

HOÀNG XUÂN NHÀN

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

Chuyên đề HÀM SỐ

NĂM HỌC 2023-2024

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

HOÀNG XUÂN NHÀN

MỤC LỤC

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ	trang 01
PHẦN I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM ĐA THỨC, HÀM PHÂN THỨC, HÀM CHỨA CĂN VÀ LƯỢNG GIÁC	trang 01
Dạng toán 1. Xét tính đơn điệu của hàm số	trang 01
Dạng toán 2. Tìm tham số m để đạo hàm của hàm số không đổi dấu	trang 06
Dạng toán 3. Hàm số nhất biến đơn điệu trên tập K	trang 09
Dạng toán 4. Tính đơn điệu của hàm mở rộng hàm nhất biến	trang 11
Dạng toán 5. Hàm số đa thức bậc ba đơn điệu trên tập K	trang 14
Dạng toán 6. Hàm số bậc cao, hàm chứa căn, hàm chứa mẫu đơn điệu trên tập K	trang 20
Dạng toán 7. Tính đơn điệu một số hàm lượng giác chứa tham số	trang 25
Đáp án trắc nghiệm Phần I	trang 27
PHẦN II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM ẨN, HÀM HỢP, HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI	trang 28
Dạng toán 1. Tính đơn điệu của hàm số có đạo hàm cho trước	trang 28
Dạng toán 2. Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$	trang 31
Dạng toán 3. Tính đơn điệu của hàm hợp có dạng phức tạp	trang 35
Dạng toán 4. Xét tính đơn điệu bằng kĩ thuật truy ngược hàm ẩn	trang 46
Dạng toán 5. Bài toán đơn điệu có tham số của hàm chứa giá trị tuyệt đối	trang 49
Đáp án trắc nghiệm Phần II	trang 55
BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	trang 56
Dạng toán 1. Tìm điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số	trang 58
Dạng toán 2. Điều kiện cực trị của hàm số bậc ba chứa tham số	trang 66
Dạng toán 3. Điều kiện cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương chứa tham số	trang 79
Dạng toán 4. Tìm điểm cực trị của hàm hợp khi biết đồ thị đạo hàm	trang 88
Dạng toán 5. Bài toán vận dụng cao cực trị hàm chứa tham số	trang 101
Đáp án trắc nghiệm	trang 109

BÀI 3. MAX-MIN CỦA HÀM SỐ	trang 111
Dạng toán 1. Tìm Max-Min của hàm số trên một đoạn	trang 111
Dạng toán 2. Tìm Max-Min của hàm số trên một khoảng, nửa khoảng.....	trang 116
Dạng toán 3. Tìm tham số thỏa mãn điều kiện Max-Min cho trước.....	trang 118
Dạng toán 4. Tìm Max-Min cho bài toán thực tế	trang 123
Đáp án trắc nghiệm	trang 131
BÀI 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 132
Dạng toán 1. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm phân thức.....	trang 132
Dạng toán 2. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn	trang 137
Dạng toán 3. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm ẩn.....	trang 143
Dạng toán 4. Tiệm cận của đồ thị hàm có chứa tham số	trang 152
Dạng toán 5. Những bài toán liên quan đến tiệm cận	trang 159
Đáp án trắc nghiệm	trang 162
BÀI 5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 163
Dạng toán 1. Nhận diện đồ thị hàm số bậc ba	trang 165
Dạng toán 2. Nhận diện đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương	trang 173
Dạng toán 3. Nhận diện đồ thị hàm số nhất biến	trang 179
Dạng toán 4. Phép biến đổi đồ thị hàm số	trang 187
Đáp án trắc nghiệm	trang 200
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 201
Dạng toán 1. Sự tương giao khi biết đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số	trang 201
Dạng toán 2. Sự tương giao liên quan đồ thị hàm số bậc ba	trang 214
Dạng toán 3. Sự tương giao liên quan đến đồ thị hàm bậc bốn trùng phương.....	trang 225
Dạng toán 4. Sự tương giao liên quan đến đồ thị hàm nhất biến.....	trang 232
Đáp án trắc nghiệm	trang 241

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa tính đơn điệu:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K .

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì được gọi là **đơn điệu** trên K .

2. Định lí (tính đơn điệu và dấu của đạo hàm):

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm $f(x)$ **đồng biến** trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm $f(x)$ **nghịch biến** trên K .

🔍 Chú ý:

- Định lí trên được mở rộng với $f'(x) \geq 0$ (hay $f'(x) \leq 0$) trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số **hữu hạn điểm** x ; khi đó kết luận hàm số **đồng biến** (hay **nghịch biến**) vẫn đúng.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ **liên tục** trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số **đồng biến** trên $[a; b]$. (Tương tự cho trường hợp hàm số **nghịch biến** trên $[a; b]$).

PHẦN I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM ĐA THỨC, HÀM PHÂN THỨC, HÀM CHỨA CĂN VÀ LƯỢNG GIÁC

Dạng toán 1. Xét tính đơn điệu của hàm số

😊 Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Tính $y' = f'(x)$; cho $y' = 0 \xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_1, x_2, \dots$ (nếu có).
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên các khoảng của tập xác định.

🌟 BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	42	$\searrow$	10	$\nearrow$
						$+\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

Câu 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ là

A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

D. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$
								$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$; nghịch biến trên các khoảng: $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

Câu 3. Chọn mệnh đề đúng về hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

D. Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$. Nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'			
		+	+
y			
	2	$+\infty$	$-\infty$

Câu 4. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = (-\infty; 2]$.

Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'				
		+	-	
y				
	$-\infty$	6	5	

Vậy ta hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 5. Hàm số $y = |2x^2 - 3x - 5|$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right)$
- B. $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.
- C. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.
- D. $\left(-1; \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Áp dụng công thức $(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{(u^2)'}{2\sqrt{u^2}} = \frac{2u \cdot u'}{2|u|} = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(2x^2 - 3x - 5)(4x - 3)}{2|2x^2 - 3x - 5|}$.

$$\text{Xét } y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 3x - 5)(4x - 3) \geq 0 \\ |2x^2 - 3x - 5| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x \neq -1 \wedge x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{4} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng: $\left(-1; \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 6. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 3)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(2; 4)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 7. Hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 11$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-\infty; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C. Trên khoảng $(-\infty; -2)$ hàm số đã cho đồng biến.
D. Trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đã cho đồng biến.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(0; +\infty)$.
B. $(-\infty; -2)$.
C. $(-3; 1)$.
D. $(-2; 0)$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

Câu 10. Cho đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; 2)$.
B. $(1; +\infty)$.
C. $(1; 3)$.
D. $(-\infty; 1)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Câu 11. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$ nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 12. Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 13. Hàm số $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 14. Hàm số $f(x) = 1 - 3x^4$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(0; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = x^4 - 2x - 2$.

D. $y = -x^4 + 2x - 2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$+$			
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

B. $y = -2x^4 - 4x^2 + 1$.

C. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

D. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

Câu 17. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng** ?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{5-x}{x+2}$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

Câu 22. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên dưới ?

A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

C. $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

D. $y = \frac{2x-3}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	—		—
y	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

Câu 23. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-2; 2)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0), (0; 2)$.

Câu 24. Hàm số $y = 2x - 1 + \frac{8}{x-1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-1; 3)$.

B. $(-\infty; 3)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-1; +\infty)$.

Câu 25. Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-3; 1)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(-\infty; -3)$.

D. $(1; +\infty)$.

Câu 26. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; -1), (-1; 0)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 27. Hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-3; 0)$.

C. $(-3; 3)$.

D. $(0; 3)$.

Câu 28. Hàm số $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 29. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $(1; 5)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Dạng toán 2. Tìm tham số m để đạo hàm của hàm số không đổi dấu

Bài toán 1: Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập số thực.

☺ **Phương pháp:**

○ **Bước 1:** Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

○ **Bước 2:** Điều kiện đơn điệu (khi $a \neq 0$):

— Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

— Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

⚠ **Lưu ý:** Nếu hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có a chứa tham số thì ta cần xét $a = 0$ để kiểm tra xem hàm số có đơn điệu trên $\mathbb{R}$ hay không.

Bài toán 2: Tìm m để hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

☺ **Phương pháp:**

- **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- **Bước 3:** Điều kiện đơn điệu:
 - Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad-bc > 0$.
 - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad-bc < 0$.
- ✎ **Lưu ý:** Nếu hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có c chứa tham số thì ta nên xét $c = 0$ để kiểm tra xem hàm số có đơn điệu trên từng khoảng xác định của nó hay không.

✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 30. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (8-2m)$. Nhận thấy $a = 1 \neq 0$.

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \\ m^2 - 8 + 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Ta thấy $m = 2$ thỏa mãn đề bài.

Câu 31. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

- A. $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$. B. $-\frac{2}{7} \leq m < 1$.
- C. $-\frac{7}{2} \leq m < 1$. D. $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.

- Xét $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, ta có: $y' = -3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn. (*)
- Xét $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Hàm số nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \leq m < 1. \quad (**)$$

Hợp các kết quả của (*) và (**), ta có $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng

khoảng xác định của nó?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq -4$

$\Leftrightarrow 4-m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow m \in (-2; 2)$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{9x+m}{mx+1}$ nghịch biến trên từng

khoảng xác định của nó?

A. 5.

B. Vô số.

C. 7.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nhận thấy $c = m$ chưa chắc khác 0 nên ta xét $c = m = 0$ trước. Khi đó $y = 9x$ có $y' = 9 > 0$ (không thỏa mãn đề bài).

Xét $c = m \neq 0$, ta có $y' = \frac{9-m^2}{(mx+1)^2}$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow 9-m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}$.

Vì m nguyên nên có vô số giá trị m thỏa mãn đề bài.

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Câu 36. Tìm các giá trị của m để hàm số $f(x) = (m^2 - 4)x^3 + 3(m-2)x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 2$.

Câu 37. Hỏi có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 38. Tất cả các giá trị m sao cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A. $m > 1$. B. $m > -1$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 39. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định ?

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 4$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $m > 4$.

Câu 40. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx-3m+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$?

- A. $-4 < m < 1$. B. $-4 < m < 0$.
C. $-4 \leq m \leq 0$. D. $-4 < m \leq 0$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó ?

- A. 5. B. 4. C. 3. D. Vô số.

Dạng toán 3. Hàm số nhất biến đơn điệu trên tập K

Bài toán: Tìm m để hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến (nghịch biến) trên tập K.

☺ **Phương pháp:**

➤ **Bước 1:** $cx + d \neq 0, \forall x \in K \Rightarrow -\frac{d}{c} \neq x, \forall x \in K \Rightarrow -\frac{d}{c} \notin K$.

➤ **Bước 2:** Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Hàm số đồng biến trên K nên $ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến trên K nên $ad - bc < 0$.

➤ **Bước 3:** Giao kết quả của hai bước làm trên để suy ra tập giá trị m thỏa mãn.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện: $x - m \neq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Rightarrow m \neq x, \forall x \in (-\infty; -1) \Rightarrow m \geq -1$ (1).

Ta có: $y' = \frac{-m+2}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m+2 > 0 \Rightarrow m < 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $-1 \leq m < 2$; m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điều kiện: $x+5m \neq 0, \forall x \in (10; +\infty) \Rightarrow -5m \neq x, \forall x \in (10; +\infty) \Rightarrow -5m \leq 10 \Rightarrow m \geq -2$ (1).

Ta có $y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2} < 0 \Rightarrow 5m-6 < 0 \Rightarrow m < \frac{6}{5}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $-2 \leq m < \frac{6}{5}$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-1; 0)$?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện: $2x+m \neq 0, \forall x \in (-1; 0) \Rightarrow -\frac{m}{2} \neq x, \forall x \in (-1; 0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} \leq -1 \\ -\frac{m}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq 0 \end{cases}$ (1).

Ta có: $y' = \frac{m^2-4}{(2x+m)^2} < 0 \Rightarrow m^2-4 < 0 \Rightarrow m \in (-2; 2)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m \in (-2; 0]$, vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0\}$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $1 \leq m \leq 2$. B. $m = 1$. C. $1 < m < 2$. D. $m = 2$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2)$. C. $m \in (-2; 0)$. D. $m \in (-2; 2)$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-9}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. $-3 < m \leq 2$. B. $-3 < m < 2$. C. $m \leq 2$. D. $2 \leq m < 3$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{mx+9}{x+m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

- A. $-3 \leq m \leq -1$. B. $-3 < m \leq -1$.
C. $-3 \leq m \leq 3$. D. $-3 < m < 3$.

Câu 50. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ là

- A. $(2; 5]$. B. $[2; 5)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(2; 5)$.

Dạng toán 4. Tính đơn điệu của hàm mở rộng hàm nhất biến

Bài toán: Tìm m để hàm số nhất biến $y = \frac{au+b}{cu+d}$ đồng biến (nghịch biến) trên tập K .
(trong đó u có thể là $\sqrt{ax+b}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ...)

Phương pháp:

➤ **Bước 1:** $cu+d \neq 0, \forall x \in K \Rightarrow -\frac{d}{c} \neq u, \forall x \in K$.

➤ **Bước 2:** Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \cdot u'$.

Hàm số đồng biến trên K nên $y' > 0$.

Hàm số nghịch biến trên K nên $y' < 0$.

➤ **Bước 3:** Giao kết quả của hai bước làm trên để suy ra tập giá trị m thỏa mãn.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m < 2$. B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
C. $1 \leq m < 2$. D. $m \leq 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điều kiện: $\tan x - m \neq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow m \neq \tan x, \forall \tan x \in (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \quad (1)$.

Ta có: $y' = \frac{-m+2}{(\tan x - m)^2} (\tan x)' = \frac{-m+2}{(\tan x - m)^2 \cos^2 x} > 0 \Rightarrow -m+2 > 0 \Rightarrow m < 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2)$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$ nghịch biến trên

khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $m \in (-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in (-3; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } 2 \cos x - m \neq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{m}{2} \neq \cos x, \forall \cos x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2m-6}{(2 \cos x - m)^2} (\cos x)' = \frac{2m+6}{(2 \cos x - m)^2} \cdot \sin x < 0 \Rightarrow 2m+6 < 0 \Rightarrow m < -3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $m \in (-\infty; -3)$.

Câu 53. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \geq -1$.

B. $m > -1$.

C. $m \geq \frac{1}{2}$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \frac{-\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \sin 2x < 1 \text{ và } \cos 2x > 0$$

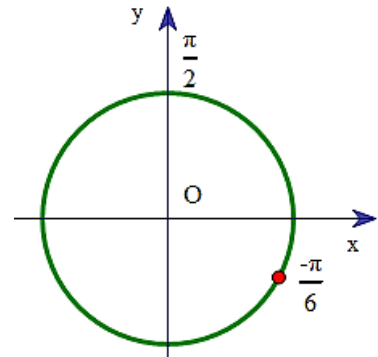
$$\text{Điều kiện: } \sin x + m \neq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -m \neq \sin x, \forall \sin x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \begin{cases} -m \leq -\frac{1}{2} \\ -m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -1 \end{cases} \quad (4).$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m+1}{(\sin 2x + m)^2} (\sin 2x)' = \frac{m+1}{(\sin 2x + m)^2} \cdot \underbrace{2 \cos 2x}_{> 0} > 0$$

$$\Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } m \geq \frac{1}{2}.$$



Câu 54. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m\sqrt{x-1}-m-2}{\sqrt{x-1}-m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $m \leq 0$. C. $m > 2$. D. $m < -1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Điều kiện: $\sqrt{x-1}-m \neq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \neq \sqrt{x-1}$, với mọi $\sqrt{x-1} \in (0; +\infty) \Rightarrow m \leq 0$ (1).

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-m^2+m+2}{(\sqrt{x-1}-m)^2} (\sqrt{x-1})' = \frac{-m^2+m+2}{2(\sqrt{x-1}-m)^2 \sqrt{x-1}} < 0 \Rightarrow -m^2+m+2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \quad (4).$$

Từ (1) và (2) suy ra $m < -1$.

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m < 2$. B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
C. $1 \leq m < 2$. D. $m \leq 0$.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq 0 \vee 1 \leq m < 2$. B. $m \leq 0$.
C. $1 \leq m < 2$. D. $m > 2$.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9; 9)$ để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{m \tan x - 2}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. 1. B. 2. C. 7. D. 8.

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. 8. B. 10. C. 9. D. 11.

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. 14. B. 12. C. 8. D. 10.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-8; 8)$ để hàm số $y = \frac{2\sqrt{9-x^2}-m}{\sqrt{9-x^2}-m}$ đồng

biến trên khoảng $(0; \sqrt{5})$?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 6.

Dạng toán 5. Hàm số đa thức bậc ba đơn điệu trên K**● Bài toán 5.1: Hàm số bậc ba (đạo hàm có nghiệm đẹp theo m) đơn điệu trên K****☺ Phương pháp:**

- **Bước 1:** Đạo hàm và cho đạo hàm bằng 0 và tìm x (nghiệm đẹp theo m). [*Học sinh có thể thay $m=100$ để bấm máy*].
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và so sánh nghiệm để tìm m.

● Bài toán 5.2: Hàm số bậc ba (đạo hàm không có nghiệm đẹp theo m) đơn điệu trên K

☺ **Cách giải 1:** Tìm đạo hàm và lập bảng biến thiên, so sánh nghiệm để tìm m.

☺ **Cách giải 2:**

- **Bước 1:** Tìm đạo hàm và cho đạo hàm không âm (nếu đề ra hàm số đồng biến) và ngược lại.
- **Bước 2:** Cô lập tham số m để có một trong các dạng:
$$\begin{cases} m \geq g(x), \forall x \in K \\ m \leq g(x), \forall x \in K \end{cases}.$$

➤ **Bước 3:**

Tìm M_1 là **giá trị lớn nhất** của $g(x)$ trên K (hoặc là **chặn trên bé nhất** của $g(x)$ trên K).

[Tương tự, có thể tìm M_2 là **giá trị nhỏ nhất** của $g(x)$ trên K (hoặc **chặn dưới lớn nhất** của $g(x)$ trên K).

- **Bước 4:** Áp dụng $m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq M_1$ hoặc $m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq M_2$.

🔑 Lưu ý: Nếu đạo hàm của hàm bậc ba vừa không có nghiệm đẹp theo m, vừa không thể cô lập m thì ta biện luận các trường hợp của Δ để tìm m.

● Bài toán 5.3: Hàm số bậc ba đơn điệu trên một đoạn có độ dài l

🔗 **Nhận xét:** Đề bài dạng này chỉ cho trong trường hợp dấu của a và y' ngược nhau. Ta cần có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = l \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = l.$$

✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1 998.

B. 1 999.

C. 998.

D. 1001.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) \forall x \in (2; +\infty)$. [*Không thể cô lập m*].

Xét $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$

$\Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 > 0$; ta tìm được hai nghiệm đẹp theo m là $x_1 = m, x_2 = m+1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+1$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Mặt khác m nguyên và thuộc $(-1000; 1000)$ nên $m \in \{-999; -998; \dots; 0; \dots; 999\} \Rightarrow$ Số các giá trị m là: $999 - (-999) + 1 = 1\,999$.

★Mẹo nhỏ: Để tìm nghiệm đẹp trong phương trình bậc hai, bậc ba có chứa tham số, ta nhập vào máy tính chức năng giải phương trình bậc hai, bậc ba với việc thay $m = 100$. Nghiệm tìm được ta sẽ liên hệ với 100 để đưa về dạng x phụ thuộc m .

Chẳng hạn, trong bài này, ta giải: $x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$.

Nhập vào máy tính chức năng giải phương trình bậc hai với $a = 1, b = -\left(2 \cdot 100 + 1\right), c = 100 \left(100 + 1\right)$. Ta được: $X_1 = 100 = m; X_2 = 101 = 100 + 1 = m + 1$.

Câu 62. Tập hợp S tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = [0; 1]$. C. $S = [-1; 0]$. D. $S = \{-1\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+2 \\ x = m \end{cases} \text{ (xem mục Mẹo nhỏ ở phần trên).}$$

x	$-\infty$	m	-1	1	$m+2$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$					$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi ta có:

$$m \leq -1 < 1 \leq m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1. \text{ Vậy: } S = \{-1\}.$$

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 12$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 12$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét $f(x) = -3x^2 + 12x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = -6x + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	12	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \geq 12$.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$.

B. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.

C. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$.

D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $y' = mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \left(\underbrace{x^2 + 14x}_+ \right) \leq -14, \forall x \in [1; +\infty)$

$\Leftrightarrow \boxed{m \leq -\frac{14}{\underbrace{x^2 + 14x}_+}, \forall x \in [1; +\infty)}$.

Xét hàm $g(x) = -\frac{14}{x^2 + 14x}$ có $g'(x) = \frac{28(x+7)}{x^2(x+14)^2} > 0, \forall x \geq 1$.

Vậy $g(x) \geq g(1) = -\frac{14}{15}, \forall x \in [1; +\infty)$. Vậy $m \leq -\frac{14}{x^2 + 14x}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{15}$.

Câu 65. Hàm số $y = \frac{4}{3} \sin^3 2x + 2 \cos^2 2x - (m^2 + 3m) \sin 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

khi và chỉ khi:

A. $m \leq \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 0$.

C. $-3 \leq m \leq 0$.

D. $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có : $y = \frac{4}{3} \sin^3 2x + 2(1 - \sin^2 2x) - (m^2 + 3m) \sin 2x - 1$.

Đặt $t = \sin 2x$, ta có $y = \frac{4}{3} t^3 - 2t^2 - (m^2 + 3m)t + 1$. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $t \in (0; 1)$, $t \uparrow$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{4}{3} t^3 - 2t^2 - (m^2 + 3m)t + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow y' = 4t^2 - 4t - (m^2 + 3m) \leq 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow 4t^2 - 4t \leq m^2 + 3m, \forall t \in (0; 1)$.

Xét hàm $g(t) = 4t^2 - 4t, t \in (0; 1)$. Ta có: $g'(t) = 8t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (nhận).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 0	

Dựa vào bảng trên, ta có: $m^2 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$.

Câu 66. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ có độ dài khoảng nghịch biến đúng bằng $\frac{4}{3}$.

A. $\begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = -5 \\ m = 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 4$ ($a = 3 > 0$).

Hàm số có độ dài khoảng nghịch biến đúng bằng $2\sqrt{5} \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$|x_1 - x_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{m^2 + 2m - 11}}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 11} = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 67. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$. Với m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đã cho đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1?

A. $m \in (-2; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -2)$.

C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x + m - 1$ ($a = -3 < 0$).

Hàm số đồng biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 1 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{9+3(m-1)}}{|-3|} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3m+6} > 3$$

$$\Leftrightarrow 4(3m+6) > 9 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}. \text{ Vậy } m > -\frac{5}{4} \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

Câu 68. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 - 3m)x + m^4 - 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số đã cho đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Vô số.

Bình luận:

- Hàm số có đạo hàm $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m$. Ta có: $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$
 $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m}_{g(x)} \geq 0 \quad (*), \forall x \in (2; +\infty)$.
- Với bất phương trình (*), ta không thể cô lập m về một vế, cũng không thể tìm được nghiệm đẹp trong phương trình $g(x) = 0$. Thật may mắn rằng hệ số a không phụ thuộc m , vì vậy ta vẫn sử dụng được bảng xét dấu tạm thời, kết hợp định lí Vi-ét để xử lý dạng toán này.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3m$. Nhận thấy $a = 1 > 0$.

Trường hợp 1: Đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ (tức là $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$), khi ấy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra nó cũng đồng biến trên $(2; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \Delta'_{y'} = (m+1)^2 - (m^2 - 3m) \leq 0 \Leftrightarrow 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{5}.$$

Trường hợp 2: Đạo hàm đổi dấu hai lần trên tập xác định, tức là $\Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$ (1). Ta có bảng xét dấu tạm thời như sau (giả sử $x_1 < x_2$ là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$				$+\infty$

Từ bảng trên, ta có:
$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} < 2 \\ y'(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-2(m+1)}{2.1} < 2 \\ 2^2 + 2(m+1).2 + m^2 - 3m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 < 2 \\ m^2 + m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } m > -\frac{1}{5}.$$

Kết hợp cả hai trường hợp trên ta có được $m \in \mathbb{R}$. Mặt khác m nguyên âm nên có vô số giá trị m thỏa mãn đề bài.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 69. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 2025$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $m \leq -1$. B. $m = -1$. C. $m \geq -1$. D. $m = 1$.

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + (3m+6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $m \geq -2$. B. $m \geq 2$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m = 2$.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3(m^2 - 1)x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

- A. $-2 < m \leq 2$. B. $m < -2$ hoặc $m \geq 2$.
C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 72. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

- A. $-1 < m < \frac{1}{3}$. B. $m > \frac{1}{3}$.
C. $m < -1$. D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. $m < 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 2$. D. $m > 1$.

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

- A. $m = 0$. B. $m > 1$. C. $m \leq -\frac{1}{2}$. D. $m < -\frac{1}{2}$.

Câu 77. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

- A. $(-\infty;3)$. B. $(-\infty;3]$. C. $[3;6]$. D. $(-\infty;6]$.

Câu 78. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 79. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả phần tử của S .

- A. 9. B. -1. C. -8. D. 8.

Câu 80. Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (3m-2)x + 2019$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{11}$ khi m nhận các giá trị m_1, m_2 . Tính tổng $T = m_1 + m_2$.

- A. $T = \frac{13}{2}$. B. $T = 6$. C. $T = 7$. D. $T = 9$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 3m\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$?

- A. $m \leq -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \geq -\frac{1}{3}$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Dạng toán 6. Hàm số bậc cao, hàm chứa căn, chứa mẫu đơn điệu trên K

☺ **Phương pháp:**

➤ **Bước 1:** Tìm đạo hàm và cho đạo hàm không âm (nếu đề ra hàm số đồng biến) và ngược lại.

➤ **Bước 2:** Cô lập tham số m để có một trong các dạng:
$$\begin{cases} m \geq g(x), \forall x \in K \\ m \leq g(x), \forall x \in K \end{cases}$$

➤ **Bước 3:**

Tìm M_1 là **giá trị lớn nhất** của $g(x)$ trên K (hoặc là **chặn trên bé nhất** của $g(x)$ trên K).

[Tương tự, có thể tìm M_2 là **giá trị nhỏ nhất** của $g(x)$ trên K (hoặc **chặn dưới lớn nhất** của $g(x)$ trên K).

➤ **Bước 4:** Áp dụng $m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq M_1$ hoặc $m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq M_2$.

✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$ là:

- A. $m < 2$. B. $1 < m < 2$. **C. $m \leq 2$.** D. $1 \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1).$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;5)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1;5)$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) \geq 0, \forall x \in (1;5) \Leftrightarrow x^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;5) \Leftrightarrow m \leq x^2 + 1, \forall x \in (1;5).$$

Xét $f(x) = x^2 + 1$ với $1 < x < 5$. Ta có: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (loại).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		2	26	

Do đó giá trị m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $m \leq 2$.

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 2.** B. 1. C. 3. D. 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } y' = x^3 + m + \frac{3}{2x^2}$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty). (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = \frac{3(x^5 - 1)}{x^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			0	$+$
$f(x)$		$+\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $(*) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$; ta lại có m là số nguyên âm $\Rightarrow m \in \{-2; -1\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 85. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (5 - 2m)x - \frac{1}{x+1} - 3$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. $m \leq 6$.

C. $m \geq -3$.

D. $m \leq 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 2m, \forall x \in (-1; +\infty).$$

Ta xét hàm số $g(x) = 2x + 5 + \frac{1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$\text{Đạo hàm: } g'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}; g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

GIẢI TÍCH 12 – TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$			$-$	0	$+$
$g(x)$		$+\infty$		6	$+\infty$

Ta có $2m \leq g(x), \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 2m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2025; 2025]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2025.

B. 2026.

C. 2024.

D. 2027.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; đạo hàm: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$ (*)

Xét hàm $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mặt khác: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	-1	1

Vậy (*) $\Leftrightarrow m \leq -1$, mà m nguyên thuộc $[-2025; 2025]$ suy ra $m \in \{-2025; -2024; \dots; -1\}$.

Do đó có tất cả: $-1 - (-2025) + 1 = 2025$ giá trị m thỏa mãn.

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = 1 + \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow mx \geq -\sqrt{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$ (*)

Ta thấy $x = 0$ thỏa mãn (*) với mọi m . Khi $x \neq 0$, (*) trở thành:

$$\begin{cases} m \geq \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x}, \forall x > 0 \\ m \leq \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x}, \forall x < 0 \end{cases} (**).$$

Xét hàm $g(x) = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x}$ ($x \neq 0$); $g'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \neq 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

Từ đó, (**) trở thành: $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}$. Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -5)$.
C. $m \in [-5; 2)$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Câu 89. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 5. B. 3. C. 0. D. 4.

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 92. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

- A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 93. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^2 + \sqrt{x+m+2} - mx$ để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó ?

- A. 20. B. 21. C. 23. D. 31.

Câu 94. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5. B. 7. C. 3. D. 4.

Dạng toán 7. Tính đơn điệu của một số hàm lượng giác chứa tham số

☺ **Phương pháp:**

- Cách giải chủ yếu là **cô lập tham số** rồi **tìm max-min** hàm số ở vế còn lại.
- Sử dụng một số kết quả có sẵn của lượng giác: $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; -1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Một số tính chất thừa nhận:

$$at + b \geq 0, \forall t \in [t_1; t_2] \Leftrightarrow \begin{cases} at_1 + b \geq 0 \\ at_2 + b \geq 0 \end{cases}; \quad at + b \geq 0, \forall t \in (t_1; t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} at_1 + b > 0 \\ at_2 + b > 0 \end{cases}.$$

(Hoàn toàn tương tự cho trường hợp dấu bất phương trình ngược lại).

✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + \cos 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \geq 0$. B. $m \leq -2$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq -1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = m - 2\sin 2x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq 2\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq 2$
(vì $\sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\sin 2x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$).

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin x - \cos x + (2m-1)x + m^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \leq \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. B. $m \leq -\sqrt{2}$. C. $m \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. D. $m \geq \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = \cos x + \sin x + 2m - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -2m + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -2m + 1 \geq \sqrt{2} \Rightarrow m \leq \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (vì $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$).

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 3)\sin x - \tan x$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. 5. B. 1. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = (m^2 - 3)\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 3)\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m^2 - 3 \leq \frac{1}{\cos^3 x}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta biết rằng $0 < \cos x \leq 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\cos^3 x} \geq 1, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow m^2 - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vì m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 98. Cho hàm số $y = (2m+1)\sin x + (3-m)x$. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$.

C. $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$.

D. $m \in \left[-4; -\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đạo hàm: $y' = (2m+1)\cos x + 3 - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\cos x + 3 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$. (*) được viết lại: $\underbrace{(2m+1)t + 3 - m}_{g(t)} \geq 0, \forall t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 1 + 3 - m \geq 0 \\ 2m + 1 + 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{2}{3} \\ m \geq -4 \end{cases}. \text{ Vậy } m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right] \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Câu 100. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = 2\cos x + mx$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 9.

B. 11.

C. 8.

D. 12.

Câu 101. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

B. $m \leq -\sqrt{2}$.

C. $m \geq \sqrt{2}$.

D. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

Câu 102. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x - mx$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?
A. $m \leq -2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \geq 1$.

Câu 103. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - (2m-1)x + 2024$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{5}{2}$. **B.** $m < \frac{5}{2}$. **C.** $m \geq \frac{5}{2}$. **D.** $m \leq -\frac{3}{2}$.

Câu 104. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = m \sin x - (m-1)x + 1$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** Vô số.

Đáp án Dạng toán 1						6B	7C	8B	9D
10D	11B	12C	13A	14A	15B	16D	17C	18C	19A
20A	21B	22A	23D	24C	25B	26C	27B	28D	29A

Đáp án Dạng toán 2	34A	35C	36A	37A	38B	39B	40D	41C
--------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Đáp án Dạng toán 3	45C	46C	47B	48A	49B	50A
--------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Đáp án Dạng toán 4	55C	56A	57A	58C	59B	60D
--------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Đáp án Dạng toán 5						69A	70B	71C	72B
73D	74B	75B	76C	77B	78D	79D	80C	81D	82C

Đáp án Dạng toán 6	88D	89D	90C	91A	92B	93A	94C
--------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Đáp án Dạng toán 7	99C	100C	101C	102A	103D	104B	105A
--------------------	-----	------	------	------	------	------	------

PHẦN II. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM ẨN, HÀM HỢP, HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng toán 1. Tính đơn điệu hàm số có đạo hàm cho trước

☺ Phương pháp:

- **Bước 1:** Cho đạo hàm bằng 0 để tìm nghiệm (nếu có), lưu ý nghiệm đơn, nghiệm kép.
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của đạo hàm.
- **Bước 3:** Kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-6; -1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -5 \vee x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Vậy $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-5; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2026}(x-2)^{2029}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-3; -2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^{2026}(x-2)^{2029} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. **C. $(1; 2)$.** D. $(-1; 0)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x = (3-x)(x^2-1) + 2x - 2x = (3-x)(x^2-1)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y					

Ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; 3)$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$, $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^{2028}(x-1)^{2027}(2-x)$.
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(1;2)$. D. $(-\infty;-1)$.

Câu 7. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty;2)$ và $(3;+\infty)$. B. $(3;+\infty)$. C. $(2;+\infty)$. D. $(2;3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = -2028.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		-	
y			$+\infty$	$+\infty$	
	0				0

- A. $(-\infty;0)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(0;+\infty)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Hàm số $y = -12f(x) + 11$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-4;2)$. B. $(-1;2)$. C. $(-2;-1)$. D. $(2;4)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in [-3;1]$ và thỏa mãn $f(-3) = 1; f(0) = 2; f(1) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

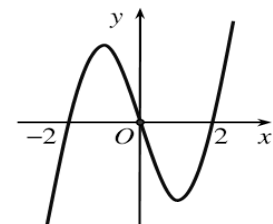
- A. $2 < f(-2) < 3$. B. $1 < f(-2) < 2$. C. $f(-2) > 3$. D. $f(-2) < 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x^2 - 1)(x+1)(5-x) \forall x \in \mathbb{R}$.
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $f(1) < f(4) < f(2)$. B. $f(1) < f(2) < f(4)$.
C. $f(2) < f(1) < f(4)$. D. $f(4) < f(2) < f(1)$.

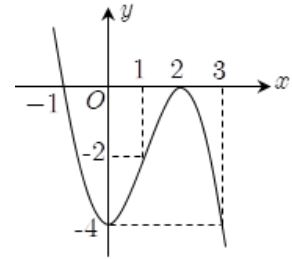
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.
C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.



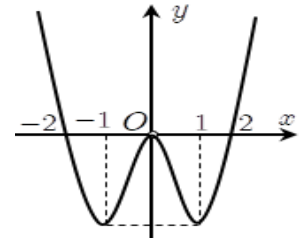
Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi khẳng định nào **đúng**?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.



Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.



Dạng toán 2. Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$

☺ Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm đạo hàm dạng $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$ và cho đạo hàm đó bằng 0 để tìm nghiệm.
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của đạo hàm của hàm hợp.
- **Bước 3:** Kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

🔗 **Nhận xét:** Nếu đạo hàm của hàm hợp có dạng tích (thương) đơn giản thì ta có thể giải bất phương trình $y' > 0$ (hay $y' < 0$) để tìm các khoảng đồng biến (hay nghịch biến) của hàm số mà không cần phải lập bảng biến thiên như nội dung **bước 2**.

✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	5	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. D. $\left(2; \frac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } y' = -2f'(3-2x) = 0 \Rightarrow f'(3-2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3-2x = -1 \\ 3-2x = 1 \\ 3-2x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \\ 3-2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$y' = -2f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

✎ **Nhận xét:** Để xét dấu y' trên khoảng $(2; +\infty)$, ta chọn $x=3$ thế vào y' , ta có: $y'(3) = -2f'(3-2.3) = -2f'(-3) > 0$ (vì theo giả thiết $f'(-3) < 0$). Tiếp theo để hoàn tất bảng xét dấu đạo hàm, ta có nguyên tắc quan trọng là: y' đổi dấu khi đi qua nghiệm đơn của nó (là $2; 1; -1$) và không đổi dấu khi đi qua nghiệm kép (là 0).

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. **B. $(-2; -1)$.** C. $(-2; 1)$. D. $(-4; -3)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = (x^2 + 2x)' \cdot f'(x^2 + 2x) = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x);$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \in \emptyset \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 1 \vee x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

✎ **Nhận xét:** Để xét dấu $g'(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta chọn $x=2$ thế vào $g'(x)$, ta có: $g'(2) = (2.2 + 2) f'(2^2 + 2.2) = 6f'(8) < 0$ (vì theo giả thiết $f'(8) < 0$). Tiếp theo để hoàn tất bảng xét dấu đạo hàm, ta có nguyên tắc quan trọng là: $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua nghiệm đơn của nó (là $1; -1; -3$) và không đổi dấu khi đi qua nghiệm kép (là $-1 \pm \sqrt{2}$).

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x^2 - 1) - 3x^2$ là

- A. $(0; \sqrt{2})$. **B. $(1; +\infty)$.**

C. $(-\sqrt{2}; 0)$.

D. $(-\infty; -\sqrt{2})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = 2xf'(x^2 - 1) - 6x = 2x[f'(x^2 - 1) - 3]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x[(x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Lưu ý: Khi xét dấu y' với $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$, ta chọn $x = 2$ thế vào y' , ta có:
 $y'(2) = 4[f'(3) - 3] = 4(3^2 + 6 - 3) > 0$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(1; 4)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-2; -1)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$, có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -3)$. **B.** $(4; 5)$. **C.** $(3; 4)$. **D.** $(1; 3)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0

Hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây ?

- A.** $(-1; 1)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0

Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

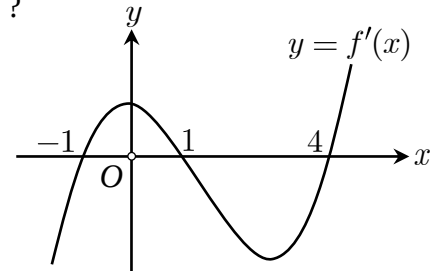
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$, đạo hàm $f'(x)$ có bảng xét dấu bên dưới. Hàm số $y = f(3 - x^2) + 2025$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-6	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- A. $(-1; 0)$. B. $(2; 3)$. C. $(-2; -1)$. D. $(0; 1)$.

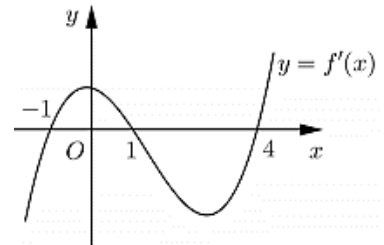
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(1; 2)$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1)$.
D. $(-1; 1)$.



Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; 3)$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(-2; 1)$.
D. $(3; +\infty)$.



Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-4; -2)$.
B. $(2; 4)$.
C. $(-2; 0)$.
D. $(0; 2)$.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	1	0	-2	2	4

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(2x + 1) + 4x$ là

- A. $(-2; 4)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(1 - 3x) + 36x$ là

A. $\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $\left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x-1) - 3x + 2$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 3)$.

B. $(-\infty; -4)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Dạng toán 3. Tính đơn điệu của hàm hợp có dạng phức tạp

☺ Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm đạo hàm của hàm số chứa hàm hợp, đưa về dạng tích nếu có thể.
- **Bước 2:** Tìm nghiệm của y' nếu nó có dạng tích (có thể vẽ thêm đường thẳng, đường cong bổ sung vào hình vẽ đồ thị đạo hàm cho sẵn).
Nếu y' không có dạng tích mà là dạng tổng hiệu $P(x) \pm Q(x)$ thì ta có thể tìm nghiệm của từng hàm.
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của đạo hàm của hàm hợp.
- **Bước 3:** Kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

🔗 **Nhận xét:** Nếu đạo hàm của hàm hợp có dạng tích (thương) đơn giản thì ta có thể giải bất phương trình $y' > 0$ (hay $y' < 0$) để tìm các khoảng đồng biến (hay nghịch biến) của hàm số mà không cần phải lập bảng biến thiên như nội dung **bước 2**.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

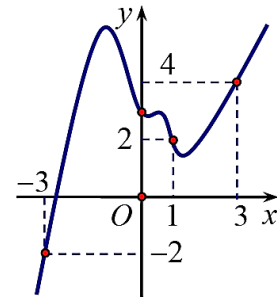
Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{(x+1)^2}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-3; 1)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(1; 3)$.

D. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.



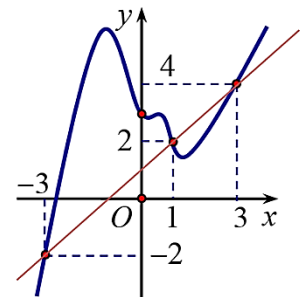
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - (x+1)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$.

Từ giả thiết, ta xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x+1) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) > x+1}$

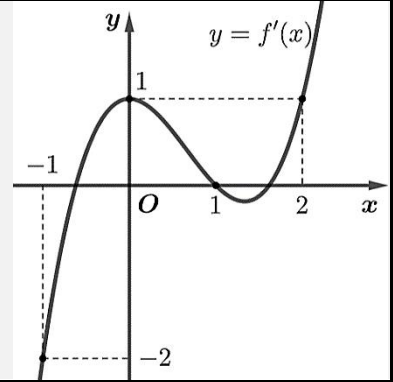
Vẽ đồ thị hàm số $y = x+1$ lên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: $f'(x) \geq x+1 \Leftrightarrow x \in (-3; 1) \cup (3; +\infty)$.



✎ **Nhận xét:** Giải bất phương trình $f'(x) > x+1$ nghĩa là ta đi tìm tập hợp các giá trị x để đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x+1$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$.
C. $(1; 2)$. D. $(2; 3)$.



Hướng dẫn giải:

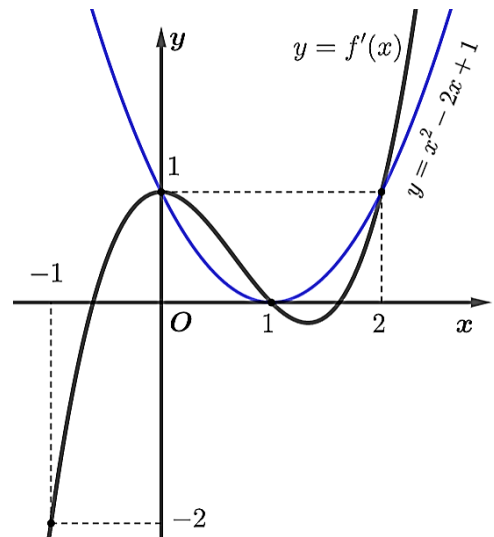
Chọn C.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$. Từ giả thiết, ta xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < x^2 - 2x + 1$.

Vẽ đường parabol $y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục với đồ thị $y = f'(x)$.

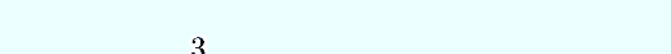
Ta có: $f'(x) < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

✎ **Nhận xét:** Giải bất phương trình $f'(x) < x^2 - 2x + 1$ nghĩa là ta đi tìm tập hợp các giá trị x để đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía dưới parabol $y = x^2 - 2x + 1$.



ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$										

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 3)$. B. $(1; 2)$. C. $(3; 4)$. D. $(-\infty; -1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $g(x) = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$;

$$g'(x) = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) - 6f(x) \cdot f'(x) = 3f'(x) \cdot f(x)[f(x) - 2]; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}; \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < 1 \\ x = 4 \end{cases}; \quad f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (x_1; 1) \\ x = x_3 \in (1; 2) \\ x = 3 \\ x = x_4 > 4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	0	+	0	+
$f(x)$	-	0	+	+	+	+	+	+	0	+
$f(x) - 2$	-	-	0	+	0	-	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0

Ta thấy hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-4	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0

Hàm số $y = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^2 - 8x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 7)$. B. $(1; +\infty)$. **C.** $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Đặt } g(x) = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^2 - 8x + 5 \Rightarrow g'(x) = 2f'(2x+1) + \frac{4}{3}x - 8 = 2\left[f'(2x+1) + \frac{2}{3}x - 4\right].$$

$$\text{Xét } f'(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq 2x+1 \leq 2 \\ 2x+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}; \text{ do đó } f'(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Xét } \frac{2}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ta có bảng xét dấu tạm thời như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	6	$+\infty$
$f'(2x+1)$	+	0	-	0	+	-
$\frac{2}{3}x-4$	-	-	-	-	0	+
$f'(2x+1)+\frac{2}{3}x-4$	Chưa biết dấu	-	Chưa biết dấu	-	Chưa biết dấu	

Từ bảng trên, ta thấy hàm số $g(x)$ chắc chắn nghịch biến trên các khoảng: $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; 6\right)$.

Do đó chỉ có **đáp án C** thỏa mãn vì $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \subset \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Đúc kết: Qua bài trên, ta thấy việc xét dấu tổng, hiệu các biểu thức vốn là bài toán **không quen thuộc** của đa số học sinh (các em chỉ quen xét dấu tích, thương các đa thức mà thôi). Vì vậy, ta cần rút ra thuật toán cho loại toán này.

Bài toán: Xét dấu $g'(x) = k \cdot f'(x) + h(x)$ khi đã biết bảng xét dấu của $f'(x)$, k là hằng số.

- Cho $h(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots$ (nếu có).
- Lập bảng xét dấu với mỗi hàng lần lượt dành cho $x, k \cdot f'(x), h(x), k \cdot f'(x) + h(x)$ theo quy tắc: Tổng hai số dương là một số dương, tổng hai số âm là một số âm, tổng hai số trái dấu thì chưa xác định được dấu.

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1		1		2		5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 2030$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. C. $(2; +\infty)$. **D. $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.**

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $g(x) = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x + 2030$; $g'(x) = -3f'(-x+2) + 3x^2 + 6x - 9$.

$$\text{Xét } -3f'(-x+2) \geq 0 \Leftrightarrow f'(-x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -x+2 \leq 1 \\ -x+2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq -x \leq -1 \\ -x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } -3f'(-x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Xét } 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu tạm thời như sau:

GIẢI TÍCH 12 – TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

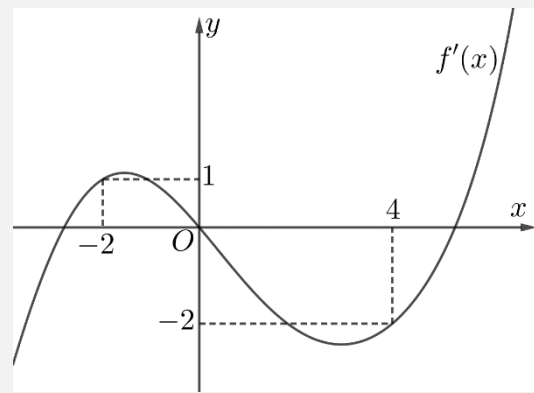
x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$-3f'(-x+2)$	+	0	−	0	+	0	−
$3x^2+6x-9$	+	0	−	0	+		+
$\left. \begin{array}{l} -3f'(-x+2) \\ + \\ 3x^2+6x-9 \end{array} \right\} g'(x)$	+	0	−	0	+		<i>Chưa biết dấu</i>

Ta thấy hàm số $g(x)$ chắc chắn nghịch biến trên $(-3;1)$ mà $\left(-\frac{3}{2};1\right) \subset (-3;1)$ nên hàm $g(x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{3}{2};1\right)$.

Câu 34. Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

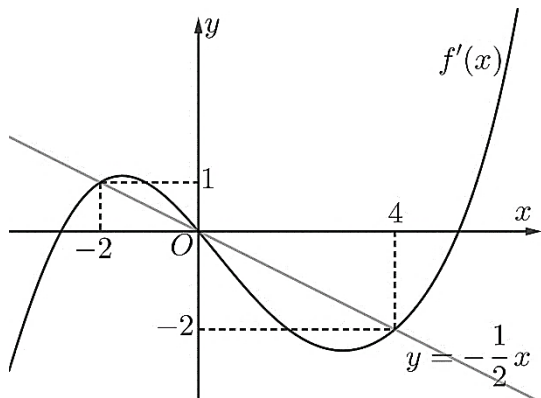
Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau. Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 4)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0) = 4f(0) = 0$.

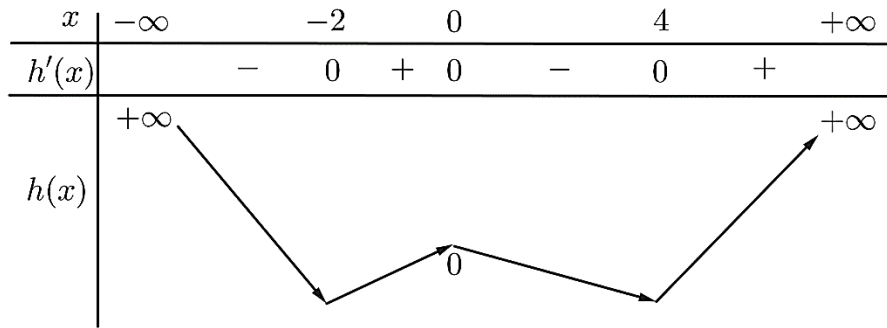
Ta có $h'(x) = 4f'(x) + 2x$.

Do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x$.

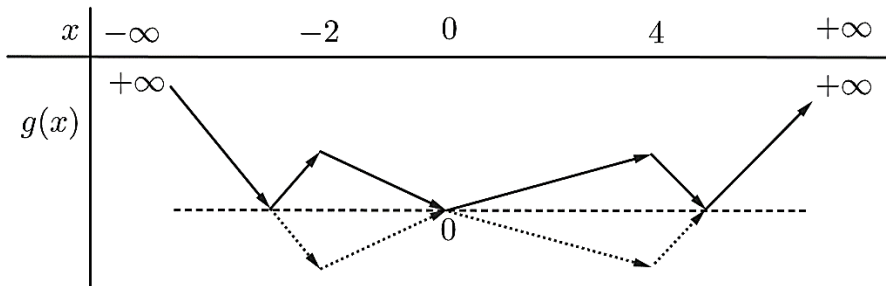
Vẽ đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $y = f'(x)$, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

GIẢI TÍCH 12 – TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ



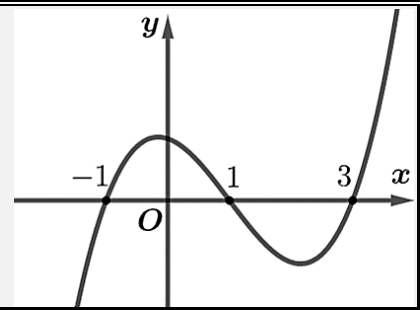
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 4. B. 3.
C. 6. D. 5.



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } g(x) = f(x+m) \text{ nghịch biến trên khoảng } (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 3-m \geq 2 \\ 1-m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử m thỏa mãn đề bài.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0; 2035]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2016. B. 2014. C. 2012. D. 2010.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(-1-x)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right] \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \quad (*)$.

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$
 $\Leftrightarrow m \geq -x^2-4x+5, \forall x \in (-\infty; -1)$.

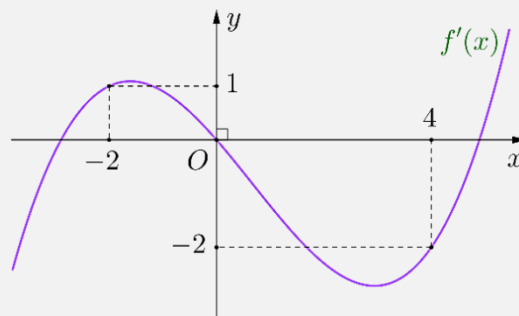
Xét hàm số $g(x) = -x^2-4x+5, x \in (-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$, mà m nguyên thuộc $[0; 2035]$ nên $m \in \{9; 10; \dots; 2035\}$.

Vì vậy có $2035-9+1=2027$ giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6; 6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3-2x+m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Khi đó tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12. B. 9. C. 6. D. 15.

Hướng dẫn giải:

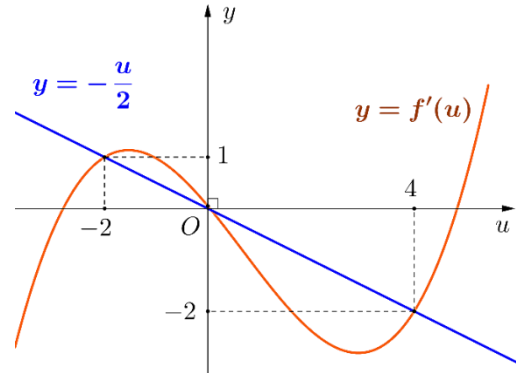
Chọn B.

Xét $g(x) = f(3-2x+m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$. Ta có: $g'(x) = -2f'(3-2x+m) - (3-2x+m)$.

Khi đó: $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x+m) \geq -\frac{3-2x+m}{2} (*)$.

Đặt $u = 3-2x+m$, $(*) \Rightarrow f'(u) \geq -\frac{u}{2} (**)$.

Xét sự tương giao đồ thị của hai hàm số $y = f'(u)$ và $y = -\frac{u}{2}$.



Từ giả thiết cho đồ thị hàm số $f'(x)$ ta được :

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq u \leq 0 \\ u \geq 4 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} -2 \leq 3-2x+m \leq 0 \\ 3-2x+m \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq x \leq \frac{5+m}{2} \\ x \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}.$$

Để hàm số $g(x) = f(3-2x+m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì

$$g'(x) \leq 0 \text{ với } \forall x \in (0;1). \text{ Tức là: } \begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \frac{5+m}{2} \\ 1 \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq -3 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

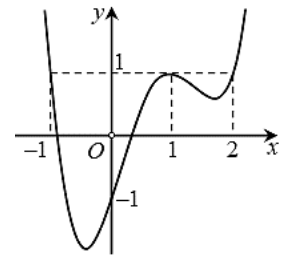
Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ -6 < m < 6 \end{cases}$ nên $m \in S = \{-3; 3; 4; 5\}$. Vậy tổng giá trị các phần tử của S bằng 9.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

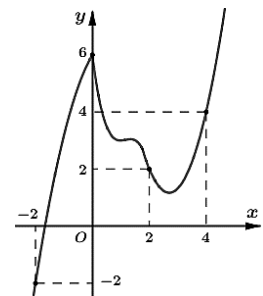
Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(1; +\infty)$.
- B. $(-1; 2)$.
- C. $(2; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -1)$.



Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(2; 4)$.
- B. $(-2; 2)$.
- C. $(-\infty; 0)$.



D. $(2; +\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

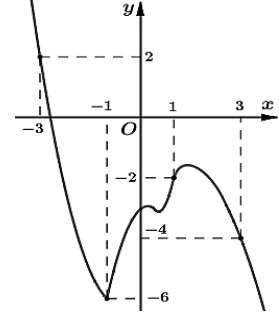
Hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-3; 1)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(3; +\infty)$.



Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

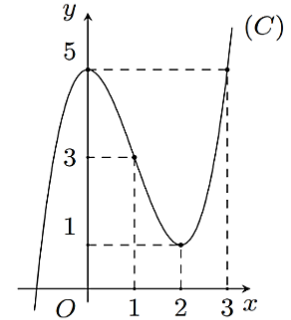
Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 15x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(0; 3)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(1; 3)$.



Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hỏi

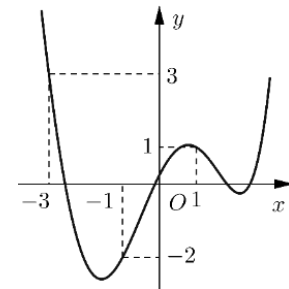
hàm số $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 20$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.



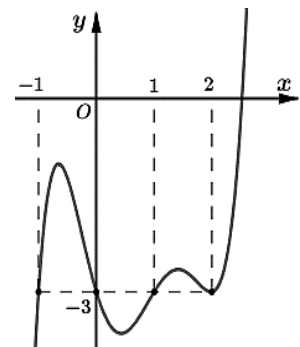
Câu 43. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình

bên dưới. Trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x-1) + 6x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(1; 3)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 2)$.



D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

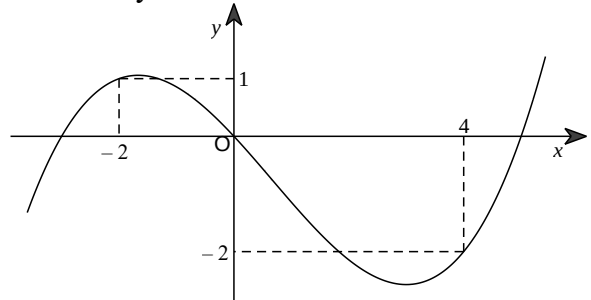
$g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.



Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số

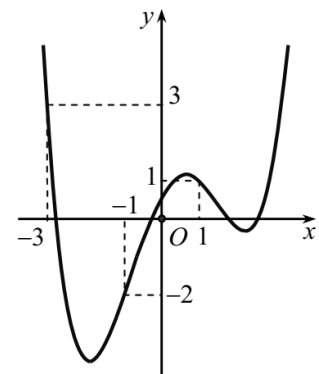
$g(x) = 3f(1-2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(1; 2)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-1; 2)$.



Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm bên dưới.

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(0; 2)$.

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	—	0	+	0	+	0	—	0	+

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm bên dưới. Hàm số

$g(x) = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2 + 1} - x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-\infty; 1)$.

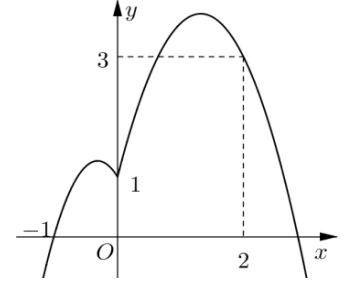
C. $(-2; 0)$.

D. $(-3; -2)$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

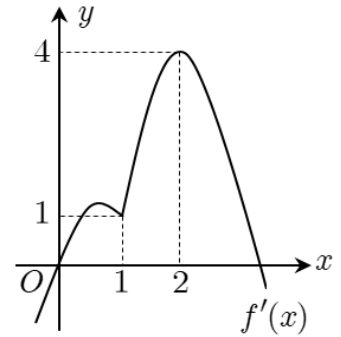
Hàm số $g(x)=|2f(x-1)-x^2|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(3;+\infty)$.
- B. $(-1;2)$.
- C. $(0;+\infty)$.
- D. $(0;3)$.



Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=1$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=|f(3x)-9x^3-1|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

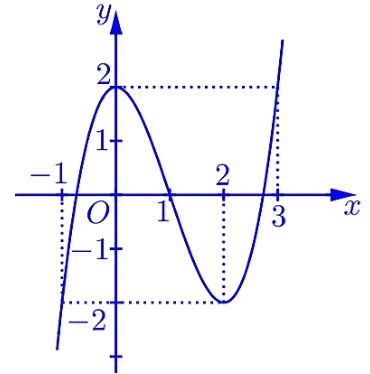
- A. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.
- B. $(-\infty;0)$.
- C. $(0;1)$.
- D. $\left(0;\frac{2}{3}\right)$.



Câu 51. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số

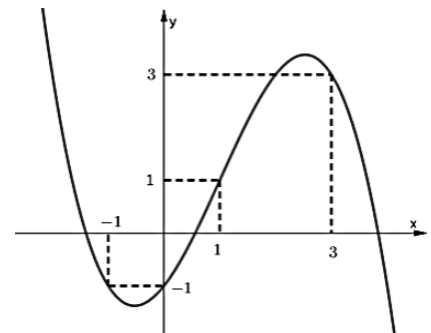
$g(x)=\left|f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-8;-4)$.
- B. $(4;+\infty)$.
- C. $(2;4)$.
- D. $(-10;-8)$.



Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ. Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2025$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-2;0)$.
- B. $(-3;1)$.
- C. $(1;3)$.
- D. $(0;1)$.



Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 20.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt

$$g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + m^3 - m, \text{ với } m \text{ là tham số}$$

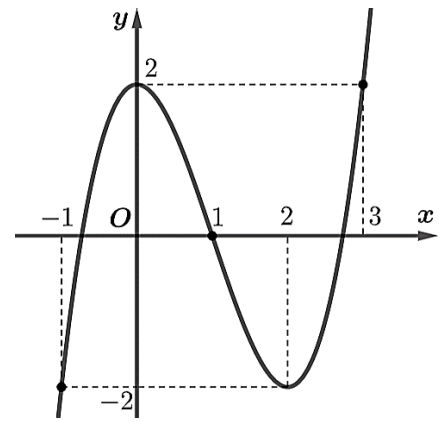
thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng

A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.



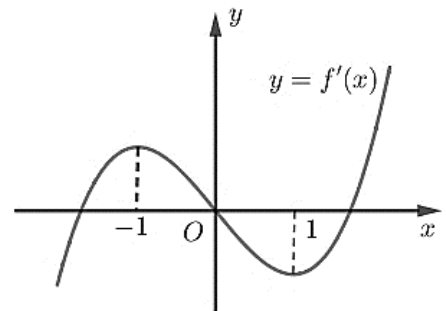
Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.



Dạng toán 4. Xét tính đơn điệu bằng kỹ thuật truy ngược hàm ẩn

☺ **Phương pháp:**

Kết hợp cùng lúc nhiều kỹ thuật xét dấu hàm hợp như: Chọn hàm, đổi biến, xét dấu theo giá trị đại diện của một khoảng, phép tịnh tiến đồ thị...

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 57. Cho hàm số $y = f(3 - 2x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(1; 2)$. **C. $(0; \frac{1}{2})$.** D. $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

☺ Cách giải 1: Phương pháp chọn hàm

Không mất tính tổng quát, ta chọn $y' = (x+1)(x-2)$.

Khi đó: $y' = -2f'(3-2x) = (x+1)(x-2) \Rightarrow f'(3-2x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$ (*).

Đặt $t = 3 - 2x \Rightarrow x = \frac{3-t}{2}$. Thay vào (*): $f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5-t}{2} \cdot \frac{-1-t}{2} = -\frac{1}{8}(t-5)(t+1)$.

Suy ra: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \vee t = -1$.

Ta có: $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+2)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x^2-2x+2=5 \\ x^2-2x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \vee x=3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

(Nhận xét: $g'(4) = 6 \underbrace{f'(10)}_{<0} < 0$ nên ta có bảng xét dấu như trên).

☺ Cách giải 2: Phương pháp truyền thống

Ta có: $y' = -2f'(3-2x)$; $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f'(5)=0 \\ -2f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(5)=0 \\ f'(-1)=0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên 1:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(Nhận xét: $y'(3) = -2f'(-3) > 0 \Rightarrow f'(-3) < 0$ nên ta có bảng xét dấu như trên).

Ta có: $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+2)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x^2-2x+2=5 \\ x^2-2x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \vee x=3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên 2:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

(Nhận xét: $g'(4) = 6 \underbrace{f'(10)}_{<0} < 0$ nên ta có bảng xét dấu như trên).

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt $g(x) = f(-x^3 - x)$ có bảng xét dấu đạo hàm là:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-4; 2)$. B. $(9; +\infty)$. **C. $(-30; -6)$.** D. $(-2; 30)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x) = (-3x^2 - 1)f'(-x^3 - x)$. Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$, không mất tính tổng quát, ta chọn: $g'(x) = (x+3)(x-1)(x-3)$.

Do đó: $(-3x^2 - 1)f'(-x^3 - x) = (x+3)(x-1)(x-3) \Rightarrow f'(-x^3 - x) = \underbrace{\frac{1}{-3x^2 - 1}}_{<0} (x+3)(x-1)(x-3) (*)$

Với $x=1$ thì $(*)$: $f'(-2) = 0$; với $x=3$ thì $(*)$: $f'(-30) = 0$; với $x=-3$ thì $(*)$: $f'(30) = 0$.

(Cần hiểu rằng với mỗi giá trị x cụ thể, ta cũng chỉ tìm được một giá trị của $-x^3 - x$).

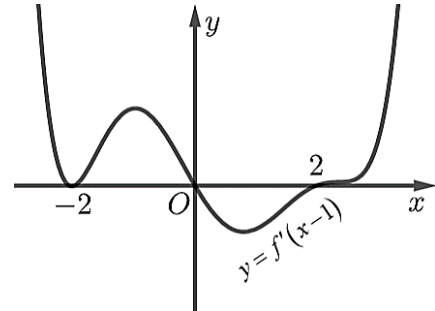
Lập bảng xét dấu cho $f'(x)$ theo nguyên tắc: Thay $x=0$ thì $(*)$: $f'(0) = -9 < 0$, do đó $f'(x)$ mang dấu âm ($-$) trên khoảng $(-2; 30)$, $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đơn của nó.

x	$-\infty$	-30		-2		30	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(1-x^2)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -1)$.
B. $(0; 1)$.
C. $(2; +\infty)$.
D. $(-2; 0)$.



Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f'(1-2x)$ có bảng biến thiên như bên dưới:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$		
$f'(1-2x)$	+	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -6)$. C. $(-4; -2)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu $y = f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-1	$+\infty$	
$f'(3-2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x^3 + 4)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Dạng toán 5. Bài toán đơn điệu có tham số của hàm chứa giá trị tuyệt đối

☺ **Phương pháp:**

Bài toán	Minh họa	Điều kiện cần và đủ (chia hai trường hợp)
1. Hàm số $y = f(x) $ đồng biến trên $(\alpha; +\infty)$		$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; +\infty) \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; +\infty) \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

2. Hàm số $y = f(x) $ nghịch biến trên $(-\infty; \alpha)$		$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; \alpha) \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; \alpha) \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}$
3. Hàm số $y = f(x) $ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$		$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}$
4. Hàm số $y = f(x) $ nghịch biến trên $(\alpha; \beta)$		$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases}$

⚠ **Nhận xét:** Trong nhiều bài toán, căn cứ vào dấu của a , bài toán đơn điệu hàm trị tuyệt đối có thể chỉ cho ra một trường hợp duy nhất, khi ấy ta không mất thời gian để chia ra hai trường hợp như các công thức đã nêu.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 62. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$; Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$.

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương} \begin{cases} \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Vì hàm $f(x)$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; vì vậy trường hợp (2) không thể xảy ra.

Ta có (I) tương đương $\begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ 1 - m + 12 + 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x \in (1; +\infty) \\ m \geq -13 \end{cases} \text{ (II)}.$

Xét $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}$ trên $(1; +\infty)$: $g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2} = \frac{3x^2 - 12}{2x^2}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \in (1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

Suy ra $m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 6$.

Khi đó (II) trở thành: $\begin{cases} m \leq 6 \\ m \geq -13 \end{cases}$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên

$m \in \{-13; \dots; 6\}$.

x	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\frac{15}{2}$	6	$+\infty$

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \\ 3 + 4 - 12 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z}, m < 10 \Rightarrow m \in \{5; \dots; 9\}.$$

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m số hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + mx + 10|$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 10$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Yêu cầu bài toán dẫn đến một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m \geq 0 \\ m \geq 6x - 3x^2, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 6 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m \leq 0 \\ m \leq 6x-3x^2, \forall x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -9 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A. $m \geq 1$. B. $m \in \emptyset$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $m \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2$; $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ tương đương $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - 2 - m + 2 \geq 0 \end{cases} (*)$.

Xét hàm $g(x) = -4x^3 - 6x^2, x \in (-1; +\infty)$; $g'(x) = -12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-2	0	$-\infty$

Do vậy $m \geq g(x) = -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 0$. Thay vào (*) ta có: $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases}$.

Câu 66. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = \left| \frac{mx+3}{x+m+2} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 55. B. 54. C. 3. D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

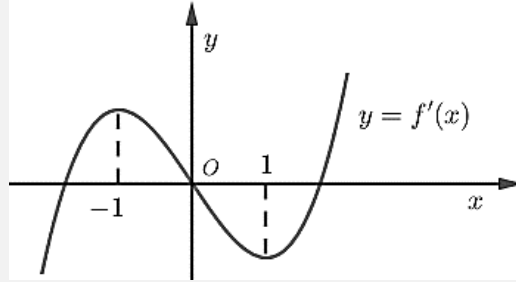
Đặt $f(x) = \frac{mx+3}{x+m+2}$ với $x \in (1; +\infty)$; $f'(x) = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x+m+2)^2}$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(1) \geq 0 \\ -m-2 \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ \frac{m+3}{m+3} \geq 0 \\ -m-2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 1 \\ 1 \geq 0 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m > 1}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(1) \leq 0 \\ -m-2 \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 < 0 \\ \frac{m+3}{m+3} \leq 0 \\ -m-2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 1 \\ 1 \leq 0 \\ m \geq -3 \end{cases} \text{ (vô lý)} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in \{2; 3; \dots; 10\}$; tổng của chúng bằng $\frac{(2+10)9}{2} = 54$.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

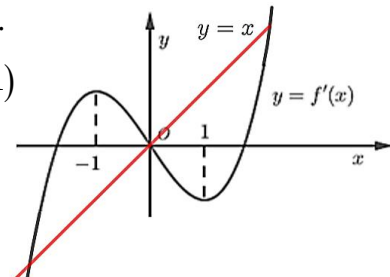
Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên t tăng trên $(0; 1)$.

Hàm số $y = |4f(\sin x) - 2\sin^2 x + 1 - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = |4f(t) - 2t^2 + 1 - a|$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

Xét hàm số $g(t) = 4f(t) - 2t^2 + 1 - a, t \in (0; 1); g'(t) = 4f'(t) - 4t$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} g'(t) \leq 0, \forall t \in (0; 1) \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f'(t) - 4t \leq 0, \forall t \in (0; 1) \\ 4f(1) - 1 - a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(t) \leq t, \forall t \in (0; 1) \text{ (Luôn đúng)} \\ a \leq 4f(1) - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a \leq 3}.$$



Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(t) \geq 0, \forall t \in (0;1) \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(t) - t \geq 0, \forall t \in (0;1) \text{ (không xảy ra)} \\ 4f(1) - 1 - a \leq 0 \end{cases}$.

Vậy $a \leq 3$ mà a nguyên dương nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 68. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12.

B. 11.

C. 6.

D. 5.

Câu 50 – Đề Minh họa năm 2023 – Bộ GD&ĐT

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - 3mx + 2m^3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 70. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

A. 4.

B. 30.

C. 8.

D. 15.

Câu 71. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[0; 5]$ để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^2 + 4mx + m + 2017|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$. Số phần tử của tập S bằng

A. 275.

B. 276.

C. 0.

D. 277.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 16.

D. 9.

Câu 74. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \left| \frac{x-2m+1}{x+m} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

A. $\frac{1}{3} \leq m < 1$.

B. $m \in [-1; 1] \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

C. $-1 \leq m < \frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

Câu 75. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \left| x - \frac{2}{x} + m \right|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

A. $m \leq -1$.

B. $-1 < m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m > 0$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

GIẢI TÍCH 12 – TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Phương trình $\left| f(8x^4 - 8x^2 + 1) \right| = \frac{1}{2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

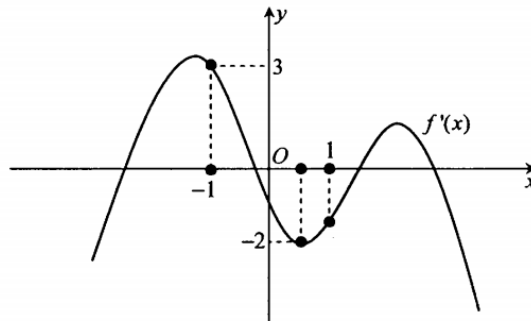
A. 8.

B. 12.

C. 6.

D. 10.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm được cho như hình vẽ bên dưới và có $f(1) = 1$.



Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = |2f(2-x) - x^2 + 2mx + 12|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$. Số phần tử của tập S tương ứng bằng

A. 4029.

B. 4028.

C. 4027.

D. 4033.

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Đáp án Dạng toán 1									4C			
5A	6C	7D	8B	9B	10B	11B	12D	13C	14D			
Đáp án Dạng toán 2									18D			
19B	20C	21B	22A	23A	24C	25A	26D	27B	28B			
Đáp án Dạng toán 3			38B	39B	40B	41B	42C	43C	44A	45A		
46C	47D	48C	49D	50D	51D	52D	53C	54A	55C	56B		
Đáp án Dạng toán 4							59A	60C	61B			
Đáp án Dạng toán 5			68B	69C	70D	71C	72B	73B	74D	75C	76A	77A

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Những khái niệm cơ bản về cực trị của hàm số:

✚ **Điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số:** Xét đồ thị hàm số trong hình vẽ bên, ta có điểm A được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị, hai điểm B, C là các **điểm cực tiểu** của đồ thị. **Điểm cực đại, cực tiểu** của đồ thị hàm số được gọi chung là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số đó.

✚ **Điểm cực đại, cực tiểu của hàm số:**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

— Ta nói x_0 là một **điểm cực đại** của hàm $f(x)$ nếu tồn tại khoảng $(a; b) \subset D$ và $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f(x)$;

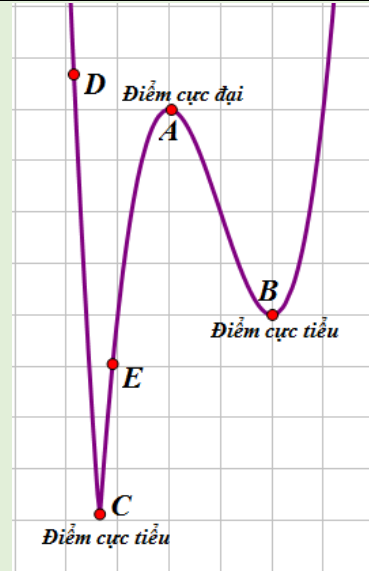
điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

— Ta nói x_0 là một **điểm cực tiểu** của hàm $f(x)$ nếu tồn tại khoảng $(a; b) \subset D$ và $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số

$y = f(x)$; điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

🔗 **Lưu ý:**

- Điểm cực đại hay điểm cực tiểu của hàm số được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số đó; giá trị cực đại hay giá trị cực tiểu của hàm số được gọi chung là **giá trị cực trị** hay **cực trị** của hàm số đó.
- Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ **không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất)** của hàm số trên tập xác định D , $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trên một khoảng $(a; b) \subset D$ nào đó chứa x_0 mà thôi. Chẳng hạn, trong hình vẽ trên, ta thấy điểm A là điểm cực đại của đồ thị, nên y_A là giá trị cực đại của hàm số, tuy nhiên $y_A < y_D$ nên giá trị cực đại y_A chưa phải là giá trị lớn nhất của hàm số đó. Tương tự điểm B là điểm cực tiểu của



ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

đồ thị nên y_B là giá trị cực tiểu của hàm số, tuy nhiên $y_B > y_E$ nên y_B chưa phải là giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

2. Điều kiện có cực trị của hàm số:

a) Điều kiện cần: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và đạt cực trị tại $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.

b) Điều kiện đủ:

★ **Định lí 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0 , đồng thời có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ hoặc $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó:

— Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ **đạt cực đại** tại điểm $x = x_0$.

— Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ **đạt cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

BBT 1: Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Nhận thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua x_0 .

BBT 2: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Nhận thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua x_0 .

★ **Định lí 2:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(a; b)$ chứa x_0 .

— Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại $x = x_0$.

— Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại $x = x_0$.

Dạng toán 1. Tìm điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số

☺ **Phương pháp:**

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $y' = f'(x)$. Tìm x khi $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Tìm một số giới hạn, lập bảng biến thiên và kết luận các điểm cực trị.

✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = \pm 1, y = 0 \end{cases}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		0		1		0		$+\infty$	

Kết luận: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$; hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 1$. Do đó hàm số có ba cực trị.

Câu 2. Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

- A. $x_0 = 2$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 = -1$. D. $x_0 = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 3 \end{cases}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		3		-1		$+\infty$	

GIẢI TÍCH 12 – CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x_0 = -1$.

Câu 3. Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. **B. 0.** C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{-3}{(-x+2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		-		-	
y	2		$+\infty$		2

Ta thấy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 4. Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$. Tính khoảng cách AB .

- A. $AB = 3\sqrt{2}$. B. $AB = 4$.
C. $AB = 2\sqrt{5}$. D. $AB = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-1, y=-2 \end{cases}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		-2		$+\infty$		2		$+\infty$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-1; -2); B(1; 2)$.

Do đó: $AB = 2\sqrt{5}$.

Nhắc lại: Khoảng cách hai điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$, đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ và $x = 1$, đạt cực đại tại $x = 0$.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $x = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 + 2x - 3)$.

Xét $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = -\frac{1}{5} \\ x = 1, y = -\frac{1}{2} \\ x = -3, y = \frac{187}{10} \end{cases}$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\frac{187}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Hàm số không có cực trị.
- C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 7. Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định $D = [-2; 2]$.

Ta có $y' = 1 + \frac{(12 - 3x^2)'}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12 - 3x^2 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'			+	0	-		
y				4			

$-2 \swarrow \searrow 2$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 8. Hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 0.

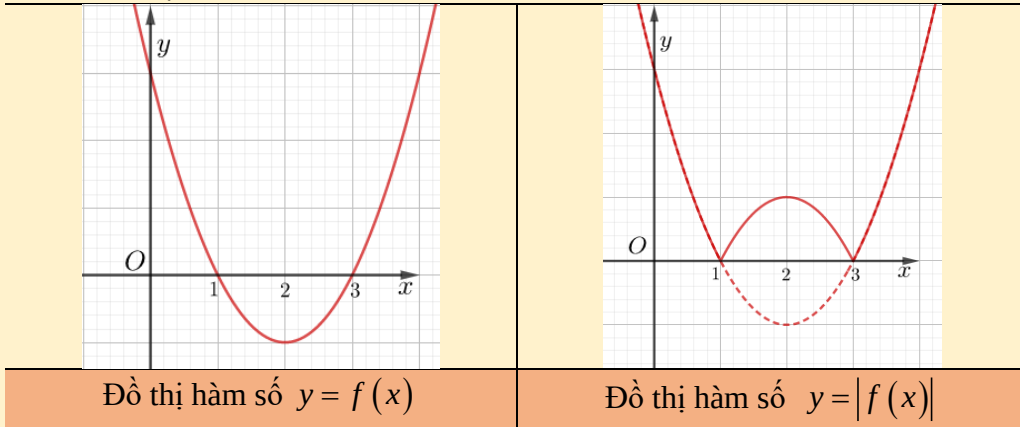
B. 1.

C. 2.

D. 3.

Xây dựng công thức: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được hình thành bởi hai bước:

- **Bước 1:** Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên trục hoành Ox.
- **Bước 2:** Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox qua Ox. Bỏ phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới trục Ox.



Từ các bước trên, ta thấy số cực trị ban đầu của hàm $y = f(x)$ được giữ nguyên, bên cạnh đó là sự phát sinh của các cực trị tại giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành.

Kết luận: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

😊 Cách 1: Tự luận

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Áp dụng công thức $(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{(u^2)'}{2\sqrt{u^2}} = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)}{|x^2 - 4x + 3|}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)(2x - 4) = 0 \\ |x^2 - 4x + 3| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$+\infty$						

$+\infty \searrow 0 \nearrow 1 \searrow 0 \nearrow +\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại các điểm: $x = 1, x = 3$.

😊 Cách 2: Trắc nghiệm

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$, đồ thị của hàm có dạng parabol nên hàm số có đúng 1 cực trị.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm $f(x) = x^2 - 4x + 3$ với trục hoành:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (ứng với 2 giao điểm).}$$

Vậy số cực trị của hàm số $y = |f(x)| = |x^2 - 4x + 3|$ là: $1 + 2 = 3$.

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		4		$+\infty$
y'	+		-		+	
y	$-\infty$	5		2		3

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tại $x = 0$ dù đạo hàm không xác định nhưng hàm số $y = f(x)$ vẫn xác định và liên tục nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Tại $x = 4$ thì hàm số $y = f(x)$ không xác định, vì vậy hàm số không có cực trị tại $x = 4$.

Do đó hàm số chỉ có duy nhất một cực trị.

Câu 10. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ có $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**:

A. (C) có một điểm cực trị.

B. (C) có hai điểm cực trị.

C. (C) có ba điểm cực trị.

D. (C) có bốn điểm cực trị.

Cần nhớ: Cho n là số nguyên dương.

- $\underbrace{(x-x_1)^{2n}}_{\text{mũ chẵn}} = 0 \Leftrightarrow (x-x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ (ta nói x_1 là **nghiệm kép** của phương trình).
- $\underbrace{(x-x_2)^{2n+1}}_{\text{mũ lẻ}} = 0 \Leftrightarrow (x-x_2)^1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2$ (ta nói x_2 là **nghiệm đơn** của phương trình).

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét đạo hàm: $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2) = (1+x)^2(x+2)^2(x-3)^3(1-x)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = -2 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{cases}.$$

Vì $x = -1, x = -2$ là các **nghiệm kép** của y' nên y' không đổi dấu khi qua hai điểm này; $x = 1, x = 3$ là **nghiệm đơn** của y' nên y' đổi dấu khi qua các điểm $x = 1, x = 3$.

Do đó hàm số có hai điểm cực trị $x = 1, x = 3$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			2		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -2$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Câu 12. Giá trị cực đại của hàm $y = x^3 - 3x + 1$ bằng

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. 4.

Câu 13. Giá trị cực đại hàm số $y = x^3 - 12x - 1$ bằng

A. -17.

B. -2.

C. 45.

D. 15.

Câu 14. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ là

- A. $x = 0$. B. $M(-2; -19)$. C. $N(0; 1)$. D. $x = -2$.

Câu 15. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ là

- A. $A(-1; 6)$. B. $x = 0$. C. 5. D. $B(0; 5)$.

Câu 16. Giá trị của tiêu của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ bằng

- A. 2. B. $(0; 2)$. C. $(1; 3)$. D. 3.

Câu 17. Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	+		-	0	+		-

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$. Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2024}(x-2)^{2025}$.

Khẳng định nào **đúng** ?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $x = 0$. D. $(-2; -3)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 . B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.
 C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 . D. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Câu 23. Gọi A , a lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của

$A^2 - 2a$ bằng

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 24. Giá trị cực đại của $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ bằng

- A. 0. B. 2. C. 3. D. $\sqrt{3}$.

Câu 25. Cực đại của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$ bằng

- A. $\sqrt{2}/2$. B. $-\sqrt{2}$. C. $-0,5$. D. $0,5$.

Câu 26. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $8\sqrt{5}$.

Câu 27. Tọa độ trung điểm của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3$ là

- A. $M_1(-1;5)$. B. $M_2\left(-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$. C. $M_3(1;5)$. D. $M_4(2;10)$.

Câu 28. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ và C là điểm cực đại. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là

- A. $G_1\left(0;\frac{7}{3}\right)$. B. $G_2\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. C. $G_3(0;7)$. D. $G_4(-2;4)$.

Câu 29. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. B. $G\left(1;-\frac{1}{3}\right)$. C. $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Diện tích tam giác OAB với $O(0;0)$ là gốc tọa độ bằng

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 31. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 33. Hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Dạng toán 2. Điều kiện cực trị của hàm số bậc ba chứa tham số**☺ PHƯƠNG PHÁP:****1. Điều kiện để hàm số có n điểm cực trị hoặc không có điểm cực trị.**Ta xét bảng sau (a và Δ là của đạo hàm y'):

Điều kiện của a	Điều kiện đi kèm	Kết luận
$a = 0$	$b \neq 0$	Hàm số trở thành $y = bx^2 + cx + d$ (parabol) nên có một điểm cực trị.
$a = 0$	$b = 0$	Hàm số trở thành $y = cx + d$ (đường thẳng) nên không có điểm cực trị.
$a \neq 0$	$\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)	Hàm số có hai điểm cực trị (một điểm cực đại và một điểm cực tiểu).
$a \neq 0$	$\Delta \leq 0$ (hoặc $\Delta' \leq 0$)	Hàm số không có điểm cực trị nào.

Từ bảng trên, ta khẳng định:

- Hàm số (*) có hai cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. Ta có thể thay $\Delta > 0$ bởi $\Delta' > 0$.
- Hàm số (*) có một cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.
- Hàm số (*) có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- Hàm số (*) không có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

2. Điều kiện cực trị cơ bản:

- **Hàm số đạt cực trị tại $x = x_0 \in D$ (với D là tập xác định)**

Ta có: $y'(x_0) = 0$. Sau khi tìm được m thì thay ngược trở lại để lập bảng biến thiên cho hàm số rồi kết luận nhận hay loại giá trị m này.

- **Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$ (hoặc hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$)**

Ta có: $y'(x_0) = 0$. Sau khi tìm được m thì thay ngược trở lại để lập bảng biến thiên cho hàm số rồi kết luận nhận hay loại giá trị m này (hoặc có thể thay m tìm được vào đạo hàm cấp hai để xét dấu xem có phù hợp không).

- **Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $M(x_0; y_0)$**

Ta có: $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm được}} m$. Thay m trở lại đạo hàm để kiểm tra **đạo hàm có đổi dấu**khi x đi qua x_0 ?

- **Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$**

Ta có: $\begin{cases} y'(x_A) = 0; y'(x_B) = 0 \\ y(x_A) = y_A; y(x_B) = y_B \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm được}} m, n, \dots$

3. Điều kiện cực trị liên quan đến các trục tọa độ:

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **khác phía** trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{ac < 0}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **cùng phía** trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{ac > 0}$.

☞ Để ý: Trong điều kiện trên, ta đã thay điều kiện $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ bởi $ac < 0$. Lý do là hai số **trái dấu** đồng nghĩa với **tích và thương của chúng là một số âm**. Một khi a, c trái dấu rồi thì điều kiện $a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$ luôn được thỏa mãn, vì vậy

$$\begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac < 0.$$

Ta có biến đổi tương đương sau đây (phù hợp trắc nghiệm):

$$\begin{aligned} \otimes \frac{A}{B} > 0 &\Leftrightarrow AB > 0; \frac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AB \geq 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \\ \otimes \frac{A}{B} < 0 &\Leftrightarrow AB < 0; \frac{A}{B} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AB \leq 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **khác phía** trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ y_1 y_2 < 0 \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **cùng phía** trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases}$.
(trong hai điều kiện trên thì y_1, y_2 là hai giá trị cực trị của hàm số bậc ba).
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị **cách đều** trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ \text{Điểm uốn } I \in Ox \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị **cách đều** trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ \text{Điểm uốn } I \in Oy \end{cases}$.

🔍 Lưu ý: Cách tìm điểm uốn I của đồ thị bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{3a} = x_I, \text{ thay } x_I = \frac{-b}{3a} \text{ vào hàm số ban đầu để tìm } y_I \Rightarrow I(x_I; y_I).$$

4. Các công thức giải tích liên quan:

a) **Định lý Vi-ét:** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) có hai nghiệm x_1, x_2 . Ta có:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

b) **Công thức nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*):**

- (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.
- (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S > 0, P > 0 \end{cases}$.
- (*) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S < 0, P > 0 \end{cases}$.

c) Công thức hình học giải tích trong mặt phẳng:

- Nếu ΔABC có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b_1; b_2) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1; c_2) \end{cases}$ thì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |b_1 c_2 - b_2 c_1|$.
 - $\Delta ABC \perp$ tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$.
 - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến $\Delta: ax + by + c = 0$ là $d(M; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- ☞ **Đặc biệt:** $d(M; Ox) = |y_M|$, $d(M; Oy) = |x_M|$.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 34. Với giá trị nào của m hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = x^2 + 2mx + m + 6$.

