

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 12:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ và véc tơ $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ là một số

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Tích có hướng của hai véc tơ là một véc tơ được xác định bởi

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{pmatrix} y_1 z_1 - z_1 y_1 \\ z_1 x_1 - x_1 z_1 \\ x_1 y_1 - y_1 x_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Có } \vec{v}_1 \perp [\vec{v}_1, \vec{v}_2]; \vec{v}_2 \perp [\vec{v}_1, \vec{v}_2]; |[\vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin \alpha.$$

Diện tích của tam giác tạo bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|.$$

Tích hỗn tạp của ba véc tơ $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ là một số và được ký hiệu là $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Ba véc tơ đồng phẳng khi và chỉ khi $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$.

Thể tích tứ diện tạo bởi 4 đỉnh A, B, C, D được tính bởi công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |D(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$$

Thể tích của hình hộp dựng trên ba véc tơ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ được xác định bởi công thức

$$V = |D(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)| = |D(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3|.$$

Cho đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$, khi đó góc φ tạo bởi $(d), (P)$ được xác định bởi

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Cho hai đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (a', b', c')$, khi đó góc φ giữa $(d_1), (d_2)$ được xác định bởi

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) đi qua điểm M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ được xác định bởi

$$d(M; (d)) = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (\text{lưu ý là tử thức là độ dài véc tơ không phải trị tuyệt đối}).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1) đi qua điểm M , có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng (d_2) đi qua điểm N , có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$ được xác định bởi

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot [\vec{u}, \vec{v}]|}{\|[\vec{u}, \vec{v}]\|} \quad (\text{lưu ý dưới mẫu là độ dài véc tơ, tử thức là giá trị tuyệt đối}).$$

Tất cả các công thức trên đều được áp dụng tính trực tiếp trong bài thi.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Cho đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ và cặp véc tơ chỉ phương $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

+ Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) không có điểm chung ta nói $(d) // (P)$.

Vậy $(d) // (P)$ xảy ra khi thỏa mãn một trong các điều kiện:

- (i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) vô nghiệm.
- (ii). $\vec{a} \perp \vec{n}$ và tồn tại một điểm $A \in (d), A \notin (P)$.
- (iii). $\vec{a}$ là một véc tơ chỉ phương của (P) và tồn tại một điểm $A \in (d)$ nhưng không thuộc (P) .

+ Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có hai điểm chung phân biệt ta nói $(d) \in (P)$, xảy ra khi thỏa mãn một trong các điều kiện:

- (i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) vô số nghiệm.
- (ii). Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm phân biệt $A, B \in (d)$.
- (iii). Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A \in (d)$ và nhận $\vec{a}$ làm một véc tơ chỉ phương.

+ Đường thẳng (d) có một điểm chung duy nhất với (P) ta nói (d) cắt (P) , xảy ra khi hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có nghiệm duy nhất.

Đường thẳng $(d) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{n}$.

Cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ phân biệt theo thứ tự có các véc tơ chỉ phương là $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Lấy hai điểm $A \in (d_1), B \in (d_2); A \neq B$.

Khi đó xét tích hỗn tạp của 3 véc tơ $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB})$

- (i). Nếu $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = 0$ thì (d_1) và (d_2) đồng phẳng.
- (ii). Nếu $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) \neq 0$ thì (d_1) và (d_2) chéo nhau.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

+ Giữa hai đường thẳng song song $(d_1), (d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:

- (i). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song $(d_1), (d_2)$
- (ii). Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều $(d_1), (d_2)$ và thuộc mặt phẳng chứa $(d_1), (d_2)$.
- (iii). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

+ Giữa hai đường thẳng cắt nhau $(d_1), (d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:

- (i). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $(d_1), (d_2)$.
- (ii). Viết phương trình đường phân giác tạo bởi $(d_1), (d_2)$.

+ Giữa hai đường thẳng chéo nhau $(d_1), (d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:

- (i). Viết phương trình đường vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$.
- (ii). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.
- (iii). Viết phương trình của mặt phẳng cách đều $(d_1), (d_2)$.
- (iv). Viết phương trình hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau và lần lượt chứa $(d_1), (d_2)$.
- (v). Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều $(d_1), (d_2)$.
- (vi). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M cho trước và cắt cả $(d_1), (d_2)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là

$$(P): 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \text{ và } (d): \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(d) \in (P)$.

Lời giải:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) .

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \\ 18x - 10y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 9x - 5y - 7 = 0 \end{cases} \text{ hệ này vô số nghiệm, do}$$

đó $(d) \in (P)$ đpcm.

Cách 2: Lấy hai điểm phân biệt $A\left(\frac{7}{9}, 0, \frac{5}{9}\right); B\left(0, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}\right) \in (d)$ thay tọa độ của A, B vào

phương trình của (P) ta được:

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{7}{9} - 3 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{5}{9} - 7 = 0 \\ 4 \cdot 0 - 3 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) + 7 \cdot \frac{2}{5} - 7 = 0 \end{cases} \text{ thỏa mãn, do đó } (d) \in (P).$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 2. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) , biết:

$$(P): m^2x + 2y + z + 1 - 3m = 0,$$

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Lời giải:

Thay x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được phương trình:

$$(m^2 - 4)t = 3m - 6 (*)$$

+ Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

- Với $m = 2 \Rightarrow (*)$ vô số nghiệm, khi đó $(d) \in (P)$.

- Với $m = -2 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm, khi đó $(d) // (P)$.

+ Nếu $m \neq \pm 2 \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất, khi đó $(d) \cap (P) = A\left(\frac{3}{m+2}, \frac{m-1}{m+2}, \frac{3m}{m+2}\right)$.

Bài 3. Cho đường thẳng $(d_m): \begin{cases} x + mz - m = 0 \\ (1-m)x - my = 0 \end{cases}$, m là tham số

Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định và nằm trong một phẳng cố định.

Lời giải:

Giả sử điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó

$$\begin{cases} x_0 + mz_0 - m = 0 \\ (1-m)x_0 - my_0 = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + (z_0 - 1)m = 0 \\ x_0 - m(x_0 + y_0) = 0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(0, 0, 1)$.

Từ phương trình đường thẳng (d_m) , ta suy ra

$mx + my + mz - m = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow (P): x + y + z - 1 = 0$ là mặt phẳng mà (d_m) luôn thuộc (P) .

Bài 4. Cho mặt phẳng $(P): 2x + my + z - 5 = 0$, $(d): \begin{cases} 3x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để:

a. $(d) // (P)$.

b. $(d) \perp (P)$.

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -12 & 21 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 23 & 31 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 31 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4, -4, -4)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, m, 1)$.

a. $(d) // (P) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2 - 4 \cdot m - 4 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

b. $(d) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a} / \vec{n} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{m}{-4} = \frac{1}{-4}$ vô lý. Vậy không tồn tại m để $(d) \perp (P)$.

Bài 5. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 5y + z + 17 = 0$.

Xác định phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của (d) và (P) và vuông góc với (d) , nằm trong mặt phẳng (P) .

Lời giải:

+ Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P)

$$\begin{cases} 2x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \\ 2x + 5y + z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow (d) \cap (P) = A(2, -5, 4).$$

+ Gọi $\vec{a}$ là véc tơ chỉ phương của (d) , ta được $\vec{a} = (-11, 27, 15)$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d) , khi đó (Q) nhận $\vec{a}$ làm véc tơ pháp tuyến, nên $(Q): -11(x-2) + 27(y+5) + 15(z-4) = 0 \Leftrightarrow (Q): -11x + 27y + 15z + 97 = 0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm chính là giao của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Vậy đường thẳng cần tìm là $(\Delta): \begin{cases} 2x + 5y + z + 17 = 0 \\ -11x + 27y + 15z + 97 = 0 \end{cases}$

Bài 6. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau và xác định phương trình mặt phẳng (P) song song và cắt đều $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

+ (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (2, 1, 3)$ và (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (1, 2, 3)$.

