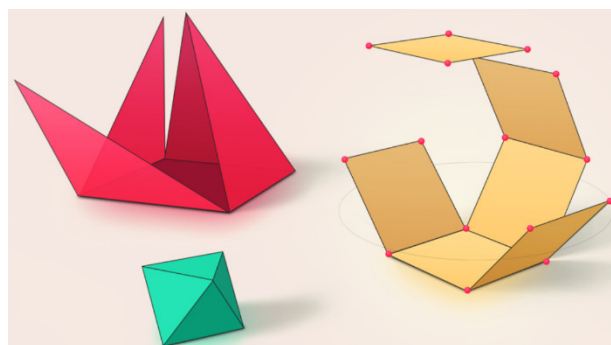
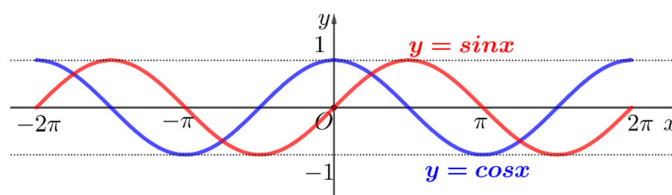
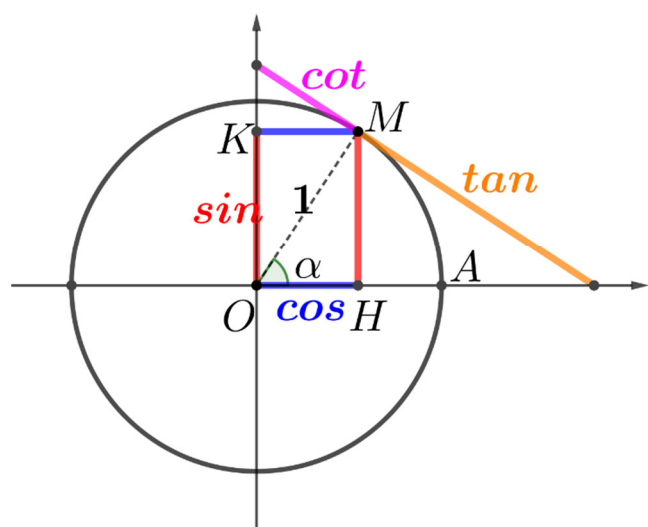


TÀI LIỆU HỌC TẬP
Năm học: 2019 – 2020

TOÁN 11

TẬP 1



Cuốn sách này của: _____

Biên soạn & giảng dạy: Thầy Duy – THPT Gia Định

PHẦN 1:

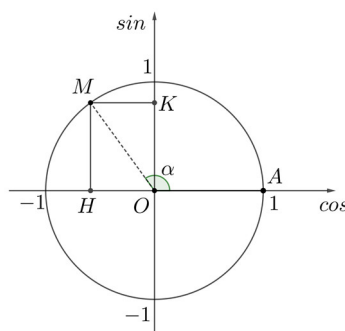
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1: ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một cung

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung $\widehat{AM}$ có số $\widehat{AM} = \alpha$:



Hình 1.1

Gọi $M(x_M; y_M)$ thì ta có:

$\sin \alpha = y_M = \overline{OK}$	$\cos \alpha = x_M = \overline{OH}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; (\cos \alpha \neq 0)$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; (\sin \alpha \neq 0)$

Lưu ý:

1. Các giá trị $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Và ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

3. $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.

4. $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

2. Công thức lượng giác

Hệ thức cơ bản	Cung liên kết
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ $\tan a \cdot \cot a = 1$ $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ $1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$	cos đối sin bù phụ chéo hơn kém $\frac{\pi}{2}$ chéo sin $\begin{aligned} -\sin a &= \sin(-a) \\ -\tan a &= \tan(-a) \\ -\cot a &= \cot(-a) \\ -\cos a &= \cos(\pi - a) \\ &= \cos(\pi + a) \end{aligned}$

Công thức cộng	Công thức nhân đôi – nhân ba – hạ bậc
$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$	$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2 \cos^2 a - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 a$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a \\ \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \end{cases}$ $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad (3\sin - 4\sin^3)$ $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad (4\cos^3 - 3\cos)$
Công thức biến đổi tổng thành tích	Công thức biến đổi tích thành tổng
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$ $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
Một số công thức khác	Công thức tính $\sin \alpha, \cos \alpha$ theo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$
$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a \pm \frac{\pi}{4} \right)$ $\cos a \pm \sin a = \sqrt{2} \cos \left(a \mp \frac{\pi}{4} \right)$ $\sin^2 a \cdot \cos^2 a = \frac{1}{4} \sin^2 2a$ $\cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{\boxed{3} + \boxed{1} \cos 4a}{\boxed{4}}$ $\cos^6 a + \sin^6 a = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2a = \frac{\boxed{5} + \boxed{3} \cos 4a}{\boxed{8}}$	Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Cung lượng giác $x = \alpha + \frac{k2\pi}{m}$ ($k \in \mathbb{Z}$) được biểu diễn bởi **m** điểm trên đường tròn lượng giác.

Bước 1: Xác định điểm M biểu diễn cung α .

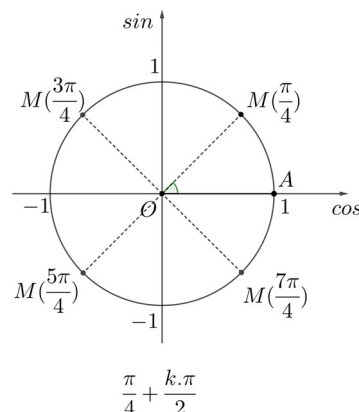
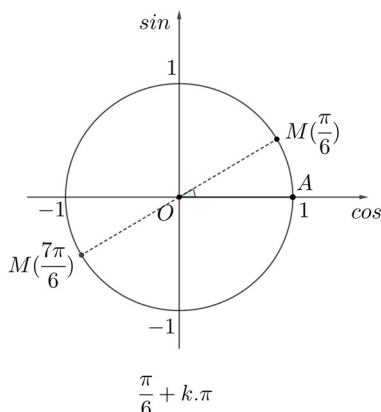
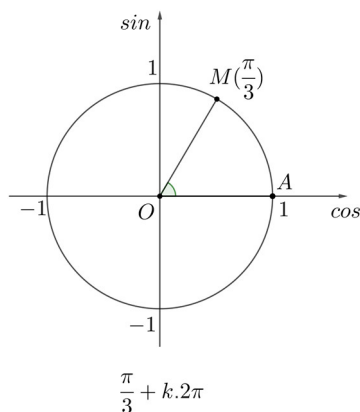
Bước 2: Xác định $m - 1$ điểm còn lại trên đường tròn lượng giác cách đều điểm M .

Ví dụ:

- Cung lượng giác $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{1}$ được biểu diễn bởi một điểm M tại vị trí $\frac{\pi}{3}$.

2. Cung lượng giác $x = \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$ được biểu diễn bởi hai điểm M tại các vị trí $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{7\pi}{6}$.

3. Cung lượng giác $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}$ thì có bốn điểm M tại các vị trí $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Biến đổi biểu thức lượng giác

Phương pháp:

Sử dụng công thức lượng giác. Thông thường ta thực hiện như sau:

- Có hệ số tự do $\Rightarrow$ biến đổi cho mất số
- Có mũ cao $\Rightarrow$ hạ bậc
- Có tích $\Rightarrow$ biến đổi thành tổng
- Có tổng $\Rightarrow$ nhóm hạng tử và biến đổi thành tích

Các ví dụ

Câu 1. Biến đổi biểu thức sau thành tổng $P = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 2. Biến đổi biểu thức sau thành tổng $P = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

[illegible]

This image shows a blank sheet of handwriting practice paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains five identical sets of three parallel dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The left column is wider than the right column. A solid vertical line separates the two columns in the center.

[illegible][illegible][illegible]

Dạng 2: Rút gọn, chứng minh biểu thức lượng giác

Các ví dụ

Câu 9. Chứng minh rằng: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x$

---	---

Câu 10. Chứng minh rằng $\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{5 + 3 \cos 2x}{8}$

---	---

Câu 11. Rút gọn biểu thức $P = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$

---	---

Câu 12. Rút gọn biểu thức $P = \sin^2 \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$

---	---

Câu 13. Rút gọn biểu thức $P = \cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x$

Dạng 3: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Phương pháp:

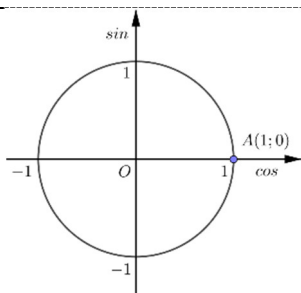
Bước 1: Đưa cung về dạng $x = \alpha + \frac{k2\pi}{m} \Rightarrow$ có **m** điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung x

Bước 2: Xác định điểm M biểu diễn cung α trên đường tròn lượng giác

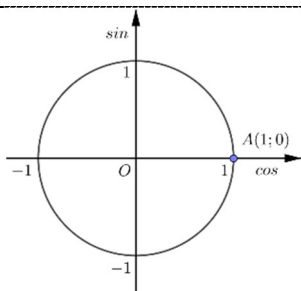
Bước 3: Xác định $m - 1$ điểm còn lại trên đường tròn lượng giác **cách đều** điểm M

