}-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(25-x^2)(\sqrt[3]{x-4}^2 + \sqrt[3]{x-4}+1)}{x-4-1} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \left(-(5+x) \right) (\sqrt[3]{x-4}^2 + \sqrt[3]{x-4}+1) = -30$.

21. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-8}{(3-x)^2} = +\infty$, vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x-8) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x)^2 = 0 \\ (3-x)^2 > 0, \forall x \rightarrow 3^+ \end{cases}$.

$$22. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+25-27}{(x-2)(x+1)(\sqrt[3]{x+25}^2+3\sqrt[3]{x+25}+9)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x+25}^2+3\sqrt[3]{x+25}+9)} = \frac{1}{81}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{\sqrt{4x^2-16}} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x+2) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4x^2-16} = 0 \\ \sqrt{4x^2-16} > 0, \forall x \rightarrow 2^+ \end{cases}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = -1.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x}(2+x) = 0.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = -2.$$

$$27. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+2)(x+1)}}{\sqrt{x+1}-x-1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+1}} = 1.$$

$$28. \text{ Ta có } \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|, \text{ do } x \rightarrow 3^- \text{ nên } \sqrt{x^2-6x+9} = 3-x, \text{ suy ra}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}.$$

29. Do $x \rightarrow 1^-$ nên $x-1 < 0$, từ đó ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{-x^2+6x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-(x-1)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{3-x}}{-(x-1)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1-x}(x-5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{3-x}}{x-5} \right) = -\infty.$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3-x}}{x-5} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = +\infty.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2} = 0.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+2}} = 0.$$

$$32. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3+1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)(x^2-x+1)\sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2-x+1)\sqrt{\frac{x(x+1)}{x-1}} = 0.$$

33. Do $x \rightarrow 1^+$ nên $1-x < 0$, vì thế ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{\frac{(x+5)(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{\frac{(x+5)(x-1)}{x+3}} \right) = 0.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(2+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{2+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x\sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{\frac{x^2(1-x)}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x(1-x)} = 0.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x-1}{x+3} = -\infty.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} \right) = -\infty.$$

38. Do $x \rightarrow 1^-$ nên $x-1 < 0$, suy ra $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x$ nên ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x+2)(x-1)^2}}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{x+2}}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{x+2}}{x+4} = -\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}. \text{ ĐS: } 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}. \text{ ĐS: } \frac{2}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}. \text{ ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3}. \text{ ĐS: } \frac{1}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 2x}{x \cdot \sin x}. \text{ ĐS: } 4$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{1-\cos ax} (a \neq 0). \text{ ĐS: } \frac{2}{a}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}. \text{ ĐS: } \frac{a^2}{b^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; (a \neq 0) \text{ ĐS: } \frac{a^2}{2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \text{ ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}. \text{ ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}. \text{ ĐS: } \cos a$$

$$13) \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b} \text{ ĐS: } -\sin b$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin 2x} \text{ ĐS: } \frac{-1}{2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x} \text{ ĐS: } -2\sin a$$

$$16) \lim_{x \rightarrow c} \frac{\tan x - \tan c}{x - c} \text{ ĐS: } \frac{1}{\cos^2 c}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin x} \text{ ĐS: } \frac{3}{2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} \text{ ĐS: } \frac{\sin 2a}{2a}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} \text{ ĐS: } \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{\tan(x+2)} \text{ ĐS: } 12$$

- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$. ĐS: 1422) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$. ĐS: $-\sin(\alpha)$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{(a+b)x}$; $(a+b \neq 0)$ ĐS: 1 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x \cos 7x}{x^2}$ ĐS: $-\frac{33}{2}$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{1 - \cos x}$. ĐS: $\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}$ 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)}$ ĐS: $\cos^3 a$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$. ĐS: 1 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \sin 4x}{x^4}$ ĐS: 6
- 29) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}}$. ĐS: 1 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$ ĐS: -1
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$. ĐS: 1 32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ ĐS: $\frac{1}{4}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 11x}$. ĐS: $\frac{37}{121}$ 34) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\tan(x-1)}$ ĐS: $\frac{1}{4}$
- 35) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$. ĐS: $\frac{1}{2}$ 36) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$ ĐS: $-\frac{1}{2}$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \cos 2x}{x^2}$. ĐS: $\frac{5}{2}$ 38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ĐS: $\frac{3}{2}$

Lời giải.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \right) = 5.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \right) = \frac{2}{3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 3x \sin x}{45x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{25}{9}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \cos^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 4.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{1 - \cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{2 \sin^2 \frac{ax}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin \frac{ax}{2}} \right)^2 \right) = \frac{2}{a}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \cdot \frac{4}{b^2} \cdot \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{2}.$$

$$10) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \sin x (1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$12) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right) = \cos a.$$

$$13) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{-2 \sin \frac{x+b}{2} \sin \frac{x-b}{2}}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \left(-\sin \frac{x+b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-b}{2}}{\frac{x-b}{2}} \right) = -\sin b.$$

$$14) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - 1}{\sin 2x (1 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$15) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{a+x+a-x}{2} \sin \frac{a+x-a-x}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \sin a \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = -2 \sin a.$$

$$16) \lim_{x \rightarrow c} \frac{\tan x - \tan c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin(x-c)}{(x-c) \cos x \cos c} = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{\sin(x-c)}{x-c} \cdot \frac{1}{\cos x \cos c} \right) = \frac{1}{\cos^2 c}.$$

$$17) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$18) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2a}{2}}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2(x-a)(x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin(a+x) \sin(a-x)}{2(x-a)(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin(a+x)}{x+a} \cdot \frac{\sin(a-x)}{a-x} \right) = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

$$19) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{(\alpha + \beta)x}{2} \sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\alpha + \beta)x}{2}}{\frac{(\alpha + \beta)x}{2}} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2}}{\frac{(\alpha - \beta)x}{2}} \right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}.$$

$$20) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\tan(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{\tan(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \left((x^2 - 2x + 4) \cdot \frac{(x+2)}{\tan(x+2)} \right) = 12.$$

$$21) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cos 2x(1 - \cos 3x)}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \cos x \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \cos x \cos 2x \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 4 \cos x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + 9 \cos x \cos 2x \left(\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right) = 1 + 4 + 9 = 14.$$

$$22) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(a+x) \cos x - 2 \sin(a+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(a+x)(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(a+x) \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-4 \sin(a+x) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = -\sin a.$$

23) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{(a+b)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \cdot \frac{\sin ax}{ax} + bx \cdot \frac{\tan bx}{bx}}{(a+b)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot b \frac{\tan bx}{bx}}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$

24) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x \cos 7x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x + \cos 5x - \cos 5x \cos 7x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \sin x + \cos 5x(1 - \cos 7x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \sin x - 2 \cos 5x \sin^2 \frac{7x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(8 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin x}{x} - 2 \cdot \frac{49}{4} \cdot \cos 5x \cdot \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \right) = 8 - \frac{49}{2} = -\frac{33}{2}.$$

25) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx + \cos bx - \cos bx \cos cx}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(b-a)x}{2} + \cos bx(1 - \cos cx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(b-a)x}{2} - 2 \cos bx \sin^2 \frac{cx}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{4} \cdot \frac{\sin \frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} - 2 \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \cos bx \cdot \left(\frac{\sin \frac{cx}{2}}{\frac{cx}{2}} \right)^2 \right) = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}.$$

26) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos a \sin x}{\frac{\sin 2x}{\cos(a+x) \cos(a-x)}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \cos(a+x) \cos(a-x)}{\cos x} = \cos^3 a$$

$$\begin{aligned}
 27) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{-x^2}{1 + \sqrt[3]{x^2+1} + (\sqrt[3]{x^2+1})^2}}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x^2+1} + (\sqrt[3]{x^2+1})^2}}{\frac{\sin x}{x}} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 4x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sin 2x - 2 \sin x \cos 2x)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x (\cos x - \cos 2x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x \sin x \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 6.
 \end{aligned}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{x + \frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - 2 \cos x)}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - 2 \cos x}{\cos x} \right) = -1.$$

$$\begin{aligned}
 31) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - 1 - \sin x}{x^3 (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\cos x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{4}.$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 11x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x + \cos 5x(1 - \cos 7x)}{\sin^2 11x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{\sin^2 11x} + \frac{2 \cos 5x \sin^2 \frac{7x}{2}}{\sin^2 11x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25}{242} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 \left(\frac{11x}{\sin 11x} \right)^2 + \frac{49}{242} \cos 5x \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{11x}{\sin 11x} \right)^2 \right) = \frac{25}{242} + \frac{49}{242} = \frac{37}{121}.$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\tan(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{\tan(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \cdot \frac{x-1}{\tan(x-1)} \right) = \frac{1}{4}.$$

$$35) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi - x}{2} \right)}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi - x}{2} \right)}{\frac{\pi - x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3} \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1 - 1}{x^2(\sqrt{x^2+1} + 1)} + \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} + 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x^2 (1 + \sqrt{\cos 2x})} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \sqrt{\cos 2x}} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) \right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 5x - \cos x}$ ĐS: $\frac{1}{3}$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{4 \cos^2 x - 3}$ ĐS: $\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x}$ ĐS:

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x}$ ĐS: 2

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$ ĐS: $\sqrt{2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin x}$ ĐS: $\frac{1}{6}$

7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin 3x}$ ĐS: $-\frac{2}{3}$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$ ĐS: 1

9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x}$ ĐS: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ ĐS: $-\frac{1}{12}$

Lời giải

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 5x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sin x}{-2 \sin 3x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}.$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{4 \cos^2 x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{1 - 4 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 + 2 \sin x} = \frac{1}{2}.$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x + \sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos x + 2 \sin x) = 2.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 6x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 6x = 2.$

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos x \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-4 \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)} = \sqrt{2}$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \left(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \cos x) \cdot \left(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{6}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \left(3x - \pi + \pi\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2 \sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}}{-3 \cdot \frac{3 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}} = -\frac{2}{3}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{(1 + \tan x)^2} = 1.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \cos^2 x}{3 \sin x - 4 \sin^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 3) \cos x}{(2 \sin x + \sqrt{3})(2 \sin x - \sqrt{3}) \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\cos x - \cos \frac{\pi}{3}\right)(2 \cos x + 3) \cos x}{3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)(2 \cos x + 3) \cos x}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)(2 \sin x + \sqrt{3}) \sin x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1) \cos^2 x}{(1 - \tan^2 x) \cdot \left[\left(\sqrt[3]{\tan x}\right)^2 + \sqrt[3]{\tan x} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos^2 x}{(1 + \tan x) \left[\left(\sqrt[3]{\tan x}\right)^2 + \sqrt[3]{\tan x} + 1\right]} = -\frac{1}{12}.$$

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x}$ ĐS: 0

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$ ĐS: -1

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$ ĐS: -1

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ĐS: 0

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ ĐS: 2

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$ ĐS: 0

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1} \text{ĐS: } -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2 \sin x} \text{ĐS: } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sqrt{2} \sin x} \text{ĐS: } \sqrt{2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \cot x \right) \text{ĐS: } 0$$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại 1 điểm

– Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, đoạn

– Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$. Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

– Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét:

– Nếu hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $c.f(x)$ (với c là hằng số) đều liên tục tại điểm x_0 .

– Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

3. Tính chất của hàm số liên tục

– **Định lý về giá trị trung gian:** Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ thỏa mãn $f(c) = M$.

– **Ý nghĩa hình học:** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

– **Hệ quả:** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$. Ta thường vận dụng theo hai hướng sau:

+ **Vận dụng chứng minh phương trình có nghiệm:** “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$ ”.

+ **Vận dụng trong tương giao đồ thị:** “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$ ”.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1_DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp giải:

Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Đề cho	$x = x_0$	$x \neq x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$
Cần tính	$f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

1 VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$).

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 3 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-2x+3}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x+12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(3) = 18$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+12) = 18 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 24 \end{aligned}$$

Suy ra $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{3x^3-6x^2-3x+6}{3x^2-14x+11} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{3}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^3-6x^2-3x+6}{3x^2-14x+11} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x^2-3x-6)}{(x-1)(3x-11)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2-3x-6}{3x-11} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2-(x+3)}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x+1+\sqrt{x+3}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(0) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x + \cos 2x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{-2}{x^2 + 1} \right] = -2 \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$).