Lấy điểm $A(1, 2, -3) \in (d_1); B(2, -3, 1) \in (d_2)$ suy ra $\vec{AB} = (1, -5, 4)$

Ta có $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$. Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$ khi đó mặt phẳng cần tìm đi qua I và có cặp

véc tơ chỉ phương $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \Rightarrow (P): \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t_1 + t_2 \\ y = -\frac{1}{2} + t_1 + 2t_2 \\ z = -1 + 3t_1 + 3t_2 \end{cases} (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều hai đường thẳng

$$(d_1): \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}, (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+7}{4} \text{ và thuộc mặt phẳng chứa } (d_1), (d_2).$$

Lời giải:

+ $(d_1) // (d_2)$, (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (3, -1, 4)$

Lấy điểm $A(-2, 5, 9) \in (d_1); B(0; -3; -7) \in (d_2)$ suy ra trung điểm của AB là $I(-1, 1, 1)$. Khi đó đường thẳng cần tìm đi qua I và có véc tơ chỉ phương là $\vec{a}$

Vậy $(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{4}.$

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x=2u-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm của chúng. Viết phương trình đường phân giác tạo bởi $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

+ Xét hệ phương trình tạo bởi $(d_1), (d_2)$, ta có

$$\begin{cases} 0=2u-2 \\ 1=1 \\ 1-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = I(0, 1, 0)$$

+ Lấy điểm $A(0, 1, 2) \in (d_1), B(2u-2, 1, 0) \in (d_2)$ sao cho

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 4 = (2u-2)^2 \Leftrightarrow u=0 \vee u=2$$

+ Với $u=0 \Rightarrow B_1(-2, 1, 0)$, ta có tọa độ trung điểm của AB_1 là $I_1(-1, 1, 1) \Rightarrow \vec{II_1} = (-1, 0, 1)$,

khi đó đường phân giác cần tìm là đi qua I và có véc tơ chỉ phương $\vec{II_1}$:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$$

+ Với $u=2 \Rightarrow B_2(2, 1, 0)$ tương tự ta có đường phân giác $(\Delta_2): \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$

Bài 9. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và $(d_2): \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$

Chứng minh rằng (d_1) song song với (d_2) , viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $(d_1), (d_2)$ và tính khoảng cách giữa $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

+ Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (4, -6, -8)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (-6, 9, 12)$, suy ra $\vec{u} // \vec{v}$. Lấy điểm $A(2, 0, -1) \in (d_1)$ thay vào phương trình của

$(d_2) \Rightarrow \frac{2-7}{-6} = \frac{0-2}{9} = \frac{-1}{12}$ vô lý. Từ đó suy ra $(d_1) // (d_2)$ Ta có đpcm.

+ Lấy điểm $B(7, 2, 0) \in (d_2)$. Mặt phẳng (P) chứa $(d_1), (d_2)$ nên (P) đi qua điểm A và có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{AB}$ nên

$$(P): \begin{cases} x = 2 - 2u + 5v \\ y = 3u + 2v \\ z = -1 + 4u + v \end{cases}$$

+ Do $(d_1) // (d_2)$ nên $d((d_1), (d_2)) = d(A, (d_2)) = \frac{[\vec{AB}, \vec{v}]}{|\vec{v}|} = \sqrt{\frac{854}{29}}$

Bài 10. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -2+3t \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau và xác định tọa độ giao điểm I của chúng. Viết phương trình mặt phẳng chứa $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

+ Thay x, y, z ở phương trình của (d_2) vào phương trình của (d_1) ta được

$$\frac{-1+t-1}{-2} = \frac{-t+2}{1} = \frac{-2+3t-4}{3} \Leftrightarrow t = 2, \text{ thay vào phương trình của } (d_2) \Rightarrow I(1, -2, 4)$$

Vậy $(d_1) \cap (d_2) = I(1, -2, 4)$. Ta có đpcm.

+ Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ và (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, -1, 3)$

Khi đó mặt phẳng (P) chứa $(d_1), (d_2)$ đi qua điểm I và có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -13 & 31 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6, 9, 1)$$

Vậy $(P): 6(x-1) + 9(y+2) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow (P): 6x + 9y + z + 8 = 0$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ và

$$(d_2): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Viết phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = (0, -1, 1)$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -21 \\ -10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4, 1, 1)$

Gọi (d) là đường vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$ khi đó (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ thỏa

$$\text{mãn } \vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 \\ 14 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 41 \end{vmatrix} \right) = (-2, 4, 4), \text{ chọn } \vec{a} = (-1, 2, 2)$$

+ Gọi (P) là mặt phẳng chứa $(d), (d_1)$, khi đó (P) có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{a}] = \left(\begin{vmatrix} -11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -12 \end{vmatrix} \right) = (-4, -1, -1), \text{ lấy điểm } A(2, 1, 0) \in (d_1)$$

Khi đó $(P): -4(x-2) - (y-1) - z = 0 \Leftrightarrow (P): -4x - y - z + 9 = 0$

+ Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $(d), (d_2)$, khi đó (Q) có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{n}' = [\vec{v}, \vec{a}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 \end{vmatrix} \right) = (0, -9, 9), \text{ lấy điểm } B(-3, 2, 1) \in (d_2)$$

Khi đó $(Q): -(y-2) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow (Q): -y + z + 1 = 0$

Và (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$

Vậy phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$ là

$$(d): \begin{cases} -4x - y - z + 9 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 12. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$

Viết phương trình đường vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 1, 3)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Lấy điểm $A(2t+1, t+2, 3t-3) \in (d_1); B(u+2, -3+2u, 3u+1) \in (d_2)$ suy ra

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (u-2t+1, 2u-t-5, 3u-3t+4)$, và AB là đoạn vuông góc chung của

$$(d_1), (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u-2t+1) + 2u-t-5 + 3(3u-3t+4) = 0 \\ u-2t+1 + 2(2u-t-5) + 3(3u-3t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{25}{9} \\ t = \frac{29}{9} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $A\left(\frac{67}{9}, \frac{47}{9}, \frac{20}{3}\right); B\left(\frac{43}{9}, \frac{23}{9}, \frac{84}{9}\right); \overrightarrow{AB} = \left(\frac{-24}{9}, \frac{-24}{9}, \frac{24}{9}\right) = \frac{24}{9}(-1, -1, 1)$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Vậy phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$ đi qua A và có véc tơ chỉ phương $(-1, -1, 1)$

$$\text{Vậy } AB: \begin{cases} x = \frac{67}{9} - t \\ y = \frac{47}{9} - t \\ z = \frac{20}{3} + t \end{cases}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho đường thẳng $(d_m): \begin{cases} x + 4mz - 3m = 0 \\ (1-m)x - my = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định và luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$

Xác định phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của (d) và (P) và vuông góc với (d) , nằm trong mặt phẳng (P) .

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng

$$(d_m): \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để $(d_m) // (P)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-1}$

$$\text{Và } (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(d_1) // (d_2)$. Viết phương trình đường thẳng song song, cách đều và nằm trong mặt phẳng chứa $(d_1), (d_2)$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) cắt (d_2) . Viết phương trình đường phân giác tạo bởi góc nhọn giữa $(d_1), (d_2)$.

Bài 6. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x + 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều $(d_1), (d_2)$.

Bài 7. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $(d_2): \begin{cases} 4x-y-2=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) song song với (d_2) . Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa $(d_1), (d_2)$. Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong (P) và các điều kiện $(d_1), (d_2)$.
Tính khoảng cách giữa $(d_1), (d_2)$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau, xác định tọa độ giao điểm của chúng. Viết phương trình mặt phẳng chứa $(d_1), (d_2)$.

Bài 9. Cho điểm $A(1, -1, 1)$ và hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 3x-y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x=t \\ y=-1-2t \\ z=-3t \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1), (d_2), A$ cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1): x = -y + 1 = z - 1$ và $(d_2): -x + 1 = y - 1 = z$.

Tìm tọa độ điểm $A \in (d_1)$ và điểm $B \in (d_2)$ sao cho đường thẳng AB vuông góc với cả $(d_1), (d_2)$.

Bài 11. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-5t \\ z=2+t \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1), (d_2)$ chéo nhau. Tính khoảng cách giữa $(d_1), (d_2)$. Viết phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2) . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1, 1, 1)$ và cắt cả $(d_1), (d_2)$.

ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Xét các dạng bài toán sau

Dạng 1: Đường thẳng cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ và thỏa mãn điều kiện cho trước.

(i). Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm A và cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Phương pháp:

Cách 1:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa (d_1) .

