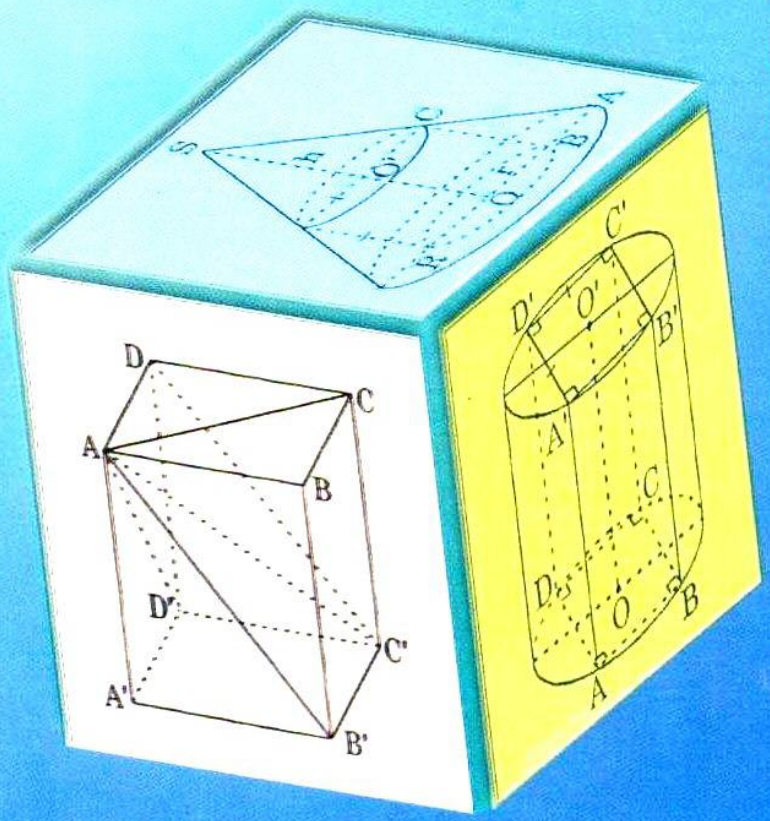
HÀ VĂN CHƯƠNG

BÀI TẬP TỰ LUẬN - TRẮC NGHIỆM

Hình học 12

CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

- Tóm tắt lí thuyết
- 200 bài tập tự luận
- 375 câu trắc nghiệm
- Giải rõ ràng, dễ hiểu



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ VĂN CHƯƠNG

BÀI TẬP TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM

HÌNH HỌC 12

(Cơ bản & Nâng cao)

Theo chương trình của BGD & ĐT

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *200 bài tập tự luận*
- *375 câu trắc nghiệm*
- *Phương pháp giải rõ ràng, dễ hiểu*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Chương I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. PHÉP TỊNH TIẾN, PHÉP ĐỐI XỨNG VÀ PHÉP QUAY TRONG KHÔNG GIAN

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I.. Phép tịnh tiến

1. Định nghĩa: Trong không gian cho vectơ $\vec{v}$, qui tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến trong không gian theo vectơ $\vec{v}$ và được ký hiệu $T_{\vec{v}}$.

2. Nhận xét

a) $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$

b) $M' = T_{\vec{v}}(M)$; $N' = T_{\vec{v}}(N) \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

c) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến mặt phẳng thành mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đã cho.

II. Phép đối xứng qua mặt phẳng

1. Định nghĩa: Trong không gian cho mp(P), với mỗi điểm M, gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên (P), gọi M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$. Qui tắc đặt tương ứng với mỗi điểm M với điểm M' xác định như trên được gọi là phép đối xứng qua mp(P), và đặt ký hiệu $Đ_{(P)}$.

2. Nhận xét

a) $M' = Đ_{(P)}(M) \Leftrightarrow M = Đ_{(P)}(M')$

b) Nếu M thuộc mp(P) thì $Đ_{(P)}(M) = 1$. Nếu M không thuộc mp(P) thì $M' = Đ_{(P)}(M)$ khi và chỉ khi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'

III. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa: Trong không gian cho điểm I. Qui tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép đối xứng tâm I, trong không gian. Điểm I được gọi là tâm đối xứng.

2. *Nhận xét:* Gọi f là phép đối xứng tâm I.

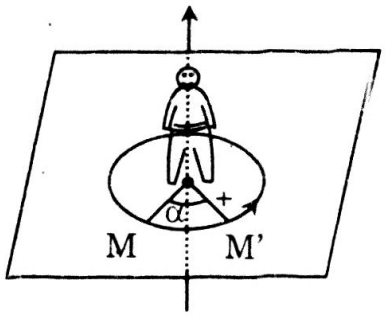
a) Nếu M ≡ I thì f(M) = I. Nếu M khác I thì M' = f(M) khi và chỉ khi I là trung điểm của MM'.

b) Nếu M' = f(M), N' = f(M) thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$

c) Phép đối xứng qua tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến mặt phẳng thành mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đã cho.

IV. Phép quay quanh một trục

1. *Khái niệm về phép quay quanh một trục*



Trong không gian cho đường thẳng d trên đó đã xác định một hướng dương, α là một góc lượng giác cho trước với mỗi điểm M, gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt d tại I.

Gọi M' là ảnh của M qua phép quay trong mp(P) tâm I góc quay α. Chiều dương của phép quay được chọn sao cho một người (tưởng tượng) đứng tại I, hướng từ chân đến đầu trùng với hướng dương của đường thẳng d sẽ thấy trong mp(P) chiều quay đó ngược với chiều quay của kim đồng hồ. Qui tắc, đặt tương ứng với mỗi điểm M với điểm M' xác định như trên được gọi là phép quay quanh trục d, góc quay α

2. *Chú ý:* Phép quay quanh trục d, góc quay $(2k + 1)\ 180^0$ với k là một số nguyên còn được gọi là phép đối xứng qua trục d.

V. Tính chất

1. *Định lý:* Các phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt phẳng phép đối xứng qua tâm và phép quay quanh một trục là những phép biến hình trong không gian bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

2. *Hệ quả:* Trong không gian các phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt phẳng, phép đối xứng qua tâm và phép quay quanh một trục:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của chúng.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia

c) Biến mặt phẳng thành mặt phẳng, biến nửa mặt phẳng thành nửa mặt phẳng.

d) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó

e) Biến một góc thành một góc bằng nó

f) Biến một tam giác thành một tam giác bằng nó

h) Biến một mặt cầu bán kính r thành một mặt cầu bán kính r

VI. Hình có mặt phẳng đối xứng, có trục đối xứng, có tâm đối xứng

Định nghĩa: Một hình được gọi là hình có mặt phẳng đối xứng (có trục đối xứng, có tâm đối xứng) nếu có một phép đối xứng qua mặt phẳng (phép đối xứng qua trục phép đối xứng qua tâm tương ứng) biến hình đó thành chính nó.

Bài 2. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa phép dời hình

Phép biến hình trong không gian bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ được gọi là phép dời hình trong không gian

II. Tính chất của phép dời hình

1. Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình sẽ được một phép dời hình

2. Phép dời hình có tính chất (8 tính chất)

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của chúng.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia.

c) Biến mặt phẳng thành mặt phẳng, biến nửa mặt phẳng thành nửa mặt phẳng.

d) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.

e) Biến một góc thành một góc bằng nó.

f) Biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.

g) Biến một tứ diện thành một tứ diện.

h) Biến một mặt cầu bán kính r thành một mặt cầu bán kính r.

Bài 3. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phép vị tự

1. Định nghĩa: Trong không gian cho điểm O và số $k \neq 0$ phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M′ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O

Nhận xét:

- Nếu M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k thì M là ảnh của M′ qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$.
- Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ là phép đối xứng qua tâm O.

2. Tính chất

α) Nếu M′, N′ theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tâm O tỉ số k thì:

- $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
- $M'N' = |k|MN$

β) Phép vị tự V^k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của chúng.

b) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

c) Biến một mặt phẳng thành mặt phẳng song song hoặc trùng với nó.

d) Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng.

e) Biến một góc thành một góc bằng nó.

f) Biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó.

g) Biến một tứ diện thành một tứ diện.

h) Biến mặt cầu bán kính r thành mặt cầu bán kính $|k|r$ (k là tỉ số vị tự).

II. Phép đồng dạng

1. Định nghĩa: Phép biến hình f trong không gian được gọi là phép đồng dạng nếu với hai điểm M, N bất kỳ và $M' = f(M)$; $N' = f(N)$, ta luôn luôn có $M'N' = kMN$ trong đó k là một số dương cho trước.

Số dương k được gọi là tỉ số đồng dạng của phép đồng dạng f.

2. Tính chất

a) Thực hiện liên tiếp một số hữu hạn các phép đồng dạng ta sẽ được một phép đồng dạng.

b) Phép đồng dạng tỉ số k.

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của chúng.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến tia thành tia.
- Biến một mặt phẳng thành một mặt phẳng, biến nửa mặt phẳng thành nửa mặt phẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng.
- Biến một góc thành một góc bằng nó.
- Biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó.
- Biến một tứ diện thành một tứ diện.
- Biến một mặt cầu bán kính r thành một mặt cầu bán kính $|k|r$.

III. Các hình đồng dạng

Định nghĩa: Hai hình được gọi là đồng dạng nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B/ BÀI TẬP

1. Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Chứng minh rằng nếu A, B, C thẳng hàng và B ở giữa A và C thì A', B', C' thẳng hàng là B' ở giữa A' và C'.

Giải

Theo đề bài: A, B, C thẳng hàng và B ở giữa A và C

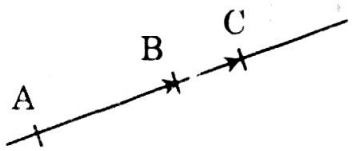
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, với $k > 1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - 2k\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + k^2\overrightarrow{AB}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'}^2 - 2k\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} + k^2\overrightarrow{A'B'}^2 = 0$



(Vì qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$)

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A'C'} - k\overrightarrow{A'B'})^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

$\Leftrightarrow$ A', B', C' thẳng hàng và B' ở giữa A' và C'.

2. Gọi (d'), (P') theo thứ tự là ảnh của (d) và (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Chứng minh rằng (d) song song hoặc trùng với (d') (P) song song hoặc trùng với (P').

Giải

• Cho đường thẳng d, lấy hai điểm M, N phân biệt thuộc d gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thì A' ≠ B'

Lấy K bất kỳ thuộc d thì $\overrightarrow{AK} = m\overrightarrow{AB}$. Gọi K' là ảnh của K quua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ khi đó $\overrightarrow{A'K'} = m\overrightarrow{A'B'}$. Do đó K' ∈ đường thẳng A'B'

– Ngược lại lấy điểm F' bất kỳ thuộc đường thẳng M'N'. ta phảải chứng minh rằng trên d có điểm F sao cho F' là ảnh của F quua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Do F' ∈ đt (M'N') nên $\overrightarrow{M'F'} = n\overrightarrow{M'N'}$

– Trên d lấy F sao cho $\overrightarrow{MF} = n\overrightarrow{MN}$ gọi F'' là ảnh của F qua phéép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{M'F''} = n\overrightarrow{M'N'}$. Kết hợp với $\overrightarrow{M'F'} = n\overrightarrow{M'N'}$ ta suy ra F'' ≡ F'

• Vậy phép tịnh tiến nói trên biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ≡ (A'B'). Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên đường thẳng A'B' song song hoặc trùng với đường thẳng AB.

* Lấy ba điểm không thẳng hàng M, N, K thuộc mp(P) gọi M', N', K' theo thứ tự là ảnh của M, N, K qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó ta có $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{M'K'} = \overrightarrow{MK}$ nên M', N', K' cũng không thẳng hàng. Gọi (P') ≡ (M'N'K')

Lấy F bất kỳ thuộc (P), gọi F' = $T_{\vec{v}}(F)$

Vì F ∈ (P) ⇒ $\overrightarrow{MF} = p\overrightarrow{MN} + q\overrightarrow{MK}$ ⇒ $\overrightarrow{M'F'} = p\overrightarrow{M'N'} + q\overrightarrow{M'K'}$

⇒ F' ∈ (P')

• Ngược lại lấy L' ∈ (P') thì có các số r, s để $\overrightarrow{M'L'} = r\overrightarrow{M'N'} + s\overrightarrow{M'K'}$ gọi L là điểm thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{ML} = r\overrightarrow{MN} + s\overrightarrow{MK}$ thì ta có L' = $T_{\vec{v}}$ (L). Từ đó suy ra (P') = $T_{\vec{v}}(P)$. Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ và $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{M'K'}$ nên (P') song song hoặc trùng với (P).

3. Chứng minh rằng phép biến hình có được sau khi thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$.

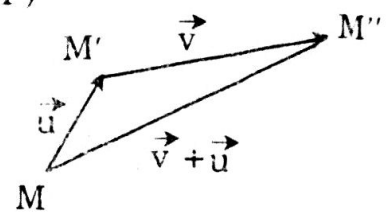
Giải

Lấy M bất kỳ, gọi M' = $T_{\vec{u}}(M)$; M'' = $T_{\vec{v}}(M')$

Ta cần chứng minh $\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$

Vậy $\overrightarrow{MM''} = \vec{v} + \vec{u}$



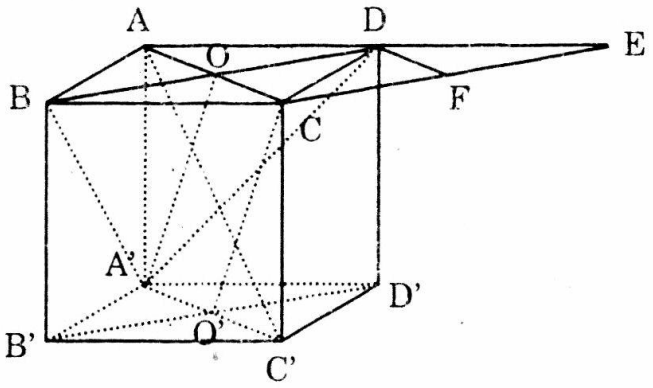
Do đó bài toán đã được chứng minh.

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' gọi O là giao điểm của AC và BD.

Xác định ảnh của mp(A'BD) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{AO}$.

Giải

Ta chỉ cần xác định ảnh của ba điểm không thẳng hàng thuộc mp(A'BD) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{AO}$



Kẻ CE // BD (E ∈ tia AD), đường thẳng đi qua D và song song với AC cắt CE tại F. Dễ thấy $\vec{A'O'} = \vec{OC} = \vec{DF} = \vec{AO}$ Do đó:

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{AO}$ biến mặt phẳng (A'OD) thành mặt phẳng (O'CF)

Vì CF // B'D' nên mp(O'CF) ≡ (CB'D')

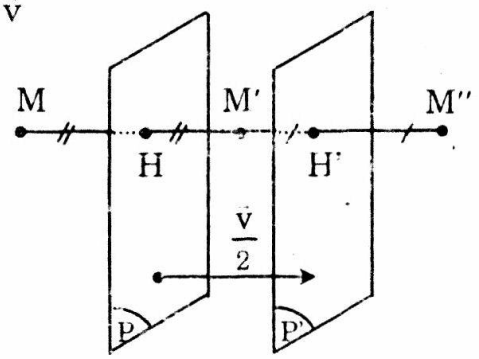
Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{AO}$ biến mp(A'BD) thành mặt phẳng (CB'D').

5. Chứng minh rằng mọi phép tịnh tiến đều có thể xem như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua mặt phẳng.

Giải

Gọi $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

- Lấy mp(P) vuông góc với $\vec{v}$, gọi (P') là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo $\frac{\vec{v}}{2}$
- Lấy điểm M tùy ý. Gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng qua mp(P).



Gọi M'' là ảnh của M' qua phép đối xứng qua mp(P')

Do (P) // (P') nên M, M', M'' thuộc đường thẳng qua M và vuông góc với (P)

Giả sử đường thẳng này cắt (P) và (P') theo thứ tự tại H và H'. Khi đó $\vec{HH'} = \frac{\vec{v}}{2}$. Ta có:

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} = 2\overrightarrow{HH'} = \vec{v}$

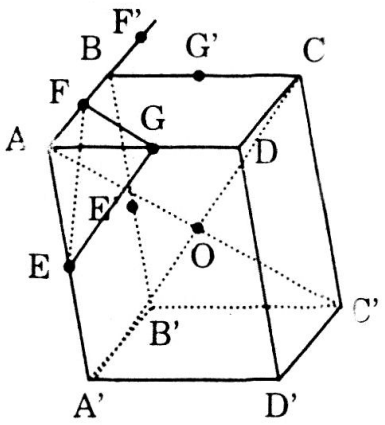
Từ đó suy ra $T_{\vec{v}}(M) = M''$, do đó có thể xem phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua 2 mặt phẳng (P), (P').

6. Cho hình hộp ABCD.A'B'D' gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AA', AB, AD; O là giao điểm của AC' và A'C. Tìm ảnh của tứ diện AEFG qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$.

Giải

Trên đường thẳng AB, lấy điểm F' sao cho B là trung điểm của FF'

Gọi E', G' lần lượt là trung điểm của BB' và BC. Khi đó ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{DC}$



Vậy ta có: $A \xrightarrow{T_{DC}} B$

$E \xrightarrow{T_{DC}} E'$

$F \xrightarrow{T_{DC}} F'$

$G \xrightarrow{T_{DC}} G'$

Từ đó suy ra ảnh của tứ diện AEFG qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{DC}$ là tứ diện BE'F'G'.

7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Tìm phép đối xứng qua mặt phẳng biến A, A', B, D' theo thứ tự thành A; D; B; D'.

b) Tìm phép đối xứng qua mặt phẳng biến A, A', B, D' theo thứ tự thành C, C', B, D'.

Giải

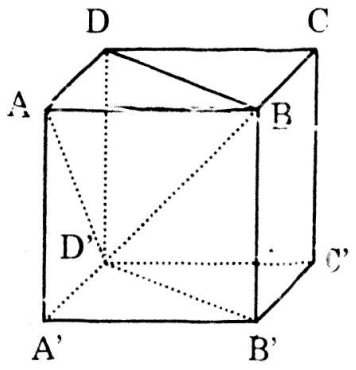
a) Gọi phép đối xứng qua mặt phẳng (α) biến A, A', B, D' theo thứ tự thành A, D, B, D' ta thấy

$A \underline{Dx(\alpha)} A \Rightarrow A \in (\alpha)$

$A' \underline{Dx(\alpha)} D \Rightarrow (\alpha)$ là mặt phẳng trung trực của A'D

$B \underline{Dx(\alpha)} B \Rightarrow B \in (\alpha)$

$D' \underline{Dx(\alpha)} D' \Rightarrow D' \in (\alpha)$



Vậy mp(α) chính là mp(ABD') cũng là mặt phẳng trung trực của A'D.

b) Gọi phép đối xứng qua mp(β) biến A, A', B, D' theo thứ tự thành C,

C', B, D' ta thấy

$A \xrightarrow{Đx(\beta)} C \Rightarrow (\beta)$ là mặt phẳng trung trực của AC

$A' \xrightarrow{Đx(\beta)} C' \Rightarrow (\beta)$ là mặt phẳng trung trực của A'C'

$B \xrightarrow{Đx(\beta)} B \Rightarrow B \in (\beta)$

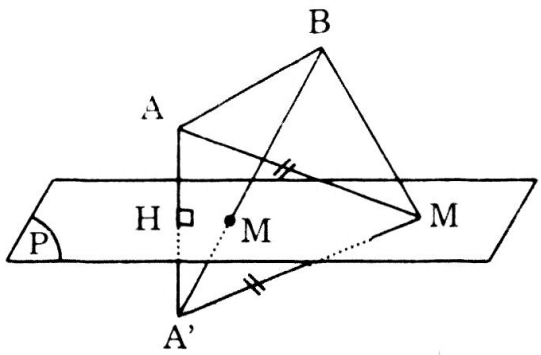
$D' \xrightarrow{Đx(\beta)} D' \Rightarrow D' \in (\beta)$

Vậy mặt phẳng (β) chứa B, D' và là mặt phẳng trung trực của AC, A'C' nên mặt phẳng (β) chính là mp(BB'D'D)

8. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B cùng nằm một phía đối với mặt phẳng (P). Tìm trên (P) điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến A và B là nhỏ nhất (MA + MB nhỏ nhất).

Giải

• Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) $\Rightarrow$ điểm A' cố định.



Với $M \in (P) \Rightarrow MA = MA'$ nên

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ (do $\Delta MA'B$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M, A', B thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ M là giao điểm của A'B với mp (P)

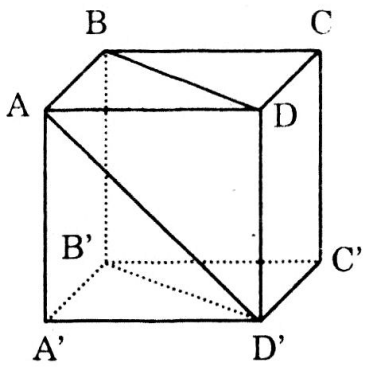
Vậy M là giao điểm của A'B với mp(P) thì MA + MB nhỏ nhất bằng A'B.

9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

Tìm một phép đối xứng qua mặt phẳng biến tứ diện AA'B'D' thành tứ diện CC'B'D'.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm



$A \xrightarrow{Đ(\alpha)} C \Rightarrow (\alpha)$ là mặt trung trực của AC

$A' \xrightarrow{Đ(\alpha)} C' \Rightarrow (\alpha)$ là mặt trung trực của A'C'

$B' \xrightarrow{Đ(\alpha)} B' \Rightarrow B' \in (\alpha)$

$D' \xrightarrow{Đ(\alpha)} D' \Rightarrow D' \in (\alpha)$

Vậy mặt phẳng α là mặt phẳng trung trực của AC, A'C' và chứa 2 điểm B', D'

Nên $mp(\alpha) \equiv mp(BB'D'D)$.

10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tìm ảnh của các cạnh AC, AB qua phép quay góc 120^0 quanh trục B'D, hướng dương của trục là hướng từ B' tới D.

Giải

• Ta có: DA = DD' = DC

B'A = B'C = B'D'

Vậy B'D là trục của tam giác đều ACD', nên B'D cắt vuông góc với mp(ACD') tại tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔACD'

Suy ra: $\widehat{AIC} = \widehat{CID'} = \widehat{D'IA} = 120^0$

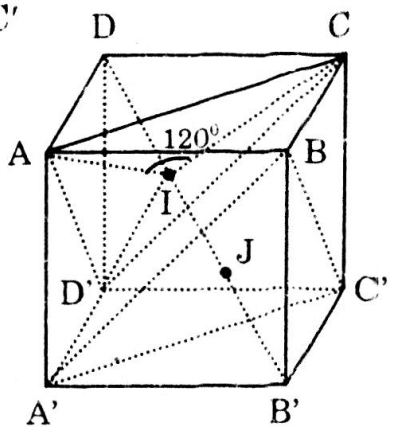
Do đó phép quay góc 120^0 quanh trục B'D, hướng dương từ B' tới D biến A thành C và C thành D'. Do đó AC có ảnh là CD'

• Ta có: B'B = B'A' = B'C' và DA' = DB = DC'

Vậy B'D là trục của ΔA'BC'. Nên B'D cắt vuông góc với mặt phẳng A'BC' tại tâm J đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BC'. Suy ra

$\widehat{A'JB} = \widehat{BJC'} = \widehat{C'JA} = 120^0$

nên B có ảnh là C'



• Kết hợp phần đầu A có ảnh là C

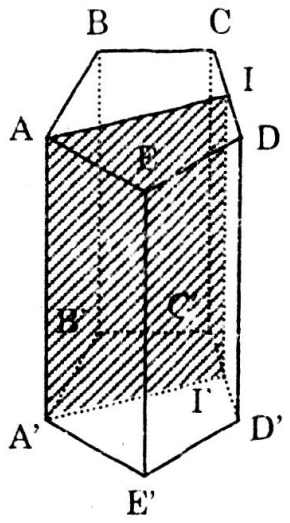
nên AB có ảnh là CC'.

11. Cho hình lăng trụ ABCDE.A'B'C'D'E'. Có hai đáy là hai ngũ giác đều, AA' vuông góc với CD. Chứng minh hình lăng trụ đó là hình có mặt phẳng đối xứng.

Giải

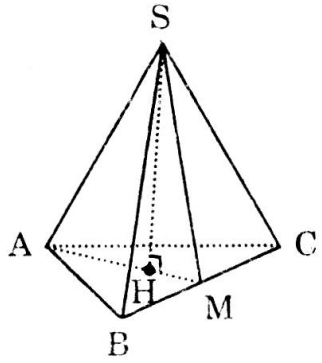
Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và C'D' Ta thấy:

mp(AII'A') là mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng CD, C'D', BE và B'E'. Do đó lăng trụ đã cho nhận mp(AII''A') làm mặt phẳng đối xứng.



12. Hình chóp tứ giác đều có mặt phẳng đối xứng và trục đối xứng hay không?

Giải



Đặt $SA = SB = SC = b$

$AB = BC = CA = a$

Hạ đường cao SH của hình chóp tứ giác đều; M là trung điểm cạnh BC

* Ta dễ thấy chóp tứ giác đều SAPC có mặt đối xứng chẳng hạn mặt (SAM).

13. Chứng minh rằng phép đối xứng qua tâm:

a) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

b) Biến một mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đã cho.

Giải

a) Cho đường thẳng d, lấy hai điểm phân biệt A, B thuộc d, gọi A′ và B′ theo thứ tự là ảnh của A và B qua phép đối xứng tâm I khi đó A′ khác B′.

- Lấy điểm M bất kỳ thuộc d thì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Gọi M′ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó:

  $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'}$, do đó $M' \in A'B'$

- Ngược lại lấy điểm N′ bất kỳ thuộc đường thẳng A′B′. Ta phải chứng minh trên d có một điểm N sao cho N′ là ảnh của N qua phép đối xứng tâm I.

  Vì $N' \in A'B'$ nên $\overrightarrow{A'N'} = p\overrightarrow{A'B'}$

  Trên d lấy N sao cho $\overrightarrow{AN} = p\overrightarrow{AB}$. Gọi N″ là ảnh của N qua phép đối xứng tâm I nên $\overrightarrow{A'N''} = p\overrightarrow{A'B'}$ kết hợp với $\overrightarrow{A'N'} = p\overrightarrow{A'B'}$ ta suy ra $N'' \equiv N'$

- Vậy phép đối xứng tâm I biến đường thẳng d thành đường thẳng A′B′. Vì $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ nên đường thẳng A′B′ song song hoặc trùng với AB.

b) Lấy ba điểm không thẳng hàng A, B, C $\in$ (P), gọi A′, B′, C′ theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng tâm I khi đó $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = -\overrightarrow{AC}$, nên A′, B′, C′ cũng không thẳng hàng. Gọi (P′) là mp(A′B′C′)

- Lấy M bất kỳ $\in$ (P), gọi $M' = Đ_I(M)$

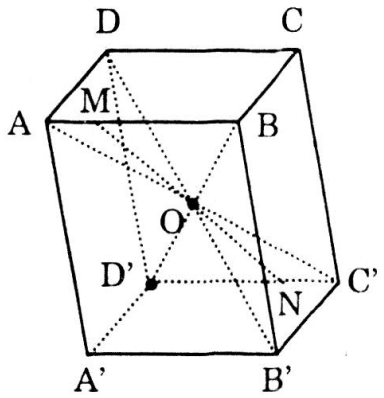
$M \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'M'} = p\overrightarrow{A'B'} + q\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow M' \in (P')$

- Ngược lại lấy $N' \in (P')$ thì ta có các số m, n để $\overrightarrow{A'N'} = m\overrightarrow{A'B'} + n\overrightarrow{A'C'}$ thì dễ thấy $N' = Đx(N)$ với điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$
- Từ đó suy ra $(P') = Đx(P)$. Vì $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = -\overrightarrow{AC}$ nên (P') song song hoặc trùng với (P).

14. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' lấy điểm M trên AB sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Lấy điểm N trên C'D' sao cho $\overrightarrow{C'N} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'D'}$. Tìm một phép biến hình, biến bốn điểm A, D, D', M theo thứ tự thành C', B', B, N.

Giải



Trước hết ta thấy các đoạn thẳng AC', DB', D'B đều cắt nhau tại trung điểm O của chúng. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{\overrightarrow{D'C'}}{3} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{C'D'}$$

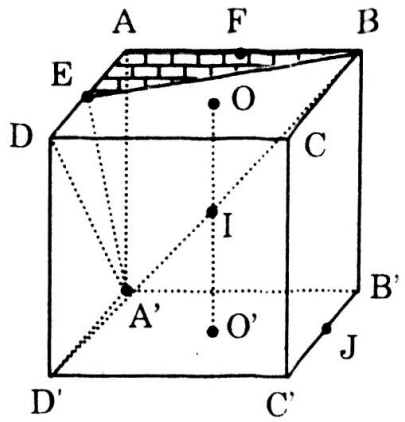
$$= -\overrightarrow{C'N} = \overrightarrow{NC'}$$

Do đó AMC'N là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của MN

Từ đó suy ra: phép đối xứng tâm O sẽ biến A, D, D', M theo thứ tự thành C', B', B, N.

15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, AB, C'B'. Chứng minh rằng hai khối tứ diện ABEA' và D'A'JD bằng nhau.

Giải



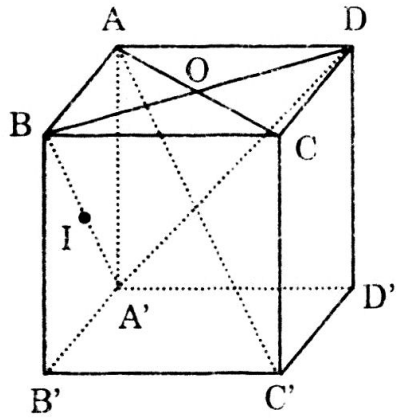
Gọi I là tâm đối xứng của hình lập phương ABCD.A'B'C'D', O, O' lần lượt là tâm các hình vuông ABCD và A'B'C'D'

- Phép quay quanh trục O'O (hướng dương của trục là hướng từ O' đến O) góc quay 90^0 biến: A, B, E, A' lần lượt thành B, C, F, B'
- Phép đối xứng tâm I biến B, C, F, B' theo thứ tự thành D', A', J, D
- Do đó hai khối tứ diện ABEA' và D'A'JD bằng nhau.

16. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' gọi O là giao điểm của AC và BD. Xác định ảnh của đoạn OC qua phép quay quanh trục AC', góc quay 120^0. Hướng của trục quay là hướng từ A đến C'.

Giải

Để ý rằng AC' vuông góc với (A'BD) và cắt mặt này tại tâm của tam giác đều A'BD. Tương tự AC' vuông góc với (CB'D') và cắt mặt phẳng này tại tâm của tam giác đều CB'D'. Phép quay quanh trục nói trên biến D, B theo thứ tự thành B, A'. Do đó nó biến điểm O của DB thành trung điểm I của BA'. Ngoài ra nó còn biến C thành B'. Từ đó suy ra phép quay biến OC thành IB'.



17. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AA', AB, AD; I là giao điểm của AC và BD, I' là giao điểm của A'C' và B'D'.
Tìm ảnh của tứ diện AEFG qua phép quay quanh trục B'D góc quay 120^0 (hướng của trục quay là hướng từ B' đến D).

Giải

• Ta dễ thấy B'D là trục của ΔACD
Nên phép quay f: trục B'D, góc quay 120^0

f: A ↦ C

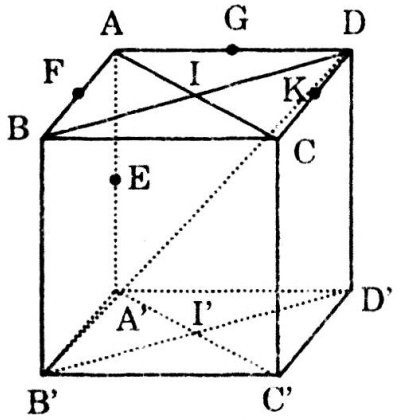
D ↦ D

Suy ra f: AD → CD nên f biến G thành K là trung điểm của CD

• B'D là trục của ΔBA'C'

f: A' ↦ B

⇒ f: AA' ↦ CB nên f biến E thành M (M là trung điểm của CB)



• Vì B'D là trục của ΔBA'C' nên

f: B ↦ C'

⇒ f: AB ↦ CC'

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 2301

Do đó f: F → N (là trung điểm của CC')
Vậy f biến tứ diện AEFG thành tứ diện CMNK.

18. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Tìm một phép quay quanh một trục biến hình chóp A'.AB'D' thành hình chóp B.CB'A.

b) Tìm một phép quay quanh trục AC' biến hình lập phương nói trên thành chính nó.

Giải

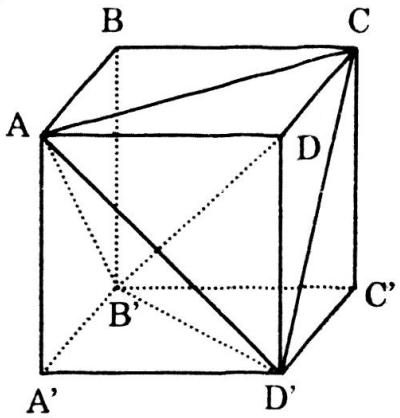
a) Ta có: DA = DD' = DC và B'A = B'D' = B'C

Vậy B'D là trục của tam giác ACD'

Nên phép quay quanh trục B'D hướng dương từ B' đến D góc quay 120^0 biến D' ↦ A

B' ↦ B'

A ↦ C



• Ta có: B'A' = B'B = B'C'

và DA' = DB = DC'

Vậy B'D là trục của ΔA'BC' nên phép quay quanh trục B'D hướng dương từ B' đến D góc quay 120^0 biến A' → B

Vậy phép quay quanh trục B'D hướng dương từ B' đến D góc quay 120^0 biến hình chóp A'AB'D' thành hình chóp BCB'A.

b) Ta chỉ xác định góc quay

• Tương tự như câu (a) ta thấy AC' là trục của ΔB'D'C nên phép quay quanh trục AC' hướng dương từ A đến C góc quay 120^0 biến

B' ↦ C, C ↦ D', A ↦ A, C' ↦ C', D' ↦ B'

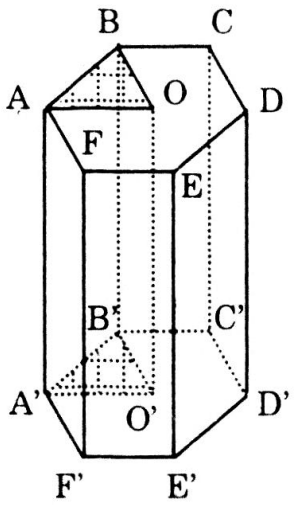
• AC' là trục của ΔA'BD nên phép quay quanh trục AC' hướng dương từ A đến C góc quay 120^0, biến A' → B; B → D, D → A'

Vậy phép quay quanh trục AC' biến hình lập phương ABCD. A'B'C'D' thành chính nó.

19. Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' gọi O và O' lần lượt là tâm của các lục giác đều ABCDEF và A'B'C'D'E'F'. Tìm ảnh của hình lăng trụ OAB.O'A'B' qua phép dời hình có được cách thực hiện liên tiếp phép quay quanh trục O'O (hướng dương của trục là hướng từ O' đến O) theo góc quay 120^0 và phép đối xứng qua mặt phẳng CDD'C'.

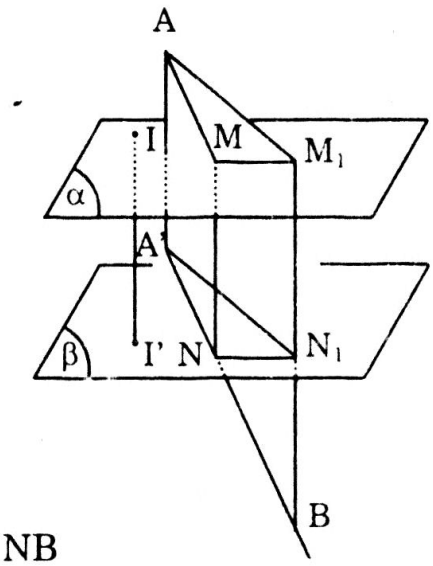
Giải

- Phép quay quanh trục O'O hướng dương từ O' đến O góc quay 120^0 biến lăng trụ OCD.O'C'D' thành lăng trụ OCD.O'C'D'.
- Phép đối xứng qua mặt phẳng CDD'C' biến lăng trụ OCD.O'C'D' thành lăng trụ ICD.I'C'D', trong đó I' là giao của hai đường thẳng B'C' và E'D' I là giao điểm của BC và ED.
- Vậy ảnh của hình lăng trụ OAB.O'A'B' qua phép dời hình trên lăng trụ ICD.I'C'D'.



20. Cho hai mặt phẳng (α), (β) song song với nhau gọi A, B là hai điểm nằm về hai phía của cả hai mặt phẳng đó. Và A, (α) cùng phía đối với (β). Tìm trên (α) và (β) các điểm M, N tương ứng sao cho MN vuông góc với (α); (β) và tổng các khoảng cách AM + MN + NB nhỏ nhất.

Giải



- Lấy điểm I ∈ (α) gọi I' là hình chiếu vuông góc của I lên mp(β)

Gọi f là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{II'}$. Khi đó f(M) = N

Gọi f(A) = A'. Khi đó A' và B nằm khác phía đối với (β). Do đó AMNA' là hình bình hành nên MN = AA', AM = A'N

Từ đó suy ra AM + MN + NB = A'N, AA'= NB

Vậy AM + MN + NB nhỏ nhất khi A'N + AA' + NB nhỏ nhất

Do AA' = d(α, β) không đổi. Từ đó suy ra A'N + AA' + NB nhỏ nhất khi A'N + NB nhỏ nhất

Do đó N phải thuộc giao điểm của đường thẳng A'B với mp(β)

Từ đó suy ra cách dựng MN như sau:

- Dựng A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{II'}$
- Dựng N = A'β ∩ (β)
- Dựng đường qua N và vuông góc với (β) cắt (α) tại M

+ Ta đi chứng minh M, N thỏa mãn điều kiện bài toán lấy M_1 thuộc (α), $N_1 \in (\beta)$ sao cho $M_1N_1 \perp (\alpha)$ khi đó:

$$AM_1 + M_1N_1 + N_1B = MN + A'N_1 + N_1B$$
$$\geq MN + A'N + NB = AM + MN + NB.$$

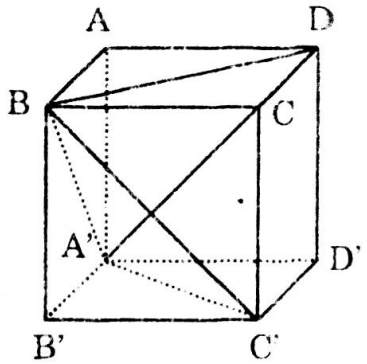
21. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'

a) Hãy chỉ ra một phép dời hình biến đoạn thẳng AD thành đoạn thẳng A'B'.

b) Chứng minh rằng hai tứ diện ABDA' và BA'B'C' bằng nhau.

Giải

a) Ta thực hiện liên tiếp 2 phép dời hình



- Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến AD thành A'D'
- Phép quay quanh trục A'A góc quay 90^0 biến A'D' thành A'B'

Vậy phép dời hình cần tìm là tích của phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và phép quay quanh trục A'A góc quay 90^0.

b) Xét phép đối xứng qua mặt phẳng BCD'A'

Thì $B \mapsto B$; $A' \mapsto A'$; $A \mapsto B'$; $D \mapsto C'$

Vậy phép đối xứng qua mặt phẳng (BCD'A') biến hình tứ diện ABDA' thành tứ diện B'BC'A' nên hai tứ diện này bằng nhau.

22. Chứng minh phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song biến hai mặt phẳng song song thành hai mặt phẳng song song.

Giải

- Vì $d_1 // d_2$ nên chúng cùng thuộc một mặt phẳng (P)

Do đó ảnh d'_1, d'_2 qua phép dời hình f phải thuộc mp(P') = f(P)

Nếu d'_1 cắt d'_2 tại N thì phải có $M_1 \in d'_1$, $M'_2 \in d'_2$ để $f(M_1) = N$, $f(M_2) = N$. Từ tích bảo toàn khoảng cách của phép dời hình f ta suy ra $M_1 \equiv M_2$.

Điều này vô lí vì $d_1 // d_2$. Vậy $d'_1 // d'_2$

- Cho 2 mặt phẳng song song $(P_1) // (P_2)$ gọi (P'_1), (P'_2) lần lượt là ảnh của (P_1), (P_2) qua phép dời hình f.

Nếu (P'_1) cắt (P'_2) theo 1 đường thẳng Δ, trên Δ ta lấy điểm N, thì trên (P_1) có điểm M_1, trên (P_2) có điểm M_2 để $f(M_1) = f(M_2) = N$

Theo tính chất bảo toàn khoảng cách thì $M_1 \equiv M_2$ (vô lí) vì $(P_1) // (P_2)$

Do đó $(P'_1) // (P'_2)$.

23. Chứng minh rằng phép dời hình biến một góc thành một góc bằng góc ban đầu.

Giải

Xét tam giác ABC có $\widehat{ABC} = \alpha$

Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép dời hình f

Do tính bảo toàn khoảng cách của phép dời hình f nên ta có:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$

Vậy $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = \alpha$

Hay nói cách khác: phép dời hình f biến góc $\widehat{ABC}$ thành góc $\widehat{A'B'C'}$ bằng góc $\widehat{ABC}$.

24. Gọi O', A', M' theo thứ tự là ảnh của O, A, M qua phép dời hình. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OM} = p\overrightarrow{OA}$ (p là một số nào đó) thì $\overrightarrow{O'M'} = p\overrightarrow{O'A'}$. Từ đó chứng minh rằng phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia.

Giải

- Nếu $\overrightarrow{OM} = p\overrightarrow{OA}$

  Do phép dời hình bảo toàn khoảng cách nên

  Ta có: $OM = O'M'$, $OA = O'A'$ và do đó ta có $O'M' = pO'A'$

- Nếu O, A, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{OM} = p\overrightarrow{OA}$ thì

  $\overrightarrow{O'M'} = p\overrightarrow{O'A'}$ nên O', A', M' thẳng hàng

  $\Leftrightarrow$ O', A', M' thuộc 1 đường thẳng

  Ngược lại lấy $N' \in d'$ thì có số p để $\overrightarrow{A'N'} = p\overrightarrow{A'B'}$ (1) (d' chứa O', M', A')

  Trên d lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} = p\overrightarrow{AB}$

  Gọi $N_1 = f(N)$ thì $\overrightarrow{A'N_1} = p\overrightarrow{A'B'}$ So sánh với (1)

  Suy ra $N' = N_1$. Tức là với mỗi điểm $N' \in d'$

  Ta có N thuộc d sao cho $N' = f(N)$

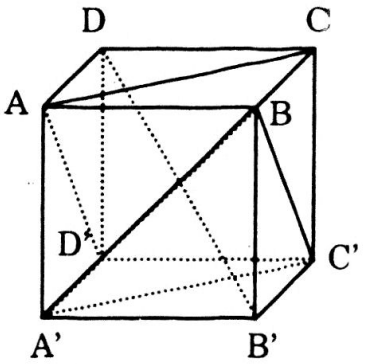
  Từ đó suy ra f biến đường thẳng d thành đường thẳng d'

  Biến tia thành tia.

25. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Tìm ảnh của các cạnh AC, A'B qua phép quay quanh trục B'D góc quay 120^0, hướng của trục quay là hướng từ B' đến D.

Giải

Chú ý rằng mp(ACD′) ⊥ B′D
và mp(A′BC′) ⊥ B′D
vì DA = DD′ = DC và B′A′ = B′B = B′C′
và đường thẳng B′D cắt 2 tam giác đều (ACD′), (A′BC′) tại tâm của chúng.
Các góc $\widehat{AID'} = \widehat{D'IC} = \widehat{CIA} = 120^0$



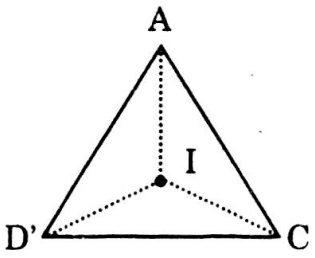
Ta có: A ↦ C

C ↦ D′

Nên AC ↦ CD′

Tương tự ta có: A′ ↦ B

B ↦ C′



Nên A′B ↦ BC′.

26. Chứng minh rằng mọi phép quay quanh một trục đều có thể xem như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng đi qua trục quay của phép quay đó.

Giải

- Gọi f là phép quay quanh trục d, góc quay α
- Lấy một mp(P) đi qua d, gọi (P′) là ảnh của (P) qua phép quay quanh trục d góc quay $\frac{\alpha}{2}$
- Lấy điểm M bất kỳ gọi M′ là ảnh của M qua phép đối xứng qua mặt phẳng (P), M″ là ảnh của M′ qua phép đối xứng qua mặt phẳng (P′) khi đó M, M′, M″ cùng thuộc mặt phẳng (Q) qua M và vuông góc với d. Gọi I là giao điểm của (Q) với (d) H là giao của MM′ với (Q). H′ là giao của M′M″ với (Q). Khi đó ta có IM = IM′ = IM″ và IH = IH′ góc $(\widehat{IH, IH'}) = \frac{\alpha}{2}$.

và góc $(\widehat{IM, IM''})$ = góc $(\widehat{IM, IM'})$ + góc $(\widehat{IM', IM''})$

= 2 góc $(\widehat{IH, IH'}) = \alpha$

Từ đó ta suy ra f(M) = M″. Do đó có thể xem f như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua 2 mp(P) và (P′) chứa d.

27. Chứng minh rằng hai mặt cầu bất kỳ luôn đồng dạng.

Giải

Gọi S(O, R), S'(O', R') là hai mặt cầu bất kỳ.

Đặt $k = \frac{R'}{R}$

- $k = \frac{R'}{R} = 1$. Ta có phép đồng dạng chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$ biến mặt cầu S(O, R) thành mặt cầu S'(O', R').
- $k = \frac{R'}{R} \neq 1$. Ta có phép đồng dạng chính là phép vị tự tâm I, tỉ số đồng dạng là k với I là giao điểm của một tiếp tuyến chung của hai mặt cầu và đường thẳng nối hai tâm OO'.

Tóm lại: hai mặt cầu bất kỳ luôn luôn có một phép đồng dạng biến mặt cầu này thành mặt cầu kia, nên hai mặt cầu bất kỳ luôn đồng dạng.

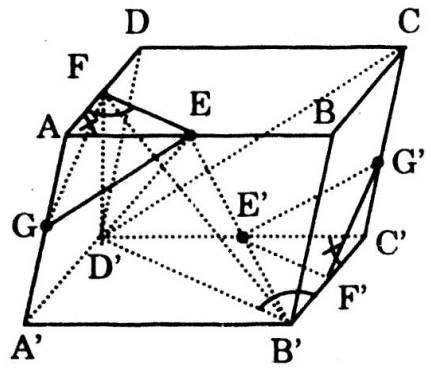
28. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, AD và AA'. Chứng minh tứ diện AEFG và C'D'B'C đồng dạng.