Các ví dụ

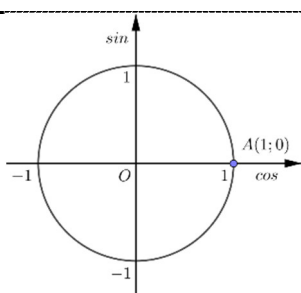
Câu 14. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



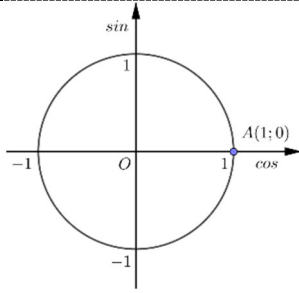
Câu 15. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



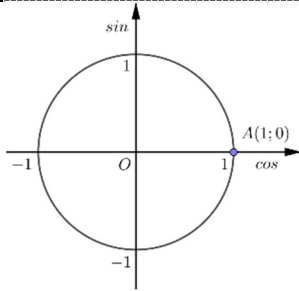
Câu 16. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



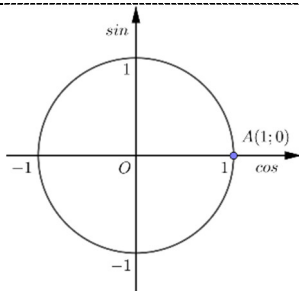
Câu 17. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



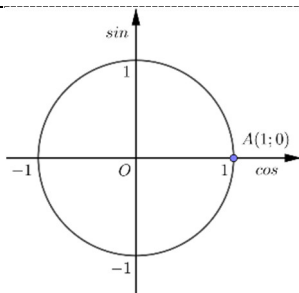
Câu 18. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



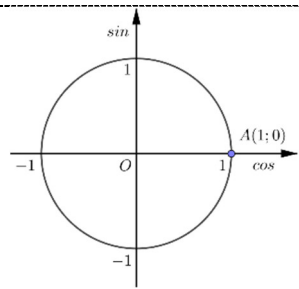
Câu 19. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$



Câu 20. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$



Câu 21. Xác định các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$



BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng 1: Phương trình $\sin u = m$

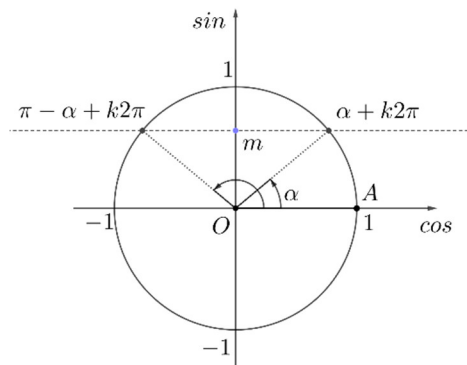
Phương pháp:

1. Dạng cơ bản: $\sin u = m$ (1)

- $m > 1 \vee m < -1$: Phương trình vô nghiệm
- $-1 \leq m \leq 1$: Với $m = \sin \alpha$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin u = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u = \alpha + k2\pi \\ u = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đặc biệt:
$$\begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**2. Dạng mở rộng:**

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Với u, v là các biểu thức theo biến x)**Các ví dụ****Câu 1.** Giải phương trình $\sin 2x = 1$

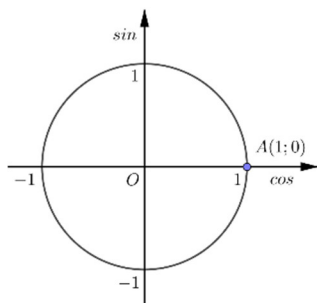
Câu 2. Giải phương trình $\sin 3x = 0$

Câu 3. Giải phương trình $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

Câu 4. Giải phương trình $\sin 5x = \frac{1}{2}$	
Câu 5. Giải phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{3}$	
Câu 6. Giải phương trình $2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$	
Câu 7. Giải phương trình $\sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = \sin 2x$	
Câu 8. Tìm các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$	

Câu 9. Tìm các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ thỏa $|x| \leq 2$

Câu 10. Giải phương trình $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$ và biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác



Dạng 2: Phương trình $\cos u = m$

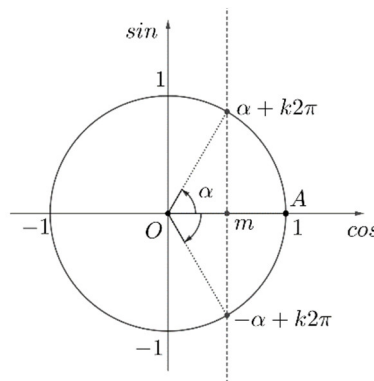
Phương pháp:

1. Dạng cơ bản: $\cos u = m$ (1)

- $m > 1 \vee m < -1$: Phương trình vô nghiệm
- $-1 \leq m \leq 1$: Với $m = \cos \alpha$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos u = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u = \alpha + k2\pi \\ u = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đặt biệt:
$$\begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



2. Dạng mở rộng:

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Với u, v là các biểu thức theo biến x)

Các ví dụ

Câu 11. Giải phương trình $\cos 3x = 1$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 12. Giải phương trình $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 13. Giải phương trình $\cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 14. Giải phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

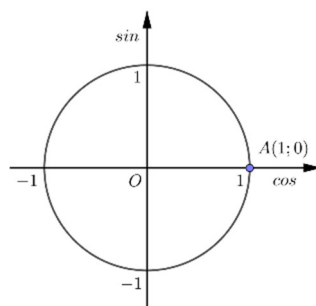
Câu 15. Giải phương trình $2 \cos \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - 1 = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 16. Giải phương trình $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 17. Tìm các nghiệm của phương trình $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$ trong đoạn $[-3; 6]$

Câu 18. Giải phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ và biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác

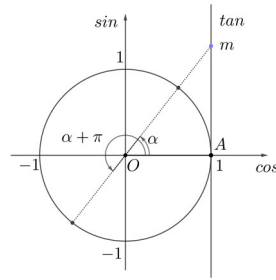


Dạng 3: Phương trình $\tan u = m$ và $\cot u = m$

Phương pháp:

1. Dạng cơ bản:

- $\tan u = m \Leftrightarrow \tan u = \tan \alpha \Leftrightarrow u = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- $\cot u = m \Leftrightarrow \cot u = \cot \alpha \Leftrightarrow u = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



2. Dạng mở rộng:

$$\begin{aligned} \tan u = \tan v &\Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cot u = \cot v &\Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(Với u, v là các biểu thức theo biến x)

Các ví dụ

Câu 19. Giải phương trình $\tan 2x = -\sqrt{3}$

Câu 20. Giải phương trình $3 \cot 3x + \sqrt{3} = 0$

Câu 21. Giải phương trình $\tan \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \tan x$

Câu 22. Giải phương trình $\cot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cot 2x$

Dạng 4: Đưa về phương trình cơ bản

Phương pháp:

- Đưa dấu "-" vào trong

$$\begin{aligned} -\sin a &= \sin(-a) \\ -\tan a &= \tan(-a) \\ -\cot a &= \cot(-a) \\ -\cos a &= \cos(\pi - a) \end{aligned}$$

- Chuyển giữa sin và cos

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos a \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin a \end{aligned}$$

- Chuyển giữa tan và cot

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cot a \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \tan a \\ \frac{1}{\tan a} &= \cot a; \quad \frac{1}{\cot a} = \tan a \end{aligned}$$

- Chú ý các dạng sau

Có $\sin^2 u, \cos^2 u \Rightarrow$ hạ bậc

$$\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$$

$$\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$\tan u \cdot \cot v = 1 \Leftrightarrow \tan u = \frac{1}{\cot v} \Leftrightarrow \tan u = \tan v$$

Các ví dụ

Câu 23. Giải phương trình $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 24. Giải phương trình $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$	
Câu 25. Giải phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	
Câu 26. Giải phương trình $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$	
Câu 27. Giải phương trình $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$	
Câu 28. Giải phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$	

Câu 29. Giải phương trình $\sin^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Câu 30. Giải phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$

Câu 31. Giải phương trình $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$

Câu 32. Giải phương trình $\tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

Dạng 5: Phương trình tích

Phương pháp:

- Biến đổi phương trình về dạng $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Chú ý các công thức sau