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa (d_2) .

+ Nếu $(P) \equiv (Q)$, bài toán có vô số nghiệm.

+ Nếu $(P) // (Q)$, bài toán vô nghiệm.

+ Nếu $(P) \cap (Q) = (d)$, đây chính là đường thẳng cần tìm.

Cách 2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa (d_1) .

Xác định giao điểm B của (P) và (d_2)

+ Nếu vô nghiệm thì bài toán vô nghiệm.

+ Nếu có vô số nghiệm thì bài toán có vô số nghiệm.

+ Nếu có nghiệm duy nhất thì phương trình đường thẳng (d) cần tìm chính là AB , đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$.

Cách 3:

Áp dụng khi cả hai đường thẳng cho ở dạng tham số

Giả sử đường thẳng cần tìm cắt (d_1) tại B và cắt (d_2) tại C , với tọa độ của B, C cho ở dạng tham số.

Xét điều kiện A, B, C thẳng hàng.

(ii). Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Phương pháp:

(iii). Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Phương pháp:

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Dạng 2: Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với cả hai đường thẳng cho trước.

(i). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Cách 1:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc (d_1) .

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc (d_2) .

Khi đó (d) chính là giao tuyến của $(P), (Q)$.

Cách 2:

Xác định các véc tơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ của $(d_1), (d_2)$, khi đó véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ của (d) thỏa mãn $\vec{a} \perp \vec{u}, \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}]$

Đường thẳng (d) sẽ đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 3: Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng và cắt một đường thẳng.

(i). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) .

Phương pháp:

Cách 1:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d_1) .

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa (d_2) .

Khi đó đường thẳng (d) cần tìm là giao của $(P), (Q)$.

Cách 2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d_1) .

Xác định giao điểm B của (P) và (d_2) , khi đó đường thẳng (d) cần tìm chính là AB , đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Dạng 4: Hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng

(i). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của một điểm A lên mặt phẳng (P) .

Phương pháp:

Viết phương trình đường tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P)

Tọa độ hình chiếu H chính là giao điểm của (d) và (P) .

(ii). Tìm điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P) .

Phương pháp:

Tìm tọa độ hình chiếu H của A trên (P) .

Tìm điểm A_1 đối xứng với A qua H .

(iii). Xác định phương trình đường thẳng (Δ) đối xứng với đường thẳng (d) qua mặt phẳng (P) .

Phương pháp:

Lấy hai điểm phân biệt $A, B \in (d)$.

Tìm tọa độ hai điểm A_1, B_1 lần lượt đối xứng với A, B qua mặt phẳng (P) .

Khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là đường thẳng đi qua hai điểm A_1, B_1 .

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho điểm $A(2, 3, -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P) .

Lời giải:

Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) sẽ nhận véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, -1, -1)$ của (P) làm véc tơ chỉ phương, nên

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Thay tọa độ x, y, z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được

$$2(2 + 2t) - (3 - t) - (-1 - t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow (d) \cap (P) = H\left(3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Tọa độ điểm A sẽ đối xứng với A qua H , suy ra $A_1(4, 2, -2)$.

Bài 2. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 6y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x + y - 7z - 14 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Xác định tọa độ giao điểm A của $(d), (P)$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đối xứng với (d) qua (P) .

Lời giải:

Xét hệ tạo bởi $(d), (P)$, ta có:

$$\begin{cases} x + y - 7z - 14 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \\ 3x + 6y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow (d) \cap (P) = A(0, 0, -2)$$

Lấy điểm $B(3, 6, 0) \in (d)$, ta tìm tọa độ điểm B_1 đối xứng với B qua (P) , khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là AB_1 .

$$\text{Tìm được } B_1\left(\frac{10}{23}, -\frac{210}{23}, \frac{58}{23}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB_1} = \left(\frac{10}{23}, -\frac{210}{23}, \frac{104}{23}\right) = \frac{2}{23}(5, -105, 52)$$

$$\text{Vậy } (\Delta): \begin{cases} x = 5t \\ y = -105t \\ z = -2 + 52t \end{cases}$$

Bài 3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua $A(-2, 4, 3)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Hạ $AH \perp (P)$, Xác định tọa độ điểm H .

Lời giải:

Mặt phẳng (Q) sẽ nhận véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, -3, 6)$ của (P) làm véc tơ pháp tuyến, nên $(Q): 2(x + 2) - 3(y - 4) + 6(z - 3) = 0 \Leftrightarrow (Q): 2x - 3y + 6z - 2 = 0$.

Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}$ làm véc tơ chỉ phương nên,

$$(d): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ tạo bởi $(d), (P)$.

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \\ 2x - 3y + 6z + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-20}{7} \\ y = \frac{37}{7} \\ z = \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{-20}{7}, \frac{37}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho bốn điểm $A(4, 1, 4); B(3, 3, 1); C(1, 5, 5); D(1, 1, 1)$.

Xác định tọa độ hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) , tính thể tích tứ diện $ABCD$. Viết phương trình đường vuông góc chung của AC, BD .

Bài 2. Cho bốn điểm $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c), a, b, c > 0$. Dựng hình hộp chữ nhật nhận O, A, B, C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với O của hình hộp đó.

(i). Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD) .

(ii). Tính tọa độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD) . Tìm điều kiện của a, b, c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy) .

Bài 3. Cho điểm $A(2, 3, 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 17 = 0$.

(i). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) .

(ii). Chứng minh rằng (d) cắt trục Oz , tìm giao điểm M của chúng.

(iii). Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P) .

Dạng 5: Hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng.

(i). Xác định phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) .

Phương pháp:

Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P) .

Khi đó đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 3x - 2y - z + 15 = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): -2x - 3y + z - 4 = 0$.

Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) trên mặt phẳng (P) .

Lời giải:

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2, -3, 1)$

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -13 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3, 4, 1)$

Lấy điểm $A(-25, -30, 0) \in (d)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P) , khi đó (Q) đi qua A và có véc tơ pháp tuyến

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

$$\vec{n}' = [\vec{n}, \vec{u}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-7, 5, 1)$$

Vậy $(Q): -7(x+25) + 5(y+30) + z = 0 \Leftrightarrow (Q): -7x + 5y + z - 25 = 0$

Khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là giao tuyến của $(P), (Q)$

$$(\Delta): \begin{cases} -7x + 5y + z - 25 = 0 \\ -2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 2. Cho đường thẳng $(d_m): \begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}$

(i). Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d_m) trên mặt phẳng (xOy)

(ii). Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (Δ) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định nằm trong mặt phẳng (xOy) .

Lời giải:

(i). Khử z từ hai phương trình của (d_m) ta được $2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1$

Khi đó hình chiếu vuông góc của (d_m) trên mặt phẳng (xOy) là

$$(\Delta): \begin{cases} 2mx - (m^2 - 1)y - m^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(ii). Trong mặt phẳng (xOy) , Ta có $d(O, (\Delta)) = \frac{|-m^2 - 1|}{\sqrt{4m^2 + (m^2 - 1)^2}} = 1$

Từ đó suy ra đường thẳng (Δ) luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính $R = 1$ nằm trong mặt phẳng (xOy) (đpcm).

Bài 3. Cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 3 = 0$.

(i). Tìm tọa độ giao điểm A của $(d), (P)$. Tính góc giữa $(d), (P)$.

(ii). Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) lên mặt phẳng (P) . Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho $AB = a > 0$. Xét tỷ số $\frac{AB + AM}{BM}$ với M di động trên mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng tồn tại một vị trí của M để tỷ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải:

(i). Tọa độ giao điểm $A = (d) \cap (P)$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0 \\ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-2, -1, 5)$$

$$\text{Góc giữa } (d), (P) \text{ được xác định bởi } \sin \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{9}$$

(ii). Xác định được $(\Delta): \begin{cases} 2x+5y+6z-21=0 \\ 2x-2y+z-3=0 \end{cases}$

Lấy điểm $B \in (d); AB = a > 0$ và điểm $M \in (P)$.