Giải

Gọi I là tâm của hình hộp (I = AC' ∩ DB'...) phép đối xứng qua tâm I biến AD thành C'B' do đó biến F thành F' là trung điểm của C'B'.

Tương tự biến E thành E' là trung điểm C'D'.

Tương tự biến G thành G' là trung điểm C'C.



Phép vị tự tâm C', tỉ số vị tự k = 2 biến tứ diện C'E'F'G' thành tứ diện C'D'B'C.

Vậy có 1 phép đồng dạng f là thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I và phép vị tự (C', k = 2) biến AEFG thành C'D'B'C. Do đó 2 tứ diện đó đồng dạng.

29. Chứng minh rằng thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng sẽ được một phép đồng dạng.

Giải

- Gọi f là phép đồng dạng tỉ số k_1, biến A, B lần lượt thành A', B'.

Ta có $A'B' = k_1AB$.

- Gọi g là phép đồng dạng tỉ số k_2, biến A, B lần lượt thành A", B". Ta có $A"B" = k_2AB$.
- Ta có $A"B" = k_2A'B' = k_2(k_1AB) = k_1k_2AB$.

Vậy ta có một phép đồng dạng h, tỉ số đồng dạng k_1k_2 biến A, B thành A', B'.

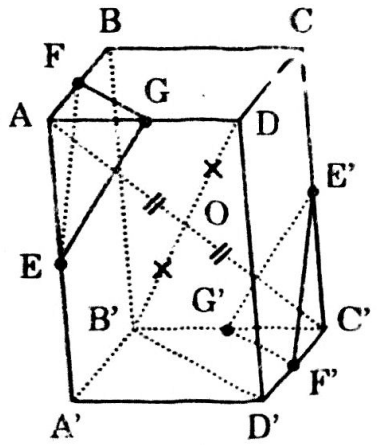
Vậy ta thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng ta sẽ được một phép đồng dạng.

30. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', AB và AD. O là tâm đối xứng của hình hộp.

Hãy tìm ảnh của tứ diện AEFG qua phép đồng dạng có được khi thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm A tỉ số 2 và phép đối xứng qua tâm O.

Giải

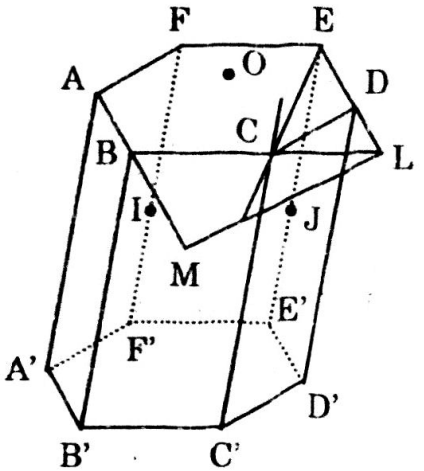
- Phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến A, E, F, G lần lượt thành A, A', B, D.
- Phép đối xứng qua tâm O biến A, A', B, D theo thứ tự thành C', C, D', B'.
- Vậy phép đồng dạng nói trên biến tứ diện AEFG thành tứ diện C'CD'B'.



31. Cho hình lăng trụ ABCDEF.A'B'C'D'E'F' có đáy là lục giác đều. Gọi O là tâm của lục giác đều ABCDEF. I là trung điểm của FF', L là giao điểm của các đường thẳng BC và ED. Đường thẳng qua L và song song với AF cắt đường thẳng AB tại M. Chứng minh rằng hai hình chóp I.ABOF và E'.BMLE đồng dạng với nhau.

Giải

- Gọi J là trung điểm của EE' khi đó ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{FE}$, từ đó suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ biến hình chóp I.ABOF thành hình chóp J.OCDE.
- Mặt khác ta có O, C, J, D theo thứ tự là trung điểm của EB, EM, EE', EL do đó phép vị tự tâm E, tỉ số 2 biến hình chóp J.OCDE thành hình chóp



E' BMLE.

- Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ và phép vị tự tâm E tỉ số 2 biến hình chóp I.ABOF thành hình chóp E'.BMLE.

Do đó hai hình chóp đó đồng dạng với nhau.

32. Chứng minh rằng một phép biến hình trong không gian là một phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) khi và chỉ khi với ba điểm A, B, C tùy ý và ảnh A', B', C' tương ứng mà chúng ta có $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Giải

Gọi f là phép biến hình nói trên, ta có:

f là một phép đồng dạng tỉ số k $\Leftrightarrow$ B'C' = kBC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'}^2 = k^2\overrightarrow{BC}^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'})^2 = k^2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'}^2 - 2\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'B'}^2 = k^2(\overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

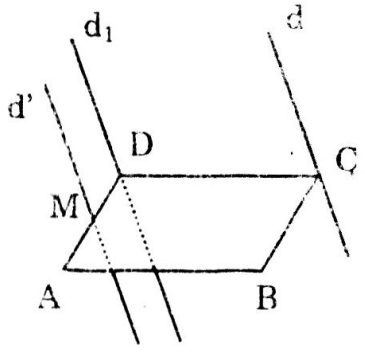
33. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d chéo nhau với đường thẳng AB. Lấy điểm C trên d, dựng hình bình hành ABCD. Tìm quỹ tích trung điểm M của AD khi C chạy trên d.

Giải

- Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ không đổi, nên ta có thể xem D là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

  Mặt khác vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Nên ta có thể xem M là ảnh của D qua phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$.

- Vậy khi C chạy trên d thì M chạy trên d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ và phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$.

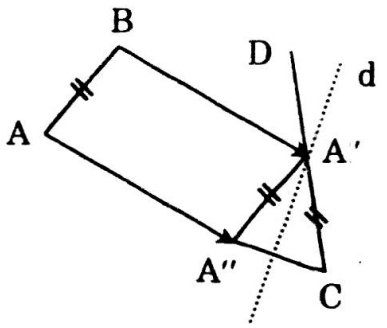


34. Cho hai đoạn thẳng AB và CD. Hãy tìm một phép đồng dạng biến A và B theo thứ tự thành C và D.

Giải

Trên CD lấy điểm A' sao cho CA' = AB.

- Gọi f là phép dời hình (thực hiện liên tiếp hai phép dời hình) biến A và B lần lượt thành C và A'.
- Gọi g là phép vị tự tâm C tỉ số $k = \frac{CD}{CA'} = \frac{CD}{AB}$. Khi đó g biến CA' thành CD.
- Khi đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình f và g biến A và B lần lượt thành C và D.

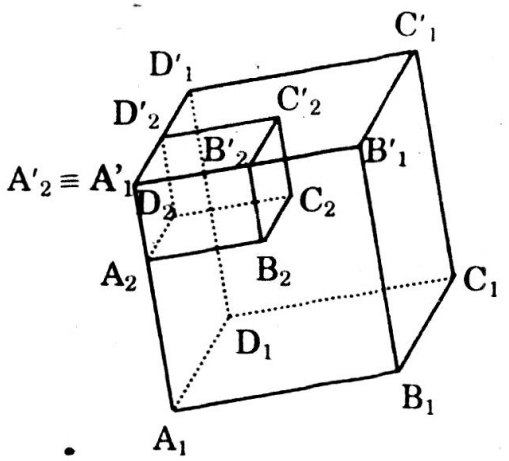


Ghi chú: Phép dời hình f là phép thực hiện liên tiếp: Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA'}$ và phép quay quanh trục d (là trung trực của A"C) góc quay $\widehat{A''A'C}$.

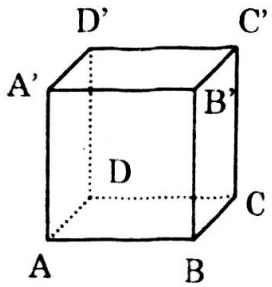
35. Chứng minh rằng hai hình lập phương bất kỳ luôn luôn đồng dạng với nhau.

Giải

- Cho hai hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và $A_1B_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Trên các tia A'_1A_1, $A'_1B'_1$, $A'_1D'_1$ lần lượt lấy A_2, B'_2, D'_2 sao cho $A'_2 \equiv A'_1$, $A'_1A_2 = A'_1B'_2 = A'_1D'_2 = AB$. Từ các đỉnh A'_1, A_2, B'_2, D'_2 dựng hình lập phương $A_2B_2C_2D_2.A'_2B'_2C'_2D'_2$.

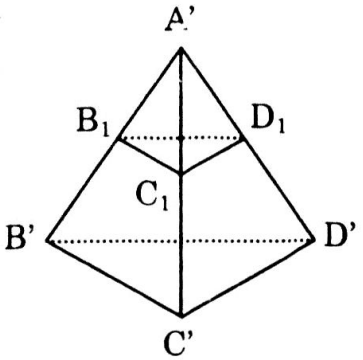


- Gọi f là phép dời hình biến hình lập phương ABCD.A'B'C'D' thành hình lập phương $A_2B_2C_2D_2$ $A'_1B'_2C'_2D'_2$ (f có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'_1}$ và 1 phép quay).
- Gọi g là phép vị tự tâm A'_1 tỉ số $k = \frac{A_1B_1}{AB}$. Khi đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình f và g sẽ biến hình lập phương ABCD.A'B'C'D' thành hình lập phương $A_1B_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Vậy hai hình lập phương luôn đồng dạng với nhau.

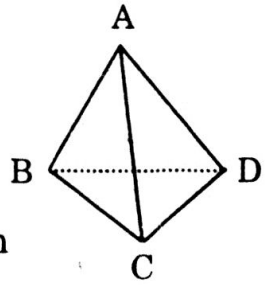


36. Chứng minh rằng hai hình tứ diện đều bất kỳ luôn luôn đồng dạng với nhau.

Giải



- Cho hai hình tứ diện đều ABCD, A'B'C'D' Trên các tia A'B', A'C', A'D' lần lượt lấy các điểm B_1, C_1, D_1 sao cho AB $= A'_1B_1 = A'C_1 = A'D_1$.
- Gọi f là phép dời hình (f có được bằng cách thực thiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến ABCD thành $A'B'_1C'_1D'_1$ rồi thực hiện một phép quay để biến $A'B'_1C'_1D'_1$ thành tứ diện $A'B_1C_1D_1$.



- Gọi g là phép vị tự tâm A', tỉ số $\frac{A'B_1}{A'B'}$ biến tứ diện A'B'C'D' thành tứ diện $A'B_1C_1D_1$.
- Vậy ta có 1 phép đồng dạng (f rồi g) biến tứ diện đều ABCD thành tứ diện A'B'C'D' (đpcm).

37. Gọi I', A', B', C' theo thứ tự là ảnh của I, A, B, C qua một phép đồng dạng. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{IC} = p.\overrightarrow{IA} + q.\overrightarrow{IB}$ thì $\overrightarrow{I'C'} = p.\overrightarrow{I'A'} + q.\overrightarrow{I'B'}$ (ở đây p, q là các số).

Giải

Gọi f là phép đồng dạng tỉ số k biến I, A, B, C lần lượt thành I, A', B', C'. Ta có:

$I'C'^2 = k^2IC^2$, $I'A'^2 = k^2IA^2$, $I'B' = k^2IB^2$, $I'A'.I'B' = k^2IA.IB$

Xét $(\overrightarrow{I'C'} - p\overrightarrow{I'A'} - q\overrightarrow{I'B'})^2 = I'C'^2 + p^2I'A'^2 + q^2I'B'^2$

$- 2p\overrightarrow{I'C'}.\overrightarrow{I'A'} + 2pq\overrightarrow{I'A'}.\overrightarrow{I'B'} - 2q\overrightarrow{I'B'}.\overrightarrow{I'C'}$

Vậy $(\overrightarrow{I'C'} - p\overrightarrow{I'A'} - q\overrightarrow{I'B'})^2 = k^2[IC^2 + q^2IA^2 + qIB^2 - 2p\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$

$+ 2pq\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} - 2q\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}] = k^2(\overrightarrow{IC} - p\overrightarrow{IA} - q\overrightarrow{IB})^2 = 0$

Suy ra $\overrightarrow{I'C'} = p\overrightarrow{I'A'} + q.\overrightarrow{I'B'}$

38. Gọi A' B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua một phép đồng dạng. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{AB}$, p là một số thì $\overrightarrow{A'C'} = p\overrightarrow{A'B'}$.

Giải

Gọi f là phép đồng dạng tỉ số k đã biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Ta có:

$A'B'^2 = k^2AB^2$, $A'C'^2 = k^2AC^2$, $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Suy ra $(\overrightarrow{A'C'} - p\overrightarrow{A'B'})^2 = \overrightarrow{A'C'}^2 - p\overrightarrow{A'B'}^2 = 2p\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'}$

$= k^2(AC^2 + p^2AB^2 - 2pAC.AB)$

$= k^2(\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB}) = 0$

Suy ra $\overrightarrow{A'C'} = p\overrightarrow{A'B'}$

39. Gọi A', B', C', D', M' theo thứ tự là ảnh của A, B, C, D, M qua một phép dời hình. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AD}$ thì $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'} + q\overrightarrow{A'C'} + q\overrightarrow{A'D'}$, ở đây k, p, q là những số.

Giải

Gọi f là phép đồng dạng tỉ số m biến A, B, C, D, M lần lượt thành A', B', C', D', M'. Ta có:

$A'M'^2 = m^2AM^2$, $A'B'^2 = m^2AB^2$, $A'C'^2 = m^2AC^2$, $A'D'^2 = m^2AC^2$

Ta có: $(\overrightarrow{A'M'} - k\overrightarrow{A'B'} - p\overrightarrow{A'C'} - q\overrightarrow{A'D'})^2 = A'M'^2 + k^2A'B'^2$

$+ p^2A'C'^2 + q^2A'D'^2 = -2k\overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'B'} + 2kp\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$

$+ 2pq\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'D'} - 2q\overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'D'} = m^2[AM^2 + k^2AB^2$

$+ p^2AC^2 + q^2AD^2 - 2k\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} + 2kp\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$+ 2pq\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - 2p\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}]$

$= m^2[\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} - p\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AD}] = 0$

Vậy ta đã chứng minh $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'} + p\overrightarrow{A'C'} + q\overrightarrow{A'D'}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Cho đường thẳng (Δ) có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng (Δ) thành chính nó.

A. Có một phép tịnh tiến duy nhất. B. Có hai phép.

C. Có vô số phép. D. Không có phép nào.

2. Cho hai đường thẳng Δ và Δ', có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng (Δ) thành (Δ')

A. Có một phép duy nhất. B. Có hai phép.

C. Có vô số phép. D. Không có phép nào.

3. Cho hai đường thẳng song song Δ và Δ'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng (Δ) thành (Δ')

A. Có một phép duy nhất B. Có hai phép

C. Có vô số phép D. Không có phép nào

4. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đoạn thẳng thành chính nó?

A. Không có B. Có một C. Có hai D. Có vô số.

5. Cho hai đường thẳng song song Δ và Δ', một đường thẳng Δ'' không song song với Δ và Δ'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến Δ thành Δ' và biến Δ'' thành chính nó

A. Có duy nhất một B. Có hai phép

C. Có vô số D. Có nhiều nhất một

6. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$; $\vec{v} \neq \vec{0}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

A. Có một hình (H) sao cho $T_{\vec{v}}(H) = (H)$

B. Có một điểm M để $T_{\vec{v}}(M) = M$

C. Có một đường thẳng d để $T_{\vec{v}}(d) = d$

D. Có một mặt phẳng (P) sao cho $T_{\vec{v}}(P) = (P)$

7. Có bao nhiêu phép đối xứng qua một mặt phẳng biến một tam giác đều thành chính nó

A. Một B. Hai C. Bốn D. Ba

8. Có bao nhiêu phép đối xứng qua một mặt phẳng biến một tứ diện đều thành chính nó

A. Ba B. Hai C. Không có D. Vô số

9. Gọi f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. Có một điểm M để f(M) = M.

B. Có một đường thẳng d để f(d) = d.

C. Có một mặt phẳng (Q) $\neq$ (P) sao cho f(Q) = 0.

D. Có một tứ diện (H) sao cho f biến đổi mỗi đỉnh của nó thành chính nó.

10. Hình nào sau đây không có tâm đối xứng

A. Hình lập phương B. Tứ diện đối xứng

C. Hình hộp chữ nhật. D. Hình hộp

11. Gọi f là phép đối xứng qua tâm O. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. Có điểm M để f(M) = M

B. Có đường thẳng d để f(d) = d

C. Có mặt phẳng (Q) sao cho f(Q) = Q

D. Có tứ diện (H) sao cho f(H) = (H).

12. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d thành d'

A. Không có phép nào
B. Có một phép duy nhất
C. Chỉ có hai phép
D. Có vô số phép.

13. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng thành chính nó

A. Không có phép nào
B. Có một phép duy nhất
C. Có hai phép
D. Có vô số phép.

14. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d thành d'

A. Không có phép nào
B. Có một phép duy nhất
C. Chỉ có hai phép
D. Có vô số phép.

15. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 và đường thẳng d_3 cắt d_1, d_2. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d_1 thành d_2 và biến d_3 thành chính nó.

A. Không có phép nào
B. Có một phép duy nhất
C. Chỉ có hai phép
D. Có vô số phép.

16. Hình hộp có bao nhiêu tâm đối xứng

A. Không có
B. Một
C. Hai
D. Ba.

17. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến đường thẳng d thành chính nó

A. Không có
B. Có một phép duy nhất
C. Có hai phép
D. Có vô số phép

18. Cho hai đường thẳng song song a và b. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thành chính nó

A. Không có
B. Có một
C. Có hai
D. Có vô số.

19. Có bao nhiêu phép đối xứng qua tâm biến một tứ diện đều thành chính nó

A. Không có
B. Có một
C. Có hai
D. Có vô số.

20. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai

A. Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó
B. Phép dời hình biến hai mặt phẳng song song thành hai mặt phẳng song song
C. Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng
D. Phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song

21. Cho hình lập phương AECD.A'B'C'D'. Gọi g là phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$ và phép đối xứng qua mp(ACC'A') khi đó g biến hai điểm A và A' theo thứ tự thành

A. C và C'
B. D và D'
C. B và B'
D. D' và D.

22. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' thì tứ diện ACB'D' bằng tứ diện:

A. DD'AB B. C'A'DB C. ABDA' D. C'DBC.

23. Hình lập phương có bao nhiêu trục đối xứng?

A. ba B. bốn C. sáu D. tám.

24. Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng

A. ba B. bốn C. sáu D. không có.

25. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O điểm của A'C' và B'D'. Phép quay quanh trục OO' (hướng dương của trục là hướng từ O đến O') góc quay 90^0. Thì ảnh của AA'.

A. AC B. BB' C. BA D. DD'

26. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến ta sẽ được một phép tịnh tiến

B. Thực hiện liên tiếp hai phép quay quanh một trục sẽ được một phép quay quanh một trục

C. Thực hiện liên tiếp hai phép quay quanh một sẽ được một phép đối xứng qua mặt phẳng

D. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm sẽ được một phép đối xứng tâm

27. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

A. Có một phép tịnh tiến biến một điểm trong không gian thành chính nó.

B. Có một phép quay quanh một trục, biến mỗi điểm trong không gian thành chính nó.

C. Có một phép vị tự biến mỗi điểm trong không gian thành chính nó.

D. Có một phép đối xứng qua mặt phẳng trong không gian thành chính nó.

28. Tìm mệnh đề sai, trong các mệnh đề sau.

A. Phép đối xứng qua trục là một phép dời hình.

B. Chỉ có các phép tịnh tiến, phép đối xứng qua một mặt phẳng, phép đối xứng qua tâm, phép quay quanh một trục mới là phép dời hình.

C. Phép đồng nhất là một phép dời hình.

D. Các phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt, phép đối xứng qua tâm, phép quay quanh một trục là những phép dời hình.

29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai

A. Phép tịnh tiến là một phép đồng dạng.

B. Phép biến hình là một phép đồng dạng.

C. Phép dời hình là một phép đồng dạng.

D. Phép vị tự là một phép đồng dạng.

30. Trong các mệnh đề sau (về những phép biến hình trong không gian) mệnh đề nào sai.

A. Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng sẽ được một phép đồng dạng.

B. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự sẽ được một phép vị tự.

C. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự sẽ được một phép đồng dạng.

D. Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình sẽ được một phép đồng dạngg.

31. Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình.

A. Phép tịnh tiến

B. Phép đối xứng qua một mặt phẳng

C. Phép quay quanh trục

D. Phép chiếu song song

32. Trong các mệnh đề sau (về những phép biến hình trong không gian) mệnh đề nào đúng:

A. Phép đồng dạng là một phép vị tự

B. Phép đồng dạng là một phép dời hình

C. Phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng bằng 1 là một phép dời hình

D. Phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng lớn hơn là một phép vị tự.

33. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

A. Có một phép vị tự biến mỗi điểm trong không gian thành chính nó.

B. Có một phép tịnh tiến biến mỗi điểm trong không gian thành chính nó.

C. Có một phép quay quanh trục biến điểm trong không gian thành chính nó.

D. Có một phép đối xứng qua mặt phẳng biến mỗi điểm trong không gian thành chính nó.

34. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Phép vị tự biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.

B. Phép đồng dạng biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.

C. Phép đồng dạng biến một góc thành một góc bằng nó.

D. Phép đồng dạng biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.

35. Phép đồng dạng biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng:

A. song song

B. cắt nhau

C. chéo nhau

D. trùng nhau.

Chương II. KHỐI ĐA DIỆN

Bài 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Khái niệm về khối đa diện

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các miền đa giác thỏa mãn hai tính chất.

- Hai miền đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác.

Mỗi miền đa giác như thế gọi là một mặt của hình đa diện, các đỉnh, cạnh của các miền đa giác ấy theo thứ tự được gọi là đỉnh, cạnh của hình đa diện.

II. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

III. Khối đa diện lồi

Khối đa diện $(\mathcal{H})$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của $(\mathcal{H})$ luôn thuộc $(\mathcal{H})$.

Khi đó đa diện xác định $(\mathcal{H})$ được gọi là đa diện lồi.

Định lý: Gọi d, c, m theo thứ tự là số đỉnh, số cạnh, số mặt của khối đa diện lồi. Khi đó ta có mối liên hệ sau được gọi là công thức Ơ–le.

$$d - c + m = 2$$

IV. Phân chia một khối đa diện thành nhiều khối đa diện

Nếu khối đa diện $\mathcal{H}$ là hợp của n khối đa diện $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, ..., \mathcal{H}_n$ sao cho chúng không có điểm trong chung thì ta có thể chia được khối đa diện $\mathcal{H}$ thành các khối đa diện $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 ... \mathcal{H}_n$, hay có thể lắp ghép n khối đa diện này với nhau để được khối đa diện $\mathcal{H}$.

Bài 2. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

* **Định nghĩa:** Một khối đa diện lồi được gọi là khối đa diện đều loại {p, q} nếu

a) Mỗi mặt của nó là một miền đa giác đều p cạnh.

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Từ định nghĩa trên ta thấy các mặt của khối đa diện đều là những miền đa giác đều. Đó là các khối đa diện loại {3; 3}; loại {4; 3} loại {3; 4} loại {5; 3} và loại {3; 5}.

Bài 3 KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Người ta chứng minh được rằng: có thể đặt tương ứng cho mỗi đa diện $(\mathcal{H})$ một số dương $V(\mathcal{H})$ thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu $(\mathcal{H})$ là khối lập phương có cạnh bằng một thì $V(\mathcal{H}) = 1$.

b) Nếu hai khối đa diện $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ bằng nhau thì $V(\mathcal{H}_1) = V(\mathcal{H}_2)$.

c) Nếu khối đa diện $(\mathcal{H})$ được phân chia thành hai khối đa diện $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ thì $V(\mathcal{H}) = V(\mathcal{H}_1) + V(\mathcal{H}_2)$.

Số dương $V(\mathcal{H})$ nói trên được gọi là thể tích khối đa diện $(\mathcal{H})$

- Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3}B.h$$

- Thể tích của khối chóp cụt có diện tích hai đáy B, B′ chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})h$$

- Thể tích của khối hộp bằng tích số của một diện tích đáy và chiều cao của nó.
- Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.

Ghi chú:

1. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng
2. Trong số trường hợp ta thường sử dụng kết quả sau: Cho khối chóp SABC, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt 3 điểm A′, B′, C′ khác S.

Khí đó ta có: $\dfrac{V_{(SA'B'C')}}{V_{(SABC)}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

B/ BÀI TẬP

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mp(SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải

Dễ thấy I là trọng tâm ΔABD

$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ và $AI = \frac{AC}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔABI có $BI^2 + AI^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{3a^2}{9} = a^2 = AB^2$

$\Rightarrow BI \perp AI$ và $BI \perp SA$

$\Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$

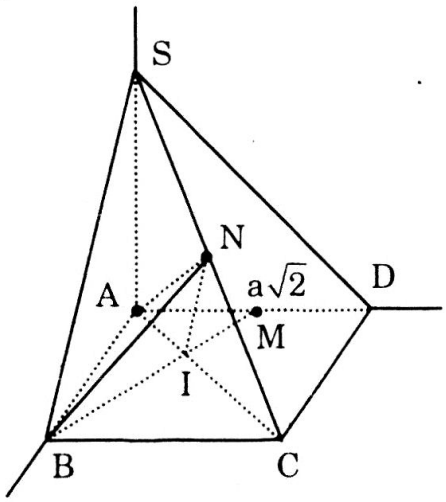
Gọi $V = V_{SABC}$; $V_1 = V_{SABN}$; $V_2 = V_{CNBI}$

Ta có $\frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} = \frac{SN.SA.SB}{SC.SA.SB} + \frac{CN.CI.CB}{SC.CA.CB}$

$\Rightarrow \frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{6}V_{SABC} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}BA.BC.SA$

$= \frac{1}{36}.a.a\sqrt{2}.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (đvtt)



2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; SA = 2a, và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM

Giải

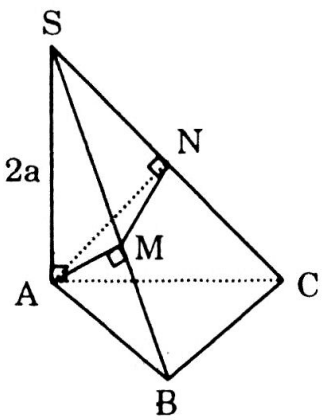
Ta có $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{SM.SB}{SB^2}.\frac{SN.SC}{SC^2}$

$= \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2}.\frac{4a^2}{5a^2} = \frac{16}{25}$

Suy ra $V_{SAMN} = \frac{16}{25}V_{SABC}$

Suy ra $V_{A.BCMN} = V_{SABC} - V_{SAMN}$

$= \frac{9}{25}V_{SABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$ (đvtt)



3. Chứng minh rằng một đa diện có các mặt là những đa giác có số lẻ cạnh thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

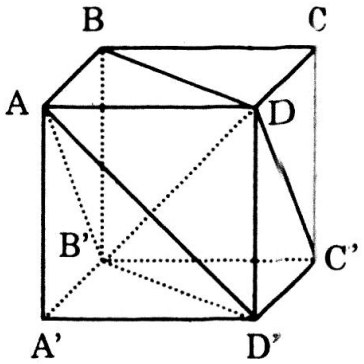
Giải

Gọi m là số mặt của đa diện, và gọi (2k + 1) là số cạnh của 1 mặt đa diện.

Vậy số cạnh của khối đa diện là m(2k + a). Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đáy hai mặt đa diện giác nên số cạnh thực sự của đa diện là $c = \frac{m(2k+1)}{2}$ (phải là số nguyên dương) nên m phải là số chẵn (đpcm).

4. Hãy chia khối lập phương thành sáu khối tứ diện bằng nhau.

Giải

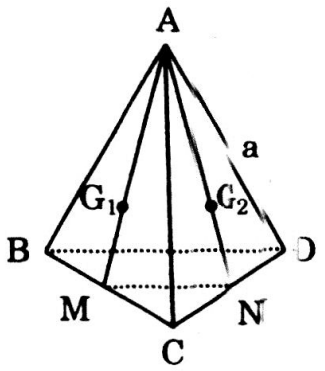


- Đầu tiên ta chia khối đa diện lập phương ABCD.A'B'C'D' theo mp(BB'D'D) thành hai hình lăng trụ đứng bằng nhau.
- Chia khối lăng trụ đứng ABD.A'B' thành ba khối tứ diện bằng nhau là B'.AA'D' và B'.ABD và B'ADD'.
- Chia khối lăng trụ đứng BCD.B'C'D' thành ba khối tứ diện bằng nhau là D.B'D'C' và B'.BCD và B'CDC'

Như vậy ta đã chia khối lập phương thành sáu khối tứ diện bằng nhau.

5. Chứng minh rằng các tâm của các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một tứ diện đều.

Giải



Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều.

Gọi G_1 là tâm của ΔABC

G_2 là tâm của ΔACD

G_3 là tâm của ΔABD

G_4 là tâm của ΔBCD

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD

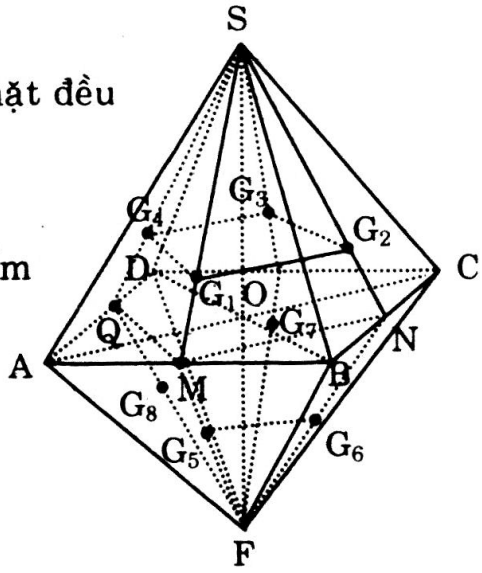
Ta có $MN = \frac{a}{2}$

Trong tam giác AMN ta có $G_1G_2 = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$

Tương tự tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ có sáu cạnh đều bằng $\frac{a}{3}$, nên tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là tứ diện đều.

6. Chứng minh rằng các tâm của các mặt của hình tám mặt đều là các đỉnh của một hình lập phương.

Giải



• Gọi a là độ dài cạnh của hình tám mặt đều

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a.

Ta có $AC = DB = a\sqrt{2}$, $AC \perp BD$

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta có:

$$MN = PQ \,//\, \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$NP = MQ \,//\, \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $G_4G_1G_2G_3$ là ảnh của QMNP qua phép vị tự tâm S tỉ số $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_4G_1G_2G_3$ là hình vuông có cạnh là $\frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

• Tương tự gọi G_5, G_6, G_7; G_8 lần lượt là tâm của ΔAFB, BFC, CFD, DFA

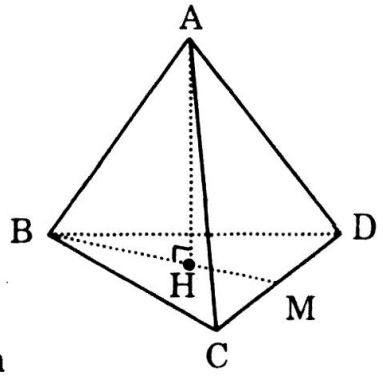
Tương tự $G_5G_6G_7G_8$ cũng là hình vuông bằng hình vuông $G_1G_2G_3G_4$

Tương tự: $G_1G_4G_8G_5$,... cũng là hình vuông bằng hình vuông $G_1G_2G_3G_4$

Tóm lại ta có $G_1G_2G_3G_4.G_5G_6G_7G_8$ là hình lập phương (đpcm).

7. Tính thể tích khối chóp tứ diện đều cạnh a.

Giải



Gọi M là trung điểm của cạnh CD

AH là chiều cao của tứ diện, $AH \perp (BCD)$

Ta có $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}CD.BM = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì $AB = AC = AD \Rightarrow$ H là tâm đường tròn

ngoại tiếp ΔBCD (do HB = HC = HD)

Nên H cũng là trọng tâm tam giác đều BCD

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác vuông ABH ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Nên $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt)

8. Tính thể tích khối tám mặt đều cạnh a.

Giải

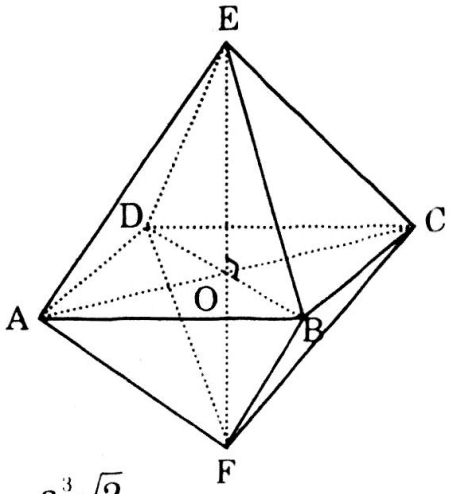
Ta có $S_{ABCD} = a^2$

$$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Nên trong tam giác vuông EAO ta có

$$EO^2 = AE^2 - AO^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow EO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Nên $V_{EABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$$V_{S.ABCD.F} = 2V_{E.ABCD} = \frac{2.a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt)}$$

9. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Tính tỉ số giữa thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện ACB'D'.

Giải

Gọi a, b lần lượt hai cạnh của hình bình hành đáy ABCD, h là chiều cao của hình hộp.

Tc ó $S_{ABCD} = 2(\frac{1}{2}ab\sin\widehat{DAB}) = ab\sin\widehat{DAB}$

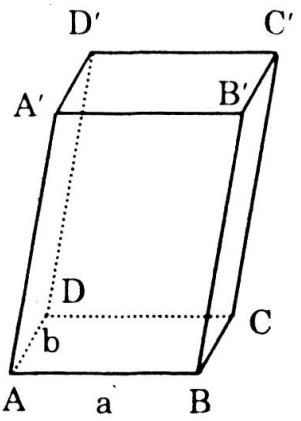
$$V_{ABC.B'} = \frac{1}{3}(S_{ABC})h = \frac{1}{3}.\frac{ab}{2}\sin\widehat{DAB}.h = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$

$$V_{D'A'B'A} = \frac{1}{3}(S_{D'A'B'})h = \frac{1}{3}\frac{ab}{2}.\sin\widehat{D'AB'}.h = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$

$$V_{D'C'B'C} = \frac{1}{3}(S_{D'C'B'})h = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$

$$V_{ADCD'} = \frac{1}{3}(S_{ADC}).h = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.h = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$



Ta có

$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - (V_{ABC.B'} + V_{D'C'B'C} + V_{ADC.D'})$$

$$= abh\widehat{DAB} - \frac{4}{6}abh\sin DAB = \frac{abh.\sin\widehat{DAB}}{6}$$

Suy ra $\dfrac{V_{ABCDA'B'C'D'}}{V_{ACB'D'}} = \dfrac{abh.\sin\widehat{DAB}}{\dfrac{abh.\sin\widehat{DAB}}{3}} = 3.$

10. Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác S. Chứng minh rằng:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Giải

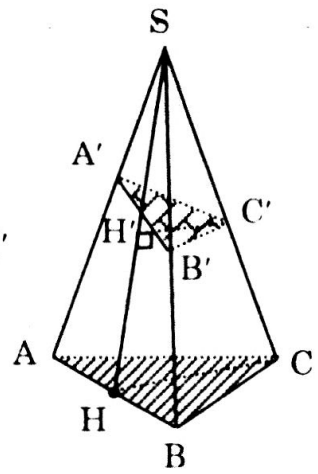
Dựng hình CH và C'H' vuông góc với mp(SAB)

Ta có $\dfrac{C'H'}{CH} = \dfrac{SC'}{SC}$ (Vì $\Delta SH'C' \backsim \Delta SHC$)

$$V_{SA'B'C'} = \frac{1}{3}S_{\Delta SA'B'}.C'H' = \frac{1}{6}SA'.SB'.\sin\widehat{A'SB'}.C'H'$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAB}.CH = \frac{1}{6}SA.SB.\sin\widehat{ASB}.CH$$

Do đó $\dfrac{V_{SA'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'SB'.SC'}{SA.SB.SC}$



11. Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.

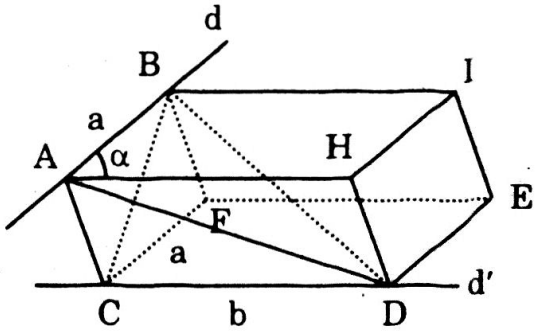
Giải

Từ các cạnh là AB, CD, AC ta dựng hình hộp ABIH.CDEF

Gọi $\alpha = (\widehat{d,d'})$ thì ta có

$S_{ABIH} = ab\sin\alpha$

Gọi h là độ dài đoạn vuông góc chung của d, d' $\Rightarrow$ h = d(C, ABIH) nên h là chiều cao của hình hộp



Do đó $V_{ABIH.CDEF} = hab\sin\alpha$

Ta dễ thấy:

$$V_{ABCD} = V_{BCFD} = V_{ABHD} = V_{FDEB} = V_{BDHI} = V_{BDEI} = \frac{1}{6}V_{ABIH\cdot CDEF}$$

Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6}abh\sin\alpha$ (không đổi) (đvtt)

12. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và AB = a. Trên đường thẳng qua C vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDEF theo a.

Giải

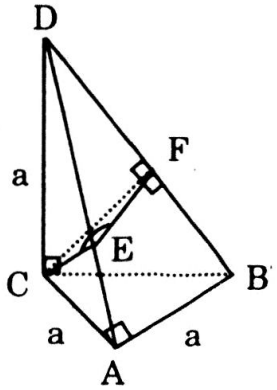
Trong ΔABC: ta có $CB = a\sqrt{2}$

ΔDBC: $DB^2 = DC^2 + CB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow DB = a\sqrt{3}$

ΔDCB: $DC^2 = DF.DB$

$$\Rightarrow DF = \frac{DC^2}{DB} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



• Ta có $CE \perp DB$ (vì $DB \perp (CEF)$)

$CE \perp AB$ (vì $AB \perp (DCA)$)

$\Rightarrow CE \perp (DAB) \Rightarrow CE \perp EF$

Vậy ΔCEF vuông tại E

• ΔCDF: $CF^2 = CD^2 - DF^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow CF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

• Tam giác vuông CEF

$$EF^2 = CF^2 - CE^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{2} \text{ (vì } \Delta DCA \text{ vuông cân)}$$

$$EF^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$S_{EFC} = \frac{1}{2}CE.EF = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{6}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{CDEF} = \frac{1}{3}S_{CEF}.DF = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{36} \text{ (đvtt)}$$

13. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = 2a, AA' = a, lấy điểm M trên cạnh AD sao cho AM = 3MD

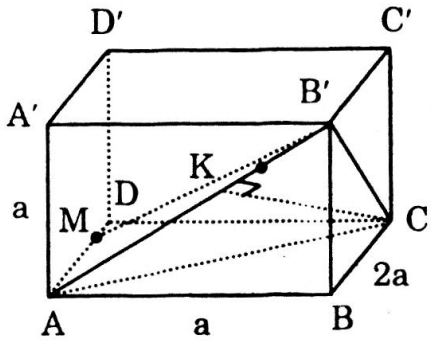
a) Tính thể tích khối chóp M.AB'C.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC').

Giải

a) Ta có $S_{AMC} = \frac{3}{4}S_{ADC} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.2a^2 = \frac{3a^2}{4}$

$$V_{MAB'C} = \frac{1}{3}\frac{3a^2}{4}a = \frac{a^3}{4} \text{ (đvtt)}$$



b) Gọi h là khoảng cách từ M đến mp(AB'C) khi đó:

$$V_{MAB'C} = \frac{1}{3}S_{AB'C}.h = \frac{a^3}{4}$$

Ta có $AC^2 = B'C^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$ nên tam giác ACB' cân tại C do đó đường trung tuyến CK cũng là đường cao của ($\Delta AB'C$)

Ta có $CK^2 = CA^2 - AK^2 = 5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{2}$

$$\Rightarrow CK = \frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{AB'C} = \frac{1}{2}\frac{3a}{\sqrt{2}}.a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}$$

Vậy $\frac{3a^2}{2}.h = 3\frac{a^3}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}$

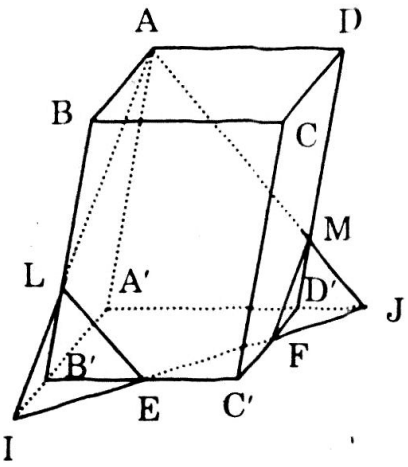
14. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của B'C' và C'D'. Mặt phẳng (AEF) chia hình hộp đó thành hai hình đa diện (H) và (H') trong đó (H) là hình đa diện chứa đỉnh A'. Tính tỉ số giữa thể tích hình đa diện (H) và thể tích hình đa diện (H')

Giải

- Gọi I là giao điểm của EF với A'B', J là giao điểm của EF với A'D', AI cắt BB' tại I, AJ cắt DD' tại M

Vì EB' = EC' và B'I // C'F nên $IB' = FC' = \frac{IA'}{3}$

Từ đó suy ra hình chóp LB'EI là ảnh của hình chóp AA'JI qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{3}$



Do đó $V_{LB'EI} = \frac{1}{27} V_{AA'IJ}$

Đặt AB = a, BC = b, đường cao hạ từ A xuống mp(A'B'C'D') là h thì

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = h.a.b\sin(\widehat{BAD})$

$$V_{AA'IJ} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{3b}{2}.\sin\widehat{BAD}\right)h\right) = \frac{3}{8} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

Vậy $V_{(H)} = V_{AA'IJ} - \frac{2}{27} V_{AA'IJ} = \frac{25}{27}.\frac{3}{8} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$$= \frac{25}{72} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

và $V(H') = \frac{47}{72} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

Do đó $\frac{V_{(H)}}{V_{(H)}} = \frac{25}{47}$

15. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Từ A kẻ các đường AD vuông góc với SB và AE vuông góc với SC. Biết rằng AB = a, BC = b, SA = c. Hãy tính thể tích hình chóp S.ADE.

Giải

Ta có $BC \perp AB$

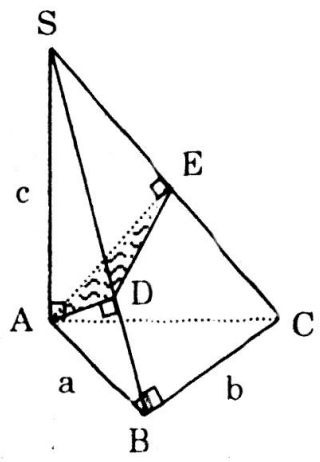
$BC \perp AS$

Suy ra $BC \perp (ABS) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ theo giao tuyến SB

Mà $AD \perp SB \Rightarrow AD \perp (SBC)$

$\Rightarrow AD \perp SC$

Vậy $SC \perp (ADE)$ tại E



Ta có $S_{SAB} = \frac{1}{2} AB.AS = \frac{1}{2} SB.AD$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AS}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{AS.AC}{SC} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Δ vuông ADE: $DE^2 = AE^2 - AD^2$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}$$

Tam giác vuông SAC: $SA^2 = SC.SE$

$$\Rightarrow SE = \frac{SA^2}{SC} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$V_{SADE} = \frac{1}{3}S_{ADE}.SE = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AD.DE.SE$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}.\frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}.\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{abc^5}{6(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)} \text{ (đvtt)}$$

16. Cho hình chóp tam giác O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Hãy tính:
a) Đường cao OH của hình chóp.
b) Thể tích khối tứ diện OHBC.

Giải

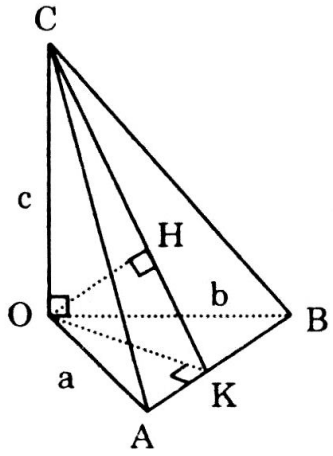
a) Vẽ đường cao OK của ΔOAB.

Ta có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{a^2b^2}$

Ta có $AB \perp OC$, $AB \perp OK \Rightarrow AB \perp (OCK)$

$\Rightarrow (OCK) \perp (ABC)$ theo giao tuyến CK

hạ $OH \perp CK \Rightarrow OH \perp (ABC)$



Xét tam giác vuông OCK:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{b^2+a^2}{a^2b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

b) Xét tam giác vuông OCH: $CH^2 = OC^2 - OH^2$

$$CH^2 = c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = \frac{a^2b^2c^2+b^2c^4+c^4a^2-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$CH^2 = \frac{c^4(a^2+b^2)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \Rightarrow CH = \frac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

$$S_{OHC} = \frac{1}{2}OH.CH = \frac{c^3ba\sqrt{a^2+b^2}}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Xét tam giác vuông OKB: $KB^2 = OB^2 - OK^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{b^2+a^2}$

$$KB^2 = \frac{b^2(a^2+b^2)-a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{b^4}{a^2+b^2} \Rightarrow KB = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$V_{OHBC} = \frac{1}{3}dt(\Delta OCH).BK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\frac{c^3ba\sqrt{a^2+b^2}}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \times \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{b^3c^3a}{6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \text{ (đvtt)}$$

17. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh AB = a các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi D là giao của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

a) Tính tỉ số thể tích giữa hai khối chóp S.DBC và S.ABC.

b) Tính thể tích của khối chóp S.DBC.

Giải

a) Hạ đường cao SH của hình chóp S.ABC.

