

Câu 1 (5,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:
$$\begin{cases} x + y = 3\sqrt{y-5} + 3\sqrt{x+3} \\ \sqrt{x^2 + 6(y-x)} + 2\sqrt{xy} = 3y \end{cases}$$

Câu 2 (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)\left((f(x))^2 + y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 3 (5,0 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và không vuông góc nhau, đồng thời hai đường chéo không vuông góc với các cạnh của tứ giác. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đi qua O và vuông góc với các đường thẳng AB, AD, BC . Trên đường thẳng d_1 lấy một điểm G di động. Đường thẳng GA cắt d_2 tại F sao cho điểm A nằm giữa G và F , đường thẳng GB cắt d_3 tại H sao cho điểm B nằm giữa G và H .

a) Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác OAD và OBC . Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng KL chính là trục đẳng phương Δ của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

b) Chứng minh khi G thay đổi, đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định hoặc luôn song song với một đường thẳng cố định.

Câu 4 (5,0 điểm)

Trên bảng được viết 2026 số nguyên. Mỗi bước, giáo viên cho phép học sinh thực hiện thao tác như sau: Chọn ra hai số a và b bất kỳ trên bảng thỏa mãn điều kiện khoảng cách giữa chúng lớn hơn 70 (tức là $|a - b| > 70$), sau đó xóa hai số này đi và viết lên bảng hai số nguyên

$$\text{mới là } \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor \text{ và } \left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil.$$

(Trong đó, ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x , tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x ; và $\lceil x \rceil$ là phần trần của x , tức là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng x).

a) Chứng minh sau một số hữu hạn bước, quá trình trên phải dừng lại (tức là không thể tìm được cặp số a, b nào thỏa mãn điều kiện $|a - b| > 70$).

b) Giả sử quá trình đã dừng lại. Chứng minh trên bảng luôn tồn tại ít nhất 29 số có giá trị bằng nhau.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI HỌC SINH GIỎI VÒNG II CÁC MÔN VĂN HÓA CẤP THPT
TÂY NINH

NĂM 2026

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề có 01 trang, gồm 03 câu)

Ngày thi: 20/09/2026 (Buổi thi thứ hai)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (6,0 điểm)

- a. (2,5 điểm) Cho hai số nguyên dương u, v nguyên tố cùng nhau. Chứng minh mọi ước nguyên tố $q > 3$ của $A = u^2 - uv + v^2$ đều có dạng $6k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- b. (3,5 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) , với $(x, 70) = 1$, thỏa mãn phương trình sau:

$$x^6 + 70^6 = 2089^9 - 62^9.$$

Câu 2: (7,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{2(n+1)u_n - n - 2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

- a. (3,0 điểm) Tính $\lim \left(\frac{u_n}{n} - 2^n \right)$.
- b. (4,0 điểm) Có hay không số $i \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_i \cdot u_{i+1} = m \cdot 2027^2$ với m là một số nguyên dương? Tại sao?

Câu 3: (7,0 điểm)

- a. (3,0 điểm) Cho A là bảng các ô vuông có kích thước 2026×2026 . Điền vào mỗi ô của bảng A một số thuộc tập hợp $M = \{-1; 0; 1\}$. Có bao nhiêu cách điền sao cho tổng của bốn số trên mỗi bảng vuông con 2×2 bất kì đều bằng 0?
- b. (4,0 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tập hợp S gồm 62 điểm phân biệt có tọa độ nguyên sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Với mỗi cặp điểm phân biệt $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ thuộc S , ta xét đại lượng:

$$T(A, B) = (x_A - x_B)^2 + 70(y_A - y_B)^2.$$

Hai điểm A, B được gọi là "liên kết" với nhau nếu $T(A, B)$ chia hết cho 3.

Chứng minh tồn tại một tam giác có ba đỉnh thuộc S , đôi một "liên kết" với nhau mà diện tích là một số nguyên chia hết cho 9.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Giám thị không giải thích gì thêm.

CHỌN ĐTQG TÂY NINH 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P1)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:
$$\begin{cases} x + y = 3\sqrt{y-5} + 3\sqrt{x+3}, \\ \sqrt{x^2 + 6(y-x)} + 2\sqrt{xy} = 3y. \end{cases}$$

 Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq 0, y \geq 5$.