Xét tam giác ABM , ta có $\frac{AB+AM}{BM} = \frac{2R \sin M + 2R \sin B}{2R \sin A} = \frac{\sin M + \sin B}{\sin A}$

$$= \frac{2 \sin \frac{M+B}{2} \cos \frac{M-B}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{M-B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos \frac{M-B}{2} = 1 \\ \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = \alpha, M = B = \frac{\pi - \alpha}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{AB+AM}{BM}$ bằng $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x+z-3=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) trên (P) .

Bài 2. Cho ba mặt phẳng $(P): 3x-y+z-2=0; (Q): x+4y-5=0; (R): 2x-z+7=0$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (R) , trong đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Bài 3. Cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 2x-z+1=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ và

$(d_2): \begin{cases} 3y-z+12=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$

(i). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

(ii). Viết phương trình hình chiếu vuông góc $(\Delta_1), (\Delta_2)$ lần lượt của $(d_1), (d_2)$ trên mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ giao điểm I của $(\Delta_1), (\Delta_2)$.

Bài 4. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}$ và $(d_2): \begin{cases} 2x-y-11=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1), (d_2)$ đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) là hình chiếu song song của (d_2) theo phương của (d_1) trên mặt phẳng $(P): 3x-2y-2z-1=0$.

Bài 5. Cho tứ diện có 4 đỉnh $O(0,0,0); A(6,3,0); B(-2,9,1); S(0,5,8)$.

(i). Chứng minh rằng SB vuông góc với OA .

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

- (ii). Chứng minh rằng hình chiếu của cạnh SB trên mặt phẳng (OAB) vuông góc với cạnh OA . Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA . Xác định tọa độ điểm K .
- (iii). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SO, AB . Tìm tọa độ điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

Dạng 6: Hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng.

- (i). Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm A lên đường thẳng (d) .

Phương pháp:

Cách 1:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d)

Khi đó tọa độ giao điểm H của $(d), (P)$ chính là điểm cần tìm.

Cách 2:

Lấy điểm H thuộc (d) , tọa độ dưới dạng tham số và H là hình chiếu của A trên (d) khi và chỉ khi $AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow H$.

- (ii). Tìm điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Phương pháp:

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (d)

Điểm A_1 cần tìm đối xứng với A qua H .

- (iii). Viết phương trình đường thẳng (Δ) đối xứng với một đường thẳng (d_1) qua một đường thẳng (d_2) cho trước.

Phương pháp:

Lấy hai điểm phân biệt $A, B \in (d_1)$

Tìm tọa độ điểm A_1, B_1 lần lượt đối xứng với A, B qua (d_2) .

Khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là đường thẳng đi qua hai điểm A_1, B_1 .

- (iv). Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A vuông góc với đường thẳng (d) và cắt (d) .

Phương pháp:

Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (d) .

Đường thẳng (Δ) cần tìm là đường thẳng đi qua hai điểm A, H .

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho điểm $A(1, 2, -1)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d) và tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 11 \\ 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 01 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, 1)$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d) khi đó (P) nhận $\vec{u}$ làm véc tơ pháp tuyến, nên $(P): -(y-2) + (z+1) = 0 \Leftrightarrow (P): -y + z + 3 = 0$

Xét hệ tọa bởi $(d), (P)$:

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ -y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ hình chiếu của A trên (d) là điểm $H(2, 2, -1)$.

Điểm A_1 đối xứng với A qua (d) nhận H làm trung điểm của AA_1 nên $A_1(3, 2, -1)$.

Bài 2. Cho điểm $A(1, 2, -1)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$

Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d) .

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1, 1, 0)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (d) , do

$H \in (d) \Rightarrow H(1-t, t, -1) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-t, t-2, 0)$. Do

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -t \cdot (-1) + (t-2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0, 1, -1)$.

Bài 3. Cho điểm $M(1, 2, -1)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng (d) . Tính độ dài đoạn MN .

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(3, -2, 2)$

Phương trình của (d) dạng tham số là $(d): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Gọi $H(-1+3t, 2-2t, 2+2t) \in (d)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (d) , ta có

$\overrightarrow{MH} = (3t-2, -2t, 2t+3)$

Do $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 3(3t-2) - 2(-2t) + 2(2t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (-2, 0, 3)$

Điểm N đối xứng với M qua H nên $MN = 2|\overrightarrow{MH}| = 2\sqrt{13}$.

Bài 4. Cho điểm $A(2, 3, -1)$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A vuông góc với (d) và cắt (d) .

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 4, 1)$

Đường thẳng (d) ở dạng tham số là $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ x = 3 + t \end{cases}$

Gọi $H(2t, 4t, 3+t) \in (d)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (d) , ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (2t-2, 4t-3, 4+t) \\ \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow 2(2t-2) + 4(4t-3) + (4+t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7}$$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{32}{7} \right)$

Vậy đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AH}$ nên

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 - \frac{6}{7}t \\ y = 3 - \frac{5}{7}t \\ z = -1 + \frac{32}{7}t \end{cases}$$

Bài 5. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

Gọi B, C lần lượt là các điểm đối xứng của $A(1, 0, 0)$ qua $(d_1), (d_2)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải:

Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, -3)$.

Đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, 2, 5)$

+ Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của A trên (d_1)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $(d_1) \Rightarrow (P)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{u}$, nên

$$(P): (x-1) - 2y - 3z = 0 \Leftrightarrow (P): x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

Khi đó tọa độ $H_1 = (d_1) \cap (P)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{14} \\ y = -\frac{12}{14} \\ z = \frac{3}{14} \end{cases} \Rightarrow H_1 \left(-\frac{1}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{3}{14} \right) \Rightarrow \overrightarrow{AH_1} = \left(-\frac{15}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{3}{14} \right) + \text{Gọi}$$

$H_2(t, 1+2t, 4+5t) \in (d_2)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (d_2) , khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH_2} = (t-1, 1+2t, 4+5t) \\ \overrightarrow{AH_2} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (t-1) + 2(1+2t) + 5(4+5t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{10} \Rightarrow \overrightarrow{AH_2} = \left(-\frac{17}{10}, -\frac{4}{10}, -\frac{5}{10} \right)$$

Các điểm B, C đối xứng với A qua H_1, H_2

$$\text{Ta có } S_{ABC} = 4S_{AH_1H_2} = 2 \left[\overrightarrow{AH_1}, \overrightarrow{AH_2} \right] = \frac{\sqrt{5904}}{35}.$$

Bài 6. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

(i). Với mỗi điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ trong không gian viết phương trình mặt phẳng (P_0) đi qua M và vuông góc với (d) . Tính khoảng cách từ M đến (d) .

(ii). Chứng minh rằng quỹ tích các điểm trong mặt phẳng Oxy mà khoảng cách từ điểm đó đến (d) bằng 2 là một elip. Xác định tọa độ tiêu điểm của elip đó.

Lời giải :

(i). Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -11 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, 1)$

Mặt phẳng (P_0) cần tìm sẽ nhận $\vec{u}$ làm véc tơ pháp tuyến, nên

$$(P_0): (x - x_0) + (z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (P): x + z - x_0 - z_0 = 0.$$

Khi đó tọa độ giao điểm H của $(P_0), (d)$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + z - x_0 - z_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_0 + z_0}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{x_0 + z_0}{2} \end{cases} \Rightarrow H \left(\frac{x_0 + z_0}{2}, 0, \frac{x_0 + z_0}{2} \right)$$

Khoảng cách từ M đến (d) chính là

$$MH = \sqrt{\left(\frac{x_0 + z_0}{2} - x_0 \right)^2 + y_0^2 + \left(\frac{x_0 + z_0}{2} - z_0 \right)^2} = \sqrt{\frac{(x_0 - z_0)^2}{2} + y_0^2}$$

(ii). Điểm $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x, y, 0)$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Theo đề bài và áp dụng câu trên ta có,

$$d(M, (d)) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow M \in (E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 (\text{đpcm}).$$

Ta có tọa độ tiêu điểm $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho điểm $A(1, 2, 3)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (d) . Xác định độ dài đoạn AA_1 đối xứng với A qua (d) . Tính độ dài đoạn AA_1 .

Bài 2. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$

(i). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2, -1, 1)$ và vuông góc với (d) .

(ii). Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A và vuông góc, cắt (d) .

(iii). Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Bài 3. Cho điểm $A(2, 1, -3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$

(i). Tính khoảng cách từ A đến (d) .