1. Công thức nhân đôi

2. Công thức hạ bậc

3. Công thức tổng thành tích:

4. Công thức tích thành tổng

Các ví dụ

Câu 33. Giải phương trình $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

-------------------------------------	-------------------------------------

Câu 34. Giải phương trình $\sin 4x + \cos 4x + 1 = 0$

-------------------------------------	-------------------------------------

Câu 35. Giải phương trình $\sin 3x - \sin 4x + \sin 5x = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 36. Giải phương trình $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 37. Giải phương trình $\cos 6x \cos 3x = \cos 7x \cos 4x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 38. Giải phương trình $\sin 3x \sin x + \sin 8x \sin 4x = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = 0$

b. $1 + 2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$

c. $\sin \left(4x + \frac{\pi}{5} \right) - \sin 2x = 0$

d. $\sin \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(x - \frac{9\pi}{4} \right)$

e. $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$

f. $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos x = 0$

g. $\sqrt{3} \cot\left(\frac{x}{2} + 20^\circ\right) + 1 = 0$

h. $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$

i. $\tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot 2x$

j. $\tan x \cdot \cot 2x = 1$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

b. $\cos^2\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$

c. $\sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{5} - x\right)$

d. $\sin^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2 x = 0$

e. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$

f. $\cos\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$

g. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2$

Bài 3: Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho

a. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $x \in (0; \pi)$

b. $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ với $-180^\circ < x < 90^\circ$

c. $\cos^2 2x = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ với $|x| < 2$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $\sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$

b. $1 + \cos 2x + \cos 4x = 0$

c. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

d. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

e. $\cos 5x + \cos 6x + \cos 7x = 0$

f. $\sin 6x \sin 2x = \cos 3x \cos x$

g. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$

h. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$

BÀI 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng 1: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Phương pháp:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$		
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$		
$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$		
$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$		
$a \sin^4 x + b \sin^2 x + c = 0$		
$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$		
$a \cos^4 x + b \cos^2 x + c = 0$		
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$		

MỘT SỐ ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

- $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = \cos 2a$
- $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3 + \cos 4a}{4}$
- $\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2a = \frac{5 + 3 \cos 4a}{8}$

Các ví dụ

Câu 1. Giải phương trình $\sin^2 2x + 3 \sin 2x + 2 = 0$

---	---

[illegible]

Câu 7. Giải phương trình $\cos 2x + 3 \cos^4 x - 4 = 0$

Câu 8. Giải phương trình $\cos 4x + 12 \sin x \cos x - 5 = 0$

Câu 9. Giải phương trình $2 \cos 3x \cos x - 4 \sin^2 2x + 1 = 0$

Câu 10. Giải phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$

Câu 11. Giải phương trình $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$

[illegible]

Câu 13. Giải phương trình $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}$

Dạng 2: Phương trình đưa về bậc hai

Phương pháp:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Chú ý
$a \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + b \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) + c = 0$		
$a \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) + b \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) + c = 0$		
$a \left(\tan^2 x + \cot^2 x \right) + b \left(\tan x + \cot x \right) + c = 0$		

Các ví dụ

Câu 14.	Giải phương trình $4\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) - 7 = 0$

Câu 15. Giải phương trình $2\left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}\right) + 9\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) - 1 = 0$

Câu 16. Giải phương trình $3(\tan^2 x + \cot^2 x) + 4(\tan x + \cot x) + 2 = 0$

Dạng 3: Phương trình đối xứng – phản đối xứng

Phương pháp:

$$\bullet \sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bullet \sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bullet \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bullet \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$		
$a \sin x + \cos x + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$		
$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$		
$a \sin x - \cos x + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$		

Các ví dụ

Câu 17. Giải phương trình $2 \sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 5 = 0$

---	---

Câu 18. Giải phương trình $2|\sin x + \cos x| + 3 \sin 2x - 2 = 0$.

---	---

Câu 19. Giải phương trình $|\cos x - \sin x| + 2 \sin 2x = 1$

---	---

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

1. $4 \cos^2 2x - 2(1 + \sqrt{3}) \cos 2x + \sqrt{3} = 0$

2. $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

3. $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

4. $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

5. $\sin \left(2x + \frac{5\pi}{2} \right) - 3 \cos \left(x - \frac{7\pi}{2} \right) = 1 + 2 \sin x$

6. $\sin^4 x + \cos 2x + 4 \sin^6 x = 0$

$$7. 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$$

$$8. \cos 8x + \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x - 1 = 0$$

$$9. 5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$10. 3 \cos 4x - 8 \cos^6 x + 2 \cos^2 x + 3 = 0$$

Bài 2:

$$1. \text{ Tìm } x \in [-5; 2] \text{ nghiệm đúng phương trình } 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$2. \text{ Tìm tất cả các nghiệm của phương trình } 2 \cos 2x - 4 \cos x - 1 = 0 \text{ thỏa } |x| \leq 5$$

Bài 3: Giải các phương trình sau

$$1. 4 \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + 4 \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) - 7 = 0$$

$$2. \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) = 1$$

$$3. \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{5}{2} (\tan x + \cot x) + 1 = 0$$

$$4. \cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$$

$$5. \cos x - \sin x + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = -\frac{2}{3}$$

Bài 4: Giải các phương trình sau

$$1. \sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$$

$$2. \sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$$

$$3. |\cos x - \sin x| + 2 \sin 2x = 1$$

$$4. \sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$$

$$5. \sin^3 x + \cos^3 x - 1 = \frac{3}{2} \sin 2x$$

$$6. \cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$$

$$7. \cos^3 x + \sin^3 x = 2 \sin 2x + \sin x + \cos x$$

Bài 5: Giải các phương trình sau

$$1. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{11}{8} - \sin 2x$$

$$2. \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$$

$$3. \sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$$

$$4. \cos^6 x + \sin^6 x = 4 \cos^2 2x$$

$$5. \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$$

$$6. \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$$

$$7. \sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x$$

$$8. \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$9. \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{4} \tan 2x$$

$$10. \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$$

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH CỒ ĐIỂN

Cơ sở

1. Công thức cộng:

2. Nếu $X^2 + Y^2 = 1$ thì luôn tồn tại góc α sao cho $\begin{cases} X = \sin \alpha \\ Y = \cos \alpha \end{cases}$

3. Các công thức nhân đôi, hạ bậc, nhân ba, tổng thành tích và tích thành tổng.

Dạng 1: $a \sin u + b \cos u = c$ Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$

Phương pháp:

✎ **Chú ý:** Dạng $a \sin u - b \cos u = c$ giải tương tự

Các ví dụ

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -\sqrt{2}$

Câu 3. Giải phương trình $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Câu 4. Giải phương trình $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

Câu 5. Giải phương trình $3 \sin x - \sqrt{3} \cos 3x = 1 + 4 \sin^3 x$

Câu 6. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3} \cos 2x = 2$ thỏa $|x| \leq 3$

Dạng 2: $a \sin u + b \cos u = c \sin v$

Điều kiện: $a^2 + b^2 = c^2$

Phương pháp:

⚡ **Chú ý:** Dạng $a \sin u + b \cos u = c \cos v = c \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ giải tương tự

Các ví dụ

Câu 7. Giải phương trình $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

Câu 8. Giải phương trình $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 5x$

Câu 9. Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{6} \right)$

Câu 10. Giải phương trình $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cdot \cos 2x - \sin x = 0$

Dạng 3: $a \sin u + b \cos u = c \sin v + d \cos v$

Điều kiện: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Phương pháp:

Các ví dụ

Câu 11. Giải phương trình $\sin x + \cos 2x = \sin 2x - \cos x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 12. Giải phương trình $\sin 7x - \cos 2x = \sqrt{3}(\sin 2x - \cos 7x)$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 13. Giải phương trình $\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x) = \cos 2x - \sin 3x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

1. $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$

2. $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

3. $5 \sin 2x - 12 \cos 2x = 13$

4. $3 \sin x - 4 \cos x = 3$

5. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

6. $2 \cos 2x = \sqrt{6} (\cos x - \sin x)$

7. $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$

8. $4 \sin^3 x - 1 = 3 \sin x - \sqrt{3} \cos 3x$

9. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

10. $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x \cos x - 1 = 0$

$$11. \cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

$$1. \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$$

$$2. \sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$3. \cos x + \sqrt{3} \sin x + 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$4. \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2}$$

$$5. \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

$$6. \sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3} (\sin 6x + \cos 8x)$$

$$7. \cos 3x - \sin x = \sqrt{3} (\cos x - \sin 3x)$$

$$8. 4 \sin 2x - 3 \cos 2x - 5 \cos \left(3x + \frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

Bài 3: Giải các phương trình sau

$$1. \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x}{2 \sin x} = \cos x$$

$$2. \tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$$

$$3. 8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$4. \frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$5. \frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$$

$$6. \cos x + \sqrt{3} \sin x = \frac{2}{\cos x + \sqrt{3} \sin x - 1}$$

$$7. \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0$$

$$8. \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 (\cos 4x + \sin^3 x)$$

$$9. 4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$$

$$10. 8 (\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3} \cos 2x = 11 - 3\sqrt{3} \sin 4x - 9 \sin 2x$$

Bài 4:

1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 2m \text{ vô nghiệm.}$$

$$2. \text{Cho hàm số } y = \frac{\sin x + 2 \cos x - 1}{\cos x - \sin x + 2} \quad (1)$$

a. Chứng minh tập xác định của hàm số (1) là $\mathbb{R}$.

b. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) trên $\mathbb{R}$.

3. Cho hàm số $y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$. Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số đã cho.

Tính $S = M + m$.