$\Rightarrow$ H là tâm của ΔABC đều cạnh a

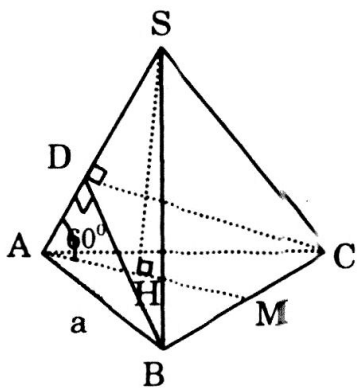
Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Theo giả thiết $\widehat{SAH}$ = (cạnh bên, mặt đáy) = 60^0

Tam giác vuông SAH:

$$SH = AH.tg60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}$$



• Ta có $SA^2 = AH^2 + SH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2$

$$= \frac{4a^2}{3} = SB^2 = SC^2$$

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{12}$$

$$SM = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB.SM = \frac{1}{2}SA.DB \Leftrightarrow AB.SM = SA.DB$$

$$\Rightarrow a.\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.DB \Rightarrow DB = \frac{a\sqrt{117}}{12}$$

Xét tam giác vuông ADM. Ta có:

$$AD = AM.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$DM^2 = AM^2 - AD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{9a^2}{16}$$

$$DM = \frac{3a}{4}$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}BC.DM = \frac{1}{2}a.\frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}$$

$$SD = SA - AD = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$$

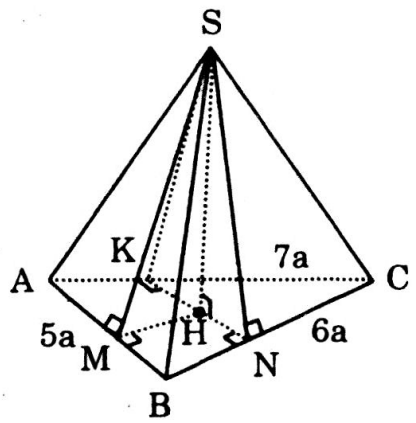
$$V_{S.DBC} = \frac{1}{3}.S_{BDC}.SD = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{8}.\frac{5a\sqrt{3}}{12} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96} \text{ (đvtt)}$$

Vậy $\frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96} \times \frac{12}{a^3\sqrt{3}} = \frac{5}{8}$

Theo câu (a) ta có $V_{S.DBC} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

18. Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp đó.

Giải



Hạ $SH \perp (ABC)$

Hạ $HM \perp AB$, $HN \perp BC$, $HK \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SKH} = 60^0$.

Ta có trong Δ vuông SHM: $tg60^0 = \frac{SH}{HM}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{3}\,HM$

Vì 3 tam giác vuông bằng nhau:

$\Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SKH$

$\Rightarrow$ HM = HN = HK = r = bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-5a)(p-6a)(p-7a)} \text{ với } p = \frac{5a+6a+7a}{2} = 9a$$

$$S_{\Delta ABC} = 6a^2\sqrt{6}$$

Ta lại có $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{9a} = \frac{2a\sqrt{6}}{3} = MH$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{6a\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.6a^2\sqrt{6}.\frac{6a\sqrt{2}}{3} = 8a^3\sqrt{3}. \text{ (đvtt)}$$

19. Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác cân AB = AC = 5a, BC = 6a. Các mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Hãy tính thể tích của khối chóp.

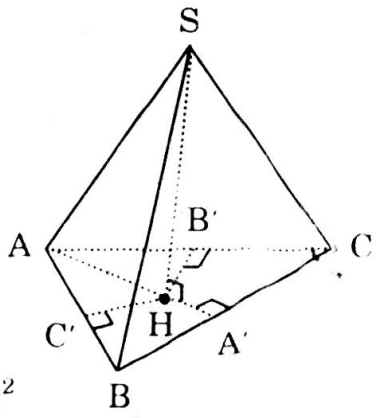
Giải

Hạ SH ⊥ (ABC). Kẻ HA', HB', HC' lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Theo định lý ba đường vuông góc ta có SA' ⊥ BC, SB' ⊥ CA,, SC ⊥ AB. Do đó ta có:

$\widehat{SA'H} = \widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^0$. Suy ra các tam giác vuông SHA', SHB', SHC' bằng nhau.

Từ đó suy ra HA' = HB' = HC'. Nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Do ΔABC cân tại A ⇒ AH là trung trực của BC.



Ta có $AA'^2 = AB^2 - BA'^2 = 25a^2 - 9a^2 = 16a^2$

$\Rightarrow AA' = 4a$

Gọi p là nửa chu vi ΔABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar.$

$$\Rightarrow r = \frac{3a}{2} = HA'.$$

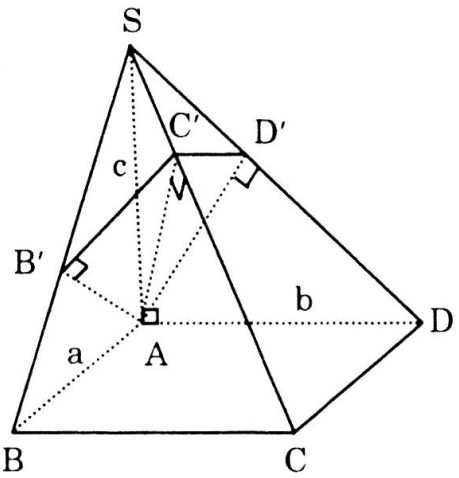
Xét Δ vuông SA'H: $SH = HA'tg60^0 = \frac{3a}{2}.\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.12a^2.\frac{3a.\sqrt{3}}{2} = a^3.6\sqrt{3} \text{ (đvtt)}$$

20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy và AB = a, AD = b, SA = c. Lấy các điểm B', D' theo

thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' vuông góc với SB, AD' vuông góc với SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Giải



Ta dễ thấy:

(SAB) ⊥ (SBC) vì có BC ⊥ (SBA)

(SAD) ⊥ (SDC) vì có DC ⊥ (SDA)

và $AB' \perp SB \Rightarrow AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp SC$

và $AD' \perp SD \Rightarrow AD' \perp (SCD)$

$\Rightarrow AD' \perp SC$

Suy ra $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$

ΔABC: $AC^2 = a^2 + b^2$

ΔSAC: $SC^2 = SA^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2}SA.AC = \frac{1}{2}SC.AC'$$

$$\Rightarrow AC' = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ΔSAB: $SB^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow SB = \sqrt{a^2 + c^2}$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SA.AB' = \frac{1}{2}ac \Rightarrow AB' = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$\Delta AB'C'$ vuông tại B' vì $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C'$

$$B'C'^2 = AC'^2 - AB'^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}$$

$$= \frac{c^4b^2}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AB'.B'C' = \frac{1}{2}\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

ΔSAD: $AD' = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Tam giác vuông AD'C' vuông tại D': $D'C'^2 = AC'^2 - AD'^2$

$$D'C'^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2c^4}{(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$D'C' = \frac{ac^2}{\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

$$S_{AD'C'} = \frac{1}{2}AD'.D'C' = \frac{1}{2}\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}.\frac{ac^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$S_{AB'C'D'} = \frac{abc^3}{2}\left[\frac{1}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{1}{(b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]$$

$$= \frac{abc^4(a^2+b^2+2c^2)}{2(a^2+c^2)(b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\Delta SAC'$: $SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = c^2 - \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{c^4}{a^2+b^2+c^2}$

$$SC' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}dt(AB'C'D').SC'$$

$$= \frac{1}{3}\frac{abc^4(a^2+b^2+2c^2)c}{2(a^2+c^2)(b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{abc^5(a^2+b+2c^2)}{6(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)} \text{ (đvtt)}$$

21. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, AA' = c. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của B'C'. Mặt phẳng (AEF) chia hình hộp đó thành hai hình đa diện (H) và (H'). Trong đó (H) là hình đa diện chứa điểm A'. Tính thể tích của (H) và (H').

Giải

Giả sử đường thẳng MN cắt A'B' tại I, cắt A'D' tại J, AI cắt BB' tại F, AJ cắt DD' tại E.

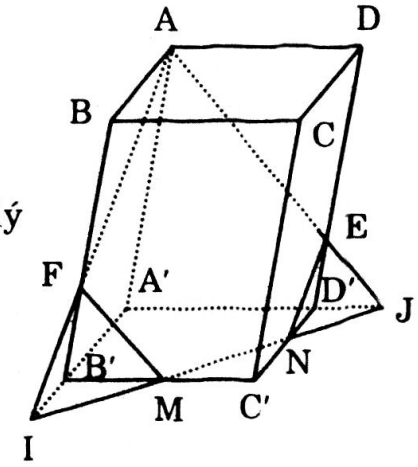
• Tính $V_{FB'IM}$

Vì M là trung điểm của B'C'

$\Rightarrow B'M = MC'$ và $B'I // C'N \Rightarrow \frac{A'B'}{2} = \frac{a}{2}$

Tương tự $D'J = \frac{A'D'}{2} = \frac{b}{2}$. Theo định lý Talét: ta có $\frac{FB'}{AA'} = \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}$

Và $\frac{ED'}{AA'} = \frac{JD'}{JA'} = \frac{1}{3}$. Do đó



$$V_{FB'MI} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{b}{2}\right)\frac{c}{3} = \frac{abc}{72}$$

Tương tự $V_{ED'NJ} = \frac{abc}{72}$

$$V_{AA'IJ} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{3b}{2}\right)c = \frac{3abc}{8}$$

Vậy $V_{(H)} = \frac{3abc}{8} - \left(\frac{abc}{72} + \frac{abc}{72}\right) = \frac{25abc}{72}$ (đvtt)

$$V_{(H')} = abc - \frac{25abc}{72} = \frac{47abc}{72} \text{ (đvtt)}$$

22. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông ở B, Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết rằng AB = a, BC = b, SA = c. Hãy tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

Giải

Ta có: BC ⊥ SA (vì SA ⊥ đáy)

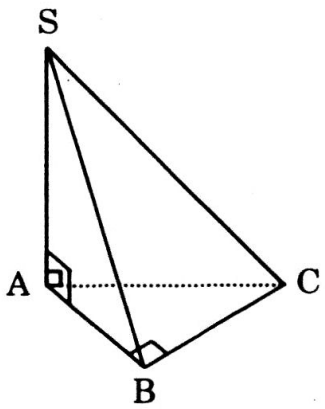
BC ⊥ AB (ΔABC vuông tại B)

⇒ BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ SB

Gọi h là khoảng cách từ A đến mp(SBC)

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{1}{6}h.SB.BC$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{abc}{b\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ (đvtt)}$$



23. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết AB = a, $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$.

a) Tính tỉ số thể tích hai khối chóp S.AB'C'D' và S.ABCD.

b) Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

Giải

Gọi SH là đường cao của S.ABCD.

SH cắt (P) tại H', H là giao điểm của AC và BD.

Vì BD ⊥ (SAC) ⇒ BD ⊥ SC

Do đó BD // (P). Từ đó suy ra (P) cắt (SDB) theo giao tuyến B'D' // BD.

Do đó $\frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{2}{3}$

H'B' = H'D' và B'D' ⊥ AC'

Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua H và song song với AC'. Khi đó ta có

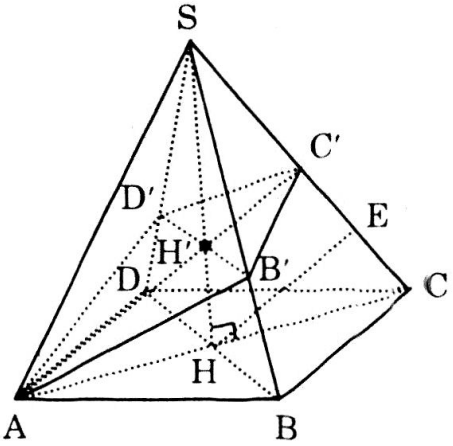
E'C = EC; $\frac{SC'}{SE} = \frac{2}{3}$.

Từ đó suy ra $\frac{SE - SC'}{SE} = \frac{1}{3} = \frac{EC'}{SE}$.

Do đó SC' = 2EC' = CC'.

Ta có $\frac{V_{SAB'D'}}{V_{SABD}} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$\frac{V_{SB'C'D'}}{V_{SBCD}} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$



Từ đó suy ra $V_{SAB'C'D'} = V_{SAB'D'} + V_{SB'C'D'} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)\frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Vậy $\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{3}$

b) Theo chứng minh trên ta có AC' vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔSAC nên AS = AC. Do đó ΔSAC đều.

Từ đó suy ra $SH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{6}}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'D'} = \frac{\sqrt{6}}{18}a^3$ (đvtt).

24. Cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = 2a, AA' = a. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho AM = 3MD.

a) Tính thể tích khối chóp M.AB'C.

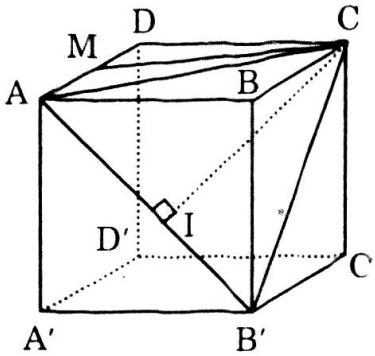
b) Tính khoảng cách từ M đến mp(AB'C).

Giải

a) Thể tích khối chóp M.AB'C bằng thể tích khối chóp B'AMC. Ta có

$S_{AMC} = \frac{3}{4}S_{ADC} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}2a^2 = \frac{3a^2}{4}$

Do đó $V_{MAB'C} = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}.a = \frac{a^3}{4}$



b) Gọi h là khoảng cách từ M đến mp(AB'C) khi đó:

$V_{MAB'C} = \frac{1}{3}S_{AB'C}.h = \frac{a^3}{4}$

Vì $AC^2 = B'C^2 = 5a^2$. Nên ΔACB' cân tại C. Do đó đường trung tuyến CI của ΔACB' cũng là đường cao, ta có:

$$CI^2 = CA^2 - AI^2 = 5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{9a^2}{2} \Rightarrow CI = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

Do đó $S_{AB'C} = \frac{1}{2}\frac{3a}{\sqrt{2}}a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{3a^3}{4} : \frac{3a^2}{2} = \frac{a}{2}$ (đvtt)

25. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tính thể tích khối tứ diện A'BB'C.

b) Mặt phẳng đi qua A'B' và trọng tâm tam giác ABC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích hình chóp C.A'B'FE.

Giải

a) Tính $V_{A'BB'C}$.

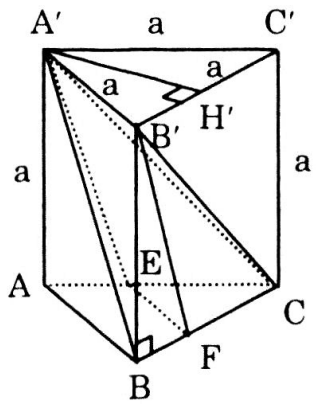
Ta có $S_{BB'C} = \frac{1}{2}CB.BB' = \frac{a^2}{2}$.

Gọi A'H' là chiều cao của $\Delta A'B'C'$.

Ta có $A'H' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $A'H' \perp (BCB')$

Vậy $V_{A'BB'C} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)



b) Tính $V_{CA'B'EF}$.

Thể tích hình chóp cụt ECF.A'B'C'

Ta có $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$S_{CEF} = \frac{4}{9}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_{A'B'C'}.S_{CEF}} = \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{9}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{C'A'B'EFC} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{9} + \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right).a = \frac{19a^3\sqrt{3}}{108} \text{ (đvtt)}$$

$$V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a.a\sqrt{3}}{2}\right).a = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}$$

$$V_{CA'B'EF} = \frac{19a^3\sqrt{3}}{108} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{19a^3\sqrt{3} - 9a^3\sqrt{3}}{108} = \frac{10a^3\sqrt{3}}{108} \text{ (đvtt)}$$

26. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp S.AEMF.

Giải

Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác vuông SAO: $SO = AO.tg60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Tam giác SAC có SO và AM là 2 trung tuyến.

Gọi G là giao điểm của SO và AM.

Ta có $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SE}{SB}$

$$V_{SABD} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12} \text{ (đvtt)}$$

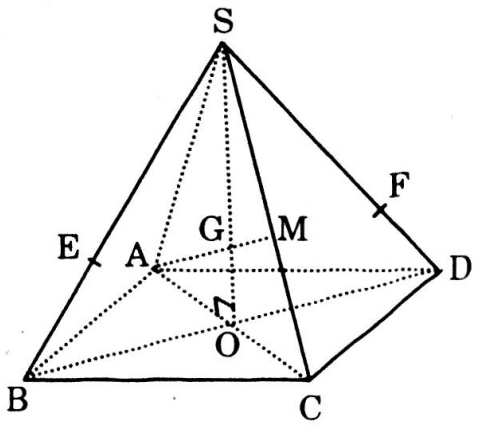
$$\frac{V_{SAED}}{V_{SABD}} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow V_{SAED} = \frac{4}{9}.\frac{a^3\sqrt{6}}{12} = \frac{a^3\sqrt{6}}{27} \text{ (đvtt)}$$

$$\frac{V_{SEMF}}{V_{SBCD}} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow V_{SEMF} = \frac{2}{9}\frac{a^3\sqrt{6}}{12} = \frac{a^3\sqrt{6}}{54} \text{ (đvtt)}$$

$$\Rightarrow V_{SAEMF} = V_{SAED} + V_{SEMF} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18} \text{ (đvtt)}$$



27. Cho khối hộp ABCD.A′B′C′D′. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB′ và DD′. Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp trên làm hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải

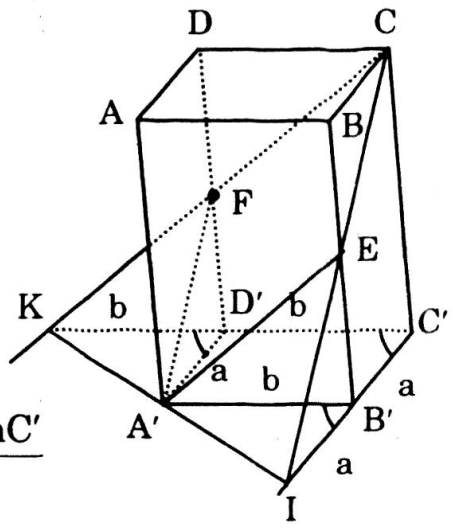
Gọi a, b là hai cạnh hình bình hành đáy và h là chiều cao của hình hộp.

Ta có CE cắt B′C′ tại I.

CF cắt C′D′ tại K.

Trong tam giác ICC′ ta có EB′ là đường trung bình nên IB′ = B′C′ = a. Tương tự KD′ = D′C′ = b.

$$V_{KIC'C} = V_{KA'D'F} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}absinC'\frac{h}{2} = \frac{abhsinC'}{12}$$



Vậy thể tích phần hình hộp nằm dưới mp(CEF) là

$$V_{A'B'C'D'EFC} = V_{KIC'C} - 2V_{A'B'IE}$$

$$= \frac{2abhsinC'}{3} - \frac{abhsinC'}{6} = \frac{abhsinC'}{2}$$

Mà $V_{ABCD.A'B'C'D'} = absinC'h$

$$\Rightarrow V_{ABCDEFA'} = \frac{abhsinC'}{2}$$

Vậy tỉ số hai khối đa diện bằng 1.

28. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm của A'B', N là trung điểm của BC.

a) Tính thể tích khối tứ diện ADMN.

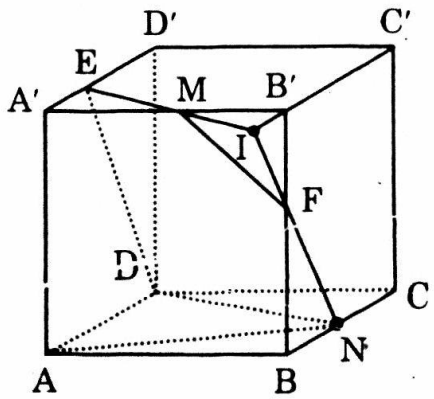
b) Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị phân chia bởi mặt phẳng đi qua D, M, N.

Giải

a) Tính thể tích khối tứ diện ADMN

Ta có $S_{AND} = \frac{1}{2}a.a = \frac{a^2}{2}$

$$V_{M.ADN} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{6} \text{ (đvtt)}$$



b) Tính $V_{M.ADEA}$

Ta có $DN^2 = DC^2 + NC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$$\Rightarrow DN = EI = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

Tam giác vuông EA'M: $A'E^2 = EM^2 - A'M^2$

$$A'E^2 = \frac{5a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16} \Rightarrow A'E = \frac{a}{4}$$

$$V_{MADEA'} = \frac{1}{3}(\text{dt ADEA'}).A'M = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a\left(a + \frac{a}{4}\right)\frac{a}{2} = \frac{5a^3}{48}$$

$$V_{MADNB} = \frac{1}{3}a\left(\frac{a + \frac{a}{2}}{2}\right)a = \frac{3a^3}{4}$$

Hai tam giác vuông đồng dạng FBN $\backsim$ FB'I $\Rightarrow \frac{FB}{FB'} = \frac{BN}{IB'} = 2$

$$\Rightarrow FB = 2FB' \Rightarrow BF = \frac{2}{3}a.$$

$$V_{M.FBN} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3}{36}$$

Vậy $V_1 = V_{EA'ABNFM} = \frac{5a^3}{48} + \frac{3a^3}{12} + \frac{a^3}{36} = \frac{110a^3}{288} = \frac{55a^3}{144}$

$\Rightarrow V_2 = V_{ED'C'B'MDNCF} = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$

Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{55a^3}{144}}{\frac{89a^3}{144}} = \frac{55}{89}$.

29. Cho tứ diện ABCD có các cặp đối diện bằng nhau từng đôi một. Tính thể tích của tứ diện đó biết rằng AD = a, BD = b, CD = c.

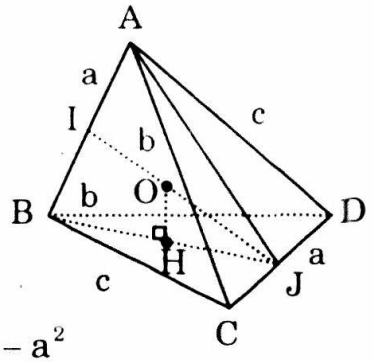
Giải

Ta dễ thấy $\Delta ABC = \Delta DCB = \Delta BAD = \Delta CDA$.

Suy ra các đường tròn ngoại tiếp chúng có cùng bán kính

Suy ra khoảng cách từ tâm O của hình cầu ngoại tiếp tứ diện đến bốn mặt này bằng nhau hay nói cách khác: O là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Thì IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Gọi O là trung điểm của IJ, thì O chính là tâm mặt cầu đã nói ở trên.



Ta có: R = OA = OB = OC = OD.

ΔABC: $CI^2 = \frac{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

ΔIJC vuông góc ở I nên: $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

ΔAIO vuông ở I nên: $R^2 = OA^2 = AI^2 + OI^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{IJ^2}{4}$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{8} = OB^2$$

Hạ $OH \perp (BCD) \Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và $OB = OC = OD \Rightarrow HB = HC = HD = r$.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{abc}{4r}$$

Ta lại có $S_{\Delta BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow r = \frac{abc}{4S_{\Delta BCD}}$$

Tam giác vuông OBH: $OH^2 = OB^2 - BH^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{8} - \dfrac{a^2b^2c^2}{16S^2}$

$$OH^2 = \frac{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}{16S^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}}{4S}$$

$$V_{OBCD} = \frac{1}{3}S.OH = \frac{S}{3}.\frac{\sqrt{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}}{4S}$$

$$V_{OBCD} = \frac{\sqrt{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}}{12}$$

$$V_{ABCD} = 4V_{OBCD} = \frac{4.\sqrt{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{2S^2(a^2+b^2+c^2) - a^2b^2c^2}}{3}$$

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}}{12} \text{ (đvtt)}$$

30. Cho hai đoạn thẳng AB và CD chéo nhau, BD là đường vuông góc chung của chúng. Biết rằng BD = h, AB = a, CD = b và góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60^0. Hãy tính thể tích của tứ diện ABCD.

Giải

Dựng BE song song và bằng DC; DF song song và bằng BA. Khi đó ABE.FDC là một lăng trụ đứng.

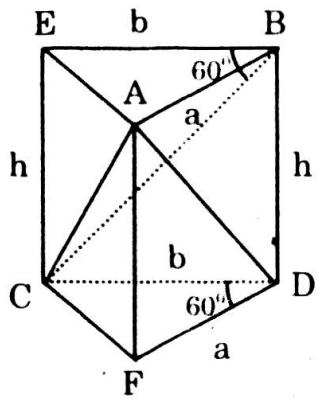
Ta có $S_{ABE} = \dfrac{1}{2}ab\sin 60^0 = ab\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$V_{C.ABE} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}abh = \frac{\sqrt{3}}{12}abh$$

Suy ra: $V_{C.ABE} = V_{A.CFD} = \dfrac{\sqrt{3}.abh}{12}$

$$V_{ABE.FDC} = S_{CFD}.h = \frac{1}{2}(ab\sin 60^0).h$$

$$= \frac{hab\sqrt{3}}{4}$$



Suy ra $V_{ABCD} = V_{ABE.FDC} - (V_{CABE} + V_{ACFD})$

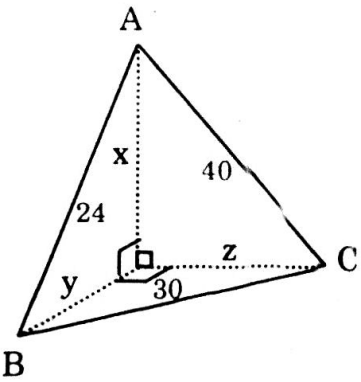
$$= \frac{abh\sqrt{3}}{4} - \frac{2\sqrt{3}abh}{12} = \frac{abh\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}$$

31. Cho một hình tứ diện SABC với SAB, SBC, SCA vuông góc với nhau từng đôi một và có diện tích tương ứng là $24cm^2$, $30cm^2$, $40cm^2$. Hãy tính thể tích tứ diện ABCD

Giải

Đặt SA = x, SB = y, SC = z.

Thì ta có: $\begin{cases} xy = 2.24 = 48 \\ yz = 2.30 = 60 \\ zx = 2.40 = 80 \end{cases}$ (xy = 2dt ΔSAB)



Ta lại có $V_{SABC} = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}\sqrt{xy.yz.zx}$

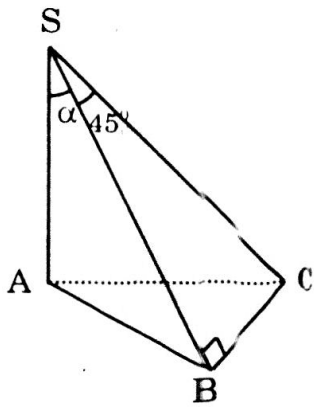
$$= \frac{1}{6}\sqrt{48.60.80} = 80 \ (cm^3)$$

32. Cho tứ diện SABC có cạnh SA ⊥ (ABC) nhị diện SB là nhị diện vuông và $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASB} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$.
Tính thể tích tứ diện SABC. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất.

Giải

Ta có $V_{SAB} = \frac{1}{3}.S_{SAB}.BC$ (vì BC ⊥ (SAB)

$$= \frac{1}{6}BC.SA.AB$$



Trong đó $BC = SB = a\sqrt{2}$

$AB = SB\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$

$SA = SB\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$

Vậy $V_{SABC} = \frac{a^3\sqrt{2}\sin 2\alpha}{6}$ đvtt

Ta có V_{SABC} lớn nhất $\Leftrightarrow \sin 2\alpha$ (lớn nhất) = 1

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ (nhọn)}$$

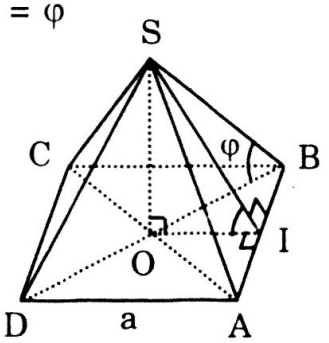
Khi đó $MaxV_{SABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ tương ứng với $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

33. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ $(0^0 < \varphi < 90^0)$. Tính tan của góc giữa

hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

Giải

Ta có góc của cạnh bên và đáy bằng φ $\Leftrightarrow \widehat{SBO} = \varphi$



ΔSOB có $tg\varphi = \dfrac{SO}{OB} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} tg\varphi$

Vẽ $OI \perp AB$
Ta có $SO \perp AB$ $\Rightarrow AB \perp (SIO)$

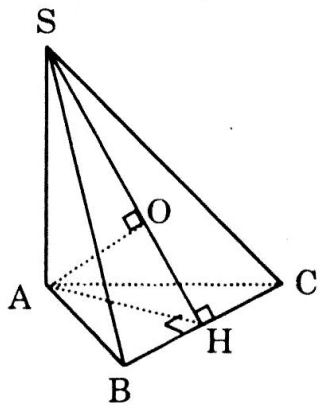
Vậy góc của 2mp (SAB) và (ABCD) là $\widehat{SIO}$

$$\tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2} tg\varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}\, tg\varphi$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\varphi a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} .tg\varphi \text{ (đvtt)}$$

34. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính khoảng cách từ điểm A tới mp (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC
Suy ra $AH \perp BC$
$AS \perp BC$
$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$
Hạ $AO \perp SH \Rightarrow AO \perp (SBC)$
$\Rightarrow AO = d(A, SBC)$

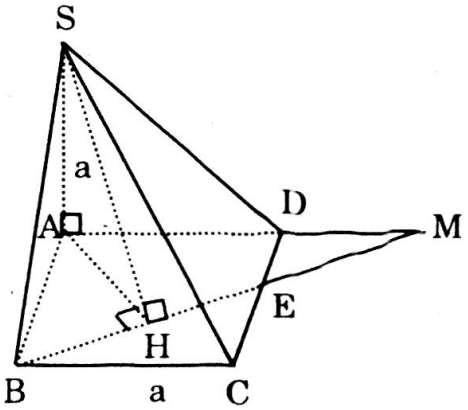
Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Δ vuông SAH: $\dfrac{1}{OA^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{6a^2}{4}}$

$\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (đvtt)

35. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mp(ABCD) và SA = a. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

Giải



Hạ AH ⊥ BE

Ta có BE ⊥ SH (vì BE ⊥ SA)

Vậy SH là khoảng cách từ S đến BE. Kéo dài BE cắt AD tại M vì E là trung điểm của DC

$\Rightarrow ED = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow$ D là trung điểm của AM

$\Rightarrow AM = 2a$.

ΔABM vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{5}$$

ΔSAH vuông tại A nên $SH^2 = AS^2 + AH^2$

$$SH^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5} \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \text{ (đvđd)}$$

36. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC = a trên đường thẳng vuông góc với mp (ABC) tại điểm A lấy điểm S sao cho góc giữa 2 mp (ABC) và (SBC) bằng 60^0. Tính độ dài đoạn thẳng SA theo a.

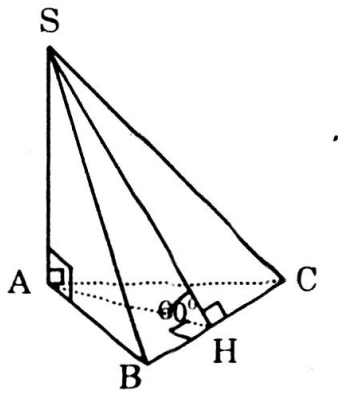
Giải

Gọi H là trung điểm của BC.

Vì ΔABC vuông cân $\Rightarrow$ AH ⊥ BC

AS ⊥ BC $\Rightarrow$ BC ⊥ (SAH)

$\Rightarrow$ BC ⊥ SH $\Rightarrow \widehat{AHS} = 60^0$



Ta có $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

Trong ΔSAH vuông tại A ta có

$$SA = AH.\tan\widehat{AHS} = \frac{a}{2}\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)

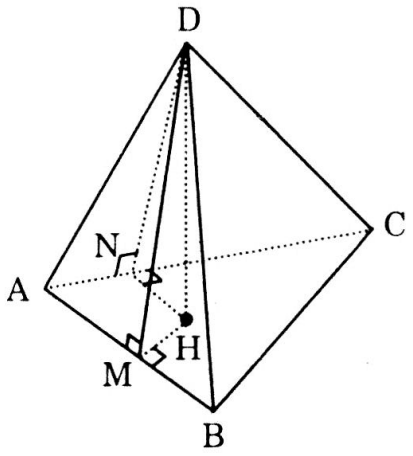
37. Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết AB = a, AC = b, AD = c và các góc BAC, CAD, DAB đều bằng 60^0.

Giải

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 60^0 = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$

Hạ $DH \perp (ABC)$

$HM \perp AB$, $HN \perp AC$



=> ΔAMD vuông tại M tương tự ΔAND vuông tại N.

Ta có $\Delta AMD = \Delta AND$ (vì AD chung, $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} = 60^0$)

Suy ra $DM = DN \Rightarrow HM = HN$

=> AH là phân giác của $\widehat{BAC}$.

Suy ra ΔAMH là $\frac{1}{2}$ tam giác đều

ΔAMH: $AM = \frac{AD}{2} = \frac{c}{2}$

ΔAMH: $AM = \frac{AH\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{AH\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{c\sqrt{3}}{3}$

Δ vuông AHD: $DH^2 = AD^2 - AH^2 = c^2 - \frac{c^2}{3} = \frac{2c^2}{3}$

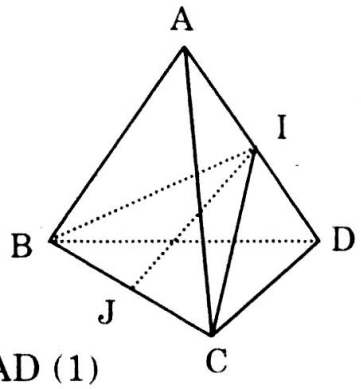
$\Rightarrow DH = \frac{c\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.DH = \frac{1}{3}\frac{ab\sqrt{3}}{4}.\frac{c\sqrt{6}}{3} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}$ (đvtt)

38. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh $a = 6\sqrt{2}$ cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Giải

a) Xác định đoạn vuông góc chung của AD và BC. Vì ABCD là tứ diện đều cạnh a, nên bốn mặt là bốn tam giác đều cạnh a.



Gọi I là trung điểm của AD

J là trung điểm của BC

Ta có $AJ = DJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra ΔAJD cân tại J nên trung tuyến $IJ \perp AD$ (1)

Suy ra ΔBIC cân tại I nên trung tuyến $IJ \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của AD và BC.

b) Tính IJ

Xét tam giác vuông BJI vuông tại J, ta có

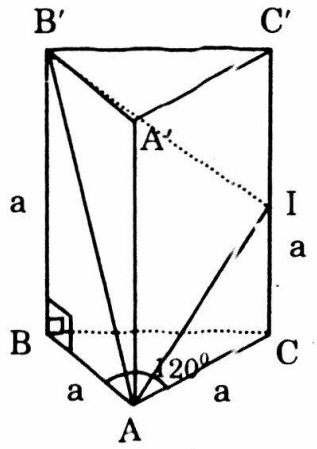
$$IJ^2 = BI^2 - BJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

$IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ thế $a = 6\sqrt{2}$ (cm).

Ta có $IJ = \dfrac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 6$ (cm).

39. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC = a và góc $\widehat{BAC} = 120^0$. Cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng ΔAB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I)

Giải



a) Chứng minh rằng ΔAB'I vuông ở A

ΔABC: $BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120^0 = 3a^2$

ΔB'BA: $B'A^2 = 2a^2$

ΔICA: $AI^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

ΔB'C'I: $B'I^2 = B'C'^2 + C'I^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$

Ta có $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$

Vậy $B'A^2 + AI^2 = B'I^2 \Rightarrow$ ΔAB'I vuông tại A.

b) Tính cosin của góc giữa hai mp (ABC), (AB'I)

Ta có $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I) thì ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

40. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho AC = R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Lấy điểm S sao cho $(\widehat{SAB, SBC}) = 60^0$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh tam giác AHK vuông và tính V_{SABC}.

Giải

• Chứng minh tam giác AHK vuông

Theo giả thiết $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$ (1)

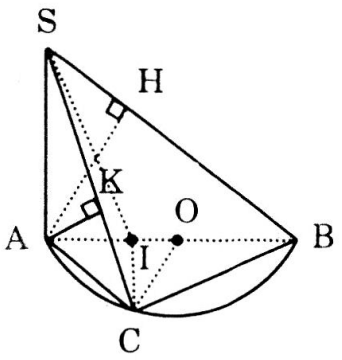
Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $BC \perp AC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (SAC)$.

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến SC

Mà $AK \perp SC$, $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$

Vậy ΔAHK vuông tại đỉnh K



• Tính thể tích V_{SABC} theo R

Từ C kẻ $CI \perp AB$. Do giả thiết $AC = OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều và $IA = IO = \dfrac{R}{2}$

Ta lại có $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow CI \perp (SAB)$

Vậy tam giác SIB là hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mp(SAB).

Vì $BI = \dfrac{3}{4}AB$ nên $S_{SIB} = \dfrac{3}{4}S_{SAB} = \dfrac{3}{8}SA.AB$

$$S_{SIB} = \frac{3}{4}R.SA = S' \qquad (3)$$

Theo định lý về diện tích hình chiếu, ta có: $S' = S_1\cos 60^0$

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}S_1 = \frac{R\sqrt{3}}{4}\sqrt{SA^2 + R^2} \qquad (4)$$

Từ đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}AC.BC.SA = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{12}$ (đvtt)

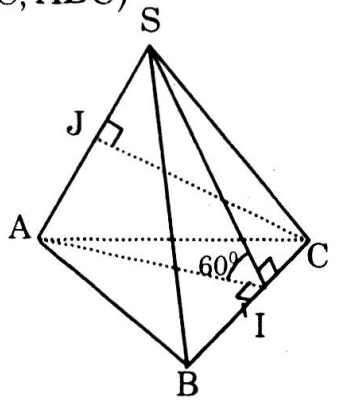
41. Cho hình chóp S.ABC có góc $(\widehat{SBC, ABC}) = 60^0$. ΔABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC).

Giải

Gọi I là trung điểm của cạnh BC

Thế thì $SI \perp BC$, $AI \perp BC$ và $\widehat{SIA} = 60^0 = (\widehat{SBC, ABC})$

Và $SI = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Suy ra ΔSIA đều có diện tích là $\dfrac{1}{2}SI.IA\sin 60^0$

$$S_{SIA} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$V_{SABC} = 2.\frac{1}{3}BI.S_{SIA} = \frac{1}{3}a\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi J là trung điểm của đoạn SA, ta có CJ ⊥ SA

$$\Rightarrow CJ = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

$$S_{SCA} = \frac{1}{2}AS.CJ = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

Khoảng cách từ B đến mp(SAC) là $d = \frac{3V}{S_{ASC}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$ (đvtt)

42. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a, và SA vuông góc với mp (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mp (SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải

• Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta BCA$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA}$

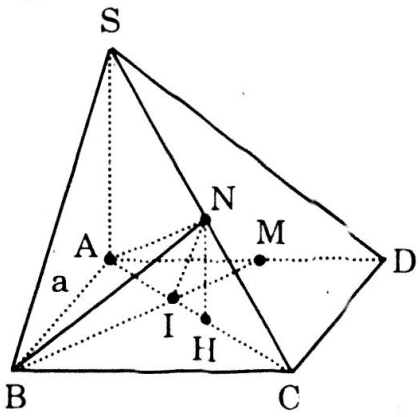
$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC$

Mặt khác MB ⊥ SA (do SA ⊥ (ABCD))

Vậy MB ⊥ mp(SAC) ⇒ (SMB) ⊥ (SAC)

• Gọi H là trung điểm của AC ⇒ NH //, = $\frac{1}{2}$SA



$\Rightarrow NH \perp (ABI)$ và $NH = \frac{a}{2}$.

Ta có $V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta ABI}$ (1)

Trong tam giác vuông ABM: ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông AIB ta có $BI^2 = AB^2 - AI^2$

$\Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ thay vào (1) ta được

$$V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.\frac{1}{2}AI.BI = \frac{a^3\sqrt{2}}{36} \text{ (đvtt)}$$

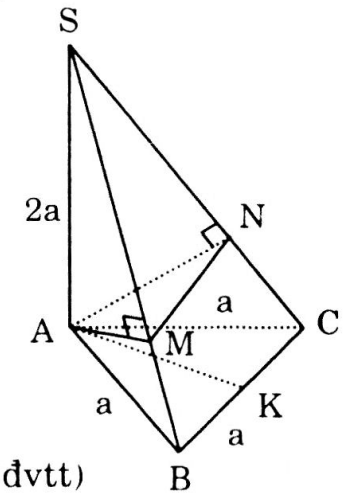
43. Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA ⊥ (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A. BCNM.

Giải

Gọi K là trung điểm của BC. Ta có AB = AC = CB = a.

SA ⊥ (ABC) ⇒ SB = SC; AM = AN; SM = SN.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA^2 = SM.SB$.



Suy ra $SM = SN = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{4a}{\sqrt{5}} : (a\sqrt{5}) = \frac{4}{5}$$

Gọi V_1 là thể tích khối chóp S.AMN

Gọi V_2 là thể tích khối chóp S.ABC

Gọi V_3 là thể tích khối chóp A.BCNM.

Ta có $V = V_2 - V_1$

$$V_2 = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{2a}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\,\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ (đvtt)}$$

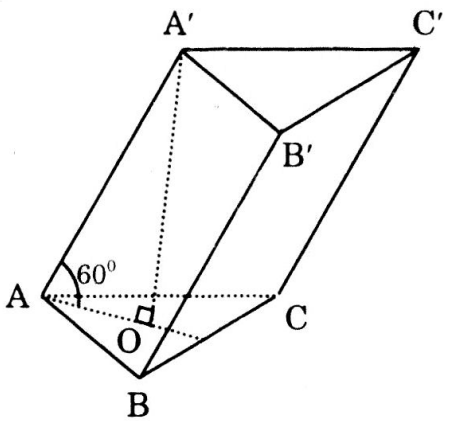
Mặt khác $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_{SMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{SM.SN}{SB.SC} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

Vậy $V_1 = \dfrac{16}{25}V_2 = \dfrac{16}{25}\,\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{75}$ (đvtt)

Suy ra $V = V_2 - V_1 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} - \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{75} = \dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{50}$ (đvtt)

44. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA' tạo bởi đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Giải



Gọi O là tâm của ΔABC

Do ΔABC đều và A'A = A'B = A'C

Nên A'O ⊥ mp (ABC) ⇒ $\widehat{A'AO} = 60^0$

$$\Rightarrow \widehat{AA'O} = 30^0 \Rightarrow AA' = 2.AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông A'AO ta có

$A'O^2 = A'A^2 - AO^2 = a^2 \Rightarrow A'O = a$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.a\sin 60^0 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'O$

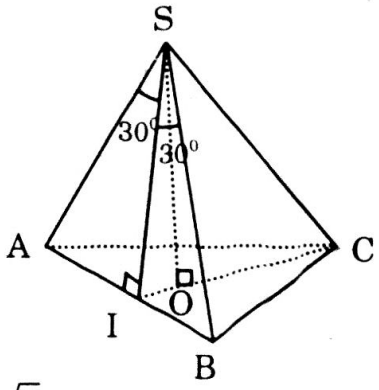
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \text{ (đvtt)}$$

45. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và góc $\widehat{ASB} = 60^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB, O là tâm của đáy.

Vì góc $\widehat{ASB} = 60^0$. Suy ra $\widehat{ASI} = 30^0$



$$\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{AI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$OI = \frac{CI}{3} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ (đvtt)}$$

46. Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại B cạnh SA vuông góc với mặt đáy, góc $\widehat{ACB} = 60^0$. BC = a, SA = $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Chứng minh mp (SAB) vuông góc với mp (SBC). Tính thể tích khối tứ diện MABC.

Giải

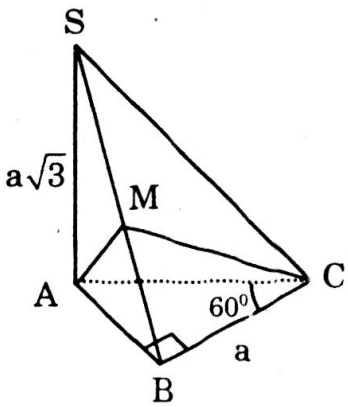
- Chứng minh (SAB) ⊥ (SBC)

  Ta có SA ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ BC; AB ⊥ BC (gt)

  Vậy BC ⊥ (SAB) ⇒ (SBC) ⊥ (SAB)

- Tính V_{MABC}

  Ta có Δ vuông ABC là nửa tam giác đều nên AB = $a\sqrt{3}$, MS = MB



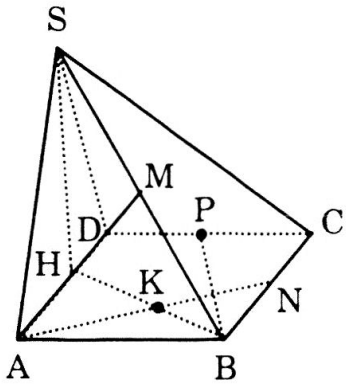
Suy ra $V_{MABC} = \frac{1}{2}V_{SABC}$

Mà $V_{SABC} = \frac{1}{6}BC.AB.SA = \frac{a^3}{2}$ (đvtt)

Suy ra $V_{MABC} = \frac{a^3}{4}$ (đvtt)

47. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Giải



• Chứng minh AM ⊥ BP

Gọi H là trung điểm của AD

Tam giác SAB đều nên SH ⊥ AD

và SH ⊥ (ABCD) (vì SAD ⊥ (ABCD) theo giao tuyến AD)

Suy ra SH ⊥ BP (1)

Trong mp (ABCD) ta có hai tạm giác vuông HDC và PCB bằng nhau. Suy ra $\widehat{HCD} = \widehat{PBC}$

⇒ BP ⊥ CH (2)

⇒ BP ⊥ AN

Từ (1), (2) suy ra BP ⊥ SC mà SC // MN nên BP ⊥ MN

Vậy BP ⊥ (AMN) ⇒ BP ⊥ AM

• Tính V_{CMNP}

Gọi K là trung điểm của AN thì K cũng là trung điểm của BH. Ta có MK // SH ⇒ MK ⊥ (ABCD). Vậy MK là đường cao của hình chóp CPMN.

Ta có $MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta PCN} = \frac{1}{2}PC.CN = \frac{a^2}{8}$

Vậy $V_{CMNP} = \frac{1}{3}S_{PCN}.MK = \frac{1}{3}\frac{a^2}{8}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

48. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA ⊥ đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp (SCD)

Giải

• Gọi I là trung điểm của AD.

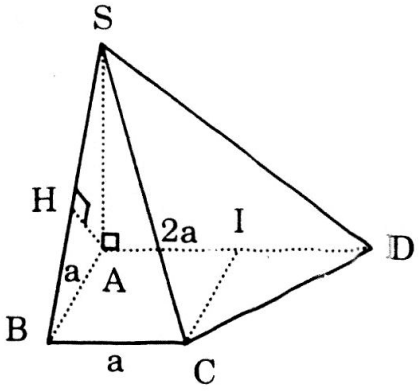
Ta có CI = AI = ID = a nên ΔACD vuông tại C ⇒ CD ⊥ AC.

Ta lại có CD ⊥ SA suy ra CD ⊥ (SAC)

Suy ra CD ⊥ SC (đpcm)

• Ta có AB = BC = a, AD = 2a,

$SA = a\sqrt{2} \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$,
$SC = 2a$.