(ii). Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AA_1 .

(iii). Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A và vuông góc, cắt đường thẳng (d) .

Bài 4. Cho bốn đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} mx - y = 0 \\ z = h \end{cases}, (d_2): \begin{cases} mx - y = 0 \\ z = -h \end{cases}, (d_3): \begin{cases} mx + y = 0 \\ z = h \end{cases}, (d_4): \begin{cases} mx + y = 0 \\ z = -h \end{cases}$$

Chứng minh rằng bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 đối xứng với A lần lượt qua $(d_1), (d_2), (d_3), (d_4)$ đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đi qua bốn điểm đó.

BÀI TOÁN VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

- Thường xác định mặt phẳng dưới dạng tổng quát

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

- Sau đó dựa vào giả thiết bài toán, biểu diễn được C, D theo A, B

- Cuối cùng là giải phương trình với hai ẩn là A, B

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1, 2, -3)$ và $B(2, -1, -6)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và tạo với mặt phẳng (P) một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Giả sử phương trình mặt phẳng cần tìm $(Q): ax + by + cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

Mặt phẳng (Q) chứa AB nên $A, B \in (Q)$, từ đó suy ra

$$\begin{cases} -a + 2b - 3c + d = 0 \\ 2a - b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a + b \\ d = 4a + b \end{cases} (*)$$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, 2, 1)$. Từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng này là

$$\cos \alpha = \frac{|a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow 2(a + 2b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)$$

Ta thay c, d ở hệ $(*)$ vào phương trình trên ta suy ra:

$$2(2a + 3b)^2 = (a^2 + b^2 + (a + b)^2) \Leftrightarrow 3a^2 + 11ab + 8b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \Rightarrow c = 0, d = -3b \\ a = -\frac{8b}{3} \Rightarrow c = -\frac{5}{3}b, d = -\frac{29b}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai phương trình mặt phẳng cần tìm

$$(Q_1): -x + y - 3 = 0; (Q_2): 8x - 3y + 5z + 29 = 0.$$

Bài 2. Cho hai điểm $A(2, -1, 1), B(0, 1, -2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua giao điểm của $(d), (OAB)$ và nằm trong mặt phẳng (OAB) hợp với đường thẳng (d) một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{6}$.

Lời giải:

Ta có $\vec{OA} = (2, -1, 1); \vec{OB} = (0, 1, -2)$ suy ra mặt phẳng (OAB) có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2-1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2-1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 4, 2)$$

Vậy $(OAB): x + 4y + 2z = 0$. Gọi M là giao điểm của $(d), (OAB)$ khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 13 \\ z = -21 \end{cases} \Rightarrow M(-10, 13, -21)$$

Giả sử đường thẳng (Δ) cần tìm có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (a, b, c)$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

$$\text{Do } (\Delta) \in (OAB) \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow a + 4b + 2c = 0 (1)$$

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1, -1, 2)$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\cos \alpha = \frac{|a - b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6(a - b + 2c)^2 = 25(a^2 + b^2 + c^2) (2)$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Rút $a = -4b - 2c$ từ (1) thay vào (2) ta được: $11b^2 - 16bc + 5c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \Rightarrow a = -6c \\ b = \frac{5}{11}c \Rightarrow a = -\frac{42}{11}c \end{cases}$

Vậy có hai phương trình (Δ) cần tìm là:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = -10 - 6t \\ y = 13 + t \\ z = -21 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\Delta_2): \begin{cases} x = -10 - \frac{42}{11}t \\ y = 13 + \frac{5}{11}t \\ z = -21 + t \end{cases}$$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(0, 1, -2)$ vuông góc với đường thẳng $(d): \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ và tạo với mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$ một góc $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải:

Giả sử đường thẳng (Δ) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, -1, 1)$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ \frac{|2a + b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và $(d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$

(i). Chứng minh rằng hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ chéo nhau.

(ii). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d_2) và tạo với đường thẳng (d_1) một góc 30° .

Lời giải:

(i). Đường thẳng (d_1) đi qua điểm $O(0, 0, 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1, -2, 1)$

Đường thẳng (d_2) đi qua điểm $A(1, -1, 1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, -1, 3)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -21 \\ 11 \\ -13 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 31 \\ 1-1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1-2 \\ 1-1 \end{vmatrix} \right) = (-5, -2, 1)$ và $\vec{OA} = (1, -1, 1)$

Suy ra $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{OA} = (-5) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$. Từ đó suy ra $(d_1), (d_2)$ chéo nhau.

(ii). Giả sử mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a, b, c)$ với

$$a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

Đường thẳng (d_2) đi qua điểm $B(0, 0, -2)$.

$$\text{Do } (d_2) \in (P) \text{ nên } A, B \in (P) \Rightarrow \begin{cases} a-b+c+d=0 \\ -2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{b-a}{3} \\ d=\frac{2(b-a)}{3} \end{cases} (*)$$

Đường thẳng (d_1) và (P) tạo với nhau một góc 30° nên

$$\sin 30^\circ = \frac{|a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a-2b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\text{Thay } c = \frac{b-a}{3} \text{ từ } (*) \text{ vào biểu thức trên ta được : } 11a^2 + 17ab - 10b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = \frac{5}{11}b \end{cases}$$

Với $a = -2b \Rightarrow c = b, d = 2b$. Từ đó suy ra $(P_1): -2x + y + z + 2 = 0$.

Với $a = \frac{5}{11}b \Rightarrow c = \frac{2}{11}b, d = \frac{4}{11}b$. Từ đó suy ra $(P_2): 5x + 11y + 2z + 4 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm thỏa mãn :

$(P_1): -2x + y + z + 2 = 0$ và $(P_2): 5x + 11y + 2z + 4 = 0$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(1, 2, 1); B(-2, 1, 3); C(2, -1, 1); D(0, 3, 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ điểm C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P) .

Lời giải:

Giả sử mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

$$\text{Do } A, B \in (P) \text{ nên } \begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -2a+b+3c+d=0 \end{cases} (*)$$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} d(C, (P)) &= d(D, (P)) \Leftrightarrow \frac{|2a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \Leftrightarrow |2a-b+c+d| &= |3b+c+d| \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \end{aligned}$$

(i). Với $a = b$, kết hợp với $(*)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -2a+b+3c+d=0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ d=-c \end{cases} \Rightarrow (P): cz - c = 0 \Leftrightarrow (P): z - 1 = 0.$$

(ii). Với $a + b + c + d = 0$, kết hợp với $(*)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -2a+b+3c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=a \\ d=-2a \end{cases} \Rightarrow (P): ax + az - 2a = 0 \Leftrightarrow (P): x + z - 2 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm: $(P_1): z - 1 = 0; (P_2): x + z - 2 = 0$.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và hai điểm $A(2, -1, 1), B(0, 1, -2)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (d)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử điểm $M(t, 3-t, 2t-1) \in (d)$ là điểm cần tìm.

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t-2, 4-t, 2t-2) \\ \overrightarrow{BM} = (t, 2-t, 2t+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] = \begin{pmatrix} 4-t & 2t-2 \\ 2-t & 2t+1 \\ t & 2-t \end{pmatrix} = (t+8, t+2, -4)$$

$$\text{Khi đó } S_{ABM} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] = \frac{1}{2} \sqrt{(t+8)^2 + (t+2)^2 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{2(t+5)^2 + 34} \geq \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -5 \Rightarrow M(-5, 8, -11)$.

Vậy $M(-5, 8, -11)$ là điểm cần tìm.

Bài 7. Cho hai điểm $A(4, 9, -9), B(-10, 13, 1)$ và mặt phẳng. Tìm tọa độ điểm $M \in (P): x+5y-7z-5=0$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử điểm $M(x, y, z) \in (P) \Rightarrow x+5y-7z-5=0$, khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (x-4)^2 + (y-9)^2 + (z+9)^2 + (x+10)^2 + (y-13)^2 + (z-1)^2 \\ &= 2[(x+3)^2 + (y-11)^2 + (z+4)^2] + 156 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } x+5y-7z-5=0 \Leftrightarrow (x+3)+5(y-11)-7(z+4)=-75$$

Theo bất đẳng thức Cauchysharp ta có:

$$\begin{aligned} (-75)^2 &= ((x+3)+5(y-11)-7(z+4))^2 \leq (1+25+49)((x+3)^2 + (y-11)^2 + (z+4)^2) \\ \Rightarrow (x+3)^2 + (y-11)^2 + (z+4)^2 &\geq 75. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $MA^2 + MB^2 \geq 2 \cdot 75 + 156 = 306$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z+4}{-7} \Leftrightarrow x = -\frac{50}{17}; y = -\frac{192}{17}; z = \frac{75}{17} \Rightarrow M\left(-\frac{50}{17}, -\frac{192}{17}, \frac{75}{17}\right)$$

Là điểm cần tìm.