BÀI 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Cơ sở

Công thức cơ bản:

1. $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

2. $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$

Dạng 1: Phương trình đẳng cấp bậc hai

$$a \sin^2 u + b \sin u \cos u + c \cos^2 u = d \quad (*)$$

Phương pháp: Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1:

Trường hợp 2:

Các ví dụ

Câu 1. Giải phương trình $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$

---	---

Câu 2. Giải phương trình $3 \sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4 \cos^2 2x = 2$

---	---

Dạng 2: Phương trình đẳng cấp bậc ba

$$a \sin^3 u + b \sin^2 u \cos u + c \sin u \cos^2 u + d \cos^3 u = e \sin u + f \cos u \quad (*)$$

Phương pháp: Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1:

Trường hợp 2:

Các ví dụ

Câu 8. Giải phương trình $2 \cos^3 x = \sin 3x$

Câu 9. Giải phương trình $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$

Câu 10. Giải phương trình $\sin^2 x + 3 \tan x = \cos x (4 \sin x - \cos x)$

Câu 11. Giải phương trình $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$

Câu 12. Giải phương trình $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x$

Câu 13. Giải phương trình $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1:** Giải các phương trình sau

1. $2 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x + 6 \sin^2 x = 1$
3. $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 1 = 0$
5. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + 2 \cos^2 x$

2. $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$
4. $9 \sin^2 x - 30 \sin x \cos x + 25 \cos^2 x = 25$
6. $\sin 2x - 2 \sin^2 x = 2 \cos 2x$

Bài 2: Giải các phương trình sau

1. $3 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x = \sin x \cos^2 x$
3. $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$
5. $\sin^3 x - 4 \sin^2 x \cos x + 5 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^3 x = 0$

2. $6 \sin x + 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x$
4. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$

Bài 3: Giải các phương trình sau

1. $6 \sin x - 2 \cos^3 x = \frac{5 \sin 4x \cos x}{2 \cos 2x}$

2. $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

3. $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$

4. $8 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x$

5. $\tan x \cdot \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cdot \cos x)$

6. $\cos^3 x + \sin^3 x = 2(\cos^5 x + \sin^5 x)$

BÀI 6: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH

1. Phương trình tổng quát $a \sin 2x + b \cos 2x + c \sin x + d \cos x + e = 0$

Cơ sở

1. Công thức nhân đôi:

2. Phân tích bậc hai thành nhân tử:

3. Phương trình tích:

Phương pháp

Các ví dụ

Câu 1. Giải phương trình $\sin 2x + \cos 2x - \sin x - 5 \cos x + 3 = 0$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 2. Giải phương trình $\cos 2x - 3 \sin 2x + 9 \sin x + 6 \cos x = 8$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 3. Giải phương trình $\cos 4x - 3 \sin 4x + 9 \cos 2x - 3 \sin 2x + 5 = 0$	
Câu 4. Giải phương trình $8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3} \cos 2x = 11 - 3\sqrt{3} \sin 4x - 9 \sin 2x$	
Câu 5. Giải phương trình $\sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x \cos x + 3 \cos 2x - 2$	

2. Phương trình đưa về dạng tích

Cơ sở

1. Công thức hạ bậc:

2. Công thức biến đổi

Tổng thành tích	Tích thành tổng
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

3. Phương trình tích:

Phương pháp

Bước 1: Sử dụng các công thức hạ bậc, biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng để xuất hiện nhân tử chung

Bước 2: Nhóm hạng tử và đưa về phương trình tích hoặc các dạng phương trình đã biết.

Các ví dụ

Câu 6. Giải phương trình $\sin 7x \sin x = \sin 5x \sin 3x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 7. Giải phương trình $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 8. Giải phương trình $\cos x \cos 3x = \sin 2x \sin 6x + \sin 4x \sin 6x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 9. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

[illegible]

Câu 10. Tìm tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $2 \sin^2 3x + \sin 7x = 1 + \sin 5x$

[illegible]

Câu 11. Giải phương trình $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

[illegible]

Câu 12. Giải phương trình $1 + \sin x - \sin 2x = \cos x + \cos 2x - \cos 3x$

[illegible]

Câu 13. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 14. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 15. Giải phương trình $8 \cos^4 x = 1 + \cos 4x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

1. $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + 3 \cos x - 2$

2. $\sin 2x + 2 \cos 2x = \sin x - 4 \cos x + 1$

3. $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$

4. $2\sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x - 2\sqrt{2} \cos x + 4 = 0$

5. $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

6. $(2 \sin x + 1)(3 \cos 4x + 2 \sin x - 4) + 4 \cos^2 x = 3$

7. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

8. $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

$$9. \frac{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

- | | |
|--|--|
| 1. $\sin 4x \sin 5x + \sin 3x \sin 4x = \sin 2x \sin x$ | 2. $\sin x \cot 5x = \cos 9x$ |
| 3. $4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x$ | 4. $2 \cos x \cos 2x \cos 3x - 7 = 7 \cos 2x$ |
| 5. $\cos 22x + 3 \cos 18x + 3 \cos 14x + \cos 10x = 0$ | 6. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ |
| 7. $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ | 8. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ |
| 9. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ | 10. $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$ |

Bài 3: Giải các phương trình sau

- | | |
|---|---|
| 1. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ | 2. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ |
| 3. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ | 4. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$ |
| 5. $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$ | 6. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ |
| 7. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ | 8. $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$ |
| 9. $\cos 3x + \sin 7x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2} \right) - 2 \cos^2 \frac{9x}{2}$ | 10. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$ |
| 11. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 \left(\sin^5 x + \cos^5 x \right)$ | 12. $\sin^6 x + \cos^6 x = 2 \left(\sin^8 x + \cos^8 x \right)$ |
| 13. $\sin^8 x + \cos^8 x = 2 \left(\sin^{10} x + \cos^{10} x \right) + \frac{5}{4} \cos 2x$ | 14. $2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ |

BÀI 7: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

1. Phương pháp đặt ẩn số mới

Cơ sở

1. Công thức cộng: _____

2. Công thức nhân đôi, nhân ba: _____

Phương pháp

Đặt ẩn mới t để đưa về phương trình lượng giác chứa các cung $t, 2t, 3t...$

Các ví dụ

Câu 1. Giải phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 2. Giải phương trình $32 \cos^6\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 6x = 1$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 3. Giải phương trình $8 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x$	
Câu 4. Giải phương trình $\sin \left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} \right)$	
Câu 5. Giải phương trình $\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$	

2. Phương pháp đánh giá

Cơ sở

1. $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

2. $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} A = B \\ A \geq \alpha \\ B \leq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \alpha \\ B = \alpha \end{cases}$

Phương pháp

Biến đổi phương trình về các dạng 1, 2, 3 nêu trên.

Các ví dụ

Câu 6. Giải phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 8x = 2$

Câu 7. Giải phương trình $\cos^2 4x + \cos^2 8x = 2 + \sin^2 12x + \sin^2 16x$

Câu 8. Giải phương trình $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$

Câu 9. Giải phương trình $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

BÀI 8: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Hàm số lượng giác

1. Hàm số sin: là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với số thực $\sin x \in [-1; 1]$

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Kí hiệu: $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = [-1; 1]$
- $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

2. Hàm số cos: là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với số thực $\cos x \in [-1; 1]$

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Kí hiệu: $y = \cos x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = [-1; 1]$
- $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

3. Hàm số tan: được xác định bởi công thức $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$
- $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

4. Hàm số cot: được xác định bởi công thức $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$
- $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

II. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác

1. Hàm tuần hoàn

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Nếu tồn tại số dương T sao cho $\forall x \in D$, ta có: $\begin{cases} x + T \in D, x - T \in D \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$ thì ta nói f **tuần hoàn**

Số nhỏ nhất trong các số T nói trên gọi là **chu kỳ tuần hoàn** của hàm f

2. Hàm số sin:

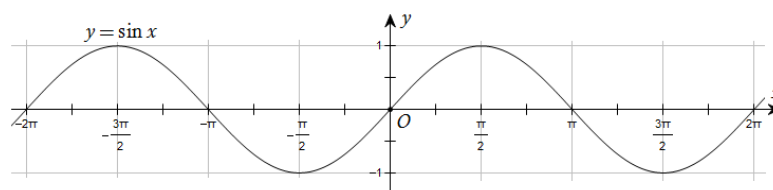
Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

Đồ thị:



3. Hàm số cos:

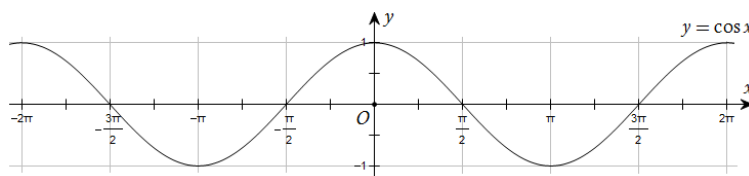
Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

Đồ thị:



3. Hàm số tan:

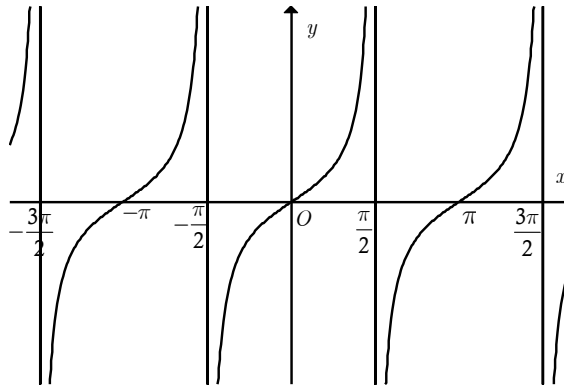
Xét hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Hàm số tăng trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và tuần hoàn với chu kỳ π

Đồ thị:



4. Hàm số cot:

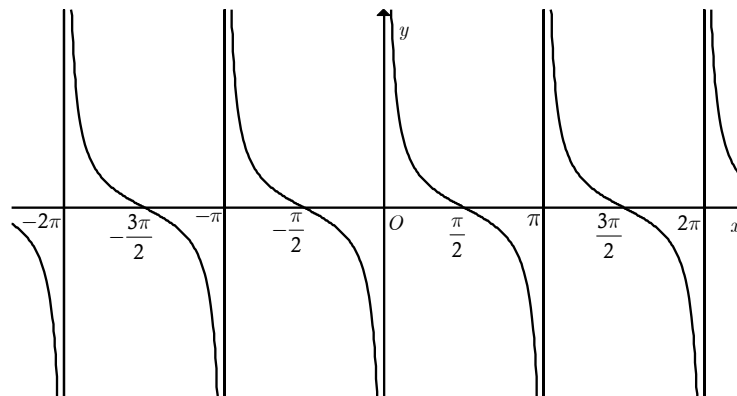
Xét hàm số $y = \cot x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$y = \cot x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Hàm số giảm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và tuần hoàn với chu kỳ π

Đồ thị:



Lưu ý: Các hàm số $y = \sin(ax + b)$; $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|a|}$

Các hàm số $y = \tan(ax + b)$; $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{|a|}$

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp

- $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- $\frac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$
- $\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B > 0$

Các ví dụ

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan 2x + \cot 2x$	

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\cos x + \sqrt{3} \sin x}$	

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác**Cơ sở**

1. Tập D đối xứng $\Leftrightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
2. $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow y = f(x) \text{ là hàm số chẵn}$
3. $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \Rightarrow y = f(x) \text{ là hàm số lẻ}$

Các ví dụ

Câu 17. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sin 2x$	

Câu 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$	

Câu 19. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan^2 x$

Câu 20. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan 2x - \sin 3x$

Câu 21. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 2 \sin x + 3$

Dạng 3: Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số lượng giác

Cơ sở

1. Các hàm số $y = \sin(ax + b)$; $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|a|}$
2. Các hàm số $y = \tan(ax + b)$; $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{|a|}$
3. Hàm số $y = f(x)$ có chu kỳ T_1 , hàm số $g(x)$ có chu kỳ T_2 thì hàm số $y = f(x) \pm g(x)$ có chu kỳ T với T là số dương nhỏ nhất chia hết cho T_1 và T_2

Các ví dụ

Câu 22. Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$

Câu 23. Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$	
Câu 24. Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \cos 2x + \tan 2x$	
Câu 25. Tìm chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \cos 3x - \cot 2x$	

Dạng 4: Tìm GTLN – GTNN của hàm số

Cơ sở

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $-1 \leq \sin a \leq 1$ | 2. $-1 \leq \cos a \leq 1$ |
| 3. $0 \leq \sin^2 a \leq 1$ | 4. $0 \leq \cos^2 a \leq 1$ |

Các ví dụ

Câu 26. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = 2 \sin x + 3$	
Câu 27. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = 1 - 3 \cos 2x$	

Câu 28. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = \sin x + \cos x$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 29. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 30. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = \cos 2x - 4 \cos x + 3$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

Câu 31. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = \cos 4x + 4 \sin 2x - 1$

-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----

LƯỢNG GIÁC TRONG ĐỀ THI 2002 – 2014

Bài 1 (ĐH A2002) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3 \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$$

Bài 2 (ĐH B2002) Giải phương trình:

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x \quad \text{ĐS: } x = \frac{k\pi}{9}; x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3 (ĐH D2002) Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng của phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}$$

Bài 4 (ĐH A2003) Giải phương trình:

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 5 (ĐH B2003) Giải phương trình:

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \quad \text{ĐS: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 6 (ĐH D2003) Giải phương trình:

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cot^2 \frac{x}{2} = 0 \quad \text{ĐS: } x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 7 (ĐH A2004) Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$$

Tính ba góc của tam giác ABC .

$$\text{ĐS: } A = 90^\circ; B = C = 45^\circ$$

Bài 8 (ĐH B2004) Giải phương trình:

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 9 (ĐH D2004) Giải phương trình:

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x \quad \text{ĐS: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 10 (ĐH A2005) Giải phương trình:

$$\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0 \quad \text{ĐS: } x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 11 (ĐH B2005) Giải phương trình:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \quad \text{ĐS: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 12 (ĐH D2005) Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 13 (ĐH A2006) Giải phương trình:

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0 \quad \text{ĐS: } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 14 (ĐH B2006) Giải phương trình:

$$\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4 \quad \text{ĐS: } x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Bài 15 (ĐH D2006) Giải phương trình:

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{ĐS: } x = k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 16 (ĐH A2007) Giải phương trình:

$$(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

$$\text{ĐS: } x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 17 (ĐH B2007) Giải phương trình

$$2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$$

Bài 18 (ĐH D2007) Giải phương trình:

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 19 (ĐH A2008) Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4 \sin \left(\frac{7\pi}{4} - x \right)$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

Bài 20 (ĐH D2008) Giải phương trình:

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 21 (ĐH D2008) Giải phương trình:

$$2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

$$\text{ĐS: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 22 (ĐH A2009) Giải phương trình:

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 23 (ĐH B2009) Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 (\cos 4x + \sin^3 x)$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}$$

Bài 24 (ĐH D2009) Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Bài 25 (ĐH A2010) Giải phương trình:

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 26 (ĐH B2010) Giải phương trình:

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 27 (ĐH D2010) Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 28 (ĐH A2011) Giải phương trình:

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Bài 29 (ĐH B2011) Giải phương trình:

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$$

Bài 30 (ĐH D2011) Giải phương trình:

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$$

Bài 31 (ĐH A2012) Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 32 (ĐH B2012) Giải phương trình:

$$2 \left(\cos x + \sqrt{3} \sin x \right) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{k2\pi}{3} \left(k \in \mathbb{Z} \right)$$

Bài 33 (ĐH D2012) Giải phương trình:

$$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$$

Bài 34 (ĐH A2013) Giải phương trình:

$$1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 35 (ĐH B2013) Giải phương trình:

$$\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$$

Bài 36 (ĐH D2013) Giải phương trình:

$$\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 37 (ĐH A2014) Giải phương trình

$$\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$$

$$\text{ĐS: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$$

Bài 38 (ĐH B2014) Giải phương trình:

$$\sqrt{2} (\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$$

$$\text{ĐS: } x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$$

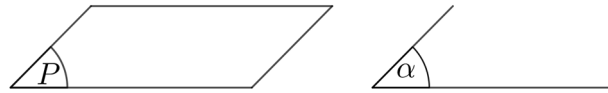
PHẦN 2: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm

• **Mặt phẳng:** là đối tượng cơ bản của hình học không gian. Mặt phẳng được biểu diễn bằng một hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn

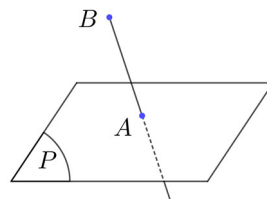


Để kí hiệu mặt phẳng, ta dùng chữ cái in hoa hoặc chữ Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ: mặt phẳng (P) , mặt phẳng (α) .

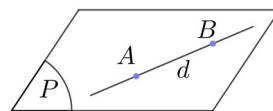
• **Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm A và mặt phẳng (P) .

Khi điểm A thuộc mặt phẳng (P) , ta nói A nằm trong (P) hay (P) chứa A . Kí hiệu: $A \in (P)$

Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (P) , ta nói A nằm ngoài (P) hay (P) không chứa A . Kí hiệu: $A \notin (P)$



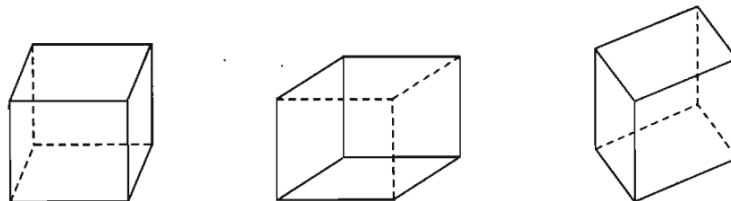
• **Đường thẳng nằm trong mặt phẳng:** Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi mọi điểm thuộc d đều nằm trong (P) , ta nói d nằm trong (P) hay (P) chứa d . Kí hiệu: $d \subset (P)$



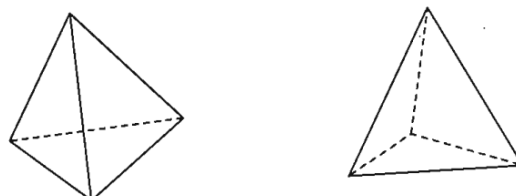
2. Hình biểu diễn của một hình không gian

Để nghiên cứu hình học không gian, người ta thường vẽ các hình không gian lên giấy, lên bảng. Hình vẽ đó gọi là hình biểu diễn của một hình không gian.

• Một vài hình biểu diễn của hình lập phương



• Một vài hình biểu diễn của hình tứ diện



3. Quy tắc biểu diễn hình không gian

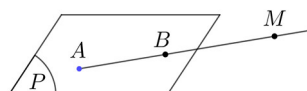
- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy, nét đứt biểu diễn cho đường bị che khuất

4. Các tính chất thừa nhận

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì đường thẳng đó nằm hoàn toàn trên mặt phẳng.