Ta thấy $a = 1 \neq 0$. Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu hai lần trên tập xác định

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+6) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}.$$

Câu 35. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có hai điểm cực trị ?

A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$.

B. $m \in (-3; 1)$.

C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in [-3; 1]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$.

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ 3^2 - 3(m+2)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 36. Tập hợp tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - mx^2 + mx - 5$ có cực trị là:

- A. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases}$. B. $m \neq 1$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = (m-1)x^2 - 2mx + m$.

Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2 - (m-1)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1 \vee \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m+3)x - 1$ không có cực trị ?

- A. $m \geq -\frac{5}{3}$. B. $m > -\frac{5}{3}$. C. $m \geq -\frac{8}{3}$. D. $m \leq -\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 4x + m + 3$.

Ta thấy $a = 1 \neq 0$. Vậy hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 3(m+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3m - 5 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}.$$

Câu 38. Giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$ là

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$.

$$\text{Hàm số có cực đại tại } x=1 \text{ nên } y'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 6m + 3(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Xét $m = 0$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y'' = 6x$. Khi đó $y''(1) = 6 > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ (loại $m = 0$ vì trái giả thiết).

Xét $m = 2$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y'' = 6x - 12$. Khi đó $y''(1) = -6 < 0$. Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$. Vậy $m = 2$ thỏa mãn đề bài.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $\begin{cases} m=1 \\ m=-4 \end{cases}$. B. $m=1$. C. $m=-4$. D. $m > -\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3mx^2 + 2x + m^2 - 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y'(1)=0 \Rightarrow 3m+2+m^2-6=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-4 \end{cases}$.

Xét $m=1$, ta có $y' = 3x^2 + 2x - 5$, $y'' = 6x + 2$. Khi đó $y''(1) = 8 > 0$, hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$. Vì vậy $m=1$ thỏa mãn.

Xét $m=-4$, ta có $y' = -12x^2 + 2x + 10$, $y'' = -24x + 2$. Khi đó $y''(1) = -22 < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$. Điều này trái với giả thiết nên ta loại $m=-4$.

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính $a+b$

- A. -4 . B. 2 . C. 4 . D. 2 .

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$.

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2) \Rightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-12+2a=0 \\ 8-12+4a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$.

Khi đó $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Ta thấy $y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$, do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ (thỏa mãn). Vậy $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra $a+b=2$.

Câu 41. Cho hàm số $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ và có điểm cực đại là $M(2; 3)$. Tính $Q = a + 2b + c$.

- A. $Q=0$. B. $Q=-4$. C. $Q=1$. D. $Q=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 2ax + b$.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $M(2; 3)$ và đi qua $A(0; -1)$ suy ra

$$\begin{cases} y'(2)=0 \\ y(2)=3 \\ y(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12+4a+b=0 \\ -8+4a+2b+c=3 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Thay các hệ số trên vào đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$, $y'' = -6x + 6 \Rightarrow y''(2) = -6 < 0$, do đó hàm số đạt cực đại tại $x=2$ (thỏa mãn đề bài). Vậy $a=3, b=0, c=-1 \Rightarrow Q = a + 2b + c = 2$.

Câu 42. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Hãy tính $y(-1)$.

A. $y(-1) = 7$.

B. $y(-1) = 11$.

C. $y(-1) = -11$.

D. $y(-1) = -35$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Theo đề bài ta có hệ: } \begin{cases} y'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ y'(2) = 12a + 4b + c = 0 \\ y(1) = a + b + c + d = -7 \\ y(2) = 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - (a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}.$$

Vậy $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12 \Rightarrow y(-1) = -35$.

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ (C_m), với m là tham số. Xác định tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?

A. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

B. $0 < m < 2$.

C. $m \neq 1$.

D. $-\frac{1}{2} < m < 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (2m-1) > 0 \\ P = 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 44. Tìm tất cả giá trị m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung.

A. $1 < m < 3$.

B. $0 < m < 2$.

C. $2 < m < 3$.

D. $1 < m < 2$.

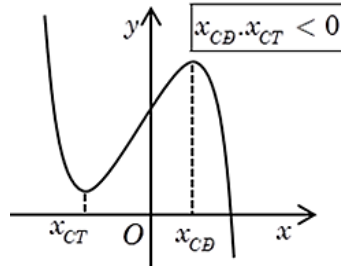
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow m \in (1; 2).$$



Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 2.

B. 9.

C. 3.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Khi đó : } y_1 = y(0) = 1 - m \text{ và } y_2 = y(2) = -7 - m$$

Hai giá trị cực trị trái dấu: $y_1 \cdot y_2 < 0 \Leftrightarrow (1 - m)(-m - 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Câu 46. Điều kiện của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là:

A. $m = 3$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Ta có : } x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot \frac{m}{3} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 47. Tìm tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $S_{\triangle OAB} = 48$, với O là gốc tọa độ.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm : } y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = -m^3 \end{cases}.$$

Đồ thị có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị: $A(0; 3m^3)$, $B(2m; -m^3)$.

Xét ΔOAB với $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (0; 3m^3) \\ \overrightarrow{OB} = (2m; -m^3) \end{cases}$, diện tích ΔOAB là: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |0 - 6m^4| = 3m^4$.

Theo đề: $S_{\Delta OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Ta có tổng của hai giá trị m tìm được: $2 + (-2) = 0$.

Câu 48. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

A. $m \in \left[-\frac{7}{2}; -3\right]$.

B. $m \in \left(-\frac{7}{2}; 0\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.

D. $m \in \left[-\frac{7}{2}; 0\right)$.

Nhắc lại: Xét tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , ta có quy tắc xét dấu:

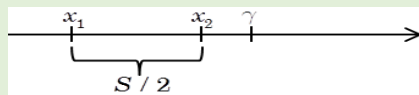
x	$-\infty$	β	x_1	α	x_2	γ	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a		0	Trái dấu a	0	Cùng dấu a	
	$\Rightarrow a.f(\beta) > 0$			$\Rightarrow a.f(\alpha) < 0$		$\Rightarrow a.f(\gamma) > 0$	

- Khi $x \in (-\infty; x_1)$ thì $f(x)$ cùng dấu a mà $\beta \in (-\infty; x_1)$ nên $a.f(\beta) > 0$.
- Khi $x \in (x_2; +\infty)$ thì $f(x)$ cùng dấu a mà $\gamma \in (x_2; +\infty)$ nên $a.f(\gamma) > 0$.
- Khi $x \in (x_1; x_2)$ thì $f(x)$ trái dấu a mà $\alpha \in (x_1; x_2)$ nên $a.f(\alpha) < 0$.

Đặc biệt: Trường hợp $a.f(\alpha) < 0$ chỉ xảy ra khi phương trình bậc II có hai nghiệm x_1, x_2 và α nằm trong khoảng hai nghiệm đó nên khi ta dùng $a.f(\alpha) < 0$ thì đã bao hàm luôn điều kiện để phương trình bậc II có hai nghiệm phân biệt, do đó không cần ghi $\Delta > 0$. Vậy, với phương trình $\underbrace{ax^2 + bx + c}_{f(x)} = 0$ (*), ta có:

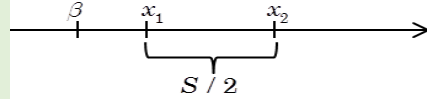
— Phương trình (*) có hai nghiệm thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$.

— Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\gamma) > 0 \\ \frac{S}{2} < \gamma \end{cases}$.



(Một số nằm bên phải khoảng nghiệm thì trung bình cộng hai nghiệm nhỏ hơn số đó).

— Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa $\beta < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \beta < \frac{S}{2} \end{cases}$.



(Một số nằm bên trái khoảng nghiệm thì trung bình cộng hai nghiệm lớn hơn số đó).

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = \underbrace{x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)}_{g(x)}$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 4(m+3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases} (*)$.

Điều kiện cực trị : $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.g(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. [(-1)^2 - 2(m+3) + 4(m+3)] > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+7 > 0 \\ m+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases}$. So sánh điều kiện (*), ta có $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x + m$ (1). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

A. $y = \frac{2}{3}x - m$.

B. $y = -x - m$.

C. $y = x + m - \frac{2}{3}$.

D. $y = -\frac{2}{3}x + m$.

Đánh giá :

— Với bài toán này, xin được hướng dẫn hai cách để bạn đọc lựa chọn phương án tối ưu cho mình. **Cách giải 1 :** Làm theo lý luận truyền thống. **Cách giải 2 :** Dựa vào công thức đã cung cấp.

— Với **cách giải 1**, ta thực hiện phép chia y cho y' trong giấy nháp như sau :

	$\underbrace{x^3 - x + m}_y$	$\underbrace{3x^2 - 1}_{y'}$
—	$x^3 - \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
	$-\frac{2}{3}x + m$ (bậc I)	Phép chia kết thúc vì bậc I nhỏ hơn bậc II
	Dư : dạng $\alpha x + \beta$	

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

☺ Cách giải 1 :

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ nên hàm số luôn có 2 cực trị.

Hàm số được viết lại $y = y' \cdot \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3}x + m\right)$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn thỏa mãn :
$$\begin{cases} y = y' \cdot \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3}x + m\right) \\ y' = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + m$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $y = -\frac{2}{3}x + m$.

☺ Cách giải 2 :

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ nên hàm số luôn có 2 cực trị.

Dựa vào công thức $y = f(x) - \frac{f'(x) \cdot f''(x)}{18a}$, ta viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị

như sau : $y = x^3 - x + m - \frac{(3x^2 - 1) \cdot 6x}{18} \Leftrightarrow y = x^3 - x + m - \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + m$.

Câu 50. Cho biết có một tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C(0; -1)$ thẳng hàng. Tìm khẳng định đúng:

A. $m \in (3; 6)$.

B. $m \in (4; 7)$.

C. $m \in (1; 4)$.

D. $m \in (-1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

☺ Cách giải 1 : Chia y cho y' như sau :

	$\underbrace{2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m}_y$	$\underbrace{6x^2 + 6(m-3)x}_{y'}$
–	$2x^3 + 2(m-3)x^2$	$\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}$
	$(m-3)x^2 + 11 - 3m$	Khi phần dư có dạng $\alpha x + \beta$ thì phép chia kết thúc.
–	$(m-3)x^2 + (m-3)^2 x$	
	Dư : $-(m-3)^2 x + 11 - 3m$	

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6(m-3)x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 - m \end{cases}$$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

$$\begin{cases} y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6} \right) - (m-3)^2 x + 11 - 3m \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m.$$

☺ Cách giải 2 :

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x+m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3-m \end{cases}.$$
$$y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - \frac{[6x^2 + 6(m-3)x][12x + 6(m-3)]}{18.2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - [x^2 + (m-3)x](2x+m-3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - \left[2x^3 + 3(m-3)x^2 + (m-3)^2 x \right]$$

$$\Leftrightarrow y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m.$$

Điểm $C(0;-1)$ thuộc đường thẳng qua hai điểm cực trị nên $-1=11-3m \Leftrightarrow m=4$ (thỏa mãn).

Câu 51. Cho hàm số $y = 2x^3 - (m-2)x^2 + (6-3m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thỏa mãn $|m| < 20$ sao cho hàm số có 2 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 20.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9; 9)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ không có điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 53. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5; 5)$ để hàm số có 2 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 54. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

A. $m=1$. **B.** $m=5$. **C.** $m \in \{1; 5\}$. **D.** $m > 3$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$ thì m bằng

A. -1 . **B.** 5 . **C.** 1 . **D.** -7 .

Câu 56. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x$. Tìm m để hàm đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 57. Hàm số $y = x^3 + 2ax^2 + 4bx - 2029$ đạt cực trị tại điểm $x = -1$. Khi đó hiệu $a - b$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 58. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại là

A. $-3 < m < 1$.

B. $-3 \leq m \leq 1$.

C. $-3 < m < -2$.

D. $-3 \leq m < -2$.

Câu 59. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ có điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu là

A. $0 < m < 1$.

B. $m > 1$.

C. $m < 1$.

D. $m < 0 \vee m > 1$.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5; 5)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1 - m^2)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục tung Oy ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị $y = \frac{2x^3}{3} + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung Oy ?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 62. Tính tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - 2m$ có giá trị cực đại bằng 3.

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. -3.

Câu 63. Tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 2m$ có giá trị cực tiểu (y_{CT}) thỏa mãn $y_{CT} = -4$ bằng

A. 2.

B. -4.

C. 4.

D. -2.

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu ?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox ?

A. 7.

B. 9.

C. 31.

D. 33.

Câu 66. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có điểm cực trị là $A(1; 3)$. Giá trị của $4a - b$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 67. Đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có điểm cực trị $M(-2; 0)$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 25.

B. -1.

C. 7.

D. 14.

Câu 68. Biết $M(-1; 18)$ và $N(3; -16)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính $S = a + b + c + d$.

A. $S = 0$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 3$.

Câu 69. Biết $M(1; -6)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$. Tìm tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đó.

A. $N(-2; 11)$.

B. $N(-2; 21)$.

C. $N(2; 6)$.

D. $N(2; 21)$.

- Câu 70.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x$. Tìm tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.
- A. $m = -1$. B. $m = \pm 2$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 2$.
- Câu 71.** Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 - (2m-1)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2)$ bằng
- A. 78. B. 1. C. -18. D. -22.
- Câu 72.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m - 1$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập có hoành độ lập thành cấp số cộng. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?
- A. (2; 4). B. (-2; 0). C. (-5; -2). D. (4; 10).
- Câu 73.** Gọi S là tập các số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6m^2x + 2m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho $AB = 2\sqrt{34}$. Tích các phần tử của S bằng
- A. -1. B. -4. C. 1. D. 2.
- Câu 74.** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ với m là tham số thực khác 0. Tìm tham số m để trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $3x + 3y - 8 = 0$?
- A. $m = 5$. B. $m = 2$. C. $m = 6$. D. $m = 4$.
- Câu 75.** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tích số m_1m_2 bằng
- A. -15. B. 12. C. 6. D. -20.
- Câu 76.** Có bao nhiêu số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O ?
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 77.** Biết đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ tạo thành hai phần hình phẳng khép kín có diện tích bằng nhau. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?
- A. (3; +∞). B. (-1; 3). C. (-∞; -3). D. (-3; -1).
- Câu 78.** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho 3 điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng ?
- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = -\sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.
- Câu 79.** Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$.
- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.
- Câu 80.** Biết đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Giá trị của m bằng
- A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

- Câu 81.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tích các phần tử của S bằng
- A. 27. B. -27. C. 9. D. -9.

Dạng toán 3. Điều kiện cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương chứa tham số

☺ **PHƯƠNG PHÁP:**

1. Số cực trị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Đạo hàm : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases} (*)$.

Nhìn vào phương trình $y' = 0$, ta thấy luôn có một nghiệm $x = 0$. Do đó việc biện luận tiếp theo sẽ phụ thuộc vào phương trình (*). Từ (*) ta thấy :

Trường hợp	Nghiệm của (*)	Số nghiệm của y'	Số cực trị
$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	Vô nghiệm	1	1
$\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$	Một nghiệm : $x = 0$	1	1
$ab > 0$ (a, b cùng dấu)	Vô nghiệm	1	1
$ab < 0$ (a, b trái dấu)	Hai nghiệm khác 0 : $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$	3	3

☞ **Từ đây, ta có thể khẳng định :**

- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow a = b = 0$.
- Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow a^2 + b^2 > 0$
- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

Lưu ý : Việc sử dụng $a^2 + b^2 > 0$ là thể hiện a, b không đồng thời bằng 0, tuy nhiên BPT $a^2 + b^2 > 0$ mang tính phức tạp do bậc của m có thể ≥ 4 . Để khắc phục điều này, ta dùng phương pháp phủ định như sau :

✓ Xét $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} \begin{cases} m = m_1 \\ m = m_2 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$.

✓ Quay lại giải $a^2 + b^2 > 0$ tức là lấy **phủ định kết quả** của bước một. Ta có $\begin{cases} m \neq m_1 \\ m \neq m_2 \\ \dots \end{cases}$.

2. Tìm điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn điều kiện K:

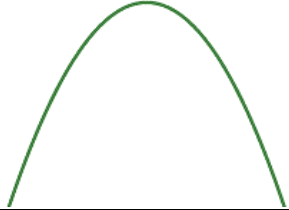
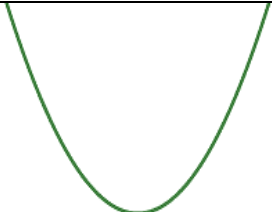
- **Bước 1** : Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}.$$

- **Bước 2** : Điều kiện hàm số có một cực trị (hoặc có ba cực trị) – *Xem mục 1 (lý thuyết)*.
- **Bước 3** : Dựa vào điều kiện K để tìm tham số m rồi so sánh điều kiện có cực trị (bước 2) trước khi kết luận.

🔍 Xử lý điều kiện K (Công thức trắc nghiệm) :

- Hàm số có cực trị và thỏa mãn :

Hàm số có cực đại mà không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$
	

- Ba cực trị tạo thành tam giác $\begin{cases} \circ \text{ vuông} \\ \circ \text{ đều} \end{cases}$, ta dùng công thức nhanh $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

— Ba cực trị tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow \cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 = \cos 90^\circ$.

— Ba cực trị tạo thành tam giác đều

$$\Leftrightarrow \cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

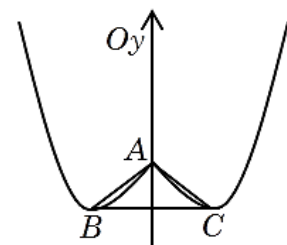
- Ba cực trị tạo thành tam giác có diện tích S.

Ta dùng công thức nhanh bình phương diện tích : $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

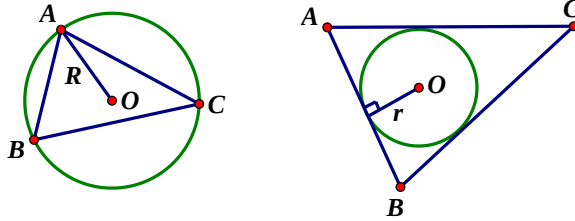
- Tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị là

$$A(0; c), B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right), C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Tam giác ABC có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b_1; b_2) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1; c_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Diện tích}} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |b_1 c_2 - b_2 c_1|$.



- Công thức diện tích khác : $S = \frac{abc}{4R}$; $S = pr$ với R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ; a, b, c là độ dài ba cạnh ; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.



✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 82. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

- A. 20. B. 10. C. Vô số. D. 11.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

☺ **Cách 1: Tự luận**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4(2m+1)x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(2m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \quad (*) \end{cases}$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{D}$

☺ **Cách 2: Trắc nghiệm**

$$\text{Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi } ab < 0 \Leftrightarrow 1[-2(2m+1)] < 0 \Leftrightarrow 2(2m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Câu 83. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 cực trị

- A. $m \in (0; 3)$. B. $m \in (3; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$. D. $m \in (-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

☺ **Cách 1: Tự luận**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \underbrace{2mx^2 + m^2 - 9}_{a=2m, b=0, c=m^2-9} = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m \neq 0 \\ \Delta = -8m(m^2 - 9) > 0 \\ 2m \cdot 0 + m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}. \text{ Suy ra } m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3).$$

😊 Cách 2: Trắc nghiệm

$$\text{Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi } ab < 0 \Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}.$$

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Hàm số có một cực trị khi và chỉ khi } \begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) \geq 0 \\ m^2 + (m-1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \vee m \geq 1 \\ 2m^2 - 2m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \vee m \geq 1.$$

Vậy $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 4x^3 + mx^2 - 4x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 6$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 + 2mx - 4$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ suy ra $y'(1) = 0 \Rightarrow m = 6$.

Thử lại với $m = 6$, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương qua $x = 1$. Suy ra $m = 6$ thỏa mãn.

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \geq 1$.

D. $m = -1$.

Nhận xét : Có hai trường hợp để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có cực tiểu mà không có cực đại:

- **Một là :** Hàm bậc bốn có đúng một cực trị và là cực tiểu, khi đó : $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- **Hai là :** Hàm số trở thành hàm bậc hai (đồ thị parabol có bề lõm hướng lên), ta có : $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta thấy $a = \frac{3}{2} > 0$, vì vậy điều kiện bài toán tương đương với $b \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Vậy $m \leq 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

A. $-1,5 < m \leq 0$.

B. $m \leq -1$.

C. $-1 \leq m \leq 0$.

D. $-1 < m < 0,5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hàm số có một điểm cực đại mà không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \quad (1) \vee \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \quad (2)$

Giải (1): $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 0 \quad (*)$.

Giải (2): $\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \quad (**)$.

Từ (*) và (**) suy ra $-1 \leq m \leq 0$.

Câu 88. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

😊 Cách 1: Tự luận

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. (*)

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị là: $A(0;1)$, $B(\sqrt{m-1}; 2m-m^2)$, $C(-\sqrt{m-1}; 2m-m^2)$;

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m-1}; 2m-m^2-1), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m-1}; 2m-m^2-1).$$

Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng $\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

Theo đề : $\triangle ABC$ vuông, do đó nó phải vuông tại A , ta có : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\Leftrightarrow -(m-1) + (2m-m^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^4 - (m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)[(m-1)^3 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $m = 2$.

☺ Cách 2: Trắc nghiệm

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot [-2(m-1)] < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số với A là đỉnh của tam giác cân ABC, ta có:

$$\cos BAC = \frac{b^3+8a}{b^3-8a} \Leftrightarrow \frac{b^3+8a}{b^3-8a} = \cos 90^\circ = 0 \Leftrightarrow b^3+8a = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2m+2)^3 + 8 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow (-2m+2)^3 = -8 \Leftrightarrow -2m+2 = -2 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Câu 89. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 3$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác cân.

A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \neq 0$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^2 = m \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của chúng đối xứng nhau qua Oy, do đó tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị luôn luôn là tam giác cân (tại đỉnh thuộc trục tung).

Vậy $m > 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 90. Tìm m để $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

A. $m = -\frac{2}{3}$. B. $m = \frac{1}{3}$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = x^3 - 2(3m+1)x = x[x^2 - 2(3m+1)]; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{cases}.$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị, ta có: $A(0; 2m+2) \in Oy$, $B(-\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1)$, $C(\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1)$.

Vì O là trọng tâm $\triangle ABC$ nên
$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-18m^2 - 6m + 4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \text{ (nhận)} \\ m = -\frac{2}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 91. Biết rằng với tham số $m = m_0$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Chọn mệnh đề đúng sau đây:

A. $m_0 \in (-3; -1)$.

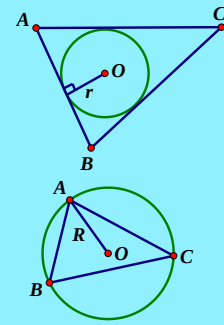
B. $m_0 \in (0; 2)$.

C. $m_0 \in (1; 3)$.

D. $m_0 \in (4; 7)$.

Lưu ý:

- Tam giác ngoại tiếp (tiếp xúc ngoài) đường tròn cũng có nghĩa là đường tròn nội tiếp (tiếp xúc trong) tam giác.
- Tam giác nội tiếp (tiếp xúc trong) đường tròn cũng có nghĩa là đường tròn ngoại tiếp (tiếp xúc ngoài) tam giác.



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*).

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{m}; 2 - m^2)$, $C(\sqrt{m}; 2 - m^2)$.

$\overline{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{BC} = (2\sqrt{m}; 0)$ suy ra $AB = \sqrt{m + m^4} = AC$; $BC = 2\sqrt{m}$.

Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |m^2 \sqrt{m} + m^2 \sqrt{m}| = m^2 \sqrt{m}$.

Nửa chu vi tam giác: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{2\sqrt{m + m^4} + 2\sqrt{m}}{2} = \sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}$.

Ta có $S = p.r \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = \sqrt{m + m^4} + \sqrt{m} \Leftrightarrow m^2 = \sqrt{1 + m^3} + 1$ (rút gọn cho $\sqrt{m} > 0$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^3 + 1} = m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ m^3 + 1 = m^4 - 2m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 1 \\ m^2(m^2 - m - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 92. Có bao nhiêu tham số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị: $A(0; m)$, $B(-\sqrt{m}; m - m^2)$, $C(\sqrt{m}; m - m^2)$.

$\overline{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{BC} = (2\sqrt{m}; 0)$; $AB = \sqrt{m + m^4} = AC$; $BC = 2\sqrt{m}$.

Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |m^2\sqrt{m} + m^2\sqrt{m}| = m^2\sqrt{m}$.

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = \frac{(m + m^4)2\sqrt{m}}{4 \cdot 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{m} = 0 \\ 2m = 1 + m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy $m = 1 \vee m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn. Ta thấy không có giá trị m nguyên âm nào thỏa mãn.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 93. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9; 9)$ sao cho hàm số $y = x^4 + (m + 1)x^2 + 4$ có 3 điểm cực trị?

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 9.

Câu 94. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = mx^4 + (m - 2)x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 95. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5; 5)$ để hàm số $y = m^2x^4 + (m - 4)x^2 + m$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại?

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 5.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-6; 6)$ để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + m^2$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 97. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại.

- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 98. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$. Khi đó tham số m bằng

- A. 4. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. -2.

Câu 99. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C sao cho trung điểm I của BC thuộc đường thẳng $d: y - 1 = 0$. Khi đó m thuộc tập hợp nào sau đây?

- A. $\{-4; 0; 4\}$. B. $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$. C. $\{-1; 0; 1\}$. D. $\{-2; 0; 2\}$.

Câu 100. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \sqrt{2}, m = 0.$

B. $m = -1, m = 0.$

C. $m = 0.$

D. $m = \sqrt{3}, m = -1.$

Câu 101. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tham số m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều ?

A. $m = 2\sqrt{2}.$

B. $m = \sqrt[3]{3}.$

C. $m = \sqrt[3]{4}.$

D. $m = 1.$

Câu 102. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = 1.$

B. $m = \sqrt{3}.$

C. $m = 3\sqrt{3}.$

D. $m = \sqrt[3]{3}.$

Câu 103. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Giá trị của tham số m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm bằng

A. $\sqrt{5}.$

B. 1.

C. -1.

D. 3.

Câu 104. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m sao cho (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa $OA = BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc Oy ?

A. $m = 0$ hoặc $m = 2.$

B. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$

C. $m = 3 \pm 3\sqrt{3}.$

D. $m = 5 \pm 5\sqrt{5}.$

Câu 105. Tìm k để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm ?

A. $k \in \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}.$

B. $k \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}.$

C. $k \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$

D. $k \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}.$

Dạng toán 4. Tìm điểm cực trị của hàm hợp khi biết đồ thị đạo hàm

☺ **Phương pháp :**

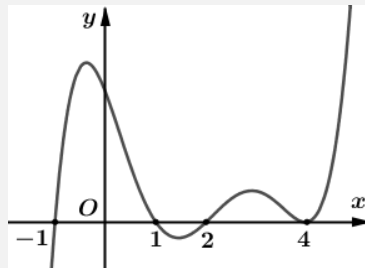
- **Bước 1:** Tìm tập xác định và tìm đạo hàm của hàm hợp dạng $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$ với u là hàm theo x .
- **Bước 2:** Cho đạo hàm bằng 0 và tìm các nghiệm đơn của đạo hàm đó.
Lưu ý : Nghiệm đơn của $g'(x)$ chính là điểm cực trị của hàm $y = g(x)$; nghiệm kép của đạo hàm không là điểm cực trị của hàm số tương ứng.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên (nếu đề bài có hỏi về điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm hợp).

🔗 **Nhận xét:** Trong **bước 2**, đôi khi việc tìm nghiệm của đạo hàm của hàm hợp không đơn giản, một số trường hợp ta cần vẽ thêm đồ thị (đường thẳng, đường cong) vào cùng hệ trục với đồ thị đạo hàm đã cho để tìm các hoành độ giao điểm giữa chúng, sau đó tuân thủ theo hai quy tắc :

- Các giao điểm của hai đường (không kể tiếp xúc) sẽ là nghiệm đơn của đạo hàm (hàm hợp) và là các điểm cực trị của hàm hợp ban đầu.
- Ta cần phân biệt khoảng x ứng với đồ thị nào nằm trên (nằm dưới) rồi suy ra dấu tương ứng của đạo hàm (hàm hợp), phục vụ cho việc lập bảng biến thiên hàm số đó.

✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 1. Cho hàm $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $y = f(1-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	4	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Ta có: $y' = -2f'(1-2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = 2 \\ 1-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
 (Loại vì nghiệm kép)

Vì cả ba nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ là các nghiệm đơn của đạo hàm y' nên chúng là các điểm cực trị của hàm số đã cho.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Hướng dẫn giải:

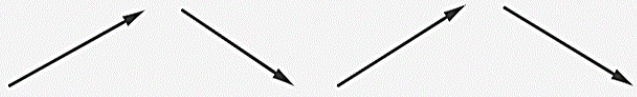
Chọn D.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x)$. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

[Nhận xét: Ta không cần giải $x^2 - 2x = 1$ vì 1 là nghiệm kép của $f'(x)$ đã cho].

Xét $g'(4) = (2 \cdot 4 - 2) \cdot f'(4^2 - 2 \cdot 4) = 6f'(8) < 0$. Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x)$ có đúng một điểm cực tiểu là $x = 1$.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số

$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \in \emptyset \\ x=-1 \\ x=-1 \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{(Vẫn nhận).} \\ \text{(Loại vì nghiệm kép).} \end{matrix}$$

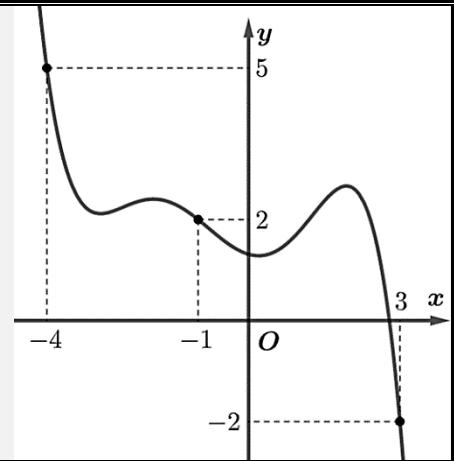
Xét $g'(3) = \frac{3+1}{\sqrt{3^2+2 \cdot 3+2}} f'(\sqrt{3^2+2 \cdot 3+2}) = \frac{4\sqrt{17}}{17} f'(\sqrt{17}) > 0$, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có ba điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tổng tất cả các điểm cực đại của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$.

- A. -1.
- B. 1.
- C. 2.
- D. -2.



Hướng dẫn giải:

Chọn A.

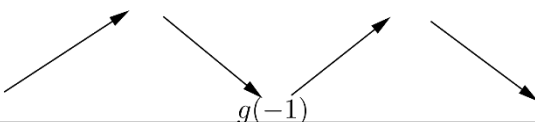
Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1) = 2[f'(x) - (-x+1)]$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x+1$.

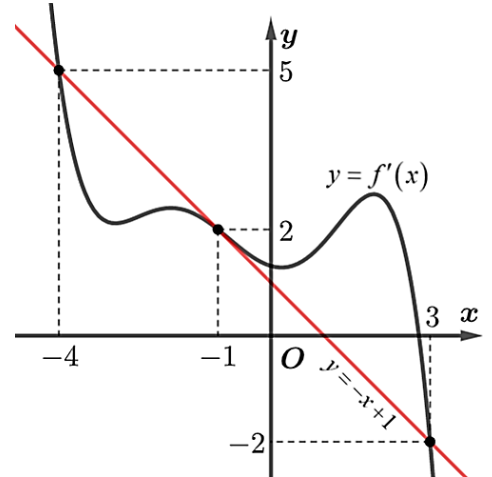
Vẽ đường thẳng $y = -x+1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $y = f'(x)$.

Từ đồ thị, ta có: $f'(x) = -x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \text{ (tất cả đều là nghiệm đơn).} \\ x = 3 \end{cases}$

Nhận xét: Với $x \in (3; +\infty)$ thì đồ thị $y = -x + 1$ nằm phía trên đồ thị $y = f'(x)$, suy ra $g'(x) = 2[f'(x) - (-x + 1)] < 0$; các khoảng kế tiếp thì $g'(x)$ luôn đổi dấu.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-4	-1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$					



Hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ có hai điểm cực đại là $x = -4, x = 3$; tổng của chúng bằng -1 .

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Đặt $g(x) = f(x+2) + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2030$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.
- C.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- D.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $g'(x) = f'(x+2) + x^2 - 4x + 3$.

$$\text{Xét: } f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=3 \\ x+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}. \text{ Xét } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$g'(x)$	Chưa rõ dấu		$+$	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow$					$-\infty$
			-1		5		

Hàm số $g(x) = 2f^3(x) - 6f^2(x) - 1$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$g'(x) = 6f^2(x)f'(x) - 12f(x)f'(x) = 6f(x)f'(x)(f(x) - 2);$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3 \\ x = 0 \vee x = 3 \\ x = x_4 \vee x = x_5 \vee x = x_6 \end{cases} \quad (8 \text{ nghiệm trên đều là nghiệm đơn phân biệt}).$$

Từ bảng biến thiên, ta thấy khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\begin{cases} f(x) \rightarrow -\infty \\ f'(x) < 0 \\ f(x) - 2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) < 0.$

Giả sử thứ tự giá trị của 8 nghiệm phân biệt trên là $a_1, a_2, \dots, a_8$, ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	a_1		a_2		a_3		a_4		a_5		a_6		a_7		a_8	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Ta thấy đạo hàm $g'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (-) bốn lần, do đó hàm $g(x)$ có bốn điểm cực đại.

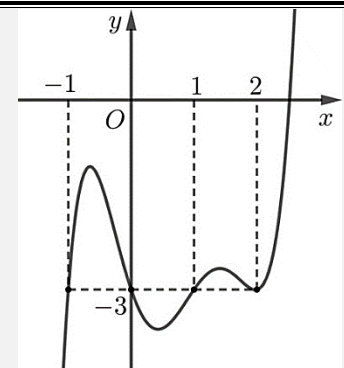
Câu 7. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $h(x) = f(x) + 3x$; $h'(x) = f'(x) + 3$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có bốn nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Bảng biến thiên cho hàm $y = h(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$		$f(0)$			$+\infty$

Theo bảng biến thiên và $f(0) < 0$ thì phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; $x_2 > 1$.

Khi đó ta có bảng biến thiên cho hàm $y = |h(x)|$:

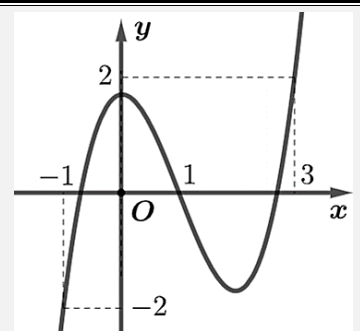
x	$-\infty$	x_1	-1	0	1	2	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$ h(x) $	$+\infty$			$f(0)$				$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có 5 cực trị.

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2032$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

- A. 5.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 4.



Hướng dẫn giải:

Chọn A.

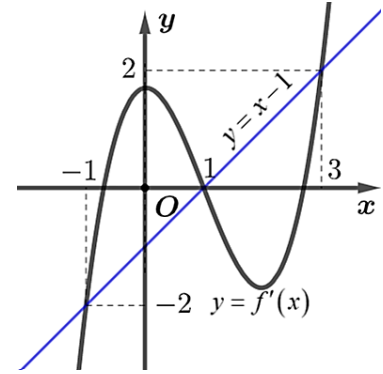
Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

GIẢI TÍCH 12 – CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Vẽ đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$ và cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $y = f'(x)$.

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								



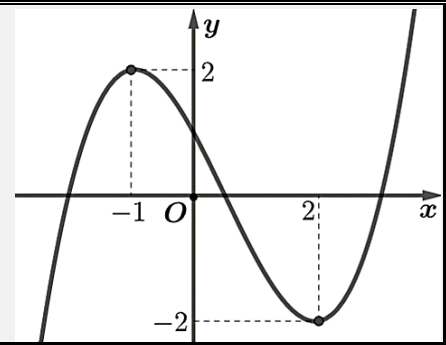
Từ đó ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = g(|x|)$:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$g(0)$ $Oy : x = 0$						

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 7.**



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$; $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 2f'(x)(f(x) - 2)$.

$$\text{Khi đó: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \quad (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

(Nhớ rằng $f(x) = 2$ còn cho ta một nghiệm kép $x = -1$ nên ta loại đi).

Ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	a	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	13	$g(2)$	$+\infty$

Lưu ý rằng $g(a) = (f(a))^2 - 4f(a) + 1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3 < 0$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$:

x	$-\infty$	-1	2	a	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$ g(x) $	$+\infty$	3	13	$-g(2)$	$+\infty$

$y = 0$

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có bảy điểm cực trị.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

A. $x = \frac{2}{3}$.

B. $x = 2$.

C. $y = -3$.

D. $x = -\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	-3	$+\infty$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$+$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(6 - x^2)$ là

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 7.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2050$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	5	$-\infty$	

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^2(2x^2 + x)$ là:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

GIẢI TÍCH 12 – CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^3 + 3x)$ là:

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	2	7	$-\infty$	

Hỏi hàm số $y = [f(2-x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

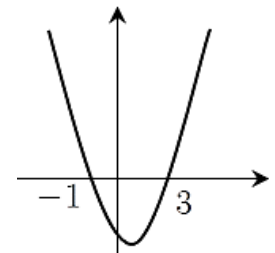
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	2	$-\infty$	

Hàm số $g(x) = \left(f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \right)^{2028}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 6.

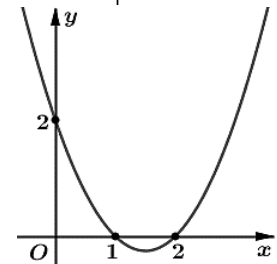
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-x^2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$.
B. $x = \pm\sqrt{2}$.
C. $x = 3$.
D. $x = 0$.



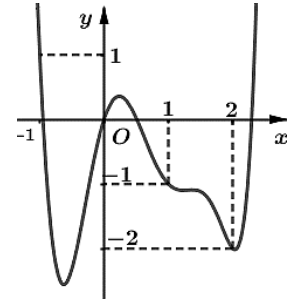
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



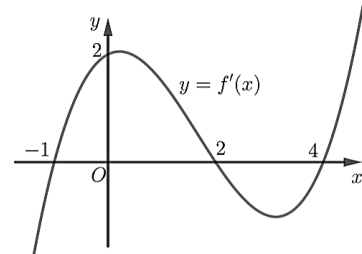
Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

- A. $x = -1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.



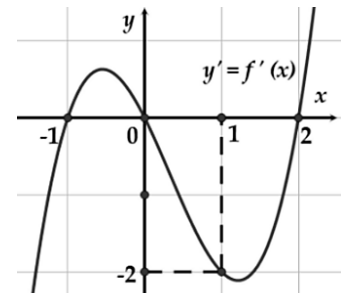
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - x^3 + 3x$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A. 2.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 5.



Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

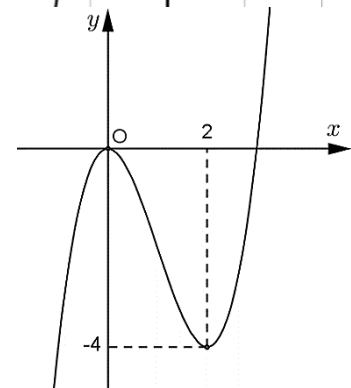
- A. $x = 0$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = -1$.
- D. $x = 2$.



Câu 27. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.

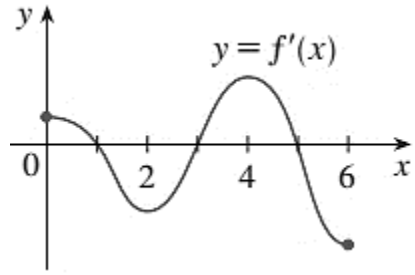
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.

- A. 5.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 6.



Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$.

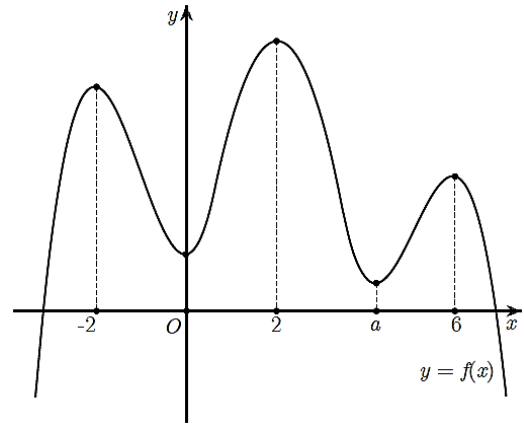
Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



- A. 3.
- B. 7.
- C. 6.
- D. 4.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

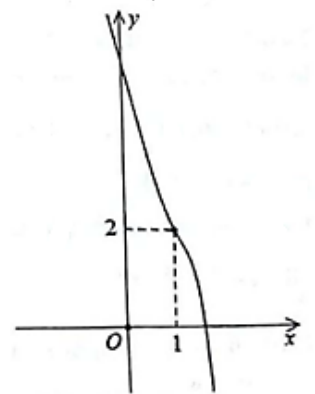
Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là -2 ; 0 ; 2 ; a ; 6 với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là



- A. 8.
- B. 11.
- C. 9.
- D. 7.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên. Xét hàm số

$h(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 - 2xf(x) + 2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1; 0)$.
- B. Hàm số $y = h(x)$ không có cực trị.
- C. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1; 2)$.
- D. Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1; 0)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số $y = f(|x - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		6		2	$+\infty$

- A. 5.
- B. 6.
- C. 3.
- D. 1.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

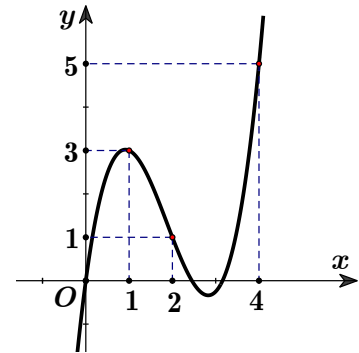
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.



Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$.

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 7.

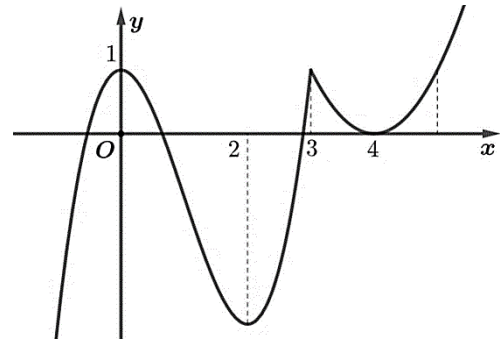
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 9.



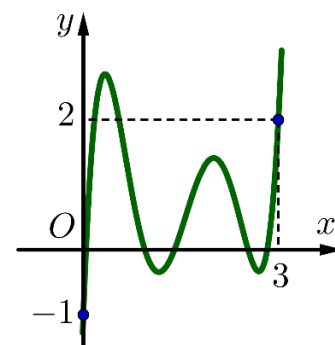
Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x) = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9.