Ví dụ 7. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{1}{8}(a + x) & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: $a = 13$

Lời giải

Ta có $f(2) = \frac{1}{8}(a + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 4x + 3)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x(x+2)} = \frac{15}{8}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}(a + 2) = \frac{15}{8} \Leftrightarrow a = 13$.

Ví dụ 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: $m = 2$

Lời giải

Ta có $f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{x+2 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{-(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{-(x+1)} = -16 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20 \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm

$$x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} + m - 20 = -16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \vee m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

● BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2+2x & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = -1. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$2. y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1}+7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: Không liên tục}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x+46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 4. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

Bài 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 0. \quad \text{Đs: } m = \frac{1}{5} \\
 3. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = \frac{47}{12} \\
 4. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -1
 \end{aligned}$$

Bài 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x > 2 \\ mx + 10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = -\frac{29}{7} \\
 2. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{khi } x > 1 \\ x + m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -\frac{3}{4} \\
 3. \quad m \text{ để } f(x) &= \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ m + \frac{1-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = -\frac{3}{4} \\
 4. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3x - 3 + |x-1|\sqrt{5x^2 + 4}}{x^2 - 2x + 1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = 1 \text{ hoặc } m = 2 \\
 5. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x} - 4}{2 - \sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = -3. \quad \text{Đs: } m = 0 \text{ hoặc } m = 6 \\
 6. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3-x}{5 - \sqrt{x^2 + 16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 3. \quad \text{Đs: } m = -5 \text{ hoặc } m = 1 \\
 7. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = 2
 \end{aligned}$$

❸ LỜI GIẢI

Bài 1. 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} = 2$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2+2x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$.

Ta có $f(x_0) = f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{-1} = -1$$

Suy ra $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Bài 2. 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x+46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

Ta có $f(x_0) = f(4) = 30$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-4x+46) = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+1)(\sqrt{x+5}+3) = 30$$

Suy ra $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 4$.

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(x_0) = f(1) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 2) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+1) = 4$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

3. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{\sqrt{2} + 7}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} = \frac{\sqrt{2} + 7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{4}{3}$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x + 46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

Ta có $f(x_0) = f(4) = 30$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-4x + 46) = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)(\sqrt{x+5} + 3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+1)(\sqrt{x+5} + 3) = 30$$

Suy ra $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 4$.

Bài 3. 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(x_0) = f(1) = 2m + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x+1} = 0$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Ta có: $f(0) = -5m + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -5m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$

Vậy $m = \frac{1}{5}$.

3. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = 4 - m$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4} = \frac{1}{12}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - m = \frac{1}{12} \Leftrightarrow m = \frac{47}{12}$

Vậy $m = \frac{47}{12}$.

4. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(1) = \sqrt{m^2 + 8} + 2m$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(12x-4)^2} + 2\sqrt[3]{12x-4} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{\sqrt[3]{(12x-4)^2} + 2\sqrt[3]{12x-4} + 4} = 1$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 8} + 2m = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ m^2+8=(1-2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ -3m^2+4m+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m=-1 \Leftrightarrow m=-1 \\ m=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = -1$.

Bài 4. 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} & \text{khi } x > 2 \\ mx+10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2m+10$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx+10) = 2m+10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x+4}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm

$$x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m+10 = \frac{12}{7} \Leftrightarrow m = -\frac{29}{7}$$

2. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} & \text{khi } x > 1 \\ x+m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(1) = 1+m$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+m) = 1+m$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1+m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$.

3. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2-7x+6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ m + \frac{1-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = m - \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(m + \frac{1-x}{x+2} \right) = m - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x+3) = -1\end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$.

$$4. \text{ Tìm } m \text{ để } f(x) = \begin{cases} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x_0 = 1.$$

$$\text{Ta có } f(1) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(m^2 + \frac{1}{3}x - 3m \right) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3-\sqrt{5x^2+4})}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3-\sqrt{5x^2+4})}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-\sqrt{5x^2+4}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x-1)(x+1)}{(x-1)(3+\sqrt{5x^2+4})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x+1)}{3+\sqrt{5x^2+4}} = -\frac{5}{3}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + \frac{1}{3} - 3m = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = 2$.

$$5. \text{ Tìm } m \text{ để } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x_0 = -3.$$

$$\text{Ta có } f(-3) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(m^2 - 2mx - \frac{3}{2} \right) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(x+3)(2+\sqrt{1-x})}{(x+3)(\sqrt{7-3x}+4)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(2+\sqrt{1-x})}{\sqrt{7-3x}+4} = -\frac{3}{2}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3) \Leftrightarrow m^2 + 6m - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m^2 + 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -6$.

6. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Ta có $f(3) = \frac{m}{3}(4+m)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{m}{3}(x+m+1) = \frac{m}{3}(4+m).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x)(5+\sqrt{x^2+16})}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5+\sqrt{x^2+16}}{3+x} = \frac{5}{3}.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \frac{m}{3}(4+m) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy $m = -5$ hoặc $m = 1$.

7. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2}+m-10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)} = -16. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4-m \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m \geq 0 \\ m+2 = (4-m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \Leftrightarrow m = 2. \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy $m = 2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Bài 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 27}{2x^2 + 5x - 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ \frac{4+x}{5} & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -3$. **ĐS:** K liên tục.
- Bài 2.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + 8}{\sqrt{1-4x} - 3} & \text{khi } x > -2 \\ 5x - 2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -2$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** Không liên tục.
- Bài 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x} - 10} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{8x}{3} & \text{hi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 5.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{\sqrt{2x-1} - 3} & \text{khi } x > 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 6.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{x^2 + 5}{x - 1} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 7.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{x - 5} & \text{khi } x > 5 \\ \frac{2x}{25} & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 8.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5-x}}{-2x^3 + 3x^2 - x} & \text{khi } x > 1 \\ -2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 9.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x} - 4 & \text{khi } x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ -4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** Liên tục.