Từ phương trình thứ nhất, ta có $x + y = 3\sqrt{y-5} + 3\sqrt{x+3}$.

Bình phương hai vế, ta được $(x+y)^2 - 9(x+y) + 18 = 18\sqrt{(y-5)(x+3)} \geq 0$.

Do đó $(x+y-3)(x+y-6) \geq 0$.

Mặt khác $x+y \geq 5$, nên $x+y-3 > 0$. Suy ra $x+y \geq 6$.

Phương trình thứ hai được viết lại thành $\sqrt{x^2 - 6x + 6y} = 3y - 2\sqrt{xy}$, ta sẽ chứng minh $x = y$.

♦ Giả sử $x > y$. Vì $y > 0$ nên $\sqrt{xy} > y$. Do đó $0 \leq \sqrt{x^2 - 6x + 6y} = 3y - 2\sqrt{xy} < y$.

Bình phương hai vế, ta có $x^2 - 6x + 6y < y^2$, hay $(x-y)(x+y-6) < 0$.

Điều này vô lý vì $x-y > 0$ và $x+y-6 \geq 0$.

♦ Giả sử $x < y$. Khi đó $\sqrt{xy} < y$, nên $\sqrt{x^2 - 6x + 6y} = 3y - 2\sqrt{xy} > y > 0$.

Bình phương hai vế, ta được $x^2 - 6x + 6y > y^2$, hay $(x-y)(x+y-6) > 0$.

Nhưng $x-y < 0$ và $x+y-6 \geq 0$, mâu thuẫn.

Vậy $x = y$ và thay vào phương trình thứ nhất, ta có $2x = 3\sqrt{x-5} + 3\sqrt{x+3}$, và theo Cauchy thì

$$3\sqrt{x-5} = 3\sqrt{1 \cdot (x-5)} \leq \frac{3x-12}{2}, \quad 3\sqrt{x+3} = \sqrt{9 \cdot (x+3)} \leq \frac{x+12}{2}$$

Suy ra $3\sqrt{x-5} + 3\sqrt{x+3} \leq 2x$, do đó dấu bằng xảy ra nên $x = 6$.

Thử lại dễ thấy được nghiệm duy nhất của hệ là $x = y = 6$

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P2)

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)((f(x))^2 + y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

 Lời giải.

Ta có $f(f(x) + y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)((f(x))^2 + y^2)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = \frac{x^4 - f(x)}{2}$. Khi đó $f(x) + y = x^4 - y = \frac{x^4 + f(x)}{2}$.

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$0 = 4(x^4 - f(x))f(x) \left(f(x)^2 + \frac{(x^4 - f(x))^2}{4} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra với mỗi $x \in \mathbb{R}$, hoặc $f(x) = 0$, hoặc $f(x) = x^4$, hoặc $f(x)^2 + \frac{(x^4 - f(x))^2}{4} = 0$.

Trong trường hợp cuối, ta cũng có $f(x) = 0$, nên với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có

$$f(x) \in \{0, x^4\}$$

Bây giờ giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$.

Thay $x = a$ vào phương trình, ta có $f(y) = f(a^4 - y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $f(y) \neq 0$ thì theo kết quả trên, ta cũng có được $f(y) = y^4$.

Do $f(a^4 - y) = f(y) \neq 0$, ta cũng có $f(a^4 - y) = (a^4 - y)^4$.

Suy ra $y^4 = (a^4 - y)^4$. Do đó $y = a^4 - y$ hoặc $y = -(a^4 - y)$.

Trường hợp thứ hai cho $a^4 = 0$, vô lý vì $a \neq 0$. Vậy $y = \frac{a^4}{2}$.

Đặt $b = \frac{a^4}{2}$, để ý từ các nhận xét trên ta đã chứng minh $f(y) = 0$ với mọi $y \neq b$.

Giờ ta sẽ chứng minh $f(b) = 0$. Giả sử ngược lại $f(b) \neq 0$. Khi đó $f(b) = b^4$.