B. 11.

C. 8.

D. 7.



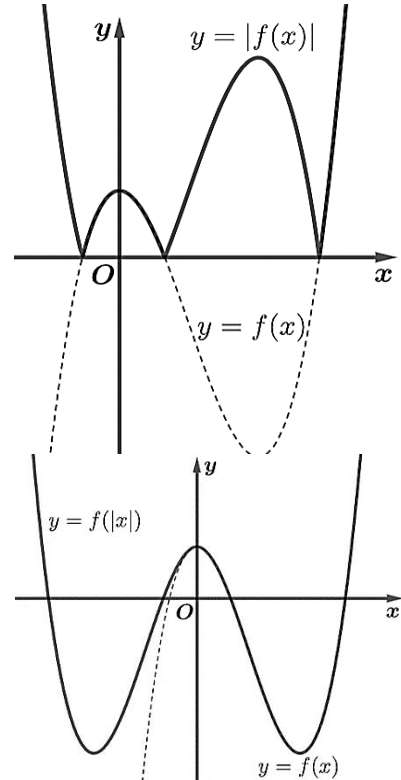
Dạng toán 5. Bài toán Vận dụng cao Cực trị hàm chứa tham số

☺ **Phương pháp :**

Ta xét các hàm $f(x)$ dưới đây là những hàm đa thức.

- Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là số nghiệm đơn của phương trình $f'(x) = 0$, và cũng là số giao điểm (không kể tiếp xúc) của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành $y = 0$.
- Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng $a + b$ với

$$\begin{cases} a = \text{số điểm cực trị hàm } y = f(x) \\ b = \text{số nghiệm đơn phương trình } f(x) = 0 \end{cases}$$
- Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2a + 1$ với a là số điểm cực trị bên phải Oy của hàm $y = f(x)$.



✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

A. 1.

B. Vô số.

C. 2.

D. Không có.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

☺ **Cách giải 1:**

Áp dụng công thức: $(|u|)' = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)(4x^3 - 24x^2 + 36x)}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|}$.

$$y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)4x(x-3)^2}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|};$$

$$y' = 0 \Rightarrow (x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)4x(x-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \\ \underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m \text{ (*)} \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$; $g'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	
$g(x)$	$+\infty$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m$ (*) có **tối đa hai nghiệm**.

Ngoài ra, $x = 0$ là **ng nghiệm đơn**, $x = 3$ là **ng nghiệm kép** của phương trình $y' = 0$. Vì vậy hàm số đã cho có ba cực trị tương đương phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó có vô số giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

☺ **Cách giải 2:**

Đặt $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m$; $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \text{ (ng nghiệm kép)} \end{cases}$. Suy ra hàm $f(x)$ có một điểm cực trị là $x = 0$.

Vì vậy để hàm $y = |f(x)|$ có ba điểm cực trị thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm đơn khác 0.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	
$g(x)$	$+\infty$						

Yêu cầu bài toán tương đương $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 44.

B. 27.

C. 26.

D. 16.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

☞ **Nhận xét:** Số cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ bằng **số điểm cực trị** của hàm $y = g(x)$ cộng với **số nghiệm đơn** của phương trình $g(x) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$. Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Do đó hàm số } y = f(x) \text{ luôn có 3 điểm cực trị.}$$

Bảng biến thiên của $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	x_1	2	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$	0	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$		$+\infty$	

$y=0$

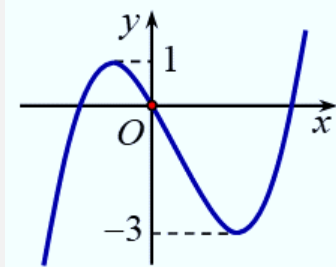
Để hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) = 0$ phải có hai nghiệm đơn phân biệt khác $-1; 0; 2$ (nếu có thêm nghiệm kép trùng một trong các số $-1; 0; 2$ vẫn được).

Khi đó: $\begin{cases} m \leq 0 \\ m-32 < 0 \\ m-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}$; mà m nguyên dương nên $m \in \{5; 6; \dots; 31\}$.

Vậy có 27 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn.

Câu 39. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị?

- A. $1 \leq m \leq 3$.
 B. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
 C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
 D. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x) + m$ cộng với số giao điểm (không kể tiếp xúc) của hai đồ thị $\begin{cases} y = f(x) + m \\ Ox: y = 0 \end{cases}$.

Nhận thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên hàm số $y = f(x) + m$ cũng có hai điểm cực trị.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ với trục hoành:

$$f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có một nghiệm đơn.

Khi đó: $\begin{cases} -m \leq -3 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $g'(x) = (3x^2-6x) \cdot f'(x^3-3x^2+m)$

$$= (3x^2-6x) \cdot (x^3-3x^2+m-1)^2 (x^3-3x^2+m)(x^3-3x^2+m-2);$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=2 \\ x^3-3x^2=-m+1 & (1) \\ x^3-3x^2=-m & (2) \\ x^3-3x^2=-m+2 & (3) \end{cases}$$

Ta thấy (1), (2), (3) không thể có nghiệm chung và nghiệm của (1) nếu có sẽ là nghiệm kép (không được tính là điểm cực trị của hàm $g(x)$). Vì vậy, để hàm số $g(x)$ có 8 cực trị thì mỗi phương trình (2), (3) đều có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2 (*).

Xét hàm số $h(x) = x^3-3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $h'(x) = 3x^2-6x$; $h'(x) = 3x^2-6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$h'(x)$	+	0	-	0	+		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < -m < 0 \\ -4 < -m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ 2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 4$.

Vì m nguyên nên $m=3$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3[x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0}_{h(x)} & (*) \\ x = 1 \end{cases}.$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương ($x > 0$)

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \neq 1 & (1) \\ x_1 = 0 < x_2 \neq 1 & (2) \end{cases}.$$

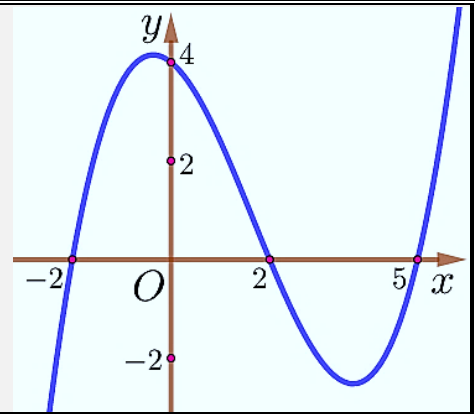
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ h(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ 1^2 + (4m-5) \cdot 1 + m^2 - 7m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \neq 1, m \neq 2 \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ x_2 = 5 - 4m; 0 < x_2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 = 0 \\ 0 < 5 - 4m \neq 1 \end{cases}; \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Do đó tập các giá trị nguyên m thỏa mãn là $\{3; 4; 5\}$.

Câu 42. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới đây. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x) + 4f(x) + 3m|$ có đúng 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 5050.
- B. 5049.**
- C. 5047.
- D. 5043.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $g(x) = f^2(x) + 4f(x) + 3m$ với $\Delta' = 4 - 3m$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x) + 4f'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot [f(x) + 2]; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases}.$$

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy: Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn x_1, x_2 ; phương trình $f(x) = -2$ có 3 nghiệm đơn x_3, x_4, x_5 . Các nghiệm x_i ($i = \overline{1, 5}$) khác nhau.

Ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị (1).

$$\text{Hơn nữa ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \text{ và } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có nhận định: $h(x) = |g(x)|$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}.$$

Hơn nữa, m nguyên thuộc $[-100; 100] \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; \dots; 100\}$.

Ta thấy có 99 giá trị m có thể nhận lập thành cấp số cộng với $u_1 = 2, d = 1$.

$$\text{Suy ra tổng các phần tử của } S \text{ là } 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{(100 + 2) \cdot 99}{2} = 5049.$$

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 43.** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị
 A. 1. B. 4. C. 0. D. 2.
- Câu 44.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?
 A. 5. B. 7. C. 6. D. 4.
- Câu 45.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.
 A. 16. B. 44. C. 26. D. 27.
- Câu 46.** Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là
 A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 47.** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là:
 A. $(0; 6)$. B. $(6; 33)$. C. $(1; 33)$. D. $(1; 6)$.
- Câu 48.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị?
 A. 3. B. 9. C. 6. D. 4.
- Câu 49.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?
 A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.
- Câu 50.** Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.
 A. 3. B. 0. C. 8. D. 6.
- Câu 51.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?
 A. 42. B. 21. C. 40. D. 20.

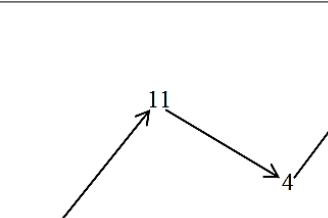
Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4; 11)$.

B. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.

C. $m = 3$.

D. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

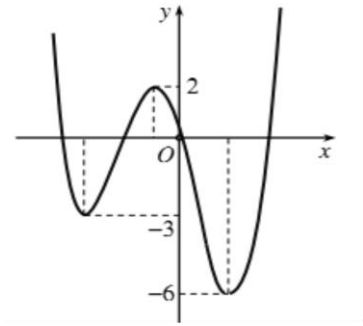
Câu 53. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15.

B. 18.

C. 9.

D. 12.



Câu 54. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

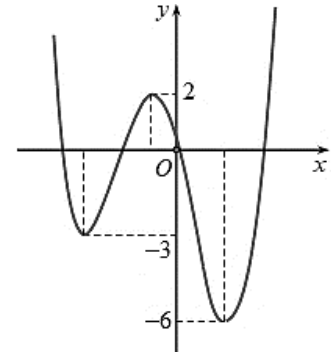
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9.

B. 12.

C. 18.

D. 15.



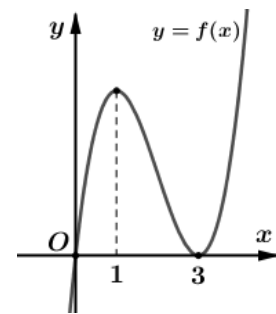
Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > 1$.

B. $m \geq \frac{1}{2}$.

C. $m \leq 2$.

D. $m > 2$.



Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

B. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

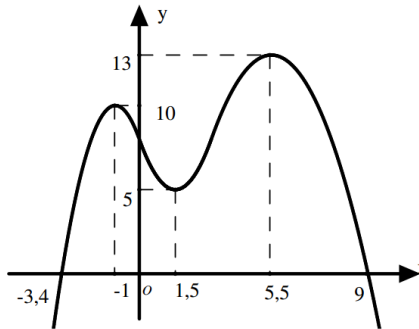
Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

- A. $\left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right] \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$.
 B. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{0; \frac{15}{13}\right\}$.
 C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \{0\}$.
 D. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15. B. 17. C. 16. D. 18.

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có đúng hai điểm cực trị.

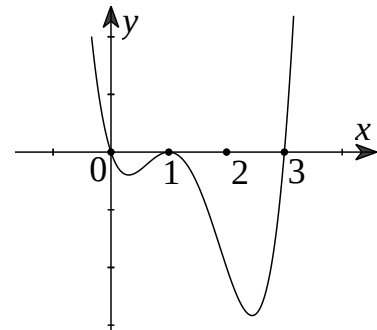


- A. 7. B. 8. C. 6. D. 5.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Tìm m để hàm số $y = f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \in (3; +\infty)$.
 B. $m \in [0; 3]$.
 C. $m \in [0; 3)$.
 D. $m \in (-\infty; 0)$.



Câu 61. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 18. B. 16. C. 17. D. 15.

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

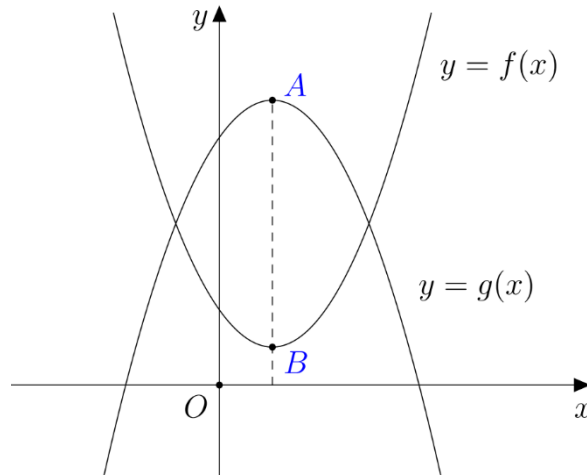
Câu 63. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $\frac{5}{4} < m \leq 2$. B. $-2 < m < \frac{5}{4}$. C. $-\frac{5}{4} < m < 2$. D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $|f(1 - 2025x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9. B. 2018. C. 2022. D. 11.

Câu 65. Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



- A. 1. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

- A. $M = 40$. B. $M = 11$. C. $M = 31$. D. $M = 45$.

Đáp án Dạng toán 1							11C	12A	13D
14C	15D	16A	17B	18B	19D	20D	21C	22D	23B
24B	25D	26B	27A	28A	29C	30A	31B	32B	33B

Đáp án Dạng toán 2					51D	52C	53C	54B
55C	56A	57C	58C	59B	60D	61A	62A	63D
64A	65C	66D	67A	68B	69B	70C	71D	72C
73A	74A	75A	76B	77C	78D	79C	80D	81B

Đáp án Dạng toán 3							93C	94A	95C
96A	97A	98A	99B	100C	101B	102A	103B	104B	105C

Đáp án Dạng toán 4			10A	11A	12C	13A	14A	15B	16A
17B	18C	19B	20C	21D	22B	23B	24A	25D	26A
27C	28B	29B	30A	31C	32C	33D	34A	35D	36B

Đáp án Dạng toán 5						43C	44C	45C	46B
47D	48B	49B	50C	51A	52B	53D	54B	55B	56C
57B	58A	59B	60C	61B	62C	63D	64A	65B	66D

BÀI 3. MAX-MIN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm $f(x)$ trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

Ký hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm $f(x)$ trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

Ký hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

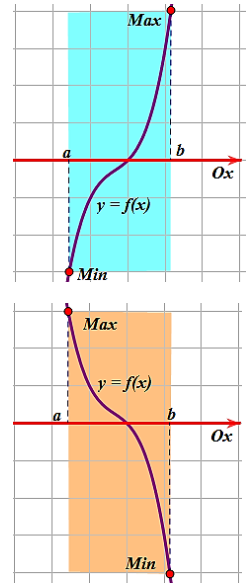
2. Các định lý:

- a) **Định lý 1:** Mọi hàm số liên tục trên một đoạn bất kỳ thì đều có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên đoạn đó.

b) **Định lý 2:**

- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b) \\ \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$
.

- Nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(a) \\ \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$
.



Dạng toán 1. Tìm GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$

☺ **Phương pháp:**

- **Bước 0:** Tìm tập xác định hàm số (nếu đề bài chưa cho trước đoạn cần tìm max-min).
- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$ và cho $f'(x) = 0$ để tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$, $i = 1, 2, \dots$
- **Bước 2:** Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị trong bước 2, kết luận về Max-Min của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

★ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt bằng bao nhiêu?
A. 28 và -4 . **B.** 25 và 0. **C.** 54 và 1. **D.** 36 và -5 .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 3]$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{nhận}) \\ x = -3 & (\text{loại}) \end{cases}$.

Ta có: $f(0) = 1$, $f(1) = -4$, $f(2) = 28$. Vậy $\begin{cases} \text{Max } f(x) = f(2) = 28 \\ \text{Min } f(x) = f(1) = -4 \end{cases}_{x \in [0; 3]}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$.
A. $\max_{[1; 2]} y = \frac{1}{2}$. **B.** $\max_{[1; 2]} y = -\frac{1}{2}$. **C.** $\max_{[1; 2]} y = -\frac{1}{3}$. **D.** $\max_{[1; 2]} y = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục $\forall x \neq -1$ nên cũng liên tục trên $[1; 2]$.

Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$, $\forall x \in [1; 2]$.

Ta có $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = 1$. Vậy $\max_{[1; 2]} y = y(2) = 1$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2-5}{x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\min_{x \in [0; 2]} y = -\frac{1}{3}$. **B.** $\min_{x \in [0; 2]} y = -\frac{5}{3}$.
C. $\min_{x \in [0; 2]} y = -2$. **D.** $\min_{x \in [0; 2]} y = -10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục $\forall x \neq -3$ nên cũng liên tục trên $[0; 2]$.

Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{loại}) \\ x = -5 & (\text{loại}) \end{cases}$.

Ta có: $y(0) = -\frac{5}{3}$, $y(2) = -\frac{1}{5}$. Vậy $\min_{x \in [0; 2]} y = -\frac{5}{3}$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{2-x^2} + x$.

A. $\begin{cases} \min_D y = -\sqrt{2} \\ \max_D y = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \min_D y = 0 \\ \max_D y = \sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} \min_D y = -\sqrt{3} \\ \max_D y = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \min_D y = -\sqrt{2} \\ \max_D y = \sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện xác định: $2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Tập xác định: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Đạo hàm: $y' = \frac{(2 - x^2)'}{2\sqrt{2 - x^2}} + 1 = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} + 1$.

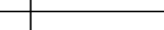
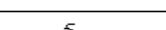
$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x + \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2 - x^2} = x \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1. \\ x \in D \end{cases}$

Ta có: $y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 2$, $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Vậy $\begin{cases} \min_D y = -\sqrt{2} \\ \max_D y = 2 \end{cases}$.

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ như hình. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm mệnh đề **đúng**?

- A. $M = f(-1)$.
B. $M = f(3)$.
C. $M = f(2)$.
D. $M = f(0)$.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0					

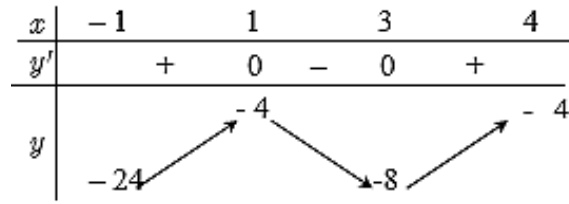
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ có bảng biến thiên như hình bên. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. -1.
D. 4.

x	-2	0	1	3						
y'		+	0	-		+				
y	-2			2			1			3

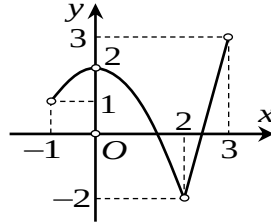
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 4]$ như hình dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. -4.
B. -28.
C. 20.
D. -20.



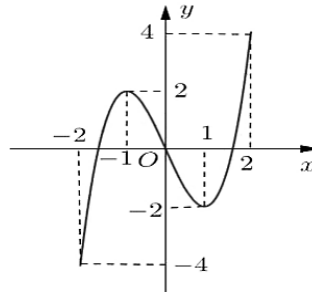
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0.
B. 1.
C. 4.
D. 5.



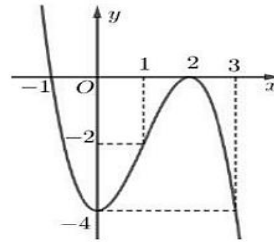
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0.
B. 8.
C. 4.
D. 2.



Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 4.
B. -6.
C. -2.
D. -4.



Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

- A. -36. B. $-14\sqrt{7}$. C. $14\sqrt{7}$. D. -34.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên $[0; 2]$.

- A. $\min y = 3$. B. $\min y = 0$. C. $\min y = 5$. D. $\min y = 7$.

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên $[0; 2]$.

- A. $\max f(x) = 0$. B. $\max f(x) = 1$.
C. $\max f(x) = 9$. D. $\max f(x) = 64$.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ bằng

- A. 9. B. $8\sqrt{3}$. C. 6. D. 1.

- Câu 15.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng
 A. 50. B. 5. C. 1. D. 122.
- Câu 16.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng
 A. 1. B. -1. C. $1/2$. D. $-1/2$.
- Câu 17.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng
 A. -5. B. $-1/3$. C. $1/3$. D. 5.
- Câu 18.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng
 A. 2. B. $\frac{11}{3}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $\frac{10}{3}$.
- Câu 19.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.
 A. $\frac{13}{2}$. B. 6. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{25}{4}$.
- Câu 20.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng
 A. $\frac{15}{2}$. B. 5. C. $\frac{29}{3}$. D. 3.
- Câu 21.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{4x - x^2}$ bằng
 A. 0. B. 1. C. 3. D. $2\sqrt{5}$.
- Câu 22.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng
 A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 23.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$ bằng
 A. $-2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{10}$. D. 2.
- Câu 24.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng
 A. $\sqrt{10}$. B. $-3\sqrt{10}$. C. $3\sqrt{10}$. D. 10.
- Câu 25.** Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$
 A. $T = [1; 9]$. B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$.
 C. $T = (1; 9)$. D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$.
- Câu 26.** Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.
 A. $S = -\frac{7}{2}$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. -3. D. $S = 4$.

Dạng toán 2. Tìm Max-Min của hàm số trên một khoảng, nửa khoảng

☺ **Phương pháp:**

- **Bước 0:** Tìm tập xác định (nếu đề bài chưa cho trước khoảng, nửa khoảng cần tìm max-min).
- **Bước 1:** Tìm đạo hàm của hàm số và tìm nghiệm (nếu có) của đạo hàm đó.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và kết luận về Max-Min hàm số.

✪ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 27. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m

A. $m = 5$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y				$+\infty$	4	$+\infty$

Ta có: $m = \min_{(1; +\infty)} y = 4$ khi $x = 3$.

Câu 28. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+5} - (x+1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{x^2+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)} = \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)} = 0 \Leftrightarrow 5-x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	-1	$\frac{\sqrt{30}}{5}$	1

Từ bảng biến thiên có $\max_{\mathbb{R}} y = y(5) = \frac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x = 5$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; 2)$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. -1.

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(1 - x^2)$ trên khoảng $(0; 1)$ là:

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. 0. D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. -3. D. -2.

Câu 32. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. 0. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 34. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 3]$.

- A. $\frac{3}{8}$. B. 3. C. $\frac{8}{3}$. D. 0.

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

- A. $\min_{(1; +\infty)} y = 3$. B. $\min_{(1; +\infty)} y = -1$. C. $\min_{(1; +\infty)} y = 5$. D. $\min_{(1; +\infty)} y = -\frac{7}{3}$.

Câu 36. Với giá trị nào của x thì hàm số $y = x^2 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. 1. D. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m . Tính giá trị biểu thức $P = M^2 + m^2$.

- A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. 2. D. 1.

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là

- A. 10. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 39. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 40. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khi đó, tích $m.M$ bằng bao nhiêu ?

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{10}{3}$. D. 1.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -\sqrt{5}$. B. $\max_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min_D f(x)$.
C. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -1$. D. $\min_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max_D f(x)$.

Câu 42. Một vật chuyển động theo quy luật $s = 3t^2 - t^3$. Thời điểm $t(s)$ tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

- A. $t = 5$. B. $t = 1$. C. $t = 2$. D. $t = 3$.

Dạng toán 3. Tìm tham số thỏa mãn điều kiện Max-Min cho trước

☺ Phương pháp:

- **Bước 0:** Tìm tập xác định hàm số (nếu đề bài chưa cho trước đoạn cần tìm max-min).
- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$ và cho $f'(x) = 0$ để tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$, $i = 1, 2, \dots$
Nếu x_i chứa tham số và chưa biết có thuộc $[a; b]$ hay không thì ta cần xét các trường hợp.
- **Bước 2:** Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị trong bước 2 để tìm Max-Min hàm số (theo tham số) rồi cho chúng thỏa mãn đề bài để suy ra tham số cần tìm.

✪ BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP

Câu 43. Tìm giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 1]$ bằng 0.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đạo hàm: $y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{loại}) \end{cases}$.

Ta có: $y(-1) = m - 2$, $y(0) = m$, $y(1) = m - 4$.

Dễ thấy $\min_{x \in [-1;1]} y = y(1) = m - 4$. Theo đề: $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 44. Hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -1 khi:

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ m = \sqrt{3} \end{cases}$.

C. $m = -2$.

D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \neq -1$ nên cũng xác định trên $[0;1]$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1+m^2}{x+1} > 0$, $\forall x \in [0;1] \Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$.

Ta có: $\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2$; theo đề: $-m^2 = -1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m < -1$.

B. $3 < m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $1 \leq m < 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số liên tục trên đoạn $[2;4]$. Ta có: $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$ (chưa biết dấu). Nếu $m = -1$ thì hàm số đã cho là hàm hằng với $y = 1$, $\forall x \neq 1$, không tồn tại $\min_{[2;4]} y = 3$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} y(2) > y(4) \\ \min_{[2;4]} y = y(4) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+m}{2-1} > \frac{4+m}{4-1} \\ \frac{4+m}{4-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > 3 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} y(2) < y(4) \\ \min_{[2;4]} y = y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+m}{2-1} < \frac{4+m}{4-1} \\ \frac{2+m}{2-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < \frac{5}{3} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

Câu 46. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là:

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 2\sqrt{2}$. C. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $m = -\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$. Vậy tập xác định: $D = [-2; 2]$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad y' = 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Ta có: $y(-2) = m - 2$, $y(\sqrt{2}) = m + 2\sqrt{2}$, $y(2) = m + 2$.

Do đó $\max_D y = m + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ luôn bé hơn 3.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (0; 1)$.
C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 3$.

☺ **Cách giải 1:**

Ta có $m > 0 \Rightarrow m + 1 > 1$; do đó trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ hàm số luôn đồng biến.

Khi đó GTNN: $\min_{[m+1; m+2]} y = y(m + 1) = (m + 1)^3 - 3(m + 1) + 1$.

$$\text{GTNN luôn bé hơn } 3 \Leftrightarrow (m + 1)^3 - 3(m + 1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 < 2 \\ m + 1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0; 1)$.

☺ **Cách giải 2:**

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	3	$+\infty$

Xét đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại hai điểm có hoành độ $-1; 2$.

$$\text{Yêu cầu bài toán trở thành } \begin{cases} m + 1 < 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

❖ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $m \leq 0$. B. $m > 4$.
C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 4$.

Câu 49. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;3]} y = -1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $m \leq 0$. B. $m > 10$. C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 8$.

Câu 50. Tìm các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên $[0;1]$ bằng -2 .

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 51. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ đạt giá trị lớn nhất trên $[2;4]$ bằng 2.

- A. $m = \frac{7}{6}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{3}{4}$.

Câu 52. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng 2.

- A. $m = \frac{7}{6}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{3}{4}$.

Câu 53. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$ bằng -6 . Tính tổng bình phương các phần tử của S .

- A. 5. B. 1. C. 8. D. 13.

Câu 54. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 .

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 56. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = \sqrt{3}$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Câu 57. Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = 7$. D. $m = 5$.

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 59. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 2 + \sqrt{2}$. C. $m = 4 + \sqrt{2}$. D. $\begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Câu 61. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $2025m_0 - m_0^2 \geq 2025$. B. $2m_0 - 1 < 0$.
C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Câu 62. Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 63. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < m \leq 2$. B. $4 < m \leq 8$. C. $2 < m \leq 4$. D. $m > 8$.

Câu 64. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

- A. 2. B. -2. C. -15. D. -17.

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 10. D. 2.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 67. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2028$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 2. B. 1. C. Vô số. D. 3.

Dạng toán 4. Tìm Max-Min cho bài toán thực tế

☺ **Phương pháp:**

- **Bước 1:** Lập ra hàm số $y = f(x)$ là hàm đặc trưng cho chi phí, lợi nhuận, quãng đường, diện tích, thể tích v.v...
- **Bước 2:** Khảo sát và tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của hàm số này tùy vào yêu cầu bài toán.

☞ **Công thức cho Bài toán Chuyển động :**

- Một vật chuyển động với quãng đường được tính theo công thức $S(t)$ (với t là thời gian), vật đó có vận tốc : $v(t) = S'(t)$.
- Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ sẽ có gia tốc là $a(t) = v'(t)$.

✦ **BÀI TẬP MINH HỌA PHƯƠNG PHÁP**

Câu 68. Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là $500\,000 \text{ đồng/m}^2$. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?

- A.** 1,08 triệu đồng.
C. 1,68 triệu đồng.

- B.** 0,91 triệu đồng.
D. 0,54 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x chiều rộng của đáy bể ($x > 0$).

Khi đó chiều dài của bể là $2x$.

Thể tích của bể: $V = 288 \text{ dm}^3 = 0,288 \text{ m}^3$,

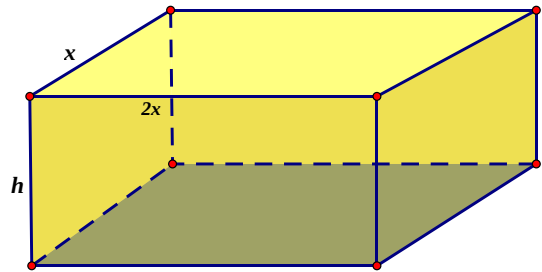
$$\text{mà } V = x \cdot 2x \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{2x^2} = \frac{0,288}{2x^2} = \frac{0,144}{x^2}.$$

Phần xây dựng của bể (trừ mặt trên của bể) có diện tích:

$$S = 2 \cdot hx + 2 \cdot h \cdot 2x + x \cdot 2x = 6hx + 2x^2 = 6 \cdot \frac{0,144}{x^2} \cdot x + 2x^2 = \frac{0,864}{x} + 2x^2.$$

Cách giải 1: Theo BĐT Cô-si, ta có: $S = \frac{0,432}{x} + \frac{0,432}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt{\frac{0,432}{x} \cdot \frac{0,432}{x} \cdot 2x^2} = \frac{54}{25}.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{0,432}{x} = \frac{0,432}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^3 = 0,432 \Leftrightarrow x = 0,6 \text{ m}$ (thỏa mãn).



Vậy $S_{\min} = \frac{54}{25} m^2 \Rightarrow$ Chi phí thấp nhất phải trả: $\frac{54}{25} \cdot 500\,000 = 1\,080\,000$ đồng.

Cách giải 2: Xét hàm số $S(x) = \frac{0,864}{x} + 2x^2, x > 0$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{0,864}{x^2} + 4x = \frac{4x^3 - 0,864}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 0,864 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ m}$.

Bảng biến thiên:

x		0	0,6	$+\infty$	
$S'(x)$			-	0	+
$S(x)$		$+\infty$		$\frac{54}{25}$	$+\infty$

Vậy $S_{\min} = \frac{54}{25} m^2 \Rightarrow$ Chi phí thấp nhất phải trả: $\frac{54}{25} \cdot 500\,000 = 1\,080\,000$ đồng.

Câu 69. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). D. 54 (m/s).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vận tốc chuyển động của vật: $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$.

Xét hàm $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in (0; 10)$. Ta có $v'(t) = -3t + 18$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

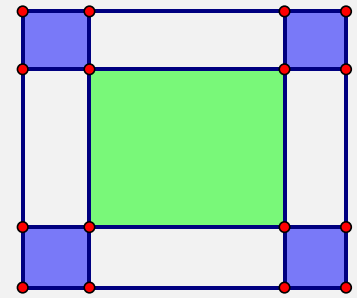
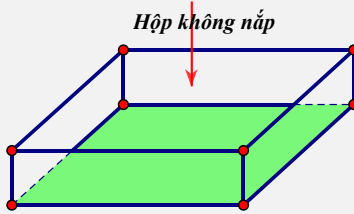
Bảng biến thiên:

t		0	6	10	
$v'(t)$			+	0	-
$v(t)$		0		54	30

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng 10 giây đầu là 54 m/s.

Câu 70. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 6$.
B. $x = 3$.
C. $x = 2$.
D. $x = 4$.



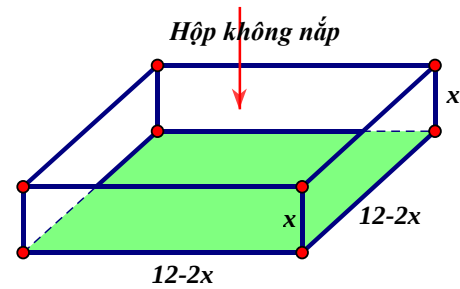
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta nhận thấy cạnh hình vuông nhỏ (màu đen): x (cm) chính là chiều cao của hình hộp được tạo thành.

Sau khi cắt bỏ đi các hình vuông nhỏ cạnh x thì đáy bây giờ là một hình vuông có cạnh $12 - 2x$ (cm).

Thể tích khối hộp là hàm số: $V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x$ với $0 < x < 6$. Lúc này ta có hai cách giải để tìm điều kiện của x cho thể tích V bé nhất.



☺ Cách giải 1: (Khảo sát hàm số).

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \text{ Đạo hàm: } V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhận}) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x		0	2	6	
$V'(x)$			+	0	-
V				128	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có kết luận:

Thể tích khối hộp lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2$ (cm).

☺ Cách giải 2: (Dùng bất đẳng thức).

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4(6 - x)^2 x = 2(6 - x)(6 - x) \cdot 2x.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương gồm: $6 - x$, $6 - x$, $2x$, ta có:

$$(6 - x) \cdot (6 - x) \cdot 2x \leq \left(\frac{6 - x + 6 - x + 2x}{3} \right)^3 = 4^3 = 64.$$

$V(x) = 2(6-x)(6-x).2x \leq 128$. Do đó thể tích khối hộp lớn nhất bằng 128 cm^3 , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $6-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

☆ **Nhắc lại:**

- **Bất đẳng thức Cô-si (góc)** dành cho hai (hoặc ba) số không âm:

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

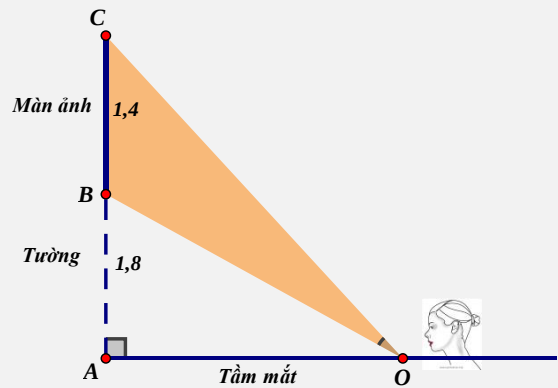
$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

- Từ **bất đẳng thức Cô-si (góc)**, ta dễ dàng chứng minh được các **bất đẳng thức ngược đầu** sau:

$$a.b \leq \frac{a^2+b^2}{2}; \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2; \quad abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}; \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ với } a, b, c \geq 0.$$

Câu 71. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4 \text{ m}$ được đặt ở độ cao $1,8 \text{ m}$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Một người muốn nhìn rõ màn ảnh nhất (góc nhìn lớn nhất) thì người đó phải đứng cách mặt phẳng chứa màn ảnh bao nhiêu mét? (độ dài OA bằng bao nhiêu?)

- A.** $2,4 \text{ m}$. **B.** $2,42 \text{ m}$.
C. $2,46 \text{ m}$. **D.** $2,21 \text{ m}$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x = OA$, $x > 0$, đây là khoảng cách từ mắt đến mặt phẳng chứa màn hình.

Ta có $BOC = AOC - AOB \Rightarrow \tan BOC = \tan AOC - \tan AOB = \frac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC \cdot \tan AOB}$

trong đó $\tan AOC = \frac{AC}{AO} = \frac{3,2}{x}$, $\tan AOB = \frac{AB}{AO} = \frac{1,8}{x}$.

$$\text{Vậy } \tan BOC = \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2}{x} \cdot \frac{1,8}{x}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{\frac{x^2 + 5,76}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

☺ Cách giải 1: Dùng phương pháp khảo sát hàm số

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$, $x > 0$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 8,064}{(x^2 + 5,76)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5,76 \Rightarrow x = 2,4.$$

Bảng biến thiên :

x	0	2,4	$+\infty$
$f'(x)$		0	—
$f(x)$		$\frac{7}{24}$	

Vậy để góc nhìn lớn nhất $BOC_{\max}$ thì $\tan BOC$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{7}{24}$. Dấu "=" đạt được khi $x = 2,4$ (mét).

☺ Cách giải 2: Dùng bất đẳng thức Cô-si

$$\text{Xét } f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}, x > 0.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương: $x^2 + 5,76 \geq 2\sqrt{5,76 \cdot x^2} = 4,8x$

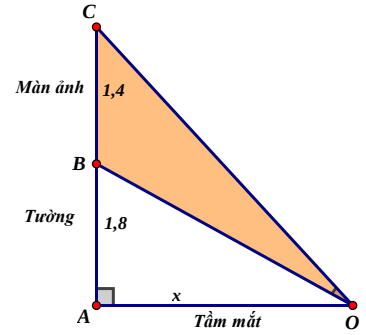
$$\Leftrightarrow \frac{1,4x}{x^2 + 5,76} \leq \frac{1,4x}{4,8x} = \frac{7}{24}. \text{ Suy ra } f(x) \leq \frac{7}{24}. \text{ Dấu "=" đạt được } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5,76 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,4 \text{ m.}$$

🔗 BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 72. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = 2$ (s). B. $t = 3$ (s). C. $t = 5$ (s). D. $t = 6$ (s).

Câu 73. Một vật chuyển động theo quy luật $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$ với t (giây) là khoảng thời gian kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động, S (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm t bằng bao nhiêu?



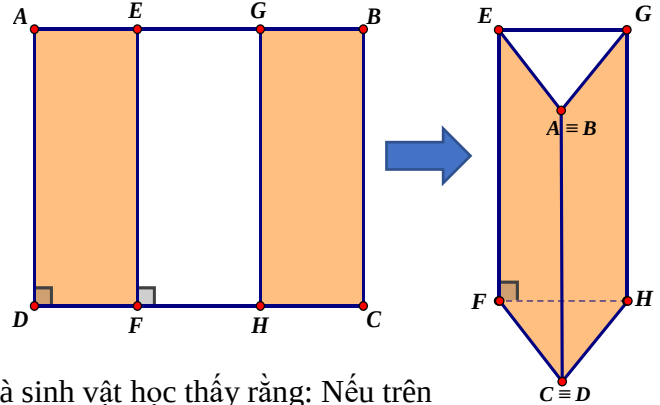
- A. $t=1$ (s). B. $t=16$ (s). C. $t=5$ (s). D. $t=3$ (s).

Câu 74. Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích S , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{S}$. B. $2\sqrt{S}$. C. $4\sqrt{S}$. D. $6\sqrt{S}$.

Câu 75. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 (cm). Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là

- A. $x=5$ (cm). B. $x=9$ (cm).
C. $x=8$ (cm). D. $x=10$ (cm).



Câu 76. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch cá đạt được tổng khối lượng lớn nhất?

- A. $n=12$. B. $n=6$. C. $n=8$. D. $n=24$.

Câu 77. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

- A. $x=30$ (mg). B. $x=20$ (mg). C. $x=10$ (mg). D. $x=15$ (mg).

Câu 78. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ

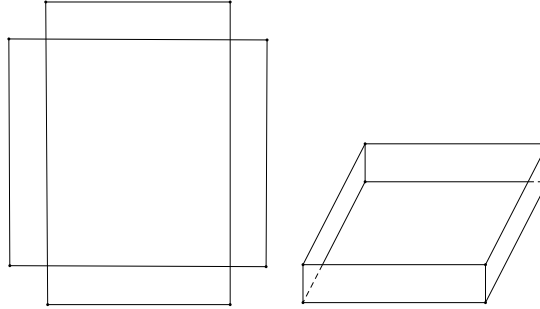
thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

Câu 79. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc của cá bơi khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

- A. 6 (km/h). B. 5 (km/h). C. 9 (km/h). D. 8 (km/h).

Câu 80. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 10cm và chiều rộng bằng 8cm. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



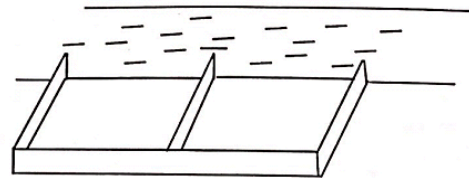
A. $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$.

B. $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$.

C. $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}$.

D. $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$.

Câu 81. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



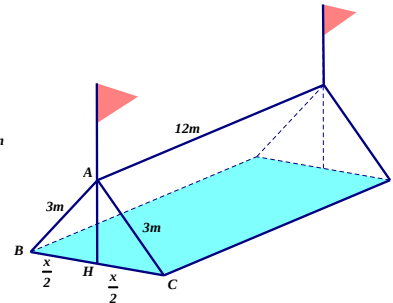
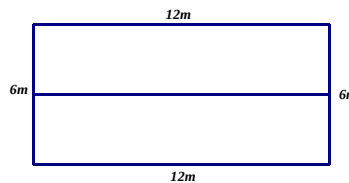
A. $3125m^2$.

B. $50m^2$.

C. $1250m^2$.

D. $6250m^2$.

Câu 82. Từ một tấm bạt hình chữ nhật có kích thước $12m \times 6m$ như hình vẽ. Một nhóm học sinh trong quá trình đi dã ngoại đã gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm 2 cạnh là chỉ rộng của tấm bạt sao cho 2 mép chiều dài của tấm bạt sát đất và cách nhau x (m) (như hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



A. $x = 4$.

B. $x = 3\sqrt{3}$.

C. $x = 3$.

D. $x = 3\sqrt{2}$.

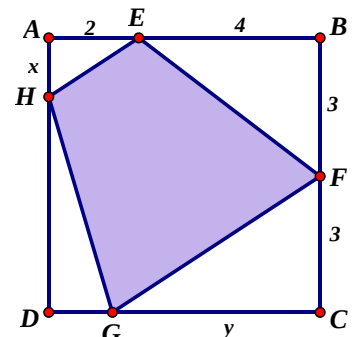
Câu 83. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ trong đó $AH = x$, $AE = 2$, $CG = y$, $CF = 3$. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x + y = 7$.

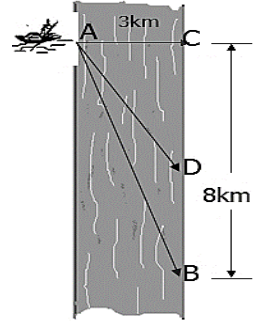
B. $x + y = 5$.

C. $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

D. $x + y = 4\sqrt{2}$.

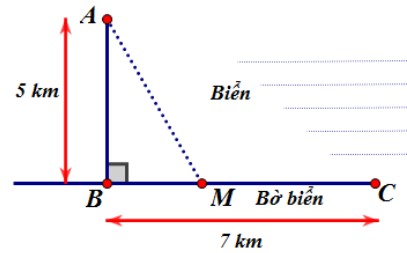


Câu 84. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.
C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$. D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Câu 85. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng nhất với giá trị nào nhất để người đó đến kho nhanh nhất?

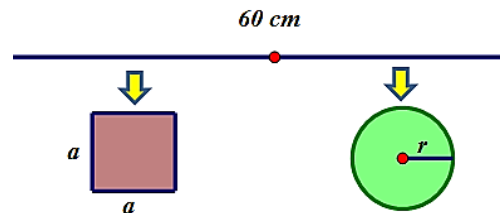


- A. 3,0 km. B. 7,0 km.
C. 4,5 km. D. 2,1 km.

Câu 86. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 87. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:

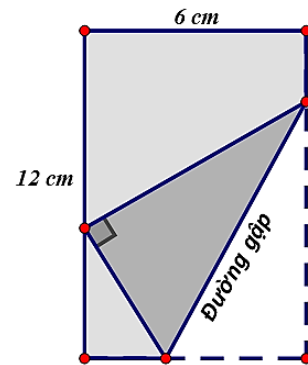


- A. $\frac{a}{r} = 1$. B. $\frac{a}{r} = 2$.
C. $\frac{a}{r} = 3$. D. $\frac{a}{r} = 4$.

GIẢI TÍCH 12 – MAX-MIN CỦA HÀM SỐ

Câu 88. Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12 cm và chiều rộng 6 cm . Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?

- A. $\min L = 6\sqrt{2}\text{ cm}$. B. $\min L = \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$.
C. $\min L = \frac{7\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$. D. $\min L = 9\sqrt{2}\text{ cm}$.