Bài 8. Cho ba điểm $A(4, 1, 5); B(3, 0, 1); C(-1, 2, 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+37=0$ để biểu thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi $M(x, y, z) \in (P) \Rightarrow 3x-3y+2z+37=0$. Khi đó

$$\overrightarrow{MA} = (x-4, y-1, z-5); \overrightarrow{MB} = (x-3, y, z-1); \overrightarrow{MC} = (x+1, y-2, z)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 3(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 4)$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

$$= 3[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - 5].$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(-44)^2 = (3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-2))^2 \leq (9+9+4)[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2]$$

Suy ra $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \geq 88$. Suy ra

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} \geq 3(88-5) = 249$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow x=4; y=7; z=-2 \Rightarrow M(4, 7, -2) \text{ là điểm cần tìm.}$$

Bài 9. Cho hai điểm $A(0, 1, 2); B(-1, 1, 0)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z = 0$ sao cho tam giác MAB vuông cân tại B .

Lời giải:

Giả sử điểm $M(x, y, z) \in (P)$ là điểm cần tìm suy ra $x - y + z = 0 (*)$

Ta có: $\overline{BA} = (1, 0, 2); \overline{BM} = (x+1, y-1, z)$. Tam giác MAB vuông cân tại B khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{BA} \cdot \overline{BM} = 0 \\ BA^2 = BM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ kết hợp với } (*) \text{ ta có hệ phương trình:}$$

$$\begin{cases} 5 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ y + z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-4+\sqrt{10}}{6} \\ z = \frac{-2-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-4+\sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-2+\sqrt{10}}{6} \\ z = \frac{-2+\sqrt{10}}{6} \end{cases}$$

Bài 10. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $I(0, 3, -1)$ cắt (d_1) tại A và cắt (d_2) tại B . Tính $\frac{IA}{IB}$.

Lời giải:

Do $A \in (d_1) \Rightarrow A(-1-t', -1+t', 3-t')$ và $B \in (d_2) \Rightarrow B(-1+2t, 1, t)$

Ta có: $\overline{IA} = (-1-t', t'-4, 4-t'); \overline{IB} = (-1+2t, -2, t+1)$. Do A, I, B thẳng hàng nên

$$\overline{IA} = k \overline{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-t' = k(-1+2t) \\ t'-4 = -2k \\ 4-t' = k(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -6 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = |k| = 5.$$

Bài 11. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $(d): \frac{x+3}{2} = y+1 = z-3$ và điểm $A(-2, 3, 4)$. Gọi (Δ) là đường thẳng nằm trong (P) và đi qua giao điểm của $(d), (P)$ và vuông góc với (d) . Tìm điểm $M \in (\Delta)$ sao cho khoảng cách AM nhỏ nhất.

Lời giải:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Giả sử $(d) \cap (P) = B$, khi đó tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = y+1 = z-3 \\ x+2y-z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow B(-1,0,4)$$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, 2, -1)$ và đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 1, 1)$.

$$\text{Ta có: } [\vec{n}, \vec{u}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 21 \end{pmatrix} = (3, -3, -3).$$

Do $(\Delta) \in (P)$ và vuông góc với (d) nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u} // [\vec{n}, \vec{u}] \Rightarrow \vec{u} = (1, -1, -1)$.

Vậy (Δ) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ và đi qua điểm B .

$$\text{Vậy } (\Delta): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Giả sử điểm cần tìm $M(-1+t, -t, 4-t) \in (\Delta)$, khi đó

$$MA = \sqrt{(t-2)^2 + (t+2)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{3}} \geq \sqrt{\frac{26}{3}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hai điểm $A(1, 5, 0), B(3, 3, 6)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 2. Cho điểm $A(1, 4, 2); B(-1, 2, 4)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2} \text{ sao cho } MA^2 + MB^2 = 28.$$

Bài 3. Cho ba điểm $A(0, 1, 2); B(2, -2, 1); C(-2, 0, 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho $MA = MB = MC$.

Bài 4. Cho điểm $A(1, 0, -1)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc

(d) sao cho tam giác AMN đều.

Bài 5. Cho mặt phẳng $(P): -2x + 3y - z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(1; 1; 0)$ và $B(-1; 2; 7)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, xác định mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: x = \frac{y-2}{-1} = z$

và tạo với đường thẳng $d': \frac{x-2}{2} = y-3 = \frac{z+5}{-1}$ một góc 30° .

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

$$d: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x - z - 6 = 0 \end{cases} \text{ sao cho giao tuyến của mặt phẳng } (P) \text{ và mặt cầu}$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0 \text{ là đường tròn có bán kính bằng } 1.$$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P) .

BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

Dưới đây xin đề cập một số bài toán cực trị liên quan đến phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương pháp:

Giả sử phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Khi đó dựa vào điều kiện bài toán để tìm ra mối liên hệ giữa A, B, C, D

Thường thì biểu diễn được A, D theo B, C .

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(0; -1; 2); N(-1; 1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ $K(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Lời giải:

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Do (P) đi qua M, N nên ta có:

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ -A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ D = B - 2C \end{cases} \Rightarrow (P): (2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$$

$$\text{Khi đó khoảng cách từ } K \text{ đến mặt phẳng } (P) \text{ là } d(K, (P)) = \frac{|B|}{\sqrt{4B^2 + 2C^2 + 4BC}}$$

❖ Nếu $B = 0 \Rightarrow d(K, (P)) = 0$.

$$\text{❖ Nếu } B \neq 0 \Rightarrow d(K, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{C}{B} + 1\right)^2 + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $C = -B$, chọn $C = 1; B = -1; A = -1; D = -3$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): x + y - z + 3 = 0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình: $d: \frac{x+1}{2} = y+1 = z-3$ và $(P): x+2y-z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Lời giải:

- Giả sử mặt phẳng $(Q): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$

- Chọn hai điểm $M(-1; -1; 3); N(1; 0; 4) \in (d)$

$$\text{- Mặt phẳng } (Q) \text{ chứa } (d) \text{ nên } M, N \in (Q) \Rightarrow \begin{cases} -A - B + 3C + D = 0 \\ A + 4C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -2A - B \\ D = 7A + 4B \end{cases}$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Suy ra mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (A; B; -2A - B)$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 2; -1)$. Khi đó góc α giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{|A+B|}{\sqrt{5A^2 + 2B^2 + 4AB}}$$

❖ Nếu $A = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$.

❖ Nếu $A \neq 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\left|1 + \frac{B}{A}\right|}{\sqrt{5 + 2\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 4\frac{B}{A}}}$, đặt $x = \frac{B}{A}$ xét hàm số

$$f(x) = \frac{9}{6} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{5 + 2x^2 + 4x}, \text{ dễ thấy } \cos^2 \alpha = f(x). \text{ Góc } \alpha \text{ lớn nhất ứng với } \cos \alpha \text{ nhỏ nhất.}$$

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số này suy ra $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(-1) = 0$. Suy ra

$$\min_{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{6}.$$

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{6}$ và $A = 0$ chọn $B = 1 \Rightarrow C = 1; D = 4$.

Vậy mặt phẳng cần tìm $(Q): y - z + 4 = 0$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

Lời giải:

- Giả sử mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$

- Chọn hai điểm $M(1; -2; 0); N(0; -1; 2) \in d$

- Mặt phẳng (P) chứa d nên $M, N \in (P) \Rightarrow \begin{cases} A - 2B + D = 0 \\ -B + 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{A-B}{2} \\ D = -A + 2B \end{cases}$

- Suy ra mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (A; B; \frac{A-B}{2})$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy , ta có

$$\sin \alpha = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}} = \frac{2|B|}{\sqrt{5A^2 + 5B^2 - 2AB}}$$

Góc $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lớn nhất ứng với $\sin \alpha$ lớn nhất.