Thay $x = b$ vào phương trình, ta được

$$f(b^4 + y) = f(b^4 - y) + 8yb^4(b^8 + y^2)$$

Chọn $y \notin \{0, b - b^4, b^4 - b\}$ thì $b^4 + y \neq b$ và $b^4 - y \neq b$, nên $f(b^4 + y) = f(b^4 - y) = 0$.

Suy ra $8yb^4(b^8 + y^2) = 0$, vô lý vì $b \neq 0$ và $y \neq 0$. Do đó $f(b) = 0$.

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giờ ta xét trường hợp không tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$, suy ra $f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại để thấy được tất cả các hàm thỏa mãn là $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoặc $f(x) = x^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P3)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và không vuông góc nhau, đồng thời hai đường chéo không vuông góc với các cạnh của tứ giác. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đi qua O và vuông góc với các đường thẳng AB, AD, BC . Trên đường thẳng d_1 , lấy một điểm G di động. Đường thẳng GA cắt d_2 tại F sao cho điểm A nằm giữa G và F ; đường thẳng GB cắt d_3 tại H sao cho điểm B nằm giữa G và H .

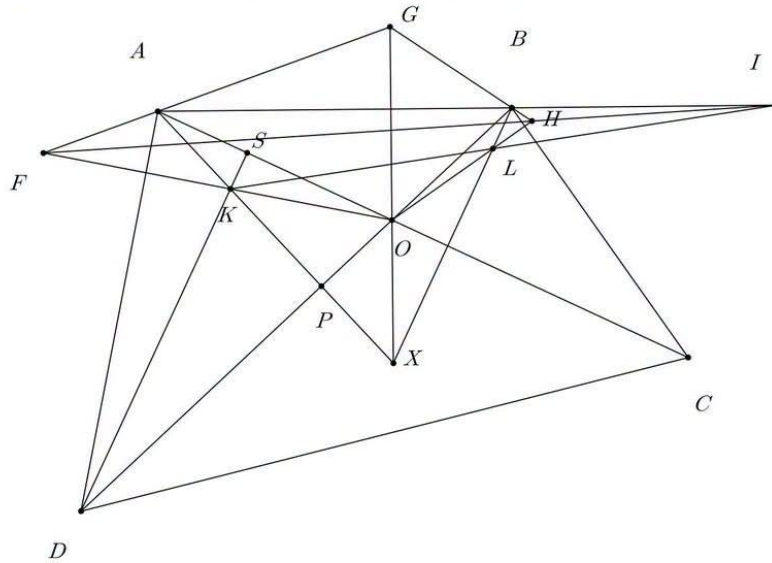
- ① Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác OAD và OBC . Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng KL chính là trục đẳng phương Δ của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .
- ② Chứng minh khi G thay đổi, đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định hoặc luôn song song với một đường thẳng cố định.

Lời giải.

- ① Gọi AK, DK cắt OD và OA lần lượt tại P và S . Ta có $\mathcal{P}_{K/(AB)} = \overline{KA} \cdot \overline{KP}$ và $\mathcal{P}_{K/(CD)} = \overline{KS} \cdot \overline{KD}$

Mà ta có: A, S, P, D cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AD dẫn đến: $\overline{KA} \cdot \overline{KP} = \overline{KS} \cdot \overline{KD}$ và suy ra: K thuộc trục đẳng phương của (AB) và (CD) . Tương tự: L thuộc trục đẳng phương của (AB) và (CD) . Do đó ta có điều phải chứng minh.

- ② Gọi AK cắt BL tại X , ta có: O là trực tâm BXC dẫn đến: OG, AK, BL đồng quy tại X . Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác OKL và GAB dẫn đến: FH, AB, KL đôi một đồng quy hoặc song song đôi một suy ra điều phải chứng minh.



Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P4)

Trên bảng được viết 2026 số nguyên. Mỗi bước, giáo viên cho phép học sinh thực hiện thao tác như sau: Chọn ra hai số a và b bất kỳ trên bảng thỏa mãn khoảng cách giữa chúng lớn hơn 70 (tức là $|a - b| > 70$), xóa hai số này đi và viết lên bảng hai số nguyên mới là $\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$ và $\left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil$.