Đáp án Dạng toán 1								5D	6A
7B	8D	9B	10D	11B	12A	13C	14C	15A	16B
17C	18D	19B	20B	21C	22C	23D	24B	25B	26A

Đáp án Dạng toán 2						29D	30D	31C	32A
33B	34C	35A	36D	37B	38D	39B	40D	41A	42B

Đáp án Dạng toán 3					48B	49C	50B	51D
52B	53C	54B	55C	56D	57C	58D	59C	59C
60C	61A	62C	63C	64C	65A	66A	67D	67D

Đáp án Dạng toán 4			72A	73A	74C	75D	76A	77B	78B
79C	80D	81D	82B	83C	84D	85C	86B	87B	88B

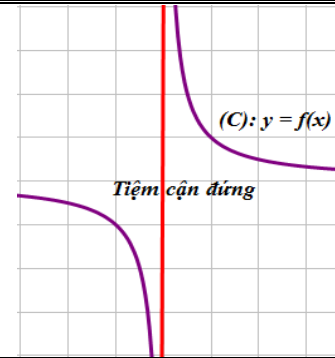
ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

BÀI 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận đứng:

Đường thẳng $x = x_0$ (x_0 là hằng số) được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị $(C): y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

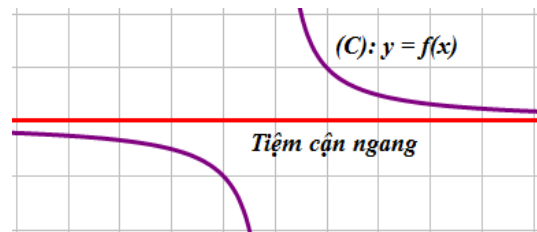
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.



2. Đường tiệm cận ngang:

Đường thẳng $y = y_0$ (y_0 là hằng số) được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị $(C): y = f(x)$ nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



✎ **Nhận xét:** Mỗi đồ thị hàm số sẽ có tối đa hai đường tiệm cận ngang.

DẠNG TOÁN 1. TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

✪ Phương pháp tìm tiệm cận ngang:

☺ Cách giải 1:

So sánh bậc tử và bậc mẫu của hàm phân thức hữu tỉ, ta làm như sau:

- Nếu **bậc tử** < **bậc mẫu** thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Nếu **bậc tử** = **bậc mẫu** thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số lũy thừa cao nhất của tử}}{\text{Hệ số lũy thừa cao nhất của mẫu}} = y_0$ nên đồ thị có đường tiệm cận ngang là $y = y_0$.
- Nếu **bậc tử** > **bậc mẫu** thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \infty$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

☺ Cách giải 2:

- Tính các giới hạn hàm số tại âm, dương vô cực và kết luận về tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Có thể tham khảo thêm việc sử dụng máy tính cầm tay để tìm các $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ như sau:

Nhập hàm số vào máy và nhấn $CALC \rightarrow 10^{10} \rightarrow \boxed{=}$ (ứng với $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$) và nhấn tiếp $CALC \rightarrow -10^{10} \rightarrow \boxed{=}$ (ứng với $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$).

★ Phương pháp tìm tiệm cận đứng:

- **Bước 1: Rút gọn** phân thức đại số (nếu có thể).
- **Bước 2:** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị bằng cách **cho mẫu số bằng 0** và tìm nghiệm (không cần thử lại).

🔑 Lưu ý:

➤ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận khi và chỉ khi $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} (*)$.

➤ Khi hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đã thỏa mãn (*) thì đồ thị hàm số có **tiệm cận ngang** $y = \frac{a}{c}$ và

tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$. **Tâm đối xứng** của đồ thị là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x = -2$ và $y = -3$.

B. $x = -2$ và $y = 1$.

C. $x = -2$ và $y = 3$.

D. $x = 2$ và $y = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tiệm cận đứng đồ thị hàm số: $x = -\frac{d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$.

Tiệm cận ngang đồ thị hàm số: $y = \frac{a}{c} = \frac{-3}{1} = -3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{-3x+5}{-2x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có các đường tiệm cận đứng là

$x = m$ và tiệm cận ngang là $y = n$. Tính biểu thức $T = m^2 + n^2$.

A. $\frac{13}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{17}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị: $x = -\frac{d}{c} = \frac{1}{2}$, tiệm cận ngang của đồ thị: $y = \frac{a}{c} = \frac{3}{2}$.

$$\text{Do đó } T = m^2 + n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 3. Tìm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là

- A. $y=1$. B. $y=4$. C. $y=-1$. D. $y=-4$.

Câu 4. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là

- A. $x=1$. B. $y=2$. C. $y=-1$. D. $x=-1$.

Câu 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ là

- A. $x=1$. B. $y=1$. C. $y=0$. D. $x=0$.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{4-x}$ là:

- A. $y=2$. B. $y = \frac{3}{4}$. C. $y=-3$. D. $x=-3$.

Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ là:

- A. $y=1$. B. $x=1$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $y = \frac{1}{2}$.

Câu 8. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y = \frac{x+1}{2-x}$ lần lượt là

- A. $x=2$; $y=-1$. B. $x=-2$; $y=1$. C. $x=1$; $y=2$. D. $x=2$; $y=1$.

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây nhận đường thẳng $y=-1$ làm tiệm cận ngang?

- A. $y = x^4 - x^2 + 2$. B. $y = \frac{x+1}{2+x}$. C. $y = -x^3 + 3x - 1$. D. $y = \frac{x-2}{1-x}$.

Câu 10. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{1-2x}$ là đường thẳng

- A. $y=5$. B. $y = -\frac{5}{2}$. C. $y=0$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	1	$+\infty$	1

Trong các mệnh đề sau về hàm số $y = f(x)$, mệnh đề nào đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$. B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số có một điểm cực trị.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-4}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tương ứng là $x=a$, $y=b$.

Khi đó $a.b$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 13. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

Câu 14. Tọa độ tâm đối xứng của thị hàm số $y = \frac{-2x-1}{x-2}$ là

A. $(-2; 2)$.

B. $(2; 2)$.

C. $(-2; -2)$.

D. $(2; -2)$.

Câu 15. Tọa độ tâm đối xứng I của thị hàm số $y = \frac{3x-1}{2x+3}$ là

A. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B. $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

D. $I(1; 3)$.

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 16. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

✎ **Nhận xét:**

- Hàm số phân thức trên đã được rút gọn (chuẩn thức) nên ta chỉ cần cho mẫu số bằng 0 để tìm các nghiệm x_i (nếu có), các nghiệm này chính là các đường tiệm cận đứng của đồ thị.
- Mặt khác vì bậc tử (bậc I) bé hơn bậc mẫu (bậc II) nên đồ thị luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét mẫu bằng 0, ta có: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$. Tiệm cận đứng đồ thị: $x=1$, $x=2$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$. Tiệm cận ngang đồ thị: $y = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$ (1). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận đứng là $x=2$, $x=-2$.

C. Đồ thị hàm số (1) có có tất cả ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số (1) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Nhận xét:

- Ta thấy nghiệm của mẫu $\{\pm 2\}$ và nghiệm của tử $\left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$ có số 2 là phần tử chung nên hàm số đã cho chưa được chuẩn thức. Ta cần rút gọn trước khi tìm tiệm cận đứng.
- Bậc tử và bậc mẫu của phân thức là bằng nhau (cùng bậc II) nên tiệm cận ngang của đồ thị là $y = \frac{2}{1} = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{2(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x+3}{x+2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -2, y = 2$.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+3)(x^3 - x^2 + x - 1)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+3)(x^3 - x^2 + x - 1)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Xét mẫu số bằng 0 thì $x^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm). Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. Vì bậc tử bé hơn bậc mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$; suy ra tiệm cận ngang của đồ thị là $y = 0$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 19. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 20. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2024x - 2025}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Câu 21. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$.

A. $x = 1$.

B. $x = 1$ và $x = 3$.

C. $x = 3$.

D. $y = 1$.

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x^2 + 4x + 4}$ có tiệm cận đứng $x = a$ và tiệm cận ngang $y = b$. Tính

$S = a + 2b$.

A. $S = -2$.

B. $S = 2$.

C. $S = -4$.

D. $S = 4$.

Câu 23. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$ là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x^3-3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x^2-1}{x(x^2-2x-3)}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là bao nhiêu ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 27. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?

- A. $y = \frac{x}{x^2-x+9}$. B. $y = \frac{1-2x}{1+x}$. C. $y = \frac{x+3}{5x-1}$. D. $y = \frac{1}{4-x^2}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x-9x^4}{(3x^2-3)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -1$.
B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -3$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

DẠNG TOÁN 2. TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA CĂN

★ Phương pháp tìm tiệm cận ngang:

Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (nếu có).

★ Phương pháp tìm tiệm cận đứng:

- Bước 1:** Cho mẫu bằng 0 và giải tìm nghiệm x_i của mẫu (nếu có).
- Bước 2:** Kiểm tra xem có nghiệm x_i nào của mẫu có trùng với nghiệm tử hay không bằng cách thay lần lượt các nghiệm x_i vào tử số xem tử có bằng 0 hay không.

Trường hợp 1: Không có nghiệm x_i nào làm cho tử bằng 0.

– Nếu thay x_1 vào làm cho tử khác 0 thì kết luận $x = x_1$ là một đường tiệm cận đứng.

– Nếu thay x_2 vào mà tử xuất hiện **MATH ERROR** thì loại $x = x_2$.

Trường hợp 2: Có một nghiệm x_i nào đó làm cho tử bằng 0.

- Nhân lượng liên hợp cho phân thức hoặc áp dụng $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$; $a+b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$.
- Đưa thừa số vào căn theo công thức $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & \text{khi } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.
- Kiểm tra lại phân thức sau khi rút gọn xem nghiệm nào trong số x_i đã bị loại, các nghiệm còn lại của x_i là các đường tiệm cận đứng của đồ thị.

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 30. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $x=1$.

B. $y = \pm 1$.

C. $y=1$.

D. $y=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tự luận.**

Vì tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

☺ **Cách giải 2 (tham khảo thêm): Phương pháp trắc nghiệm.**

Nhập vào máy tính bỏ túi như sau:

$$\frac{X+3}{\sqrt{X^2+1}} \xrightarrow{\text{NEXT}} \boxed{\text{CALC}} \xrightarrow{\text{NEXT}} \boxed{10 \wedge 10} \quad (\text{nghĩa là thay } x \text{ bởi một số vô cùng lớn}).$$

Kết quả hiển thị là $\boxed{1}$, tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$.

Tương tự, nhập: $\frac{X+3}{\sqrt{X^2+1}} \xrightarrow{\text{NEXT}} \boxed{\text{CALC}} \xrightarrow{\text{NEXT}} \boxed{-10 \wedge 10}$ (nghĩa là thay x bởi một số vô cùng bé).

Kết quả hiển thị $\boxed{-0,9999999998}$. Số này gần bằng -1 . Ta hiểu $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$.

Câu 31. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x = -3$. và $x = -2$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3$. và $x = 2$.

D. $x = 3$.

Trích từ Đề Minh họa lần 2 năm 2017 – Bộ GD&ĐT

✎ **Nhận xét:** Nghiệm của mẫu là $x = 2, x = 3$; trong đó $x = 2$ cũng là nghiệm của tử số (thay vào làm cho tử số bằng 0), vì vậy ta cần nhân lượng liên hợp trước khi tìm tiệm cận đứng của đồ thị.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-2)(x-3)} = \frac{3x^2-5x-2}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-2)(x-3)} = \frac{3x+1}{(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})(x-3)}. \end{aligned}$$

Ta thấy trong hai nghiệm ban đầu $x = 2, x = 3$ thì nghiệm $x = 2$ bị loại (đã bị rút gọn-không là tiệm cận đứng đồ thị), nên đồ thị chỉ còn tiệm cận đứng $x = 3$.

Câu 32. Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2x+1}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

✎ **Nhận xét:**

– Trong hầu hết bài toán, ta nên tìm tiệm cận ngang của đồ thị trước tiệm cận đứng vì việc tìm tiệm cận ngang đơn giản hơn.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

▣ **Tìm tiệm cận ngang:**

☺ **Cách giải 1:**

Bậc của tử là bậc của $\sqrt{x}$, tức là bậc $\frac{1}{2}$; bậc của mẫu là bậc 2. Vì bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu và hàm số tồn tại giới hạn dương vô cực nên đồ thị luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Nói cách khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-2}{x^2+x} = 0$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$.

☺ **Cách giải 2:**

Nhập hàm số vào máy tính: $\frac{\sqrt{2X+1}-2}{X^2+X}$; nhấn **CALC** $X = 10^{10}$ ($x \rightarrow +\infty$) thu được

$1,41 \times 10^{-15} \approx 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-2}{x^2+x} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Nhấn tiếp **CALC** $X = -10^{10}$ ($x \rightarrow -\infty$) thu được **MATH ERROR** nên giới hạn âm vô cực của hàm số không tồn tại. Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang $y = 0$.

▣ **Tìm tiệm cận đứng:**

$$\text{Xét mẫu bằng } 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

✎ **Nhận xét:** Không có nghiệm nào trùng nghiệm tử (thay vào tử để biết) nên ta không nhân lượng liên hợp.

• Thay $x = 0$ vào tử, ta có $\underbrace{(\sqrt{2x+1}-2)}_{x=0} = -1 \neq 0$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

• Thay $x = -1$ vào tử, ta được **MATH ERROR** nên $x = -1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bậc tử là bậc 1 (bậc của $5x$), bé hơn bậc mẫu (bậc 2) nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Vì nghiệm của mẫu là $\{0; 2\}$ trong đó $x = 0$ cũng là nghiệm của tử nên ta cần nhân liên hợp cho

$$\begin{aligned} \text{hàm số. Ta được: } y &= \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = \frac{(5x+1)^2 - (x+1)}{(5x+1+\sqrt{x+1})x(x-2)} \\ &= \frac{25x^2+9x}{(5x+1+\sqrt{x+1})x(x-2)} = \frac{25x+9}{(5x+1+\sqrt{x+1})(x-2)}. \end{aligned}$$

Ta thấy chỉ còn $x = 2$ thỏa mãn là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 34. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3}; \text{ do đó } y = -\frac{1}{3} \text{ là}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Xét mẫu bằng } 0 \text{ thì } 4\sqrt{3x+1} = 3x+5 \Rightarrow \begin{cases} 3x+5 \geq 0 \\ 16(3x+1) = 9x^2+30x+25 \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ (trùng nghiệm tử).}$$

$$\text{Ta cần nhân liên hợp cho hàm số: } y = \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{16(3x+1)-(3x+5)^2} = \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9x^2+18x-9}$$

$$y = \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}.$$

Dễ thấy $x=1$ là tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 36. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là bao nhiêu ?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 37. Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

- A. $y = -1$. B. $y = 1$. C. $y = 1, y = -1$. D. $y = 0$.

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-9}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \pm 3$.
B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Câu 42. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 43. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 44. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 45. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2}$ là?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 46. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

- A. $n=0, d=2$. B. $n=d=1$. C. $n=1, d=2$. D. $n=0, d=1$.

Câu 47. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 48. Hàm số $y = \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m+n$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 50. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 51. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x=3$ và $x=2$. B. $x=3$. C. $x=-3$ và $x=-2$. D. $x=-3$.

Câu 52. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 53. Cho hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 54. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}$

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 55. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|-1}$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

DẠNG TOÁN 3. TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM ẨN

★ **PHƯƠNG PHÁP:**

- Theo bảng biến thiên, nếu có $\begin{cases} x \rightarrow \text{hằng số} \\ y \rightarrow \infty \end{cases}$ (*) thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = \text{hằng số}$.

(Lưu ý nếu giới hạn một bên tại x_0 thỏa (*) thì ta không cần xét giới hạn bên còn lại).

- Theo bảng biến thiên, nếu có $\begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \text{hằng số} \end{cases}$ thì đồ thị có tiệm cận ngang $y = \text{hằng số}$.

(Lưu ý khi tìm tiệm cận ngang của đồ thị, ta luôn xét đủ cả hai giới hạn khi x tiến về âm, dương vô cực).

★ **BÀI TẬP MINH HỌA**

Câu 56. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$-$	$+$	
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -1 \end{cases}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận ngang $y = -4$; $y = -1$.

$\begin{cases} x \rightarrow -1^- \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$ (lúc này không cần xét giới hạn khi $x \rightarrow -1^+$ nữa);

$\begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2 \end{cases}$ (not); $\begin{cases} x \rightarrow 1^- \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ (lúc này không cần xét giới hạn khi

$x \rightarrow 1^+$ nữa). Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $x = 1$; $x = -1$.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	
y	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ (not) và $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ nên đồ thị có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Mặt khác: $\begin{cases} x \rightarrow -2^+ \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$ và $\begin{cases} x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ nên $x = -2$; $x = 0$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

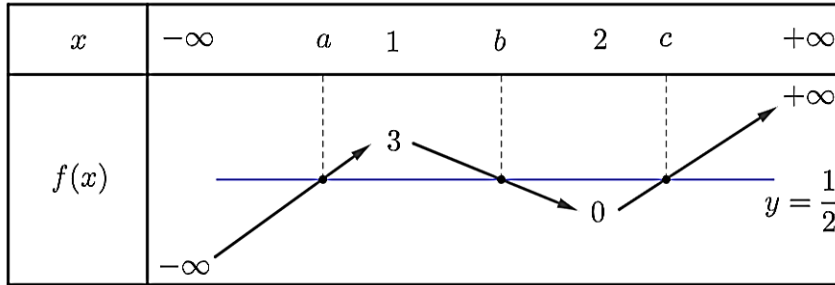
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $f(x) \rightarrow +\infty$; suy ra $y = \frac{1}{2f(x)-1} \rightarrow 0$ (do mẫu tiến về vô cùng), hay $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $f(x) \rightarrow -\infty$; suy ra $y = \frac{1}{2f(x)-1} \rightarrow 0$ (do mẫu tiến về vô cùng), hay $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ (đã kết luận).

Xét mẫu bằng 0 thì $2f(x)-1=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow x=a \vee x=b \vee x=c$ (a, b, c phân biệt).



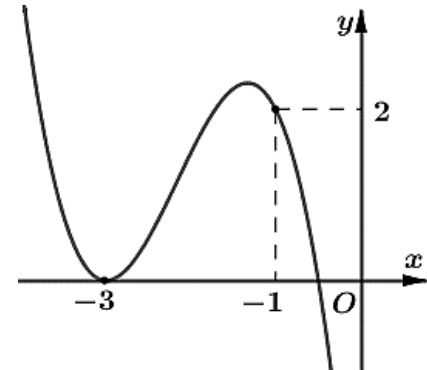
Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

Câu 59. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu

đường tiệm cận đứng ?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.**
- D. 6.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} (*)$.

Xét: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}; x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \end{cases}$.

Trong đó $x = -3$ là nghiệm kép, suy ra: $f(x) = k_1(x+3)^2(x-x_1)$.

Tương tự: $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_2 < -1 \Rightarrow f(x) - 2 = k_2(x+1)(x-x_2)(x-x_3) \\ x = x_3 < -1 \end{cases}$.

Khi đó: $y = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.k_1(x+3)^2(x-x_1).k_2(x+1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{k_1.k_2.x(x+3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Vậy đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận đứng $x = 0, x = -3, x = x_2, x = x_3$.

(Chú ý rằng $x = x_1 \in (-1; 0)$ bị loại bởi điều kiện (*)).

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+	+
$f(x)$	-3	1	$+\infty$	$+\infty$	3

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	+		-	-
y	$-\infty$	$+\infty$	1	0

- A.1. B. 3. C.2. D.4.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'	-		-	-
y	5	4	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

GIẢI TÍCH 12 – TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-
$f(x)$	3	$-\infty$	4	2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'	-	-	-	-
y	5	4	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+	+	+	+
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2 - 2026 f(x)$.

- A. $y = -2026$. B. $y = 2028$. C. $y = 2026$. D. $y = -2028$.

Câu 68. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$?

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

GIẢI TÍCH 12 – TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2030}{f(x)}$ là

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như sau:
Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 7.

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	2	$+\infty$	-2

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

GIẢI TÍCH 12 – TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$	10

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$.

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 77. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ

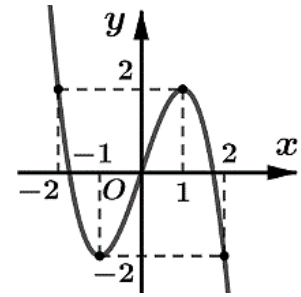
thị hàm số $y = \frac{x+2}{f(x)+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ

dưới đây, đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$

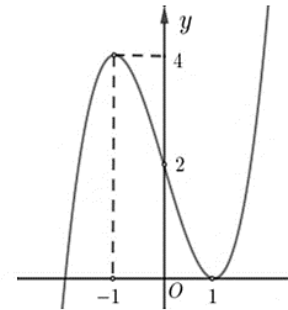
có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

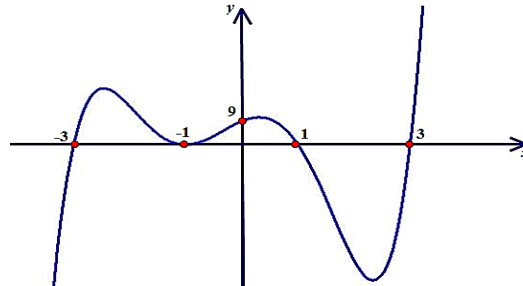
D. 2.



Câu 79. Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như

hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu

đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



A. 3.

B. 4.

C. 9.

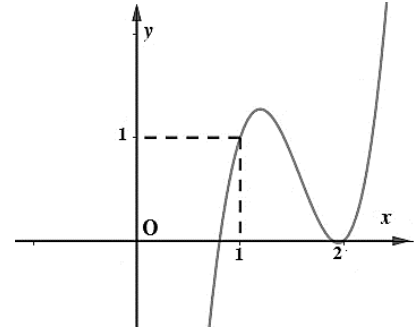
D. 8.

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình

vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao

nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 5.



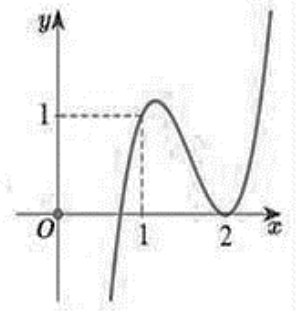
Câu 81. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình

vẽ sau.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận

đứng?

- A. 5.
B. 4.
C. 6.
D. 3.

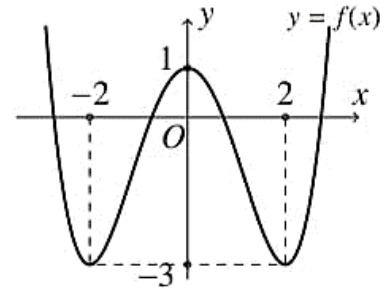


Câu 82. Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như

hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng

cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 5.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

- A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 1.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Số tiệm cận của hàm số $h(x) = \frac{\sqrt{5}}{f(x)} + \frac{2025\sqrt{x+1}}{x^2 + 15}$ là

- A. 1.
B. 4.
C. 3.
D. 2.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ và đạt cực tiểu tại

$x = -2$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{f(x)}-f(1)}$

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 86. Cho đồ thị hàm bậc bốn $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị

hàm số $y = \frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{[f^2(x)-2f(x)](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao

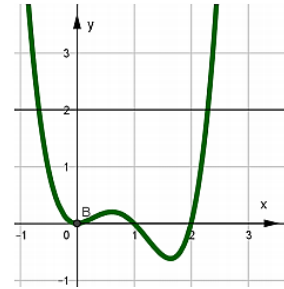
nhiều tiệm cận đứng và ngang?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.



DẠNG TOÁN 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM CÓ CHỨA THAM SỐ

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 87. Cho hàm số $y = \frac{(m^2+m-3)x+m-3}{mx+1}$ biết đồ thị hàm số này có tiệm cận ngang đi qua điểm $A(2025; -1)$. Tìm tất cả tham số m nguyên thỏa mãn điều kiện trên.

A. $m = 1$.

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cần nhớ, điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận là $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad \neq bc \end{cases}$.

Áp dụng vào hàm số trên, ta có điều kiện: $\begin{cases} m \neq 0 \\ m^2+m-3 \neq m(m-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases}$.

Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị: $y = \frac{a}{c} = \frac{m^2+m-3}{m}$. Đường thẳng này đi qua

$A(2025; -1)$ nên $\frac{m^2+m-3}{m} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Câu 88. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$?

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận khi và chỉ khi $\begin{cases} c = 2 \neq 0 \\ ad - bc = m^2 + 2 > 0 \end{cases}$ (đúng $\forall m \in \mathbb{R}$).

Tiệm cận đứng của đồ thị: $x = -\frac{m}{2}$. Đường thẳng này qua $M(-1; \sqrt{2})$ suy ra $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 89. Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = 0; m = \pm 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Xét $m = 0$. Hàm số trở thành $y = -x$ nên đồ thị không có đường tiệm cận đứng.

Xét $m \neq 0$. Khi đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow -1 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $m = 0; m = \pm 1$.

Câu 90. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-mx-2}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là:

A. $m \neq -1$.

B. $m = -1$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-mx-2}$ có 2 đường tiệm cận đứng thì $g(x) = x^2 - mx - 2 = 0$ có hai

nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = m^2 + 8 > 0 \\ g(1) = 1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -1$.

Câu 91. Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x^2-3x}$ (1). Tìm tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận đứng.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \neq 3$.

C. $m \neq \frac{1}{3}$.

D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét mẫu bằng 0 thì $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{x^2-3x}$ có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình: $mx - 1 = 0$ không

nhận $x = 0$ và $x = 3$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 0 - 1 \neq 0 \\ m \cdot 3 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Câu 92. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2$ (không thỏa mãn).

Với $m \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó ta cần tìm m để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng. Khi đó $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

- $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1-4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.
- $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0. \text{ Vậy có hai giá trị của } m \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

Câu 93. Tìm tất cả tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

- A.** Không có m thỏa mãn. **B.** $m < 0$.
C. $m = 0$. **D.** $m > 0$.

Trích đề Minh họa lần 1 năm 2017 – Bộ GD&ĐT

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $mx^2+1 \geq 0$. (*)

Nếu $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = x+1$, đồ thị hàm này không có tiệm cận ngang.

Nếu $m < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại (do điều kiện (*) không được thỏa mãn).

Nếu $m > 0$ thì: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Điều này đồng nghĩa việc đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Câu 94. Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$$
 có đúng hai đường tiệm cận?

A. 200. **B.** 2. **C.** 199. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq m \\ x \in (0; 2) \end{cases}$. Hàm số không tồn tại giới hạn tại vô cực đồ thị không có tiệm cận ngang.

Xét mẫu bằng 0 thì $\begin{cases} x-m=0 \\ \sqrt{2x-x^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=m \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Suy ra $x=0, x=2$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, mà m nguyên thuộc $[-100;100]$ nên có 200 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị

thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $f(x) \rightarrow m$; suy ra $y = \frac{1}{f(x)+2} \rightarrow \frac{1}{m+2}$ hay $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = \frac{1}{m+2}$.

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $f(x) \rightarrow -1$; suy ra $y = \frac{1}{f(x)+2} \rightarrow \frac{1}{-1+2}$ hay $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$.

Đồ thị có một tiệm cận ngang khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{m+2} = 1 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m-x-1}}$ có đúng

bốn đường tiệm cận.

A. $m \in [-5;4] \setminus \{-4\}$.

B. $m \in [-5;4]$.

C. $m \in (-5;4) \setminus \{-4\}$.

D. $m \in (-5;4] \setminus \{-4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{2 - \frac{2}{x} - \frac{m}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2};$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{2 - \frac{2}{x} - \frac{m}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{-\sqrt{2} - 1} = 1 - \sqrt{2}.$ Do đó đồ thị hàm số có **hai đường**

tiệm cận ngang là $y = 1 + \sqrt{2}$ và $y = 1 - \sqrt{2}$. Vì vậy ta cần tìm m để đồ thị hàm số đã cho có **hai đường tiệm cận đứng**.

Khi tìm tiệm cận đứng, ta xét: $\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x - m} = x + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - 2x - m = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - 1 = m \quad (*) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} \geq -1$ và khác 1 (không trùng nghiệm của tử số).

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x - 1$ với $x \geq -1$ và $x \neq 1$. Ta có: $g'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	x_1	1	2	x_2	$+\infty$
$g'(x)$				-	0	+	
$g(x)$		4		-4	-5		$+\infty$

$g(x) = m$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m \in (-5; 4] \setminus \{-4\}$.

✪ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 97. Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5; 2)$.

- A. $m = -4$. B. $m = -1$. C. $m = 6$. D. $m = 4$.

Câu 98. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 99. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm $S = a + b$ để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A. $S = -3$. B. $S = 3$. C. $S = 1$. D. $S = 8$.

Câu 100. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x=1$, tiệm cận ngang là đường $y=1$.

- A. $m=1$. B. $m=2$. C. $m=-1$. D. $m=3$.

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy .

- A. $m=0$. B. $m<0$. C. $m>0$. D. $m \neq 0$.

Câu 102. Xác định hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ và đồ thị có giao điểm hai đường tiệm cận là $I(1;-1)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x-2}{-x-2}$. C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. D. $y = \frac{x+1}{1-x}$.

Câu 103. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và M là điểm bất kì thuộc (C) . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang. Tính tích $d_1 d_2$.

- A. $d_1 d_2 = 2$. B. $d_1 d_2 = 3$. C. $d_1 d_2 = 4$. D. $d_1 d_2 = 6$.

Câu 104. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$ có hai đường tiệm cận đứng ?

- A. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. B. $m \neq 5$.
C. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$. D. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Câu 105. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để (C) không có tiệm cận đứng ?

- A. $m=0$. B. $m=1$.
C. $m=2$. D. $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 106. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2+4x+m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có ba tiệm cận ?

- A. $m > 4$ và $m \neq 3$. B. $m < 4$. C. $m < 4$ và $m \neq 3$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 107. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m+n$.

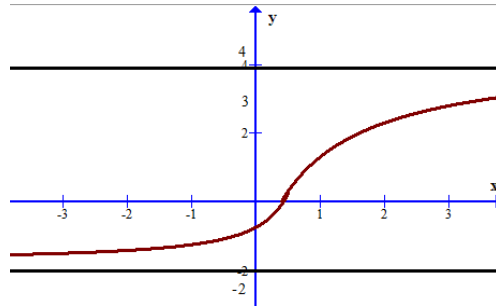
- A. $m+n = -\frac{1}{3}$. B. $m+n = \frac{1}{3}$. C. $m+n = \frac{2}{3}$. D. $m+n = 0$.

Câu 108. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận.

- Tính $m+n$.
A. $m+n = 6$. B. $m+n = -6$. C. $m+n = 8$. D. $m+n = 9$.

- Câu 109.** Có bao nhiêu giá trị của m để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x-m}$ tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024.
 A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 110.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?
 A. 19. B. 15. C. 17. D. 18.
- Câu 111.** Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.
 A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. -3. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 112.** Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?
 A. 12. B. 9. C. 8. D. 11.
- Câu 113.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?
 A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 114.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.
 A. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. D. $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 115.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \geq -10$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+\sqrt{x-1}}{x^2+(m-1)x+1}$ có đúng một tiệm cận đứng?
 A. 11. B. 10. C. 12. D. 9.
- Câu 116.** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = 2x + \sqrt{ax^2+bx+4}$ có một đường tiệm cận ngang $y = -1$. Tính $2a - b^3$.
 A. -72. B. 72. C. 56. D. -56.
- Câu 117.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x}}{x^2-2(m+1)x+m^2+2m}$ có đúng hai đường tiệm cận
 A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4|$ có đúng một tiệm cận ngang?

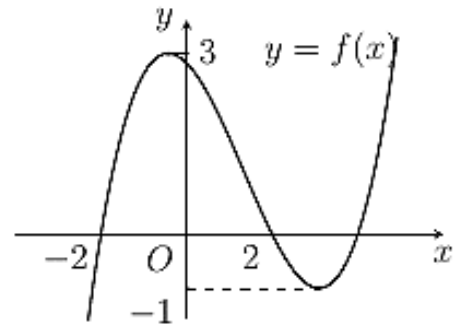


- A. 0. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2025}{f(x) - m}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Câu 120. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{|3f(x^3 - 3x)| - m}$ có 8 tiệm cận đứng?



- A. 4.
B. 6.
C. 5.
D. 3.

DẠNG TOÁN 5. NHỮNG BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIỆM CẬN

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 121. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có các đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ và $y = 1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Gọi $M\left(x; \frac{2x+2}{2x-3}\right) \in (C)$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{|2x-3|}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng $\left|\frac{2x+2}{2x-3} - 1\right| = \frac{5}{|2x-3|}$.

Khi đó: $\frac{5}{|2x-3|} = 10 \cdot \frac{|2x-3|}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 6) \\ M(1; -4) \end{cases}$.

Câu 122. Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$, $a \neq -\frac{1}{2}$. Tìm tất cả các giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

A. $a = 2$.

B. $a = 4$.

C. $a = 3$.

D. $a = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x=1$ và $y=1$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$ có hai đường tiệm cận là $x=2$ và $y=a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước lần lượt là 1 và $|a-1|$. Theo giả thiết: $|a-1| \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=-3 \end{cases}$. Vì $a > 0$ nên chọn $a=5$.

Câu 123. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 8.

B. 5.

C. 2.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $d_1: y=2$ và đường tiệm cận đứng $d_2: x=1$. Khi đó:

$$d(M, d_1) = |b-2| = \left|\frac{2a-1}{a-1} - 2\right| = \frac{1}{|a-1|}; \quad d(M, d_2) = |a-1|.$$

Khi đó $d(M, d_1) + d(M, d_2) = |a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2$ (bất đẳng thức Cauchy).

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $|a-1| = \frac{1}{|a-1|} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$.

So điều kiện ta thấy $a = 2$ thỏa mãn. Suy ra $b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 124. Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x-n}$, trong đó m, n là tham số. Biết giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0,1)$. Giá trị của $m+n$ là

- A. $m+n=-3$. B. $m+n=3$. C. $m+n=1$. D. $m+n=-1$.

Câu 125. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài đoạn IM ngắn nhất.

- A. $M_1(1;1)$ và $M_2(-3;0)$. B. $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;3)$.
C. $M_1(1;-1)$ và $M_2(-3;2)$. D. $M_1(1;-2)$ và $M_2(-3;-3)$.

Câu 126. Gọi $M(a;b)$, $b > 0$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x-10}{x-3}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đó đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó hiệu $a-b$ bằng

- A. -3 . B. -5 . C. 5 . D. 3 .

Câu 127. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C) . Gọi M là điểm bất kì trên (C) , d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Giá trị nhỏ nhất của d .

- A. 10 . B. 2 . C. 5 . D. 6 .

Câu 128. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C) . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các đường tiệm cận của (C) .

- A. $2\sqrt{3}$. B. 2 . C. 3 . D. $2\sqrt{2}$.

Câu 129. Cho đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm P và Q . Gọi G là trọng tâm tam giác IPQ (với I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C)). Diện tích tam giác GPQ là

- A. 2 . B. 4 . C. $\frac{2}{3}$. D. 1 .

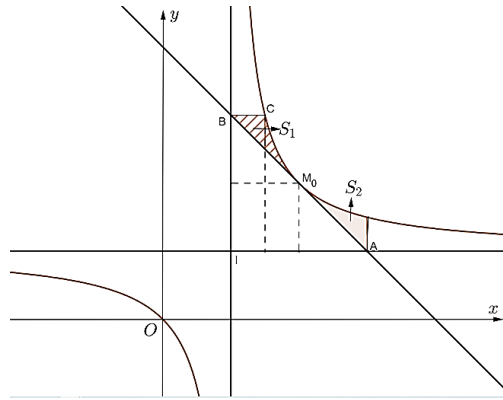
Câu 130. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, $M(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $AI^2 + IB^2 = 40$. Tính tích $x_0 y_0$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2 . C. 1 . D. $\frac{15}{4}$.

GIẢI TÍCH 12 – TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 131. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I . Điểm $M_0(x_0; y_0)$ di động trên (C) , tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\Delta IAB} = 2$. Tìm giá trị IM_0^2 sao cho $\frac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1$.

- A. 2. B. $\frac{41}{20}$.
C. $\frac{169}{60}$. D. $\frac{189}{60}$.



Câu 132. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào ?

A. (29; 30). B. (27; 28). C. (26; 27). D. (28; 29).

Đáp án Dạng toán 1							3B	4D	5A
6C	7C	8A	9D	10C	11A	12A	13D	14D	15B

Đáp án Dạng toán 1 (tiếp theo)						19A	20B	21C
22A	23D	24B	25A	26A	27D	28A	29C	

Đáp án Dạng toán 2				35B	36B	37C	38D	39B
40A	41C	42C	43D	44A	45C	46A	47C	
48C	49A	50B	51B	52B	53A	54D	55C	

Đáp án Dạng toán 3				60A	61B	62B	63C	64A	65C	66A
67B	68C	69C	70C	71A	72B	73D	74D	75A	76D	
77D	78C	79B	80C	81D	82D	83A	84A	85D	86D	

Đáp án Dạng toán 4						97A	98D	99B	100A
101C	102D	103C	104C	105D	106C	107A	108D	109C	110C
111A	112B	113B	114C	115B	116D	117A	118C	119B	120C

Đáp án Dạng toán 5		124B	125B	126A	127B	128D	129A	130B	131B	132B
--------------------	--	------	------	------	------	------	------	------	------	------

BÀI 5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Xét chiều biến thiên của hàm số.
 - Tìm đạo hàm y' . Cho $y' = 0$ và tìm nghiệm thuộc D .
 - Tính các giới hạn và tìm tiệm cận (nếu có).
 - Lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị.

2. Các dạng đồ thị thường gặp:

✚ **Hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ($\Delta_{y'} > 0$ hoặc $\Delta'_{y'} > 0$).		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép ($\Delta_{y'} = 0$ hoặc $\Delta'_{y'} = 0$).		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm ($\Delta_{y'} < 0$ hoặc $\Delta'_{y'} < 0$).		

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).		
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm.	$a > 0$	$a < 0$
Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$.		
$ad - bc > 0 \Rightarrow y' > 0$	$ad - bc < 0 \Rightarrow y' < 0$	

DẠNG TOÁN 1. NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

☆ Hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$

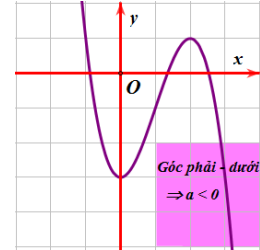
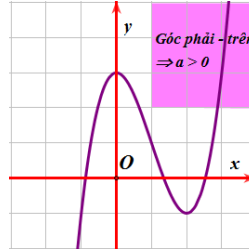
☞ Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y'' = 6ax + 2b$

1. Xác định dấu của a :

- Nhìn vào góc phải đồ thị, ta thấy **đồ thị đi lên trên**, tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, ta có

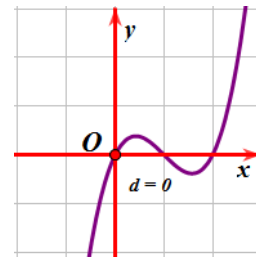
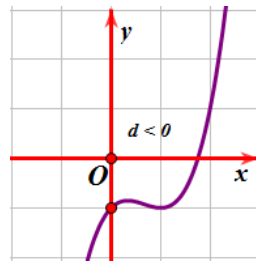
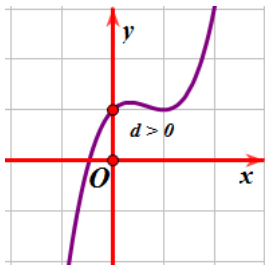
$$\boxed{a > 0}.$$

- Ngược lại nhánh phải **đồ thị đi xuống dưới**, tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, ta có $\boxed{a < 0}$.

2. Xác định dấu của d :

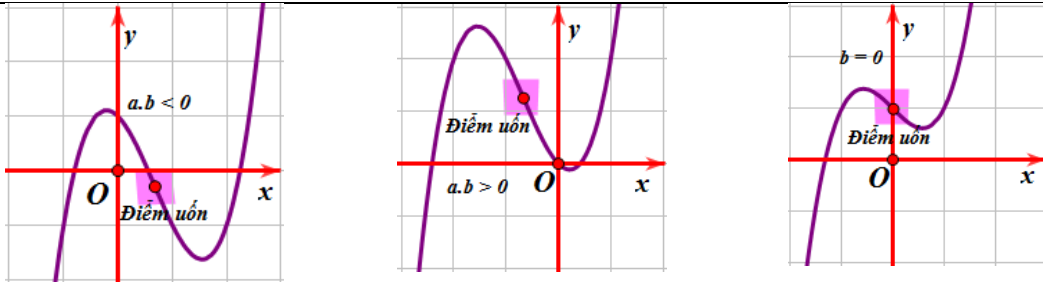
Xét giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung: $\begin{cases} x = 0 \\ y = d \end{cases}$.

- Giao điểm của đồ thị với trục tung **nằm trên gốc tọa độ** $O \Rightarrow \boxed{d > 0}$.
- Giao điểm của đồ thị với trục tung **nằm dưới gốc tọa độ** $O \Rightarrow \boxed{d < 0}$.
- Giao điểm của đồ thị với trục tung **trùng với gốc tọa độ** $O \Rightarrow \boxed{d = 0}$.

3. Xác định dấu của b :

Xét tọa độ điểm uốn (tâm đối xứng) của đồ thị hàm số là $I(x_I; y_I)$ với $x_I = -\frac{b}{3a}$.

- Điểm uốn I **nằm bên phải trục tung** $Oy \Rightarrow -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \boxed{ab < 0}$.
- Điểm uốn I **nằm bên trái trục tung** $Oy \Rightarrow -\frac{b}{3a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \boxed{ab > 0}$.
- Điểm uốn I **thuộc trục tung** Oy (tức là hai điểm cực trị cách đều trục tung) $\Rightarrow \boxed{b = 0}$.



➤ **Nhận xét:** Trong trường hợp đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, ta có thể sử dụng **định**

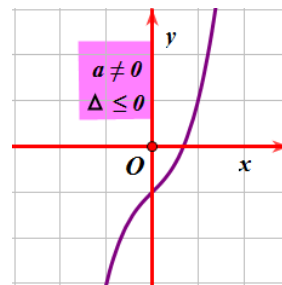
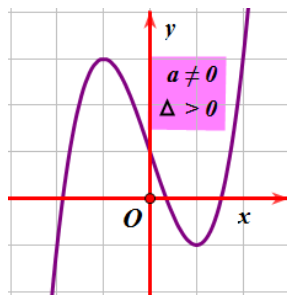
lí vi-ét để xét dấu của b (sau khi biết dấu của a), ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = -\frac{2b}{3a}$. Tùy vào tổng này âm, dương hoặc bằng 0 mà ta kết luận được dấu của b .

4. Xác định dấu của c :

- Hai điểm cực trị nằm cùng phía với trục tung Oy : $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow \boxed{ac > 0}$.
- Hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung Oy : $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow \boxed{ac < 0}$.

➤ **Lưu ý:** Ngoài các quy tắc xét dấu hệ số hàm bậc ba như trên, ta còn có thể đánh giá đồ thị hàm số theo hai trường hợp sau:

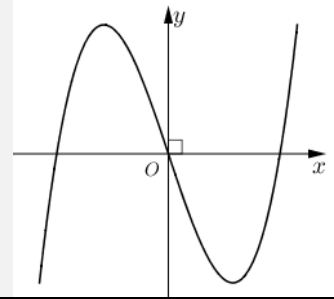
- Đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số bậc ba không có điểm cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.



★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- A. $y = x^3 - 3x$.
- B. $y = -x^3 + 3x$.
- C. $y = x^4 - 2x^2$.
- D. $y = -x^4 + 2x^2$.



Hướng dẫn giải

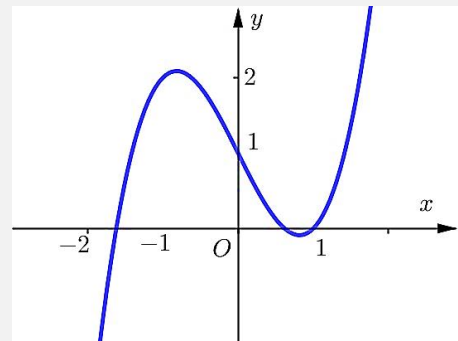
Chọn A.