❖ Nếu $B = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

$$\diamond \quad \text{Nếu } B \neq 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 5 - 2\frac{A}{B}}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(\frac{A}{B} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{24}{5}}} \leq \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{A}{B} = \frac{1}{5}$, chọn

$A = 1; B = 5 \Rightarrow C = -2; D = 9 \Rightarrow (P): x + 5y - 2z + 9 = 0$ là mặt phẳng cần tìm.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Lời giải:

- Giả sử mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (A; B; C)$.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 0; 2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; 2)$. Do (P) chứa d nên ta có

$$\begin{cases} \vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 0 \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + B + 2C = 0 \\ A + 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{2A+B}{2} \\ D = A+B \end{cases}$$

Suy ra mặt phẳng $(P): 2Ax + 2By - (2A + B)z + 2A + 2B = 0$

$\diamond$ Nếu $B = 0 \Rightarrow (P): x - z + 1 = 0 \Rightarrow d(A, (P)) = 0$.

$\diamond$ Nếu $B \neq 0$, chọn $B = 1$, khi đó $(P): 2Ax + 2y - (2A + 1)z + 2A + 2 = 0$

$$\text{Khi đó } d(A, (P)) = \frac{|9|}{\sqrt{8A^2 + 4A + 5}} = \frac{9}{\sqrt{2\left(2A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}} \leq 3\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = -\frac{1}{4} \Rightarrow C = -\frac{1}{4}; D = \frac{3}{4}$.

Vậy mặt phẳng cần tìm $(P): x - 4y + z - 3 = 0$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $A(10; 2; -1)$ song song với d và cách d một khoảng lớn nhất.

Lời giải:

- Giả sử mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (A; B; C)$.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 0; 1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; 3)$. Do (P) song song với d và chứa A nên ta có

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

$$\begin{cases} 10A + 2B - C + D = 0 \\ 2A + B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{2A+B}{3} \\ D = \frac{32A+7B}{3} \end{cases}$$

Khi đó mặt phẳng $(P): 3Ax + 3By - (2A + B)z + 32A + 7B = 0$ và ta có

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|33A + 6B|}{\sqrt{13A^2 + 10B^2 + 4AB}}$$

$$\diamond \quad \text{Nếu } B = 0 \Rightarrow d(d, (P)) = \frac{33\sqrt{13}}{13}$$

$$\diamond \quad \text{Nếu } B \neq 0 \Rightarrow d(d, (P)) = \frac{\left|33\frac{A}{B} + 6\right|}{\sqrt{13\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 10 + 4\frac{A}{B}}}, \text{ đặt } x = \frac{A}{B} \text{ và xét hàm số}$$

$$f(x) = \frac{(33x + 6)^2}{13x^2 + 4x + 10} \text{ suy ra } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(7). \text{ Từ đó chọn } A = 7, B = 1 \Rightarrow C = -5; D = -77.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm $(P): 7x + y - 5z - 77 = 0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trong các mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(-1; 1; 2)$. Tìm mặt phẳng tạo với mặt phẳng (xOy) một góc nhỏ nhất.

Bài 2. Trong các mặt phẳng đi qua $A(1; 1; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 2 = 0$. Tìm mặt phẳng tạo với Oy một góc lớn nhất.

Bài 3. Trong các mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 0)$ và song song với đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}. \text{ Xác định mặt phẳng tạo với mặt phẳng } (xOy) \text{ một góc nhỏ nhất.}$$

Bài 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{5}$ sao cho khoảng cách từ $A(5; 1; 6)$ đến (α) là lớn nhất.

TAM GIÁC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tam giác ABC , đỉnh $A(1, 2, 5)$ và phương trình hai đường trung tuyến:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ và } \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

(i). Viết phương trình chính tắc các cạnh của tam giác ABC .

(ii). Viết phương trình chính tắc của đường phân giác trong góc A .

Lời giải:

(i). Nhận thấy A không thuộc hai đường trung tuyến, nên ta giả sử đó là:

$$(BN): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ và } (CP): \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Từ đó suy ra $B(-2t+3, 2t+6, t+1); C(u+4, -4u+2, u+2)$

Tọa độ trọng tâm $G = (BN) \cap (CP)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1} \\ \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow G(3, 6, 1)$$

Ta có $\overrightarrow{GA} = (-2, -4, 4); \overrightarrow{GB} = (-2t, 2t, t); \overrightarrow{GC} = (u+1, -4u-4, u+1)$

$$\text{Do } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -2-2t+u+1=0 \\ -4+2t-4u-4=0 \\ 4+t+u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ u=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(7, 2, -1) \\ C(1, 14, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6, 0, -6) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 12, -6) \end{cases}$$

Cạnh AB đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} \Rightarrow (AB): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{-1}$.

Một cách tương tự, ta có:

$$(AC): \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-1}; (BC): \frac{x-7}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}.$$

(ii). Lấy điểm $C_1(1, 2v+2, -v+5) \in (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} = (0, 2v, -v)$ sao cho $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC}, k > 0$. Và $AB = AC_1$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 2v = 12k \\ -v = -6k \\ k > 0 \\ \sqrt{5v^2} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow v = \frac{6\sqrt{10}}{5} \Rightarrow C_1\left(1, \frac{10+12\sqrt{10}}{5}, \frac{25-6\sqrt{10}}{5}\right)$$

Tọa độ trung điểm M của BC_1 là $M(4,)$

Đường phân giác trong của góc A chính là đường thẳng AM .

Bài 2. Cho hai điểm $A(0, 0, -3), B(2, 0, -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$.

(i). Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng đi qua hai điểm A, B với mặt phẳng (P) .

(ii). Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC đều.

Lời giải:

(i). Đường thẳng (AB) đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2)$, nên

$$(AB): \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

Thay x, y, z từ phương trình của (AB) vào phương trình của (P) , ta được:

$$3 \cdot 2t - 8 \cdot 0 + 7(-3 + 2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{10} \Rightarrow (AB) \cap (P) = I\left(\frac{11}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right).$$

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

(ii). Gọi $C(x, y, z) \in (P)$ sao cho tam giác ABC đều, khi đó

$$\begin{cases} 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \\ AC^2 = BC^2 \\ AC^2 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 2^2 + 2^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm $C_1(2, -2, -3); C_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. Cho tam giác ABC có đỉnh $C(3, 2, 3)$ và phương trình đường cao

$$AH: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ và đường phân giác trong } BM: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(2+t, 3+t, 3-2t) \in (AH) \\ B(1+u, 4-2u, 3+u) \in (BM) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (u-2, 2u-2, -u) \end{cases}$$

$$\text{Do } AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2+u) + (2-2u) - 2u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow B(1, 4, 3).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} = (1+t, -1+t, -2t); \overrightarrow{BM} = (1, -2, 1); \overrightarrow{BC} = (2, -2, 0)$$

Vì BM là đường phân giác trong của góc B , do đó

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \frac{(1+t) - 2(-1+t) - 2t}{\sqrt{(1+t)^2 + (-1+t)^2 + 4t^2}} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0}{\sqrt{4+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases} +$$

với $t = 0 \Rightarrow A(2, 3, 3) \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng, nên loại.

+ Với $t = -1 \Rightarrow A(1, 2, 5)$, khi đó $AB = AC = BC = 2\sqrt{2}$.

Bài 4. Cho ba điểm $A(1, 4, 5); B(0, 3, 1); C(2, -1, 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P) . Xác định tọa độ điểm đó.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất, khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, điều này tương đương với M là hình chiếu vuông góc của G trên (P) . Ta có đpcm.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Dễ thấy $G(1, 2, 2)$

Đường thẳng (d) đi qua G và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận véc tơ pháp tuyến

$\vec{n} = (3, -3, -2)$ của (P) làm véc tơ chỉ phương, nên

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Khi đó điểm M cần tìm chính là giao điểm của $(d), (P) \Rightarrow M(4, -1, 0)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

MẶT CẦU

Phương trình chính tắc của mặt cầu (S) có tâm $I(a, b, c)$ và bán kính R là

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Phương trình tổng quát của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Các dạng bài toán

Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp khối đa diện hoặc có tâm thỏa mãn điều kiện nào đó.