- Bài 10.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+8} - 3} & \text{khi } x > 1 \\ x\sqrt{1-x} - 6 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 11.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x - 3}{x^3 - 1} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{(m^2 - 1)x^2 + 4}{x + 2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** $m = \pm 2$.
- Bài 12.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ mx + 3 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$. **ĐS:** $m = \frac{10}{3}$.
- Bài 13.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 4x - 6} & \text{khi } x > 3 \\ mx + 8 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** $m = -\frac{37}{24}$.
- Bài 14.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ x + 2m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** $m = 2$.
- Bài 15.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + m^2 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** $m = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

2_DẠNG 2. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN TXĐ

Phương pháp giải:

Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Đề cho	$x = x_0$	$x \neq x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$
Cần tính	$f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

1 VÍ DỤ

- Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{7}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$. **ĐS:** Liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

+ Xét $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ mà nó xác định.

+ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -1$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{3}.$$

$$f(-1) = \frac{7}{3}.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = -1$.

+ Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

ĐS: Liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

+ Với mọi $x_0 \in (1; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

+ Với mọi $x_0 \in (-\infty; 1)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{5 - x}) = -\sqrt{5 - x_0} = f(x_0)$. Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

+ Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$

$$f(1) = -\sqrt{5 - 1} = 2.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{5 - x}) = -2.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} & \text{khi } x > 2 \\ (2x-3)^2 + a & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **ĐS:** $a = -11$.

Lời giải

Với $\forall x \in (-\infty; 2)$ ta có:

$$- f(x_0) = \frac{x_0^2 + x_0 - 6}{\sqrt{x_0 + 2} - \sqrt{3x_0 - 2}}.$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(2x-3)^2 + a] = (2x_0-3)^2 + a.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Với $\forall x \in (2; +\infty)$ ta có

$$- f(x_0) = (2x_0-3)^2 + a.$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(2x-3)^2 + a] = (2x_0-3)^2 + a.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lại có:

$$- f(2) = 1 + a.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} = -10.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(2x-3)^2 + a] = 1 + a.$$

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -10 = 1 + a.$$

Suy ra $a = -11$ là giá trị cần tìm.

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x+3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 19 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

- Xét $x \neq -3$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x+3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$ mà nó xác định.

- Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{(x+3)(2x^2+1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} (2x^2+1) = 19.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = f(-3)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = -3$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Với mọi $x_0 \in (-\infty; 2)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

- Với mọi $x_0 \in (2; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2 - x) = 2 - x_0 = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$

$$\square f(2) = 0.$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{2(x^2 + 2x + 4)} = -\frac{1}{24}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0.$$

Suy ra hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Bài 3. Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a^3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có với $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên từng khoảng mà nó xác định. Lại có

$$- f(-1) = a^3.$$

$$- \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x^2+1} = -\frac{5}{2}.$$

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a^3 = -\frac{5}{2}.$$

Suy ra $a = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}-1 & \text{khi } x > 1 \\ \sqrt{x}-1 & \\ \frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x}{\sqrt{x}-1}-1 & \text{khi } x > 0 \\ m+2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \cos m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3_DẠNG 3. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp giải:

- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ với $i = \overline{1; 2; \dots; k}$ nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

Chú ý: Hàm số đã thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên

từng khoảng xác định của chúng.

Khi hàm số đã liên tục trên $\mathbb{R}$ rồi, sẽ liên tục trên mỗi khoảng $(a_i; a_{i+1})$ mà ta cần tìm.

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Lời giải

- Đặt $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên $[-1; 2]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = -11 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -11 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 2): f(x_0) = 0,$

Nghĩa là phương trình $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Ví dụ 2. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên các đoạn $[-2; 0]; [0; 1]; [1; 2]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 0)$. (1)

- Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

- Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) = -3 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra phương trình có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$. Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm. Suy ra phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Với sự hỗ trợ của chức năng mode 7 trong casio, ta dễ dàng tìm được các khoảng $(-2; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$ như trên. Công việc còn lại là trình bày sao cho đúng ngôn ngữ.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + x + 1$, vì $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$; $[0; 1]$

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)

- Tương tự $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^3 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^3 - x - 3$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$, $[0; 1]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)

- Tương tự $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = (1-m^2)x^5 - 3x - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = m^2 + 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 0): f(x_0) = 0.$$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m (đpcm).

Chú ý: Đối với bài toán chứa tham số m , ta chọn khoảng $(a; b)$ sao cho tại vị trí a và b triệt tiêu m hoặc là biểu thức luôn dương hoặc luôn âm dựa vào kinh nghiệm người giải toán. Một số trường hợp sử dụng dấu tam thức bậc hai để đánh giá, tức

$$\square ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$$\square ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 1 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = x^4 + mx^2 - 2mx - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) = -15 \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ luôn có nghiệm với mọi } m.$$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)(x-3) + 2m - 5 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = m(x-2)(x-3) + 2m - 5$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = -1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(3) = -1 \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ luôn có nghiệm với mọi } m.$$

Ví dụ 9. Chứng minh phương trình $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

Lời giải

Đặt $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \leq b \leq c$.

- Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì $f(b) = (b-a)(b-c)$, suy ra phương trình có nghiệm $x = b$.

- Nếu $a < b < c$ thì $\begin{cases} f(a) = (a-b)(a-c) > 0 \\ f(b) = (b-a)(b-c) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a).f(b) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm (đpcm).

Ví dụ 10. Cho ba số a, b, c thỏa mãn hệ thức $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Ta có $f(0) = c$ và có $\begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{2}{3}(2a + 3b + 6c) - \frac{c}{3} = -\frac{c}{3} \end{cases}$

- Nếu $c = 0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, suy ra phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3} \in (0; 1)$.

- Nếu $c \neq 0$ thì ta có $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x = a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \subset (0; 1)$.

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Chứng minh rằng phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$ và $f(1 + \sqrt[5]{36})$, chứng minh rằng $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 = -1 \\ f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 15 \end{cases} \Rightarrow f(3).f(4) = -15 < 0.$$

Suy ra phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$.

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 3$.