- 1 Chứng minh sau một số hữu hạn bước, quá trình trên phải dừng lại (tức là không thể tìm được cặp số a, b nào thỏa mãn điều kiện $|a - b| > 70$).
- 2 Giả sử quá trình đã dừng lại. Chứng minh trên bảng luôn tồn tại ít nhất 29 số có giá trị bằng nhau.

Lời giải.

- 1 Gọi S là tổng bình phương của 2026 số đang có trên bảng.

Ta sẽ chứng minh sau mỗi thao tác, S đều giảm một số nguyên dương.

Xét hai số được chọn là a, b và đặt $d = |a - b| > 70$, nên $d \geq 71$.

Nếu $a + b$ chẵn thì hai số mới đều bằng $\frac{a+b}{2}$. Khi đó phần giảm của S là

$$a^2 + b^2 - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(a-b)^2}{2} > 0.$$

Nếu $a + b$ lẻ thì hai số mới là $\frac{a+b-1}{2}$ và $\frac{a+b+1}{2}$. Khi đó phần giảm của S là

$$a^2 + b^2 - \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a+b+1}{2} \right)^2 = \frac{(a-b)^2 - 1}{2} > 0.$$

Vì tất cả các số trên bảng đều nguyên nên S luôn là một số nguyên không âm. Do đó S không thể giảm ngặt vô hạn lần. Suy ra quá trình phải dừng sau hữu hạn bước.

- 2 Khi quá trình dừng, với mỗi hai số a, b trên bảng ta có $|a - b| \leq 70$. Gọi m là số nhỏ nhất trên bảng.

Khi đó mọi số trên bảng đều thuộc tập $\{m, m+1, \dots, m+70\}$, gồm đúng 71 giá trị nguyên.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 2026 số phải có ít nhất $\left\lceil \frac{2026}{71} \right\rceil = 29$ số bằng nhau.

CHỌN ĐTQG TÂY NINH 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P5)

- ① Cho hai số nguyên dương u, v nguyên tố cùng nhau. Chứng minh mọi ước nguyên tố $q > 3$ của $A = u^2 - uv + v^2$ đều có dạng $6k + 1, k \in \mathbb{N}^*$.

- ② Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) , với $(x, 70) = 1$, thỏa mãn phương trình

$$x^6 + 70^6 = 2089^y - 62^y.$$

 Lời giải.

- ① Giả sử $q > 3$ là một ước nguyên tố của $A = u^2 - uv + v^2$. Vì $(u, v) = 1$, ta có $q \nmid u$ và $q \nmid v$.

Khi đó tồn tại v^{-1} sao cho $v \cdot v^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, và đặt $t \equiv uv^{-1} \pmod{q}$ để suy ra được

$$t^2 - t + 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

Do đó $t^3 \equiv -1 \pmod{q}$. Nếu $t \equiv -1 \pmod{q}$ thì $t^2 - t + 1 \equiv 3 \pmod{q}$, vô lý vì $q > 3$.

Vì vậy $\text{ord}_q t = 6$, và theo Fermat nhỏ thì $q - 1$ chia hết cho 6 nên $q = 6k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

- ② Để ý $2027 \mid 2089^y - 62^y$ nên $2027 \mid x^6 + 70^6$. Theo bổ đề quen thuộc về số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod{4}$, ta có x^3 và 70^3 đều chia hết cho 2027, tức là 70 chia hết cho 2027, vô lý.

Do đó không tồn tại các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P6)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{2(n+1)u_n - n - 2}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- ① Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{n} - 2^n \right)$.

- ② Có hay không số $i \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_i u_{i+1} = m \cdot 2027^2$ với m là một số nguyên dương? Tại sao?

 Lời giải.

- ① Từ đề bài ta có $\frac{u_{n+1}}{n+1} = 2 \frac{u_n}{n} - \frac{n+2}{n(n+1)} = 2 \frac{u_n}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$.

Do đó $\frac{u_{n+1} - 1}{n+1} = 2 \frac{u_n - 1}{n}$. Đặt $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$ thì $v_{n+1} = 2v_n$ và $v_1 = 2$.