Trong tam giác vuông SAB:

$$SA^2 = SH.SB$$

$$\Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB}$$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$$

Gọi h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mp (SCD) thì ta có $\frac{h_2}{h_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}. \Rightarrow h_2 = \frac{2}{3}h_1$.

Gọi V là thể tích hình chóp BSCD ta có

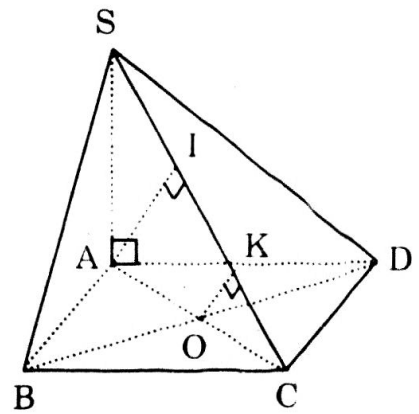
$$h_1 = \frac{3V}{S_{CSD}} = \frac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2}}{\frac{1}{2}2a.a\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow d(H, (SCD)) = h_2 = \frac{2}{3}h_1 = \frac{a}{3} \text{ (đvđđ)}$$

49. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ đáy (ABCD), SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

Giải

Ta có SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ BD và AC ⊥ BD ⇒ BD ⊥ (SAC) tại O, trong mp (SAC) ta kẻ AI ⊥ SC và kẻ OK ⊥ SC tại K, OK ⊥ BD



⇒ OK là đường vuông góc chung của SC và BD ⇒ khoảng cách d(SC, BD) = $OK = \frac{1}{2}AI$.

Trong tam giác vuông AK ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $d(BD, SC) = OK = \frac{AI}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ (đvđđ)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Số các cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

B. Số các cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn 6.

C. Số các cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn 7.

D. Số các cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 8.

2. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Số cạnh của một hình đa diện luôn nhỏ hơn số mặt của hình đa diện ấy.

B. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn số mặt của hình đa diện ấy.

C. Số cạnh của một hình đa diện luôn bằng số mặt của hình đa diện ấy.

D. Số cạnh của một hình đa diện luôn nhỏ hơn hoặc bằng số mặt của hình đa diện ấy.

3. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn số đỉnh của hình đa diện ấy.

B. Số cạnh của một hình đa diện luôn bằng số đỉnh của hình đa diện ấy.

C. Số cạnh của một hình đa diện luôn nhỏ hơn số đỉnh của hình đa diện ấy.

D. Số cạnh của một hình đa diện luôn nhỏ hơn hoặc bằng số đỉnh của hình đa diện ấy.

4. Mệnh đề nào sau đây đúng:

Nếu một hình đa diện lồi có số mặt và số đỉnh bằng nhau thì số cạnh của nó là

A. bằng số mặt. B. là số lẻ.

C. là số chẵn. D. bằng số mặt cộng với 2.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

"Số các đỉnh, hoặc các mặt của bất kỳ hình đa diện nào cũng

A. lớn hơn hoặc bằng 4. B. lớn hơn 4.

C. lớn hơn hoặc bằng 6. D. lớn hơn 6.

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. Có một hình đa diện lồi có số cạnh và số mặt bằng nhau.

B. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện lồi luôn bằng nhau.

C. Không có hình đa diện lồi nào có số cạnh bằng số đỉnh.

D. Tồn tại hình đa diện lồi có số đỉnh và số cạnh bằng nhau.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. Có hình đa diện lồi mà số đỉnh và số mặt chẵn còn số cạnh lẻ.

B. Có hình đa diện lồi mà số đỉnh, số cạnh và mặt đều lẻ.

C. Có hình đa diện lồi mà số đỉnh và số cạnh chẵn còn số các mặt lẻ.

D. Có hình đa diện lồi mà số đỉnh và số cạnh lẻ còn số mặt chẵn.

8. Gọi d, m, c lần lượt là số đỉnh, số mặt, số cạnh của một hình đa diện lồi. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. d, m, c đều là số chẵn.

B. d, m, c đều là số lẻ.

C. Có một hình đa diện mà d, m, c đều là số chẵn.

D. Có một hình đa diện mà d, m, c đều là số lẻ.

9. Mệnh đề nào sau đây là sai.

A. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

B. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

C. Mỗi đỉnh của hình đa diện là cạnh của ít nhất 3 mặt.

D. Mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh.

10. Hình 12 mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

A. Mười hai　　B. Mười sáu

C. Hai mươi　　D. Hai mươi bốn.

11. Hình mười hai mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A. Ba mươi　　B. Hai mươi bốn

C. Hai mươi　　D. Mười hai.

12. Hình hai mươi mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

A. Ba mươi　　B. Hai mươi

C. Mười hai　　D. Mười tám.

13. Hình tám mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

A. Tám　　B. Mười　　C. Mười hai　　D. Sáu.

14. Hình tám mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A. Mười　　B. Mười hai

C. Mười sáu　　D. Hai mươi bốn.

15. Phép biến hình nào sau đây biến một khối đa diện thành khối đa diện có thể tích bằng thể tích khối đa diện ban đầu?

A. Phép vị tự.　　B. Phép dời hình.

C. Phép đồng dạng.　　D. Phép chiếu song song.

16. Cho tứ diện đều có cạnh bằng a. Thì thể tích của nó là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$　　B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$　　C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

17. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a thì thể tích của nó là:

A. $\frac{2a^3}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

18. Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a thì thể tích của khối đó là:

A. $\frac{3a^2}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

19. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng. Tỉ số thể tích của khối tứ diện ACB'D' và khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{6}$.

20. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

Tỉ số thể tích của khối chóp O.A'B'C'D' và khối hộp ABCDA'B'C'D' bằng:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$.

21. Cho hình chóp S.ABCD gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Trong các kết quả sau, kết quả nào đúng.

Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$.

22. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông, SM $\perp$ (MNPQ). Biết MN = a, SM = $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

23. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông, SM $\perp$ (MNPQ). Biết MN = a, và góc giữa SP và đáy là α. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

24. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông, SM vuông góc với (MNPQ). Biết MN = SM = a. Mặt cầu tâm M, có tiếp diện là (SNP) thì bán kính của mặt cầu là:

A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

25. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông, SM ⊥ (MNP'Q). Biết MN = a và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.MNPQ có đường kính là 2a. Góc giữa SP và đáy là:

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 75^0.

26. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông tâm O, SM ⊥ (MNPQ). Biết MN = $a\sqrt{2}$ và góc giữa (SNQ) và đáy là 60^0 thì thể tích khối tứ diện SNPQ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

27. Khối tứ diện đều MNPQ có cạnh bằng a thì có diện tích toàn phần là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ C. $4a^2\sqrt{6}$ D. $a^2\sqrt{3}$.

28. Hình chóp tứ giác đều S.MNPQ có cạnh đáy bằng a chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. a D. $a\sqrt{2}$.

29. Hình chóp tứ giác đều S.MNPQ có các cạnh đều bằng a. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

30. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông tâm O cạnh a, các mặt bên là tam giác đều, thể tích khối tứ diện SOMN là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ D. $\frac{a^3}{12}$.

31. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông cạnh a các mặt bên là tam giác cân và tạo với đáy góc α, thể tích S.MNPQ là:

A. $\frac{a^3\tan\alpha}{6}$ B. $\frac{a^3\sin\alpha}{6}$ C. $\frac{a^3\cot\alpha}{3}$ D. $\frac{a^3\cos\alpha}{12}$.

32. Hình chóp tứ giác đều S.MNPQ có đường cao bằng h và đường cao tạo với mặt bên góc 45^0. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{h^3}{3}$ B. $\frac{2h^3}{3}$ C. $\frac{4h^3}{3}$ D. $\frac{5h^3}{3}$.

33. Hình chóp tứ giác đều S.MNPQ có đường cao bằng 3h và bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.MNPQ bằng 2h. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $6h^3$ B. $3h^3$ C. $\frac{h^3}{3}$ D. $\frac{h^3}{6}$.

34. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng $\sqrt{2}$ là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$.

35. Hình chóp S.MNP có SM, MN, NP đôi một vuông góc và có độ dài đều bằng $\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp S.MNP là:

A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

36. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình bình hành có hai cạnh đáy bằng 3 và 4 góc giữa hai cạnh ấy bằng 30^0. Đường cao có độ dài 5. Thể tích khối chóp S.MNPQ là

A. 30 (đvtt) B. 10 (đvtt)

C. 9 (đvtt) D. $10\sqrt{3}$ (đvtt).

37. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông cạnh a, hình chiếu của đỉnh S xuống đáy trùng với trung điểm H của MQ. Biết góc giữa cạnh bên SQ và đáy là 60^0. Thể tích khối chóp S.MNPQ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $a^3\sqrt{3}$ D. Một đáp số khác.

38. Cho hình chóp M.NPQ. Gọi N', P' lần lượt là trung điểm của MN, MP. Tỉ số thể tích của hai khối chóp M.NPQ và M.N'P'Q' là

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6.

39. Cho hình chóp tam giác S.MNP có thể tích bằng V. Cắt hình chóp bằng một mặt phẳng qua trung điểm của SM và song song với đáy thì khối chóp cụt tạo thành có thể tích là:

A. $\frac{V}{2}$ B. $\frac{3V}{4}$ C. $\frac{7V}{8}$ D. $\frac{5V}{6}$.

40. Hình chóp S.MNP có SM $\perp$ (MNP). Biết SM = MN = a và ΔMNP đều. Thể tích khối chóp S.MNP là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

41. Hình chóp S.MNPQ có SM $\perp$ (MNP) biết SM = MN = a và ΔMNP vuông cân tại N. Thể tích khối chóp S.MNP là:

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{12}$.

42. Hình chóp S.MNP có thể tích bằng $4m^3$, ΔSMN vuông cân tại M có MN = 4m. Khoảng cách từ P đến mp (SMN) là:

A. $\frac{2}{3}$ m B. 1 m C. $\frac{3}{4}$ m D. 3 m.

43. Tứ diện đều MNPQ có diện tích toàn phần là $\sqrt{6}$ (đvtt) thì có cạnh bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt[3]{2}$ D. $\sqrt[4]{2}$.

44. Hình lập phương MNPQ.M'N'P'Q' có cạnh bằng 1. Thể tích khối tứ diện MPN'Q bằng:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

45. Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, BC = 2a, AA' = $a\sqrt{3}$ thể tích khối lăng trụ là:

A. B. $3a^3$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

46. Nếu ba kích thước của hình hộp chữ nhật tăng lên gấp đôi, thì thể tích khối tăng lên bao nhiêu lần:

A. 2 lần B. 4 lần C. 6 lần D. 8 lần.

47. Hình chóp S.MNP có đáy MNP là tam giác đều canh a, mặt bên SMP cũng là tam giác đều và vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp SMNP tính được là:

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3}{8}$.

48. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông cạnh a, mặt bên SMN là tam giác vuông cân đỉnh C và vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp S.MNPQ được tính là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3}{3}$.

49. Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, 2a, 3a thì độ dài đường chéo là:

A. $a\sqrt{14}$ B. $a\sqrt{13}$ C. $a\sqrt{6}$ D. $a\sqrt{3}$.

50. Cho tứ diện MNPQ. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, MP, MQ. Tỉ số thể tích $\frac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$.

Chương III. MẶT NÓN – MẶT TRỤ – MẶT CẦU

Bài 1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Sự tạo thành mặt tròn xoay

Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường $(\mathscr{C})$ khi quay mặt phẳng (P) xung quanh (Δ) thì tập hợp các điểm của đường $(\mathscr{C})$ tạo nên mặt tròn xoay nhận (Δ) làm trục. Đường $(\mathscr{C})$ sinh ra mặt tròn xoay nên được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay đó.

II. Tính chất của mặt tròn xoay

- Nếu cắt mặt tròn xoay bởi mặt phẳng vuông góc với trục (Δ); ta được giao tuyến là một đường tròn có tâm là giao điểm của mặt phẳng với trục Δ.
- Mỗi điểm M trên mặt tròn xoay đều nằm trên một đường tròn thuộc mặt tròn xoay và đường tròn này có tâm thuộc trục tròn xoay Δ.

III. Mặt nón tròn xoay

1. *Định nghĩa:* Cho hai đường thẳng Δ và d cắt nhau tại O tạo thành góc β không đổi với $0^0 < \beta < 90^0$. Mặt tròn xoay tạo thành khi quay d xung quanh trục Δ một góc 360^0 được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O có góc ở đỉnh là 2β. Người ta thường gọi tắt là mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón và đường thẳng d gọi là đường sinh của mặt nón.

2. *Giao của mặt nón tròn xoay với mặt phẳng*

a) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng đi qua đỉnh O ta có các trường hợp sau đây:
- Mặt phẳng cắt mặt nón theo hai đường sinh.
- Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này người ta gọi mặt phẳng đó là tiếp diện của mặt nón.
- Mặt phẳng chỉ có một điểm O chung duy nhất với mặt nón, ngoài ra không có một điểm chung nào khác.

b) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng (α) không đi qua đỉnh O, ta có 3 trường hợp sau:

- Nếu mặt phẳng (α) cắt mọi đường sinh của mặt nón ta được giao tuyến là một elip hoặc là một đường tròn (khi mặt phẳng (α) vuông góc với trục Δ của mặt nón).
- Nếu mặt phẳng (α) song song với chỉ một đường sinh của mặt nón ta được giao tuyến là một đường parabol.
- Nếu mặt phẳng (α) song song với hai đường sinh của mặt nón ta được giao tuyến là hai nhánh của một đường hypebol.

3. Khối nón tròn xoay và hình nón tròn xoay

Cho tam giác OHM vuông tại H. Khi quay tam giác đó quanh cạnh góc vuông OH, mỗi điểm của một miền tam giác đó sinh ra một đường tròn. Hình gồm tập hợp tất cả những đường tròn đó là một khối nón tròn xoay hoặc vắn tắt là khối nón. Hình tròn tâm H bán kính HM là mặt đáy của hình nón, O được gọi là đỉnh của khối nón. Độ dài OH là chiều cao của khối nón và phần mặt nón tròn xoay sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM được gọi là mặt xung quanh của khối nón đó.

4. Diện tích xung quanh của hình nón

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy là r, độ dài đường sinh là l

Ta có công thức $S_{xq} = \pi rl$

IV. Mặt trụ tròn xoay

1. Định nghĩa: Cho hai đường thẳng Δ và d song song với nhau, cách nhau một khoảng r. Đường thẳng d khi quay quanh trục Δ sinh ra mặt trụ tròn xoay và được gọi tắt là mặt trụ. Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt trụ tròn xoay và đường thẳng d gọi là đường sinh của mặt trụ đó.

2. Giao của mặt trụ tròn xoay với mặt phẳng

a) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi mặt phẳng (α) vuông góc với trục Δ thì ta được giao tuyến là đường tròn có tâm là giao điểm của Δ với mặt phẳng (α) và có bán kính bằng r. Người ta gọi r là bán kính của mặt trụ đó.

b) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi mặt phẳng (α) không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh ta được giao tuyến là đường elíp có trục nhỏ bằng 2r và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin\varphi}$ trong đó φ là góc của Δ và mặt phẳng (α) ($0^0 < \varphi < 90^0$)

c) Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Δ và có bán kính r thì đường thẳng d' đi qua M và song song với Δ sẽ nằm trên mặt trụ đã cho.

d) Một mặt phẳng (α) song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng bằng h với $h < r$, sẽ cắt mặt trụ theo hai đường sinh. Nếu $h = r$ thì mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh còn nếu $h > r$, mặt phẳng (α) không cắt mặt trụ.

3. Khối trụ tròn xoay và hình trụ tròn xoay

- Ta hãy xét hình chữ nhật ABCD cùng với miền trong của nó. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, thí dụ cạnh AB thì mỗi điểm của miền chữ nhật sẽ sinh ra một đường tròn. Hình gồm tập hợp tất cả các đường tròn đó gọi là một khối tròn xoay hay gọi tắt là khối trụ
- Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ sinh ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của khối trụ. Còn cạnh CD là đường sinh vạch ra mặt xung quanh của khối trụ. Hiển nhiên mặt xung quanh của khối trụ là một phần của mặt trụ tròn xoay. Khoảng cách AE giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của khối trụ.
- Hình gồm hai mặt đáy và mặt xung quanh của khối trụ được gọi là hình trụ tròn xoay hoặc gọi tắt là hình trụ. Hình này được tạo thành bởi đường gấp khúc BCDA khi quay trục là đường thẳng AB.

4. Diện tích xung quanh của hình trụ

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng r và có đường sinh bằng l, ta có công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rl$$

Bài 2. MẶT CẦU

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa và các khái niệm liên quan.

1. *Mặt cầu:* Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách một điểm O cố định một khoảng bằng r (r là số thực dương) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r.

   Người ta thường ký hiệu mặt cầu tâm O, bán kính r là (O; r) hay viết tắt là (O)

   Như vậy ta có mặt cầu (O; r) = {M | OM = r}

   - Nếu điểm M nằm trên mặt cầu (O; r) thì đoạn OM được gọi là bán kính của mặt cầu đó, ta có OM = r.
   - Nếu OM < r thì ta nói rằng điểm M nằm trong mặt cầu (O; r).
   - Nếu OM > r thì ta nói rằng điểm M nằm ngoài mặt cầu (O; r).

2. Mặt cầu là một mặt tròn xoay được tạo ra bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính. Người ta gọi mỗi nửa đường tròn đó là một đường kinh tuyến của mặt cầu.

   Khi mỗi đường kinh tuyến quay quanh trục Δ của mặt cầu thì mỗi điểm M trên đường kinh tuyến đó sẽ vạch nên một đường tròn có tâm thuộc Δ, nằm trong mặt phẳng vuông góc với Δ. Người ta gọi các đường tròn này là vĩ tuyến của mặt cầu.

II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu (O; r) và mặt phẳng (α), gọi d(O; α) = h là khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (α) ta có:

1. *Nếu h > r:* mp(α) không cắt mặt cầu
2. *Nếu h = r:* mp(α) tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm M. Ta có OM ⊥ (α)
3. *Nếu h < r:* mp(α) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$
   - Đặc biệt khi h = 0, mp(α) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính r' = r

III. Giao của mặt cầu với đường thẳng – Tiếp tuyến của mặt cầu

Cho mặt cầu (O; r) và đường thẳng Δ

1. Δ đi qua tâm O của mặt cầu thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B với AB = 2r.

2. Δ không đi qua tâm O của mặt cầu, ta gọi d = d(O, Δ) khi đó.

a) d < r, đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N.

b) d = r, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm H.

c) d > r, đường thẳng Δ không cắt mặt cầu.

Nhận xét:

1. Qua một điểm A bất kì nằm trên mặt cầu (O; r) có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu và đều nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (O; r) tại A. Mặt phẳng tiếp xúc này vuông góc với đường thẳng OA tại A.

2. Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu (O; r) có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ M đến các tiếp tuyến đều bằng nhau. Tất cả các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón hình xoay có đỉnh là M và có đường tròn đáy nằm trên mặt cầu.

IV. Công thức tính diện tích và thể tích

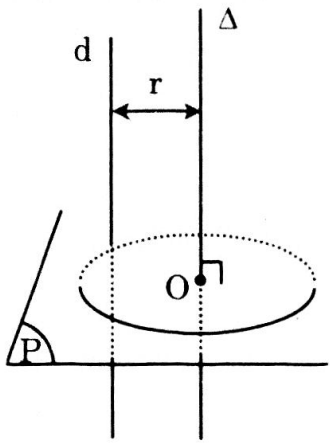
1. Gọi S là diện tích mặt cầu bán kính r, ta có công thức $S = 4\pi r^2$.

2. Gọi V là thể tích của khối cầu bán kính r ta có $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B/ BÀI TẬP

1. Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trong mặt phẳng (P). từ những điểm nằm trên đường tròn ta kẻ những đường thẳng vuông góc với (P). Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay.

Giải



Qua O ta dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P)

Lấy điểm M $\in$ (O), dựng đường thẳng d vuông góc với (P)

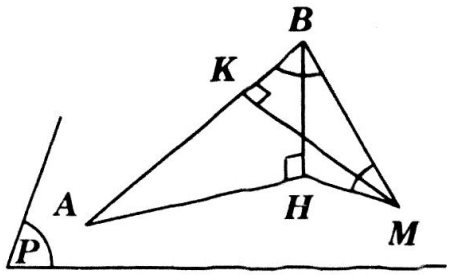
Ta có d(d, Δ) = r

Vậy khi M di động trên (O), d luôn luôn song song và cách đều Δ một đoạn bằng r.

Do đó luôn luôn nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng Δ và có bán kính bằng r

2. Cho mặt phẳng (P) và một điểm A nằm trên (P). Gọi B là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho hình chiếu H của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M chạy trong mặt phẳng (P) sao cho luôn luôn có $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh rằng điểm M nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

Giải



Yêu cầu bài toán ⇔ Chứng minh M luôn luôn cách đường thẳng AB một đoạn không đổi là

• Hạ BH ⊥ (P) ⇒ BH không đổi.

Đặt BH = r

Hạ MK ⊥ AB

Xét 2 tam giác vuông BHM và BKM ta có

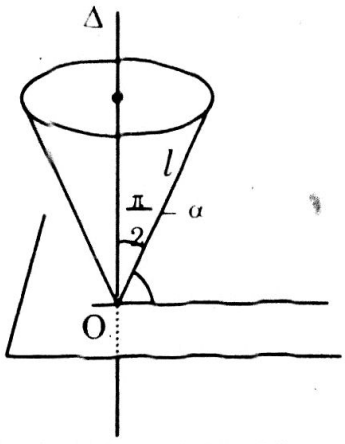
BM chung, $\widehat{KBM} = \widehat{BMH}$

Vậy ΔBHM = ΔMKB ⇒ KM = BH = r (không đổi)

Vậy điểm M luôn luôn cách đường thẳng AB cố định, một đoạn không đổi bằng BH = r. Vậy M nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là AB, bán kính đường tròn đúng là r.

3. Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O cố định. Gọi l là một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua O và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng α không đổi ($\alpha \neq 90^0$). Chứng minh rằng l nằm trên một mặt nón tròn xoay xác định.

Giải



Qua O kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P).

Ta có góc giữa l và Δ luôn luôn bằng $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Từ đó suy ra đường thẳng l luôn luôn nằm trên mặt nón tròn xoay có trục Δ, đỉnh O và có góc ở đỉnh bằng $2\beta = \pi - 2\alpha$.

4. Một hình trụ có bán kính đáy r = 5 cm, và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7 cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Hãy tính diện tích thiết diện.

Giải

a) Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.5.7 = 70\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Trong hình tròn đáy trên (O') hạ O'H ⊥ MN thì H là trung điểm của MN

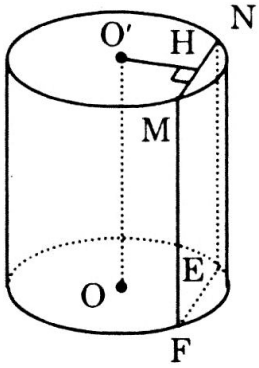
Ta có O'H = 3.

Xét tam giác vuông có O'HM:

$MH^2 = O'M^2 - OH^2 \Leftrightarrow MH^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow MH = 4 \Rightarrow MN = 8$

Diện tích hình chữ nhật MNEF = $7.8 = 56 \text{ cm}^2$



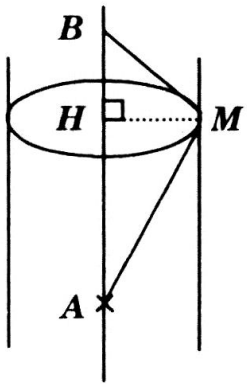
5. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian sao cho ΔAMB có diện tích là một số không đổi.

Giải

Ta có $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}AB.MH$ không đổi và AB không đổi.

$\Rightarrow$ MH = d(M, AB) không đổi bằng r.

Vậy M luôn luôn cách đường thẳng AB một đoạn không đổi bằng r nên M nằm trên mặt trụ có trục là AB, bán kính r = $MH = \frac{2S}{AB}$.



6. Trong không gian cho hai đường thẳng cố định a, b và song song với nhau. Gọi (α), (β) là hai mặt phẳng thay đổi lần lượt đi qua a, b và vuông góc với nhau. Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nằm trên một mặt trụ.

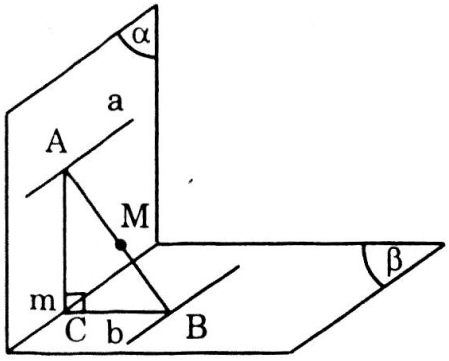
Giải

Gọi m là giao tuyến của (α), (β)

Ta có m // a // b

Cắt 3 đường này bằng một mặt phẳng (ABC) vuông góc với chúng, với A ∈ a, B ∈ b, C ∈ m

Gọi M là trung điểm của AB. Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại M



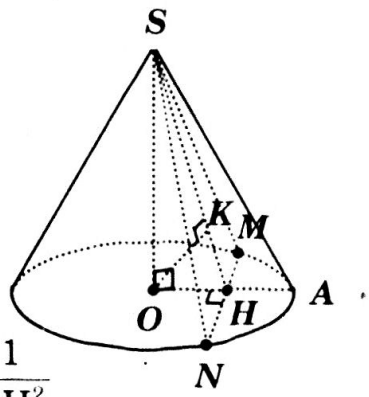
$\Rightarrow CM = \dfrac{AB}{2}$ (không đổi) (lưu ý: m // Δ)

Vậy $d(m, \Delta) = \dfrac{AB}{2} = r$ không đổi

Do đó giao tuyến m của hai mặt phẳng (α), (β) nằm trên một mặt trụ có trục là đường thẳng (Δ) bán kính hình tròn đáy $r = \dfrac{AB}{2}$.

7. Một hình nón có đường cao bằng 20 cm, bán kính đáy r = 25 cm.
a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.
b) Một thiết diện đi qua đỉnh, cách tâm của đáy là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

Giải



a) $S_{xq} = \pi r l$.

Ta xét tam giác vuông SOA:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 400 + 625 = 1025$

$SA = \sqrt{1025} = 5\sqrt{41} = l$

$S_{xq} = \pi.25.l = 125\pi\sqrt{41}$ (cm^2)

b) Xét tam giác vuông OHS:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{144} = \frac{1}{400} + \frac{1}{OH^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{144} - \frac{1}{400} = \frac{400-144}{400.144} = \frac{256}{400.144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH} = \frac{16}{20.12} \Leftrightarrow OH = \frac{20.12}{16} = 15 \text{ (cm)}$$

- Xét tam giác vuông OHN: $HN^2 = ON^2 - OH^2$

  $HN^2 = 625 - 225 \Rightarrow HN = 20$ (cm)

  $\Rightarrow MN = 2HN = 40$ (cm)

- Xét tam giác vuông SOH: $SH^2 = SO^2 + OH^2 = 400 + 225 = 625$

  $SH^2 = 625 \Rightarrow SH = 25$ (cm)

- $S_{SMN} = \dfrac{1}{2}MN.SH = \dfrac{1}{2}.40.25 = 500$ (cm^2).

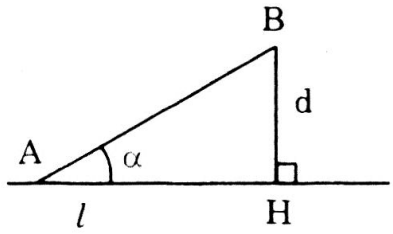
8. Cho hai điểm cố định A, B gọi l là một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một đoạn không đổi bằng d với d nhỏ hơn AB. Chứng tỏ rằng đường thẳng l luôn luôn nằm trên một mặt nón.

Giải

Hạ $BH \perp l$ tại H,

Đặt $\alpha = \widehat{BAH}$

Ta thấy đường l thay đổi nhưng luôn luôn qua A và tạo với đường thẳng AB góc không đổi α. Do đó đường thẳng l luôn nằm trên mặt nón có trục là đường thẳng AB có góc ở đỉnh A bằng 2α.



9. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Hãy tính diện tích xung quanh của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A′B′C′D′

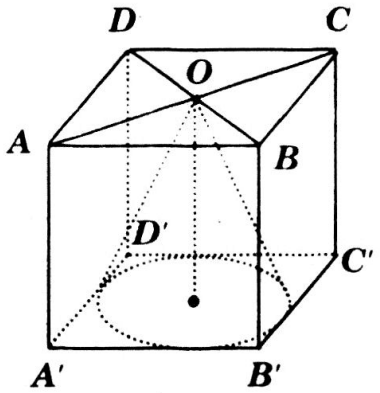
Giải

Khối nón có chiều cao bằng a,

bán kính $r = \dfrac{a}{2}$

Do đó $l = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$$S_{xq} = \pi rl = \pi.\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4} \text{ (đvdt)}$$



10. Cho khối trụ có chiều cao bằng 20 cm, có bán kính đáy là 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính OA, A′B′ lần lượt nằm trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc 30^0 cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB′ và song song với trục của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

Giải

Từ đáy trên của hình trụ ta vẽ hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 30^0$. Gọi A′, O′, B′ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, O, B xuống mặt đáy dưới (hình vẽ)

Ta có OA và O′B′ tạo với nhau một góc 30^0.

Thiết diện là hình chữ nhật ABB′A′ có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 30^0$$

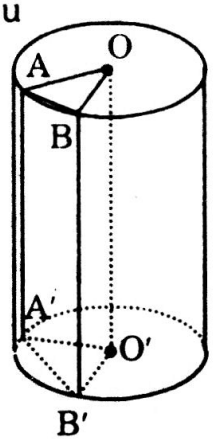
$$= 2r^2 - 2r^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = r^2(2 - \sqrt{3}) = 100(2 - \sqrt{3})$$

Vậy $AB = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Ta lại có $AA' = BB' = 20$ cm.

Do đó diện tích thiết diện hình chữ nhật ABB′A′ có diện tích là:

$$S = AB.BB' = 20.10\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 200\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ (cm}^2\text{)}$$



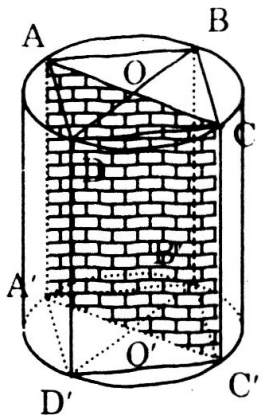
11. Một khối trụ có bán kính đáy bằng r có có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó.

b) Tính thể tích của hình lăng trụ đã cho (hình này có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình trụ.

Giải

a) Vì thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông nên đường sinh của hình trụ chính là đường cao và bằng 2r. Do đó diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$ (đvdt)



b) Gọi ABCD.A′B′C′D′ là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho, ta có hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn đáy

Do đó $AB = r\sqrt{2}$ (vì $4R^2 = 2AB^2$)

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = (r\sqrt{2})^2 2r = 4r^3$ (đvtt)

12. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao h = 50 cm.

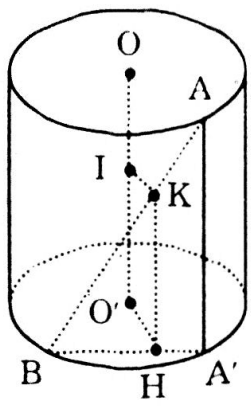
a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy.

Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục của hình trụ.

Giải

a) Ta có $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.50.50 = 5000\pi$ (cm^2)



b) Giả sử đoạn thẳng AB có điểm mút A nằm trên đường tròn (O). B nằm trên (O′); Gọi IK là đoạn vuông góc chung của OO′ và AB ($I \in OO'$, $K \in AB$), chiếu vuông góc các đoạn AB và IK xuống mặt đáy dưới chứa đường tròn (O′)

Gọi A′, H lần lượt là hình chiếu của A, K.

Vì $KI \perp OO'$ nên $IK // (O'BA')$

Do đó $O'H // IK$ và $O'H = IK$

Ta suy ra $O'H \perp AB$ và $O'H \perp A'B$

Xét tam giác vuông AA'B ta có

$$A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{100^2 - 50^2} = 50\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Vậy $IK = O'H = \sqrt{O'A'^2 - A'H^2}$

$$IK = \sqrt{50^2 - \left(\frac{50\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 50\sqrt{1 - \frac{3}{4}}$$

$IK = 25$ (cm).

13. Một hình nón xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần của hình nón đó

b) Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt đáy của một góc 60^0. Thiết diện được tạo nên có diện tích bằng bao nhiêu?

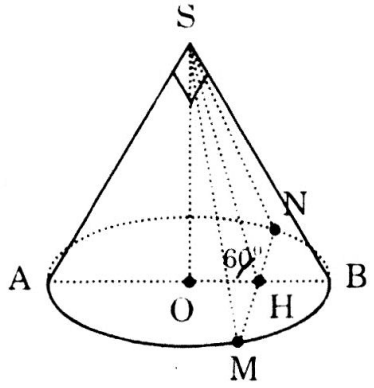
Giải

a) Thiết diện qua trục là tam giác vuông cân ASB cạnh SA = SB = a nên hình nón có:

Đường sinh là SA = SB = a = l, bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao

$$SO = h = r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} \text{ (đvdt)}$$



Gọi S là diện tích đáy ta có $S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{2}$

$$S_{tp} = S_{xq} + S = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2} + 1) \text{ (đvdt)}$$

b) Xét mặt phẳng SMN qua đỉnh S và tạo với đáy một góc 60^0 cắt đường tròn đáy tại hai điểm M, N. Từ tâm O của đường tròn đáy ta vẽ $OH \perp MN$. Vậy H là trung điểm của MN

Ta có $MN \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$

Suy ra $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{SO}{SH}$

Suy ra $SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Ta có $OH^2 = SH^2 - SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$

Ta có $HM^2 = OM^2 - OH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}$

$\Rightarrow \quad HM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MN = 2HM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

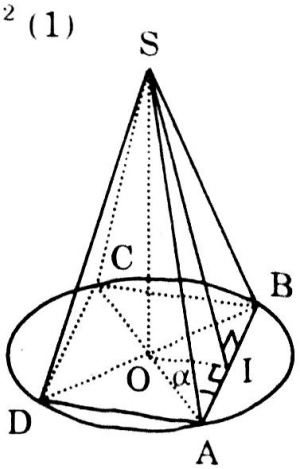
$S_{SMN} = \frac{1}{2}MN.SH = \frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ (đvdt)

14. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h và góc $\widehat{SAB} = \alpha$ ($\alpha > 45^0$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD của hình chóp.

Giải

Đặt r = OA, SO = h, SA = SB = SC = SD = l là đường sinh của hình nón. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có

ΔSOA vuông tại O: $SA^2 = SO^2 + OA^2 \Leftrightarrow l^2 = r^2 + h^2$ (1)



ΔSIA: $AI = SA\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} = l\cos\alpha$

$\Rightarrow r = l\cos\alpha\sqrt{2}$ (2)

(1) $\Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2\cos^2\alpha \Rightarrow h^2 = l^2(1 + 2\cos^2\alpha)$

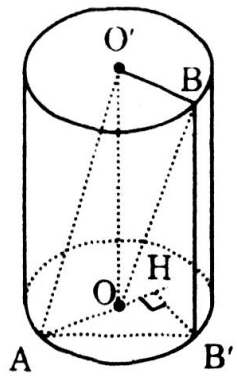
$\Rightarrow l^2 = \frac{h^2}{1 + 2\cos^2\alpha} \Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha}}$

Do đó $r = l\cos\alpha\sqrt{2} = \frac{h\cos\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha}}$

$S_{xq} = \pi rl = \frac{h\cos\alpha\pi\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha}} . \frac{h}{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha}} = \frac{h^2\cos\alpha\pi\sqrt{2}}{1 + 2\cos^2\alpha}$

15. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′ bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

Giải



Gọi B′ là hình chiếu của B xuống mặt đáy ta có tam giác ABB′ vuông tại B′ nên $AB' = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của B′ xuống OA

Do $AB' = a\sqrt{3}$ nên tam giác AB′H là nửa tam giác đều

Do đó $HB' = \frac{AB'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích $V_{OABO'} = \frac{1}{3}S_{OAB'}.OO' \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

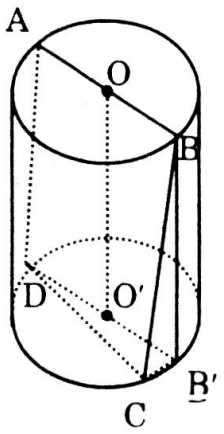
16. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD có cạnh a, nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó

Giải

Gọi B′ là hình chiếu của B xuống mặt đáy dưới

Mà $DC \perp BC \Rightarrow DC \perp B'C$

$\Rightarrow$ B′D là đường kính của đường tròn đáy và $\widehat{BCB'} = 45^0$



- $\Delta BCB'$ vuông cân tại B′ $\Rightarrow CB' = BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- $\Delta DCB'$ là tam giác vuông tại C.

$\Rightarrow B'D^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow B'D = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DO' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

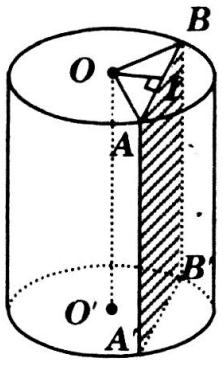
- Diện tích xung quanh của hình trụ:

$S_{xq} = 2\pi.DO'.BB' = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$ (yêu cầu bài toán)

- $V = \pi(DO')^2BB' = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$ (đvtt)

17. Một khối trụ có bán kính đáy r = 5 cm, khoảng cách hai đáy bằng 7 cm. Cắt khối trụ bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích của thiết diện

Giải



Kẻ $OI \perp AB \Rightarrow OI \perp AA'$

$\Rightarrow OI \perp (ABB'A')$

Ta có OI = 3 cm, $AB = 2IA = 2\sqrt{25 - 9} = 8$ (cm).

Vậy diện tích hình chữ nhật ABB′A′ là

$AB.AA' = 8.7 = 56\ (cm^2)$

18. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó.

Giải

Gọi O là tâm của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' ta có

$OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD' = R$

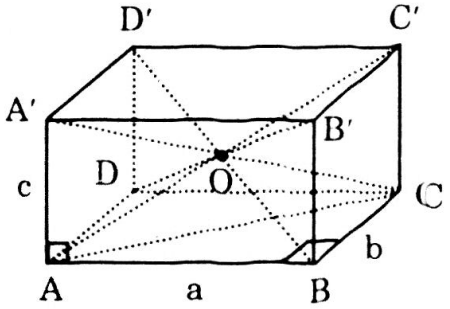
Vậy O là tâm mặt cầu đi qua 8 đỉnh của 3 hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

- Tam giác vuông ABC: $AC = a^2 + b^2$
- Tam giác vuông A'AC:

$$A'C^2 = a^2 + c^2 + b^2$$

$$\Rightarrow A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$



19. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy AB = a và cạnh bên SA = a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, D, S.

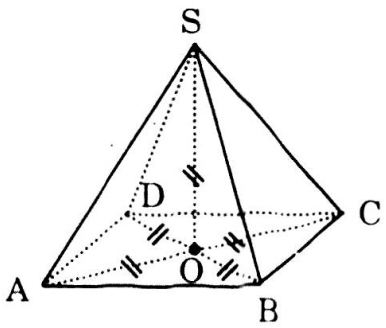
Giải

Gọi O là tâm của hình vuông, ABCD ta có

$$OS = OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = R$$

Vậy O cách đều năm điểm S, A, B, C, D.

Nên O là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D và $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (đvtt)



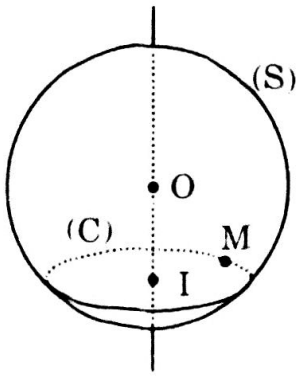
20. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.

Giải

Cho đường tròn (C) tâm I cố định.

Gọi (S) là mặt cầu tâm O bán kính R luôn luôn chứa (C)

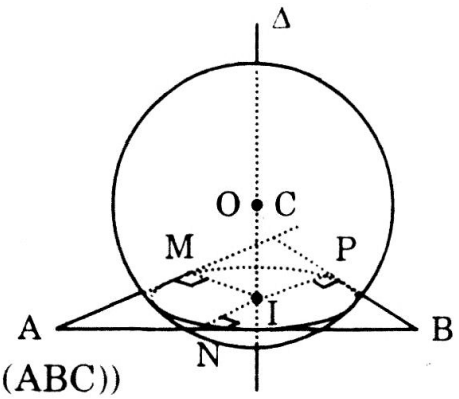
Lấy điểm M bất kì trên (O) ta luôn luôn có OM = R. Do đó O luôn luôn nằm trên trục Δ của đường tròn (O). Hay nói cách khác: Tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định là trục Δ của đường tròn



(O) (Δ vuông góc với mặt phẳng (P) chứa (O) tại tâm I của (O).

21. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tâm giác cho trước.

Giải



Gọi ABC là tam giác cho trước, gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của các cạnh AC, AB, BC. Và (S) là mặt cầu có tâm O bán kính R

Ta có $IM^2 = IN^2 = IP^2 = OM^2 - OI^2$

$= R^2 - OI^2$

(với I là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC))

Suy ra IM = IN = IP. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Nên tập hợp các tâm O của mặt cầu là đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm I đường tròn nội tiếp ΔABC.

22. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu (O; R) ta kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

a) Chứng minh rằng MA.MB = MC.MD.

b) Gọi OM = d. Tính MA.MD theo R và d.

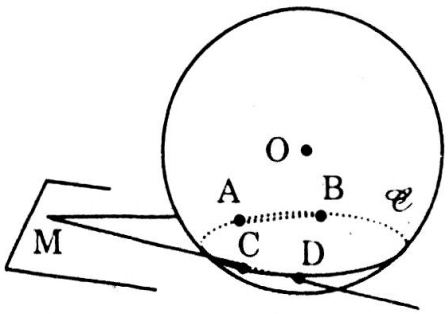
Giải

a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng qua M và cắt mặt cầu tại A, B, C, D

(α) cắt mặt cầu (O; R) theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{C})$

Trong mặt phẳng (α) ta có hai đường thẳng qua M cắt $(\mathscr{C})$ lần lượt tại A, B và C, D ta có

$MA.MB = MC.MD = \mathscr{P}_{M/(\mathscr{C})}$



b) Xét mặt phẳng (OAB) cắt mặt cầu (O; R) theo đường tròn lớn tâm O, bán kính R.

Trong mặt phẳng (OAB) ta có $MA.MB = d^2 - R^2$

Trong đó d = OM, R bán kính mặt cầu (Ta dễ thấy $M \in (OAB)$ vì $M \in AB$).

23. Cho mặt cầu (O; R) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{AIB}$.

Giải

Xét hai tam giác ΔAMB và Δ AIB ta có

AM = AI (hai tiếp tuyến phát xuất từ A)

BM = BI (hai tiếp tuyến phát xuất từ B)

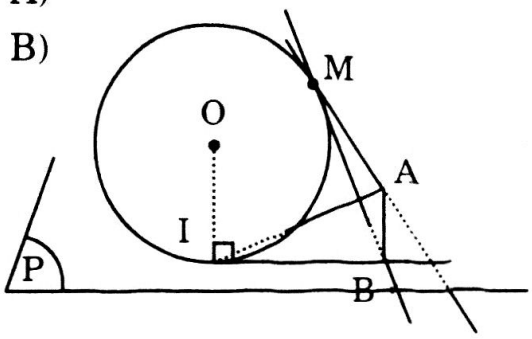
AB chung

Vậy ΔAMB = ΔAIB (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIB}$

(*Chú ý:* OI ⊥ (P)

$\Rightarrow$ OI ⊥ AI, OI ⊥ BI)



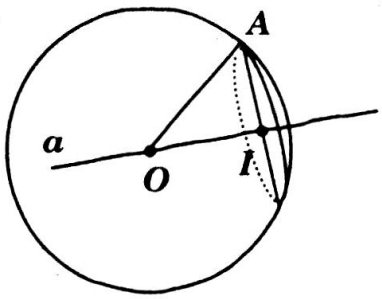
24. Cho một điểm A cố định và một đường thẳng a cố định không đi qua A. Gọi O là một điểm thay đổi trên a. Chứng minh rằng các mặt cầu tâm O bán kính R = OA luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải

Gọi (α) lả mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng a, (a) cắt (α) tại I

$\Rightarrow$ (α) là mặt phẳng cố định

Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (O, OA), theo một đường tròn (C) có tâm I, bán kính IA = R không đổi.



Vậy các mặt cầu tâm O, bán kính R = OA luôn luôn đi qua một đường tròn cố định tâm I, bán kính IA không đổi nằm trong mặt phẳng (α).

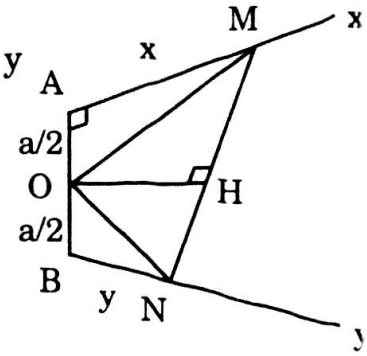
25. Cho hai tia Ax, By chéo nhau nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi M, N là hai điểm lấy trên Ax và By sao cho MN = AM + BN. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định.

Giải

Đặt AB = a $\Rightarrow$ OA = OB = $\frac{a}{2}$, AM = x, BN = y

Gọi O là trung điểm của AB, hạ OH ⊥ MN

Ta có: $\frac{a^2}{4} + x^2 = OM^2 + HM^2$ (Vì hai tam giác vuông OAM và OHM)



Và $\frac{a^2}{4} + y^2 = OH^2 + HN^2$ (hai tam giác vuông OBN và OHN)

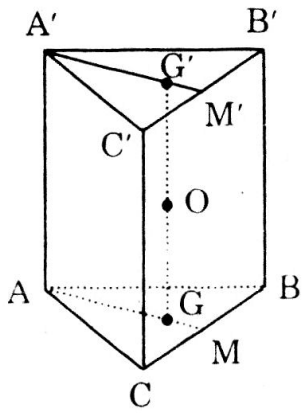
Từ hai đẳng thức trên ta suy ra HM = x, HN = y và OH = $\frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng $\frac{a}{2}$. Nên MN tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính R = $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ cố định.

26. Cho hình lăng trụ tam giác đều có 9 cạnh đều bằng a.
a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua 6 đỉnh của lăng trụ.
b) Tính diện tích của mặt cầu nói trên.

Giải

a) Gọi G và G′ lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đều ABC và A′B′C′. Nên đường thẳng GG′ là trục của hai tam giác đó.
Gọi O là trung điểm của GG′ thì ta có OA = OB = OC = OA′ = OB′ = OC′ = R
Do đó O là tâm mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ.