Vì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nên ta có $f(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^3 - 3(x_0 - 1) - 3 = 0.$$

Đặt $\alpha = x_0 - 1$ và $x_0 \in (3; 4) \Rightarrow \alpha \in (2; 3)$. Khi đó, ta có

$$\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 3 \geq 2\sqrt{9\alpha} = 6\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^6 \geq 36\alpha \Leftrightarrow \alpha^5 \geq 36 \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[5]{36}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \notin (2; 3)$.

Do đó, dấu “=” không xảy ra, tức là ta luôn có $\alpha > \sqrt[5]{36} \Rightarrow x_0 - 1 > \sqrt[5]{36} \Leftrightarrow x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- Bài 2.** Chứng minh phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.
- Bài 3.** Chứng minh phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm với mọi m .
- Bài 4.** Chứng minh phương trình $(4m+1)x^3 - (m+1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m .
- Bài 5.** Chứng minh phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .
- Bài 6.** Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- Bài 7.** Chứng minh rằng phương trình $m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.
- Bài 8.** Cho α và β thỏa mãn $0 < \alpha < \beta$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $\sin^{10} x - x = \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$.
- Bài 9.** Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$, ($k > n > m > 0$) và $km \leq n^2$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

❶ LỜI GIẢI

Bài 1. Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-3) = (m^2 + 1)(-3)^3 - 2m^2(-3)^2 - 4(-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0;$$

$$f(0) = (m^2 + 1) \cdot 0^3 - 2m^2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0;$$

$$f(1) = (m^2 + 1) \cdot 1^3 - 2m^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 + 1 = -2 < 0;$$

$$f(2) = (m^2 + 1) \cdot 2^3 - 2m^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3) \cdot f(0) < 0$; $f(0) \cdot f(1) < 0$; $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3;0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0;1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1;2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Bài 2. Đặt $f(x) = (1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m$, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có phương trình $x^5 - 16x = 0$ có nghiệm $x \in \{0; \pm 2\}$.

Vậy với $m = 0$ thì phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: $m \neq 0$, ta có:

$$f(-2) = (1-m)(-2)^5 + 9m(-2)^2 - 16(-2) - m = 67m;$$

$$f(0) = (1-m) \cdot 0^5 + 9m \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 - m = -m;$$

$$f(2) = (1-m) \cdot 2^5 + 9m \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 - m = -3m.$$

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) = -67m^2 < 0$, $f(0) \cdot f(2) = -3m^2 < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Vậy phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Bài 3. Đặt $f(x) = (m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4$, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét $f(-2) = (m^2 - m + 3)(-2)^{2n} - 2(-2) - 4 = (m^2 - m + 3).4^n > 0$.

Xét $f(0) = (m^2 - m + 3).0^{2n} - 2.0 - 4 = -4 < 0$.

Ta thấy $f(-2).f(0) < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

Vậy phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.

Bài 4. Trường hợp 1: $m = 0$, ta có phương trình $x^3 - x = 0$ luôn có nghiệm $x = 0$; $x = \pm 1$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Đặt $f(x) = (4m+1)x^3 - (m+1)x + m$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-1) = (4m+1)(-1)^3 - (m+1)(-1) + m = -2m;$$

$$f(0) = (4m+1).0^3 - (m+1).0 + m = m.$$

Ta thấy $f(-1).f(0) = -2m^2 < 0$ nên phương trình $(4m+1)x^3 - (m+1)x + m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình $(4m+1)x^3 - (m+1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m .

Bài 5. Đặt $f(x) = (m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(-2) = (m^3 - 1)[(-2)^{2001} - 1][(-2) + 2]^{2002} + 2(-2) + 3 = -1$.

Xét $f(1) = (m^3 - 1)(1^{2001} - 1)(1 + 2)^{2002} + 2.1 + 3 = 5$.

Ta thấy $f(-2).f(1) = -1.5 = -5 < 0$ với mọi m .

Suy ra phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

Vậy phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Bài 6. Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-3) = (m^2 + 1).(-3)^3 - 2m^2.(-3)^2 - 4(-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0;$$

$$f(0) = (m^2 + 1).0^3 - 2m^2.0^2 - 4.0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0;$$

$$f(1) = (m^2 + 1).1^3 - 2m^2.1^2 - 4.1 + m^2 + 1 = -2 < 0;$$

$$f(2) = (m^2 + 1).2^3 - 2m^2.2^2 - 4.2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$. Suy ra phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 7. Đặt $f(x) = m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-2) = m(-2-1)[(-2)^3 - 4(-2)] + (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1;$$

$$f(0) = m(0-1)(0^3 - 4.0) + 0^3 - 3.0 + 1 = 1;$$

$$f(1) = m(1-1)(1^3 - 4.1) + 1^3 - 3.1 + 1 = -1;$$

$$f(2) = m(2-1)(2^3 - 4.2) + 2^3 - 3.2 + 1 = 1.$$

Ta thấy $f(-2).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình $m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.

Bài 8. Đặt $f(x) = \sin^{10} x - x - \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $m < 0$ sao cho $f(m) > 0$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(M) < 0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $[m; M]$ và $f(m).f(M) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Bài 9. Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(0) = c; f\left(\frac{n}{k}\right) = a \cdot \frac{n^2}{k^2} + b \cdot \frac{n}{k} + c.$$

$$\text{Suy ra } f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) = c \left[\frac{n^2}{k} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} \right) + c \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \right] = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \quad \left(\text{do } \frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0 \right).$$

$$\text{Vì } c^2 \geq 0; n^2 \geq km > 0 \Rightarrow \frac{n^2}{km} \geq 1, \text{ do đó } f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \leq 0.$$

- Với $c = 0$ phương trình đã cho trở thành $ax^2 + bx = 0$. Suy ra $x = 0$ hoặc $ax + b = 0$ (2).