(i). Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Phương pháp:

Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Từ điều kiện A, B, C, D thuộc (S) , ta thay tọa độ của A, B, C, D lần lượt vào phương trình của (S) , giải hệ 4 ẩn a, b, c, d .

(ii). Mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

(iii). Mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $(d_1), (d_2)$.

Phương pháp:

Tìm tọa độ trung điểm của đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$ và độ dài đoạn vuông góc chung.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(0, 1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 0, 1)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

Lời giải:

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điểm $A(0, 1, 0) \in (S) \Rightarrow 1 - 2b + d = 0(1)$.

$$\text{Tương tự có: } \begin{cases} 1 - 2a + d = 0(2) \\ 1 - 2c + d = 0(3) \\ a + b + c - 3 = 0(4) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), (4) ta được: $a = b = c = d = 1$.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Vậy $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$.

Bài 2. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u \\ z = 3u + 1 \end{cases}$

Viết phương trình đường vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$. Và viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$.

Lời giải:

(i). Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 1, 3)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Lấy điểm $A(2t + 1, t + 2, 3t - 3) \in (d_1); B(u + 2, -3 + 2u, 3u + 1) \in (d_2)$ suy ra

$\Rightarrow \overline{AB} = (u - 2t + 1, 2u - t - 5, 3u - 3t + 4)$, và AB là đoạn vuông góc chung của

$$(d_1), (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u - 2t + 1) + 2u - t - 5 + 3(3u - 3t + 4) = 0 \\ u - 2t + 1 + 2(2u - t - 5) + 3(3u - 3t + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{25}{9} \\ t = \frac{29}{9} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $A\left(\frac{67}{9}, \frac{47}{9}, \frac{20}{3}\right); B\left(\frac{43}{9}, \frac{23}{9}, \frac{84}{9}\right); \overline{AB} = \left(\frac{-24}{9}, \frac{-24}{9}, \frac{24}{9}\right) = \frac{24}{9}(-1, -1, 1)$

Vậy phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$ đi qua A và có véc tơ chỉ phương $(-1, -1, 1)$

$$\text{Vậy } AB: \begin{cases} x = \frac{67}{9} - t \\ y = \frac{47}{9} - t \\ z = \frac{20}{3} + t \end{cases}$$

(ii). Tọa độ trung điểm I của AB là $I\left(\frac{55}{9}, \frac{35}{9}, 8\right)$ và $AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

Khi đó mặt cầu cần tìm là $(S): \left(x - \frac{55}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{35}{9}\right)^2 + (z - 8)^2 = \frac{48}{9}$.

Dạng 2: Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu với mặt cầu và các bài toán liên quan.

(i). Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng.

(ii). Mặt cầu cắt mặt phẳng.

(iii). Mặt cầu cắt, tiếp xúc với đường thẳng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $(d): \begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$ và $(Q): x+2y-2z+4=0$.

Bài 2. Cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+2=0$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên (d) , tiếp xúc với (P) và có bán kính bằng 1.

Bài 3. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P): 5x-4y+z-6=0$ và $(Q): 2x-y+z+7=0$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm tại giao điểm của $(d), (P)$, biết (Q) cắt (S) theo thiết diện là hình tròn có diện tích $20\pi^2$.

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(3, 2, 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}.$$

Bài 5. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1, 1, 1)$ cắt đường thẳng $(d): \begin{cases} x-2y+z-9=0 \\ 2y+z+5=0 \end{cases}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài $AB=16$.

Bài 6. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 6 = 0$.

Tìm điểm $M \in (S)$ sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. Chứng minh rằng mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$ cắt mặt phẳng $x - 2y + 2z + 1 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Viết phương trình mặt cầu (S) chứa (C) và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z + 3 = 0$.

Bài 8. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0, \text{ đồng thời song song với hai đường thẳng}$$

$$(d_1): \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2} \text{ và } (d_2): \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}.$$

Bài 9. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $(d): \begin{cases} 8x-11y+8z-30=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ và tiếp

$$\text{xúc với mặt cầu } (S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hai điểm $A(2, 1, 1); B(0, -1, 3)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} 3x-2y-11=0 \\ y+3z-8=0 \end{cases}$

(i). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB . Gọi K là giao điểm của $(d), (P)$. Chứng minh rằng IK vuông góc với (d) .

(ii). Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng $(Q): x + y - z + 1 = 0$.

Bài 2. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(i). Chứng minh rằng $(d_1), (d_2)$ chéo nhau.

(ii). Tìm điểm $M \in (d_1), N \in (d_2)$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(P): x - y + z = 0$ và độ dài $MN = \sqrt{2}$.

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $A(0,0,0); B(2,0,0); D_1(0,2,2)$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tỷ số khoảng cách từ điểm $N \in AC_1, N \neq A$ tới hai mặt phẳng $(AB_1D_1), (AMB_1)$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

Bài 4. Cho hai điểm $A(4,0,0); B(0,4,0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 4 = 0$. Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm K cách đều gốc tọa độ và mặt phẳng (P) sao cho $IK \perp (P)$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ và $(d_2): \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

Tìm điểm $A \in (d_1), B \in (d_2)$ sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Bài 6. Cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$.

Xác định giao điểm M của $(d), (P)$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với (d) sao cho khoảng cách từ M đến (Δ) bằng $\sqrt{42}$.

Bài 7. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và $(d_2): \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (d_1), N \in (d_2)$ sao cho MN song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

Bài 8. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-4, -9, 12)$ và cắt các trục tọa độ

Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\begin{cases} OC = OA + OB \\ \frac{4}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} \end{cases}$.

Bài 9. Cho điểm $I(0,1,3)$ và hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và

$(d_2): \begin{cases} 5x - 6y - 6z + 13 = 0 \\ x - 6y + 6z - 7 = 0 \end{cases}$

(i). Chứng minh rằng $(d_1), (d_2)$ chéo nhau.

(ii). Tìm điểm $A \in (d_1), B \in (d_2)$ sao cho tam giác IAB có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 10. Cho điểm $A(0,1,2)$ và hai đường thẳng $(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và $(d_2): \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=2+t \end{cases}$

Tìm tọa độ điểm $M \in (d_1), N \in (d_2)$ sao cho A, M, N thẳng hàng.

Bài 11. Cho điểm $A(0,1,0); B(2,2,2); C(-2,3,1)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

(i). Tìm điểm $M \in (d)$ để thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3.

(ii). Tìm điểm $N \in (d)$ để cho diện tích tam giác NAB nhỏ nhất.

Bài 12. Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua giao tuyến của (P) và mặt phẳng (xOy) và (Q) tạo với ba mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Bài 13. Tìm trên đường thẳng Ox điểm A cách đều đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z = 0$.

Bài 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 9 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) , nằm trên (P) và cắt trục hoành.

Bài 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;2;1)$, 2 điểm B, D nằm trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$, điểm C nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$.

Tìm tọa độ điểm B biết tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có các phương trình tương ứng là $2x - y + 2z - 1 = 0$ và $2x - y + 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu bất kỳ qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a .

(i). Tính theo a khoảng cách giữa A_1B và B_1D .

(ii). Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BB_1, CD, A_1D_1 . Tính góc giữa MP và C_1N .

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD, CD . Lấy điểm $P \in BB_1, BP = 3PB_1$. Tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, AD = 2a, AA_1 = a$.

(i). Tính theo a khoảng cách giữa AD_1, B_1C .

(ii). Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỷ số $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB_1C) .

(iii). Tính thể tích tứ diện AB_1D_1C .

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Và có

$AC = AD = 4, AB = 3, BC = 5$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DD_1 .

(i). Chứng minh rằng $MN \parallel (A_1BD)$.

(ii). Tính khoảng cách giữa BD và MN theo a .

Bài 6. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng 1. Lấy M, N, P theo thứ tự thuộc BB_1, CD, A_1D_1 sao cho $B_1M = CN = D_1P = a (0 < a < 1)$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA_1}$ và $\overrightarrow{AC_1}$ vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Bài 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, C_1 xuống mặt phẳng (CB_1D_1) . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KC_1}$.