Ta gọi M là trung điểm của BC thì AM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OG = \frac{a}{2}$

Xét tam giác vuông OGA: $OA^2 = OG^2 + GA^2$

$$OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{12} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

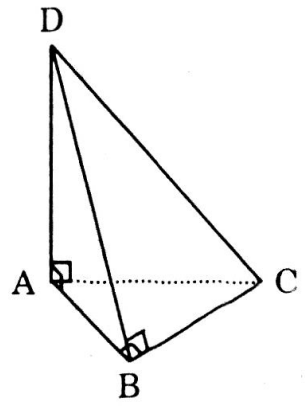
Vậy bán kính mặt cầu R = OA = $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ (đvdt)

b) Diện tích mặt cầu $S = 3\pi R^2 = 4\pi.\frac{7a^2}{12}$

$$S = \frac{7\pi a^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

27. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay tất cả các cạnh còn lại của tứ diện đó quanh cạnh AB, có bao nhiêu hình nón tròn xoay được tạo thành nhận đường thẳng AB làm trục

Giải



- Ta dễ thấy BC ⊥ AB

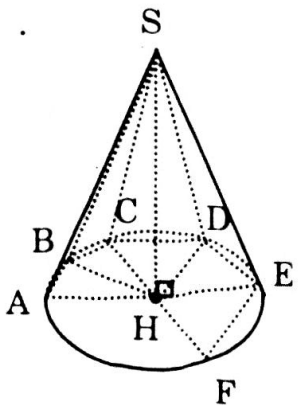
  Khi quay hình tứ diện quanh cạnh AB ta có:
- Tam giác ABC quay quanh AB tạo ra hình nón có trục AB đỉnh A đường sinh AC, đường tròn đáy có tâm B, bán kính BC.
- Tam giác ABD quay quanh AB tạo ra hình nón có trục BA đỉnh A, đường sinh BD, đáy là hình tròn có tâm A, bán kính AD.

28. Một hình chóp có tất cả các cạnh bên bằng nhau. Chứng minh hình chóp đó nội tiếp được trong mặt cầu nếu đa giác đáy nội tiếp trong 1 đường tròn. (Các đỉnh của hình chóp nằm trên mặt cầu).

Giải

Gọi S là đỉnh của hình chóp

A, B, C, D... là đa giác đáy, và H là chân hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy ABCD...



- Ta có HA = HB = HC = HD = ...

  (vì các cạnh bên SA = SB = SC = SD = ...)

  Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và SH là trục của đa giác đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên (chẳng hạn SA) thì (α) cắt SH tại O thì ta có

  OS = OA = OB = OC = OD...

Do đó hình chóp nội tiếp trong một mặt cầu nếu đa giác đáy là đa giác nội tiếp trong một đường tròn.

29. Hình chóp S.ABC có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh bên SA, SB, SC. Mặt cầu này còn tiếp xúc với 3 cạnh AB, AC, CB tại trung điểm của mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp đó là hình chóp tam giác đều.

Giải

- Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA

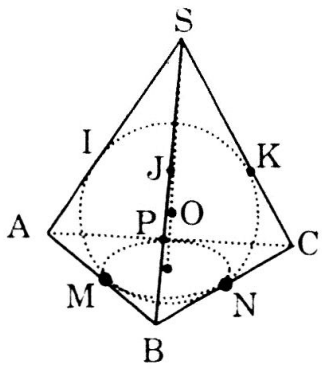
  Gọi I, J, K là các tiếp điểm của mặt cầu với SA, SB, SC.

  Ta có • AI = AM = AP (3 tiếp tuyến xuất phát từ A)

• CP = CN = CK và AP = CP

• BM = BN = BJ và BN = CN

• SI = SJ = SK và AM = MB



Từ 4 hệ thức trên ta suy ra

AB = BC = CA và SA = SB = SC

Vậy hình chóp S.ABC là hình chóp tam giác đều.

30. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống mặt phẳng (BCD).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính khoảng cách AH.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

c) Gọi K là trung điểm của đoạn AH. Chứng minh KB, KC, KD đôi một vuông góc.

Giải

a) • Vì AB = AC = AD = a $\Rightarrow$ HB = HC = HD

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

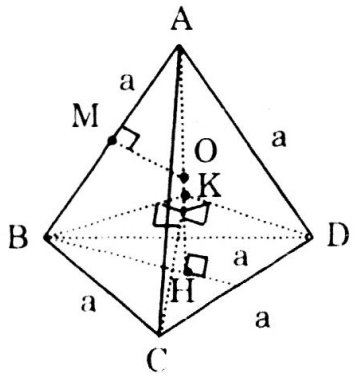
• Tam giác BCD đều nên H cũng là trực tâm

Ta có $BH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

• Xét tam giác ABH vuông tại H ta có

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



b) Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh AB

(α) cắt AB tại trung điểm M và (α) cắt AH tại O

Xét hai tam giác vuông đồng dạng AMO $\backsim$ AHB

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow \frac{AO}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là điểm O nằm trên trục AH và $R = AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ (đvdt)

c) Vì K là trung điểm của AH nên ta có

$$HK = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

• ΔBHK: $BK^2 = BH^2 + HK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

Vậy $BK^2 = CK^2 = DK^2 = \frac{a^2}{2}$

• ΔBKC: $BC^2 = BK^2 + KC^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow BK \perp CK$

Tương tự $CD^2 = CK^2 + KD^2 \Leftrightarrow CK \perp DK$

$BD^2 = BK^2 + KD^2 \Leftrightarrow DK \perp BK$

Vậy KB, KC, KD đôi một vuông góc.

31. Cho hình vuông cạnh a, từ tâm O của hình vuông dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

Trên Δ lấy điểm S sao cho $OS = \frac{a}{2}$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

b) Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD và có chiều cao $h = \frac{a}{2}$

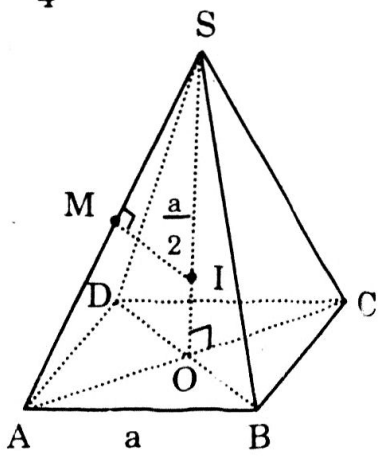
Giải

a) Xác định tâm, bán kính.

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD thì I là giao điểm của mặt phẳng (α) trung trực của cạnh SA với SO

Ta có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SM = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Hai tam giác vuông đồng dạng SMI $\backsim$ SOA

$$\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{SI}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{3a}{4}$$

Vậy tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD nằm trên SO

và có bán kính $R = \frac{3a}{4}$

b) Ta có chu vi đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD là:

$$2\pi R = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}\,\pi$$

Suy ra: $S_{xq} = 2\pi Rh = \frac{a}{2}.a\sqrt{2}\,\pi = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ (đvdt)

32. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh bên là a. Góc giữa mặt bên và đáy là α. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp trong hình chóp theo a và α.

Giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có:

$SA = SB = SC = a$, $\widehat{SMO} = \alpha$.

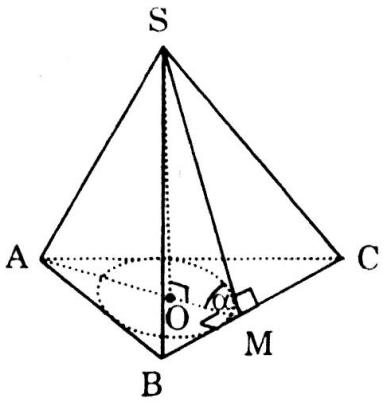
Đường cao của hình nón là SO = h. Bán kính đường tròn đáy là OM = r, AO = 2r. Đường sinh SM = l

Ta có $h = OM.\tan\alpha = r\tan\alpha$ (1)

$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + r^2$ (2)

$\Rightarrow 4r^2 + r^2\tan^2\alpha = a^2 \Rightarrow r^2(4 + \tan^2\alpha) = a^2$

$\Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{4 + \tan^2\alpha}} \Rightarrow h = \frac{a\tan\alpha}{\sqrt{4 + \tan^2\alpha}}$



Vậy $l = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha\sqrt{4 + \tan^2\alpha}}$

Suy ra $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{(4 + \tan^2\alpha)\cos\alpha}$

$$V = \frac{\pi a^3\tan\alpha}{3\sqrt{(4 + \tan 2\alpha)^3}}$$

33. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy một điểm S bất kì dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định.

Giải

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

Mặt khác: $\left.\begin{matrix} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC)$

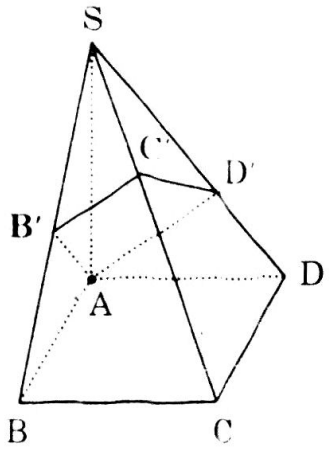
$\Rightarrow AB' \perp B'C$

Tương tự $AD' \perp D'C$, $AC' \perp CC'$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C} = \widehat{AD'C}$

$= \widehat{ADC} = 90^0$

Vậy A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định có đường kính là AC.



34. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By vuông góc với nhau và nhận AB = a (a > 0) làm đoạn vuông góc chung. Lấy điểm M trên Ax, N trên By sao cho AM = BN = 2a. Xác định tâm I và tính theo a bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. Tính khoảng cách giữa hai đường AM và BI.

Giải

Ta có: $AM \perp AB$

$AM \perp BN$ (gt)

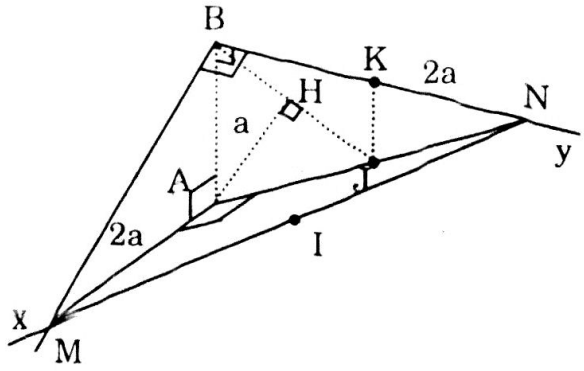
$\Rightarrow AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN$ (1)

• Tương tự $BN \perp AB$

$BN \perp AM$ (gt)

$\Rightarrow BN \perp (ABM)$

$\Rightarrow BN \perp BM$ (2)



Từ (1), (2) ta thấy hai tam giác vuông MBN và MAN có chung cạnh huyền MN. Nên tứ diện ABMN nội tiếp trong mặt cầu đường kính MN, tâm I là trung điểm của MN

Ta có $MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{AM^2 + AB^2 + BN^2}}{2} = \frac{3a}{2} \text{ (đvdt)}$$

* Tính d(AM, BI)

Gọi J là trung điểm của AN thì mặt phẳng (BIJ) là mặt phẳng chứa BI và song song với AM.

Hạ AH ⊥ BJ thì AH ⊥ mp(BIJ).

Do đó d(AM, BI) = d(A, mp(BIJ)) = AH

Gọi K là trung điểm của BN thì $\Delta AHB \backsim \Delta BKJ$

Ta có $\frac{AH}{AB} = \frac{BK}{BJ} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ (đvdt)

35. Cho tứ diện ABCD với AB = AC = a, BC = b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và góc $\widehat{BDC} = 90^0$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.

Giải

Hạ $AH \perp BC \Rightarrow$ H là trung điểm của BC (do ΔABC cân)

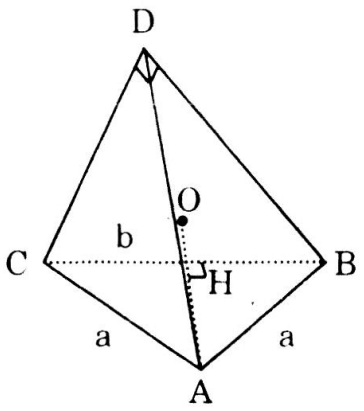
Do $(DBC) \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp (DBC)$

Vậy AH là trục của tam giác vuông DBC

Do đó tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nằm trên AH và ta có

$OA = OB = OC = OD = R$

Do đó R cũng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2b}{4R} \Rightarrow R = \frac{a^2b}{4S}$

Xét ΔABC: $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

$$= \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}b.\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$$

$$R = \frac{a^2b}{b\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

Vậy tâm O của mặt cầu nằm trên đường thẳng AH sao cho

$$R = OA = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \text{ (đvdt)}$$

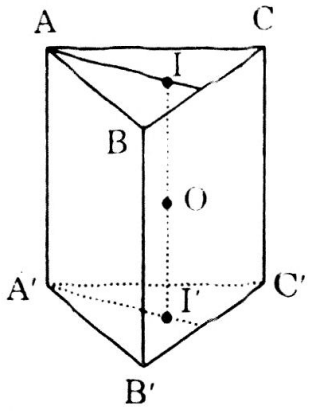
36. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp đó.

Giải

Gọi I và I' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đáy lăng trụ. Như vậy I và I' đồng thời cũng là tâm của hai đường tròn nội tiếp các tam giác ấy và nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với

đường thẳng II'.

Ta suy ra trung điểm O của đoạn II' chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp đi qua 6 đỉnh của lăng trụ đã cho. Mặt cầu này có bán kính r = OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'



Ta có $OA^2 = AI^2 + IO^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$

Vậy $r = OA = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Từ đó ta tính được diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của lăng trụ là

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

37. Cho hình cầu đường kính AA' = 2r. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{4r}{3}$. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn $(\mathscr{C})$

a) Tính diện tích của hình tròn $(\mathscr{C})$

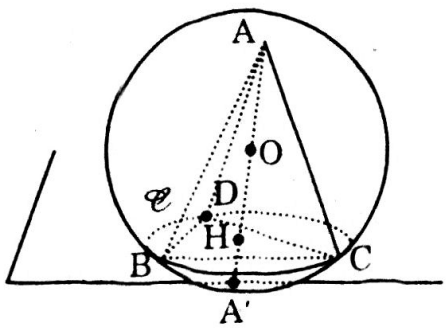
b) Gọi ΔBCD là tam giác đều nội tiếp trong $(\mathscr{C})$. Hãy tính thể tích hình chóp A.BCD và hình chóp A'.BCD

Giải

a) Theo giả thiết ta có $AH = \frac{4r}{3}$

Ta suy ra $OH = \frac{r}{3}$. Gọi r' là bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ ta có

$$r'^2 = r^2 - OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}$$



Vậy diện tích của hình tròn $(\mathscr{C})$ là

$$S = \pi r'^2 = \frac{8\pi r^2}{9} \text{ (đvdt)}$$

b) Vì ΔBCD là tam giác đều nên ta có

$$BC = r'\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

Diện tích tam giác đều BCD là

$$S = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24r^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{3} \text{ (đvdt)}$$

Thể tích hình chóp A.BCD là

$$V = \frac{1}{3}\frac{2r^2\sqrt{3}}{3}.\frac{4r}{3} = \frac{8\sqrt{3}r^3}{27} \text{ (đvdt)}$$

Thể tích hình chóp A'.BCD là:

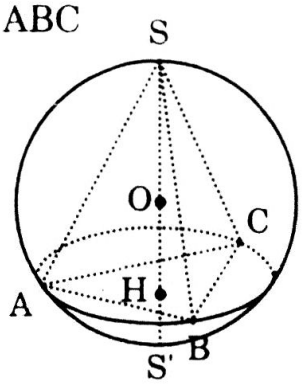
$$V' = \frac{1}{3}\frac{2r^2\sqrt{3}}{3}.\frac{2r}{3} = \frac{4\sqrt{3}r^3}{27} \text{ (đvtt)}$$

38. Cho hình cầu tâm O bán kính R, đường kính SS'. Một mặt phẳng vuông góc với SS' cắt hình cầu theo một đường tròn tâm H, cho tam giác ABC là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này, cho SH = x.

Tính các cạnh của tứ diện SABC. Xác định x để SABC là một tứ diện đều, trong trường hợp này hãy tính thể tích của nó.

Giải

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC



$\Rightarrow$ HA = HB = HC $\Rightarrow$ SA = SB = SC

$\Delta SAS' \Rightarrow SA^2 = SH.SS' = 2Rx$

$\Rightarrow SA = SB = SC = \sqrt{2Rx}$

$\Rightarrow AH^2 = HS.HS' = x(2R - x)$

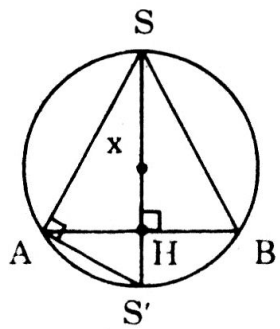
$\Rightarrow AH = \sqrt{x(2R - x)}$ (bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

$\Rightarrow AB = AC = BC = \sqrt{3}\,AH = \sqrt{3x(2R - x)}$

Lúc đó: SABC là tứ diện đều $\Leftrightarrow$ SA = AB

$\Leftrightarrow \sqrt{2Rx} = \sqrt{3x(2R - x)} \Leftrightarrow 2Rx = 3x(2R - x)$

$\Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$ $(0 < x < 2R)$ $(SH = x = \frac{4R}{3})$



• Tính V_{SABC}

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$ (đvtt)

39. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mp(ABC). Nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông.

Biết $SB = a\sqrt{2}$, góc $\widehat{BSC} = 45^0$, góc $\widehat{ASB} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$

1. Chứng minh BC vuông góc với SB. Từ đó xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.
2. Tính thể tích tứ diện SABC theo a và α. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất.

Giải

1. Ta có nhị diện cạnh SB vuông $\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

Vẽ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BC$ (1)

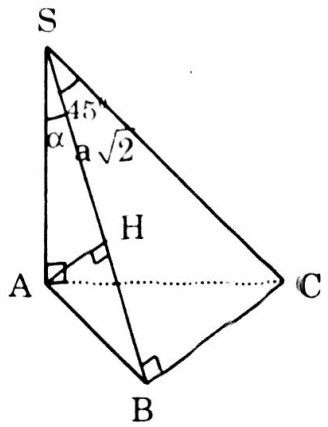
$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \widehat{SBC} = 90^0$

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^0$

Vậy A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên bốn điểm S, A, B, C cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC, tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là trung điểm O của SC, bán kính $R = \frac{SC}{2}$. Ta có tam giác SBC vuông tại B và $\widehat{BSC} = 45^0$



Nên ΔSBC vuông cân tại B $\Rightarrow SC = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a$

$\Rightarrow R = a$ (đvđd)

2. Ta có $BC = a\sqrt{2}$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$

ΔSAB vuông tại A $\Rightarrow SA = SB.\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$

$AB = SB.\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$

Thể tích tứ diện SABC bằng: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{1}{6}(a\sqrt{2})(a\sqrt{2})(a\sqrt{2})\sin\alpha\cos\alpha$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin 2\alpha$$

V lớn nhất $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

Vậy V_{SABC} lớn nhất khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Kết quả nào sau đây đúng:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng x, gọi S là diện tích xung quanh của hình lăng trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp với hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S bằng:

A. $\pi x^2\sqrt{2}$ B. $2\pi x\sqrt{2}$ C. $\pi x^2\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}\pi x^2\sqrt{2}$

2. Kết quả nào sau đây đúng

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng x. Gọi S là diện tích xung quanh của hình lăng trụ có hai đường tròn đáy nội tiếp trong với hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S bằng:

A. $\pi x^2\sqrt{2}$ B. $2\pi x^2$ C. πx^2 D. $2\pi x\sqrt{2}$

3. Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng CA' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a khi quay xung quanh trục CC'. Diện tích S bằng:

A. πa^2 B. $\pi a^2\sqrt{6}$ C. $\pi a^2\sqrt{2}$ D. $\pi a^2\sqrt{3}$

4. Một hình tứ diện đều cạnh a, có một đỉnh là đỉnh của hình nón xoay còn ba đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Thì diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ C. $\pi a^2\sqrt{2}$ D. $\pi a^2\sqrt{3}$

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Một hình nón tròn xoay có đỉnh là tâm của hình vuông A'B'C'D' và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD. Thì diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

6. Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB có bao nhiêu hình nón khác nhau được tạo thành

A. một B. hai C. ba D. bốn

7. Mệnh đề nào sau đây là sai:

Các hình chóp sau đây luôn luôn có các đỉnh nằm trên một mặt cầu.

A. hình chóp tam giác. B. hình chóp tứ giác.

C. hình chóp ngũ giác đều. D. hình chóp n giác đều.

8. Cho tứ diện đều ABCD. Khi quay tứ diện đó xung quanh trục AB có bao nhiêu hình nón khác nhau được tạo thành:

A. một B. hai C. ba D. bốn.

9. Mệnh đề nào sau đây là sai

A. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một tứ diện bất kì.

B. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình hộp chữ nhật.

C. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình chóp đều.

D. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình lăng trụ có đáy là một tứ giác lồi.

10. Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và biết rằng $\widehat{ACB} = 1$ vuông. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng

A. AB là một đường kính của mặt cầu đã cho.

B. ΔABC là một tam giác vuông cân tại C.

C. Luôn luôn có một đường tròn lớn thuộc mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC.

D. AB là đường kính của đường tròn lớn trên mặt cầu đã cho.

11. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. vô số.

12. Hình nón có chiều cao bằng h và góc ở đỉnh là 2β. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $\dfrac{\pi h^2 \sin\beta}{\cos^2\beta}$ B. $\pi h^2 \tan\beta$ C. $\dfrac{\pi h^2}{\cos\beta}$ D. $\pi h^2 \sin\beta$

13. Khối cầu có bán kính bằng r nội tiếp trong một khối nón, chiều cao khối nón là 3a, các thiết diện qua đỉnh của khối nón có diện tích lớn nhất là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $3a^2\sqrt{3}$ D. $\dfrac{9a^2}{2}$

14. Hình chóp tứ giác đều có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón và có đáy nội tiếp trong đường tròn đáy của hình nón. Biết cạnh đáy của hình nón bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích hình nón là:

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$ C. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ D. A, B, C đều sai

15. Cắt mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được $\dfrac{2}{3}$ hình tròn có bán kính R. Khi đó bán kính đáy của hình nón bằng:

A. $\dfrac{2R}{3}$ B. $\dfrac{R}{3}$ C. $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ D. $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

16. Một khối trụ tròn xoay chứa một khối cầu có bán kính bằng 1. Khối cầu tiếp xúc với mặt xung quanh và hai mặt đáy của khối trụ. Thể tích khối trụ bằng:

A. $\dfrac{\pi}{3}$ (đvtt) B. $\dfrac{\pi}{2}$ (đvtt) C. 2π (đvtt) D. $\dfrac{2}{\pi}$ (đvtt)

17. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước 3, 4, 12. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật bằng:

A. 5 B. 10 C. 13 D. $\dfrac{13}{2}$

18. Hình trụ có bán kính bằng 5, khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

A. 10π B. 85π C. 95π D. 120π

19. Hình nón có bán kính bằng R và thiết diện qua trục là tam giác đều. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $2\pi R^2$ B. πR^2 C. $\frac{\pi R^2}{2}$ D. A, B, C đều sai

20. Cho tam giác vuông tại A, có $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$. Xoay tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $\frac{\pi a^3}{2}$ C. $\frac{\pi a^3}{4}$ D. $\frac{2\pi a^3}{3}$

21. Hình trụ có bán kính đáy là R, thiết diện qua trục là hình vuông. Khối cầu ngoại tiếp hình trụ có thể tích là:

A. $8\pi R^3\sqrt{2}$ B. $\frac{4\pi R^3\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4\pi R^3}{3}$ D. $\frac{8\pi R^3\sqrt{2}}{3}$

22. Cắt mặt cầu bán kính 2R bằng một mặt phẳng, ta được đường tròn có bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là:

A. $R\sqrt{3}$ B. $\frac{R}{2}$ C. $\frac{R\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

23. Một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh a và chứa một khối cầu. Khối cầu tiếp xúc với mặt xung quanh và mặt đáy của khối nón. Diện tích khối cầu bằng:

A. $\frac{\pi a^2}{3}$ B. $\frac{2\pi a^2}{3}$ C. $\frac{\pi a^2}{12}$ D. $\frac{\pi a^2}{2}$

24. Một khối cầu có thể tích bằng $\frac{4\pi}{3}$ (đvtt) nội tiếp trong khối lập phương (các mặt của hình lập phương đều tiếp xúc với khối cầu). Thể tích khối lập phương bằng:

A. 1 (đvtt) B. $\frac{4\pi}{3}$ (đvtt) C. 8 (đvtt) D. 4π (đvtt)

25. Nếu ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, 2a, 2a. Thì thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp là:

A. $\frac{9\pi a^3}{5}$ B. $\frac{9\pi a^3}{4}$ C. $9\pi a^3$ D. $\frac{9\pi a^3}{2}$

26. Hình lập phương có cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là:

A. πa^2 B. $2\pi a^2$ C. $3\pi a^2$ D. $4\pi a^2$

27. Hình lập phương có cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng:

A. πa^2 B. $2\pi a^2\sqrt{2}$ C. $3\pi a^2$ D. $\pi a^2\sqrt{2}$

28. Hình lập phương có cạnh bằng a. Hình trụ có đường tròn đáy nội tiếp đáy của hình lập phương có thể tích là

A. πa^2 B. $\frac{\pi a^3}{4}$ C. $\frac{\pi a^3}{2}$ D. A, B, C đều sai

29. Cho hình lập phương có thể tích V_1, gọi O là tâm của đáy trên, và (C) là đường tròn ngoại tiếp đáy dưới. Khối nón đỉnh O và có đáy là (C) có thể tích V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. $\frac{4}{\pi}$ B. $\frac{5}{\pi}$ C. $\frac{6}{\pi}$ D. $\frac{8}{\pi}$

30. Cắt mặt nón bằng mặt phẳng không vuông góc với trục và tất cả các đường sinh của mặt nón thì ta được giao tuyến là:

A. Đường tròn B. Đường elíp

C. Đường hypebol D. Đường Parabol

31. Hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Hình nón có đường cao CC' và độ dài đường sinh là C'D thì có diện tích xung quanh là:

A. $\pi a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. πa^2 C. $\pi a^2 \sqrt{3}$ D. $\pi a^2 \sqrt{6}$

32. Cho hình chóp S.MNP có SM ⊥ (MNP) biết SM = MN = a và ΔMNP vuông cân tại N. Mặt cầu ngoại tiếp S.MNP có diện tích là:

A. $4\pi a^2$ B. $\frac{4}{3}\pi a^2$ C. $3\pi a^2$ D. $\pi a^2 \sqrt{3}$

33. Hình chóp S.MNP có SM ⊥ (MNP), ΔMNP vuông tại N. Biết SM = 2MN = 4NP = 4a. Khối cầu ngoại tiếp SMNP có thể tích là:

A. $\frac{21\pi a^3\sqrt{21}}{6}$ B. $\frac{21\pi a^3}{6}$ C. $\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{2}$ D. $\frac{4\pi a^3}{3}$

34. Cho hình lập phương có cạnh bằng x và một hình trụ có hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. π

35. Cho tứ diện MNPQ có đáy là tam giác NPQ vuông góc tại N có MN vuông góc với mặt phẳng (NPQ) và MN = a, NP = b, NQ = c. Mặt cầu đi qua các đỉnh của tứ diện MNPQ có bán kính R bằng:

A. $R = \frac{2(a+b+c)}{3}$ B. $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

C. $R = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ D. A, B, C đều sai.

36. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện $\widehat{MAB} = \alpha$ với $0 < \alpha < 90^0$.
Hãy tìm mệnh đề đúng thuộc một trong các mệnh đề sau
A. M luôn luôn thuộc một mặt nón xác định.
B. M luôn luôn thuộc một mặt trụ xác định.
C. M luôn luôn thuộc một mặt cầu xác định.
D. M luôn luôn thuộc một mặt phẳng xác định.

37. Người ta bỏ 3 quả banh bằng nhau vào một hình trụ, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng 3 lần đường kính của banh. Gọi S_1 là diện tích của một quả banh, S_2 là diện tích xung quanh hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\frac{1}{3}$ B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. A, B, C đều sai

38. Có 7 viên bi kích thước bằng nhau, và có bán kính đều bằng r được xếp kín vào đáy của một chiếc hộp hình trụ sao cho 6 viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của hình trụ. Diện tích đáy của hình trụ là:
A. $6\pi r^2$ B. $9\pi r^2$ C. $8\pi r^2$ D. $10\pi r^2$

39. Hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình vuông, SM $\perp$ (MNPQ). Biết SM = MN = 1. Thể tích khối cầu ngoại tiếp S.MNPQ là:
A. $\pi\sqrt{3}$ (đvtt) B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (đvtt) C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (đvtt) D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)

40. Hình chóp S.MNP có SM $\perp$ (MNP) và ΔMNP vuông tại N. Cho SM = MP = $\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu qua S, M, N, P là:
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

41. Tứ diện OXYZ có OX, OY, OZ đôi một vuông góc. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nằm trên các đường thẳng nào sau đây:
A. Trục của ΔOXY B. Trục của ΔOYZ
C. Đường thẳng OZ D. Cả A, B, C đều đúng

42. Tứ diện đều MNPQ có I, J lần lượt là trung điểm của MN, PQ. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là:
A. Tâm của ΔMNP B. Trung điểm của IJ
C. Điểm I D. Điểm J

43. Cho hình chóp M.NPQ có đáy là tam giác đều cạnh a, MN = 2a và vuông góc với đáy, xoay hình chóp một vòng xung quanh trục MN thì hình nón tạo thành có diện tích xung quanh là:
A. $\pi a^2\sqrt{2}$ B. $\pi a^2\sqrt{5}$ C. $\pi a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$

Chương IV. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. MẶT CẦU

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

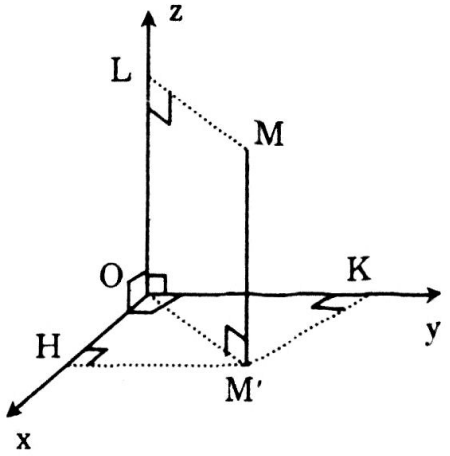
I. Hệ tọa độ trong không gian: Oxyz

II. Tọa độ của một điểm:

Cho điểm M tùy ý trong không gian Oxyz. Hạ MM' ⊥ Oxy, N'H ⊥ Ox, M'K ⊥ Oy, ML ⊥ Oz

Ta có $\overline{OH} = x$, $\overline{OK} = y$, $\overline{OL} = z$ thì M(x, y, z)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$



III. Tọa độ của một vectơ

- Trong không gian Oxyz cho vectơ $\vec{a}$ với $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$
  Khi đó bộ ba số (a_1, a_2, a_3) được gọi là tọa độ Oxyz cho trước.
  Ta viết $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
- Trong không gian Oxyz cho $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

IV. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và một số k, khi đó ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Chú ý: • $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

- $\vec{0} = (0, 0, 0)$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ có một số k sao cho $a_1 = kb_1$; $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$.

V. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

1. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
2. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
3. Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

4. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ta có:

- $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

VI. Tích hữu hướng của hai vectơ

1. *Định nghĩa:* Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ $\vec{c}$ được kí hiệu là $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ (hay $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ có tọa độ là

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

hay $\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

2. *Tính chất*

a) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

b) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

c) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{a}$ và $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{b}$

d) $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

3. *Ứng dụng*

a) Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$

b) Diện tích hình chữ nhật ABCD là $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$

c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c} = 0$

d) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c} \neq 0$

e) Thể tích khối tứ diện ABCD là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}|$

g) Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' ta có

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\overrightarrow{AA'}|$$

VII. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm I(a, b, c) có bán kính R, có phương trình là: $(x - a)^2 + (y - b^2) + (z - c^2) = R^2$

Hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = R^2$

* Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm I(–A, –B, –C) có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

B/ BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Trong không gian Oxy cho ba vectơ $\vec{a} = (2, -5, 3)$; $\vec{b} = (0, 2, -1)$ $\vec{c} = (1, 7, 2)$

a) Tính tọa độ của vectơ $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3} + 3\vec{c}$.

b) Tính tọa độ của vectơ $\vec{v} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Giải

a) Ta có $\vec{a} = (2, -5, 3) \Rightarrow 4\vec{a} = (8, -20, 12)$

$\vec{b} = (0, 2, -1) \Rightarrow -\frac{\vec{b}}{3} = (0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$\vec{c} = (1, 7, 2) \Rightarrow 3\vec{c} = (3, 21, 6)$

Vậy $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3} + 3\vec{c} = (11, \frac{1}{3}, \frac{55}{3})$

b) Ta có: $\vec{a} = (2, -5, 3)$

$\vec{b} = (0, 2, -1) \Rightarrow -4\vec{b} = (0, -8, 4)$

$\vec{c} = (1, 7, 2) \Rightarrow -2\vec{c} = (-2, -14, -4)$

Vậy $\vec{v} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0, -27, 3)$

2. Trong không gian Oxyz cho A(1, 0, 1), B(–2, 1, 3), C(1, 4, 0)

a) Tìm hệ thức giữa (x, y, z) tọa độ của M để M ∈ mặt phẳng (ABC).

b) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H của ΔABC.

c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\vec{AB} = (-3, 1, 2)$; $\vec{AC} = (0, 4, -1)$; $\vec{AM} = (x - 1, y, z - 1)$

$[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-9, -3, -12)$

M ∈ mặt phẳng (ABC) ⇔ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AM}$ đồng phẳng

⇔ $[\vec{AB}, \vec{AC}]\vec{AM} = 0$

$\Leftrightarrow -9(x-1)-3(y)-12(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y+4z-7=0$

b) Trọng tâm G

$$G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=0 \\ y_G=\dfrac{0+1+4}{3}=\dfrac{5}{3} \\ z_G=\dfrac{1+3+0}{3}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow g(0,\frac{5}{3},\frac{4}{3})$$

• Gọi H(x, y, z) là trực tâm của ΔABC, ta có:

• $\vec{AH}.\vec{BC}=0 \Leftrightarrow 3(x-1)+3y-3(z-1)=0$

$\Leftrightarrow x+y-z=0$ (1)

• $\vec{BH}.\vec{CA}=0 \Leftrightarrow 0(x+3)+4(y-1)-1(z-3)=0$

$\Leftrightarrow 4y-z-1=0$ (2)

• $H \in (ABC) \Leftrightarrow 3x+y+4z-7=0$ (3)

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y-x=0 \\ 4y-z-1=0 \\ 3x+y+4z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{8}{13},\frac{7}{13},\frac{15}{13})$

c) Tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

• Gọi I(x, y, z) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có IA = IB

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow 3x-y-2z+6=0$ (4)

IA = IC $\Leftrightarrow 8x-2z-15=0$ (5)

I $\in$ mặt phẳng (ABC) $\Leftrightarrow 3x+y+4z-7=0$ (6)

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y-2z+6=0 \\ 8x-2z-15=0 \\ 3x+y+4z-7=0 \end{cases}$

Vậy $I(-\frac{4}{13},\frac{29}{13},\frac{37}{26})$

• Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là R = IA

$\Leftrightarrow R^2=IA^2=\left(\frac{17}{13}\right)^2+\left(\frac{29}{13}\right)^2+\left(\frac{11}{26}\right)^2=\frac{4641}{26^2} \Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{4641}}{26}$ (đvtt)

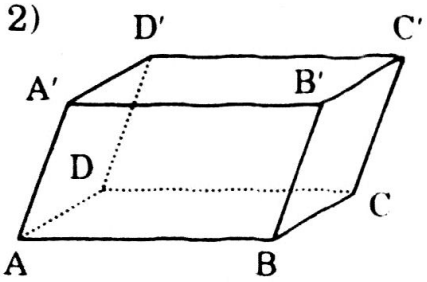
3. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' biết A(1, 0, 1); B(2, 1, 2); D(1, −1, 1); C'(4, 5, −5). Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Giải

• Ta có $\vec{AB}=(1,1,1)$

$\vec{DC}=(x_C-1, y_C+1, z_C-1)$ với $C(x_C, y_C, z_C)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 1 \\ y_C + 1 = 1 \\ z_C - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0, 2)$



• Ta có $\overrightarrow{CC'} = (2, 5, -7)$

Ta có $\overrightarrow{BB'} = (x_{B'} - 2, y_{B'} - 1, z_{C'} - 2)$

Ta có $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} - 2 = 2 \\ y_{B'} - 1 = 5 \\ z_{C'} - 2 = -7 \end{cases} \Rightarrow B'(4, 6, -5)$

• Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow A'(3, 5, -6)$

$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow D'(3, 4, -6)$

4. Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(3, 4, −1); B(2, 0, 3); C(−3, 5, 4).

a) Tìm độ dài các cạnh của ΔABC.

b) Tìm cosin của các góc A, B, C của ΔABC.

c) Tìm diện tích ΔABC.

Giải

a) Ta có $AB = \sqrt{(2-3)^2 + (0-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{33}$ (đvđd)

$BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{51}$ (đvđd)

$CA = \sqrt{(3+3)^2 + (4-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{62}$ (đvđd)

b) Tính cosin các góc ΔABC

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1, -4, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (-6, 1, 5)$

Vậy $\cos A = \dfrac{6 - 4 + 20}{\sqrt{33}.\sqrt{62}} = \dfrac{22}{\sqrt{2046}}$

• Ta có $\overrightarrow{BA} = (1, 4, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, 5, 1)$

Vậy $\cos B = \dfrac{-5 + 20 - 4}{\sqrt{33}.\sqrt{54}} = \dfrac{11}{3\sqrt{198}}$

• Ta có $\overrightarrow{CA} = (6, -1, -5)$ $\overrightarrow{CB} = (5, -5, -1)$

Vậy $\cos C = \dfrac{30 + 5 + 5}{\sqrt{62}.\sqrt{51}} = \dfrac{40}{\sqrt{3162}}$

c) Tính diện tích ΔABC

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-24, -19, -25)$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{(-24)^2 + (-19)^2 + (-25)^2} = \dfrac{\sqrt{1562}}{2}$ (đvdt)

5. Trong không gian Oxyz cho A(–1, –2, 4); B(–4, –2, 0); C(3, –2, 1); D(1, 1, 1).

a) Chứng minh rằng: ABCD là một tứ diện.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Tính độ dài đường cao hạ từ D.

Giải

a) Ta có $\vec{AB} = (-3, 0, -4)$; $\vec{AD} = (2, 3, -3)$; $\vec{AC} = (4, 0, -3)$

$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0, -25, 0)$

$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}].\vec{AD} = -75 \neq 0$

Vậy $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ ABCD là một tứ diện

b) Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}]\vec{AD}| = \frac{|-75|}{6} = \frac{25}{2}$ (dvtt)

c) Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{25}{2}$

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.DH \Rightarrow DH = \frac{3V}{S} = 3$ (đvđd)

6. Cho tứ diện ABCD có A(2, 1, –1); B(3, 0, 1); C(2, –1, 3) và D nằm trên trục tung. Biết thể tích của tứ diện ABCD là 5. Tìm tọa độ của D.

Giải

Gọi $D(0, d, 0) \in Oy$

Ta có $\vec{AB} = (1, -1, 2)$; $\vec{AC} = (0, -2, 4)$

$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0, -4, -2)$

$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}]\vec{AD} = -4(d - 1) - 2 = -4d + 2$

Vì $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}]\vec{AD}| = 5$

$\Rightarrow \frac{1}{6}|-4d + 2| = 5 \Rightarrow -4d + 2 = \pm 30 \Rightarrow d = -7 \vee d = 8$

Do đó có hai điểm D là $D_1(0, -7, 0)$ $D_2(0, 8, 0)$

7. Cho $\vec{v} \neq \vec{0}$, gọi α, β, γ lần lượt là góc của $\vec{v}$, tạo với $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị trên các trục hoành, trục tung và trục cao. Chứng minh rằng: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Giải

Gọi $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Ta có $\vec{v}\vec{e}_1 = v_1 = |\vec{v}||\vec{e}_1|\cos\alpha \Rightarrow v_1^2 = |\vec{v}|^2.\cos^2\alpha$

$\vec{v}\vec{e}_2 = v_2 = |\vec{v}||\vec{e}_2|\cos\beta \Rightarrow v_2^2 = |\vec{v}|^2\cos^2\beta$

$\vec{v}\vec{e}_3 = v_3 = |\vec{v}||\vec{e}_3|\cos\gamma \Rightarrow v_3^2 = |\vec{v}|^2\cos^2\gamma$

Cộng ba đẳng thức trên vế theo vế ta có

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

8. Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(1, 2, 4); B(2, −1, 0); C(−2, 3, −1)

a) Tìm tọa độ điểm D biết rằng ABCD là hình bình hành

b) Tìm diện tích hình bình hành ABCD.

Giải

a) Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Gọi D(x, y, z). Ta có $\overrightarrow{DC} = (-2 - x, 3 - y, -1 - z)$

$$\text{Từ } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 - x \\ -3 = 3 - y \\ -4 = -1 - z \end{cases} \Leftrightarrow D(-3, 6, 3)$$

b) Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$

Ta có: $\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (1, -3, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -5) \end{matrix} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (19, 17, -8)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}\sqrt{19^2 + 17^2 + (-8)^2} = \frac{\sqrt{714}}{2}$$

Suy ra diện tích hình bình hành ABCD là $S_{ABCD} = \sqrt{714}$ (đvdt)

9. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a} = (2, 3, 4)$; $\vec{b} = (5, 7, 0)$; $\vec{c} = (3, -2, 1)$

a) Chứng tỏ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b) Cho vectơ $\vec{d} = (4, 12, -3)$ hãy phân tích vectơ $\vec{d}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Giải

a) Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -28.3 + 20.(-2) - 1.4 = 128 \neq 0 + 5(-2) - 1(4) = -35 \neq 0$

Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng

b) Phân tích vectơ $\vec{d}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Giả sử $\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ về phương diện tọa độ ta có

$$\begin{cases} x_d = px_a + qx_b + rx_c \\ y_d = py_a + qy_b + ry_c \\ z_d = pz_a + qz_b + rz_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2p + 5q + 3r \\ 12 = 3p + 7q - 2r \\ -3 = 4 + 4r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{35}{128} \\ q = \dfrac{167}{128} \\ r = -\dfrac{131}{128} \end{cases}$$

Vậy $\vec{d} = \frac{35}{128}\vec{a} + \frac{167}{128}\vec{b} - \frac{131}{128}\vec{c}$.

10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt trung điểm của AD và BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{A'C}$.

Giải

Chọn $\overrightarrow{AD} = (0, a, 0)$, $\overrightarrow{DC} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{AA'} = (0, 0, a)$

$\Rightarrow$ A(0, 0, 0); B(a, 0, 0);
C(a, a, 0); D(0, a, 0)
A'(0, 0, a), B'(a, 0, a);

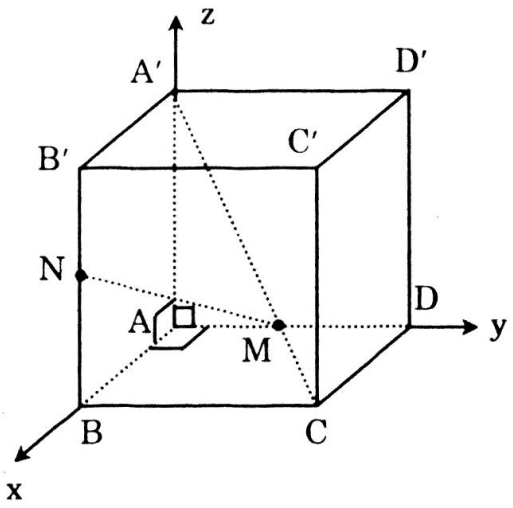
Suy ra $M(\frac{a}{2}, 0, 0)$; $N(a, 0, \frac{a}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$

$\overrightarrow{A'C} = (a, a, -a)$

$\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{A'C} = \frac{a^2}{2} + 0 - \frac{a^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{A'C}$



11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, A'D', gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm các đường chéo các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: hai tam giác PQR và P'Q'R' có trọng tâm trùng nhau.

Giải

a) Chứng minh: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$

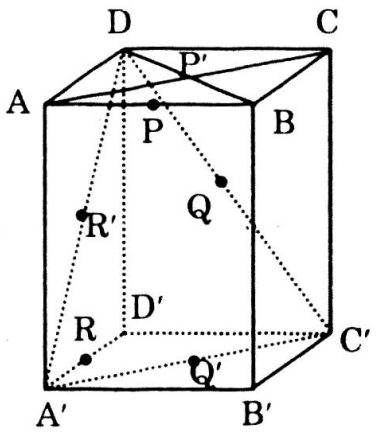
Theo tính chất đường trung bình ta có:

$$\overrightarrow{PP'} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \frac{\overrightarrow{DA'}}{2}, \quad \overrightarrow{RR'} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{2} = \frac{\overrightarrow{A'A}}{2}$$

Vậy $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$$



b) Chứng minh: ΔPQR và $\Delta P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

Gọi G là trọng tâm của ΔPQR ta có

$\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PP'}) + (\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RR'}) + (\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QQ'})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR})$

$+ (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'}) = \vec{0}$

Vậy G là trọng tâm của $\Delta P'Q'R'$.

12. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm của $\Delta AB'C$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$

b) Gọi P, Q, R là ảnh đối xứng của điểm D' qua các điểm A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện PQRD'.

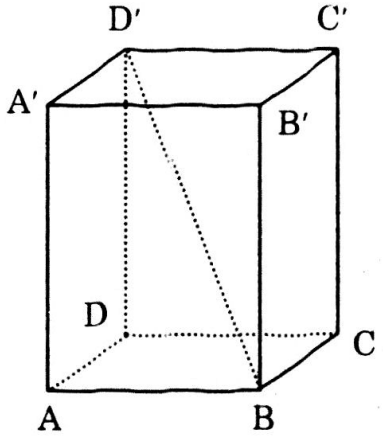
Giải

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$

Với hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D' ta có

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$

và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$



Suy ra: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC}$

$= (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'})$

$+ (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC})$

$= 3\overrightarrow{BG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{BG}$

b) Chứng minh B là trọng tâm của tứ diện PQRD'

Vì P, Q, R là điểm đối xứng của D' qua A, B', C

Suy ra $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{QB'} = \overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{CD'}$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD'}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD'}$

Tương tự $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'Q} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{BB'}$

$= 2\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BD'}$

$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'C}$

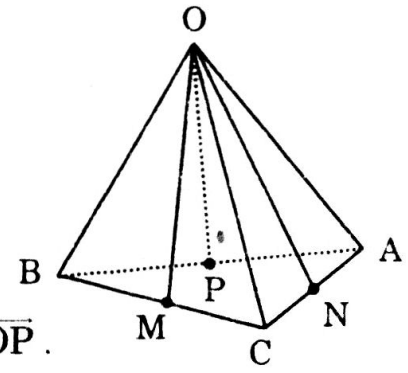
$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD'}$

Vậy $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BD'} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{BD'} = \vec{0}$

Vậy B là trọng tâm của tứ diện PQRD'.

13. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Chứng minh rằng với bất kì điểm O nào trong không gian ta cũng có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Giải



• Ta có: M là trung điểm của BC nên:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$$

• Tương tự: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{ON}$

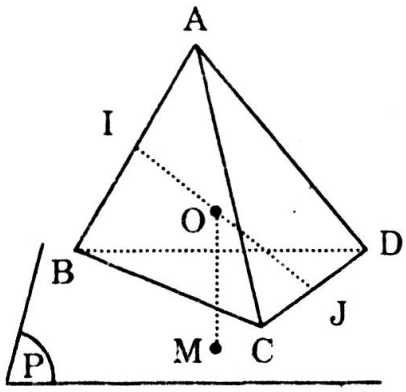
• Tương tự $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP}$

Cộng ba đẳng thức trên vế theo vế ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$$

14. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$

Suy ra: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ})$

$= 4\overrightarrow{MO}$ (với O là trung điểm của IJ)

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt GTNN $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MO}|$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MO \perp (P) \Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của O lên (P)

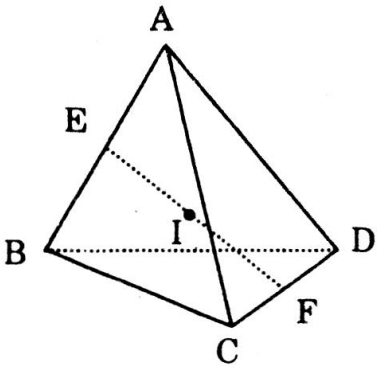
15. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, gọi I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

b) Với điểm M bất kì trong không gian, hãy chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Giải

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD

Ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$

$= 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = \vec{0}$

b) Ta có $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{IM} + \vec{MA}) + (\vec{IM} + \vec{MB}) + (\vec{IM} + \vec{MC}) + (\vec{IM} + \vec{MD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$

16. Tính diện tích hình bình hành ABCD biết $\vec{AB} = (6, 3, -2)$, $\vec{AD} = (3, -2, 6)$.

Giải

Ta có $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = (14, -42, -21)$

$S_{ABCD} = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{2401}$ (đvdt)

17. Tính thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' trong mỗi trường hợp sau.

a) A(1, 2, 1); B(2, –1, 1); D(1, 0, 0); A'(0, 1, 0).

b) A(1, 2, 1); B(1, 1, 1); C(0, 1, 0); C' (2, –2, –2)

Giải

a) Ta có $\vec{AB} = (1, -3, 0)$

$\vec{AD} = (0, -2, -1)$

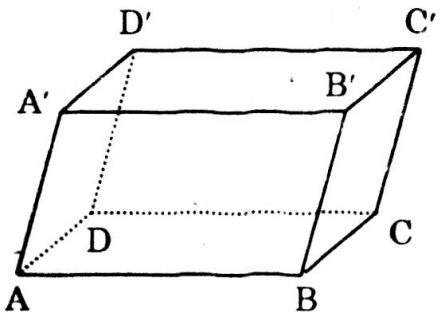
$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = (3, 1, -2)$

$\vec{AA'} = (-1, -1, -1)$

$(\vec{AB} \wedge \vec{AD})\vec{AA'} = -3 - 1 + 2 = -2$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AD})\vec{AA'}|$

$= |-2| = 2$ (đvtt)



b) Ta có $\vec{BC} = (-1, 0, -1)$

$\vec{BA} = (0, 1, 0)$

$\vec{BC} \wedge \vec{BA} = (1, 0, -1)$,

$\vec{BB'} = \vec{CC'} = (2, -3, -2)$

$(\vec{BC} \wedge \vec{BA})\vec{BB'} = 2 + 2 = 4$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\vec{BC} \wedge \vec{BA})\vec{BB'}| = 4$ (đvtt).

18. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu sau đây

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$

Giải

a) Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết dưới dạng

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = 16$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm I(4, 1, 0), R = 4.

b) Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết lại là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 5z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+\frac{4}{3})^2 + (z+\frac{5}{2})^2 = \left(\frac{19}{6}\right)^2$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I(1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{2})$, $R = \frac{19}{6}$

19. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau.
a) Có đường kính AB với A(4, –3, 7); B(2, 1, 3).
b) Đi qua điểm A(5, –2, 1) và có tâm I(3, –3, 1).

Giải

a) Tâm I của mặt cầu là trung điểm của AB $\Rightarrow$ I(3, –1, 5) bán kính của mặt cầu bằng $\frac{AB}{2}$ nên.

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2 + (3-7)^2} = 3$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (y-5)^2 = 9$

b) Bán kính của mặt cầu là IA = R

$\Leftrightarrow R^2 = IA^2 = (5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2 = 5$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

20. Trong không gian Oxyz hãy viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A(1, 0, 0); B(0, –2, 0); C(0, 0, 4) và gốc tọa độ O. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Phương trình mặt cầu (3) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

vì A(1, 0, 0) $\in$ (S) nên ta có $1 - 2a + d = 0$ (1)
vì B(0, –2, 0) $\in$ (S) nên ta có $4 + 4b + d = 0$ (2)
vì C(0, 0, 4) $\in$ (S) nên ta có $16 - 8c + d = 0$ (3)
vì O(0, 0, 0) $\in$ (S) nên ta có $d = 0$ (4)

Giải hệ 4 phương trình trên ta có: $d = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 2$

Vậy mặt cầu (S) cần tìm có phương trình là

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$$

Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng

$$(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - \frac{1}{4} - 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}$$

Vậy mặt cầu S có tâm $I(\frac{1}{2}, -1, 2)$, bán kính $r = \frac{\sqrt{21}}{2}$

21. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1, 2, 2); B(−1, 2, −1); C(1, 6, −1); D(−1, 6, 2). Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Tìm tâm và bán kính mặt cầu đó.

Giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

- Vì A(1, 2, 2) ∈ (S) nên ta có

$$1 + 4 + 4 - 2a - 4b - 4c + d = 0 \qquad (1)$$

- Vì B(−1, 2, −1) ∈ (S) nên ta có

$$1 + 4 + 1 + 2a - 4b + 2c + d = 0 \qquad (2)$$

- Vì C(1, 6, −1) ∈ (S) nên ta có

$$1 + 36 + 1 - 2a - 12b + 2c + d = 0 \qquad (3)$$

- Vì D(−1, 6, 2) ∈ (S) nên ta có

$$1 + 36 + 4 + 2a - 12b - 4c + d = 0 \qquad (4)$$

Giải hệ 4 phương trình ta có $a = 0, b = 4, c = \frac{1}{2}, d = 9$

Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$x^2 + (y - 4)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{29}{4}$$

Có tâm $I(0, 4, \frac{1}{2})$, $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Bài 2. MẶT PHẲNG

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

1. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến (PVT) là.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là:

$Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

3. Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A(a, 0, 0) B(0, b, 0) C(0, 0, c) với $abc \neq 0$ thì mặt phẳng (α) có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

II. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho hai mặt phẳng (α_1), (α_2) có phương trình tổng quát lần lượt là:

(α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ có PVT $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

(α_2) $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có PVT $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

Ta có: 1. $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$

2. $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$

$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Chú ý: • (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$

• $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$

III. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (α):

$Ax + By + Cz + D = 0$ được tính bởi công thức

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B/ BÀI TẬP TỰ LUẬN

22. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2, 3, 7); B(4, 1, 3).

Giải

Gọi M là trung điểm của AB, ta có M(3, 2, 5). Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua M(3, 2, 5) và nhận $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -4)$ làm PVT nên có phương trình là $2(x - 3) - 2(y - 2) - 4(y - 5) = 0$

$2x - 2y - 4z + 18 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2z + 9 = 0$

23. a) Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz và Oxz.

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm M(2, 6, −3) và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

Giải

a) • Mặt phẳng Oxy qua O(0, 0, 0) có PVT $\vec{e}_3(0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (Oxy): $1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

• Mặt phẳng (Oyz) qua O(0, 0, 0) có PVT $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình (Oyz): $1(x - 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• Mặt phẳng (Oxz) qua O(0, 0, 0), có PVT $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình (Oxz): $1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

b) • Phương trình (α) đi qua M(2, 6, –3) và // (Oxy)

$\Leftrightarrow$ (α) đi qua M(2, 6, –3) PVT $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (α): $0(x - 2) + 0(y - 6) + 1(z + 3) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (α): $z + 3 = 0$

• Phương trình mặt phẳng (β) đi qua M(2, 6, –3) và // Oyz

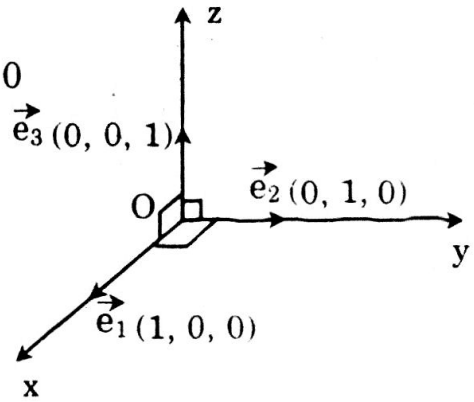
$\Leftrightarrow$ (β) đi qua M(2, 6, –3) PVT $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình (β):

$1(x - 2) + 0(y - 6) + 0(z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (β):

$x - 2 = 0$



• Phương trình (γ) qua M(2, 6, –3) và // (Oxz)

$\Rightarrow$ (γ) đi qua M(2, 6, –3) PVT $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

Phương trình (γ): $0(x - 2) + 1(y - 6) + 0(z + 3) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (γ): $y - 6 = 0$.

24. Lập phương trình mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm P(4, –1, 2)

b) Chứa trục Oy và điểm Q(1, 4, –3)

c) Chứa trục Oz và điểm R(3, –4, 7)

Giải

a) Mặt phẳng (α) chứa Ox và điểm P(4, –1, 2) $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) qua O mà nhận $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ và $\vec{OP} = (4, -1, 2)$ làm cặp VTCP.

Suy ra (α) có PVT $\vec{n} = [\vec{e}_1, \vec{OP}] = (0, -2; -1)$

Pt mặt phẳng $(\alpha) = 0(x - 0) - 2(y - 0) - 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0$

b) Mặt phẳng (β) chứa Oy và điểm Q(1, 4, –3) $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (β) qua O nhận $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ và $\vec{OQ} = (1, 4, -3)$ làm cặp VTCP

Suy ra (β) có PVT $\vec{u} = [\vec{e}_2, \vec{OQ}] = (-3, 0, -1)$

Phương trình mặt phẳng (β): $-3(x - 0) + 0(y - 0) - 1(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + z = 0$

c) Mặt phẳng (γ) chứa Oz và điểm R(3, –4, 7) $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (γ) qua O nhận $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ và $\vec{OR} = (3, -4, 7)$ làm cặp VTCP.

Suy ra (γ) có PVT $\vec{v} = [\vec{e}_3, \vec{OR}] = (4, 3, 0)$

Phương trình mặt phẳng (γ): $4(x - 0) + 3(y - 0) + 0(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y = 0$

25. Cho tứ diện có các đỉnh là A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4); D(4, 0, 6).

a) Hãy viết phương trình các mặt phẳng (ACB); (BCD)

b) Hãy viết phương trình (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$

$\overrightarrow{AD} = (-1, -1, 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-2, -1, -1)$

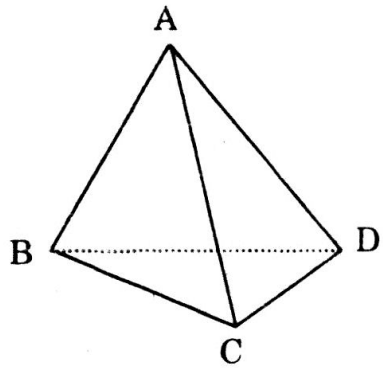
mặt phẳng (ACD) qua A(5, 1, 3),

PVT $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-2, -1, -1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (ACD):

$-2(x - 5) - 1(y - 1) - 1(z - 3) = 0$

Phương trình (ACD): $2x + y + z - 14 = 0$



• Ta có $\overrightarrow{BC} = (4, -6, 2)$

$\overrightarrow{BD} = (3, -6, 4) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-12, -10, -6)$

Mặt phẳng (BCD) đi qua B (1, 6, 2), PVT (−12, −10, −6) có phương trình là: $-12(x - 1) - 10(y - 6) - 6(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 5y + 3z - 42 = 0$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4, 5, -1)$

$\overrightarrow{CD} = (-1, 0, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (10, 9, 5)$

Mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và // CD $\Leftrightarrow$ (α) đi qua A và có PVT $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$.

Phương trình (α): $10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 10x + 9y + 5z - 74 = 0$

26. Viết phương trình (α) đi qua M(2, −1, 2) và song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$.

Giải

Vì (α) // (β) $\Rightarrow$ phương trình (α): $2x - y + 3z + m = 0$

Vì $M(2, -1, 2) \in (\alpha) \Rightarrow 4 + 1 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = -11$

Do đó phương trình (α): $2x - y + 3z - 11 = 0$

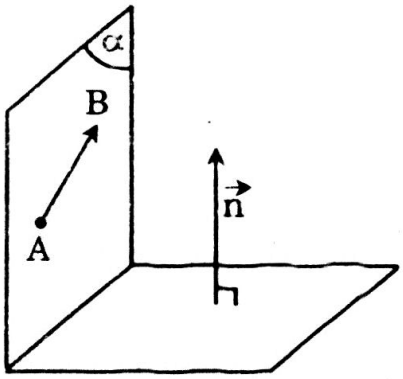
27. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A(1, 0, 1); B(5, 2, 3) và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + 2z - 7 = 0$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4, 2, 2)$

Mặt phẳng (β) có PVT $\vec{n} = (2, -1, 2)$

Vì (α) qua A, B và vuông góc với (β) nên mặt phẳng (α) nhận $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ làm cặp VTCP nên (α) có PVT $\vec{u} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{AB}$ = (6, –4, –8)



Do đó (α) đi qua A (1, 0, 1), PVT $\vec{u}$ = (6, –4, –8) nên phương trình (α):

$6(x - 1) - 4(y - 0) - 8(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 4y - 8z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y - 4z + 1 = 0$

28. Xác định các giá trị m và n để các cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau.

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$.

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.

Giải

a) Mặt phẳng (α) $2x + my + 3z - 5 = 0$ có PVT $\vec{u}$ = (2, m, 3)

Mặt phẳng (β): $nx - 8y - 6z + 2 = 0$ có PVT $\vec{v}$ = (n, –8, –6)

$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \vec{u} \downarrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (-6m + 24, 3n + 12 - 16 - mn) = \vec{0} = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6m + 24 = 0 \\ 3n + 12 = 0 \\ -16 - mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -4 \\ -16 + 16 = 0 \text{ (đúng)} \end{cases}$$

Vậy khi m = 4, n = –4 thì 2mp (α) và (β) song song

b) Mặt phẳng (α): $3x - 5y + mz - 3 = 0$ có PVT $\vec{u}$ = (3, –5, m)

Mặt phẳng (β): $2x + ny - 3z + 1 = 0$ có PVT $\vec{v}$ = (2, n, –3)

$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \vec{u} \downarrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (15 - mn, 2m + 3n, 3n + 10) = \vec{0} = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 - mn = 0 \\ 2m + 9 = 0 \\ 3n + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - \left(-\frac{9}{2} - \frac{10}{3}\right) = 0 \\ m = -\frac{9}{2} \\ n = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Vậy khi $m = -\frac{9}{2}$, $n = -\frac{10}{3}$ thì 2 mặt phẳng song song với nhau.

29. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

(α): $6x - 2y + 8z + 5 = 0$

(β): $3x - y + 4z + 8 = 0$

Giải

Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cách đều 2 mặt phẳng (α), (β) ta có

$$\frac{|6x_0 - 2y_0 + 8z_0 + 5|}{\sqrt{104}} = \pm\frac{|3x_0 - y_0 + 4z_0 + 8|}{\sqrt{26}}$$

$$\Leftrightarrow |6x_0 - 2y_0 + 8z_0 + 5| = \pm 2|3x_0 - y_0 + 4z_0 + 8|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0 - 2y_0 + 8z_0 + 5 = 6x_0 - 2y_0 + 8z_0 + 16 \text{ (VN)} \\ 6x_0 - 2y_0 + 8z_0 + 5 = 6x_0 + 2y_0 - 8z_0 - 16 \end{cases}$$

30. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1.
a) Chứng minh 2 mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) song song.
b) Tính khoảng cách giữa hai mặt đó.

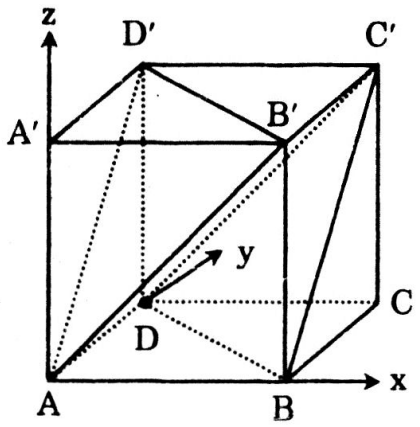
Giải

a) Chứng minh (AB'D'): (AB'D') // (BC'D)

Ta chọn hệ trục Axyz như hình vẽ, ta có

A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); C(1, 1, 0); D(0, 1, 0)

A'(0, 0, 1); B'(1, 0, 1); C'(1, 1, 1), D'(0, 1, 1)



• Ta có $\overrightarrow{AB'} = (1, 0, 1)$

$\overrightarrow{AD'} = (0, 1, 1)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (ABD') có PVT

$\vec{n} = \overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AD'}$

• Ta có $\overrightarrow{C'B} = (0, -1, -1)$

$\overrightarrow{CD} = (-1, 0, -1)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (C'BD) có PVT

$\vec{u} = \overrightarrow{C'B} \wedge \overrightarrow{CD} = (1, 1, -1)$

Ta có $\vec{n} \downarrow\uparrow \vec{u}$ nên mặt phẳng (AB'D') // mặt phẳng (C'BD)

b) Phương trình mặt phẳng (AB'D') qua A(0, 0, 0),

PVT $\vec{n} = (-1, -1, 1)$ là $-1(x - 0) - (y - 0) + 1(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$

$$d(((AB'D'), (C'BD)) = d(B, (AB'D'))) = \frac{|1 + 0 - 0|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (đvđd)}$$

31. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm A(2, 3, 4) và mặt phẳng (α): $2x + 3y + z - 17 = 0$.

Giải

Gọi $M(0, 0, m) \in Oz$ là điểm cần tìm thì

$$MA = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (4-m)^2} = \sqrt{m^2 - 8m + 26}$$

$$d(M, \alpha) = \frac{|m - 17|}{\sqrt{4 \quad 9 + 1}} = \frac{|m - 17|}{\sqrt{14}}$$

Ta có $MA = d(M, \alpha) \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8m + 26} = \frac{|m - 17|}{\sqrt{14}}$

$\Leftrightarrow 14m^2 - 112m + 364 = m^2 - 34m + 289$

$\Leftrightarrow 13m^2 - 78 + 75 = 0 \Rightarrow m = 3$

Vậy M(0, 0, 3)

32. Lập phương trình mặt phẳng:

1. Qua A(2, −1, 4) và vuông góc với đường thẳng xác định bởi B(−1, 0, −4), C(0, −2, −1)
2. Chứa trục Ox và điểm P(4, −1, 2)
3. Chứa trục Oy và điểm Q(1, 4, 3)
4. Chứa trục Oz và điểm R(3, −4, 7)

Giải

1. Mặt phẳng (α) đi qua A(2, 1, −1) và nhận $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 3)$ làm PVT nên phương trình (α): $1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$

   $\Leftrightarrow x - 2y + 3z + 3 = 0$

2. Mặt phẳng (α) chứa trục Ox có phương trình $By + Cz = 0$

   Vì $P(4, -1, 2) \in (\alpha) \Rightarrow -B + 2C = 0 \Rightarrow B = 2C$

   Cho $C = 1 \Rightarrow B = 2$ vậy phương trình (α): $2y + z = 0$

3. Mặt phẳng (α) chứa Oy có phương trình: $Ax + Cz = 0$

   Vì $Q(1, 4, 3) \in (\alpha) \Rightarrow A + 3C = 0 \quad \Rightarrow A = -3C$

   Cho $C = -1 \Rightarrow A = 3$ vậy phương trình (α): $3x - z = 0$

4. Mặt phẳng (α) chứa Oz có phương trình $Ax + By = 0$

   Vì $R(3, -4, 7) \in (\alpha) \Rightarrow 3A - 4B = 0 \quad \Rightarrow 3A = 4B$

   Cho $B = 3 \Rightarrow A = 4 \Rightarrow$ Phương trình (α): $4x + 3y = 0$

33. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua 2 điểm A(2, −1, 4) B(3, 2, −1) và vuông góc với mặt phẳng β: $x + y + 2z - 3 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (β) có PVT $\vec{n}_{(\beta)} = (1, 1, 2)$

Mặt phẳng (α) nhận $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ và $\vec{n}_{(\beta)} = (1, 1, 2)$

Làm cặp VTCP nên (α) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(\beta)}] = (11, -7, -2)$

Vậy phương trình (α): $11(x - 2) - 7(y + 1) - 2(z - 4) = 0$

$11x - 7y - 2z - 21 = 0$

34. 1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua A(1, 0, 5) và song song với mặt phẳng (γ): $2x - y + z - 17 = 0$

2. Lập phương trình mặt phẳng (β) đi qua 3 điểm B(1, −2, 1); C(1, 0, 0); D(0, 1, 0) và tính góc nhọn (φ) tạo bởi 2 mặt phẳng (α) và (β).

Giải

1. Vì mặt phẳng (α) // (γ): $2x - y + z - 17 = 0$ nên

Phương trình (α): $2x - y + z + C = 0$

Vì $A(1, 0, 5) \in (\alpha) \Rightarrow 2.1 - 0 + 5 + C = 0 \Rightarrow c = -7$

Vậy phương trình (α): $2x - y + z - 7 = 0$

2. Ta có $\vec{BC} = (0, 2, -1)$; $\vec{BD} = (-1, 3, -2)$

mặt phẳng (β) nhận $\vec{BC}$, $\vec{BD}$ làm cặp VTCP nên mặt phẳng (β) có PVT $\vec{n} = [\vec{BC}, \vec{BD}] = (1, 1, 2)$

Vậy mặt phẳng (β) qua B(1, −2, 1) có PVT $\vec{n} = (1, 1, 2)$ nên.

phương trình (β): $1(x - 1) + 1(y + 2) + 2(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0$

Ta có $\cos\varphi = \dfrac{|2.1 - 1.1 + 1.2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}.\sqrt{1 + 1 + 4}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$

35. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa Oz và tạo với mặt phẳng (α): $2x + y - \sqrt{5}\,z = 0$ một góc 60^0.

Giải

Phương trình chùm mặt phẳng (P) chứa Oz là $mx + ny = 0$

Vậy (P) có PVT $\vec{u} = (m, n, 0)$

(α) có PVT $\vec{v} = (2, 1, -\sqrt{5}$

Ta có $\cos((P), (\alpha)) = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \dfrac{|2m + n|}{\sqrt{m^2 + n^2}\sqrt{4 + 1 + 5}} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2m + n|}{\sqrt{10}\sqrt{m^2 + n^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2|2m + n| = \sqrt{10}\sqrt{m^2 + n^2}$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 16mn + 4n^2 = 10m^2 + 10n^2 \Leftrightarrow 6m^2 + 16mn - 6n^2 = 0$

Cho $n = 1 \Rightarrow 6m^2 + 16m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = +\dfrac{1}{3} \\ m_2 = -3 \end{array}\right.$

Vậy ta có 2 mặt phẳng (P) là: (P_1) $-3x + y = 0$

(P_2): $\dfrac{1}{3}x + y = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 0$

36. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa gốc tọa độ O và vuông góc với 2 mặt phẳng.

$$(P): x - y + z - 7 = 0$$
$$(Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$$

Giải

Ta có mặt phẳng (P): $x - y + z - 7 = 0$ có PVT $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$

Mặt phẳng (Q): $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ có PVT $\vec{n}_2 = (3, 2, -12)$

Vì mặt phẳng $(\alpha) \perp (P), (Q)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (α) có PVT $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (10, 15, 5)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) qua O, PVT $\vec{n} = (10, 15, 5)$ là

$$10x + 15y + 5z = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + z = 0$$

37. Xác định các giá trị của m và n để các cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau.

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$

Giải

a) Vì 2 mặt phẳng song song $\Leftrightarrow \dfrac{2}{n} = \dfrac{m}{-8} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n} = \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{m}{-8} = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4 \end{cases}$$

b) Vì 2 mặt phẳng song song $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{-5}{n} = \dfrac{m}{-3} \neq \dfrac{-3}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5}{n} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m}{-3} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\dfrac{10}{3} \\ m = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

38. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua M(0, 0, 1); N(3, 0, 0) và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $\dfrac{\pi}{3}$.

Giải

Gọi B(0, b, 0) là giao điểm của mặt phẳng (α) với Oy

Vì (α) tạo với (Oxy) một góc $\dfrac{\pi}{3}$ nên $b \neq 0$

Vậy phương trình mặt phẳng (α): $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$

Suy ra mặt phẳng (α) có PVT $\vec{n} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{b}, \frac{1}{1})$

Mặt phẳng (Oxy) có PVT $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Ta có $\cos(\alpha, Oxy) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{|1|}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{b^2} + 1\sqrt{1}}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{\sqrt{b^2 + 10}} \quad \Leftrightarrow \quad 9b^2 + 10 = 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\frac{\sqrt{26}}{3}$$

Vậy có 2 mặt phẳng (α): $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$

39. Trong không gian Oxyz cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4).

a) Viết phương trình (ABC) tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình mặt phẳng qua O, A và song song với BC.

c) Viết phươngtrình mặt phẳng qua C, A và vuông góc với mặt phẳng (α): $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

d) Viết phương trình mặt phẳng qua O và vuông góc với hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABC)

e) Viết phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (ABC) và qua I(−1, 2, 3).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4, 5, -1)$, $\overrightarrow{AC} = 90, -1, 1)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4, 4, 4)$

Mặt phẳng (ABC) qua A, PVT $\vec{n} = (4, 4, 4)$ có phương trình:

$$4(x - 5) + 4(y - 1) + 4(y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$$

Vậy $d(0, (ABC)) = \frac{|-9|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

b) Mặt phẳng (α) qua O, A và song song với BC nên mặt phẳng (α) có cặp VTCP là $\overrightarrow{OA} = (5, 1, 3)$ và $\overrightarrow{BC} = (4, -6, 2)$

Vậy mặt phẳng (α) có PVT $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}] = (20, 2, -34)$

Nên phương trình mặt phẳng (α) là $20x + 2y - 34z = 0$

$$\Leftrightarrow 10x + y - 17z = 0$$

c) Mặt phẳng $(\beta) \perp (\alpha)$: $x - 2y + 3z + 1 = 0$ nên (β) có VTCP $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$ và $\vec{u} = (1; -2; 3)$

Vậy (β) có PVT $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{AC}] = (1, -1, 1)$

Phương trình mặt phẳng (β) là $1(x - 5) - 1(y - 0) + 1(z - 4) = 0 \Leftrightarrow$ $x - y - z - 1 = 0$

d) Mặt phẳng (γ) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (α) nên nhận $\vec{n}_{(ABC)} = (4, 4, 4)$ và $\vec{n}_{(\alpha)} = (1, -2, 3)$ làm cặp VTCP

Do đó (γ) có PVT $\vec{n} = [\vec{n}_{(ABC)}, \vec{n}_{(\alpha)}] = (0, 2, -2)$

Mặt phẳng (γ) qua O, PVT $\vec{n} = (0, 2, -2)$ có phương trình:

$$2y - 2z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

e) Phương trình chùm mặt phẳng qua giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (ABC) và (α) là: $m(x + y + z - 9) + n(x - 2y + 3z + 1) = 0$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$

Mặt khác điểm $I(-1, 2, 3) \in d$ nên:

$$m(-1 + 2 + 3 - 9) + n(-1 - 4 + 9 + 1) = 0 \Leftrightarrow -5m + 5n = 0$$

$\Leftrightarrow m = n$. Chọn $m = n = 1$. Ta có phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 4z - 8 = 0$

40. Xác định tham số m, n để mặt phẳng (P): $5x + ny + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng có phương trình $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$.

Giải

Ta có $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (3\alpha + \beta)x - (7\alpha + 9\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 3\alpha + 5\beta = 0$$

Để mặt phẳng (P): $5x + my + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng ta có

$$\frac{3\alpha + \beta}{5} = \frac{-(7\alpha + 9\beta)}{n} = \frac{\alpha - 2\beta}{4} = \frac{-3\alpha + 5\beta}{m}$$

Suy ra $\frac{3\alpha + \beta}{5} = \frac{\alpha - 2\beta}{4} \Leftrightarrow 2\beta = -\alpha$

Cho $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = -2$ khi đó $\frac{3\alpha + \beta}{5} = \frac{-6 + 1}{5} = -1$

Nên $\frac{(-7\alpha - 9\beta)}{n} = -1 \Rightarrow n = 7\alpha + 9\beta = -5$

$\frac{-3\alpha + 5\beta}{m} = -1 \Rightarrow m = 3\alpha - 5\beta = -11$

Vậy $m = -11$, $n = -5$ là các giá trị cần tìm

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

1. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm M(2, 0, −1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ = (4, −6, 2) là:

A. $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{2}$ B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{1}$ D. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-2}{1}$

2. Gọi (d) là đường thẳng đi qua A(1, 2, 3) và vuông góc với mặt phẳng (α): 4x + 3y − 7z + 1 = 0. Phương trình chính tắc của (α) là

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{x+3}{-7}$ B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$

C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-7}$ D. $\frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+3}{-14}$

3. Cho hai đường thẳng:

(d_1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (d_2) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. $(d_1) \perp (d_2)$ B. $(d_1) \,//\, (d_2)$

C. $(d_1) \equiv d_2$ D. (d_1) và (d_2) chéo nhau.

4. Cho mặt phẳng (α): 2x + y + 3z + 1 = 0 và đường thẳng (d) có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. (d) $\perp$ (α) B. (d) cắt (α) C. (d) // (α) D. (d) $\subset$ (α)

5. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$

thì (d) có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$ B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$

C. x − 2 = y = z + 3 D. x + 2 = y = z − 3

6. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của d

A. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

7. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A(1, 2, –3); B(3, –1, 1)

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$ D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$

8. Giao điểm của đường thẳng (d): $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ với mặt phẳng (α): $3x + 5y - z - 2 = 0$ có tọa độ là.

A. (1, 0, 1) B. (0, 0, –2) C. (1, 1, 6) D. (12, 9, 1)

9. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (α): $x + 3y + z + 1 = 0$

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng

A. d // (α) B. d cắt (α) C. d $\subset$ (α) D. d $\perp$ (α)

10. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng (α): $x + y + z - 4 = 0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng

A. d // (α) B. d $\perp$ (α) C. d $\subset$ (α) D. d cắt (α)

Trong không gian Oxyz cho ba vectơ $\vec{a} = (-1, 1, 0)$; $\vec{b} = (1, 1, 0)$ và $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu 11, 12, 13, 14.

11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

C. $\vec{a} \perp \vec{b}$ D. $\vec{b} \perp \vec{c}$

12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. $\vec{a} . \vec{c} = 1$ B. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$ D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

13. Cho hình bình hành OACB thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Diện tích của hình bình hành OACB bằng bao nhiêu.

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. 4

14. Cho hình hộp OACB.O'A'C'B' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OO'} = \vec{c}$. Thể tích hình hộp nói trên bằng.

A. 6 B. 2 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Trong không gian Oxyz cho 4 điểm

A(1, 0, 0) B(0, 1, 0) C(0, 0, 1) D(1, 1, 1)

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu 15, 16, 17, 18.

15. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ diện

B. Tam giác ABD là tam giác đều

C. AB ⊥ CD

D. Tam giác BCD là tam giác vuông

16. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm G của MN là:

A. $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ B. $G(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

C. $G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ D. $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

17. Thể tích tứ diện ABCD bằng:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{2}{3}$

18. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{4}$

19. Phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm M(2, 5, −7) và nhận $\vec{a}$ = 91, −2, 3) và $\vec{b}$ = (93, 0, 5) làm cặp vectơ chỉ phương là.

A. 5x − 2y − 3z − 21 = 0 B. −10x + 4y + 6z + 21 = 0

C. 10x − 4y − 6z + 21 = 0 D. 5x − 2y − 3z + 21 = 0

20. Cho ba điểm A(0, 2, 1); B(3, 0, 1); C(1, 0, 0). Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. 2x − 3y − 4z + 2 = 0 B. 2x + 3y − 4z − 2 = 0

C. 4x + 6y − 8z + 2 = 0 D. 2x − 3y − 4z + 1 = 0

21. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại 3 điểm M(8, 0, 0) N(0, −2, 0); P(0, 0, 4) phương trình của (α) là:

A. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$ B. $\frac{x}{4} - \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$

B. x − 4y + 2z = 0 D. x − 4y + 2z − 8 = 0

22. Cho ba mặt phẳng:

$(\alpha)\ x + y + 2z + 1 = 0$; $(\beta)\ x + y - z + 2 = 0$; $(\gamma)\ x - y + 5 = 0$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai

A. $(\alpha) \perp (\beta)$ B. $(\alpha) \perp (\beta)$

C. $(\alpha) // (\gamma)$ D. $(\alpha) \perp (\gamma)$

23. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm E(4, −1, 1); F(3, 1, −1) và song song với trục Ox phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là

A. $x + y = 0$ B. $x + y + z = 0$

C. $y + z = 0$ D. $x + z = 0$

24. Lập phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm A(1, 2, 3) và song song với mặt phẳng (β): $x - 4y + z + 12 = 0$, phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $x - 4y + z - 4 = 0$ B. $x - 4y + z + 4 = 0$

C. $x - 4y + z - 12 = 0$ D. $x - 4y + z + 3 = 0$

25. Trong không gian Oxyz cho điểm I(2, 6, −3) và các mặt phẳng (α): $x - 2 = 0$; $(\beta)\ y - 6 = 0$ và (γ): $z + 3 = 0$

Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề sai.

A. (α) đi qua I B. $(\beta) // (Oxz)$

B. $(\gamma) // Oz$ D. $(\alpha) \perp (\beta)$

26. Hãy chọn kết quả đúng.

Phương trình của mặt phẳng chứa trục Oy và điểm Q(1, 4, −3) là:

A. $3x + y = 0$ B. $x + 3x = 0$

C. $3x + y = 0$ D. $3x - y = 0$

27. Cho mặt phẳng (α): $2y + z = 0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

A. $(\alpha) // Ox$ B. $\alpha // Oy$

C. $\alpha // Oyz$ D. $\alpha \supset Ox$

28. Cho ba điểm A(2, 1, −1); B(−1, 0, 4); C(0, −2, −1) phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng BC.

A. $x - 2y - 5z + 5 = 0$ B. $x - 2y - 5z - 5 = 0$

C. $x - 2y - 5z = 0$ D. $2x - y + 5z - 5 = 0$

29. Gọi (γ) là mặt phẳng đi qua điểm M(3, −1, −5) và vuông góc với 2 mặt phẳng (α); $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và (β): $5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình tổng quát của (γ) là:

A. $2x + y - 2z - 15 = 0$ B. $2x + y - 2z + 15 = 0$

C. $x + y + z + 3 = 0$ D. $x + y + z - 3 = 0$

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong không gian Oxyz, hệ hai phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ (\alpha) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ (\beta) \end{cases} \quad (I)$$

Trong đó $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$; $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ là

$(A_1; B_1; C_1) \neq k\ (A_2; B_2; C_2)$ được gọi là phương trình tổng quát của một đường thẳng.

Nhận xét:

1. Khi cho một đường thẳng thì có nhiều cách chọn hai mặt phẳng sao cho giao tuyến của chúng là hai đường thẳng đó. Vì vậy phương trình tổng quát của một đường thẳng có thể có nhiều cách biểu thị khác nhau.
2. Đường thẳng Δ cho bởi phương trình (I) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \wedge \vec{n}_{(\beta)}$

trong đó $\vec{n}_{(\alpha)}$ và $\vec{n}_{(\beta)}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

II. Phương trình tham số và phương trình chính tắc

1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ làm vectơ chỉ phương, Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \ (t \in R) \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ với $a_1a_2a_3 \neq 0$ làm vectơ chỉ phương, Δ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

III. Điều kiện để hai đường thẳng song song, trùng nhau cắt nhau, chéo nhau

Cho đường thẳng d đi qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$ VTCP $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ đường thẳng d' đi qua $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$, VTCP $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$.

Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$ ta có các điều kiện sau.

1. $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

2. $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

3. d cắt d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$

4. d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0$

5. $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a}\vec{a}' = 0$

IV. Điều kiện để một đường thẳng song song, cắt hoặc vuông góc với mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua $M_0(x_0, y_0, z_0)$, có VTCP $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$.

Gọi $\vec{n} = (A, B, C)$ là VTPT của (α). Ta có các trường hợp sau:

1. $d \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$

2. $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$

3. d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} \neq 0$

4. $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$

V. Tính khoảng cách

1. Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta thực hiện

- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ
- Tìm tọa độ giao điểm H của Δ với (α)
- Khoảng cách từ M đến Δ chính là độ dài MH

Vậy $d(M, \Delta) = MH$

2. Để tính khoảng cách giữa một đường thẳng Δ và một mặt phẳng (α) song song với nó, ta thực hiện
   - Lấy một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tùy ý trên Δ.
   - Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm $M_0 \in (\Delta)$ đến mp(α): $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$.
3. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' ta thực hiện các bước
   - Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với Δ'
   - Lấy một điểm $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ tùy ý trên Δ'
   - Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến mặt phẳng (α): $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$.

B/ BÀI TẬP TỰ LUẬN

41. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng (d): $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Cho $x = 0$ thì phương trình (d) trở thành $\begin{cases} -2y + 3z - 4 = 0 \\ 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Suy ra $y = -8$, $z = -4$ vậy (d) đi qua $M(0, -8, -4)$

(d) có $\begin{bmatrix} \vec{n}_1 = (1; -2; 3) \\ \vec{n}_2 = (3; 2; -5) \end{bmatrix} \Rightarrow$ (d) có pháp vectơ $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4; 14; 8)$

Do đó: • Phương trình chính tắc của (d): $\dfrac{x - 0}{4} = \dfrac{y + 8}{14} = \dfrac{z + 4}{8}$

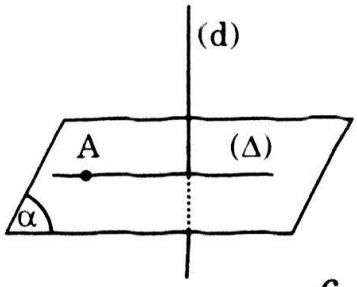
• Phương trình tham số của (d): $\begin{cases} x = 0 + 4t \\ y = -8 + 14t \\ z = -4 + 8t \end{cases}$

42. Trong không gian Oxyz, lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A(3; 2; 1) cắt vuông góc với đường thẳng (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z + 3}{1}$

Giải

- Ta có đường thẳng (d) đi qua $M(0, 0, -3)$, VTCP $\vec{a} = (2; 4; 1)$
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A, $\perp$ (d)
  nên (α) nhận $\vec{a} = (2; 4; 1)$ làm PVT
  Phương trình (α): $2(x - 3) + 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + z - 15 = 0$



• Phương trình tham số của (d) là

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Thế vào phương trình (α): $2(2t) + 4(4t) + (-3 + t) - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{6}{7}$

Vậy $d \cap (\alpha) = B\left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{-15}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (9, -10, 22)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ qua A, cắt vuông góc với (d) chính là đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 2 - 10t \\ z = 1 + 22t \end{cases}$.

43. Trong Oxyz cho mp(P): $x + y + z = 0$ và đường thẳng (d) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$

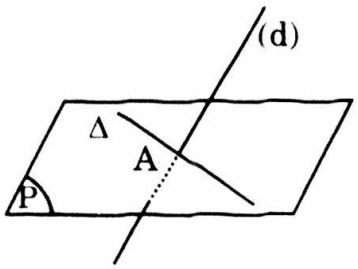
a) Tìm giao điểm A của (d) và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, vuông góc với (d), nằm trong mp(P).

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng (d)

$$(d)\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$



Thế vào phương trình mp(P) ta có:

$3 - 2t + t + 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $(d) \cap (P) = A(1, 1, -2)$

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A(1, 1, −2) và ⊥ (d)

nên (Q) có PVT là $\vec{a}_d = (-2; 1; -3)$

Do đó phương trình (Q) là

$-2(x - 1) + 1(y - 1) - 3(z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3z + 5 = 0$

Ta có đường thẳng (Δ) qua A vuông góc với (d) nằm trong (P) chính là giao tuyến của 2 mp(P) và mp(Q) nên.

Phương trình đường thẳng (Δ) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

44. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(1, 1, 2) và song song với (d): $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

Giải

Ta có (d) có $\begin{bmatrix} \vec{n}_1 = (3, -1, 2) \\ \vec{n}_2 = (1, 3, -2) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-4; 8; 10)$

Vì đường thẳng (Δ) qua M(1, 1, 2) và song song với d nên (Δ) đi qua M, VTCP $\vec{a} = (-4, 8, 10)$ có phương trình là:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}$$

45. Trong không gian Oxyz, hãy viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mp(α): y + 2z = 0 và cắt hai đường thẳng.

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \qquad (d_2): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Giải

* Thế phương trình (d_1) vào phương trình mp(α) ta có $t + 8t = 0 \Leftrightarrow t = 0$
  Vậy $d_1 \cap (\alpha) = A(1, 0, 0)$
* Thế phương trình (d_2) vào phương trình mp(α) ta có: $4 + 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3$
  Vậy $d_2 \cap (\alpha) = B(5; -2; 1)$
* Ta có $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1)$
  Vậy phương trình tham số của đường thẳng AB nằm trong mp(α) và cắt d_1, d_2 là: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

46. Trong Oxyz cho đường thẳng (d): $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mp(P): x − y − z − 1 = 0

Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua A(1, 1, −2) song song với mp(P) và vuông góc với đường thẳng (d).