+ Nếu $a = 0$ thì từ $c = a = 0$ và điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $b = 0$. Khi đó phương trình (2)

có nghiệm là $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

- + Nếu $a \neq 0$ thì $b \neq 0$ (vì nếu $b = 0, c = 0$ thì từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $a = 0$), suy ra phương trình (2) có nghiệm $x = -\frac{b}{a}$. Khi đó từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0; k > n > m > 0$ và $c = 0$ suy ra $x = -\frac{b}{a} = \frac{n}{k} \in (0; 1)$. Do đó phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.
- Với $1 - \frac{n^2}{km} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n}{k}$ là nghiệm thuộc $(0; 1)$.
- Với $c \neq 0$ và $1 - \frac{n^2}{km} \neq 0 \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{n}{k}\right) < 0$ thì $f(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{n}{k}\right)$. Mà $\left(0; \frac{n}{k}\right) \subset (0; 1)$ (vì $0 < \frac{n}{k} < 1$) nên phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.
- Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Bài 1.** Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.
ĐS: $(-1; 0); (3; 4)$.
- Bài 2.** Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.
ĐS: $\left(-4; -\frac{7}{2}\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
- Bài 3.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.
ĐS: $\left(-2; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; -1\right); \left(-1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); (1; 3)$.

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP

Bài 1. (HKII - THPT Lương Văn Can)

1) Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{x - 1}.$$

$$2) \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1.$$

Bài 2. (HKII - THPT Sương Nguyệt Anh)

1) Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right).$$

$$2) \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2.$$

Bài 3. (HKII – THPT Bùi Thị Xuân)

1. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1}. \text{ ĐS: } \frac{2}{5}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x + 1} + 3x + 1 \right) \text{ ĐS: } \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ Tìm } a, b \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} a + b & \text{khi } x = 1 \\ \frac{\sqrt{2x^2 + 5x - 7}}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 2bx + 3a & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ liên tục tại } x_0 = 1. \text{ ĐS: } a = -10, b = 19$$

3. Chứng minh rằng phương trình $(m^2 - 3m + 2)(x^2 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m) = 0$ có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Bài 4. (HKII – THPT Nguyễn Hữu Huân)

1. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}. \text{ ĐS: } \frac{1}{4}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \text{ ĐS: } \frac{-2}{5}.$$

$$2. \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1. \text{ ĐS: liên tục}$$

Bài 5. (HKII – THPT Hermann Gmeiner)

1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$. ĐS: 2.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3}-3}{x+2}$ ĐS: -2.

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}$. ĐS: $-\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1}+x)$ ĐS: $-\frac{1}{2}$.

2. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{khi } x < 0 \\ a-5+\frac{4-x}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$. ĐS: $a = 3$.

Bài 6. (HKII – THPT Hoàng Hoa Thám)

1. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3x}}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$. ĐS: $\frac{-2}{3}$.

2. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+2x & \text{khi } x < 1 \\ a-5+\frac{4-x}{x+1} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$. ĐS: $a = -1$.

3. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương và một nghiệm âm.

Bài 7. (HKII – THPT Hàn Thuyên)

1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+2x-15}$. ĐS: $\frac{1}{8}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{2x^2-3}}{-3x^2+x}$ ĐS: $\sqrt{2}$.

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{7-7x} & \text{khi } x \neq 1 \\ m-\frac{x}{2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$. ĐS: $m = \frac{3}{7}$.

Bài 8. (HKII – THPT Hùng Vương)

1. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3-7x^2+19x-16}{5x^2-8x+3}$. ĐS: $\frac{17}{2}$.

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-1} & \text{khi } x > 2 \\ 2x-m & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$. ĐS: $m = 4$.

3. Chứng minh rằng phương trình $(m^2-m+4)x^{2015}-2x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m .

Bài 9. (HKII – THPT Hưng Đạo)

1. Tính các giới hạn sau

a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-6x}{3+2x}$. ĐS: -3.

b). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2}$. ĐS: $-\infty$.

c). $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2x^3)$ ĐS: $+\infty$.

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$. ĐS: $m = \frac{5}{3}$.

Bài 10. (HKII – THPT Bà Điểm)

1) Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$. ĐS: $\frac{1}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$. ĐS: 1

2) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$ ĐS: liên tục.

3) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2mx + 1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Bài 11. (HKII-THPT Bình Tân)

1) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

2) Chứng minh rằng phương trình $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Bài 12. (HKII-THPT Củ Chi)

1) Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 9}{1 - 2n^2}$. ĐS: $-\frac{3}{2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n)^3 (n^2+1)^2}{3n^7 - 2}$. ĐS: -9

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1})$. ĐS: $-\frac{5}{2}$

2) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x - 10}} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{-8x}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$. ĐS: liên tục

3) Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Bài 13. (HKII-THPT Đinh Thiện Lý)

1) Tính các giới hạn sau

a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{n^4 + 2n^3 - 5n + 2}$. ĐS: 0

b) $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 6^n}{4^n + 3}$. ĐS: $-\infty$

c) $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ ĐS: $\frac{11}{3}$

d) $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$ ĐS: $\frac{1}{4}$

2) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x > 2 \\ 2ax+3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

a) Khi $a=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$. **ĐS:** Không liên tục

b) Tìm giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=2$. **ĐS:** $a = -\frac{9}{4}$

3) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Bài 14. (HKII- THPT Lý Tự Trọng)

1) Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-\sqrt{5}}$. **ĐS:** 0

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$. **ĐS:** $-\frac{2}{3}$

2) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{3-x} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4ax+5 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** $a = -\frac{7}{12}$

3) Chứng minh rằng phương trình $5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 15. (HKII-THPT Lê Quý Đôn)

1) Tìm giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2x^2-3x+1} & \text{khi } x < 1 \\ -2a+7 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$. **ĐS:** $a = \frac{27}{8}$

2) Chứng minh phương trình $(m^2 - 3m + 3)x^3 + 2x - 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Bài 16. (HKII – THPT Chuyên Nguyễn Thượng Hiền)

1) Tính giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$. **ĐS:** $-\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{4x^3}$. **ĐS:** $\frac{1}{8}$

2) Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{\sqrt{x+8}-3} & \text{khi } x > 1 \\ m^2x^2 + 7m & \text{khi } m \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$. **ĐS:** $m = -1$ và

$m = -6$

3) Chứng minh phương trình $mx^{14} - (3m^2 + 7)x^{15} - 5 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi m .