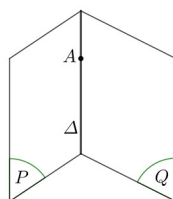
$$M \in AB \subset (P) \Rightarrow M \in (P)$$

Tính chất 4: Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Đường thẳng chung đó được gọi là **giao tuyến** của hai mặt phẳng

Kí hiệu: $\Delta = (P) \cap (Q)$



Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

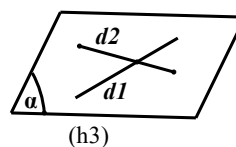
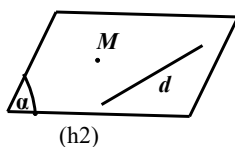
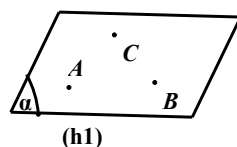
5. Cách xác định mặt phẳng

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

- (ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (h1)
- (M, d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)
- (d_1, d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h3)

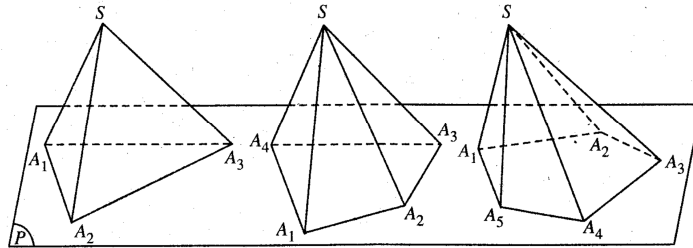


6. Hình chóp và hình tứ diện

- **Hình chóp:** Trong mặt phẳng (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (P) .

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên.



- **Hình tứ diện:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và BCD được gọi là tứ diện $ABCD$.

Tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là tứ diện đều

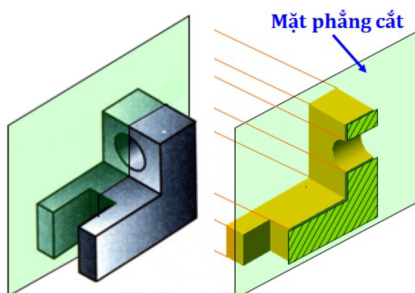
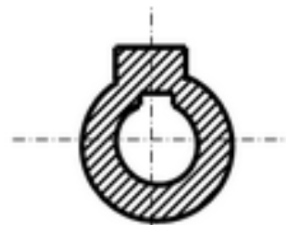
7. Thiết diện (hay mặt cắt):

Thiết diện của hình không gian H khi cắt bởi mặt phẳng (P) là phần chung của H và (P)

Ví dụ:



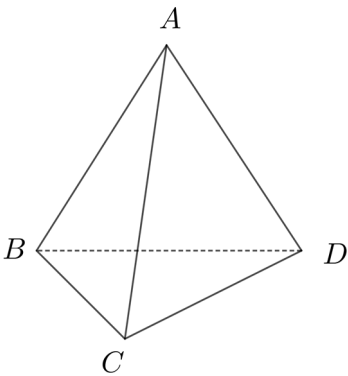
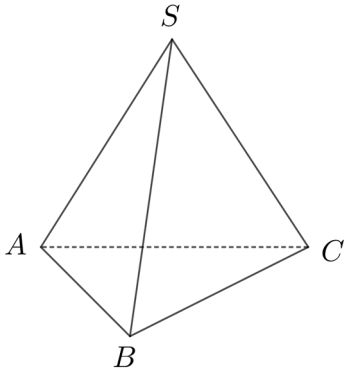
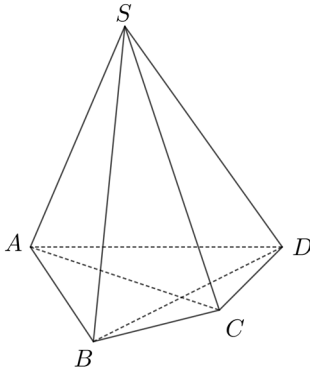
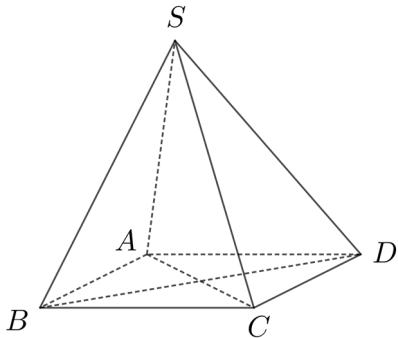
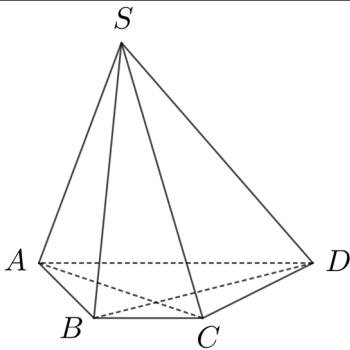
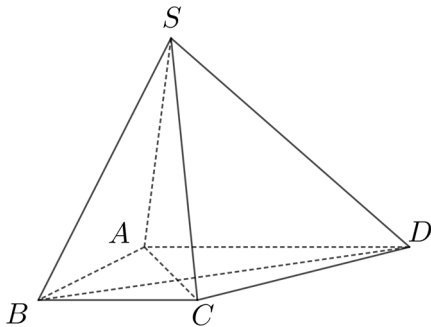
⇒ Thiết diện (mặt cắt) là:



⇒ Thiết diện (mặt cắt) là:



MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

Tứ diện $ABCD$	Hình chóp $S.ABC$
	
Hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song	Hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành
	
Hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang	Hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và D
	

MỘT SỐ KÍ HIỆU

$A \in d$		$M = a \cap b$	
$A \in (\alpha)$		$M = d \cap (\alpha)$	
$d \subset (\alpha)$		$\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$	
$A \in d \subset (\alpha)$		$S \in (\alpha) \cap (\beta)$	

B. CÁC DẠNG TOÁN

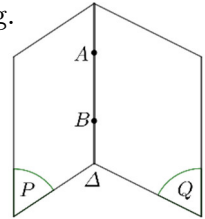
Vấn đề 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Ta tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng.

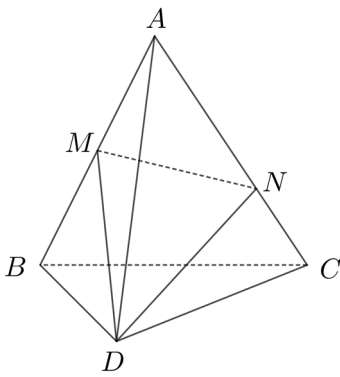
Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

$$\begin{cases} A \in (P) \cap (Q) \\ B \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow AB = (P) \cap (Q)$$



Các ví dụ

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB . Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AN = 2NC$. Hãy xác định giao tuyến:

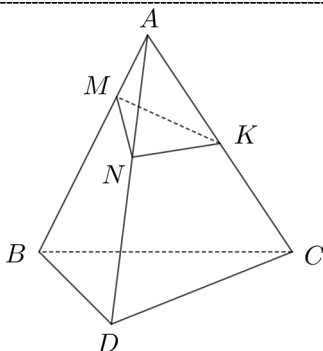


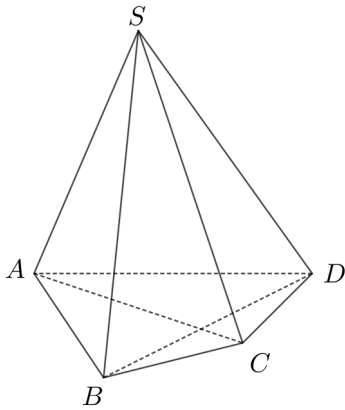
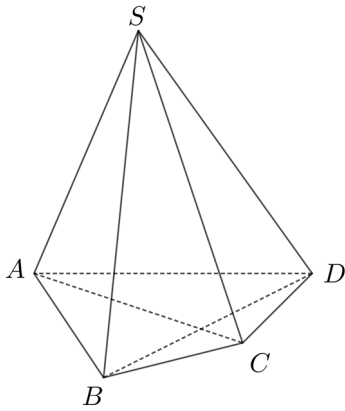
a. $(DMN) \cap (ABD)$

b. $(DMN) \cap (BCD)$

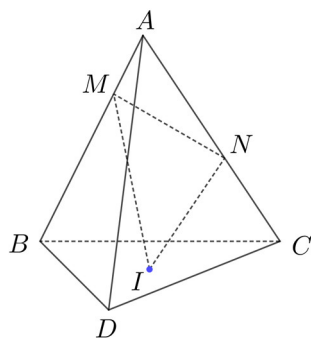
c. $(DMC) \cap (DNB)$

Câu 2: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Trên cạnh AB, AC lấy các điểm M, N sao cho M, N không là trung điểm của AB, AC . Gọi K là trung điểm AD . Tìm $(MNK) \cap (BCD)$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Tìm giao tuyến của	
 a. (SAC) và (SBD) ----- ----- ----- ----- ----- -----	b. (SAB) và (SCD) ----- ----- ----- ----- ----- ----- c. (SAD) và (SBC) ----- ----- ----- ----- ----- -----
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$. Tìm giao tuyến:	
 a. $(MBD) \cap (SAC)$ ----- ----- ----- ----- ----- -----	b. $(MBC) \cap (SAD)$ ----- ----- ----- ----- ----- ----- c. $(MBC) \cap (SCD)$ ----- ----- ----- ----- ----- -----

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M trên đoạn AB , N trên đoạn AC sao cho MN không song song với BC và I nằm trong $\triangle BCD$. Xác định giao tuyến:

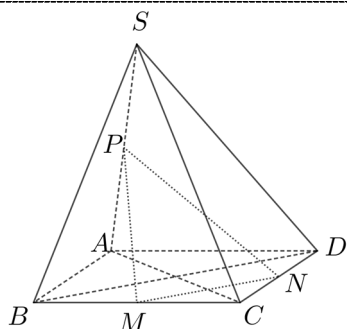


a. $(MNI) \cap (BCD)$

b. $(MNI) \cap (ACD)$

c. $(MNI) \cap (ABD)$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CD, SA . Xác định giao tuyến:



a. $(MNP) \cap (SAB)$

b. $(MNP) \cap (SAD)$

c. $(MNP) \cap (SBC)$

d. $(MNP) \cap (SCD)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD .

- Xác định giao tuyến của (MAD) và (NBC) .
- Trên cạnh AB lấy điểm I , trên cạnh CD lấy điểm J . Xác định giao tuyến của (NBC) và (DIJ) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của BC , G là trọng tâm tam giác SAC . Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $AN = 2NB$.

- Xác định giao tuyến của (MNG) và (SAC) .
- Xác định giao tuyến của (MNG) và (SAB) .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song, AC cắt BD tại O . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $SA = 3SM$. Trên cạnh SD lấy điểm N sao cho $SD = 3ND$.

- Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Xác định giao tuyến của (MNO) và $(ABCD)$.
- Xác định giao tuyến của (MNO) và (SAB) .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD .

- Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- Xác định giao tuyến AE của (AMN) và (SAC) .
- Gọi P là giao điểm của ME với BC , Q là giao điểm của NE với CD . Ba điểm P, A, Q có thẳng hàng không? Vì sao?

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên SA, SD lấy điểm M, N sao cho

$$\frac{MS}{MA} = \frac{ND}{NS} = \frac{1}{3}. \text{ Gọi } P \text{ là trung điểm } BC.$$

- Xác định giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.
- Xác định giao tuyến của (MNP) và (SAB) .
- Xác định giao tuyến của (MNP) và (SCD) .
- Xác định giao tuyến của (MNP) và (SAC) .

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trong $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$. Không xét các trường hợp song song.

- Xác định giao tuyến của (AMN) và (BCD) .
- Xác định giao tuyến của (BMN) và (BCD) .

Câu 7*: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song, AC cắt BD tại O . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 3MS$. Gọi G là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao tuyến của (MOG) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

Câu 8:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trong các $\triangle ABC, \triangle ACD$ và $\triangle BCD$. Không xét các trường hợp song song, hãy xác định giao tuyến của (MNP) với các mặt của tứ diện.

Vấn đề 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp:

Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta tìm giao điểm của d với một đường Δ nằm trong (P) :

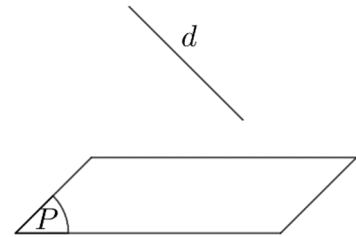
$$\begin{cases} d \cap \Delta = I \\ \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in d \\ I \in \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (P)$$

Cách xác định Δ (khi chưa có sẵn)

Bước 1: Chọn mặt phẳng (Q) chứa d

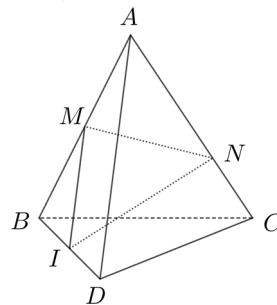
Bước 2: Tìm $\Delta = (P) \cap (Q)$

Bước 3: Trong (Q) : $d \cap \Delta = I \Rightarrow \begin{cases} I \in d \\ I \in \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (P)$



Các ví dụ

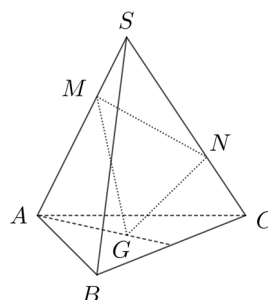
Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm AB, BD . Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AN = 2NC$. Hãy xác định giao điểm:



a. $MN \cap (BCD)$

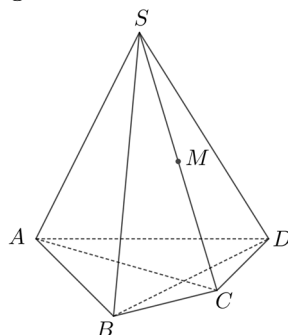
b. $CD \cap (IMN)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SC lấy điểm M, N sao cho $\frac{SA}{SM} = \frac{SC}{NC} = 3$. Gọi G là trọng tâm ΔABC . Xác định giao điểm



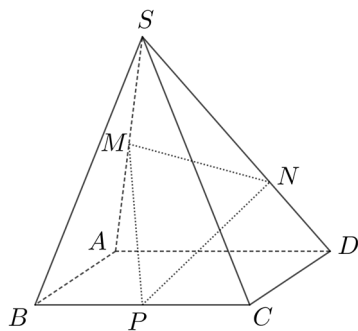
a. $MN \cap (ABC)$ ----- ----- ----- ----- -----	----- ----- ----- ----- -----
b. $AB \cap (GMN)$ ----- ----- ----- ----- -----	d. $NG \cap (SAB)$ ----- ----- ----- ----- -----
c. $MN \cap (SBG)$ ----- ----- ----- ----- -----	----- ----- ----- ----- -----

Câu 3: Cho tứ diện hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M là trung điểm của SC . Xác định giao điểm



a. $BD \cap (SAC)$ ----- ----- ----- ----- -----	c. $SB \cap (ADM)$ ----- ----- ----- ----- -----
b. $AM \cap (SBD)$ ----- ----- ----- ----- -----	----- ----- ----- ----- -----

Câu 4: Cho tứ diện hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SA, SD lấy điểm M, N sao cho $SA = 3SM, SD = 3ND$. Gọi P là trung điểm của BC . Tìm giao điểm của:

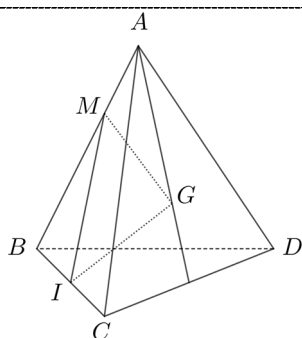


a. $CD \cap (MNP)$

b. $SB \cap (MNP)$

c. $SC \cap (MNP)$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm BC , G là điểm nằm trong $\triangle ACD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho MG cắt mặt phẳng (BCD) . Tìm giao điểm của:



a. $E = MG \cap (BCD)$

b. $F = AD \cap (MGI)$

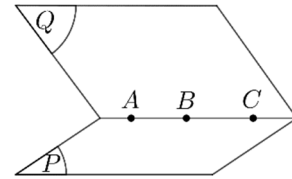
Vấn đề 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng – ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp:

1. Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta chứng minh A, B, C cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

$$\begin{cases} A \in (P) \cap (Q) \\ B \in (P) \cap (Q) \\ C \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.}$$



2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy:

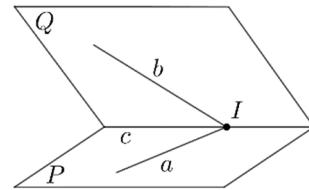
Chứng minh ba đường a, b, c đồng quy.

Bước 1: Gọi $I = a \cap b$

Bước 2:
$$\begin{cases} I \in a \subset (P) \\ I \in b \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q)$$

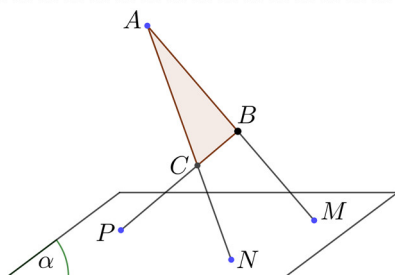
Bước 3: Chứng minh $c = (P) \cap (Q) \Rightarrow I \in c$

Vậy a, b, c đồng quy.

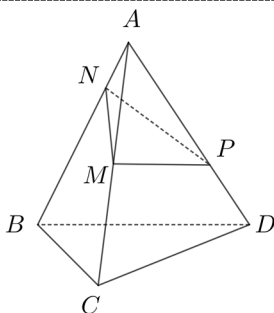


Các ví dụ

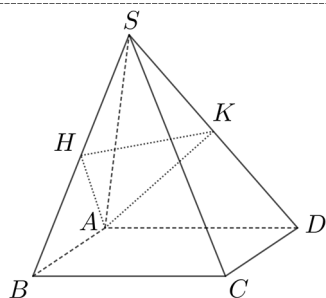
Câu 1: Trong không gian, cho mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABC) . Biết $AB \cap (\alpha) = M$, $AC \cap (\alpha) = N$, $BC \cap (\alpha) = P$. Hình vẽ sau đúng hay sai? Vì sao?



Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AC , điểm N trên cạnh AB sao cho $AB = 4AN$, điểm P trên cạnh AD sao cho $AD = 4PD$. Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của MN và BC , MP và CD , NP và BD . Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SB, SD

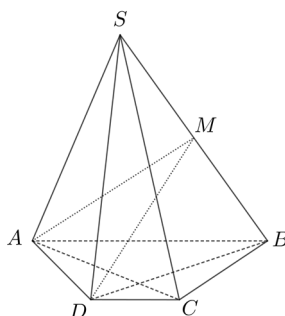


a. Tìm giao điểm E của HK và (SAC) , giao điểm

I của SC và (AHK)

b. Gọi $M = HI \cap BC$, $N = KI \cap CD$. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng

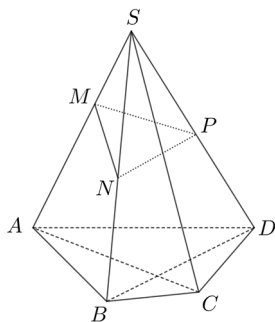
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm SB .



a. Tìm giao điểm N của SC và (ADM) .

b. Chứng minh rằng AD, BC, MN đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SD .

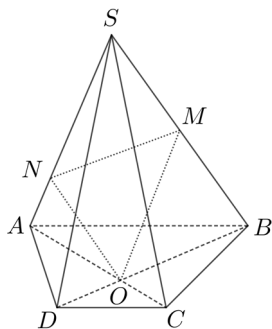


a. Tìm giao tuyến SI của (SAB) và (SCD)

b. Tìm giao điểm Q của SC và (MNP)

c. Chứng minh rằng MN, PQ và SI đồng quy.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm SB . Trên cạnh SA lấy điểm N sao cho $4SN = 3SA$.

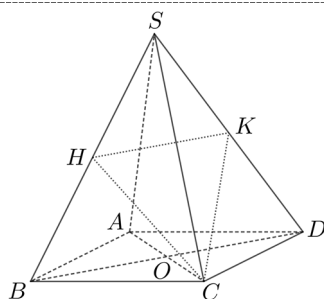


a. Tìm giao điểm I của MN và $(ABCD)$

b. Tìm giao điểm J của SD với (OMN) , giao điểm K của SC với (OMN)

c. Chứng minh OI, CD, JK đồng quy. ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- -----	d. Gọi H là trung điểm của DM. Chứng minh S, H, O thẳng hàng. ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- -----
---	--

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi H, K lần lượt là trung điểm SB và SD .



a. Tìm giao điểm E của HK và (SAC) .

b. Tìm giao điểm I của SA và (CHK) .

b. Tìm giao điểm J của AB và (CHK) .

c. Chứng minh IK, AD, JC đồng quy.

d. Gọi E là trung điểm của OK , G là trọng tâm ΔACD . Chứng minh S, E, G thẳng hàng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi M là trung điểm của SD .

- Tìm giao tuyến SI của (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm N của SC và (ABM) .
- Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng AN, BM và SO đồng quy.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA . Gọi N, P là các điểm trên AB và SC sao

$$\text{cho } \frac{AN}{AB} = \frac{SP}{SC} = \frac{3}{4}.$$

- Tìm giao điểm Q của BC và (MNP) .
- Chứng minh rằng MN, PQ và SB đồng quy.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . G là trọng tâm $\triangle ACD$.

- Tìm giao điểm I của MG và (BCD) .
- Tìm giao điểm P của CD với (MNG) và giao điểm Q của AD với (MNG) .
- Chứng minh rằng MQ, NP và BD đồng quy.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của SA , I là trung điểm CM . Chứng minh rằng S, I, O thẳng hàng.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA . Điểm K di động trên đoạn AP .

- Tìm giao điểm E của SB và (MNK) , giao điểm F của SD và (MNK) .
- Gọi I là giao điểm của ME và NF . Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định K di động trên đoạn AP .

Câu 6*: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M là trung điểm SD . Trên cạnh SC lấy điểm N .

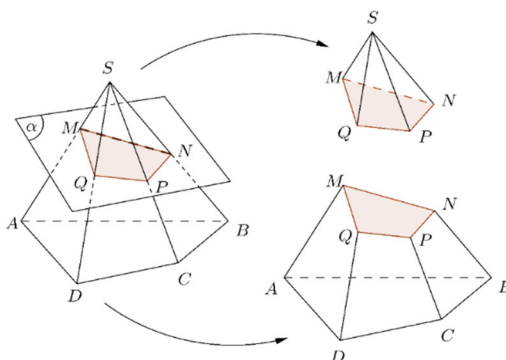
- Tìm giao điểm I của AN và (SBD) .
- Gọi E là giao điểm của MI và BD , F là giao điểm của MN và CD . Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi N di động trên cạnh SC .

Vấn đề 4: Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng

Phương pháp:

Nếu mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình chóp (Mặt bên và mặt đáy – nếu có) theo các **đoạn giao tuyến** nối tiếp nhau, tạo thành một đa giác phẳng thì ta gọi đa giác này là **thiết diện** hay **mặt cắt** của mặt phẳng (α) và hình chóp.

Ở hình dưới, thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$



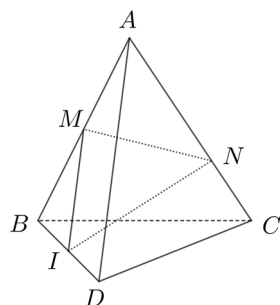
Thông thường, để xác định các thiết diện, ta làm theo hai cách sau:

Cách 1: Tìm **giao tuyến đầu tiên** của mặt phẳng (α) với một mặt phẳng nào đó của hình chóp, giao tuyến này dễ tìm được. Sau đó kéo dài giao tuyến này cắt các cạnh khác của hình chóp, từ đó ta tìm được các đoạn giao tuyến tiếp theo. Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này là thiết diện cần tìm.

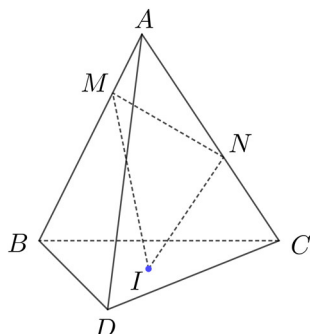
Cách 2: Tìm **giao điểm của (α) với các cạnh của hình chóp** (cạnh bên và cạnh đáy) ((α) có thể chỉ cắt một số cạnh, chứ không nhất thiết phải cắt tất cả các cạnh). Nối các giao điểm lại thành một đa giác, là thiết diện cần tìm

Các ví dụ

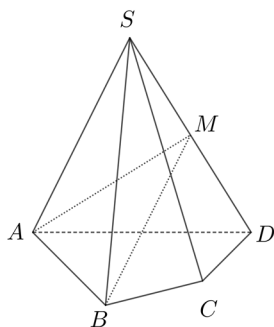
Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên cạnh AB, AC sao cho MN không song song với BC . Gọi I là trung điểm của BD . Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNI)



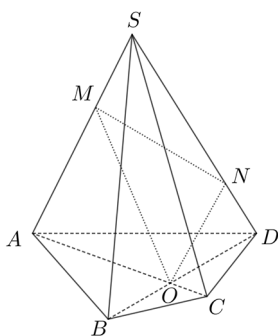
Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên cạnh AB, AC sao cho MN không song song với BC . Gọi I là điểm nằm trong $\triangle BCD$. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNI)



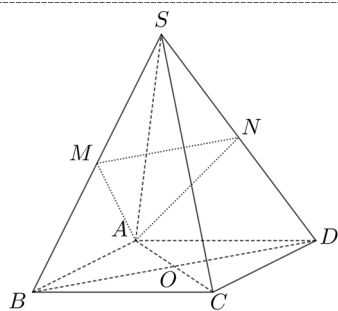
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Trên cạnh SD lấy điểm M . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ABM)



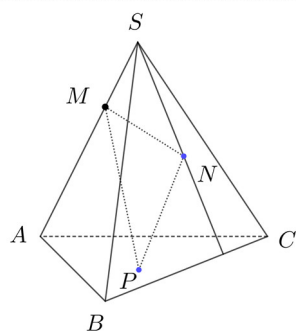
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M, N là các điểm nằm trên cạnh SA, SD sao cho MN không song song với AD . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (OMN)



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SD . Xác định giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) , từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN)



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy điểm M . Gọi N và P lần lượt là các điểm nằm trong tam giác SBC và ABC sao cho MN cắt mặt phẳng (ABC) . Xác định giao điểm của MN với (ABC) và thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (MNP)



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là điểm nằm trên cạnh SA, SC và P là điểm trong tam giác ABC . Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (MNP) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $SA = 3SM$, G là trọng tâm $\triangle SCD$, O là giao điểm của AC và BD . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (MGO)

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Trên cạnh SC lấy điểm P sao cho $SP = 3PC$. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là tứ giác lồi, các cạnh đối không song song. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trọng tâm $\triangle SBC$ và $\triangle SCD$.

- Xác định giao điểm của SC với (AEF) .
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AEF)

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và CD , điểm L thuộc cạnh SA . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (HKL) .

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , Gọi M, N, I lần lượt thuộc AB, BC, SO . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI) .