Giải

Mặt phẳng (P) có PVT $\vec{n} = (1, -1, -1)$

Đường thẳng (d) có VTCP $\vec{a} = (2, 1, 3)$

Gọi $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ là VTCP của đường thẳng Δ, ta có

• Vì $(\Delta) // (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow v_1 - v_2 - v_3 = 0$

• Vì $(\Delta) \perp (d) \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 + 3v_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{2}{5}v_2 \\ v_3 = -\dfrac{3}{5}v_2 \end{cases}$$

Chọn $v_2 = 5 \Rightarrow \vec{v} = (2, 5, -3)$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) là

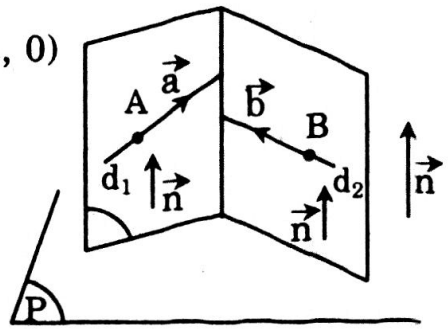
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$$

47. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mp(P):$x + y + z + 1 = 0$ và cắt cả 2 đường thẳng (d_1): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z$ và (d_2) $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

(d_1) đi qua A(1, −1, 0), VTCP $\vec{a} = (2, -1, 0)$

mp(P) có PVT $\vec{n} = (1, 1, 1)$



* Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và $\perp$ (P) thì (α) qua A(1, −1, 0), PVT là $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{n}] = (-2; -1; 3)$

Nên phương trình mp(α):

$$-2(x - 1) - 1(y + 1) + 3(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 3z - 1 = 0$$

(d_2) đi qua $B(0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ có VTCP $\vec{b} = (5, 4, 3)$

* Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và $\perp$ (P) thì (β) đi qua $B\left(0; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ và có PVT $\vec{n}_\beta = [\vec{n}, \vec{b}] = (-1, 2, -1)$

Nên pt(β): $-1(x - 0) + 2(y + \frac{1}{5}) - 1(z - \frac{3}{5}) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 1 = 0$$

* Vậy đường thẳng d vuông góc với (P), cắt cả d_1, d_2 là giao tuyến

của 2 mặt phẳng (α), (β) có phương trình là:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

48. Tìm tập hợp các điểm trong không gian cách đều ba điểm A(1, 1, 1), B(−1, 2, 0), C(2, −3, 2).

Giải

Gọi M(x, y, z) là điểm cách đều 3 điểm A, B, C

$$\Leftrightarrow MA = MB = MC \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x - 8y + 2z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Vậy: Tập hợp các điểm $M(x_1, y_1)$ thỏa yêu cầu bài tập là đường thẳng có phương trình $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

49. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm I(−1, 2, 3) và

1. Qua điểm J(0, 1, 2)
2. Song song với đường thẳng (d) có phương trình $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$
3. Vuông góc với hai đường thẳng

$$(d_1) \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2) \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

4. Vuông góc với đường thẳng (d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{1} \end{cases}$
5. Cắt hai đường thẳng $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{-5}$
6. Vuông góc với (d): $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt (d′) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$
7. Cắt trục tung và song song với mp(α): 2x + y = 0
8. Cắt Oz và cắt đường thẳng $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Giải

1. Ta có $\vec{IJ} = (1, -1, -1)$

Phương trình IJ là: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

2. (d) có $\begin{cases} \vec{n}_1 = (3, -2, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, 1, -3) \end{cases}$ suy ra (d) có VTCP $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (5, 10, 5)$

Đường thẳng (Δ) qua I, và // (d) nên (Δ) qua I và có VTCP $\vec{a}$

Do đó phương trình (Δ):

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{10} = \frac{z-3}{5} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

3. • (d_1) có $\begin{cases} \vec{n}_1 = (1, 1, 0) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow (d_1)$ có VTCP $\vec{a} = (1, -1, -2)$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua I, (α) $\perp d_1$ ((α) nhận $\vec{a}$ làm PVT)

Phương trình (α): $1(x + 1) - 1(y - 2) - 2(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 2z + 9 = 0$

• (d_2) có $\begin{cases} \vec{n}_1 = (2, 1, 0) \\ \vec{n}_2 = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow (d_2)$ có VTCP $\vec{b} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1, -2, 0)$

Gọi (β) là mp đi qua I, (β) $\perp d_2$ (β nhận $\vec{b}$ làm PVT)

Phương trình (β): $1(x + 1) - 2(y - 2) + 0(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$

Đường thẳng (Δ) qua I cùng vuông góc với 2 đường thẳng (d_1), (d_2) là giao tuyến của 2 mp(α), (β) có phương trình là:

$$(\Delta) \begin{cases} x - y - 2z + 9 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

4. • Ta có (d): $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ có VTCP $\vec{a} = (2, 4, 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua I và $\perp$ (d) thì phương trình (α):

$2(x + 1) + 4(y - 2) + 1(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha)$: $2x + 4y + z - 9 = 0$

• Phương trình tham số của (d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Thế phương trình tham số (d) vào phương trình mp(α) ta có

$$2(2t) + 4(4t) + (-3 + t) - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7}$$

Gọi $A = (d) \cap (\alpha) \Rightarrow A\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}, \frac{-17}{7}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-38}{7}\right)$, chọn $\overrightarrow{IA} \nearrow\nearrow (15, 2, -38)$

Do đó phương trình đường thẳng (Δ) qua I, $\perp$ d là phương trình đường thẳng IA:

$$\frac{x+1}{15} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-38}$$

5. (d) qua M(1, –2, 0), VTCP $\vec{a} = (3, 1, 1)$

(d') qua N(2, –1, –1) VTCP $\vec{b} = (2, 3, -5)$

- Viết phương trình mp(α) chứa (d) và I

  Ta có $\overrightarrow{MI} = (-2, 4, 3) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{MI}] = (-1, -11, 14)$

  mp(α) qua I và có PVT $\vec{n}$ nên pt(α) là

  $-1(x + 1) - 11(y - 2) + 14(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 11y - 14z + 21 = 0$
- Viết phương trình mp(β) chứa (d') và qua I

  Ta có $\overrightarrow{NI} = (-3, 3, 4) \Rightarrow \vec{n}' = [\vec{b}, \overrightarrow{NI}] = (27, 7, 15)$

  mp(β) qua I và có PVT $\vec{n}'$ nên pt (β) là

  $27(x + 1) + 7(y - 2) + 15(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 27x + 7y + 15z - 32 = 0$
- Đường thẳng (Δ) qua I, cắt cả d, d' chính là giao tuyến của 2 mp(α) và (β) nên có phương trình:

$$\begin{cases} x + 11y - 14z + 21 = 0 \\ 27x + 7y + 15z - 32 = 0 \end{cases}$$

6. (d): $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ có VTCP $\vec{a} = (3, 1, 1)$

Gọi mp(α) qua I, $\perp$ (d) $\Rightarrow$ pt(α): $3(x + 1) + 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0$

$\Rightarrow$ pt(α): $3x + y + z - 2 = 0$

Phương trình tham số của (d') $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$

Thế pt(d') vào pt(α) ta có: $3(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (-1 - 5t) - 2 = 0$

Suy ra $t = -\frac{1}{2}$

Gọi $A = d' \cap (\alpha) \Rightarrow A(1, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (2, -\frac{9}{2}, -\frac{3}{2})$

Phương trình đường thẳng Δ qua I, $\perp$ d cắt d' là:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z-3}{-3}$$

7. • Gọi (β) là mặt phẳng qua I và song song với mp(α): $2x + y = 0$

$\Rightarrow$ pt(β): $2x + y + D = 0$

Vì $I(-1, 2, 3) \in (\beta) \Rightarrow 2(-1) + 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = -1$

Vậy pt(β): $2x + y - 1 = 0$

- Phương trình Oy là $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của Oy với mp(β), tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(0, 1, 0)$$

Vậy $\overrightarrow{IA} = (1, -1, -3)$

Do đó phương trình (Δ) đường thẳng qua I thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-3}$$

8. Oz qua O có VTCP $\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OI} = (-1, 2, 3)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OI}, \vec{e}_3] = (-2, -1, 0)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Oz và qua I (α nhận $\vec{n}$ làm PVT)

$\Rightarrow$ pt(α): $2x + y = 0$

(d): $\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ có $\begin{bmatrix} \vec{n}_1 = (1, 0, -1) \\ \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1, -1, 1)$

Cho $z = 0$ thì (d) $\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ d đi qua A(3, 1, 0)

$\overrightarrow{AI} = (-4, 1, 3) \Rightarrow \vec{n}' = [\overrightarrow{AI}, \vec{a}] = (4, 7, 3)$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d, I $\Rightarrow$ pt(β):

$4(x + 1) + 7(y - 2) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y + 3z - 19 = 0$

Gọi (Δ) là đường thẳng qua I, cắt Oz nên $(\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$

$\Rightarrow$ pt(Δ) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 7y + 3z - 19 = 0 \end{cases}$

50. Cho hai đường thẳng:

$$(d_1) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2) \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) Chứng minh (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1), (d_2).

c) Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M(1, 1, 1) và cắt cả d_1, d_2

Giải

a) Cho $z = 0 \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in d_1$

d_1 có $\begin{bmatrix} \vec{n}_1 = (1, 1, 2) \\ \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{bmatrix} \Rightarrow d_1$ có VTCP $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (3, 1, -2)$

(d_2) qua $B(-2, 0, 2)$ có VTCP $\vec{b} = (2, -5, 1)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-9, -7, -17)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\,\overrightarrow{AB} = -17 \neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2)$ chéo nhau

b) Tính khoảng cách giữa d_1, d_2

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với $d_1 \Leftrightarrow mp(\alpha)$ đi qua $B(-2, 0, 2)$ có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-9, -7, -17)$

Phương trình $mp(\alpha)$: $-9(x + 2) - 7(y - 0) - 17(z - 2) = 0$

$$9x + 7y + 17z + 16 = 0$$

$$d(A, \alpha) = \frac{\left|9\left(-\frac{1}{2}\right) + 7\left(\frac{1}{2}\right) + 17(0) + 16\right|}{\sqrt{81 + 49 + 289}} = \frac{15}{\sqrt{419}}$$

Ta có $d(d_1, d_2) = d(A, \alpha) = \frac{15}{\sqrt{419}}$ (đvđd)

c) Gọi mp(P) là mặt phẳng chứa d_1 và $M \Leftrightarrow mp(P)$ nhận $\vec{a} = (3, 1, -2)$ và $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ làm cặp VTCP

$\Leftrightarrow$ mp(P) qua $M(1, 1, 1)$ có PVT là $[\vec{a}, \overrightarrow{AM}] = (4, -12, 0)$

$\Leftrightarrow$ phương trình mp(P): $4(x - 1) - 12(y - 1) + 0(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 6y + 4 = 0$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d_2 và $M \Leftrightarrow$ mặt phẳng (Q) nhận $\vec{b} = (2, -5, 1)$ và $\overrightarrow{BM} = (3, 1, -1)$ làm cặp VTCP

$\Rightarrow$ (Q) qua $M(1, 1, 1)$, PVT $[\vec{b}, \overrightarrow{AM}] = (4, 5, 17)$

$\Rightarrow$ Phương trình (Q): $4(x - 1) + 5(y - 1) + 17(z - 1) = 0$

pt(Q): $4x + 5y + 17z - 26 = 0$

Vậy đường thẳng Δ qua M, cắt cả d_1, d_2 là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P), (Q) có phương trình là $\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 4x + 5y + 17z - 26 = 0 \end{cases}$

51. Trong Oxy cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Delta_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (Δ_1), (Δ_2) chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng (Δ_1), (Δ_2).

Giải

a) Ta có (Δ_1) đi qua A(2, −1, 1), VTCP $\vec{a} = (2, 1, 0)$

A_2 đi qua B(1, 1, 3), VTCB $\vec{b} = (0, 1, -1)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, 2, 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2)$

Suy ra $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = 9 \neq 0$

Do đó (Δ_1), (Δ_2) chéo nhau

b) $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|[\vec{a}.\vec{b}]\right|} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$ (đvđd)

52. Cho hai đường thẳng (d) $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$; (d′) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

a) Chứng minh hai đường thẳng (d), (d′) chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d), (d′).

c) Hai đường thẳng A, B khác nhau và cố định trên (d) sao cho $AB = \sqrt{117}$. Khi C di động trên (d′), tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABC.

Giải

a) • Ta có (d) có $\begin{bmatrix} \vec{n}_1 = (2, 3, 0) \\ \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \end{bmatrix} \Rightarrow$ (d) có VTCP $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (3, -2, 2)$ và (d) đi qua M(2, 0, 4)

• (d′) qua N(1, 2, −1), VTCP $\vec{b} = (3, 1, 2)$

• Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-6, 0, 9)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1, 2, -5)$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{MN} = -39 \neq 0$. Vậy (d) và (d′) chéo nhau

b) Ta có $d(d, d') = \dfrac{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{a}.\vec{b}]\right|} = \sqrt{13}$ (đvđd)

c) Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CI$ (I là chân đường vuông góc hạ từ C đến đường thẳng (d))

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{117}.CI$

Mà $CI \geq d(d, d') = \sqrt{13}$

Nên ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{117}}{2}.CI \geq \frac{\sqrt{117}}{2}d(d, d') = \frac{\sqrt{117}}{2}.\sqrt{13} = \frac{39}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ CI là đoạn vuông góc chung của d, d'

Vậy $\min S_{\Delta ABC} = \frac{39}{2}$ (đvđd)

53. Cho hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$

(d_2): $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

a) Chứng minh (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Lập phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2).

Giải

a) Ta có (d_1) đi qua A(7, 3, 9) có VTCP $\vec{a} = (1, 2, -1)$

(d_2) đi qua B(3, 1, 1) có VTCP $\vec{b} = (-7, 2, 3)$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = (8, 4, 16)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -8)$

Nên $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = -168 \neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2)$ chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1, d_2

Cách 1: Ta có $\vec{v} = [\vec{a}, \vec{b}] = (8, 4, 16)$

- mp(α) qua $A \in d_1$, có cặp VTCP $\vec{a}$, $\vec{v}$ nên mp(α) có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{v}] = (9, -6, -3)$

  Pt(α): $9(x - 7) - 6(y - 3) - 3(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 6 = 0$

- mp(β) qua $B \in d_2$, có cặp VTCP $\vec{b}$, $\vec{v}$ nên mp(β) có PVT $\vec{n}' = [\vec{b}, \vec{v}] = (5, 34, -11)$

  Pt(β): $5(x - 3) + 34(y - 1) - 11(z - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow 5x + 34y - 11z - 38 = 0$

- Đường thẳng vuông góc chung của d_1, d_2 là giao tuyến của (α), (β) có phương trình là $\begin{cases} 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \\ 3x - 2y - z - 6 = 0 \end{cases}$

Cách 2: Cách này vừa tìm được phương trình vừa tìm được giao

điểm của nó với d_1, d_2

• Phương trình tham số $(d_1)\begin{cases}x = 7 + t\\ y = 3 + 2t\\ z = 9 - t\end{cases}$, $(d_2)\begin{cases}x = 3 - 7t'\\ y = 1 + 2t'\\ z = 1 + 3t'\end{cases}$

• Lấy $M \in d_1 \Rightarrow M(7 + t; 3 + 2t; 9 - t)$

Lấy $N \in d_2 \Rightarrow N(3 - 7t', 1 + 2t', 1 + 3t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-4 - 7t' - t; -z + 2t' - 2t; -8 + 3t' + t)$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN} \perp \vec{a}\\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1(-4 - 7t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) - 1(-8 + 3t' + t) = 0\\ -7(-4 - 7t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) + 3(-8 + 3t' + t) = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-6t' + 6t = 0\\ 6t + 62t' = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 0\\ t' = 0\end{cases}$

$\Rightarrow M(7, 3, 9), N(3, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-4, -2, -8)$

Phương trình (MN): $\dfrac{x - 7}{-4} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z - 9}{-8}$

54. Cho hai đường thẳng (d) $\begin{cases}x = 2 + t\\ y = 1 - t\\ z = 2 + 2t\end{cases}$ và (d') $\begin{cases}x + 2z - 2 = 0\\ y - 3 = 0\end{cases}$

a) Chứng minh (d), (d') chéo nhau. Hãy viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d) và (d').

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng cách đều (d), (d').

Giải

a) • Ta có (d) đi qua A(2, 1, 2), VTCP $\vec{a} = (1, -1, 2)$

(d') có $\begin{bmatrix}\vec{n}_1 = (1, 0, 2)\\ \vec{n}_2 = (0, 1, 0)\end{bmatrix} \Rightarrow$ (d') có VTCP $\vec{b} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-2, 0, 1)$

(d') đi qua B(2, 3, 0)

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1, -5; -2)$ và $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -2)$

Suy ra $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ (d), (d') chéo nhau.

• Phương trình đường vuông góc chung

Lấy $M \in (d) \Rightarrow M(2 + t, 1 - t, 2 + 2t)$

Phương trình tham số (d') $\begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$

$N \in (d') \Rightarrow N(2 - 2t', 3, t')$

$\vec{MN} = (-2t' - t, 2 + t, t' - 2t)$

MN vuông góc chung với d, d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \perp \vec{a} \\ \vec{MN} \perp \vec{b} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-2t' - t) - 2 - t + 2(t' - 2t) = 0 \\ -2(-2t' - t) + 0 + t' - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' - 6t - 2 = 0 \\ 5t' = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, $N(2, 3, 0)$, $\vec{MN} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

Nên phương trình đường thẳng (MN): $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-0}{2}$

b) Mặt phẳng (α) cách đều (d), (d') chính là mặt phẳng trung trực của đoạn MN $\Rightarrow$ mp(α) qua trung điểm $I\left(\dfrac{11}{6}, \dfrac{13}{6}, -\dfrac{2}{6}\right)$ và nhận $3\vec{MN}$ = (1, 5, 2) làm PVT

$\Rightarrow$ pt(α): $1\left(x - \dfrac{11}{6}\right) + 5\left(y - \dfrac{13}{6}\right) + 2\left(z + \dfrac{2}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5y + 2z - 12 = 0$

55. Cho A(3, 2, 1) và đường thẳng (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{1}$

a) Viết phương trình mp(P) đi qua A và chứa (d).

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, vuông góc với (d), cắt (d).

Giải

a) Ta có (d) đi qua B(0, 0, –3), VTCP $\vec{a}$ = (2, 4, 1) và $\vec{AB}$ = (–3, –2, –4)

mp(P) qua A, chứa (d) $\Leftrightarrow$ mp(P) qua A, cặp VTCP là $\vec{AB}$, $\vec{a}$

Do đó (P) có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{AB}] = (-14, 5, 8)$

Vậy phương trình mp(P): $-14(x - 3) + 5(y - 2) + 8(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 14x - 5y - 8z - 24 = 0$

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A(3, 2, 1) và $\perp$ d

$\Rightarrow$ (Q) có PVT $\vec{a} = (2, 4, 1)$

Do đó pt(Q): $2(x - 3) + 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + z - 15 = 0$

Đường thẳng (Δ) cần tìm chính là giao tuyến của hai mp(P), (Q) nên pt(Δ) là

$$\begin{cases} 14x - 5y - 8z - 24 = 0 \\ 2x + 4y + z - 15 = 0 \end{cases}$$

56. Xác định hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$(d) \begin{cases} x - y - z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

lên mp(P): $3x - 2y - z + 15 = 0$

Giải

Mặt phẳng (P) có PVT $\vec{n} = (3, -2, -1)$

Phương trình chùm mp(α) chứa (d)

$m(x - y - z - 5) + n(2x + 2y + z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (m + 2n)x + (2n - m)y + (-m + n)z - 5m - 4n = 0$

mp(α) có PVT $\vec{v} = (m + 2n, 2n - m, -m + n)$

Để $(\alpha) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 3(m + 2n) - 2(2n - m) + (m - n) = 0$

$\Leftrightarrow 6m + n = 0 \quad \Leftrightarrow n = -6m$

Cho $m = 1 \quad \Rightarrow n = -6$. Do đó pt($\alpha$) là $-11x - 13y - 5z + 19 = 0$

$\Leftrightarrow 11x + 13y + 5z + 19 = 0$

Do đó phương trình hình chiếu (d') của (d) lên mp(P) là:

$$\begin{cases} 11x + 13y + 5z + 19 = 0 \\ 3x - 2y - z + 15 = 0 \end{cases}$$

57. Trong không gian Oxyz cho A(2, 3, 0), B(0, $-\sqrt{2}$, 0) và đường thẳng (Δ) $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

Tìm điểm $M \in (\Delta)$ sao cho tổng độ dài MA + MB ngắn nhất.

Giải

Cách 1:

Cho $M \in (\Delta) \Rightarrow M(t, 0, 2 - t)$ (cho $y = 0$)

Ta có $MA = \sqrt{(t - 2)^2 + 9 + (2 - t)^2} = \sqrt{2(t - 2)^2 + 9}$

$$MB = \sqrt{t^2 + 2 + (2-t)^2} = \sqrt{2(t-1)^2 + 4}$$

$$MA + MB = \sqrt{2(t-2)^2 + 9} + \sqrt{2(t-1)^2 + 4}$$

Đặt $\vec{u} = (\sqrt{2}(t-2), 3)$; $\vec{v} = (\sqrt{2}(1-t), 2)$

$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-\sqrt{2}, 5)$

Ta có $MA + MB = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{27}$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}(t-2) = -3\sqrt{2}(t-1)$

$\Leftrightarrow 2t - 4 = -3t + 3 \Rightarrow t = \dfrac{7}{5}$

Vậy $\min(MA + MB) = \sqrt{27}$ và $M\left(\dfrac{7}{5}, 0, \dfrac{3}{5}\right)$

Cách 2:

- Cho $K \in (\Delta) \Leftrightarrow K(t, 0, 2-t)$, đường thẳng (Δ) có VTCP $\vec{a} = (-2, 0, 2)$, K là hình chiếu của B xuống đường thẳng (Δ)

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} . \vec{a} = 0$

  $\Rightarrow K(1, 0, 1)$ và $BK = 2$

- Cho $H \in (\Delta) \Leftrightarrow H(t, 0, 2-t)$

  H là hình chiếu của A xuống đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} . \vec{a} = 0$

  $\Rightarrow H(2, 0, 0)$ và $AH = 3$

- $M(x, y, z) \in (\Delta)$ thỏa mãn MA + MB ngắn nhất

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{-BK}{AH} . \overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3} . \overrightarrow{MH}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x}{2-x} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{0-y}{0-y} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1-z}{0-z} = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{3}{5}\right).$$

58. Trong Oxyz cho hai điểm A(1, 2, −1); B(7, −2, 3) và đường thẳng (d): $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$

a) Chứng minh: (d) và đường thẳng AB đồng phẳng.

b) Tìm điểm $I \in (d)$ sao cho IA + IB nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6, -4, 4)$ đường thẳng (d) có VTCP $a = (3, -2, 2)$

Ta dễ thấy $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\nearrow \overrightarrow{AB}$

Vậy d // AB hay d và AB đồng phẳng

b) Vì AB // d nên I ∈ d sao cho IA + IB nhỏ nhất ⇔ I cách đều A và B (bất đẳng thức Cauchy)

Ta có I ∈ d ⇒ I(−1 + 3t, 2 − 2t, 2 + 2t) nên

$IA^2 = (3t - 2)^2 + (-2t)^2 + (2t + 3)^2 = 21t^2 + 13$

$IB^2 = (3t - 8)^2 + (4 - 2t)^2 + (2t - 1)^2 = 21t^2 - 68t + 81$

Vì $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 21t^2 + 13 = 21t^2 - 68t + 81 \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow I(2, 0, 4)$.

59. Cho mp(P): 2x − y + z + 1 = 0 và hai điểm A(−1, 3, −2); B(−9, 4, 9). Tìm điểm K ∈ mp(P) sao cho KA + KB nhỏ nhất.

Giải

• Đặt $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$

Ta có $f(A) = -2 - 3 - 2 + 1 = -6 < 0$

$f(B) = -18 - 4 + 9 + 1 = -12 < 0$

Vậy f(A).f(B) > 0 ⇒ A, B nằm cùng một phía đối với mp(P)

• Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua mp(P)

Đường AA′ ⊥ (P) tại H nên có VTCP là $\vec{n}_{(P)} = (2, -1, 1)$

Phương trình tham số của AA′ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$

Thế vào phương trình (P): 2(−1 + 2t) − (3 − t) + (−2 + t) + 1 = 0

⇒ t = 1 ⇒ AA′ ∩ (P) = H(1, 2, −1)

Vì H là trung điểm của AA′ nên $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 3 \\ y_A = 2y_H - y_A = 1 \\ z_A = 2z_H - z_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(3, 1, 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (-12, 3, 9)$

⇒ Phương trình tham số (A′B) $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + t \quad (t \in R) \\ z = 3t \end{cases}$

Thế vào pt(P): 2(3 − 4t) − (1 + t) + 3t + 1 = 0 ⇔ t = 1

⇒ A′B ∩ (P) = K(−1, 2, 3)

Ta có KA + KB = KA′ + KB ≥ A′B (hằng số)

Nên KA′ + KB nhỏ nhất là A′B ⇔ K, A′, B thẳng hàng

⇔ A′B ∩ (P) = K(−1, 2, 3) là điểm cần tìm.

60. Cho mp(α): $2x - y + z + 1 = 0$, P(3, 1, 0), Q(−9, 4, 9). Tìm điểm $M \in mp(\alpha)$ sao cho $|MP - MQ|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

• Đặt $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$

Ta có $f(P) = -18 - 4 + 9 + 1 = -12 < 0$

$f(Q) = 6 - 1 + 0 + 1 = 6 > 0$

Vậy $f(P).f(Q) < 0 \Rightarrow P, Q$ ở hai bên mp(α)

• Gọi P′ là điểm đối xứng của P qua mp(α)

Vì $PP' \perp (\alpha)$ nên PP′ nhận $\vec{n}_{(\alpha)} = (2, -1, 1)$ làm PVT

Phương trình tham số của (PP′) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

Thế vào mp(α): $2(3 + 2t) - 1 + t + t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow PP' \cap (\alpha) = H(1, 2, -1)$

Vì H là trung điểm của PP′ nên ta có

$$\begin{cases} x_{P'} = 2x_H - x_P \\ x_{P'} = 2y_H - z_P \\ z_{P'} = 2z_H - z_P \end{cases} \Rightarrow P'(-1, 3, -2)$$

$\Rightarrow MP = MP'$ với $M \in (\alpha)$

• Ta có $|MP - MQ| = |MP' - MQ| \le P'Q$ (hằng số)

Vậy giá trị lớn nhất của $|MP' - MQ|$ bằng P′Q xảy ra

$\Leftrightarrow$ M, P′, Q thẳng hàng $\Leftrightarrow M = P'Q \cap (\alpha)$

• Phương trình tham số P′Q qua P′ nhận $\vec{P'Q} = (8, -1, -11)$ làm VTCP

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \end{cases}$$

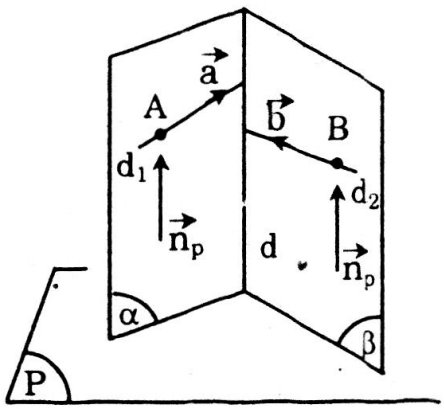
Thế vào pt(α): ta có $2(-1 + 8t) - 3 + t - 2 - 11t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Do đó $|MP - MQ|$ lớn nhất $\Leftrightarrow M(7, 2, -13) \in (\alpha)$.

61. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ và d_2 $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mp(P): $7x + y - 4z$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải



1. d_1 qua A(0, 1, −2), VTCP $\vec{a}$ = (2, −1, 1)

   d_2 qua B(−1, 1, 3), VTCP $\vec{b}$ = (2, 1, 0)

   Ta có $[\vec{a}, \vec{b}]$ = (−1, 2, 4), $\overrightarrow{AB}$ = (−1, 0, 5)

   Ta có $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB}$ = 1 + 0 + 20 ≠ 0

   nên d_1, d_2 chéo nhau

2. • Gọi (α) là mp chứa d_1 và ⊥ (P) thì (α) qua A và có cặp VTCP là $\vec{a}$ = (2, −1, 1) và $\vec{n}_{(P)}$ = (7, 1, −4)

   Nên (α) có PVT $\vec{n}_\alpha$ = (3, 15, 9) = 3(1, 5, 3)

   Pt(α): 1(x − 0) + 5(y − 1) + 3(z + 2) = 0 ⇔ x + 5y + 3z + 1 = 0

   • Gọi (β) là mp chứa d_2 và ⊥ (P) thì (β) qua B và có cặp VTCP là $\vec{b}$ = (2, 1, 0) và $\vec{n}_P$ = (7, 1, −4) nên (β) có PVT $\vec{k}_{(\beta)}$ = (−4, 8, −5)

   Pt(β): −4(x + 1) + 8(y − 1) − 5(z − 3) = 0

   ⇔ −4x + 8y − 5z + 3 = 0

   Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x + 5y + 3z + 1 = 0 \\ 4x - 8y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$

62. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hai điểm A(1, 4, 2), B(−1, 2, 4) và đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mp(OAB).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Giải

1. Ta có G(0, 2, 2), $\vec{a}$ = $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ = 6(2, −1, 1)

   Vậy d qua G(0, 2, 2), VTCP $\vec{a}$ = (2, −1, 1)

   Nên pt(d): $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$

2. Ta có (Δ) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$, M ∈ (Δ) ⇔ M(1 − t, −2 + t, 2t)

Ta có $P = MA^2 + MB^2 = t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2$

$+ (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2$

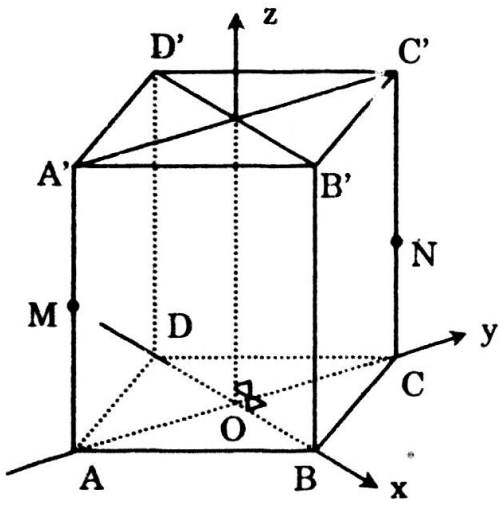
$= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$

Vậy $\min P = 28 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow M(-1, 0, 4)$.

63. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của AA', N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

Giải

Tam giác BDC đều cạnh a, AA' = h. Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ. Ta có:



$B(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $D(-\frac{a}{2}, 0, 0)$,

$C(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B'(\frac{a}{2}, 0, h)$

$D'(-\frac{a}{2}, 0, h)$, $C'(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, h)$,

$A'(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, h)$

$M(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$, $N(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$

• Chứng minh B', M, D, N đồng phẳng

Ta có $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2}\right)$

$\overrightarrow{DB'} = (a, 0, h)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{DB'}, \overrightarrow{DN}] = \left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{DB'}, \overrightarrow{DN}]\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{-ha\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ (đpcm)

• Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuông

Ta có $\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{-a\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2}\right) \Rightarrow B'M^2 = a^2 + \frac{h^2}{4}$

Tương tự $MD^2 = DN^2 = B'N^2 = a^2 + \frac{h^2}{4}$

$\Rightarrow$ $MD^2 = DN^2 = B'N^2 = B'M^2$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{h^2}{4}$

Từ (1) $\Rightarrow$ B'MDN là hình thoi nên B'MDN là hình vuông khi $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow h^2 = 2a^2 \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$.

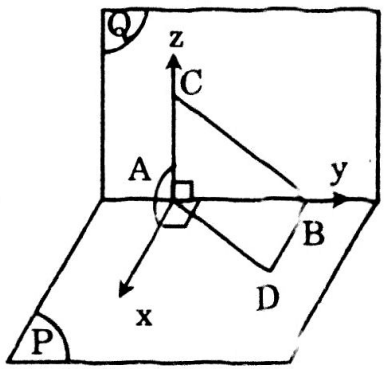
64. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mp(P) lấy điểm C, trong mp(Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ giác ABCD và khoảng cách từ A đến mp(BCD) theo a.

Giải

Chọn hệ trục Axyz như hình vẽ ta có A(0, 0, 0), B(0, a, 0), D(a a, 0), C(0, 0, a)

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD; I(x, y, z).

Ta có IA = IB = IC = ID = R



$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow R = IA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đvđd)

$\vec{n}_{(BCD)} = (0, a^2, a^2) = a^2(0, 1, 1)$

$\Rightarrow$ pt(BCD): $y + z - a = 0$

$\Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (đvđd)

65. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O, biết A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), $S(0, 0, 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mp(ABM) cắt đường thẳng SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải

a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo AC và BD

$\Rightarrow$ D(0, −1, 0) và C(−2, 0, 0), M(−1, 0, $\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{SA}$ = (−2, 0, $2\sqrt{2}$), $\overrightarrow{BM}$ = (−1, −1, $\sqrt{2}$)

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi SA và BM

$$\cos\varphi = \frac{|2 + 0 + 4|}{\sqrt{4 + 8}\sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 30^0$

Gọi (α) là mp chứa SA và // BM

$\Rightarrow$ pt(α): $\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$

Ta có d(SA, BM) = d(B, (α)) = $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (đvđd)

b) Phương trình mp(ABM): $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3z - 2\sqrt{2} = 0$

Phương trình tham số (SD) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t, \ t \in R \\ z = -2\sqrt{2}t \end{cases}$

N là giao điểm của SD với mp(ABM) $\Rightarrow$ N(0, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{BS}$ = (0, −1, $2\sqrt{2}$); $\overrightarrow{BA}$ = (2, −1, 0)

$\overrightarrow{BN}$ = (0, $-\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$); $\overrightarrow{BM}$ = (−1, −1, $\sqrt{2}$)

$[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}].\overrightarrow{BA}$ = ($2\sqrt{2}$, 0, 0) = $4\sqrt{2}$

$$V_{BSNA} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}].\overrightarrow{BA}\right| = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt)}$$

$[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}].\overrightarrow{BM}$ = $-2\sqrt{2}$

$$V_{BSMN} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}].\overrightarrow{BM}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{SABMN} = V_{SABN} + V_{SBMN} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \text{ (đvtt)}$$

66. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho ba điểm A(2, 0, 1), B(1, 0, 0), C(1, 1, 1) và mp(P): x + y + z − 2 = 0. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mp(P).

Giải

Gọi I(x, y, z) là tâm mặt cầu

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} IA^2 = IB^2 = IC^2 \\ I \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z - 4 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có tâm I(1, 0, 1), R = IB = 1

Nên phương trình mặt cầu:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

67. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng (d): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mp(P): $2x + y - 2z + 9 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mp(P) bằng 2.

b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mp(P) viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mp(P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d.

Giải

a) Phương trình tham số (d) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

$$I \in (d) \Leftrightarrow I(1 - t, -3 + 2t, 3 + t)$$

Ta có $d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2 - 2t - 3 + 2t - 6 - 2t + 9|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$

$$\Leftrightarrow |1 - t| = 3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -2 \\ t = 4 \end{bmatrix}$$ suy ra I(3, –7, 1) hoặc I(–3, 5, 7)

b) Thế phương trình tham số của d vào pt(P) ta được t = 1 thế t = 1 vào phương trình tham số của d ta có A(0, –1, 4) là giao điểm của d với mp(P)

VTCP của d là $\vec{a} = (-1, 2, 1)$

PVT của (P) là $\vec{n} = (2, 1, -2)$

Suy ra vectơ chỉ phương của Δ là $-\frac{1}{5}[\vec{a}, \vec{n}] = (1, 0, 1)$

Mặt khác Δ đi qua A(0, –1, 4) do đó phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -1 \quad (t' \in R). \\ z = 4 + t' \end{cases}$$

68. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0, –3, 0), B(4, 0, 0), C(0, 3, 0), B_1(4, 0, 4).

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1 viết phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mp(BCC_1B_1).

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1 viết phương trình mp(P) đi qua A, M và song song với BC_1; mp(P) cắt A_1C_1 tại N. Tính độ dài MN.

Giải

a) Hình chiếu của A_1 xuống mp(Oxy) là A $\Rightarrow$ A_1(0, –3, 4); hình chiếu C_1 xuống mp(Oxy) là C $\Rightarrow$ C_1(0, 3, 4)

Cặp VTCP của (BCC_1B_1) là $\overrightarrow{BC} = (-4, 3, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 4)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của (BCC_1B_1) là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (12, 16, 0) = 4(3, 4, 0)$$

Mặt khác mp(BCC_1B_1) qua B nên có phương trình

$$3(x - 4) + 4y + 0z = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0 \cdot$$

Bán kính mặt cầu là $R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|0 - 12 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{5}$

Suy ra phương trình mặt cầu là $x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$

b) M là trung điểm của $A_1B_1 \Rightarrow M(2, -\frac{3}{2}, 4)$

(P) có cặp VTCP $\overrightarrow{AM} = (2, \frac{3}{2}, 4)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-4, 3, 4) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = -\frac{1}{6}[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = -\frac{1}{6}(-6, -24, 12)$

$$\vec{n}_P = (1, 4, -2)$$

Mặt khác (P) đi qua A nên có phương trình

$$x + 4(y + 3) - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$$

A_1C_1 đi qua A_1 và có VTCP $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 6, 0)$ hay (0, 1, 0)

Nên có phương trình $(A_1C_1)\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \ (t \in R) \\ z = 4 \end{cases}$

Thế vào phương trình A_1C_1 vào pt(P) ta được $t = 2$

Thế $t = 2$ vào pt(A_1C_1) ta được $x = 0, y = -1, z = 4$

$\Rightarrow N(0, -1, 4)$

và $MN = \sqrt{(0-2)^2 + (-1+\frac{3}{2})^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ (đvđd)

63. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho A(0, 1, 2) và hai đường thẳng (d_1): $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$, (d_2): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

1. Viết phương trình mp(P) qua A, đồng thời song song với d_1, d_2.
2. Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Giải

1. Mặt phẳng (P) có một cặp VTCP là $\vec{a}_1 = (2, 1, -1)$ và $\vec{a}_2 = (1, -2, 1) \Rightarrow$ (P) có một PVT $\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (1, 3, 5)$

   Vậy phương trình mp(P) là $1(x - 0) + 3(y - 1) + 5(z - 2) = 0$

   Hay (P): $x + 3y + 5z - 13 = 0$

2. Gọi $M(2t', 1 + t', -1 - t') \in d_1$, $N(1 + t, -1 - 2t, 2 + t) \in d_2$

   Vậy $\overrightarrow{AM} = (2t', t, -3 - t')$, $\overrightarrow{AN} = (1 + t, -2 - 2t, t)$

   A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$

   $$\Leftrightarrow \frac{2t'}{1+t} = \frac{t'}{-2-2t} = \frac{-3-t'}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t'(1+t) + t'(1+t) = 0 \\ 2tt' + (1+t)(3+t') = 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \vee t = -1 \\ 2tt' + (1+t)(3+t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

   Do đó M(0, 1, −1), N(0, 1, 1).

70. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

(d_1): $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và (d_2): $\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mp(P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

Giải

a) d_1 đi qua M(1, −2, −1), VTCP $\vec{a} = (3, -1, 2)$

d_2 đi qua N(12, 0, 10) VTCP $\vec{b} = (3, -1, 2)$

Ta có $\vec{a} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{MN} = (11, 2, 11)$ không cùng phương với $\vec{a}$

Vậy $d_1 \,//\, d_2$

mp(P) đi qua M(1, −2, −1) có PVT $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{MN}] = (-15, -11, 17)$

Nên pt(P): $-15(x - 1) - 11(y + 2) + 17(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 15x + 11y - 17z - 10 = 0$

b) mp(Oxz) có phương trình $y = 0$

$d_1 \cap (Oxz) = A(-5, 0, -5)$

$d_2 \cap (Oxz) = B(12, 0, 10)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}] = (0, -10, 0)$

$S_{OAB} = \dfrac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}]| = 5$ (đvdt)

71. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình lăng trụ đứng ABC, $A_1B_1C_1$ có A(a, 0, 0), B(−a, 0, 0), C(0, 1, 0), B_1(−a, 0, b), a > 0, b > 0.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Giải

a) Ta có $C_1(0, 1, b)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa B_1C và song song với AC_1

$\overrightarrow{B_1C} = (a, 1, -b)$, $\overrightarrow{C_1A} = (a, -1, -b)$

Suy ra $[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1A}] = (-2b, 0, -2a)$

Suy ra pt(α): $-2b(x - 0) + 0(y - 1) - 2a(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow bx + az = 0$

Ta có $d = d(B_1C, AC_1) = d(A, (\alpha)) = \dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

b) Ta có $d = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{2ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \dfrac{a + b}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\text{Max } d = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$$

72. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(1, 2, 3) và hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; (d_2): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

1. Tìm tọa độ điểm A′ đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1.
2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

Giải

a) Phương trình tham số của (d_1) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in R)$, vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{a} = (2, -1, 1)$

Gọi H là trung điểm của AA′, vì A, A′ đối xứng qua d_1 nên $AA' \perp d_1$ và $H \in d_1$

$$H \in d_1 \Leftrightarrow H(2 + 2t, -2 - t, 3 + t)$$

Khi đó $\overrightarrow{AH} = (1 + 2t, -4 - t, t)$

Vì $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + (4 + t) + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó H(0, −1, 2)

H là trung điểm của AA′ nên $\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \\ z_A + z_{A'} = 2z_H \end{cases} \Leftrightarrow A'(-1, -4, 1)$

2. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với d_1 và qua A nên pt(P):

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Gọi B là giao điểm của d_2 với (P) thì tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1, -2)$

Do đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB

Vậy phương trình (Δ): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Trong không gian Oxyz cho A(2, 3 4). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Tọa độ hình chiếu của A lên trục Ox là $A_1(2, 0, 0)$.

B. Tọa độ hình chiếu của A lên trục Oy là $A_2(0, 3, 0)$.

C. Tọa độ hình chiếu của A lên mặt phẳng Oxy là O(4, 3, 0).

D. Các mệnh đề A, B, C sai.

2. Cho 3 vectơ $\vec{a} = (4, 2, 5)$; $\vec{b} = (3, 1, 3)$; $\vec{c} = (2, 0, 1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. 3 vectơ đồng phẳng.

B. 3 vectơ không đồng phẳng.

C. 3 vectơ cùng phương.

D. $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

3. Cho A(1, 0, 0); B(0, 0, 1); C(3, 1, 1). Để ABCD là hình bình hành thì:

A. D(1, 1, 2).

B. D(3, 1, 0).

C. D(−1, −1, −2).

D. D(−3, −1, 0)

4. Trong không gian Oxyz cho M(5, −3, 2). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Điểm đối xứng của M qua trục Ox là $M_1(5, 3, -2)$.

B. Điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oyz) là $M_2(-5, -3, 2)$.

C. Điểm đối xứng của M qua gốc tọa độ O là $M_3(-5, 3, 2)$.

D. Cả A, B, C đều đúng.

5. Trong không gian Oxyz cho hai điểm B(1, 2, −3) và C(7, 4, −2). Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ của E là:

A. $E(3, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$.

B. $E(\frac{8}{3}, 3, -\frac{8}{3})$.

C. $E(1, 3, \frac{1}{3}$.

D. $E(2, 2, , \frac{8}{3})$.

6. Cho A(1, 0, 0); B(−2, 4, 1). Điểm trên trục tung cách đều A, B là:

A. (0, 11, 0) B. (0, 6, 0) C. $(0, \frac{11}{6}, 0)$ D. (1, 2, 3)

7. Cho A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1); D(−2, 1, −1) thì thể tích tứ diện ABCD là:

A. $V = \frac{1}{2}$ đvtt B. $V = \frac{3}{2}$ đvtt C. V = 1 đvtt D. V = 3 đvtt

8. Cho A(1, 2, −1); B(2, −1, 3); C(−4, 7, 5) thì diện tích ΔABC là:

A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{55}$ đvdt B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{555}$ đvdt

C. $S = \sqrt{555}$ đvdt D. Các kết quả A, B, C đều sai.

9. Cho A(2, −1, 3); B(4, 0, 1); C(−10, 5, 3). Độ dài phân giác trong của góc B là:

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{7}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $2\sqrt{5}$

10. Trên mặt phẳng (Oxz) điểm cách đều 3 điểm M(1, 1, 1): N(−1, 1, 0); K(3, 1, −1) là:

A. $(-\frac{5}{6}, 0, \frac{7}{6})$ B. $(\frac{5}{6}, 0, \frac{7}{6})$

C. $(0, \frac{5}{6}, 0)$ D. $(0, \frac{7}{6}, 0)$

11. Kết luận nào sau đây là sai?

A. $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ B. $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{a}]$

C. $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$ D. $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Trong không gian Oxyz cho A(1, 0, −2); B(2, 1, −1) và C(1, −2, 2). Sử dụng giả thiết này để trả lời 3 câu hỏi sau:

12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Độ dài cạnh AB = $\sqrt{3}$

B. Độ dài cạnh BC = $2\sqrt{5}$

C. Độ dài cạnh AC = $2\sqrt{5}$

D. Cả 3 mệnh đề A, B, C đều đúng.

13. Tọa độ trung điểm I của BC là:

A. $I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $I\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

B. $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ D. $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

14. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là:

A. $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

C. $G\left(1, -2, \frac{1}{3}\right)$ D. $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A(2, 0, 0); B(0, 3, 0) và C(0, 0, 4). Sử dụng giả thiết này để trả lời 2 câu hỏi sau:

15. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

A. $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$ B. $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$

C. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{65}}$ D. $\sin A = \frac{1}{2}$

16. Diện tích tam giác ABC là:

A. $S = \frac{\sqrt{61}}{65}$ đvdt B. $S = \sqrt{20}$ đvdt

C. $S = \sqrt{13}$ đvdt D. $S = \sqrt{61}$ đvdt

17. Trong không gian Oxyz cho 4 vectơ $\vec{a} = (2, 3, 1)$; $\vec{b} = (5, 7, 0)$; $\vec{c} = (3, -2, 4)$ và $\vec{d} = (4, 12, -3)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ B. $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

C. $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ D. $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

18. Trong ΔABC, G là trọng tâm của tam giác, I là trung điểm của BA, C là điểm tùy ý. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ B. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ D. Câu A và C đúng.

Trong không gian Oxyz, xét hình hộp chữ nhật $OABC.O_1A_1B_1C_1$ với A(2, 0, 0); C(0, 3, 0); O_1(0, 0, 4) và nhận OA, OC, OO_1 làm kích thước. Sử dụng giả thiết nào để trả lời câu hỏi sau?

19. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. B(2, 3, 0) B. A_1(2, 0, 4)

C. B_1(2, 3, 4) D. A, B, C đều sai.

20. Cho ΔABC với A(1, 2, −1); B(2, −1, 3); C(−4, 7, 5). Độ dài đường phân giác trong của góc B là:

A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$ b. $\sqrt{47}$ C. $\frac{\sqrt{47}}{3}$ D. 3

Cho khối tứ diện ABCD với A(2, 3, 1); B(1, 1, –1); C(2, 1, 0) và D(0, –1, 2). Sử dụng giả thiết này để trả lời hai câu hỏi sau:

21. Chân đường cao H của tứ diện hạ từ đỉnh A có tọa độ là:

A. $\left(-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)$ C. $\left(3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

22. Độ dài đường cao AH là:

A. 7 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\sqrt{15}$

Cho tứ diện ABCD với A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1) và D(1, 1, 1). Sử dụng giả thiết này để trả lời hai câu:

23. Nếu M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD thì độ dài đoạn thẳng MN là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

24. Nếu M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD thì cosin $(\widehat{MN,BC})$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. Một kết quả khác.

25. Cho ΔABC với A(1, 0, 1); B(–2, 1, 3); C(1, 4, 0) thì trực tâm H của ΔABC là:

A. $H\left(\frac{8}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{15}{13}\right)$ B. $H\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{15}{13}\right)$

C. $H\left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{7}{13}\right)$ D. Một đáp số khác.

26. Trong không gian Oxyz cho A(4, 2, –1); B(3, 0, 2); C(x, –2, 1). Tìm x để ΔABC vuông tại A thì:

A. x = 17 B. x = 15 C. x = 18 D. x = 19

27. Cho A(3, 1, 0); B(–2, 4, 1). Điểm trên trục tung cách đều A

A. (0, 11, 0) B. (0, 0, 0) C. $(0, \frac{11}{6}, 0)$ D. A, B, C đều sai.

28. Trên mặt phẳng (Oxy). Điểm cách đều 3 điểm M(1, 1, 1,); N(–1, 1, 0); K(3, 1, –1) là:

A. $\left(-\frac{5}{6}, 0, \frac{7}{6}\right)$ B. $\left(\frac{5}{6}, 0, -\frac{7}{6}\right)$ C. $\left(0, \frac{5}{6}, 0\right)$ D. $\left(0, \frac{7}{6}, 0\right)$

29. Cho 3 điểm A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a, b, c > 0. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ không đồng phẳng.

B. ΔABC có 3 góc nhọn.

C. Diện tích $\Delta ABC = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

D. Thể tích tứ diện OABC bằng $\frac{abc}{6}$.

Trong không gian Oxyz cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1, 1, 0)$; $\vec{b} = (1, 1, 0)$; $\vec{c} = (1, 1, 1)$. ***Dùng giả thiết này để trả lời 4 câu hỏi dưới đây:***

30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ C. $\vec{a} \perp \vec{b}$ D. $\vec{b} \perp \vec{c}$

31. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = 1$ B. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

32. Cho hình bình hành OACB thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Diện tích của hình bình hành OACB bằng bao nhiêu?

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. 4

33. Cho hình hộp OACB.O'A'C'B' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$. Thể tích của hình hộp trên bằng bao nhiêu?

A. 2 B. 6 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Trong không gian Oxyz cho 4 điểm A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1); D(1, 1, 1). Sử dụng giả thiết này để trả lời 4 câu hỏi dưới đây.

34. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện.