Bài 17. (HKII – THPT An Lạc)

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 5x - 26}{x - \sqrt{x^2 + x - 2}}$. **ĐS:** -84

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x - 1)$. **ĐS:** $-\frac{3}{4}$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{1 - x^3} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4mx^2 + 6x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** $m = -2$

Bài 18. (HKII – THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa)

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$. **ĐS:** 0

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{3 - x}$. **ĐS:** -1

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4}mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ **ĐS:** $m = 2$

Bài 19. (HKII – THPT Nguyễn Chí Thanh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{x^3 - 7x - 6}$. **ĐS:** 3

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$. **ĐS:** 0

② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x + 6} - 3} & \text{khi } x > 3 \\ ax + 3 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** $a = 1$

Bài 20. (HKII – THPT Nguyễn An Ninh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12}{x^2 - x - 6}$. **ĐS:** $-\frac{4}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x + 5})$. **ĐS:** $-\frac{1}{4}$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ x - 2m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** $m = \frac{9}{8}$

Bài 21. (HKII – THPT Nguyễn Du).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 10}$. **ĐS:** $-\frac{1}{7}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(\sqrt{x^2 + 1} + x) \right]$. **ĐS:** $-\frac{1}{2}$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2x - \frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** $m = \pm 1$

Bài 22. (HKII – THPT Mạc Đĩnh Chi).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 7^n + 4}{3 \cdot 2^n + 4} \right)$. **ĐS:** $-\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 4} - 2}{x^2 + x} \right)$. **ĐS:** $-\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 3x + 4} \right)$. **ĐS:** $\frac{1}{2}$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{x-5} & \text{khi } x > 5 \\ \frac{2x}{25} & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$. **ĐS:** liên tục

Bài 23. (HKII – THPT Gia Định).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 3}{4x^2 - 11x - 3}$. **ĐS:** $\frac{55}{13}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{7x+8} \cdot \sqrt[3]{9x-28} - 12}{x^3 - 4x^2 + 2x - 8} \right)$. **ĐS:** $\frac{17}{54}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{12x+4} - \sqrt[3]{36x+8}}{2x^3 - 12x^2}$. **ĐS:** $-\frac{3}{16}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{64x^3 - 4x^2} - 4x + 1 \right)$. **ĐS:** $\frac{11}{12}$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$. **ĐS:** liên tục

Bài 24. (HKII – Nguyễn Hiền).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9x^4 - 82x^2 + 9}{2x^3 - 54}$. **ĐS:** $\frac{80}{9}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+3)\sqrt{x^2+4}}{(2x+5)^2}$. **ĐS:** $-\frac{1}{2}$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{-2x^3+3x^2-x} & \text{khi } x > 1 \\ -2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** liên tục

Bài 25. (HKII – THPT Nguyễn Hữu Cảnh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 - 3x - x^2}$. **ĐS:** $-\frac{1}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{6-x}}{-x^2 + 3x - 2}$. **ĐS:** $-\frac{5}{4}$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{x-2}{4} & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** liên tục

Bài 26. (HKII – THPT Nguyễn Thái Bình).

① Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{x^2 + 5}{x - 1} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x = 3$. **ĐS:** liên tục

② Chứng minh phương trình $(m^2 + m + 3)(x - 2) + x^2 + 2x - 4 = 0$ có nghiệm $\forall m$.

Bài 27. (HKII – THPT Tây Hạng).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2}$. **ĐS:** $-\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$. **ĐS:** $\frac{1}{4}$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m(m^2 - 3) & \text{khi } x = 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{5-2x}-\sqrt{3-x}} & \text{khi } x \neq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$. **ĐS:** $m = 1$ và

$m = -2$

③ Chứng minh phương trình $5x^4 + 3x^3 - 6x^2 - x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. LỜI GIẢI

Bài 1. 1)

$$\text{a) Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{b) Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 2.$$

2) Ta có:

$$+) f(1) = 4.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+2) = 4.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+1) = 4.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài 2.

1) Tính:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-x-10}{x^3-x+6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(x^2-2x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-5}{x^2-2x+3} = -\frac{9}{11}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{x^2-2x+3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^2+2x-3}{3x-\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(8 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{x \left(3 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = -\infty.$$

2. Ta có

$$- f(2) = 2.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} = 2.$$

Bài 3.

1.

$$\text{a) Ta có } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3-5x^2+4x-1}{9x^4+8x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(2x^2-x+1)}{(3x-1)(3x^3+x^2+3x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2-x+1}{3x^3+x^2+3x+1} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{b) Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2+3x+1} + 3x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x \left(-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

2. Ta có $f(1) = a+b$.

$$- \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2bx + 3a) = 3a + 2b + 1.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 7) = 9.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 1 = 9 \\ a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 19. \end{cases}$$

3. Ta có hàm số $f(x) = (m^2 - 3m + 2)(x^2 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Mặt khác } f(1) \cdot f(2) = (3 - 2m)(2m - 3) = -(2m - 3)^2.$$

- Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì $f(1) \cdot f(2) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 1; x = 2$.

- Nếu $m \neq \frac{3}{2}$ thì $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 - 3m + 2)(x^2 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Bài 4. 1. a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \frac{1}{4}.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{5}.$

2. Ta có

$$- f(1) = -1.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài 5. 1. a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1 - x^3} - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^3 + 8)}{(x + 2)(\sqrt{1 - x^3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{1 - x^3} + 3} = -2.$

c) Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 5) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 4)^2 = 0 \\ (x - 4)^2 > 0 \text{ khi } x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 5}{(x - 4)^2} = -\infty.$

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{x\left(-\sqrt{x+1+\frac{1}{x}} - 1\right)} = -\frac{1}{2}.$

2) Ta có

- $f(0) = a - 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = 2.$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a - 5 + \frac{4-x}{x+1}\right) = a - 1.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 3.$

Bài 6.

1. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3\right)}{x\left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}\right)} = -\frac{2}{3}.$

2. Ta có

- $f(1) = 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 2x) = a + 2.$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos(x - 1) = 1.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1.$

3. Ta có hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = -25 < 0.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25) = +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25) = +\infty.$

Vậy phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-\infty; 0)$ và có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương và một nghiệm âm.

Bài 7.