Dạng đồ thị này là của hàm số bậc ba nên loại C, D.

Nhánh phải đồ thị đi lên, tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Suy ra $a > 0$.

Câu 2. Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 2x + 1$.
- B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 - 2x + 1$.
- D. $y = -x^3 + 2x + 1$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Nhánh phải đồ thị đi lên nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Suy ra $a > 0$. **Loại D.**

Hàm số có hai điểm cực trị nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, ta **loại A**.

$$\text{Xét B: } y' = 3x^2 - 4x; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ (loại). } \textbf{Loại B.}$$

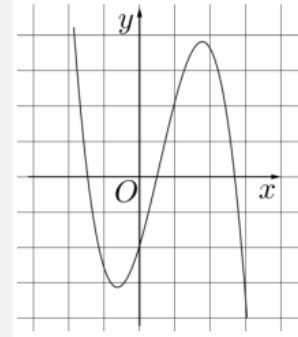
$$\text{Xét C: } y' = 3x^2 - 2; y' = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (nhận).}$$

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhánh phải đồ thị đi xuống nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow \boxed{a < 0}$.

Giao điểm của đồ thị với trục tung: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \boxed{d < 0} \end{cases}$ (do giao điểm này nằm dưới gốc tọa độ).

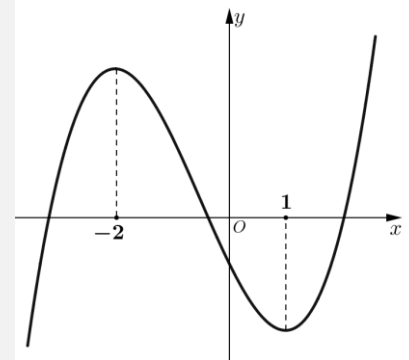
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a} = x_I$ (hoành độ tâm đối xứng).

Vì tâm đối xứng đồ thị nằm bên phải trục Oy nên $x_I = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \boxed{b > 0}$.

Hai điểm cực trị nằm hai phía Oy nên $x_1 x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \boxed{c > 0}$.

Câu 4. Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì nhánh phải đồ thị đi lên nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow \boxed{a > 0}$.

Giao điểm của đồ thị với trục tung: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \boxed{d < 0} \end{cases}$ (do giao điểm này nằm dưới gốc tọa độ).

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a} = x_I$ (hoành độ tâm đối xứng).

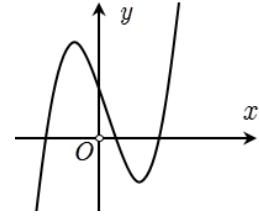
Vì tâm đối xứng đồ thị nằm bên trái trục Oy nên $x_I = -\frac{b}{3a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \boxed{b > 0}$.

Hai điểm cực trị nằm hai phía Oy nên $x_1 x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \boxed{c < 0}$.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

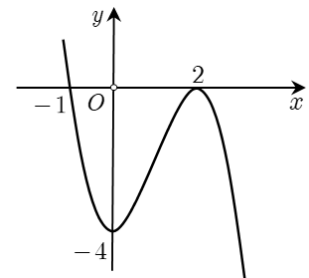
Câu 5. Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = -x^2 + x - 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 - 3x + 1$.



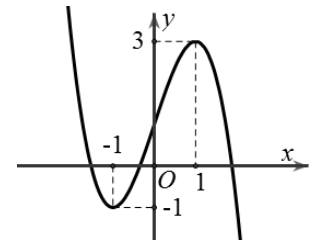
Câu 6. Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = -x^3 - 4$.
- B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



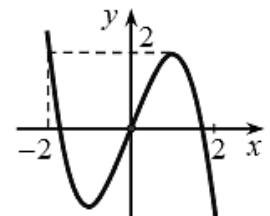
Câu 7. Cho đồ thị của hàm số có hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = -x^3 + 3x + 1$.
- B. $y = x^3 - 3x + 1$.
- C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- D. $y = -x^3 - 3x + 1$.



Câu 8. Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = x^3 - 3x^2$.
- B. $y = -x^4 + 2x^2$.
- C. $y = 1 + 3x - x^3$.
- D. $y = 3x - x^3$.



Câu 9. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- B. $y = 2x^3 + 6x^2 + 1$.
- C. $y = -x^3 - 3x^2$.
- D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

Câu 10. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

- A. $y = -x^3 + 3x$.
- B. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 - 3x$.
- D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 11. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.
- C. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
- D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

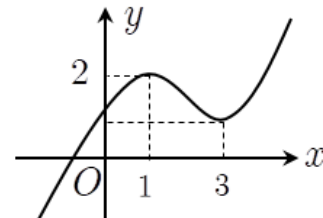
Câu 12. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

- A. $y = x^3 + 3x + 2$.
- B. $y = x^3 + 9x^2 + 27x$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 + 6$.
- D. $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$

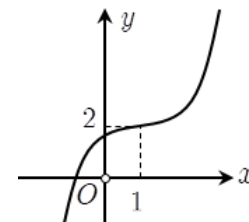
Câu 13. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- B. $y' < 0, \forall x > 3$.
- C. $y' > 0, \forall x > 1$.
- D. $y' > 0, \forall x < 1$.



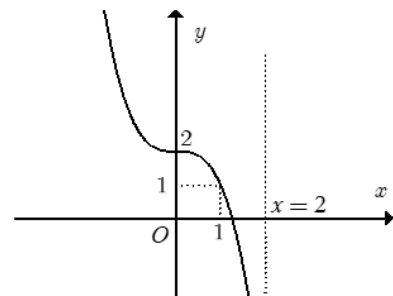
Câu 14. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- D. $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



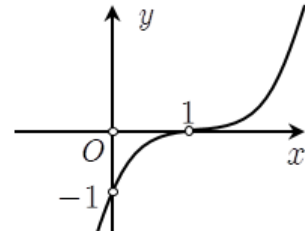
Câu 15. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. $y' > 0, \forall x < 2$.
- B. $y' = 0, \forall x < 2$.
- C. $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- D. $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



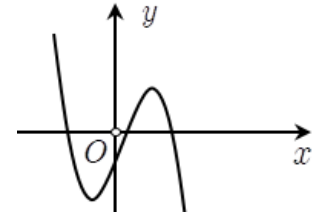
Câu 16. Cho đồ thị của hàm số như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = (x-1)^3$.
- B. $y = x^3 + 1$.
- C. $y = x^3 - 1$.
- D. $y = (x+1)^3$.



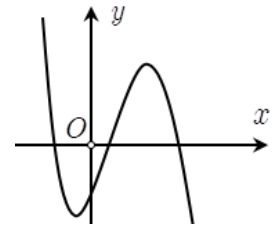
Câu 17. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. $y' = 0$ vô nghiệm.
- B. $y' = 0$ có 1 nghiệm duy nhất.
- C. $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
- D. $y' = 0$ có 3 nghiệm.



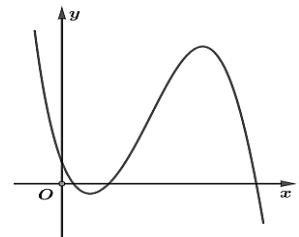
Câu 18. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



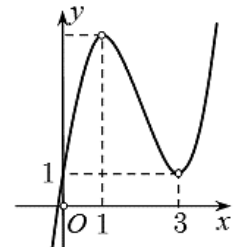
Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.



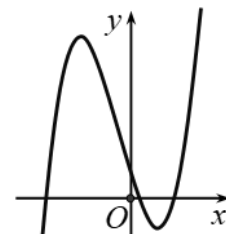
Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



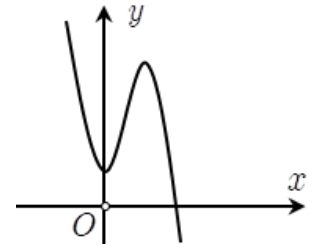
Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a > 0, c > 0, d > 0, b < 0$.
- D. $a > 0, b > 0, d > 0, c < 0$.



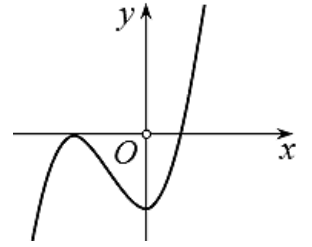
Câu 22. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.



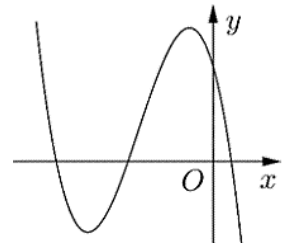
Câu 23. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.



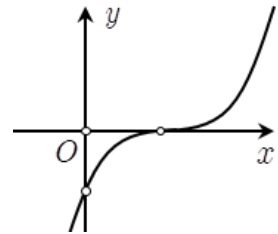
Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.



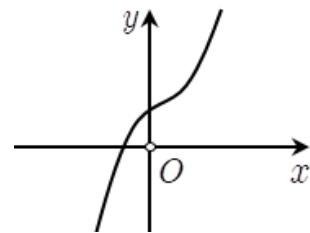
Câu 25. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



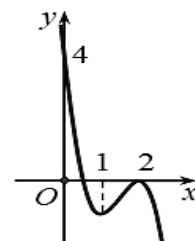
Câu 26. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $ab^2 > 3a^2c$.
- B. $ab^2 < 3a^2c$.
- C. $b^2d > 3acd$.
- D. $-b^2d < -3acd$.



Câu 27. Cho đồ thị hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $b + c + d$ bằng

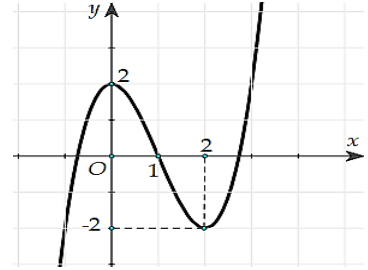
- A. 1.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 7.



Câu 28. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 - 3x^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $a + c + d$ bằng

- A. 2.

- B. -3.
- C. 0.
- D. 3.

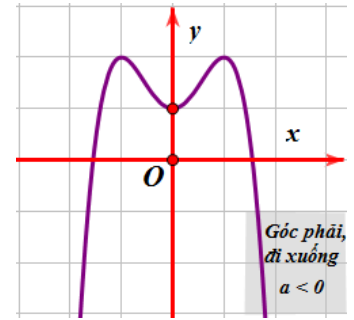
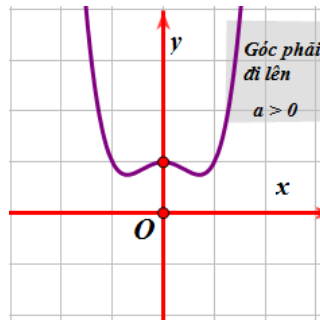


DẠNG TOÁN 2. NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

☆ Hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$

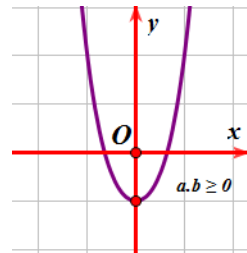
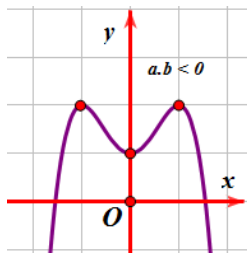
1. Xét dấu của a :

- Nhìn vào góc phải đồ thị, ta thấy **nhánh phải đồ thị đi lên**, tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Kết luận $a > 0$.
- Ngược lại, **nhánh phải đồ thị đi xuống** thì $a < 0$.



2. Xét dấu của b :

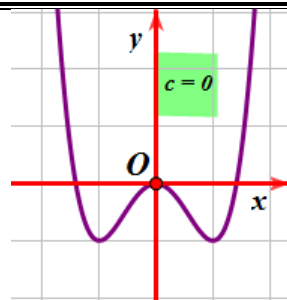
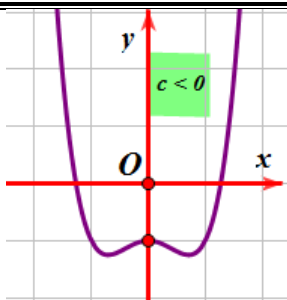
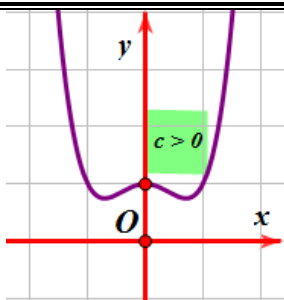
- Đồ thị hàm số có **ba điểm cực trị** $\Leftrightarrow ab < 0$.
- Đồ thị hàm số có **một điểm cực trị** $\Leftrightarrow ab \geq 0$.



3. Xét dấu của c :

Xét tọa giao điểm của đồ thị với trục tung $\begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$.

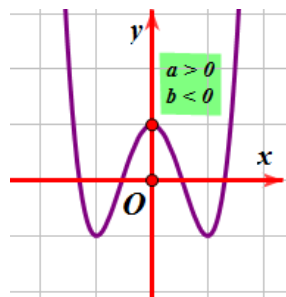
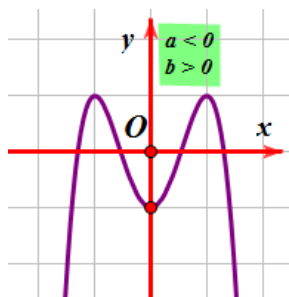
- Nếu giao điểm nằm trên góc $O \Rightarrow c > 0$.
- Nếu giao điểm nằm dưới góc $O \Rightarrow c < 0$.
- Nếu giao điểm trùng với góc $O \Rightarrow c = 0$.



☞ **Nhận xét:** Một số tiêu chí xét dấu chuyên sâu:

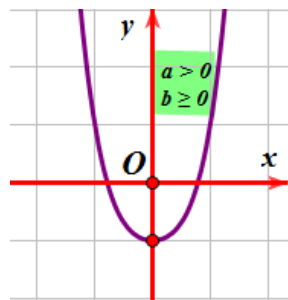
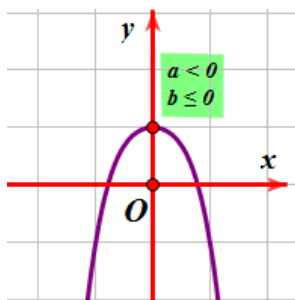
➤ Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu $\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$. Đồ thị hàm số có hai

điểm cực tiểu và một điểm cực đại $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.



➤ Đồ thị hàm số có duy nhất một điểm cực trị và là điểm cực đại $\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$. Đồ thị hàm số có

duy nhất một điểm cực trị và là điểm cực tiểu $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.



★ BÀI TẬP MINH HỌA

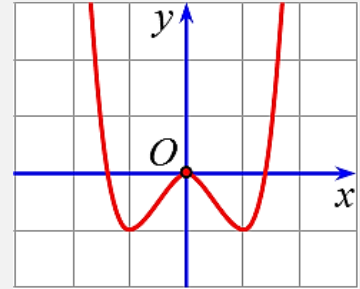
Câu 29. Đồ thị hàm số sau là của hàm số nào trong các phương án A, B, C, D?

A. $y = x^4 - 2x^2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì nhánh phải đồ thị đi lên nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Xét tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$. Giao điểm trùng với O nên $c = 0$.

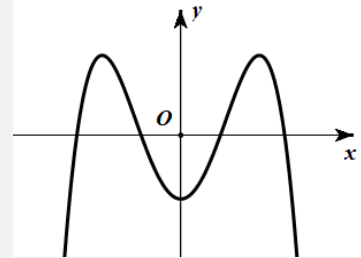
Câu 30. Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây

A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số có đồ thị như hình vẽ là hàm bậc bốn trùng phương (**loại C**).

Nhánh phải đồ thị đi xuống nên $a < 0$. **Loại A.**

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với Oy có tọa độ $\begin{cases} x = 0 \\ y = c < 0 \end{cases}$. **Loại B.**

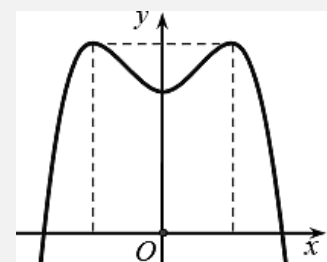
Câu 31. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhánh phải đồ thị hàm số đi xuống nên $a < 0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy nằm phía trên điểm O nên $c > 0$.

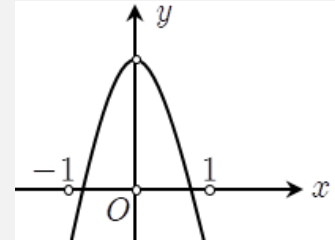
Câu 32. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

B. $y = x^4 + 2$.

C. $y = -3x^4 + 2$.

D. $y = -x^4 - 2x^2$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị là của hàm số bậc bốn trùng phương hoặc bậc hai nên ta **loại A**.

Vì nhánh phải đồ thị đi xuống nên $a < 0$ (**loại B**).

Đồ thị hàm số có một điểm cực trị nên $ab \geq 0 \Rightarrow b \leq 0$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy nằm trên điểm O nên $c > 0$.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

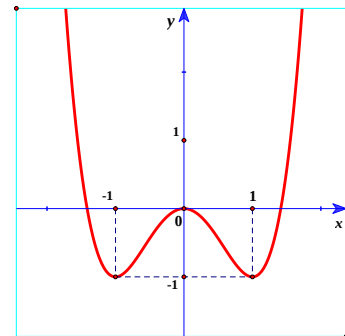
Câu 33. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

B. $y = x^4 + 2x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = -x^4 - 2x^2$.



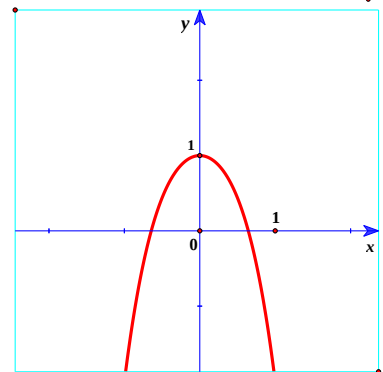
Câu 34. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

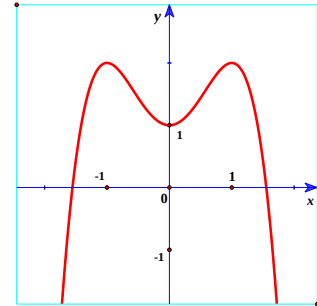
C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.



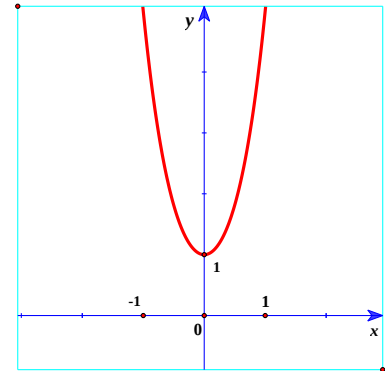
Câu 35. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
- D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.



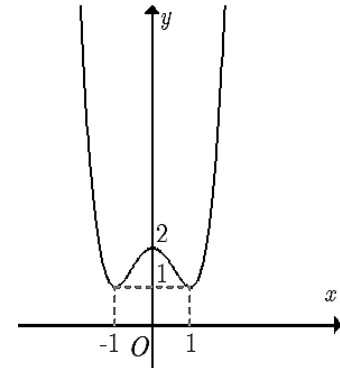
Câu 36. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

- A. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
- D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



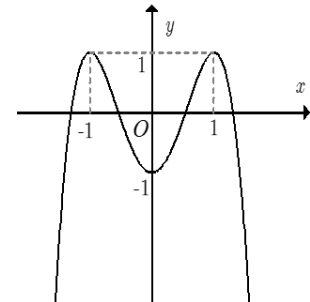
Câu 37. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$.
- D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.



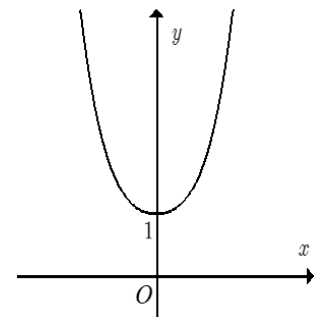
Câu 38. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
- B. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.
- C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
- D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Câu 39. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 + x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - x^2 + 2$.
- C. $y = x^4 - x^2 + 1$.



D. $y = x^4 + x^2 + 1$.

Câu 40. Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 3$.

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

Câu 41. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 42. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 43. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.

Hãy chọn mệnh đề đúng.

A. $a < 0, b < 0, c = 0$.

B. $a < 0, b > 0, c = 0$.

C. $a > 0, b < 0, c = 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

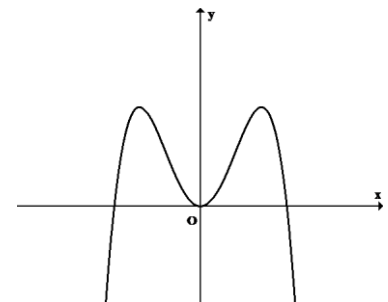
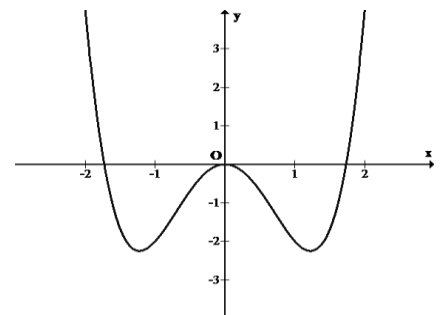
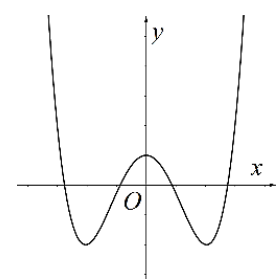
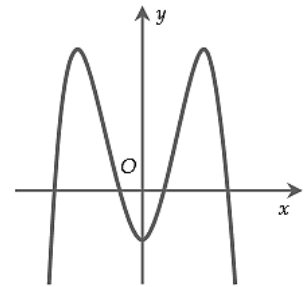
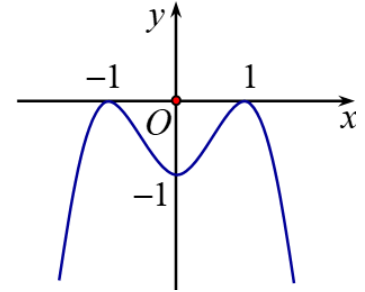
Câu 44. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c = 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

DẠNG TOÁN 3. NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

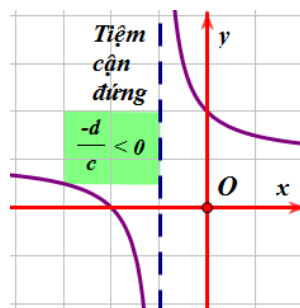
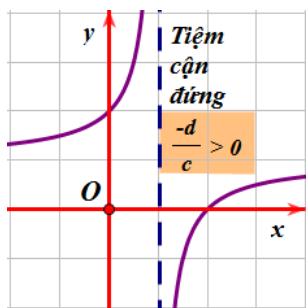
☆ Hàm số nhất biến có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad-bc \neq 0$

1. Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$.

➤ Nếu *tiệm cận đứng nằm bên phải Oy* thì $-\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{c} < 0}$.

➤ Nếu *tiệm cận đứng nằm bên trái Oy* thì $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{c} > 0}$.

➤ Nếu *tiệm cận đứng trùng với Oy* thì $-\frac{d}{c} = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$.

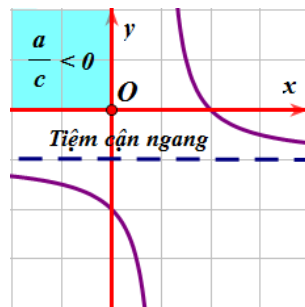
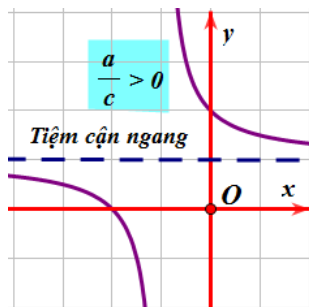


2. Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.

➤ Nếu *tiệm cận ngang nằm phía trên trục Ox* thì $\frac{a}{c} > 0$.

➤ Nếu *tiệm cận ngang nằm phía dưới trục Ox* thì $\frac{a}{c} < 0$.

➤ Nếu *tiệm cận ngang trùng với trục Ox* thì $\boxed{a = 0}$.

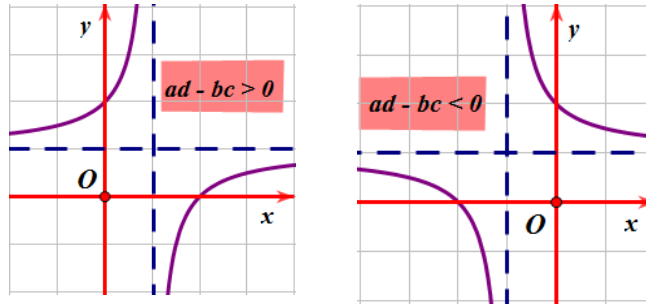


3. Tính đơn điệu hàm số:

Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

➤ Nếu *mỗi nhánh đồ thị hàm số đi lên* thì $y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Rightarrow \boxed{ad - bc > 0}$.

➤ Nếu *mỗi nhánh đồ thị hàm số đi xuống* $y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Rightarrow \boxed{ad - bc < 0}$.



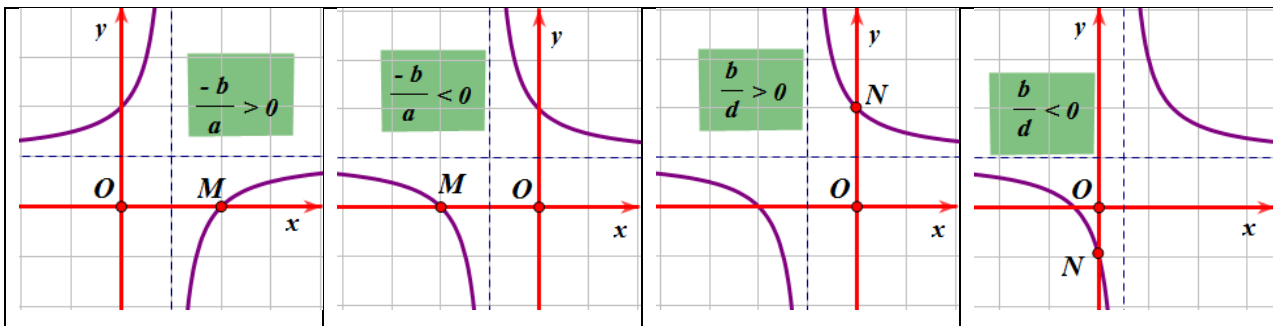
4. Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox:

Giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với trục Ox là điểm $M\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ với $a \neq 0$.

➤ Nếu điểm *M nằm bên phải gốc tọa độ O* thì $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$.

➤ Nếu điểm *M nằm bên trái gốc tọa độ O* thì $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$.

➤ Nếu điểm *M trùng với gốc tọa độ O* thì $-\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$.



5. Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy:

Giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với trục Oy là điểm $N\left(0; \frac{b}{d}\right)$ với $d \neq 0$.

➤ Nếu *điểm N nằm phía trên gốc tọa độ O* thì $\frac{b}{d} > 0$.

➤ Nếu *điểm N nằm phía dưới gốc tọa độ O* thì $\frac{b}{d} < 0$.

➤ Nếu *điểm N trùng với gốc tọa độ O* thì $\frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$.

✪ BÀI TẬP MINH HỌA

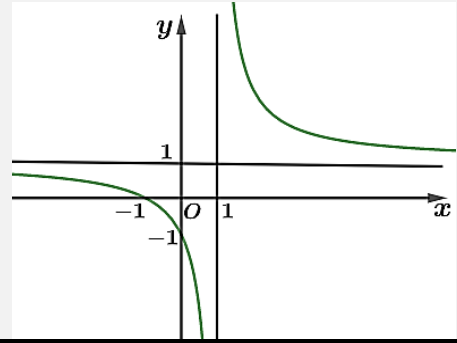
Câu 45. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x - 1$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = x^4 + x^2 + 1$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị đã cho là của hàm số nhất biến (bậc một trên bậc một) nên ta **loại A, D**.

Tiệm cận đứng của đồ thị là $x=1$, tiệm cận ngang của đồ thị là $y=1$. **Loại B**.

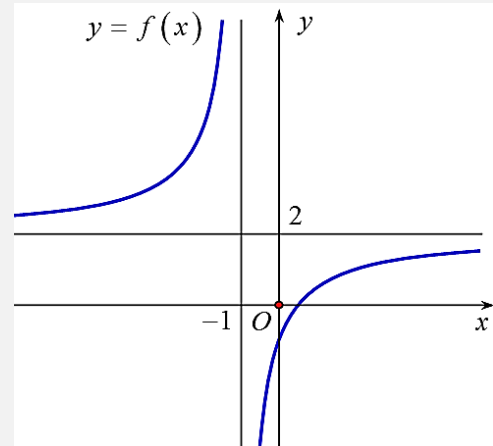
Câu 46. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-1$, tiệm cận ngang của đồ thị là $y=2$. **Loại B, D**.

Ta thấy mỗi nhánh của đồ thị hàm số đã cho đi lên (từ trái sang phải) nên $y' > 0$.

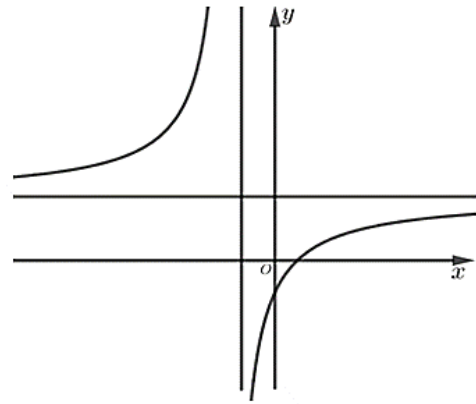
Xét A: $y = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$ (loại).

Xét C: $y = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ (thỏa mãn).

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình

bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?

- A. 1.
- B. 2.**
- C. 0.
- D. 3.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tiệm cận ngang của đồ thị nằm phía trên Ox nên $y = \frac{a}{c} > 0$ mà $a > 0 \Rightarrow c > 0$.

Tiệm cận đứng của đồ thị nằm bên trái Oy nên $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \frac{d}{c} > 0$ mà $c > 0 \Rightarrow d > 0$.

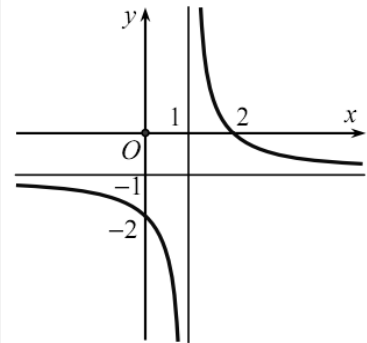
Giao điểm của đồ thị hàm số với Oy là $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ nằm dưới O nên $\frac{b}{d} < 0$ mà $d > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $b < 0, c > 0, d > 0$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $b < a < 0$.**
- B. $a < b < 0$.
- C. $b > a$ và $a < 0$.
- D. $a < 0 < b$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \frac{a}{1} = -1 \Rightarrow a = -1$.

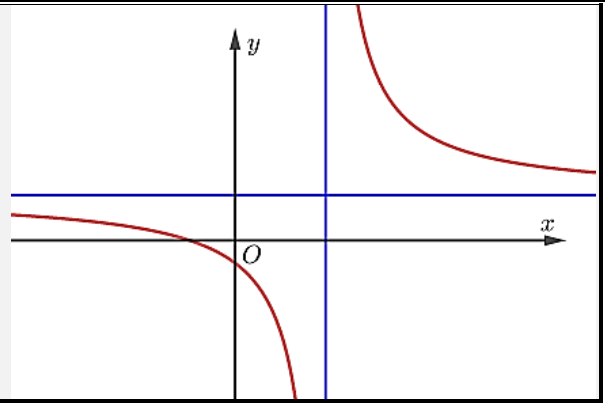
Giao điểm của đồ thị hàm số với Oy là $(0; b) \equiv (0; -2) \Rightarrow b = -2$.

Vậy $b < a < 0$,

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình

vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $ac > 0, bd > 0$.
- B. $ab < 0, cd < 0$.
- C. $bc > 0, ad < 0$.**
- D. $bc < 0, ad > 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tiệm cận đứng đồ thị nằm bên phải Oy nên $-\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$ (1).

Tiệm cận ngang của đồ thị nằm trên Ox nên $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ (2).

Lấy (1) chia (2) theo vế: $\frac{cd}{ac} < 0 \Rightarrow \frac{d}{a} < 0 \Rightarrow \boxed{ad < 0}$.

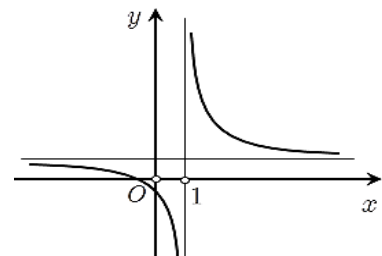
Giao điểm của đồ thị với Oy là $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ nằm dưới điểm O nên $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$ (3).

Lấy (1) chia (3) theo vế: $\frac{cd}{bd} > 0 \Rightarrow \frac{c}{b} > 0 \Rightarrow \boxed{bc > 0}$.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

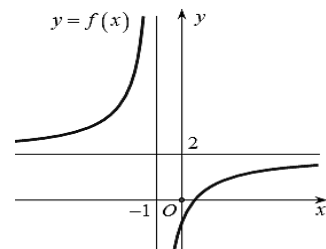
Câu 50. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ như hình. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
- D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



Câu 51. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ như hình. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $y' > 0, \forall x \neq 2$.
- B. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
- C. $y' < 0, \forall x \neq -1$.
- D. $y' > 0, \forall x \neq -1$.



Câu 52. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

B. $y = \frac{2-x}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

Câu 53. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 54. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.

B. $y = \frac{x}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 55. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{x+1}{x}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x}$.

D. $y = \frac{x-1}{x}$.

Câu 56. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+5}{-x-1}$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

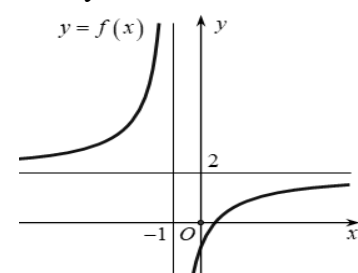
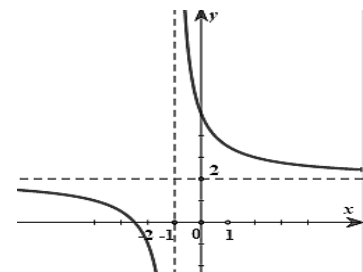
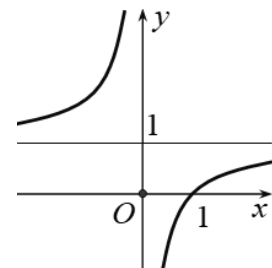
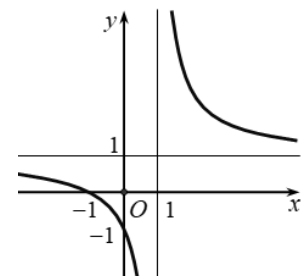
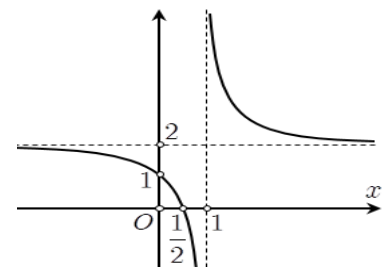
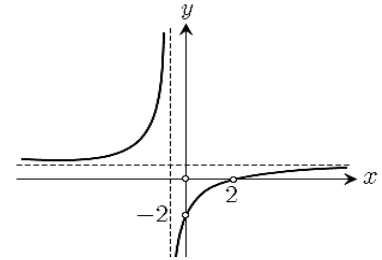
Câu 57. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{1-2x}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.



Câu 58. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{-x+2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-1}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

Câu 59. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

Câu 60. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x+2}$.

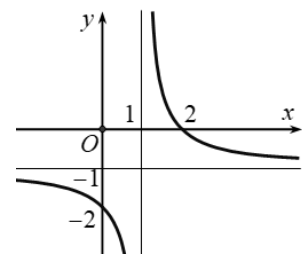
C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+3}{2+x}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

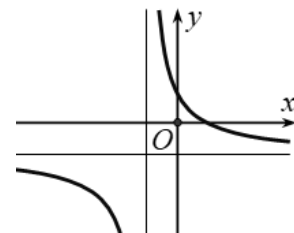
Câu 61. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $b < 0 < a$.
- B. $0 < b < a$.
- C. $b < a < 0$.
- D. $0 < a < b$.



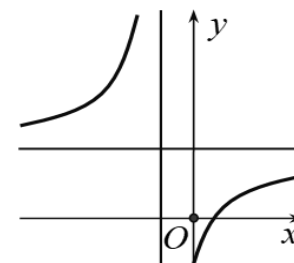
Câu 62. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $d > 0, a > 0, c < 0$.
- B. $d > 0, a < 0, c > 0$.
- C. $d < 0, a > 0, c < 0$.
- D. $d < 0, a < 0, c > 0$.



Câu 63. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-c}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

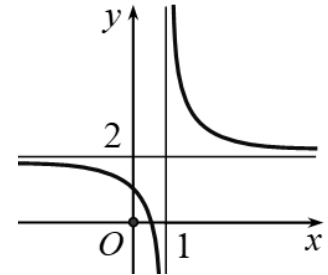
- A. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



Câu 64. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ như hình vẽ. Giá trị của a, b, c lần

lượt là

- A. 2; 1; -1.
- B. 2; 1; 1.
- C. 2; 2; -1.
- D. 2; -1; 1.



Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1
			$-\infty$

Câu 66. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Mệnh đề nào **đúng**?

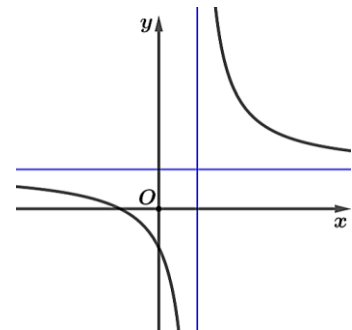
- A. $ac > 0, ab > 0$.
- B. $ad < 0, bc > 0$.
- C. $cd < 0, bd > 0$.
- D. $ab > 0, cd > 0$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2
			$-\infty$

Câu 67. Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên.

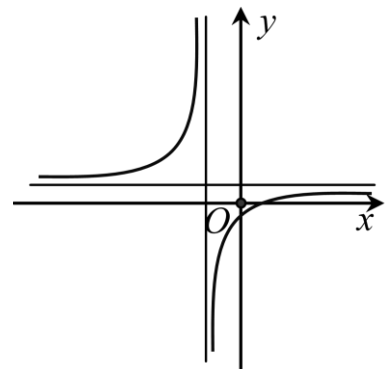
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $a > 1, b > 0, c < 1$.
- B. $a > 1, b < 0, c > 1$.
- C. $a < 1, b > 0, c < 1$.
- D. $a > 1, b > 0, c > 1$.



Câu 68. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



DẠNG TOÁN 4. PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

☆ Phép tịnh tiến và đối xứng đồ thị hàm số

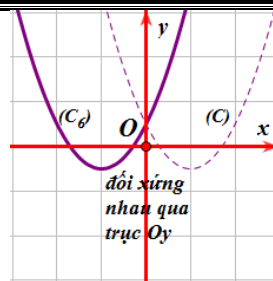
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Xét hệ số $a > 0$, ta có:

Đồ thị cần tìm	Cách biến đổi	Minh họa
$(C_1): y = f(x) + a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy lên phía trên a đơn vị.	
$(C_2): y = f(x) - a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy xuống phía dưới a đơn vị.	
$(C_3): y = f(x + a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua trái a đơn vị.	
$(C_4): y = f(x - a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua phải a đơn vị.	
$(C_5): y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua Ox.	

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

$$(C_6): y = f(-x)$$

- Lấy đối xứng (C) qua Oy .



☆ Đồ thị hàm số chứa giá trị tuyệt đối

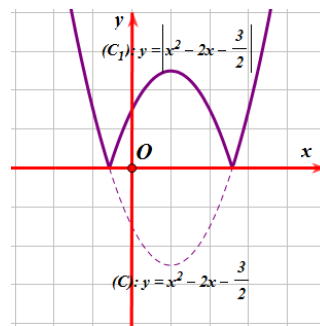
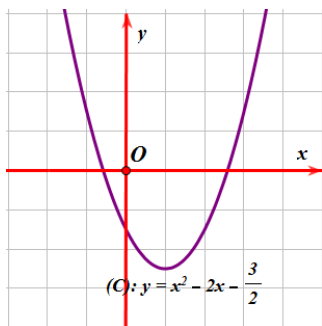
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox , ta được (C') .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới Ox qua Ox , ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$ là hợp của (C') với (C'') . Xem **ví dụ minh họa** sau:



b) Từ đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$.

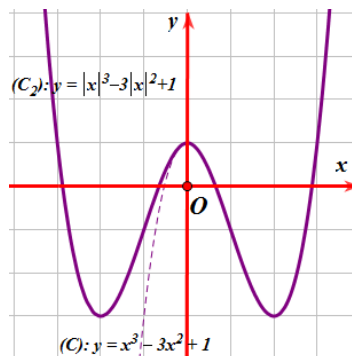
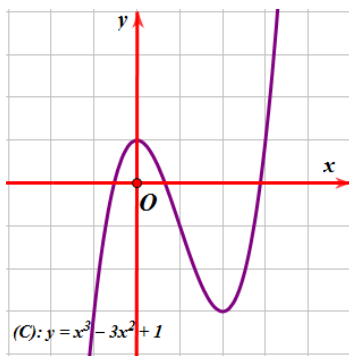
$$\text{Ta có } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy , ta được (C') .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C') qua trục Oy , ta được (C'') .

(Đây là tính chất đối xứng của đồ thị hàm số chẵn)

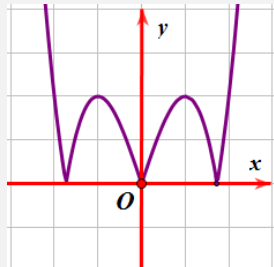
Kết luận: Đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$ là hợp của (C') với (C'') . Xem **ví dụ minh họa** sau:



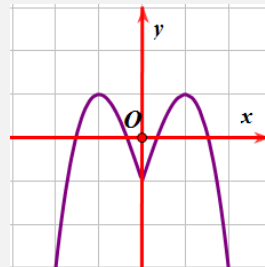
★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 69. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ có đồ thị (C) . Hỏi hình nào trong các đáp án bên dưới là đồ thị $(C_1): y = |-x^3 + 3x - 1|$?

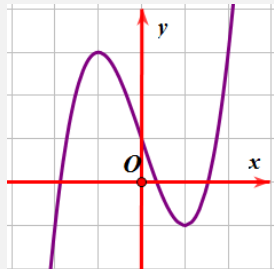
A. Hình I.



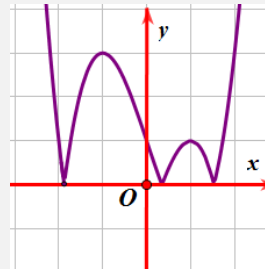
B. Hình II.