Suy ra $v_n = 2^n$, tức là $u_n = 1 + n \cdot 2^n$ với mọi $n \geq 1$.

Vì vậy $\frac{u_n}{n} - 2^n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$, nên giới hạn cần tìm bằng 0.

- ② Ta sẽ chỉ ra rằng $i = 2025$ thỏa mãn yêu cầu.

Ta có $u_{2025} = 2025 \cdot 2^{2025} + 1 \equiv (-2) \cdot 2^{2025} + 1 \equiv 1 - 2^{2026} \equiv 0 \pmod{2027}$.

Mặt khác, $u_{2026} = 2026 \cdot 2^{2026} + 1 \equiv -2^{2026} + 1 \equiv 0 \pmod{2027}$.

Vì vậy $u_{2025} u_{2026}$ chia hết cho 2027^2 nên câu trả lời là có, chẳng hạn với $i = 2025$.

Nhận xét.

Khi đổi bài toán thành $u_i u_{i+1} = m \cdot 2027^k$ với $k \geq 2$ cho trước thì câu trả lời vẫn là tồn tại $i \in \mathbb{N}^*$, tuy nhiên lúc này bài toán sẽ khó hơn một chút.

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Tây Ninh TST - P7)

- Cho A là bảng các ô vuông có kích thước 2026×2026 . Điền vào mỗi ô của bảng A một số thuộc tập hợp $M = \{-1, 0, 1\}$. Có bao nhiêu cách điền sao cho tổng của bốn số trên mỗi bảng vuông con 2×2 bất kì đều bằng 0?
- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tập hợp S gồm 62 điểm phân biệt có tọa độ nguyên sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Với mỗi cặp điểm phân biệt $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ thuộc S , ta xét đại lượng $T(A, B) = (x_A - x_B)^2 + 70(y_A - y_B)^2$.
Hai điểm A, B được gọi là **liên kết** với nhau nếu $T(A, B)$ chia hết cho 3. Chứng minh tồn tại một tam giác có ba đỉnh thuộc S , đôi một **liên kết** với nhau mà diện tích là một số nguyên chia hết cho 9.

Lời giải.

- Ta giải bài toán tổng quát cho bảng $n \times n$.

Gọi $a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ là số được điền vào ô thuộc hàng i , cột j .

Điều kiện đề bài cho $a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} = 0$, hay $a_{i+1,j+1} = -a_{i,j} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1}$.

Do đó, nếu đã biết hàng đầu tiên và cột đầu tiên thì ta lần lượt xác định được tất cả các ô còn lại của bảng. Đặt $x_i = (-1)^{i+1} a_{i,1}$ và $y_j = (-1)^{j+1} a_{1,j}$.

Ta có $x_1 = y_1 = a_{1,1}$. Từ điều kiện trên, bằng quy nạp theo $i + j$, ta thu được

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} (x_i + y_j - a_{1,1}).$$

bởi công thức đúng tại các ô (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$ thì công thức cũng đúng tại $(i + 1, j + 1)$ do

$$a_{i+1,j+1} = -a_{i,j} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1} = (-1)^{i+j} (x_{i+1} + y_{j+1} - a_{1,1}).$$

Vì $a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ nên ta có điều kiện cần và đủ là $x_i + y_j - x_1 \in \{-1, 0, 1\}$ với mọi i, j .

Giờ ta đếm số cách điền theo giá trị của $x_1 = y_1$.

Trường hợp 1. $x_1 = y_1 = 0$.

Khi đó điều kiện trở thành $x_i + y_j \in \{-1, 0, 1\}$. Ta xét dãy $x_2, \dots, x_n$.