1) a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{8}.$

$$\text{b) Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{2x^2-3}}{-3x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(-x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{x^2\left(-3+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{\left(-3+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{2}.$$

2) Ta có

$$- f(1) = m - \frac{1}{2}.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{7(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{14}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} = -\frac{1}{14} \Leftrightarrow m = \frac{-3}{7}.$$

Bài 8.

$$1. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 7x^2 + 19x - 16}{5x^2 - 8x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(4x^2 - 3x + 16)}{(x-1)(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 16}{5x-3} = \frac{17}{2}.$$

2. Ta có

$$- f(2) = 4 - m.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - m) = 4 - m.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+2} - 1} = 0.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

3. Ta có hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = 1 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2015} \left(m^2 - m + 4 - \frac{2}{x^{2014}} x + \frac{1}{x^{2015}} \right) = -\infty. \text{ (Vì } m^2 - m + 4 > 0 \text{ với mọi}$$

$m \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25) = +\infty.$$

Vậy phương trình $(m^2 - m + 4)x^{2015} - 2x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-\infty; 0)$ (nghiệm âm) với mọi giá trị của tham số m .

Bài 9.

$$1) \text{ a. Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-6x}{3+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{5}{x}-6\right)}{x\left(\frac{3}{x}+2\right)} = -3.$$

b. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \\ x-2 > 0 \text{ khi } x > 2 \end{cases}$.

c. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{3}{x^2} - 2 \right) = +\infty$.

2) Ta có: $f(1) = m$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$.

Bài 10. 1) a. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$.

b. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = 1$.

2) Ta có

$$f(5) = 3, \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} ((x-5)^2 + 3) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = 3.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 5$.

3) Ta có: $f(3) = 6m + 1, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = 1$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 3$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 6m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 11. 1) Ta có $f(2) = 2m + \frac{1}{4}; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi $2m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

2) Đặt $f(x) = (1-m^2)x^5 - 3x - 1$. Ta có, $f(0) = -1, f(-1) = m^2 + 1$.

Suy ra, $f(0).f(-1) = -m^2 - 1 < 0, \forall m$. Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$. Do đó, phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$ với mọi giá trị của m . Vậy ta có đpcm.

Bài 12. 1) Tính các giới hạn

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 9}{1 - 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 2} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 3n)^3 (n^2 + 1)^2}{3n^7 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - 3\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2}{3 - \frac{2}{n^7}} = \frac{(0 - 3)^3 (1 + 0)^2}{3 - 0} = -9.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 3)^2 - (x^2 - x + 1)}{x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 8}{x - 3 - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{5}{2}.$$

$$2) \text{Ta có } f(2) = -\frac{16}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x - 10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x + \sqrt{7x - 10})}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x + \sqrt{7x - 10})}{x - 5} = -\frac{16}{3}.$$

Ta thấy $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

$$3) \text{Đặt } f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3. \text{Ta có, } f(-1) = 4, f(0) = -3, f(1) = 2.$$

$$\text{Suy ra, } f(-1).f(0) = -12 < 0, f(0).f(1) = -6 < 0.$$

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 1]$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm.

Bài 13. 1) Tính các giới hạn

$$a) A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{n^4 + 2n^3 - 5n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}} = 0.$$

$$b) B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 6^n}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{6^n}} = -\infty.$$

$$c) C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{x+3} = \frac{11}{3}.$$

$$d) D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$2) y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x > 2 \\ 2ax+3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}.$$

$$a) \text{ Khi } a=1, \text{ ta được } y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x > 2 \\ 2x+3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}.$$

Ta thấy $f(2) = 7$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+3) = 7.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\sqrt{x+7}-3) = -6.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số đã cho không liên tục tại $x = 2$.

$$b) \text{ Ta có } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4a+3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -6.$$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $4a+3 = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{4}$.

$$3) \text{ Đặt } f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2. \text{ Ta có, } f(0) = -2, f(1) = 1, f(2) = -8, f(3) = 13.$$

$$\text{Suy ra, } f(0).f(1) = -2 < 0, f(1).f(2) = -8 < 0, f(2).f(3) = -104 < 0.$$

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên các đoạn

$[0;1], [1;2], [2;3]$. Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên các khoảng $(0;1), (1;2), (2;3)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm.

Bài 14. 1) Tìm các giới hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-\sqrt{5}} = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3} = -\frac{2}{3}.$$

$$2) \text{ Ta có } f(3) = 12a+5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x+1) = -2.$$

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi $12a+5 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{12}$.

3) Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5$. Ta có, $f(0) = -5, f(1) = 1$.

Suy ra, $f(0) \cdot f(1) = -5 < 0$.

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[0;1]$. Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên các khoảng $(0;1)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$. Vậy ta có đpcm.

Bài 15. ① Ta có

$$f(1) = -2a + 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2a + 7) = -2a + 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x^2 - 3x + 1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3-4}{(x-2)(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$ khi $-2a + 7 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{27}{8}$. Vậy $a = \frac{27}{8}$ là giá trị cần tìm.

② Đặt $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^3 + 2x - 3 = 0$.

Ta có $f(0) = -3, f(2) = 8m^2 - 24m + 25 = 8\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + 7 > 0 \forall m$. Suy ra $f(0) f(2) < 0 \forall m$.

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;2)$ với mọi m .

Vậy ta có đpcm.

Bài 16. ① Tính các giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{4x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot 4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8 \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

② Ta có

$$f(1) = m^2 + 7m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (m^2 x^2 + 7mx) = m^2 + 7m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(\sqrt{x+8}+3)}{x+8-9} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sqrt{x+8}-3) = -6$$

$$\text{Do đó, hàm số đã cho liên tục tại } x_0 = 1 \text{ khi } m^2 + 7m = -6 \Leftrightarrow m^2 + 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -6 \end{cases}.$$

Vậy $m = -1, m = -6$ là các giá trị cần tìm.

$$\textcircled{3} \text{ Đặt } f(x) = mx^{14} - (3m^2 + 7)x^{15} - 5.$$

$$\text{Ta có } f(0) = -5, f(-1) = 3m^2 + m + 2 = 2m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \forall m. \text{ Suy ra}$$

$$f(-1)f(0) < 0 \forall m.$$

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm với mọi m .