C. Hình III.



D. Hình IV.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta thực hiện các bước giải sau để có đồ thị (C_1) :

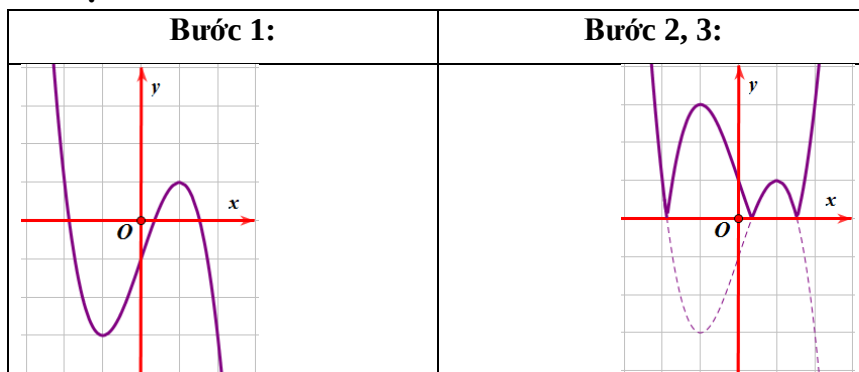
Bước 1: Vẽ đồ thị hàm bậc ba $y = -x^3 + 3x - 1$ (C) .

Bước 2: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox , ta được (C') .

Bước 3: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox , ta được (C'') .

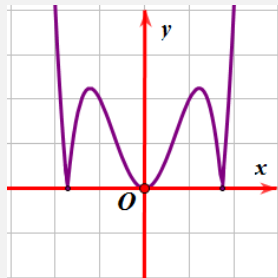
Kết luận: Đồ thị: $(C_1) = (C') \cup (C'')$.

Xem hình minh họa ba bước trên:

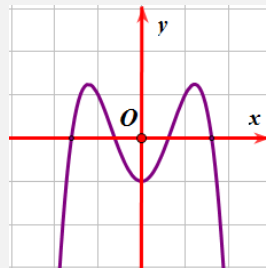


Câu 70. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Hỏi hình nào trong các đáp án bên dưới là đồ thị $(C_1): y = |x^4 - 3x^2 + 1|$?

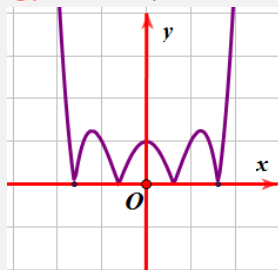
A. Hình I.



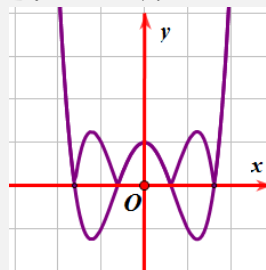
B. Hình II.



C. Hình III.



D. Hình IV.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thực hiện các bước giải sau để có đồ thị (C_1) :

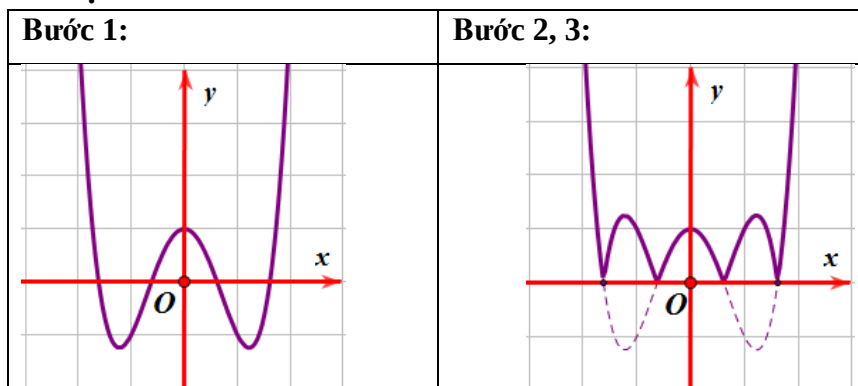
Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ (C) .

Bước 2: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox , ta được (C') .

Bước 3: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox , ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị: $(C_1) = (C') \cup (C'')$.

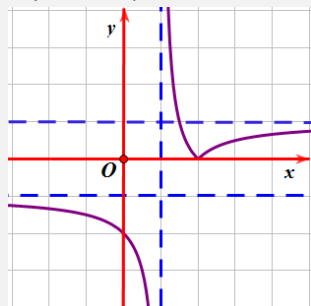
Xem hình minh họa ba bước trên:



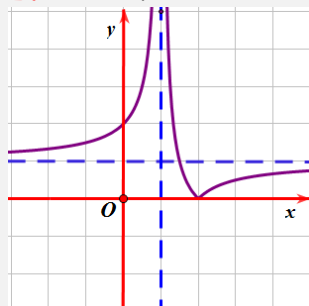
Câu 71. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có đồ thị (C). Hỏi hình nào trong các đáp án bên dưới là đồ thị

$$(C_1): y = \left| \frac{2x-3}{x-1} \right| ?$$

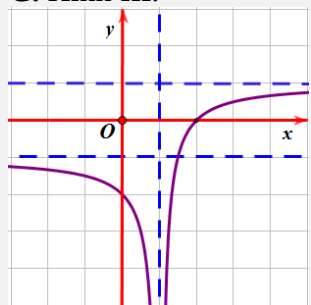
A. Hình I.



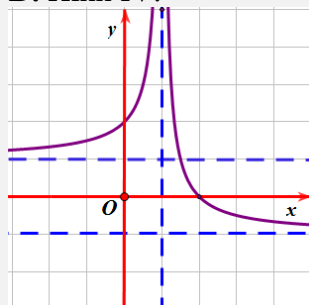
B. Hình II.



C. Hình III.



D. Hình IV.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

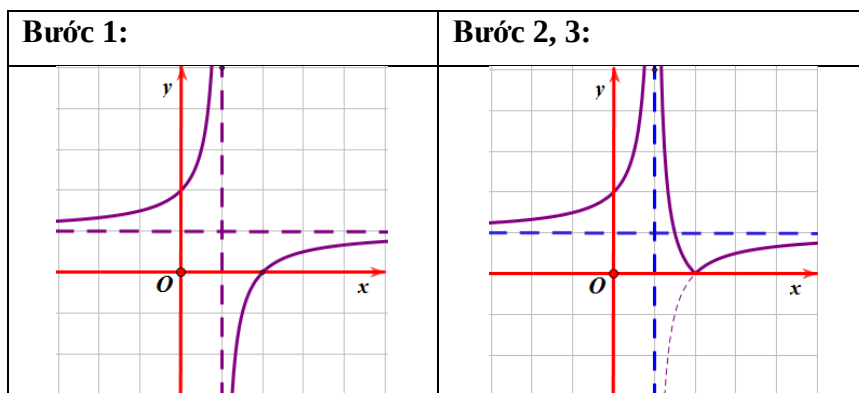
Ta thực hiện các bước giải sau để có đồ thị (C_1) :

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ (C).

Bước 2: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox, ta được (C') .

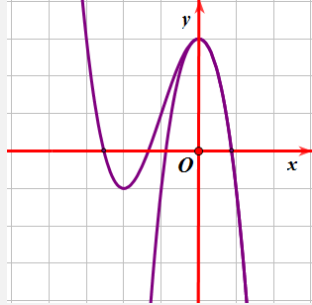
Bước 3: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox, ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị: $(C_1) = (C') \cup (C'')$. Xem hình minh họa ba bước trên:

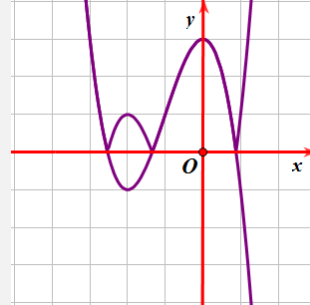


Câu 72. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Hỏi đồ thị $(C_1): y = -|x|^3 - 3|x|^2 + 3$ là hình nào trong các đáp án bên dưới ?

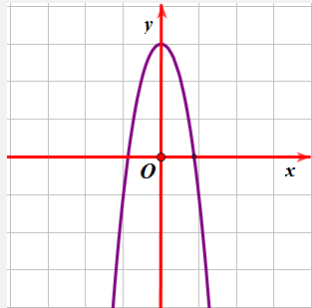
A. Hình I.



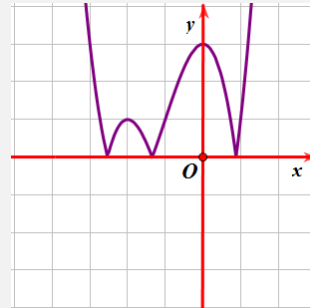
B. Hình II.



C. Hình III.



D. Hình IV.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thực hiện các bước giải sau để có đồ thị (C_1) :

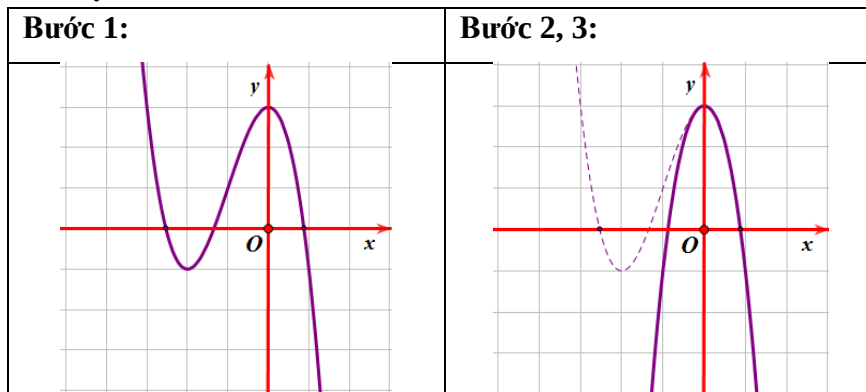
Bước 1: Vẽ đồ thị hàm bậc ba $y = -x^3 - 3x^2 + 3$ (C) .

Bước 2: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy , ta được (C') .

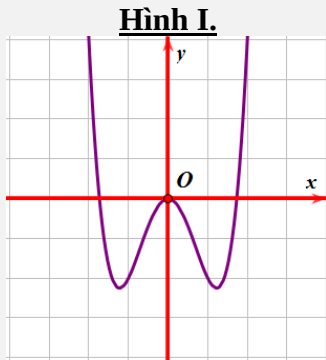
Bước 3: Lấy đối xứng (C') qua Oy , ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị: $(C_1) = (C') \cup (C'')$.

Xem hình minh họa ba bước trên:

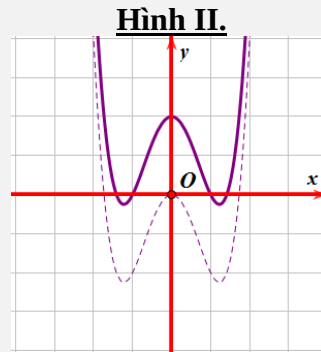


Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) (hình I) và qua một phép tịnh tiến theo phương của một trục tọa độ, ta được đồ thị (C_2) (hình II), hỏi hàm số của đồ thị (C_2) là hàm nào ?



A. $y = f(x) - 2$.

C. $y = f(x + 2)$.



B. $y = f(x) + 2$.

D. $y = f(x - 2)$.

Hướng dẫn giải

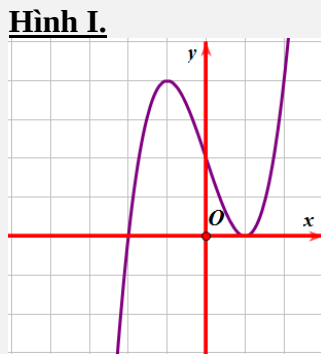
Chọn B.

Ta nhận thấy, với mỗi điểm bất kỳ của đồ thị (C_1) khi tịnh tiến theo chiều dương trục Oy 2 đơn vị sẽ cho ra một điểm thuộc đồ thị (C_2) .

Vậy hàm số xác định cho đồ thị (C_2) là $y = f(x) + 2$.

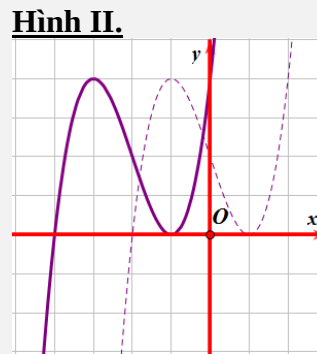
☞ **Bàn thêm:** Tập hợp tất cả các điểm thuộc (C_1) sau khi tịnh tiến theo chiều dương trục Oy 2 đơn vị sẽ lấp đầy lên đồ thị (C_2) .

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) (hình I) và qua một phép tịnh tiến theo phương của một trục tọa độ, ta được đồ thị (C_2) (hình II), hỏi hàm số của đồ thị (C_2) là hàm nào ?



A. $y = f(x - 1)$.

C. $y = f(x - 2)$.



B. $y = f(x + 1)$.

D. $y = f(x + 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta nhận thấy, với mỗi điểm bất kỳ của đồ thị (C_1) khi tịnh tiến theo chiều âm trục Ox 2 đơn vị (sang trái 2 đơn vị) sẽ cho ra một điểm thuộc đồ thị (C_2) .

Vậy hàm số xác định cho đồ thị (C_2) là $y = f(x+2)$.

Bàn thêm: Tập hợp tất cả các điểm thuộc (C_1) sau khi tịnh tiến theo chiều âm trục Ox 2 đơn vị sẽ lấp đầy lên đồ thị (C_2) .

Câu 75. Cho hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.**

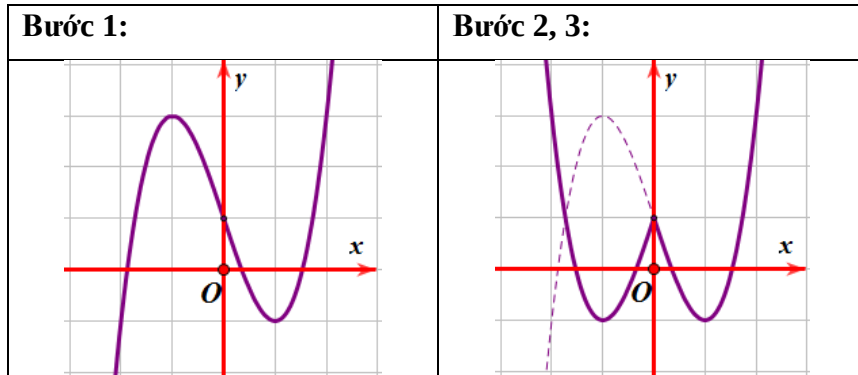
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta vẽ đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ theo các bước sau :

- **Bước 1:** Vẽ đồ thị hàm bậc ba $y = x^3 - 3x + 1$ (C).
- **Bước 2:** Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy , ta được (C').
- **Bước 3:** Lấy đối xứng (C') qua Oy , ta được (C'').

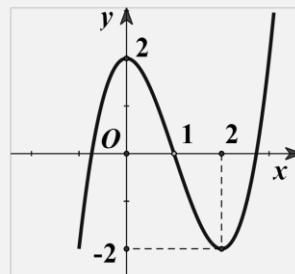
Kết luận: Đồ thị hàm $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ là hợp của (C') với (C''). Xem hình vẽ.



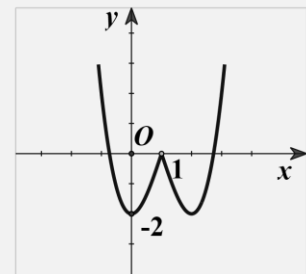
Dựa vào đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 1$, ta thấy hàm số này đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 76. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hàm số trong hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.
- B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$
- C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.**
- D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.



Hình 1



Hình 2

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.

Từ đồ thị ban đầu (trong hình 1) sang đồ thị trong hình 2, ta thấy:

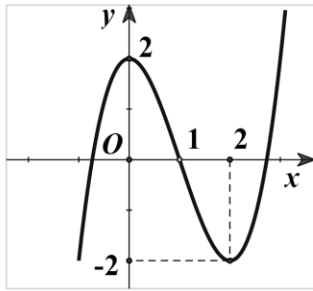
- Toàn bộ đồ thị ứng với $x \geq 1$ được giữ nguyên.
- Phần đồ thị ứng với $x < 1$ được lấy đối xứng qua trục hoành.

Xét **phương án C**: $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2) = \begin{cases} (x-1)(x^2 - 2x - 2) & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1)(x^2 - 2x - 2) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$; hàm số này phù

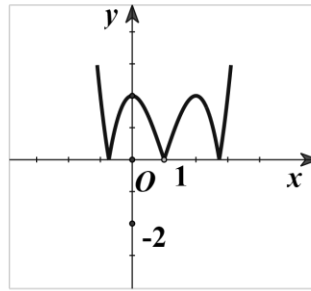
hợp với quy luật biến đổi đồ thị trên.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 77. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

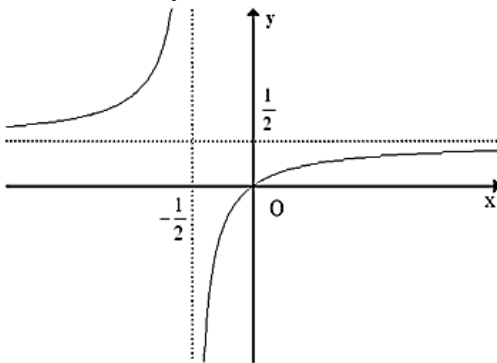
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

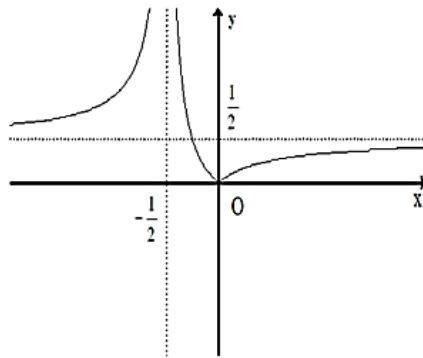
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 78. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án **A, B, C, D** dưới đây?



Hình 1



Hình 2

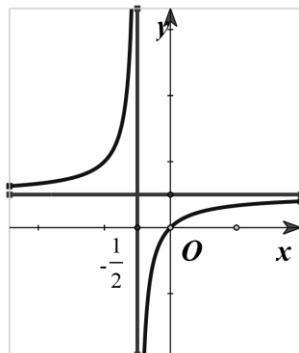
A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

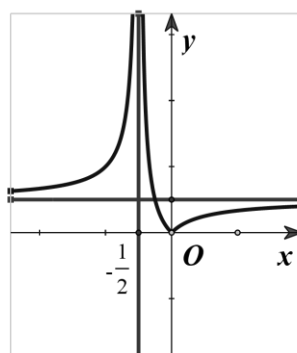
C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

Câu 79. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

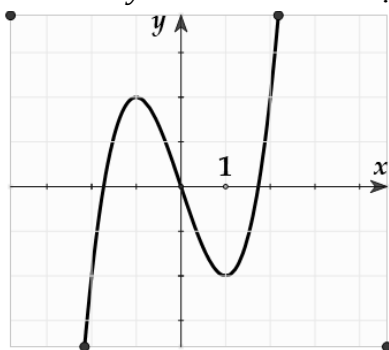
A. $y = \frac{x}{2|x|+1}$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$.

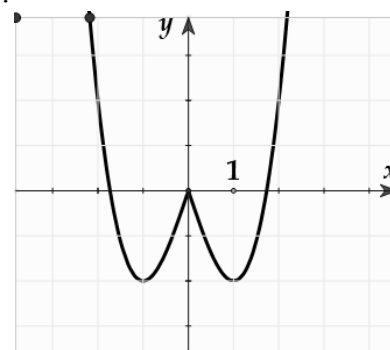
C. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

Câu 80. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?



Hình 1



Hình 2

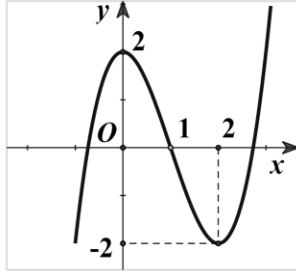
A. $y = |x^3 - 3x|$.

B. $y = |x|^3 - 3|x|$.

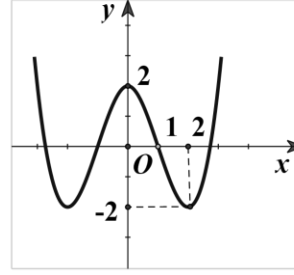
C. $y = -x^3 + 3x$.

D. $y = ||x|^3 - 3|x||$.

Câu 81. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

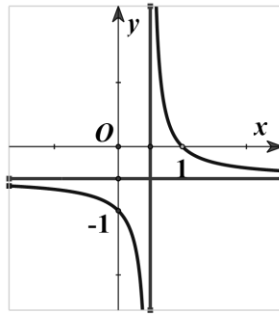
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

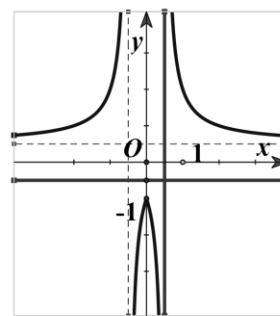
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 82. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

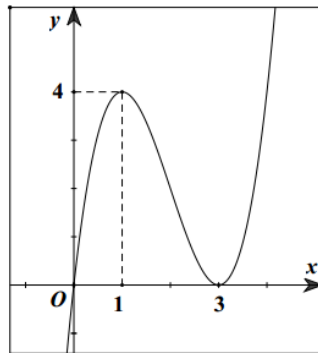
A. $y = \left| \frac{-x+1}{2x-1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$.

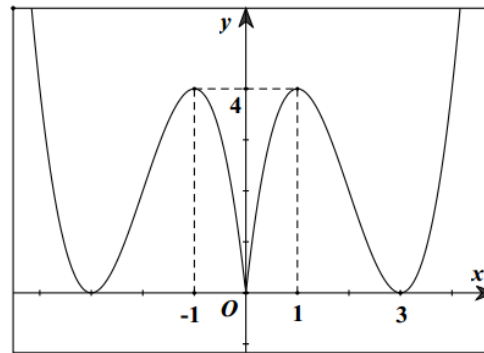
C. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$.

D. $y = \frac{-x+1}{|2x-1|}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

C. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.

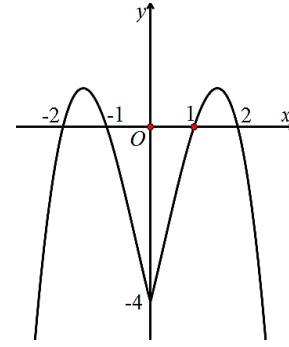
Chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

A. $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$.

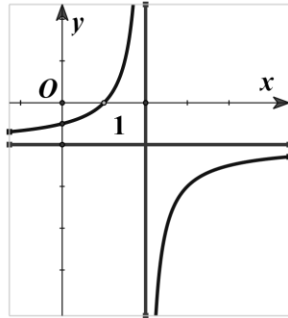
B. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

C. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$.

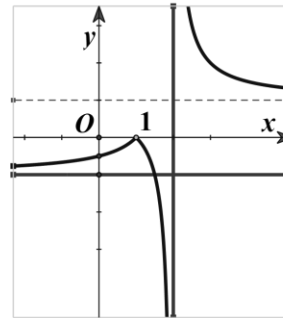
D. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.



Câu 85. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

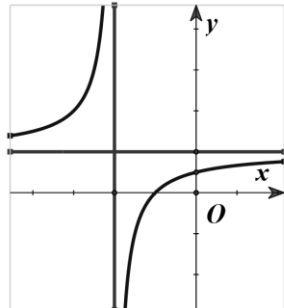
A. $y = \left| \frac{-x+1}{x-2} \right|$.

B. $y = \frac{|x|+1}{|x|-2}$.

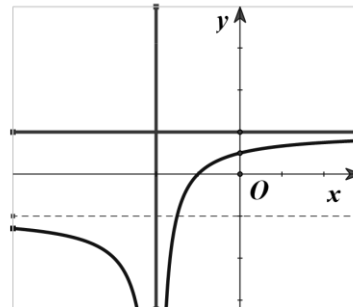
C. $y = \frac{|-x+1|}{x-2}$.

D. $y = \frac{-x+1}{|x-2|}$.

Câu 86. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \frac{|x+1|}{x+2}$.

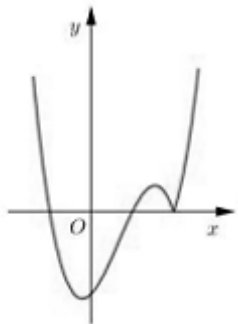
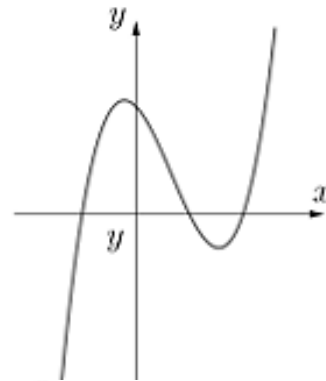
B. $y = \frac{|x|+1}{|x|+2}$.

C. $y = \frac{|x+1|}{x+2}$.

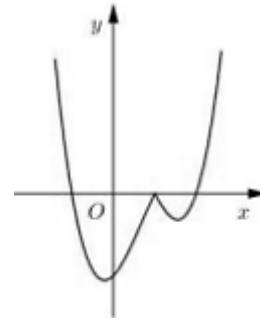
D. $y = \frac{x+1}{|x+2|}$.

Câu 87. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ

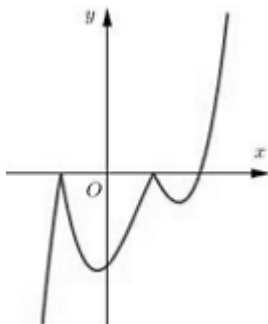
Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$. Hỏi đó là hình nào?



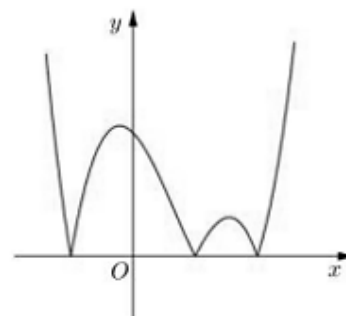
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

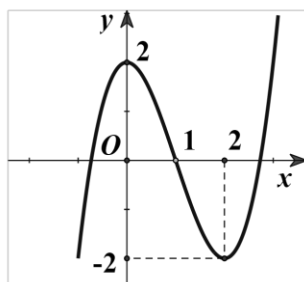
A. Hình 2.

B. Hình 4.

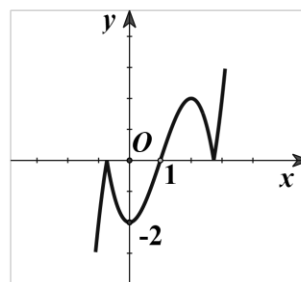
C. Hình 3.

D. Hình 1.

Câu 88. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Đáp án Dạng toán 1							3B	4D	5A
6C	7C	8A	9D	10C	11A	12A	13D	14D	15B

Đáp án Dạng toán 2				33C	34D	35C	36A
37B	38B	39D	40A	41A	42C	43C	44C

Đáp án Dạng toán 3			50D	51D	52C	53B	54D	55D	56D	57C
58B	59B	60C	61C	62C	63D	64A	65B	66D	67D	68C

Đáp án Dạng toán 4				77A	78A	79C	80B
81B	82B	83C	84A	85C	86D	87C	88D

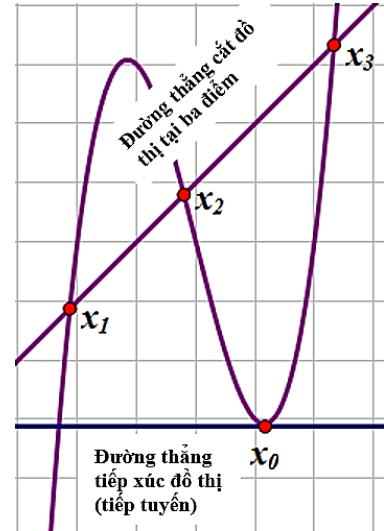
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) & (C_2) là: $f(x) = g(x)$ (*).

- Số nghiệm của phương trình (*) bằng với số giao điểm của hai đồ thị (C_1) & (C_2) .
- Nếu phương trình (*) có nghiệm $x = x_0$ thì hai đồ thị (C_1) & (C_2) có một giao điểm với hoành độ x_0 . Khi đó tọa độ giao điểm tương ứng là $M(x_0; f(x_0))$ hay $M(x_0; g(x_0))$.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm kép $x = x_0$ thì hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$.



DẠNG TOÁN 1. SỰ TƯƠNG GIAO KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HÀM SỐ

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 3 = 0$ là

- A. 3.
B. 2.
C. 1.
D. 0.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$ (*).

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = 3$.

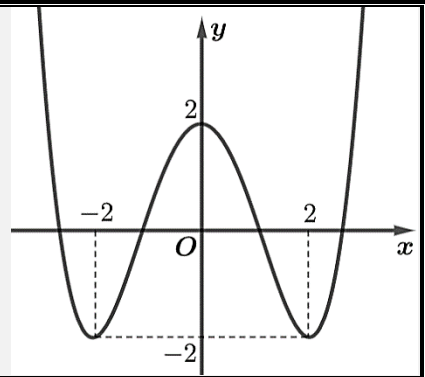
x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Vẽ đường thẳng $y=3$ trên hệ trục tọa độ đã cho, ta thấy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt (có hoành độ x_1, x_2, x_3) nên phương trình $f(x)=3$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 5 = 0$ là

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.



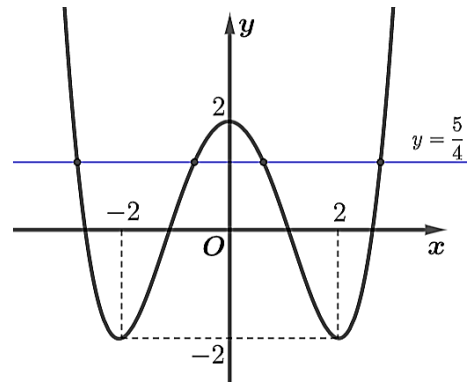
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{4}$ (*).

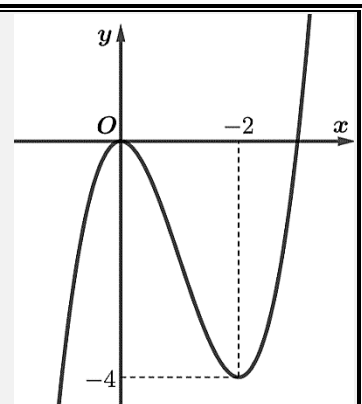
(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = \frac{5}{4}$.

Vẽ đường thẳng $y = \frac{5}{4}$ trên cùng hệ trục tọa độ đã cho, ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $4f(x) - 5 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.



Câu 3. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ được cho trong hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

- A. $m \in (-4; 0)$.
- B. $m \in [0; 2]$.
- C. $m \in [-4; 0]$.
- D. $m \in (0; 2)$.



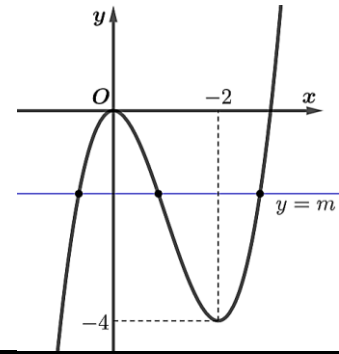
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$ (*).

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã biết $y = x^3 - 3x^2$ và đường thẳng nằm ngang $y = m$.

Yêu cầu bài toán tương đương hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt $-4 < m < 0$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

A. $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$

B. $-2 < m < -1$.

C. $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$ (*).

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $d: y = m + 1$.

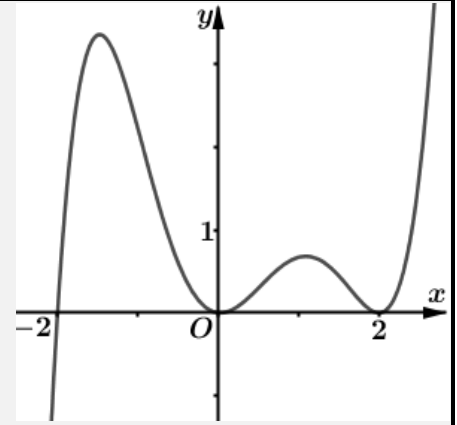
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Yêu cầu bài toán tương đương d và (C) có hai giao điểm $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc) như hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$.

Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

- A. 14.
B. 10.
C. 12.
D. 8.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

- (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (ứng với bốn điểm cực trị của hàm $y = f(x)$).

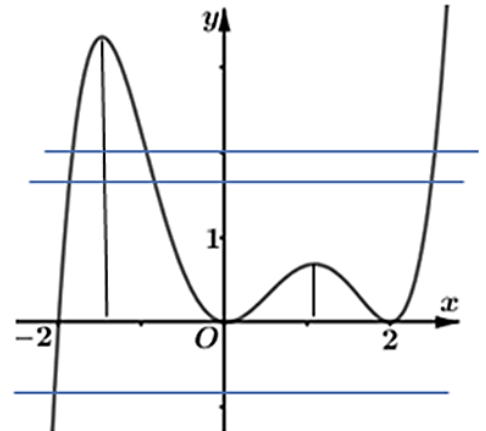
$$\bullet (2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \in (-2; -1) & (3) \\ f(x) = 0 & (4) \\ f(x) = b \in (1; 2) & (5) \\ f(x) = 2 & (6) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy:

- Với $a \in (-2; -1)$ thì $f(x) = a$ có một nghiệm $x_5 < -2$.
- $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_6 = -2$; $x_7 = 0$; $x_8 = 2$ trong đó x_7 ; x_8 là nghiệm kép.
- Với $b \in (1; 2)$ thì $f(x) = b$ có ba nghiệm x_9 ; x_{10} ; x_{11} .
- $f(x) = 2$ có ba nghiệm phân biệt x_{12} ; x_{13} ; x_{14} .

Ta thấy tất cả nghiệm $x_1; x_2; \dots; x_{14}$ là đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x) = 0$ có mười bốn nghiệm phân biệt.



ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f(\cos 2x) - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

D. $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

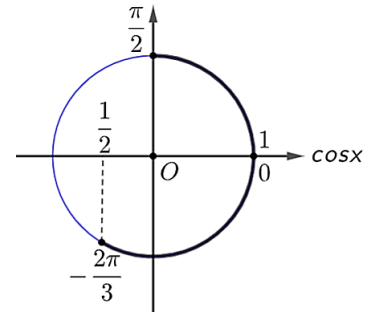
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = \cos 2x$; vì $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với phương trình $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu $\Leftrightarrow 1 \leq 2m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$.



★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	1	5	$-\infty$

Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 4.

B. 2.

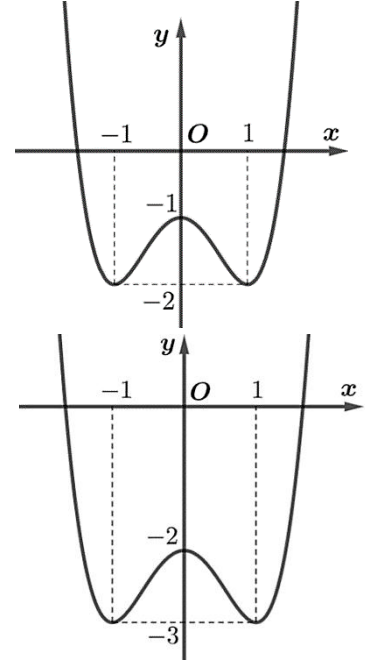
C. 3.

D. 0.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên.

Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

- A. 1.
B. 3.
C. 2.
D. 4.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình

$f(x) = -2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	7	1	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

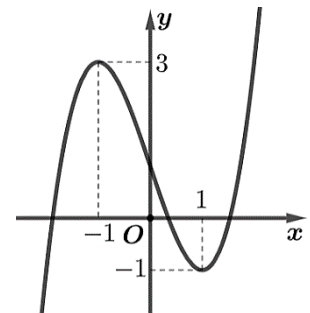
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$.

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

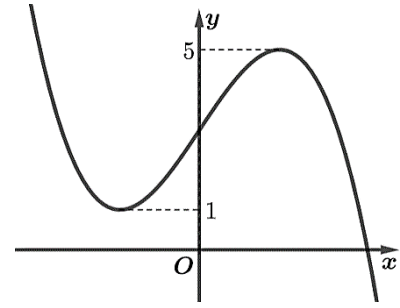
- A. 3.
B. 2.
C. 1.
D. 0.



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- A. 0.
B. 2.
C. 1.
D. 3.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên

sau:

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	3	1	5	$-\infty$			

Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

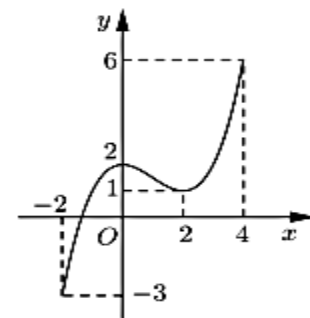
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
y			-2		$ $	$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$			$-\infty$	$ $		2	

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 4$ bằng

- A. 4. B. 3.
C. 2. D. 1.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là:

- A. 1. B. 0.



C. 2.

D.3.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.

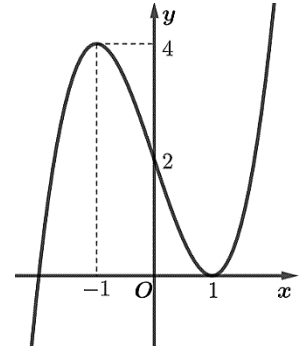
Phương trình $4f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-2; 2]$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.



Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của

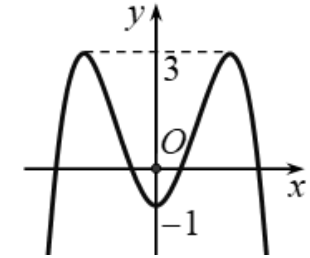
phương trình $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2$?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của

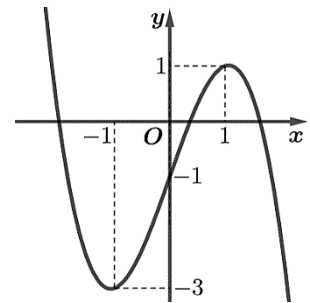
phương trình $2|f(x)| - 5 = 0$ là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.



Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

A. $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$.

B. $-2 < m < -1$.

C. $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$.

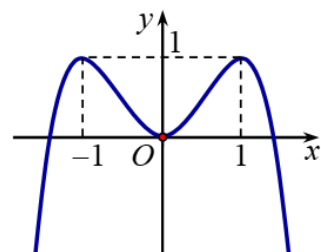
D. $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 1 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $0 \leq m \leq 1$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

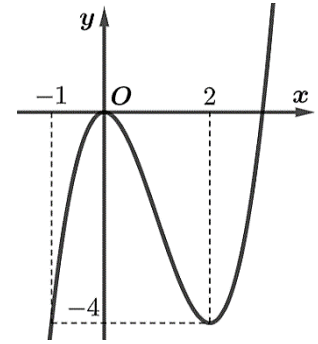
C. $0 < m < 1$.



D. $1 < m < 2$.

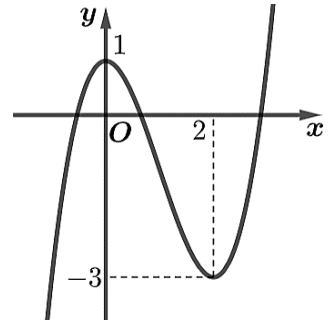
Câu 22. Đồ thị của hình dưới là của hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m > 0$.
B. $m = 0$ hoặc $m = 4$.
C. $m < -4$.
D. $m < -4$ hoặc $m > 0$.



Câu 23. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Phương trình có đúng một nghiệm.
B. Phương trình có đúng hai nghiệm.
C. Phương trình không có nghiệm.
D. Phương trình có đúng ba nghiệm.



Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm

- A. $m < -1$, $m = 2$.
B. $m \leq -1$, $m = 2$.
C. $m \leq 2$.
D. $m < 2$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$ ↘ -1	$-\infty$ ↗ 2	$-\infty$ ↘ -1	$+\infty$

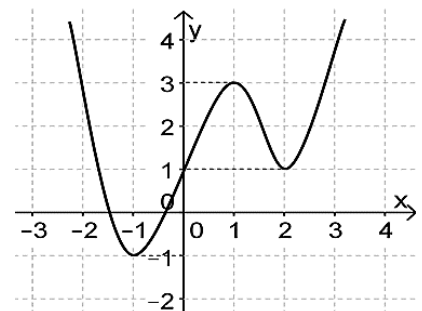
Câu 25. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. $-4 \leq m < 0$.
B. $-4 < m < 0$.
C. $-7 < m < 0$.
D. $-4 < m \leq 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Câu 26. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $m = 2$.
B. Không có giá trị nào của m .
C. $1 < m < 3$.
D. $-1 < m < 3$.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0; +\infty)$, liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0; 2)$ và $x_2 \in (2; +\infty)$.

- A. $(-2; -1)$.
B. $[-2; -1)$.
C. $(-2; 0)$.
D. $(-2; -1]$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'			+	0	-
y				0	

Diagram showing the function's behavior: A shaded region for $x < 0$ and $y < -2$. For $x > 0$, the function starts at $y = -2$ at $x = 0$, increases to a local maximum at $(1, 0)$, and then decreases, passing through $(2, -1)$ and approaching $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Câu 28. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Phương trình $f(1 - 2f(x)) = f(c)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 6.
B. 5.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	0	-	0
y			2		2

Diagram showing the function's behavior: The function has local maxima at $(-1, 2)$ and $(1, 2)$, and a local minimum at $(0, 1)$. As $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow -\infty$.

Câu 29. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1 - 2f(x)) = f(a + b + c + d)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$+\infty$		$-\infty$

Diagram showing the function's behavior: The function has a local minimum at $(-1, -1)$ and a local maximum at $(1, 1)$. As $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \mp\infty$.

Câu 30. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Phương trình $f(2 - f(x)) = f(16a + 4b + c)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6.
B. 5.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y		$+\infty$		2	

Diagram showing the function's behavior: The function has local minima at $(-2, 0)$ and $(2, 0)$, and a local maximum at $(0, 2)$. As $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

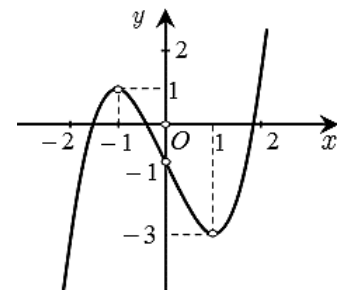
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	$\parallel$	+	0	-
y	$+\infty$	-2	$-\infty$	4	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm thực là

- A. $(4; +\infty)$. B. $(-2; 4)$.
C. $(-\infty; -2) \cup \{4\}$. D. $(-\infty; -2] \cup \{4\}$.

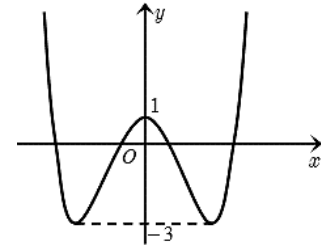
Câu 32. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$. Tìm m để $|x^3 - 3x - 1| = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. $m = 0$.
B. $1 < m < 3$.
C. $-3 < m < 1$.
D. $m = 0$ hoặc $m = 3$.



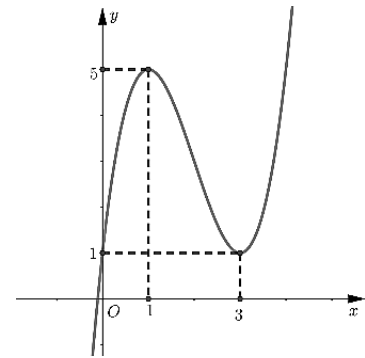
Câu 33. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Tìm m để $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt?

- A. $-3 < m < 1$.
B. $m = 0$.
C. $m = 0$ hoặc $m = 3$.
D. $1 < m < 3$.