- ◇ Nếu $x_2 = \dots = x_n = 0$ thì dãy $y_2, \dots, y_n$ được chọn tùy ý trong $\{-1, 0, 1\}$, nên có 3^{n-1} cách.
- ◇ Nếu các x_i chỉ nhận các giá trị 0, 1 và có ít nhất một giá trị bằng 1, thì có $2^{n-1} - 1$ cách chọn dãy (x_i) . Khi đó mọi y_j phải thuộc $\{-1, 0\}$, nên có 2^{n-1} cách chọn dãy (y_j) .
- ◇ Tương tự, nếu các x_i chỉ nhận các giá trị $-1, 0$ và có ít nhất một giá trị bằng -1 , ta cũng có $(2^{n-1} - 1)2^{n-1}$ cách.
- ◇ Cuối cùng, nếu dãy (x_i) chứa cả 1 và -1 , thì trong tổng số 3^{n-1} dãy, ta loại đi dãy toàn 0, các dãy chỉ chứa 0, 1 và có ít nhất một số 1, cùng các dãy chỉ chứa $-1, 0$ và có ít nhất một số -1 . Do đó số cách chọn là $3^{n-1} - 1 - 2(2^{n-1} - 1) = 3^{n-1} - 2^n + 1$, và mọi y_j buộc phải bằng 0.

Vậy số cách trong trường hợp này là

$$A = 3^{n-1} + 2(2^{n-1} - 1)2^{n-1} + 3^{n-1} - 2^n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1} - 2^{n+1} + 1$$

Trường hợp 2. $x_1 = y_1 = 1$.

Điều kiện trở thành $x_i + y_j - 1 \in \{-1, 0, 1\}$, hay tương đương với $x_i + y_j \geq 0$.

- ◇ Nếu $x_2 = \dots = x_n = 1$ thì dãy $y_2, \dots, y_n$ được chọn tùy ý, nên có 3^{n-1} cách.
- ◇ Nếu các x_i chỉ nhận các giá trị 0, 1 và có ít nhất một giá trị bằng 0, thì có $2^{n-1} - 1$ cách chọn dãy (x_i) . Khi đó mọi y_j phải thuộc $\{0, 1\}$, nên có 2^{n-1} cách chọn dãy (y_j) .
- ◇ Nếu dãy (x_i) có ít nhất một giá trị bằng -1 , thì có $3^{n-1} - 2^{n-1}$ cách chọn. Khi đó tất cả y_j đều phải bằng 1.

Vậy số cách trong trường hợp này là

$$B = 3^{n-1} + (2^{n-1} - 1)2^{n-1} + 3^{n-1} - 2^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} + 4^{n-1} - 2^n.$$

Trường hợp $x_1 = y_1 = -1$ hoàn toàn tương tự trường hợp trên, nên cũng có B cách.

Vậy tổng số cách điền cần tính là

$$S_n = A + 2B = 4 \cdot 4^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+2} + 1 = 4^n + 2 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1$$

Với $n = 2026$, số cách cần tính là $4^{2026} + 2 \cdot 3^{2026} - 4 \cdot 2^{2026} + 1$

- 2** Để ý 2 điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ liên kết khi và chỉ khi $x_A \equiv x_B \pmod{3}$ và $y_A \equiv y_B \pmod{3}$.

Chia 62 điểm của S vào 9 bộ theo cặp số dư $(x \pmod{3}, y \pmod{3})$.

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một bộ chứa ít nhất $\left\lceil \frac{62}{9} \right\rceil = 7$ điểm, giả sử là $A_1, \dots, A_7$.

Khi đó mọi bộ hai điểm trong số này đều liên kết.

Giả sử các điểm trên có dạng $A_i = (3X_i + r, 3Y_i + s)$ với $X_i, Y_i \in \mathbb{Z}$.

Với ba điểm $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, diện tích tam giác $A_1A_2A_3$ là

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \\ &= \frac{9}{2} |(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)|. \end{aligned}$$

Xét 7 cặp (X_i, Y_i) theo modulo 2, để ý tồn tại hai điểm, chẳng hạn A_1, A_2 , sao cho $X_1 \equiv X_2 \pmod{2}$ và $Y_1 \equiv Y_2 \pmod{2}$. Chọn A_3 bất kỳ trong 5 điểm còn lại. Khi đó cả $X_2 - X_1$ và $Y_2 - Y_1$ đều chẵn, suy ra

$$(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)$$

là số chẵn. Vì thế diện tích tam giác $A_1A_2A_3$ là một số nguyên chia hết cho 9.

Nhận xét.

Thậm chí ta chỉ cần tập S gồm 37 điểm là đủ, và đây là giá trị tối ưu nhất có thể.