B. Tam giác ABD là một tam giác đều.

C. AB ⊥ CD.

D. Tam giác BCD là tam giác vuông.

35. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tọa độ trung điểm của MN là:

A. $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ B. $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ C. $G\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ D. $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

36. Tứ diện ABCD có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{2}{3}$

37. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{4}$

38. Trong Oxyz cho A(3, 4, −1); B(2, 0, 3); C(−3, 5, 4). Diện tích ΔABC là:

A. 7 B. $\frac{\sqrt{1562}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{379}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{29}}{2}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM VETƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. D	2. A	3. B	4. B	5. A	6. C	7. A	8. C	9. D	10. B
11. B	12. D	13. B	14. B	15. D	16. D	17. A	18. D	19. D	20. A
21. C	22. C	23. D	24. D	25. A	26. C	27. C	28. B	29. C	30. D
	31. C	32. A	33. A	34. D	35. D	36. B	37. A	38. B	

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MẶT PHẲNG

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm A(0, −1, 4) nhận $\vec{a} = (3, 2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 0, 1)$ làm cặp VTCP là:

A. $x - 2y + 3z - 15 = 0$ B. $x - y - z + 11 = 0$

C. $x - 3y + 3z - 15 = 0$ C. $x + 3y + z - 15 = 0$

2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A(4, 9, 8); B(1, −3, 4); C(2, 5, −1) là:

A. $29x - 3y - 10z - 63 = 0$ B. $29x + 3y - 10z - 63 = 0$

C. $29x + 3y + 10z - 63 = 0$ D. $29x + y + 10z + 36 = 0$

3. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A(2, −1, 4); B(3, 2, 1) và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z - 5 = 0$ là:

A. $6x - 9y - 7z + 7 = 0$ B. $6x + 9y + 7z + 7 = 0$

C. $6x + 9y - 7z + 7 = 0$ D. $6x + 9y + z + 1 = 0$

4. Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng: $x - 3y + 2z - 1 = 0$ và $2x + y - 3z + 1 = 0$ và song song Ox là:

A. $x - 3 = 0$ B. $7y - 7z + 1 = 0$

C. $7x + 7y - 1 = 0$ D. $7x + y + 1 = 0$

5. Cho A(2, 3, –4) và B(4, –1, 0) thì phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $x + 6y + 4z + 25 = 0$ B. $x - 6y - 4z - 25 = 0$

C. $x + 6y - 4z + 25 = 0$ D. $x - 2y + 2z + 3 = 0$

6. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(3, 3, 3) và song song với mặt phẳng: $2x - 3y + z - 6 = 0$ là:

A. $2x - 3y + z - 6 = 0$ B. $x + 2y + z + 6 = 0$

C. $2x - 3y + z - 9 = 0$ D. $x - y + z - 12 = 0$

7. Phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm A(2, –1); B(–2, 1, –1) và vuông góc với mặt phẳng (β): $3x + 2y - z + 7 = 0$ là:

A. $3x - y + 7z + 16 = 0$ B. $3x - y + 7z - 16 = 0$

C. $3x + y - 7z + 16 = 0$ D. $3x + y - 7z - 16 = 0$

8. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A(2, 1, –1) và vuông góc với đường thẳng xác định bởi B(–1, 0, –4); C(0, –2, –1) là

A. $5x - 8y - 6z + 29 = 0$ B. $x + 2y + z + 6 = 0$

C. $5x + 8y - 6z - 39 = 0$ D. $x + 2y + 4z + 1 = 0$

9. Trong không gian Oxyz cho A(2, 6, –3). Xét các phát biểu sau:

(I): mặt phẳng (α) qua A và // với mặt phẳng (Oxy) là: $z + 3 = 0$

(II): mặt phẳng (β) qua A và // mặt phẳng (yOz) là: $x - 2 = 0$

(III): mặt phẳng (γ) qua A và // mặt phẳng (zOx) là: $y - 6 = 0$

Phát biểu nào sai?

A. (I) B. (II) C. (III) D. không có

10. Phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + y + z - 9 = 0$ và $x - 2y + 3z + 1 = 0$ và qua I(–1, 2, 3) là:

A. $2x - y - 4z - 8 = 0$ B. $2x - y + 4z - 8 = 0$

C. $2x - y - 4z + 8 = 0$ D. $x - 2y + 4z - 8 = 0$

11. Phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x - 2z = 0$ và $3x - 2y + z - 3 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng: $x - 2y + z + 5 = 0$ là:

A. $2x + 3y - 8z + 1 = 0$ B. $2x - y + 4z - 8 = 0$

C. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$ D. $11x + 2y - 15z + 5 = 0$

12. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + 3y + 5z - 4 = 0$ và $x - y - 2z + 7 = 0$ và song song trục Oy là:

A. $4x + y - z + 17 = 0$ B. $4x + z + 17 = 0$

C. $4x - z + 17 = 0$ D. $z + 5 = 0$

13. Phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm A(1, 2, 1); B(0, 1, 2) và vuông góc với mặt phẳng: $x - 2y + z + 3 = 0$ là:

A. $x + y + z - 6 = 0$ B. $x + 2y + 3z - 8 = 0$

C. $x - y + z + 6 = 0$ D. $x + 2y + 8z + 8 = 0$

14. Nếu hai mặt phẳng: $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ly - 3z + 1 = 0$ song song với nhau thì:

A. $ml = 15$ B. $ml = 1$ C. $ml = 5$ D. $ml = -3$

15. Nếu hai mặt phẳng: $7x - 2y - 9 = 0$ và $mx + y - 3z - 1 = 0$ vuông góc với nhau, thì m là nghiệm của phương trình:

A. $m^2 - 6m + 5 = 0$ B. $m^2 + m - 2 = 0$

C. $m^2 - 9m + 12 = 0$ D. $7m - 2 = 0$

16. Phương trình mặt phẳng chứa gốc tọa độ O và vuông góc với 2 mặt phẳng: $x - y + z - 7 = 0$ và $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ là:

A. $2x + 3y + z = 0$ B. $x + 2y - 7z + 1 = 0$

C. $4x - 2y + z + 5 = 0$ D. $x + 2y + z - 6 = 0$

17. Điểm M trên trục Oy cách đều 2 mặt phẳng: $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z - 5 = 0$ là:

A. M(0, 1, 2) B. M(0, −3, 0)

C. M(−3, 1, 2) D. M(1, 2, 4)

18. Để mặt phẳng: $5x + ny + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng có phương trình: $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$ thì:

A. $m = -11, n = 5$ B. $m = 11, n = 5$

C. $m = -1\ n = -2$ D. $m = 1, n = 2$

19. Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4) thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. Phương trình mặt phẳng qua A(1, 1, 0) và vuông góc với mặt phẳng: $x + 2y - 3 = 0$ và $4x - 5z + 6 = 0$ là:

A. $10x - 5y + 8z - 5 = 0$ B. $10x + 5y - 8z + 5 = 0$

C. $10x + 5y + 8z + 5 = 0$ D. Một kết quả khác.

21. Phương trình mặt phẳng đi qua M(3, −2, 1) và vuông góc với đường thẳng (d): $\begin{cases} 3x + 2y - 2z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$ là:

A. $4x - 13y - 7z - 31 = 0$ B. $4x - 13y - 7z + 31 = 0$

C. $4x + 13y + z - 31 = 0$ D. Một kết quả khác.

22. Góc giữa 2 mặt phẳng (α): $8x - 4y - 8z + 1 = 0$ và mặt phẳng (β): $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$

23. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và A(1, –2, 4) và vuông góc với mặt phẳng (Q): $3x - y + 2z + 5 = 0$, thế thì (P) có:

A. một PVT $\vec{n} = (0, 2, 1)$.

B. một VTCP là $\vec{a} = (5, 3, -6)$.

C. (P) $\perp$ (MP): $3x + 2y - 4z - 4 = 0$.

D. A, B, C đều đúng.

24. Cho A(0, 2, –2); B(3, 2, 1) và C(–3, –1, 5). Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $3x + by + cz + d = 0$ với $b + c + d$ bằng:

A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

25. Cho A(0, 2, –2); B(3, 2, 1) và C(–3, –1, 5). Phương trình mặt phẳng qua OA và song song với BC:

A. $x + y + 2z = 0$ B. $5x + 7y + 6z = 0$

C. $2x + y + 3z = 0$ D. $x + 6y + z = 0$

26. Phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng:

$x + y - 4 = 0$ và $2x - z - 6 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng:

$2x - 3y - 2z = 0$ có dạng: $ax + by + z + d = 0$ thế thì $a + b + d$ bằng:

A. 10 B. –8 C. 16 D. –16

27. Phương trình mặt phẳng, đối xứng của mặt phẳng:

$2x - 3y + 5z - 4 = 0$ qua mặt phẳng (Oxy) là:

A. $2x - 3y - 5z - 4 = 0$ B. $2x - 3y + 5z - 4 = 0$

C. $2x - 3y + 5z + 4 = 0$ D. $2x + 3y - 5z - 4 = 0$

28. Phương trình mặt phẳng, đối xứng của mặt phẳng:

$2x - 3y + 5z - 7 = 0$ qua Ox là:

A. $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ B. $2x - 7y + 5z + 7 = 0$

C. $2x + y - 5z - 7 = 0$ D. $2x + y + 5z + 7 = 0$

29. Phương trình mặt phẳng, đối xứng của mặt phẳng:

$4x - 3y - 7z + 3 = 0$ qua điểm I(1, –1, 2) là:

A. $4x - 3y - 7z + 7 = 0$ B. $4x - 3y - 7z + 9 = 0$

C. $4x + 3y + 7z + 7 = 0$ D. $4x - 3y - 7z + 8 = 0$

30. Có bao nhiêu cặp giá trị m, n sao cho 2 mặt phẳng sau đây song song với nhau:

(α): $mx + y(n-2)z + m + 2 = 0$ và

(β): $4x + my + (m-1)z + 2n + 3 = 0$

A. 8 B. 1 C. 2 D. 3

31. Ba mặt phẳng: $mx - ny + 4z - 4 = 0$; $2x - y + z = 0$ và $x + 2y + 2 = 0$ có chung giao tuyến thì $m + n$ bằng:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 5

32. Cho mặt phẳng (α): $(m-1)x + (m+n)y + (2m-n+1)z - 2 - m = 0$ khi m, n thay đổi, $mp(\alpha)$ đi qua 1 điểm cố định A(a, b, c) với $a + b + c$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. 5 D. -3

33. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng: $2x - y + z - 5 = 0$ và $x - 3z + 2 = 0$ và song song với Ox, mặt phẳng (P) cắt Oy tại một điểm có tung độ là:

A. 6 B. -9 C. 11 D. 7

34. Phương trình mặt phẳng qua đường thẳng: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$ và song song với trục Ox là:

A. $3y + z + 1 = 0$ B. $x - y + 4z + 2 = 0$

C. $y + 2z + 3 = 0$ D: $2x + y + z + 1 = 0$

35. Cho 2 mặt phẳng (α): $2x - my + z - 6 + m = 0$ và (β): $2x - 4y + z - 2 = 0$ song song thì m:

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 4$ D. m tùy ý

36. Điểm trên trục tung cách đều 2 mặt phẳng: $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z - 5 = 0$ là:

A. M(0, 3, 0) B. M(0, -3, 0)

C. A, B đều đúng D. A, B đều sai.

37. Phương trình mặt phẳng đi qua A(1, 1, 0) và vuông góc với 2 mặt phẳng: $x + 2y - 3 = 0$ và $4x - 5z + 6 = 0$ là:

A. $10x - 5y + 8z - 5 = 0$ B. $10x + 5y - 8z + 5 = 0$

C. $10x + 5y + 8z + 5 = 0$ D. A, B, C đều sai.

38. Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4). Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $3\sqrt{3}$ B. $-3\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. A, B, C đều sai.

39. Cho đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$. Phương trình mặt phẳng chứa (Δ) và song song với Ox là:

A. $y + 2z + 3 = 0$ B. $x - y - 4 = 0$

C. $x + 2z - 1 = 0$ D. $x - y + 3 = 0$

40. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{x-2}{1}$ và qua gốc O.

A. $3x + y - 3z = 0$ B. $3x + y + 3z = 0$

C. $3x - y - 3z = 0$ D. $x + y + 3z = 0$

41. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa (d): $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$ và song song với (d'): $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Ta được $ax + by + cz + 1 = 0$ thế thì $a + b + c$ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

42. Phương trình mặt phẳng (α) chứa (d):

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ và vuông góc với mặt phẳng (α) : $2x - y - 4z = 0$ là:

A. $7x + y + z + 1 = 0$ B. $7x + 6y - 2z - 12 = 0$

C. $7x + 6y + 2z + 7 = 0$ D. $7x + 6y + 2z - 24 = 0$

43. Khoảng cách từ M(1, 4, –7) đến mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 9 = 0$ là:

A. $\frac{17}{2}$ B. 5 C. 7 D. 12

44. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng: (α) $x + y - z + 5 = 0$

(β) $2x + 2y - 2z + 3 = 0$ là:

A. $\frac{11}{6}$ B. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{6}$

Cho điểm M(1, 3, 5) và đường thẳng (Δ): $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 12z - 3 = 0 \end{cases}$ ***. Sử dụng giả thiết này để trả lời 3 câu hỏi sau:***

45. Phương trình mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với (Δ) là:

A. $13x - 2y - 5z + 75 = 0$ B. $x + 2y - z + 70 = 0$

C. $x - 2y + 7 = 0$ D. $x - 2y + z + 1 = 0$

46. Tọa độ giao điểm H của (Δ) và mặt phẳng (α) là:

A. H(5, –2, 1)

B. $H(-5, 2, \frac{1}{13})$

C. $H\left(\frac{86}{39}, \frac{47}{39}, \frac{164}{39}\right)$

D. $H\left(\frac{8}{9}, \frac{37}{39}, \frac{4}{14}\right)$

47. Tọa độ hình chiếu của M(1, 2, 0) lên mặt phẳng (α): $2x + y + z + 3 = 0$ là:

A. (3, 4, 1)

B. (–3, –4, –1)

C. (5, 8, 6)

D. $\left(\frac{8}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{6}\right)$

48. Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$ lên mặt phẳng (α): $x + 2y + 3z + 4 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 3x - y + z - 7 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 5x - 4y + z - 19 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ 4x - 5y - z + 9 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 5x - y + z - 19 = 0 \end{cases}$

49. Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ lên mặt phẳng (α): $3x - 2y - x + 15 = 0$ là:

A. $\begin{cases} 3x - 2y - x - 15 = 0 \\ 9x + 15y + 5z - 21 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x - 2y - z - 15 = 0 \\ x + y + 5z - 21 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 5x + y + 5z - 12 = 0 \\ x + y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

50. Góc nhị diện tạo bởi mặt phẳng (α): $\sqrt{2}\ x + y + z - 5 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) bằng:

A. 45^0 B. 60^0 C. 30^0 D. 75^0

51. Phương trình của mặt phẳng (α) đi qua M(2, 5, 7) và nhận $\vec{a} = (1, -2, 3)$ và $\vec{b} = (3, 0, 5)$ làm cặp VTCP là:

A. $5x - 2y - 3z - 21 = 0$

B. $-10x + 4y + 6z - 21 = 0$

C. $10x - 4y - 6z + 21 = 0$

D. $5x - 2y - 3z + 21 = 0$

52. Cho 3 điểm A(0, 2, 1); B(3, 0, 1); C(1, 0, 0). Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $2x - 3y - 4z + 2 = 0$

B. $2x + 3y - 4z - 2 = 0$

C. $4x + 6y - 8z + 2 = 0$

D. $2x - 3y - 4z + 1 = 0$

53. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại 3 điểm M(8, 0, 0); N(0, −2, 0); P(0, 0, 4). Phương trình của (α) là:

A. $\frac{x}{-8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$

C. $x - 4y + 2z = 0$ D. $x - 4y + 2z - 8 = 0$

54. Cho ba mặt phẳng (α): $x + y + 2z + 1 = 0$; (β): $x + y - z + 2 = 0$; (γ): $x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $(\alpha) \perp (\beta)$ B. $(\gamma) \perp (\beta)$ C. $(\alpha) // (\gamma)$ D. $(\alpha) \perp (\gamma)$

55. Mặt phẳng (Q) đi qua 2 điểm A(4, −1, 1), B(3, 1, −1) và song song với trục Ox có phương trình là:

A. $x + 2y = 0$ B. $y + z = 0$

C. $x + 2y + z = 0$ D. $x + 3z = 0$

56. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A(1, 2, 3) và song song với mặt phẳng (P): $x - 4y + z + 12 = 0$, có phương trình là:

A. $x - 4y + z + 4 = 0$ B. $x - 4y + z - 4 = 0$

C. $x - 4y + z + 7 = 0$ D. $x = 4y + z - 5 = 0$

57. Trong không gian Oxyz cho điểm A(2, 6, −3) và các mặt phẳng (P): $x - 2 = 0$; (Q): $y - 6 = 0$; (R) $z + 3 = 0$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai.

A. (P) qua A B. (Q) // (Oxy)

C. R // Oz D. (P) $\perp$ (Q)

58. Phương trình của mặt phẳng chứa trục Oy và qua điểm M(1, 4, −3) là:

A. $3x + 5y = 0$ B. $3x + z = 0$

C. $2x + 3z = 0$ D. $3x - 7z = 0$

59. Cho mặt phẳng (α): $2y + z = 0$ trong các mệnh đề sau. Tìm mệnh đề đúng.

A. (α) chứa Ox B. (α) // Oy

C. (α) // (Oyz) D. (α) // Ox

60. Cho ba điểm A(2, 1, −1); B(−1, 0, 4); C(0, −2, −1). Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC là:

A. $2x - y + 5z - 5 = 0$ B. $x - 3y + 5z + 1 = 0$

C. $x - 2y - 5z - 5 = 0$ D. $2x + y + z + 7 = 0$

61. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M(3, −1, −5) và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và (R): $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ là:

A. $2x + y - 2f - 15 = 0$ B. $2x + y - 2z + 15 = 0$

C. $x + y + z - 7 = 0$ D. $x + 2y + 3z + 2 = 0$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM MẶT PHẲNG

1. C	2. C	3. A	4. B	5. D	6. A	7. A	8. C	9. D	10. B
11. C	12. C	13. B	14. A	15. B	16. A	17. B	18. A	19. A	20. C
21. A	22. B	23. D	24. B	25. D	26. C	27. A	28. C	29. D	30. B
31. D	32. A	33. B	34. C	35. C	36. C	37. C	38. C	39. A	40. C
41. A	42. D	43. C	44. B	45. A	46. C	47. D	48. B	49. A	50. B
51. A	52. B	53. D	54. c	55. B	56. A	57. C	58. B	59. A	60. C
61. A									

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình đường thẳng đi qua (1, 2, –1) và song song với đường thẳng: $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$ là:

A. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{x-1}{-3}$

B. $\begin{cases} 7x + 4y - 15 = 0 \\ 3y - 7z - 13 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$

D. Các kết quả đều đúng

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm A(1, 4, –7) và vuông góc với mặt phẳng: x + 2x – 2z – 3 = 0 là:

A. $x - 1 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{x-7}{2}$

B. x + 4 = y – 3 = z + 1

C. $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-4}{1}$

D. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+7}{3}$

3. Phương trình đường thẳng qua A(3, –1, –4) cắt trục Oy và song song với mặt phẳng: 2x + y = 0 là:

A. $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y + x - 2 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

4. Phương trình đường thẳng đi qua (2, –1, 1) và vuông góc với 2 đường thẳng: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ là:

A. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

C. A, B đều sai

D. A, B đều đúng.

5. Phương trình đường thẳng qua A(0, 1, 1), vuông góc với đường thẳng: $\begin{cases} x + 4y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ là:

A. $\begin{cases} 4x + y - 4z - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 4x - 4y - z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - y - 4z - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

6. Phương trình chính tắc của đường thẳng qua A(2, 0, –3) và nhận $\vec{a} = (2, -3, 5)$ làm VTCP là:

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$

B. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{x+3}{5}$

C. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5}$

D. A, B, C đều sai.

7. Phương trình tham số của đường thẳng (d) qua A(–2, 6, –3) và theo thứ tự song song với các trục Ox, Oy và Oz. Các kết quả sau, kết quả nào sai?

A. // Ox là $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 6 \\ z = -3 \end{cases}$

B. song song Oy là $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 + t \\ z = -3 \end{cases}$

C. // Oz là $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \\ z = -3 + t \end{cases}$

D. song song Ox là $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 6 - t \\ z = -3 \end{cases}$

8. Đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{a} = (7, 1, -5)$

B. $\vec{a} = (7, -1, -5)$

C. $\vec{a} = (5, 7, -1)$

D. $\vec{a} = (1, -5, 7)$

9. Phương trình tham số của đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$ là:

A. $\begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{7}{4}t \\ z = 0 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 7t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 5 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

10. Để tìm phương trình đường thẳng qua điểm A(2, 3, –5) và song song với đường thẳng (Δ): $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0\ (1) \\ x + 3y - 2z + 3 = 0\ (2) \end{cases}$. Một học sinh lý như sau:

(I) Tìm VTCP của (Δ) có thể.

(II) Chọn 2 điểm A, B nào đó của (Δ), ta có VTCP $\overrightarrow{AB}$ của (Δ).

(III) hoặc cho x = t thế vào (1), (2) của Δ rồi tính y, z theo t ta có phương trình tham số của Δ.

(IV) hoặc tìm PVT của 2 mặt phẳng $\vec{n}_1 = (3, -1, 2)$; $\vec{n}_2 = (1, 3, -2)$. Rồi tính VTCP $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

Lập luận như trên sai từ bước nào?

A. sai ở (II)

B. sai ở (III)

C. sai ở (IV)

D. Các lập luận trên đều đúng.

11. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A(–3, 4, 1) và B(2, 0, 5) là:

A. $\begin{cases} x = 5t \\ y = 4 - 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} 4x + y - 8 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ y + z + 5 = 0 \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

12. Cho đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 3z - 9 = 0 \end{cases}$. Phương trình nào dưới đây không là phương trình tham số của (Δ)?

A. $\begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = -3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 6t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 9 - 6t \\ y = 6 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

Cho ΔABC với A(1, 2, 1); B(3, 1, 0); C(3, −1, 2). Sử dụng giả thiết này để trả lời ba câu hỏi sau:

13. Phương trình tổng quát của đường thẳng (BC) là:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ z = 6 + y \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 1 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

14. Phương trình chính tắc của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{3}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{3}$

15. Một vectơ chỉ phương của đường cao AH của ΔABC là:

A. $\vec{a} = (3, 2, 1)$ B. $\vec{a} = (2, 1, 1)$

C. $\vec{a} = (-3, 2, -1)$ D. $\vec{a} = (2, -1, -1)$

16. Cho hai điểm trên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$ cách gốc tọa độ O một khoảng là $\sqrt{3}$ thì tổng hai tung độ của chúng là:

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

17. Đường thẳng (Δ) qua A(1, 2, 1) cắt Ox và (d): $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$ thì tọa độ giao điểm của Δ và Ox là:

A. (−2, 0, 0) B. (3, 0, 0)

C. (−3, 0, 0) D. (2, 0, 0)

18. Cho 2 điểm M và N lần lượt di động trên đường thẳng (d): $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{1}$ và (d'): $\frac{x}{4} = \frac{y-6}{0} = \frac{z+3}{-2}$ thì trung điểm I của MN di động trên mặt phẳng (α): x + by + cz + d = 0 với b + c + d bằng:

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

19. Gọi (Δ) là đường thẳng qua M(4, 2, 1) và song song với 2 mặt phẳng (α): $2x - y - 4z = 0$ và (β): $x + 3y - 7 = 0$ thế thì (Δ) có:

A. một VTCP là (12, −4, 7)

B. (Δ) qua điểm (16, −2, 8)

C. (Δ) cắt trục Oz

D. chỉ có 2 câu đúng trong 3 câu hỏi.

20. Phương trình đường thẳng qua A(2, −1, 1) và vuông góc với 2 đường thẳng: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ là:

A. $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

C. A, B đều sai

D. A, B đều đúng.

21. Phương trình mặt phẳng của A(3, −2, 1) và vuông góc với đường thẳng: $\begin{cases} 3x + 2y - 2z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$ là:

A. $4x + 13y + 7z + 31 = 0$

B. $4x - 13y - 7z + 31 = 0$

C. $4x - 13y - 7z - 31 = 0$

D. Các kết quả trên đều sai

22. Khoảng cách từ M(1, −1, 1) đến đường thẳng:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$ là:

A. $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

B. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

C. 0

D. $8\sqrt{2}$

23. Cosin của góc tạo bởi 2 đường thẳng:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} + \frac{z+2}{4}$$ và $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ là:

A. $\dfrac{3}{\sqrt{77}.\sqrt{26}}$

B. $\dfrac{-3}{\sqrt{77}.\sqrt{26}}$

C. A, B đều đúng

D. A, B đều sai.

24. Phương trình đường thẳng đi qua (0, 1, −1) vuông góc và cắt đường thẳng $\begin{cases} x + 4y - 1 = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$ là

A. $\begin{cases} 4x + y - 4z - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 4x - y - 4z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - y - 4z - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

25. Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d): $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng (α): $3x + 5y - z - 2 = 0$ thì:

A. (d) cắt (α)

B. (d) song song (α)

C. (d) song song hoặc $\subset$ (α)

D. (d) nằm trên (α)

26. Khi vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) vuông góc với pháp vectơ của mặt phẳng (α) thì:

A. (d) song song (α)

B. (d) nằm trong (α)

C. (d) song song hoặc nằm trong (α)

D. Các kết quả A, B, C đều sai.

27. Hình chiếu vuông góc của điểm A(1, −1, 2) lên mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 12 = 0$ là:

A. H(29, 20, −20)

B. $H(-\frac{29}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{20}{9})$

C. $H(\frac{29}{9}, \frac{-10}{9}, \frac{20}{9})$

D. A, B, C đều sai.

38. Điểm đối xứng của điểm A(2, −3, 1) qua mặt phẳng (α): $x + 3y - z + 2 = 0$ là:

A. A'(34, 3, −1)

B. $A'(\frac{34}{11}, \frac{3}{11}, \frac{-1}{11})$

C. $A'(-\frac{34}{11}, \frac{-3}{11}, \frac{1}{11})$

D. A, B, C đều sai.

29. Điểm đối xứng của điểm M(2, −1, 1) qua đường thẳng: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ là:

A. $\frac{x-5}{9} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z-1}{-22}$

B. $\begin{cases} 10x + 9y - 48 = 0 \\ 22y - 10z + 34 = 0 \end{cases}$

C. A, B đều sai D. A, B đều đúng.

30. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} 2kx + y - z + 1 = 0 \\ x - ky + z - 1 = 0 \end{cases}$. Để (d) nằm trên mặt phẳng (Oxy) thì:

A. $k \neq 1$ B. $k = 1$ C. $k \neq -1$ D. $k = -1$

31. Cho 2 điểm M(1, 1, 1); N(3, –2, 5) và mặt phẳng (α): $x + y - 2z - 6 = 0$. Hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng (α) là:

A. $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$ B. $\begin{cases} 3x + 7y - 20 = 0 \\ 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

C. A, B đều sai D. A, B đều đúng

32. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$ lên mặt phẳng (α) + $x + 2y + 3z + 4 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 5x - 4y + z - 19 = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$

C. $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{1}$ D. A, B, C đều sai.

33. Hình chiếu song song của đường thẳng (d): $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$ theo phương (Δ): $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{3}$ lên mặt phẳng (α): $3x - 2y - 1 = 0$ là:

A. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3}{1}$ B. $\begin{cases} 7x - 5y - 3z - 7 = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

C. A, B đều sai D. A, B, C đều đúng.

34. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d): $\begin{cases} x - 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ y - 2\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \end{cases}$ lên mặt phẳng (Oxy) là:

A. $\dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{y - \dfrac{1}{\cos\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{z}{0}$ B. $\begin{cases} x.\cos\alpha - y.\sin\alpha + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

C. A, B đều sai D. A, B, C đều đúng.

35. Cho hai đường thẳng: (d) $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ và (d') $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ z - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

A. (d) cắt (d')

B. (d) // (d')

C. (d) ≡ (d')

D. (d) chéo với (d')

36. Cho hai đường thẳng: (d) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ và (d') $\begin{cases} y + 2z - 8 = 0 \\ x + z - 8 = 0 \end{cases}$

A. (d) cắt (d') B. (d) // (d') C. (d) ≡ (d') D. (d) chéo với (d')

37. Cho hai đường thẳng: (d) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và

(d') $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{x+2}{1}$

A. (d) cắt (d')

B. (d) // (d')

C. (d) ≡ (d')

D. (d) chéo với (d')

38. Để tìm khoảng cách từ điểm A(1, 1, 1) đến đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = -t - \frac{1}{3} \\ y = -t + \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases}$. Một học sinh lập luận như sau:

(I) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (Δ) thì:

$$H\left(-\frac{1}{3} - t, \frac{4}{3} - t, t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{4}{3} - t, \frac{1}{3} - t, t - 1\right)$$

(II) Vectơ chỉ phương của (Δ): $\vec{a} = (-1, 1, 1)$

(III) Vì $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a}$ nên ta có: $-\left(\frac{4}{3} - t\right) + \left(\frac{1}{3} - t\right) + (t - 1) = 0$

Lập luận trên nếu sai, thì sai từ bước nào?

A. (I)

B. (II)

C. (III)

D. không sai bước nào.

39. Khoảng cách từ M(1, 3, 5) đến đường thẳng (Δ) $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 12z - 3 = 0 \end{cases}$ là:

A. $\frac{15}{37}$ B. $\sqrt{494}$ C. $\frac{\sqrt{2049}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{20494}}{39}$

Cho 2 đường thẳng chéo nhau: $(d_1)\begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ ***và*** (d_2).

Dùng giả thiết để trả lời 2 câu hỏi sau:

40. Mặt phẳng (α) chứa (d_1) và song song với (d_2) có phương trình là:

A. $5x - 4y + z - 3 = 0$ B. $x - 4y - z + 3 = 0$

C. $x + 4y + z + 3 = 0$ D. $5x - 4y + z + 1 = 0$

41. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng (d_1), (d_2) là:

A. 7 B. $\sqrt{42}$ C. $\frac{\sqrt{42}}{3}$ D. $\sqrt{47}$

42. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M(1, –2, 3) lên đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 4 - 4t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ là:

A. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{25}{3}\right)$ B. $\left(1, -\frac{1}{3}, \frac{25}{3}\right)$

C. $\left(\frac{23}{3}, \frac{4}{3}, \frac{29}{3}\right)$ D. $\left(\frac{23}{3}, \frac{8}{-}, \frac{7}{-}\right)$

Trong không gian Oxy cho 2 đường thẳng:

$$(d_1)\begin{cases} x = 1 - t_1 \\ y = t_1 \\ z = -t_1 \end{cases} \quad và \ (d_2)\begin{cases} x = 2t_2 \\ y = 1 - t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$$

43. Dùng giả thiết này để trả lời 3 câu hỏi sau đây:

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2):

A. $(d_1) \equiv (d_2)$ B. (d_1) cắt (d_2)

C. (d_1) chéo với (d_2) D. $(d_1) \perp (d_2)$

44. Các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, theo thứ tự qua (d_1) và (d_2) là:

A. $\begin{cases} (\alpha) y + z = 0 \\ (\beta) y + z - 1 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} (\alpha) x + y - 1 = 0 \\ (\beta) x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases}(\alpha)x + y + z - 3 = 0\\(\beta)2x + y + 1 = 0\end{cases}$ D. $\begin{cases}(\alpha)y + z + 5 = 0\\(\beta)z + y + 7 = 0\end{cases}$

45. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng (d_1), (d_2) là:

A. $\frac{\sqrt{8}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 4 D. A, B, C đều sai

46. Cho đường thẳng (d) qua A có VTCP $\vec{a}$ và đường thẳng (d') qua B có VTCP $\vec{b}$. Nếu $[\vec{a}, \vec{b}]. \overrightarrow{AB} = 0$ thì

A. (d) cắt (d') B. (d) // (d')

C. (d) và (d') đồng phẳng D. (d) và (d') chéo nhau.

47. Cho (Δ) $\begin{cases}x = 3 + t\\y = -1 + 2\\z = 4\end{cases}$ và (Δ') $\begin{cases}x - 3y + z = 0\\x + y - z + 4 = 0\end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc chung của (Δ) và (Δ') là:

A. $\begin{cases}2x - y + 10z - 47 = 0\\x + 3y - 2z + 6 = 0\end{cases}$ B. $\frac{x-1}{-28} = \frac{y-2}{14} = \frac{z-3}{7}$

C. A, B đều đúng D. A, B đều sai.

48. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng:

(Δ_1): $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và (Δ_2) $\begin{cases}x = -2 - 4t\\y = 1 - 2t\\x = -1 + 4t\end{cases}$ là:

A. 0 B. $\sqrt{386}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. A, B, C đều sai.

49. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng (d_1), (d_2). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. AB vuông góc và cắt cả 2 đường (d_1, d_2).

B. Độ dài AB chính là khoảng cách giữa (d_1, d_2).

C. Độ dài AB là đoạn ngắn nhất khi nối hai điểm trên (d_1), (d_2).

D. A, B, C đều đúng.

50. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2. Gọi (α) là mặt phẳng qua Δ_1 và song song với Δ_2, (β) là mặt phẳng qua Δ_2 và song song với Δ_1. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng:

A. khoảng cách của 2 mặt phẳng (α) và (β).

B. khoảng cách của Δ_1 và mặt phẳng (β).

C. khoảng cách của Δ_2 và mặt phẳng (α).

D. A, B, C đều đúng.

51. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$(d_1)\begin{cases}x = 1 + 2t_1\\ y = 2 - 2t_1\\ z = -t_1\end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases}x = 2t_1\\ y = -5 + 3t_2\\ z = 4\end{cases}$ thì khoảng cách giữa (d_1), (d_2) bằng:

A. $3\sqrt{19}$ B. $\dfrac{3\sqrt{19}}{13}$ C. $3\sqrt{31}$ D. A, B, C đều sai

Cho hai đường thẳng chéo nhau: $(d_1)\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$ ***và*** $(d_2)\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{-z}{-2}$. ***Dùng giả thiết này để trả lời 2 câu sau:***

52. Phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và cùng phương với đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) là:

A. $x - 3y + 2z + 1 = 0$ B. $4x + 7y + 11z + 9 = 0$

C. $3x + y - 2z + 7 = 0$ D. $16x - 25y + 43z - 45 = 0$

53. Phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) là:

A. $\begin{cases}2x - 49y + 21z + 1 = 0\\ 3x + 2y - 7z + 7 = 0\end{cases}$ B. $\begin{cases}x + 4y - 5z - 6 = 0\\ 3x - y + 2z + 1 = 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}16x - 25y + 43z - 45 = 0\\ 25x - 29y + 60z - 148 = 0\end{cases}$ D. $\begin{cases}25x - 2y + z - 31 = 0\\ 3x - y + 2z + 1 = 0\end{cases}$

Cho hai đường thẳng: $(d_1)\begin{cases}x + 2y - 5 = 0\\ 2y - z - 1 =\end{cases}$ ***và*** $(d_2)\begin{cases}x - 2y - z = 0\\ 2x + z = 0\end{cases}$. ***Sử dụng giả thiết này để trả lời 4 câu hỏi sau:***

54. Vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) là:

A. $\vec{u} = (1, 3, -7)$ B. $\vec{u} = (-14, 24, 11)$

C. $\vec{u} = 14, 11, -24)$ D. $\vec{u} = (-7, 0, 5)$

55. Phương trình mặt phẳng (α_1) chứa (d_1), (d_2) là:

A. $x + 2y - 4z + 238 = 0$ B. $155x + 117y - 58z - 253 = 0$

C. $3x + y - 9z + 155 = 0$ D. $3x + 7y + z - 117 = 0$

56. Phương trình đường thẳng (d) vuông góc chung của (d_1), (d_2) là:

A. $\begin{cases} x + 3y + 5z + 117 = 0 \\ 2x + y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 11y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + y - 58z - 25 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2x + 2y + 12z - 12 = 0 \end{cases}$

D. A, B, C đều sai.

57. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(1, 2, 3) và vuông góc với mp(α): $4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình chính tắc của (d) là:

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-7}$

C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-7}$

D. $\frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-3}{-14}$

58. Cho mp (α): $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng (d) có phương trình tham số $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $(d_1) \perp (\alpha)$

B. (d_1) cắt (α)

C. $(d_1) // (\alpha)$

D. $(d_1) \subset (\alpha)$.

59. Để tìm khoảng cách từ điểm A(1, 2, –1) đến đường thẳng (Δ): $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$, học sinh thực hiện các bước sau:

(I) Lấy hai điểm trên Δ: $M_0(-2, 1, -1)$ và $M(-2, 3, -3)$

(II) Tính diện tích của hình bình hành AM_0MB:

$$S = \left[\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0M}\right] = 5\sqrt{5}$$

(III) $d(A, \Delta) = \frac{S}{M_0M} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Lập luận trên sai từ bước nào?

A. (I)

B. (II).

C. (III)

D. Không có bước nào sai.

60. Cho đường thẳng $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$. Trong các đường thẳng có phương trình sau đây, đường thẳng nào là hình chiếu vuông góc của (d) lên mặt phẳng Oxy.

A. $\begin{cases} 2x - z + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

61. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Hỏi phương trình tham số nào sau đây cũng là phương trình tham số của (d).

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

62. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$ thì d có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$ B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{1}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

63. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$, thì d có phương trình tổng quát là:

A. $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

64. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(1, 2, −3) và B(3, −1, 1) là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$

65. Đường thẳng d: $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng (P):

$3x + 5y - z - 2 = 0$ tại 1 điểm có tọa độ là:

A. (1, 3, 1) B. (2, 2, 1) C. (0, 0, –2) D. (4, 0, 1)

66. Cho mặt phẳng (P): $x + 3y + z + 1 = 0$ và đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Trong các mệnh, mệnh đề nào đúng:

A. d cắt (P) B. d // (P) C. d $\subset$ (P) D. d $\perp$ (P).

67. Cho mặt phẳng (P): $x + y + z - 4 = 0$ và (d): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. d $\subset$ (P) B. d // (P) C. d cắt (P) D. d $\perp$ (P).

68. Tìm giao điểm của hai đường thẳng

(d): $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ (d'): $\begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$

Hãy chọn kết quả đúng nhất

A. (–1, –2, 0) B. (3, 2, 10) C. 2, 5, 4) D. (3, 7, 18).

69. Cho hai đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ (d'): $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$

Tìm giá trị m để d cắt d; là:

A. m = 1 B. m = –1 C. m = 0 D. m = –2

70. Khoảng cách từ M(2, 0, 1) đến đường thẳng (d): $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ bằng:

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\frac{5}{\sqrt{17}}$

71. Hình chiếu vuông góc của điểm M(2, 0, 1) lên đường thẳng (d): $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = z - 21$ là:

A. (2, 0, 4) B. 1, 0, 2) C. (1, 2, –1) D. (0, 2, –3)

72. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$(d_1):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \qquad (d_2):\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \text{ là:}$$

A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{2}$.

73. Góc giữa hai đường thẳng

$$(d):\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad (d'):\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases} \text{ là:}$$

A. 0^0 B. 30^0 C. 45^0 D. 60^0

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐƯỜNG THẲNG

1. D	2. A	3. A	4. A	5. C	6. A	7. D	8. A	9. A	10. D
11. D	12. D	13. B	14. A	15. D	16. C	17. A	18. C	19. D	20. A
21. C	22. B	23. A	24. C	25. A	26. C	27. B	28. B	29. A	30. B
31. D	32. B	33. D	34. D	35. C	36. D	37. A	38. B	39. D	40. A
41. C	42. C	43. C	44. A	45. D	46. C	47. A	48. C	49. D	50. D
51. D	52. D	53. C	54. B	55. B	56. D	57. A	58. A	59. D	60. B
61. D	62. B	63. A	64. D	65. C	66. B	67. A	68. D	69. C	70. A
71. B	72. C	73. A							

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MẶT CẦU

1. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y = 6z = 0$ thì (S) có tâm, bán kính lần lượt là:

A. I(1, 2, 3), R = $\sqrt{14}$ B. I(2, 2, 3), R = 7

C. A, B đều đúng D. A, B sai.

2. Phương trình mặt cầu tâm I(1, 2, –3), bán kính R = 2 là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 20 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 20 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 20 = 0$

3. Phương trình mặt cầu có đường kính AB với A(4, –2, 7); B(2, 1, 3)

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 10z + 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 26 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 10z + 9 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 12z + 16 = 0$

4. Bán kính của mặt cầu đi qua 4 điểm A(0, 0, 0); B(0, 0, 4); C(0, 4, 0); D(4, 0, 0) là:

A. $3\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

5. Phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O(0, 0, 0); A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a > 0, b > 0, c > 0 là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2cz + 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + ax + ay + cz = 0$

D. A, B, C đều sai

6. Bán kính của đường tròn có phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0 \\ 3x - 2y - 6z + 14 = 0 \end{cases}$$ là:

A. r = 4 B. r = 2 C. r = 3 D. A, B, C đều sai

7. Tìm tâm, bán kính của đường tròn: (C) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$

A. tâm H(0, 0, −1), r = 1

B. tâm H(0, 0, 1), r = 2

C. tâm H(1, 0, 0), r = 1

D. tâm H(1, 1, 0), r = 3

8. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S):

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ tại tiếp điểm $M_0(7, -1, 5)$ là:

A. $2x + 3y + 6z - 5 = 0$

B. $6x - 2y - 2z - 50 = 0$

C. $x + 2y + 2z - 7 = 0$

D. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$

9. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Phương trình 2 mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song (α): $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

A. $x - 2y + 2z + 1 = 0$ và $x - 2y + 2z - 1 = 0$

B. $x - 2y + 2z + 6 = 0$ và $x - 2y + 2z - 12 = 0$

C. $x - 2y + 2z + 5 = 0$ và $x - 2y + 2z - 5 = 0$

D. $x - 2y + 2z + 4 = 0$ và $x - 2y + 2z - 4 = 0$

Cho 2 mặt cầu (S_1): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$ ***và*** (S_2) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$ ***cắt nhau theo đường tròn (C). Dùng giả thiết này để trả lời 2 câu hỏi sau:***

10. Nếu H là hình chiếu của tâm mặt cầu (S_1) lên mặt phẳng (α) là mặt phẳng chứa (C) thì tọa độ của H là:

A. $H\left(\frac{29}{12}, \frac{29}{12}, \frac{29}{12}\right)$

B. $\left(\frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}\right)$

C. $H\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

D. H(1, 3, 3)

11. Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là:

A. $\sqrt{\frac{5}{2}}$

B. $\sqrt{\frac{19}{3}}$

C. $\frac{\sqrt{143}}{48}$

D. $\sqrt{\frac{39}{5}}$

12. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$ tại điểm A(1, 2, −4) là:

A. $3x + y + 4z - 21 = 0$

B. $3x + y - 4z + 21 = 0$

C. $3x + y - 4z - 21 = 0$

D. A, B, C đều sai

13. Phương trình mặt cầu tâm I(1, –5, 4) và tiếp xúc với mặt phẳng (α): $5x - 3y + 7z - 1 = 0$ là:

A. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 + (x - 4)^2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y - 8x = 0$

C. $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 + (z + 4)^2 = 4$

D. A, B, C đều sai

14. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 13 = 0$. Mặt phẳng chứa trục Oy và tiếp xúc với (S) có phương trình là:

A. $y = 0$ B. $4y + 3z = 0$

C. A, B đều đúng D. A, B đều sai.

15. Cho 2 mặt cầu (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$

(S_2) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 2z - 10 = 0$ thì:

A. (S_1) cắt (S_2) B. (S_1), (S_2) ngoài nhau.

C. (S_1) tiếp xúc ngoài (S_2) D. (S_1), (S_2) tiếp xúc trong.

16. Cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và 2 đường thẳng (d_1): $\frac{x}{\cdot} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và (d_2): $x + 1 = \frac{y}{2} = z$. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với d_1, d_2 là:

A. $3x - y - z - 15 = 0$ B. $3x + y + z - 7 = 0$

C. A, B đều đúng D. A, B đều sai.

17. Cho tứ diện ABCD với A(3, 2, 6); B(3, –1, 0); C(0, –7, 3) và D(–2, 1, 1). Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y - 8z - 13 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 129 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 3y - 2z - 13 = 0$

D. A, B, C đều sai.

18. Cho tứ diện ABCD với A(1, 0, 1); B(1, 2, 1); C(3, 2, –1) và D(1, 2, $\sqrt{2}$). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{17}$ D. $2\sqrt{3}$

19. Phương trình của mặt cầu đi qua 4 điểm O(0, 0, 0); A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a, b, c > 0 là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$

D. A, B, C đều sai.

20. Gọi (S) là mặt cầu tâm I(2, 1, -1) và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) bằng bao nhiêu?

A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2}{9}$

21. Cho mặt cầu có tâm I(6, 3, –4) tiếp xúc với trục Ox. Trong các số sau đây, số nào là bán kính của mặt cầu đó?

A. R = 5 B. $R = 3\sqrt{2}$

C. $R = \sqrt{5}$ D. R = 3

22. Bán kính của mặt cầu tâm I(1, 3, 5) và tiếp xúc với đường thẳng (d): $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$ là:

A. $R = \sqrt{14}$ B. R = 14 C. $R = \sqrt{7}$ D. r = 2

23. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu có phương trình (S): $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 2 = 0$ và song song với mặt phẳng: $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ là:

A. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

C. A, B đều đúng D. A, B đều sai.

24. Mặt cầu tâm I(6, 3, –4) tiếp xúc với Oy có bán kính bằng

A. $R = \sqrt{3}$ B. $R = 2\sqrt{23}$ C. $R = \sqrt{7}$ D. $R = 2\sqrt{17}$

25. Mặt cầu tâm I (6, 3, –4) tiếp xúc với Oz có bán kính bằng

A. $R = \sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. R = 3 D. R = 2

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM MẶT CẦU

1. D	2. B	3. C	4. B	5. B	6. A	7. A	8. D	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. C	15. A	16. C	17. A	18. A	19. B	20. A
21. A	22. A	23. C	24. B	25. C					

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Chương I. Phép dời hình và phép đồng dạng trong không gian 5

Bài 1. Phép tịnh tiến, phép đối xứng và phép quay trong không gian 5

Bài 2. Khái niệm về phép dời hình trong không gian 7

Bài 3. Phép vị tự và phép đồng dạng 8

Bài tập trắc nghiệm chương I 28

Chương II. Khối đa diện 33

Bài 1. Khái niệm về khối đa diện 33

Bài 2. Khối đa diện đều 34

Bài 3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện 35

Bài tập trắc nghiệm chương II 67

Chương III. Mặt nón - Mặt trụ - Mặt cầu 73

Bài 1. Khái niệm về mặt tròn xoay 73

Bài 2. Mặt cầu 76

Bài tập trắc nghiệm chương III 98

Chương IV. Phương pháp tọa độ trong không gian 104

Bài 1. Mặt cầu 104

Bài 2. Mặt phẳng 116

Bài tập trắc nghiệm chương IV 127

Bài 3. Đường thẳng 131

Bài tập trắc nghiệm vectơ trong không gian 159

Đáp án trắc nghiệm vectơ trong không gian 164

Bài tập trắc nghiệm mặt phẳng 164

Đáp án trắc nghiệm mặt phẳng 172

Bài tập trắc nghiệm đường thẳng 172

Đáp án trắc nghiệm đường thẳng 186

Bài tập trắc nghiệm mặt cầu 187

Đáp án trắc nghiệm mặt cầu 190

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập : Lê Thị Hương

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 12

Mã số: 1L-358 ĐH2008

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH in Bao bì Phong Tân

Số xuất bản: 718-2008/CXB/04-113/ĐHQGHN, ngày 18/7/2008.

Quyết định xuất bản số: 358 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2008.