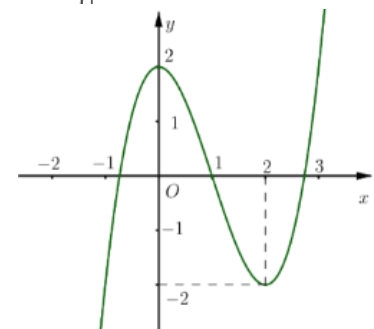
Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt?

- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m > 5 \end{cases}$.
B. $m < 1$.
C. $m = 1, m = 5$.
D. $1 < m < 5$.



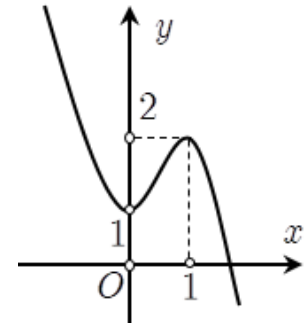
Câu 35. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = m$ có nhiều nghiệm nhất?

- A. $-2 \leq m \leq 2$.
B. $0 < m < 2$.
C. $-2 < m < 2$.
D. $0 \leq m \leq 2$.



Câu 36. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt?

- A. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 B. $m \in (-\infty; 1)$.
 C. $m \in (-\infty; 1) \cup \{2\}$.
 D. $m \in (2; +\infty)$.



Câu 37. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$. Tìm tham số thực m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?

- A. $1 < m < 3$.
 B. $m > 3$.
 C. $m = 0$.
 D. $m \in (1; 3) \cup \{0\}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$
		-1		-1	

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2 -2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (-1; 3)$.
 B. $m \in [-1; 3] \setminus \{0; 2\}$.
 C. $m \in (-2; 2)$.
 D. $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$.

Câu 39. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) - 1 = 2m$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$.

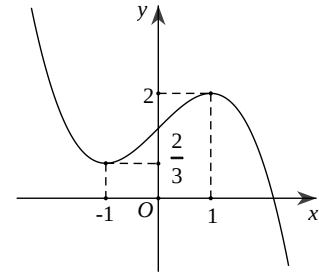
- A. $-1 < m \leq 1$.
 B. $-1 < m < 1$.
 C. $1 < m < 3$.
 D. $-1 < m < 3$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y			3			

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -1 -1

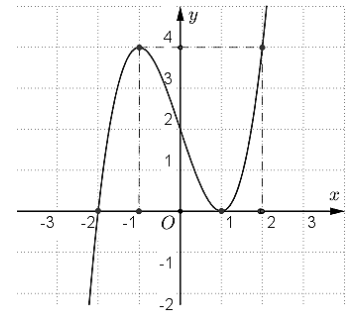
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x - 2029) = 1$.

- A. 2.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 4.



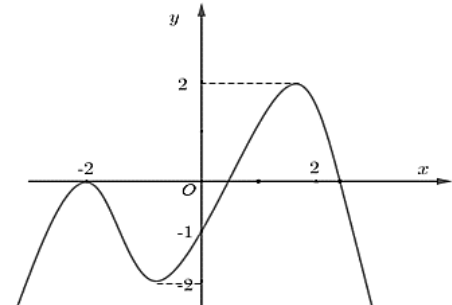
Câu 41. Cho hàm số đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(f(x) + 2) = f(x) + f(d)$ là

- A. 6.
- B. 7.
- C. 4.
- D. 5.



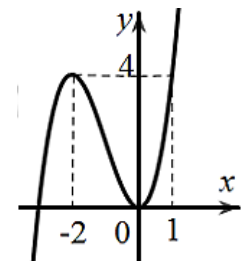
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 4.
- B. 7.
- C. 6.
- D. 9.



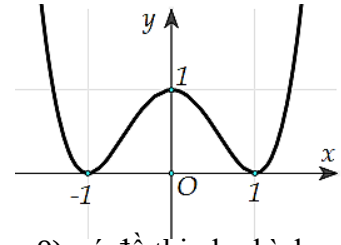
Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là

- A. $[0; 4]$.
- B. $[-1; 0]$.
- C. $[0; 1]$.
- D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.



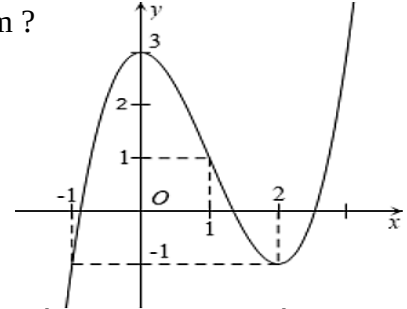
Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(\frac{4\sin x - 1}{3}\right) = m$ có nghiệm?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



Câu 45. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



Câu 46. (Đề tham khảo thi THPT năm 2020 – Bộ GD & ĐT) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

- A. 7.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	

DẠNG TOÁN 2. SỰ TƯƠNG GIAO LIÊN QUAN ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 47. Số giao điểm của $(C): y = (x+3)(x^2 + 3x + 2)$ với trục Ox là:

- A. 1. **B. 3.** C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox :

$$(x+3)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x^2 + 3x + 2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy số giao điểm giữa (C) & Ox là 3.

Câu 48. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và (d) là:

- A. 0. **B. 1.** C. 2. **D. 3.**

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: 2x^3 - 3x^2 + 1 = x - 1$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Vậy số giữa (C) và d có ba giao điểm.

Câu 49. Biết rằng đường thẳng $y = -3x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0 .

- A.** $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 0$. **C.** $y_0 = -4$. **D.** $y_0 = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho:

$$x^3 + x + 4 = -3x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x = 0 = x_0$, ta có: $y_0 = 4$.

Câu 50. Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B , C . Tính diện tích S của tam giác OBC , với O là gốc tọa độ:

- A.** $S = 4$. **B.** $S = 4\sqrt{5}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của của đồ thị hai hàm số đã cho: $x^3 + x + 4 = 2x + 4 \Leftrightarrow x^3 = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Với $x = 0$ thì $y = 4 \Rightarrow A(0; 4)$.

Với $x = 1$ thì $y = 6 \Rightarrow B(1; 6)$.

Với $x = -1$ thì $y = 2 \Rightarrow C(-1; 2)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{OB} = (1; 6) \\ \overrightarrow{OC} = (-1; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OBC} = S = \frac{1}{2} |1 \cdot 2 - 6(-1)| = 4.$$

⚡ Nhắc lại:

Nếu tam giác ABC có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (m_1; m_2) \\ \overrightarrow{AC} = (n_1; n_2) \end{cases} \text{ thì là}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |m_1 n_2 - m_2 n_1|.$$



Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

- A.** $m \in (-\infty; -4)$. **B.** $m \in (-4; 0)$.
C. $m \in (0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ -4	$\nearrow$ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$.

Câu 52. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

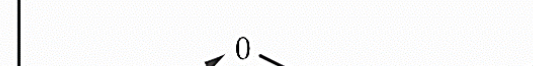
- A. $-\frac{1}{2}$. **B. $-\frac{3}{2}$.** C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases} (C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m + 1 \end{cases}$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 = -1 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Câu 53. Tìm tất cả tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-1) + 1$ cắt đồ thị (C) hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \neq 0$. B. $\begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{9}{4} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{9}{4} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) & $d: -x^3 + 3x - 1 = m(x-1) + 1$ (*)

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \underbrace{x^2 + x + m - 2}_{g(x)} = 0 \end{cases}.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(m-2) > 0 \\ 1^2 + 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Giải thích:

- Trong phương trình (*), khi nhẩm nghiệm, ta ưu tiên chọn số cụ thể $x = x_0$ sao cho m triệt tiêu, trong trường hợp này chỉ có giá trị $x = 1$ thỏa mãn. Khi thay $x = 1$ vào phương trình thì ta được hai vế bằng nhau ($1 = 1$). Vậy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (*).
- Tiếp theo ta chuyển phương trình về dạng $u(x) = 0$ rồi chia Hoocner, ta được phương trình tích $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + m - 2) = 0$.

Câu 54. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3; 20)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt là:

- A. $m < \frac{15}{4}$. B. $\begin{cases} m < \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$. D. $m \geq \frac{15}{4}$.

----Trích từ Đề thi tự luận – TSDH, CĐ 2006, khối D----

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đường thẳng d qua $A(3; 20)$ và có hệ số góc m có dạng: $y = m(x-3) + 20$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) & $d: x^3 - 3x + 2 = m(x-3) + 20$ (*)

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x-m+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \underbrace{x^2+3x-m+6}_{g(x)}=0 \end{cases}.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4(-m+6) > 0 \\ 3^2 + 3 \cdot 3 - m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 15 > 0 \\ 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}.$$

Câu 55. Tìm tất cả tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 3$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt, trong đó có đúng một điểm có hoành độ âm?

- A. $m < -9$.
 B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \neq -9 \end{cases}$.
 C. $m < -1$.
 D. $\begin{cases} m > -9 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) & d : $-x^3 + 3x - 1 = mx - 2m - 3$ $(*)$

$$\Leftrightarrow x^3 + (m-3)x - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \underbrace{x^2 + 2x + m+1}_{g(x)} = 0 \end{cases}.$$

Theo yêu cầu đề bài, ta thấy phương trình $g(x)=0$ phải có hai nghiệm khác 2 và trong đó có đúng một nghiệm âm.

$$\text{Xét } m+1=0 \Leftrightarrow m=-1, \text{ khi đó } g(x)=0 \text{ trở thành: } x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). } (1)$$

Với $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, để phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu và khác 2 thì $\begin{cases} ac < 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(m+1) < 0 \\ 4+4+m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -9 \end{cases}. (2)$$

$$\text{Hợp hai kết quả (1) với (2), ta có } \begin{cases} m \leq -1 \\ m \neq -9 \end{cases}.$$

Câu 56. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

- A. $m = -2$.
 B. $m = -3$.
 C. $m < -3$.
 D. $m > -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho: $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1)$ (*)

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - 2 - m}_{g(x)} = 0 \end{cases}$$

Hai đồ thị trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 - (-2 - m) > 0 \\ 1 - 2 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3. \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_3 = 1$, khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Theo định lí Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2 - m \end{cases}.$$

Theo đề: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1^2 = 5$

$\Leftrightarrow 2^2 - 2(-2 - m) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn (1)).

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = x + 3$ cắt đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 3$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 3)$, B , C thỏa mãn A là trung điểm của đoạn BC .

A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm 1$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) & $d: x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 3 = x + 3$ (1)

$$\Leftrightarrow x[x^2 - 3(m^2 - 1)x - 2m - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \underbrace{x^2 - 3(m^2 - 1)x - 2m - 2}_{g(x)} = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(m^4 - 2m^2 + 1) + 8m + 8 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^4 - 18m^2 + 8m + 17 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (2)$$

Với $x = 0$ thì $y = 3$, ta có $A(0; 3)$. Ta biết rằng hoành độ hai điểm B, C là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$, theo định lí Vi-ét: $x_B + x_C = -\frac{b}{a} = 3(m^2 - 1)$.

Do A là trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(x_B + 3) + (x_C + 3)}{2} = \frac{x_B + x_C + 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{3(m^2 - 1)}{2} \\ 3 = \frac{3(m^2 - 1) + 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Ta thấy $m = -1$ không thỏa (2). Với $m = 1$, thay vào (2), ta có: $\begin{cases} 9 - 18 + 8 + 17 > 0 \\ 1 \neq -1 \end{cases}$ (Đúng).

Vậy ta nhận $m = 1$.

Câu 58. Tìm m để đồ thị (C) của $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = mx + m$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(-1; 0)$, B , C sao cho $\triangle OBC$ có diện tích bằng 8.

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 4$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) & d : $x^3 - 3x^2 + 4 = mx + m$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \underbrace{x^2 - 4x + 4 - m}_{g(x)} = 0 \end{cases}.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^2 - (4 - m) > 0 \\ 1 + 4 + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases} \quad (2)$$

Với $x = -1$ thì $y = 0 \Rightarrow A(-1; 0)$.

Giả sử $B(x_1; mx_1 + m)$, $C(x_2; mx_2 + m)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OB} = (x_1; mx_1 + m) \\ \overrightarrow{OC} = (x_2; mx_2 + m) \end{cases}$. Vậy diện tích tam giác OBC :

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} |x_1(mx_2 + m) - x_2(mx_1 + m)| = \frac{1}{2} |m(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2} m |x_1 - x_2| \quad (\text{do } m > 0 \text{ từ điều kiện (2)}).$$

$$\text{Theo đề: } \frac{1}{2} m |x_1 - x_2| = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \left| \frac{2\sqrt{\Delta'_g}}{a} \right| = 8 \Leftrightarrow m \left| \frac{\sqrt{m}}{1} \right| = 8$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{m} = 8 \Leftrightarrow m^3 = 64 \Leftrightarrow m = 4 \quad (\text{thỏa mãn (2)}).$$

Câu 59. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - (3m - 1)x + 3$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $1 < m < 3$.

B. $3 < m < \frac{7}{2}$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $4 < m < \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) & Ox : $x^3 - 3x^2 - (3m-1)x + 3 = 0$ (*)

Giả sử phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, theo định lí Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 3 & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -3m+1 & (2) \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -3 & (3) \end{cases}$$

Do x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$ (4)

Thay (4) vào (1), ta có: $3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Thay nghiệm $x = x_2 = 1$ vào phương trình (*), ta có:

$$1 - 3 - (3m - 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Thử lại: Với $m = \frac{2}{3}$, phương trình (*) trở thành $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 = x_1 \\ x = 1 = x_2 \\ x = 3 = x_3 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 60. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 16x^2 + 13x + 2$ cắt trục tung tại điểm nào sau đây ?

- A.** $M(1; 0)$. **B.** $N(-1; 0)$. **C.** $P(0; 2)$. **D.** $O(0; 0)$.

Câu 61. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và trục hoành là bao nhiêu ?

- A.** 3 điểm. **B.** 2 điểm.
C. 1 điểm. **D.** 0 điểm.

Câu 62. Hỏi hai đồ thị $(C): y = x^3 - 2x + 2$ và $(C'): y = 3x^2 - x - 1$ có bao nhiêu giao điểm.

- A.** 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 63. Biết đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 4$ tại điểm duy nhất $(x_0; y_0)$.

Tìm $x_0 + y_0$.

- A.** $x_0 + y_0 = 6$. **B.** $x_0 + y_0 = 2$.
C. $x_0 + y_0 = 10$. **D.** $x_0 + y_0 = 8$.

Câu 64. Biết rằng đồ thị các hàm số $y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2$ và $y = x^2 + x - 2$ tiếp xúc nhau tại điểm

$M(x_0; y_0)$. Tìm x_0 .

- A. $x_0 = \frac{3}{2}$. B. $x_0 = \frac{1}{2}$. C. $x_0 = -\frac{5}{2}$. D. $x_0 = \frac{3}{4}$.

Câu 65. Biết rằng đường thẳng $y = 5x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Tính $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

- A. $S = 4$. B. $S = 10$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

Câu 66. Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B , C . Tìm tọa độ trung điểm M của đường thẳng BC .

- A. $M\left(0; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(0; 2)$. C. $M\left(0; \frac{8}{3}\right)$. D. $M(0; 4)$.

Câu 67. Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B , C . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OBC , với O là gốc tọa độ.

- A. $G(0; 2)$. B. $G\left(0; \frac{8}{3}\right)$. C. $G(0; 4)$. D. $G\left(0; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 68. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại ba điểm phân biệt?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt?

- A. 7. B. 5. C. 3. D. 9.

Câu 70. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình bên. Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m + 2 = 0$ có đúng một nghiệm.

- A. $0 < m < 2$. B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $m < -2$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0$ có nghiệm duy nhất lớn hơn 2.

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $m \leq -4$. C. $m < -4$. D. $m > 0$.

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 < m < 2$. B. $4 < m < 6$. C. $2 < m < 3$. D. $-2 < m < 1$.

Câu 73. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 3$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x + 3$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 sao cho $y_1 + y_2 + y_3 = 9$. Tìm giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu trên.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{5}{2}$.

- Câu 74.** Tìm tất cả tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt biết rằng $d: y = mx + m + 5$ và $(C): y = x^3 + 3x^2 - x + 2$.
- A. $m < 4$. B. $m > -3$. C. $m > -4$. D. $m < 3$.
- Câu 75.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Một đường thẳng Δ có hệ số góc k và đi qua điểm $I(0; 2)$. Hãy tìm số nguyên k nhỏ nhất để hai đồ thị (C) và d có ba giao điểm.
- A. 0. B. -2. C. -1. D. 2.
- Câu 76.** Cho đồ thị $(C): y = 4x^3 - 3x + 1$ và đường thẳng $(d): y = m(x - 1) + 2$. Tất cả giá trị tham số m để (C) cắt (d) tại một điểm là:
- A. $m < 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq 0 \vee m = 9$. D. $m = 9$.
- Câu 77.** Cho hàm số $y = x^3 - (m + 3)x^2 + (2m - 1)x + 3(m + 1)$. Tìm tập hợp tất cả giá trị m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ âm.
- A. $\emptyset$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-\infty; -4)$. D. $(-1; +\infty) \setminus \{2\}$.
- Câu 78.** Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - 1$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt đường thẳng $d: y = x - 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 20$.
- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.
- Câu 79.** Cho hàm số $y = x^3 - 7x^2 - 14(3m - 1)x - 8$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
- A. $1 < m < 3$. B. $3 < m < \frac{7}{2}$. C. $-1 < m < 1$. D. $4 < m < \frac{9}{2}$.
- Câu 80.** Cho hàm số đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(1; 2)$ với hệ số góc k . Với giá trị nào của k thì (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B thỏa I là trung điểm AB .
- A. $k > -3$. B. $\forall k \in \mathbb{R}$. C. $k = -3$. D. $k = 0$.
- Câu 81.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.
- A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in (-\infty; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 3)$.
- Câu 82.** Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua $A(2; 0)$ có hệ số góc k . Tìm k sao cho đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $G(1; -1)$ là trọng tâm của tam giác OBC , với O là gốc tọa độ.
- A. $k = -3$. B. $k = 3$. C. $k = -4$. D. $k = 4$.
- Câu 83.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = m(x - 2) + 4$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn A là điểm có hoành độ không đổi, thỏa mãn $BC = 2\sqrt{30}$.
- A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(1;0)$, B , C thỏa mãn tam giác MBC có diện tích bằng 2, với $M(0;1)$.

- A. $m = 3$. B. $m = \frac{17}{4}$. C. $m = 4$. D. $m = \frac{19}{4}$.

Câu 85. Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- A. $m = 3$. B. $m = 2$ hoặc $m = 3$.
C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. D. $m = -2$ hoặc $m = 3$.

Câu 86. Cho hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^2 + (8-a)x - b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) . Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

- A. -729 . B. 375 . C. 225 . D. -384 .

DẠNG TOÁN 3. SỰ TƯƠNG GIAO LIÊN QUAN ĐỒ THỊ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 87. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox là:

- A. 1.
- B. 2.**
- C. 4. D. 3.

*Hướng dẫn giải***Chọn B.**Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox :

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại hai điểm phân biệt.**Câu 88.** Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đồ thị $(P): y = 1 - x^2$. Số giao điểm của (P) và đồ thị (C) là.

- A. 1.
- B. 2.**
- C. 3. D. 4.

*Hướng dẫn giải***Chọn B.**Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$x^4 - 4x^2 - 2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ x^2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{Với } x^2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \text{ thì } x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{2}}.$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị trên bằng 2.

Câu 89. Tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ tại 4

điểm phân biệt là

- A.
- $m > -3$
- . B.
- $m < 1$
- .
-
- C.
- $-12 < m < 3$
- .
- D. $-3 < m < 1$.**

*Hướng dẫn giải***Chọn D.**

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1 \text{ có } y' = x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

GIẢI TÍCH 12 – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Câu 90. Tìm m để phương trình $x^4 - 4x^2 - m + 3 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m > 4$.

B. $-1 < m < 3$.

C. $\begin{cases} m < -3 \\ m = -7 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $x^4 - 4x^2 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = m$.

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$; $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		-1	3	-1	$+\infty$

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ cắt đường thẳng có phương trình $y = m$ tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Câu 91. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 6 - 2m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành: $x^4 - 2mx^2 + 6 - 2m = 0$ (1)

ĐỂ KHÔNG MỘT AI BỊ BỎ LẠI PHÍA SAU

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2mt + 6 - 2m = 0$ (2)

Ta có (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$$\text{Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ P = t_1 t_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (6 - 2m) > 0 \\ 2m > 0 \\ 6 - 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - \sqrt{7} \vee m > -1 + \sqrt{7} \\ m > 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1 + \sqrt{7}; 3).$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$. Vậy chỉ có đúng một giá trị nguyên m thỏa đề bài.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m = 1 \end{cases}$

C. $m \leq 0$.

D. $m > 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành: $x^4 - 2x^2 + m = 0$ (1)

Cách giải 1: Dùng phương pháp biện luận bậc hai.

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t + m = 0$ (2).

Từ đề bài, ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

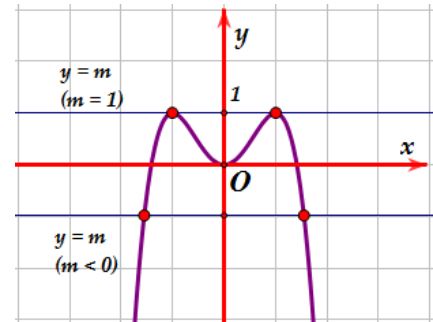
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Phương trình (2) có nghiệm kép dương} \\ \text{Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 > 0 \\ ac = 1 \cdot m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Cách giải 2: Dùng đồ thị hàm số

Phương trình (1) $\Leftrightarrow m = -x^4 + 2x^2$.

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ (nằm ngang) cắt đồ thị

hàm số $g(x) = -x^4 + 2x^2$ tại hai điểm $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 0 \end{cases}$



Câu 93. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 6 - 2m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Biết rằng (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2}$.

B. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{9}{2}$.

D. $\frac{9}{2} < m < 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành: $x^4 - 2mx^2 + 6 - 2m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành: $t^2 - 2mt + 6 - 2m = 0$ (2)

Ta có: (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0.

Do (2) có một nghiệm bằng 0 nên: $0^2 - 2m \cdot 0 + 6 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại, với $m = 3$ thì (1) thành $x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Câu 94. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành: $x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) thành: $t^2 + 2mt + m^2 - 3m = 0$ (2)

Ta có: (C_m) cắt Ox tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Phương trình (2) có nghiệm kép bằng 0} \\ \text{Phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm} \end{cases}$

Trong cả hai trường hợp thì (2) đều có nghiệm bằng 0 $\Rightarrow 0^2 + 2m \cdot 0 + m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

Với $m = 0$ thì (1) trở thành $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

Với $m = 3$ thì (1) trở thành $x^4 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 2 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Câu 95. Cho hàm số $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả giá trị thực của m để đường thẳng $(d): y = 2$ cắt đồ thị (C_m) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

A. $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < \frac{11}{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < 2 \end{cases}$ **C.** $1 < m < \frac{11}{2}$ **D.** $m \neq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $d: x^4 - (2m-1)x^2 + 2m = 2$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - (2m-1)t + 2m - 2 = 0$ (2)

Từ (2) ta thấy: $a + b + c = 1 - (2m-1) + 2m - 2 = 0$ nên (2) có hai nghiệm: $\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = 2m - 2 \end{cases}$

Để d cắt (C_m) tại bốn điểm phân biệt thì (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 \neq 1 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ m > 1 \end{cases}$$

Khi $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 < 3$ (thỏa).

Khi $t = 2m - 2$ thì $x^2 = 2m - 2$. Từ đề bài: $x < 3 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow 2m - 2 < 9 \Rightarrow m < \frac{11}{2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ 1 < m < \frac{11}{2} \end{cases}$$

Câu 96. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Biết (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $-3 \leq m \leq -1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $1 \leq m \leq 3$.

D. $3 < m < 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành: $x^4 - 2mx^2 + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2mt + 1 = 0$ (2).

Để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-m)^2 - 1 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = 2m > 0 \Leftrightarrow m > 1 \quad (*) \\ P = t_1 t_2 = 1 > 0 \end{cases}$$

Giả sử phương trình (2) có hai nghiệm $t_2 > t_1 > 0$, ta có cặp số cộng: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Suy ra $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) = -\sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_2}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (3)

Hơn nữa, ta đã có $t_1 t_2 = 1$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $9t_1^2 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}$ (vì $t_1 > 0$).

Thay $t = t_1 = \frac{1}{3}$ vào (2): $\frac{1}{9} - 2m \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn (*)).

★ **Lưu ý:** Trong bài trên, sau khi tìm được $m = \frac{5}{3}$. Ta có thể thử lại bằng cách thay $m = \frac{5}{3}$

vào (2):

$$t^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_4 = \sqrt{3}. \text{ Nhận thấy bốn giá}$$

trị x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự trên đã lập thành cặp số cộng.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 97. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm ?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 98. Đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm chung ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 99. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 7x^2 - 6$ và $y = x^3 - 13x$ là bao nhiêu ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 100. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung ?

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 101. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 3$ có đồ thị là (C). Parabol (P): $y = -x^2 - 1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt. Tổng bình phương các hoành độ giao điểm của P và (C) bằng:

- A. 5. B. 4. C. 10. D. 8.

Câu 102. Tìm số giao điểm n của đồ thị hàm số $y = x^2 |x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

- A. $n = 6$. B. $n = 8$. C. $n = 2$. D. $n = 4$.

Câu 103. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $m > -3$. B. $-2 < m < -1$. C. $m < -2$. D. $-3 < m < -2$.

Câu 104. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ với trục hoành (với m là tham số thực).

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

- Câu 105.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng $d: y - m = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt ?
 A. $-4 < m < -3$. B. $m < -4$.
 C. $m > -3$. D. $-4 < m < -2$.
- Câu 106.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng $d: y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 2x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt ?
 A. $\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$.
 C. $m \leq \frac{1}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.
- Câu 107.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?
 A. $m \in (3; +\infty)$. B. $m \in [3; +\infty)$.
 C. $m \in (3; +\infty) \cup \{2\}$. D. $m \in \{2; 3\}$.
- Câu 108.** Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt ?
 A. $0 < m < 1$. B. $-1 < m \leq 0$.
 C. $-1 < m < 0$. D. $-1 \leq m < 0$.
- Câu 109.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.
 A. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. C. Không có m . D. $\begin{cases} m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$.
- Câu 110.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt.
 A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 1)$.
 C. $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.
- Câu 111.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 12 - m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 18 để (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.
 A. 5. B. 11. C. 8. D. 6.
- Câu 112.** Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m - 2$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 10 để (C_m) không cắt trục hoành.
 A. 9. B. 7. C. 10. D. 8.
- Câu 113.** Cho hàm số $y = x^4 - (m+2)x^2 + m+1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 10 để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2?
 A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.
- Câu 114.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Biết (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 12$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$. B. $1 < m < \frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2} < m < \frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{2} < m < 6$.

Câu 115. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ (C_m). Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành một cấp số cộng. Tính tổng T của tất cả phần tử trong S .

- A. $T = 0$. B. $T = \frac{14}{9}$. C. $T = -\frac{13}{9}$. D. $T = 1$.

Câu 116. Cho hàm số $y = -x^4 - 2mx^2 + m^2 + m$ (C_m). Biết rằng khi (C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $AB = BO = OC = CD$ thì tham số m có dạng phân số tối giản

$$m = \frac{p}{q}. \text{ Hãy tính } p^2 + q^2.$$

- A. $p^2 + q^2 = 4721$. B. $p^2 + q^2 = 916$.
C. $p^2 + q^2 = 2306$. D. $p^2 + q^2 = 10000$.

DẠNG TOÁN 4. SỰ TƯƠNG GIAO LIÊN QUAN ĐỒ THỊ HÀM NHẤT BIẾN

★ BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 117. Đường thẳng (d): $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là

- A. $(0; -1), (2; 1)$. B. $(-1; 0), (2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (C) \text{ và } d: \frac{2x-1}{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Với $x = 0$, thay vào phương trình d , ta có $y = -1$; tương tự, $x = 2 \Rightarrow y = 1$. Do đó đồ thị (C) và d có hai giao điểm là $(0; -1), (2; 1)$.

Câu 118. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = 2x - 3$. Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm A và B . Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn AB bằng:

- A. $x_I = -\frac{4}{3}$. B. $x_I = -\frac{3}{4}$. C. $x_I = \frac{4}{3}$. D. $x_I = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (C) \text{ và } d: \frac{2x-1}{x+1} = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Hoành độ hai điểm A, B là $x_A = 2, x_B = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Hoành độ trung điểm I của AB là

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Câu 119. Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 2$. B. $AB = \sqrt{5}$. C. $AB = \sqrt{2}$. D. $AB = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của của đồ thị hai hàm số đã cho: $2x - 1 = \frac{3x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (2x-1)(x+1) = 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Các giao điểm cần tìm là : $A(0; -1), B(1; 1) \Rightarrow \overline{AB} = (1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Câu 120. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = 2x - m$. Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm A và B khi giá trị của m thỏa:

- A. $-4 - 2\sqrt{6} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{6}$. B. $m \leq -4 - 2\sqrt{6} \vee m \geq -4 + 2\sqrt{6}$.
C. $-4 - 2\sqrt{6} < m < -4 + 2\sqrt{6}$. D. $m < -4 - 2\sqrt{6} \vee m > -4 + 2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $d: \frac{2x-1}{x+1} = 2x - m$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^2 - mx + 1 - m = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (-m)^2 - 8(1-m) > 0 \\ 2+m+1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4 - 2\sqrt{6} \vee m > -4 + 2\sqrt{6}.$$

Câu 121. Cho hàm số $(H): y = \frac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = x + m$. Với giá trị nào của m thì (H) và d cắt nhau tại hai điểm?

- A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $m > 2 \vee m < -2$.
C. $-2 < m < 2$. D. $m \in \emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d): $\frac{x}{x-1} = x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + (m-2)x - m = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

d cắt (H) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (m-2)^2 - 4(-m) > 0 \\ g(1) = 1 + (m-2) - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng).}$$

Câu 122. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C).

A. $m > 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $m = \emptyset$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d): $x - m = \frac{x+3}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-m)(x+1) = x+3 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - mx - m - 3 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Ta có d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (-m)^2 - 4(-m-3) > 0 \\ (-1)^2 - m(-1) - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 8 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

d cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C) nên phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 < 0$ (1).

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -m-3 \end{cases}$ (2). Thay (2) vào (1): $-m-3+m+1 < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì yêu cầu đề bài được thỏa mãn.

Câu 123. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tập hợp tất cả

giá trị thực m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

A. $m = 6$.

B. $m = 0$.

C. $m = 0 \vee m = 6$.

D. $0 \leq m \leq 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$\frac{2x+1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + (m-1)x + m-1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Ta có d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ g(-1) = (-1)^2 - (m-1) + m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 5 \quad (*)$$

Gọi $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overline{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) &\Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2} |x_2 - x_1| \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_g}}{|a|} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 - 6m + 5}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề: } AB = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 - 6m + 5} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 2(m^2 - 6m + 5) = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \end{cases} \text{ (nhận do (*)).}$$

Câu 124. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả tham số thực m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị của hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$.

Tính tổng bình phương tất cả phần tử trong S.

A. 8. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^2 + (4-m)x + 1-m = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Ta có hai đồ thị này cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta_g = (4-m)^2 - 8(1-m) > 0 \\ g(-1) = 2 - (4-m) + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Gọi $\begin{cases} A(x_1; -2x_1 + m) = \overline{OA} \\ B(x_2; -2x_2 + m) = \overline{OB} \end{cases}$, suy ra diện tích tam giác OAB:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |x_1(-2x_2 + m) - x_2(-2x_1 + m)| = \frac{1}{2} |m(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2} |m| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} |m| \cdot \frac{\sqrt{\Delta_g}}{|a|} = \frac{1}{2} |m| \cdot \frac{\sqrt{m^2 + 8}}{2}.$$

$$\text{Theo đề: } S_{\Delta OAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|m| \cdot \frac{\sqrt{m^2+8}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{m^2(m^2+8)}{16} = 3$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 8m^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m^2 = -12 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Tổng bình phương các phần tử trong S là: $2^2 + (-2)^2 = 8$.

Câu 125. Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$. Tìm tất cả giá trị k để (H) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và từ B đến trục hoành bằng nhau.

A. $k = -\frac{1}{2}$.

B. $k = \frac{1}{3}$.

C. $k = 0$.

D. $k = -3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d :

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Ta có: (H) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta_g = (3k-1)^2 - 4k \cdot 2k > 0 \\ g(-1) = k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} (*)$$

Gọi hai điểm A, B thuộc đường thẳng d có tọa độ $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với

$$x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } g(x) = 0. \text{ Theo định lí Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-3k}{k} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases} (1)$$

Khoảng cách từ mỗi điểm A, B đến trục hoành bằng nhau: $d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |y_A| = |y_B|$

$$\Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ (loại)} \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} (2)$$

Thay (1) vào (2): $k \cdot \frac{1-3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$ (thỏa mãn (*)).

Câu 126. Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = x + m$ và điểm $C(-2; 5)$.

Biết rằng có tất cả hai giá trị thực m_1, m_2 để khi $m \in \{m_1; m_2\}$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A và B sao cho $\triangle ABC$ đều. Hãy tính $|m_1 - m_2|$.

A. $|m_1 - m_2| = 1$.

B. $|m_1 - m_2| = 6$.

C. $|m_1 - m_2| = 3$.

D. $|m_1 - m_2| = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) :

$$\frac{2x+1}{x-1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Ta có (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + 4(m+1) > 0 \\ 1^2 + (m-3) - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 13 > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{\sqrt{\Delta_g}}{|a|} \right)^2} = \sqrt{2(m^2 - 2m + 13)}$$

$$\text{Với } (d): x - y + m = 0 \text{ thì } d(C, (d)) = \frac{|-2 - 5 + m|}{\sqrt{2}}.$$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow H \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 + 2m}{2} \right)$, theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 3 - m$,

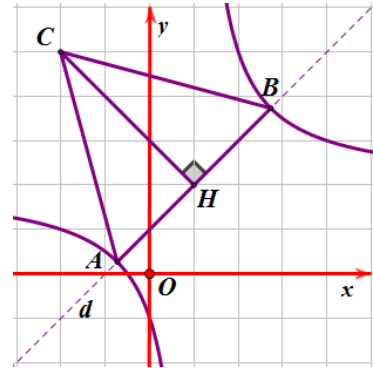
$$\text{do đó } H \left(\frac{3-m}{2}; \frac{3+m}{2} \right), \overrightarrow{CH} = \left(\frac{3-m}{2} + 2; \frac{3+m}{2} - 5 \right) = \left(\frac{7-m}{2}; \frac{m-7}{2} \right)$$

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow d(C, (d)) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow \frac{|m-7|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2(m^2 - 2m + 13)}$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2 = 3(m^2 - 2m + 13) \Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Với $m = 1$ thì $\overrightarrow{CH} = (3; -3)$, (d) có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1)$ nên $CH \perp (d)$ (do $\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u}_d = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0$). Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

Với $m = -5$ thì $\overrightarrow{CH} = (6; -6)$ nên $\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u}_d = 0$ tức là $m = -5$ thỏa mãn.



Ta có $m_1 = 1, m_2 = -5 \Rightarrow |m_1 - m_2| = 6$.

★ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 127. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{4x}$ với trục hoành là bao nhiêu ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 128. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN với M, N là giao điểm của đường thẳng (d) :

$y = x + 1$ và đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+2}{x-1}$ là:

- A. $I(-1; -2)$. B. $I(-1; 2)$. C. $I(1; -2)$. D. $I(1; 2)$.

Câu 129. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x+2}{x+1}$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = 2x^4 - x^2$ tại điểm có tọa độ là:

- A. $(1; 1), (-1; 1)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 130. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $\Delta: y = 2x - 1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Khi đó $y_1 + y_2$ bằng:

- A. 4. B. 8. C. 2. D. 6.

Câu 131. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ cắt các trục tọa độ tại A, B . Tính độ dài đoạn AB .

- A. $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $AB = \frac{1}{2}$. C. $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $AB = \frac{5}{4}$.

Câu 132. Đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và đồ thị hàm số $y = 5 + \frac{3}{x}$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Tính độ dài đoạn AB .

- A. $AB = 8\sqrt{5}$. B. $AB = 25$.
C. $AB = 4\sqrt{2}$. D. $AB = 10\sqrt{2}$.

Câu 133. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+5}$ và đường thẳng $y = x - 1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $x_I = 1$. B. $x_I = -2$. C. $x_I = 2$. D. $x_I = -1$.

Câu 134. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

- A. $I(1; 2)$. B. $I(-2; -3)$. C. $I(1; 3)$. D. $I(2; 3)$.

Câu 135. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại 2 điểm phân biệt ?

- A. $m \in (-\infty; 2]$. B. $m \in (-\infty; 2)$.

C. $m \in (-\infty; -2)$.

D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 136. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị $y = \frac{x}{x-1}$ cắt đường thẳng $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt ?

A. $1 < m < 4$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 2$.

C. $m < 0$ hoặc $m > 4$.

D. $m < 1$ hoặc $m > 4$.

Câu 137. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt ?

A. $m > 2$.

B. $m < 6$.

C. $m = 2$.

D. $m < 2$ hoặc $m > 6$.

Câu 138. Cho hàm số (C): $y = \frac{x}{x-1}$. Giá trị của m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 139. Cho hàm số (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Giá trị của m để đường thẳng $d: y = mx + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

B. $m \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \setminus \{0\}$.

D. $m \in (-3; 1) \setminus \{0\}$.

Câu 140. Giá trị của m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là:

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $m \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 141. Giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = mx + m - 1$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x+2}{2x+1}$ tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị (C) là:

A. $m < -3$.

B. $m > -3$.

C. $m \in (3; 0)$.

D. $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0)$.

Câu 142. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm có hoành độ đối nhau.

A. $m = 1$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = 3$.

D. $m = 0$.

Câu 143. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Tìm tất cả giá trị của m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 22$.

- A. $m = \pm 6$. B. $m = \pm 4$. C. $m = 6$. D. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 6 \end{cases}$.

Câu 144. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ (C). Gọi m là giá trị để đường thẳng $d: y = 2x + 3m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{15}{2}$ với O là gốc tọa độ. Giá trị của m bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. 2.

Câu 145. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết rằng có hai giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $AB = \sqrt{34}$. Tính tổng $m_1 + m_2$.

- A. -2. B. -4. C. -6. D. 0.

Câu 146. Cho hàm số (C): $y = \frac{x+3}{x+1}$. Đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N và MN ngắn nhất khi:

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

Câu 147. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 148. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết rằng đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m \in (5; 7)$. B. $m \in (0; 2)$. C. $m \in (-4; 0)$. D. $m \in (7; 10)$.

Câu 149. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ (C). Tính tổng tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B và cắt tiệm cận đứng của (C) tại M sao cho $MA^2 + MB^2 = 25$.

- A. -2. B. 9. C. 10. D. -6.

Câu 150. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 3. C. 0. D. 8.

GIẢI TÍCH 12 – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đáp án Dạng toán 1				7B	8C	9B	10C	11C	12A	13B
14B	15C	16D	17D	18D	19C	20A	21D	22D	23D	24B
25B	26C	27A	28B	29D	30B	31A	32D	33C	34A	35C
36C	37D	38D	39C	40C	41C	42D	43D	44C	45C	46C

Đáp án Dạng toán 2				60C	61B	62D	63C	64B	65C	66D
67B	68B	69C	70B	71C	72A	73B	74C	75B	76A	
77A	78C	79C	80A	81D	82B	83C	84D	85A	86B	

Đáp án Dạng toán 3				97D	98A	99C	100D	101C	102A	103B	104B
105A	106D	107C	108B	109B	110A	111D	112A	113B	114C	115B	116C

Đáp án Dạng toán 4				127A	128D	129A	130A	131A	132C	
133D	134A	135B	136C	137D	138D	139C	140B	141D		
142A	143D	144C	145B	146D	147B	148A	149C	150A		

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

HOÀNG XUÂN NHÀN

MỤC LỤC

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ	trang 01
PHẦN I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM ĐA THỨC, HÀM PHÂN THỨC, HÀM CHỨA CĂN VÀ LƯỢNG GIÁC	trang 01
Dạng toán 1. Xét tính đơn điệu của hàm số	trang 01
Dạng toán 2. Tìm tham số m để đạo hàm của hàm số không đổi dấu	trang 06
Dạng toán 3. Hàm số nhất biến đơn điệu trên tập K	trang 09
Dạng toán 4. Tính đơn điệu của hàm mở rộng hàm nhất biến	trang 11
Dạng toán 5. Hàm số đa thức bậc ba đơn điệu trên tập K	trang 14
Dạng toán 6. Hàm số bậc cao, hàm chứa căn, hàm chứa mẫu đơn điệu trên tập K	trang 20
Dạng toán 7. Tính đơn điệu một số hàm lượng giác chứa tham số	trang 25
Đáp án trắc nghiệm Phần I	trang 27
PHẦN II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM ẨN, HÀM HỢP, HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI	trang 28
Dạng toán 1. Tính đơn điệu của hàm số có đạo hàm cho trước	trang 28
Dạng toán 2. Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$	trang 31
Dạng toán 3. Tính đơn điệu của hàm hợp có dạng phức tạp	trang 35
Dạng toán 4. Xét tính đơn điệu bằng kỹ thuật truy ngược hàm ẩn	trang 46
Dạng toán 5. Bài toán đơn điệu có tham số của hàm chứa giá trị tuyệt đối	trang 49
Đáp án trắc nghiệm Phần II	trang 55
BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	trang 56
Dạng toán 1. Tìm điểm cực trị của hàm số, của đồ thị hàm số	trang 58
Dạng toán 2. Điều kiện cực trị của hàm số bậc ba chứa tham số	trang 66
Dạng toán 3. Điều kiện cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương chứa tham số	trang 79
Dạng toán 4. Tìm điểm cực trị của hàm hợp khi biết đồ thị đạo hàm	trang 88
Dạng toán 5. Bài toán vận dụng cao cực trị hàm chứa tham số	trang 101
Đáp án trắc nghiệm	trang 109

BÀI 3. MAX-MIN CỦA HÀM SỐ	trang 111
Dạng toán 1. Tìm Max-Min của hàm số trên một đoạn	trang 111
Dạng toán 2. Tìm Max-Min của hàm số trên một khoảng, nửa khoảng.....	trang 116
Dạng toán 3. Tìm tham số thỏa mãn điều kiện Max-Min cho trước.....	trang 118
Dạng toán 4. Tìm Max-Min cho bài toán thực tế	trang 123
Đáp án trắc nghiệm	trang 131
BÀI 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 132
Dạng toán 1. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm phân thức.....	trang 132
Dạng toán 2. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn	trang 137
Dạng toán 3. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm ẩn.....	trang 143
Dạng toán 4. Tiệm cận của đồ thị hàm có chứa tham số	trang 152
Dạng toán 5. Những bài toán liên quan đến tiệm cận	trang 159
Đáp án trắc nghiệm	trang 162
BÀI 5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 163
Dạng toán 1. Nhận diện đồ thị hàm số bậc ba	trang 165
Dạng toán 2. Nhận diện đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương	trang 173
Dạng toán 3. Nhận diện đồ thị hàm số nhất biến	trang 179
Dạng toán 4. Phép biến đổi đồ thị hàm số	trang 187
Đáp án trắc nghiệm	trang 200
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ	trang 201
Dạng toán 1. Sự tương giao khi biết đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số	trang 201
Dạng toán 2. Sự tương giao liên quan đồ thị hàm số bậc ba	trang 214
Dạng toán 3. Sự tương giao liên quan đến đồ thị hàm bậc bốn trùng phương.....	trang 225
Dạng toán 4. Sự tương giao liên quan đến đồ thị hàm nhất biến.....	trang 232
Đáp án trắc nghiệm	trang 241